Ü/248

Janenko, N. N.

EINIGE FRAGEN DER EINBETTUNGSTHEORIE RIEMANNSCHER METRIKEN IN EUKLIDISCHE RÄUME

Deutsche Vollübersetzung aus:

Uspechi matematičeskich nauk. Moskva,
8 (1953), Nr 1(53), S. 21 - 100.

Russ.: **НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ВЛОЖЕНИЯ РИМАНОВЫХ МЕТРИК В ЕВКЛИДОВЫ ПРОСТРАНСТВА**

Nekotorye voprosy teorii vloženija Rimanovych metrik v Evklidovy prostranstva

Übersetzt von

Ottmar Pertschi

(Ottmar Pertschi)
Dipl.-Übersetzer

Der Übersetzer dankt Herrn Dr. E. Teufel und seinen Mitarbeitern am Mathematischen Institut B der Universität Stuttgart für die fachsprachliche Unterstützung.

Stuttgart, den 26. Januar 1982

EINLEITUNG

1. Mit dem vorliegenden Aufsatz ist eine Darlegung der wesentlichen Fakten der Theorie der Flächen *) des mehrdimensionalen Euklidischen Raumes und der Theorie der Einbettung der Riemannschen Mannigfaltigkeiten in Euklidische Räume beabsichtigt.

Diese beiden Probleme hängen eng miteinander zusammen.

Die Mathematik brachte im 19. Jh. den Begriff der mehrdimensionalen metrischen Mannigfaltigkeit auf, dabei in erster Linie diejenigen Mannigfaltigkeiten $U_m = \{u^1, \ldots, u^m\}$, in denen der Abstand zwischen den "unendlich nahen" Punkten u^i, $u^i + du^i$ (Metrik) durch die positiv definite quadratische Form

$$ds^2 = g_{ij}\, du^i\, du^j \qquad (i, j = 1, \ldots, m).$$

vorgegeben wird. Eine solche Mannigfaltigkeit nennt man bekanntlich eine Riemannsche.

Das einfachste Beispiel einer Riemannschen Mannigfaltigkeit ist die zweidimensionale Mannigfaltigkeit U_2 mit der Metrik

$$ds^2 = E(u, v)\, du^2 + 2F(u, v)\, du\, dv + G(u, v)\, dv^2.$$

Bekanntlich wird die Metrik einer beliebigen Fläche V_2 im dreidimensionalen Euklidischen Raum E_3 durch die quadratische positiv definite Form $ds^2 = E(u, v)\, du^2 + 2F(u, v)\, du\, dv + G(u, v)\, dv^2$ vorgegeben, d.h. sie ist eine Riemannsche Metrik.

Umgekehrt kann man für die oben genannte zweidimensionale Riemannsche Metrik eine zweidimensionale Fläche mit dieser Metrik finden. Eine solche Fläche bezeichnen wir als Realisierung der Metrik. [1)]

---

*) Notiz des Übersetzers: Abweichend von der üblichen Terminologie sind unter Flächen stets reguläre Untermannigfaltigkeiten beliebiger Dimension zu verstehen.

1) Der Einfachheit halber sprechen wir in der Einleitung von der Realisierung analytischer Metriken in Form von ana-

Somit wird jede beliebige zweidimensionale Metrik als Metrik einer Fläche V_2 in E_3 realisiert, oder sie läßt, wie wir sagen, die Einbettung in E_3 zu.

Festgehalten sei, daß einige zweidimensionale Metriken U_2 die Einbettung in E_2 zulassen, d.h. daß sie absolut Euklidisch sind. Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür sind, daß die Gaussche Krümmung der Metrik gleich Null ist.

Es ist leicht nachzuweisen, daß auf einer beliebigen m-dimensionalen Mannigfaltigkeit V_m eines n-dimensionalen reellen Euklidischen Raumes eine Riemannsche Mannigfaltigkeit induziert wird.

Die Umkehrung ist jedoch weitaus schwieriger; kann eine beliebige m-dimensionale Riemannsche Metrik $ds^2 = g_{ij}\, du^i du^j$ $(i, j = 1,\ldots,m)$ als m-dimensionale Fläche V_m des Euklidischen Raumes E_N mit einer bestimmten Dimension N realisiert werden ?

Schläfli [1] hat als erster folgendes Theorem aufgestellt :

Eine beliebige m-dimensionale Riemannsche Metrik kann im $E_{\frac{m(m+1)}{2}}$ realisiert werden.

Somit können die Riemannschen Metriken als Metriken der Flächen eines mehrdimensionalen Euklidischen Raumes aufgefaßt werden.

Nach Schläflis Theorem gewährleistet die Dimension $N = \frac{m(m+1)}{2}$ des Raumes E_N die Einbettung einer beliebigen m-dimensionalen Metrik in ihn. Es ist jedoch nicht ausgeschlossen, daß für die jeweilige Metrik U_m auch eine Einbettung in den Raum E_n mit $n < \frac{m(m+1)}{2}$ möglich ist.

Forts. von 1)

lytischen Flächen der Euklidischen Räume. Darüberhinaus wird die Realisierung der Metrik detailliert besprochen.

Für Euklidische Metriken ist z.B. m = n. Folglich kommen wir ganz selbstverständlich zum Begriff der Klasse einer Metrik.

Als Klasse einer m-dimensionalen Metrik bezeichnet man diejenige Zahl q , so daß die Metrik die Einbettung E_{m+q} zuläßt, aber nicht in E_{m+p} $(p < q)$. Aus diesem Blickwinkel können die Euklidischen Räume als Räume der Klasse O eingestuft werden.

Die Bedingungen, daß die Räume euklidisch sind (d.h. Klasse O), wurden ganz zu Beginn der Tensorrechnung ermittelt: damit der Riemannsche Raum euklidisch ist, ist notwendig und hinreichend, daß sein Krümmungstensor $R_{ij,kl}$ verschwindet.

Das einfachste Beispiel für Riemannsche Räume der Klasse 1 sind Räume mit konstanter positiver Krümmung, die als Hypersphären des Euklidischen Raumes realisiert werden. Es ist selbstverständlich, daß zweidimensionale Metriken, die nicht euklidisch sind, ebenfalls Klasse 1 haben.

Das Problem, alle Metriken der Klasse 1 zu klassifizieren, konnte von den Geometern jedoch nur nach knapp einem Jahrhundert Arbeit gelöst werden. Dazu gehören die Arbeiten von Bianchi [2], Sbrana [3], Cartan [4], Weise [5], Thomas [6].

Völlig gelöst werden konnte das Problem durch die Arbeiten der sowjetischen Geometer Rozenson [7, 8, 9] und A. M. Lopšic. 1)

---

1) Lopšics Ergebnisse wurden nicht veröffentlicht, aber auf dem Seminar für Tensor- und Differentialgeometrie an der Staatlichen Moskauer Lomonosov-Universität vorgetragen. Kurze Zusammenfassungen derselben enthalten der Sammelband "30 let sovetskoj matematiki" (30 Jahre sowjetische Mathematik) und ein Aufsatz in P. K. Raševskijs Arbeit "Tenzornaja differencial'naja geometrija" (Tensor-Differentialgeometrie).

2. Die Untersuchung der Metriken U_m der Klasse 1, definitionsgemäß realisierbar, als Hyperflächen V_m des Euklidischen Raumes E_{m+1} führt zu einigen bemerkenswerten Ergebnissen, die die Einbettung mehrdimensionaler Metriken grundsätzlich von der Einbettung zweidimensionaler Metriken unterscheiden.

Bekanntlich ist die Realisierung der zweidimensionalen Metriken der Klasse 1 im zugehörigen Raum E_3 nicht eindeutig. Dies bedeutet, daß die Fläche V_2, die die Metrik realisiert, eine kontinuierliche Verbiegung mit zwei beliebigen Funktionen einer einzigen Varaiblen zuläßt. Ausnahmen sind nur Flächen mit Flachpunkten, die zum ersten Mal von N. V. Efimov untersucht wurden [10]. < Voss, Enzyklopädie III,3 >

Somit bestimmt die Metrik der Fläche nicht die Fläche. Im Unterschied dazu besitzt eine m-dimensionale Metrik ($m \geqslant 3$) der Klasse 1 im allgemeinen eine eindeutige Einbettung in E_{m+1}, d.h. alle Realisierungen der Metrik stimmen genau bis auf Bewegungen überein. Dies bedeutet, daß die Hyperfläche $V_m \subset E_{m+1}$ im allgemeinen in E_{m+1} nicht verbiegbar ist. Im mehrdimensionalen Fall bestimmt somit die Metrik in der Regel die Hyperfläche; die verbiegbaren Hyperflächen stellen eine kleine Klasse von Hyperflächen dar.

Ein notwendiges, jedoch bei weitem nicht hinreichendes Merkmal der verbiegbaren Hyperflächen ist folgende Forderung (siehe [11]): der Rang der Fläche liegt nicht über 2 (der Rang ist die Anzahl der Parameter, von denen die Tangentialebene der Fläche abhängt).

Außerdem kann es vorkommen, daß die Realisierung einer Metrik der Klasse 1 nicht eindeutig ist, weil mehrere diskrete Möglichkeiten der Realisierung vorhanden sind, d.h. z.B. es gibt genau zwei Realisierungen als Hyperflächen, die nicht bewegungskongruent sind.

Wenn beide Realisierungen einander angenähert werden, erhalten wir im Grenzfall einen Fall, wo die Einbettung eindeutig ist, aber die realisierende Fläche läßt eine unendlich geringe Verbiegung zu.

Schließlich kann die Metrik der Klasse 1 als Schar von Hyperflächen realisiert werden, die von einem Parameter oder von einer Funktion einer Variablen oder von zwei Funktionen einer Variablen abhängen.

Im Unterschied zum dreidimensionalen Raum läßt somit die Einbettung der Metrik im mehrdimensionalen Fall eine bestimmte Fallunterscheidung zu.

3. Die Eigenschaft der Nichtverbiegbarkeit besitzen nicht nur die Hyperflächen $V_{n-1} \subset E_n$, sondern auch die Flächen $V_{n-p} \subset E_n$ ($p > 1$).

Allendörfer [12] formulierte folgendes Theorem :

Die Flächen $V_{n-p} \subset E_n$ des Typs $t > 2$ sind nicht verbiegbar.

Der Typ ist eine Invariante der Fläche, die ziemlich schwierig zu bestimmen ist. Bei der Hyperfläche stimmt der Typ mit dem Rang überein.

Dem Verfasser der Arbeit [13] gelang eine geometrische Charakterisiierung des Typs für Flächen $V_{n-2} \subset E_n$ (Flächen mit zwei Normalen). Die Fläche $V_{n-2} \subset E_n$ hat den Typ t, wenn sie die Alternative erfüllt :

1) V_{n-2} ist eine Fläche des Rangs $2t$ oder $2t + 1$;
2) V_{n-2} ist Untermannigfaltigkeit der Hyperfläche V_{n-1} des Rangs t.

4. Die Klassifizierung der verbiegbareb Flächen führt in fast allen Unterfällen zu projektiv invarianten Flächenklassen. Diese bemerkenswerte Tatsache hängt eng mit der projektiven Invarianz der Klasse der nicht starren Flächen zusammen (siehe [14,15]).

Angemerkt sei, daß die projektive Invarianz des Feldes einer unendlich geringen Verbiegung im dreidimensionalen Fall bereits Darboux [16] bekannt war.

Die Invarianten der Fläche - Rang und Typ -, die hauptsächlich die Art der Einbettung der Fläche bestimmen, sind gleichzeitig die metrischen und projektiven Invarianten der Fläche. Bei der Einbettung mehrdimensionaler Flächen wirkt sich somit noch einmal die universelle Rolle der projektiven Begriffe in geometrischen Untersuchungen aus.

5. Ein anderer wesentlicher Unterschied bei der Einbettung von Flächen im mehrdimensionalen Fall besteht in der algebraischen Abhängigkeit der Bedingungen von Gauss und Peterson-Codazzi.

Bekanntlich bestimmen die zwei quadratischen Formen $\mathrm{I} = g_{ij}\, du^i\, du^j$, $\mathrm{II} = a_{ij}\, du^i\, du^j$ $(i, j = 1, 2)$, von denen die erste positiv definit ist, die Fläche V_2 in E_3, für die I, II jeweils erste und zweite quadratische Form sind, wenn die Koeffizienten dieser Formen die Bedingungen von Gauss und Peterson-Codazzi erfüllen.

Somit läßt sich die Aufgabe der Einbettung der zweidimensionalen Metrik $g_{ij}\, du^i\, du^j$ in E_3 auf das Auffinden der quadratischen Form $a_{ij}\, du^i\, du^j$ reduzieren, deren Koeffizienten a_{ij} die Bedingungen von Gauss und Peterson-Codazzi erfüllen.

Analog läßt sich die Aufgabe auch für die Metriken der Klasse 1 stellen.

Die Metrik $ds^2 = g_{ij}\, du^i\, du^j$ $(i,j = 1,\ldots,m)$ besitzt die Klasse 1, wenn man eine quadratische Form $a_{ij}\, du^i\, du^j$ $(i,j = 1,\ldots,m)$ finden kann, die bestimmte Integrierbarkeitsbedingungen erfüllt, welche analog zum dreidimensionalen Fall in die Bedingungen von Gauss und Peterson-Codazzi unterteilt sind.

Es zeigt sich, daß für die Metriken der Klasse 1 im Allgemeinfall die Peterson-Codazzi-Bedingungen algebraisch aus den Gausschen Bedingungen folgen (siehe [6]).

Somit lassen sich die Bedingungen der Einbettung einer m-dimensionalen Metrik in E_{m+1} im Allgemeinfall auf rein algebraische Bedingungen für die Komponenten des Riemann-Christoffelschen Tensors reduzieren.

6. In der gesamten Arbeit wird der Apparart der alternierenden Differentialformen benutzt. Dieser Apparat wird von S. P. Finikovs Schule erfolgreich bei der Untersuchung verschiedenster Probleme, hauptsächlich der dreidimensionalen Geometrie, eingesetzt.

In der mehrdimensionalen Differentialgeometrie wird bislang noch die Tensordarlegung vorgezogen.

Der Apparat der äußeren Formen stellt sich in keinen Gegensatz zum Tensorapparat, wie auch z.B. die Vektoranalysis keinen Gegensatz zur Koordinatenanalysis darstellt. Verglichen mit dem Tensorapparat besitzt er jedoch gleichzeitig einige Vorzüge. Dies ist erstens die kompaktere Schreibweise, die man immer zur Tensorschreibweise entwickeln kann, und zweitens, was bedeutender ist, die Verwendung des nichtholonomen Beines. Die größere Wahlmöglichkeit des Beines erleichtert in vielem die Lösung geometrischer Aufgaben. [1)]

Schließlich ist der Apparat der äußeren Differentialformen, der aus den Erfordernissen der Theorie der partiellen Differentialgleichungen entstanden ist, am geeignetsten, um die Verträglichkeit von partiellen Differential-Gleichungssystemen zu untersuchen.

Die Hauptoperation dieses Apparates - das äußere Differenzieren - hängt direkt mit dem Auffinden der Integrierbarkeitsbedingungen zusammen.

Der Verfasser greift niemals auf die Theorie der Involutionssysteme zurück, um die Differentialuntersuchung auf ein klares Auffinden eines völlig integrierbaren Systems zurückzuführen.

---

1) In der Tensor-Differentialgeometrie werden ebenfalls nichtholonome Beine betrachtet (siehe z.B. [19], S. 121-174). Jedoch ist die Verwendung des nichtholonomen Beines in der Tensoranalysis mit beträchtlich größeren algebraischen Schwierigkeiten verbunden als beim Verfahren der äußeren Formen.

§ 1. Vorläufiges aus der Theorie der alternierenden (schiefsymmetrischen) Formen

1. Wir untersuchen im m-dimensionalen Vektorraum S_m die reellwertige Funktion

$$\Phi = \Phi(\xi_1, \ldots, \xi_q) \tag{1.1}$$

von q unabhängigen Variablen $\xi_1, \ldots, \xi_q \in S_m$.

Definition 1. Die Funktion $\Phi(\xi_1, \ldots, \xi_q)$ heißt q-lineare Form (oder einfach q-Form), wenn sie von jedem Element ξ_s (homogen) linear abhängt, sofern die übrigen ξ_t $(t \neq s)$ festgehalten werden.

Nach Definition bedeutet dies, daß gilt:

$$\Phi(\xi_1, \ldots, \xi_s + \eta_s, \ldots, \xi_q) = \Phi(\xi_1, \ldots, \xi_s, \ldots, \xi_q) + \Phi(\xi_1, \ldots, \eta_s, \ldots, \xi_q), \tag{1.2}$$

$$\Phi(\xi_1, \ldots, \lambda\xi_s, \ldots, \xi_q) = \lambda\Phi(\xi_1, \ldots, \xi_q). \tag{1.3}$$

Die Zahl q heißt Grad oder Dimension der Form. Im Spezialfall q = 1 erhalten wir die lineare Form $\varphi(\xi)$.

Man kann leicht erkennen, daß die Gesamtheit aller linearen Formen der Variablen $\xi_1, \ldots, \xi_q \in S_m$ selbst einen linearen Raum bilden. Dies folgt leicht aus der Tatsache:

Wenn Φ_1 und Φ_2 q-lineare Formen sind, dann ist $\lambda\Phi_1 + \mu\Phi_2$ auch eine q-lineare Form.

Insbesondere kann unschwer aufgezeigt werden, daß die Gesamtheit aller linearen Formen einen linearen Raum $\mathcal{E}_m$ mit der Dimension m bildet.

Man kann leicht erkennen: wenn die q-Form $\Phi(\xi_1, \ldots, \xi_q)$ für alle Vektor-q-Tupel $e_{i_1}, \ldots, e_{i_q}$ aus Elementen einer Basis $(e_1, \ldots, e_m)$ des Raumes S_m gegeben ist, dann ist sie im gesamten Raum bestimmt. Verwenden wir nämlich die Eigenschaften (1.1),(1.2) erhalten wir tatsächlich:

$$\begin{aligned}\Phi(\xi_1, \ldots, \xi_q) &= \Phi(\xi_1^{\alpha_1} e_{\alpha_1}, \ldots, \xi_q^{\alpha_q} e_{\alpha_q}) = \\ &= a_{\alpha_1 \ldots \alpha_q} \xi_1^{\alpha_1} \ldots \xi_q^{\alpha_q}; \quad \alpha_1, \ldots, \alpha_q = 1, \ldots, m,\end{aligned} \tag{1.4}$$

wobei

$$\begin{aligned}\xi_s &= \xi_s^{\alpha} e_{\alpha}; \quad s = 1, \ldots, q, \quad \alpha = 1, \ldots, m, \\ a_{\alpha_1 \ldots \alpha_q} &= \Phi(e_{\alpha_1}, \ldots, e_{\alpha_q}), \quad \alpha_1, \ldots, \alpha_q = 1, \ldots, m,\end{aligned} \tag{1.5}$$

in (1.4) ist über alle Indizes $\alpha_1, \ldots, \alpha_q$ zu summieren.[1)]
Somit ist die q-Form $\Phi(\xi_1, \ldots, \xi_q)$ linear in jeder der Variablen $\xi_1^{\alpha_1}, \ldots, \xi_q^{\alpha_q}$, d.h. der Koordinaten der Vektoren $\xi_1, \ldots, \xi_q$.
Ist umgekehrt Φ eine Funktion in den Variablen ξ_s^{α} $(s=1, \ldots, q,$ $\alpha=1, \ldots, m)$

$$\Phi = a_{\alpha_1 \ldots \alpha_q} \xi_1^{\alpha_1} \ldots \xi_q^{\alpha_q}, \tag{1.6}$$

die linear bezüglich jeder Variablen ξ_s^{α} ist, so ist Φ eine q-Form im oben bestimmten Sinn, wenn man die ξ_s^{α} als Koordinaten von Vektoren $\xi_1, \ldots, \xi_q$ des Vektorraums S_m interpretiert. Den Ausdruck (1.4) nennen wir Koordinaten-Schreibweise der Form Φ. Insbesondere läßt sich die lineare Form φ darstellen als:

$$\varphi(\xi) = a_i \xi^i. \tag{1.7}$$

Bemerkt sei, daß die Form Φ durch Definition 1 koordinateninvariant definiert wird als Funktion von q Vektoren $\xi_1, \ldots, \xi_q$. Folglich werden bei Transformation der Basis $e_1, \ldots, e_m$ des Raumes S_m nach dem Gesetz

$$\bar{e}_\alpha = A_\alpha^\beta e_\beta, \quad \alpha, \beta = 1, \ldots, m, \tag{1.8}$$

die Koeffizienten $a_{\alpha_1 \ldots \alpha_q}$ nach dem Gesetz

$$\bar{a}_{\alpha_1 \ldots \alpha_q} = A_{\alpha_1}^{\beta_1} \ldots A_{\alpha_q}^{\beta_q} a_{\beta_1 \ldots \beta_q}, \quad \alpha_s, \beta_s = 1, \ldots, m. \tag{1.9}$$

transformiert.

Auf diese Weise ergeben sich die Koeffizienten $a_{\alpha_1 \ldots \alpha_q}$ als die Komponenten eines kovarianten Tensors.

$\varphi^1(\xi), \ldots, \varphi^m(\xi)$ seien m linear unabhängige Formen, die eine Basis des Raumes $\mathscr{E}_m$ aller linearen Formen sind. Die Koordinaten ξ^α des Vektors ξ bestimmen die Werte der Formen $\varphi^1(\xi), \ldots, \varphi^m(\xi)$. Umgekehrt: wenn die Werte der Formen

---

1) Angemerkt sei, daß hier und desweiteren bei der Summation nach allen Indizes $\alpha_1, \ldots, \alpha_q$ das Summenzeichen weggelassen wird, bei der Summation nach Kombinationen $(\alpha_1, \ldots, \alpha_q)$ schreiben wir $\sum\limits_{(\alpha)}$ oder $\sum\limits_{\alpha_1 > \alpha_2 \ldots > \alpha_q}$.

$\varphi^1(\xi), \ldots, \varphi^m(\xi)$ gegeben sind, sind der Vektor ξ und dadurch seine Koordinaten ξ^α vollständig bestimmt. Folglich können die Formen $\varphi^1(\xi), \ldots, \varphi^m(\xi)$ einer beliebigen Basis von $\mathcal{E}_m$ als neue unabhängige Variablen gewählt werden, woraus unmittelbar folgt, daß die q-Formen $\Phi(\xi_1, \ldots, \xi_q)$ als lineare Funktionen von q-Tupeln linearer Formen $\varphi^{\alpha_1}(\xi_1), \ldots, \varphi^{\alpha_q}(\xi_q)$ betrachtet werden können. Tatsächlich erhalten wir für die linearen Formen $\varphi'(\xi), \ldots, \varphi^m(\xi)$ einer Basis des $\mathcal{E}_m$

$$\varphi^\alpha(\xi) = a^\alpha_\beta \xi^\beta, \quad \mathrm{Det}\,|a^\alpha_\beta| \neq 0; \quad \alpha, \beta = 1, \ldots, m. \tag{1.10}$$

Dann läßt sich (1.4) folgendermaßen darstellen:

$$\Phi(\xi_1, \ldots, \xi_q) = b_{\alpha_1 \ldots \alpha_q} \varphi^{\alpha_1}(\xi_1) \ldots \varphi^{\alpha_q}(\xi_q), \tag{1.11}$$

wobei

$$\begin{gathered} b_{\alpha_1 \ldots \alpha_q} = b^{\beta_1}_{\alpha_1} \ldots b^{\beta_q}_{\alpha_q} a_{\beta_1 \ldots \beta_q}, \quad \alpha_s, \beta_s = 1, \ldots, m, \\ b^\beta_\alpha a^\gamma_\beta = \delta^\gamma_\alpha \ ^{1)}, \quad \alpha, \beta, \gamma = 1, \ldots, m. \end{gathered} \tag{1.12}$$

Den Ausdruck (1.1) bezeichnen wir als Koordinaten-Darstellung der Form $\Phi(\xi_1, \ldots, \xi_q)$ bezüglich der Basis $\varphi^1, \ldots, \varphi^m$ des Raumes $\mathcal{E}_m$.

2. Wir führen den Begriff der alternierenden Form ein.

Definition 2. Die Form $\Phi = \Phi(\xi_1, \ldots, \xi_q) = a_{\alpha_1 \ldots \alpha_q} \xi_1^{\alpha_1} \ldots \xi_q^{\alpha_q}$ heißt alternierend, wenn gilt

$$\Phi(\xi_1, \ldots, \xi_s, \ldots, \xi_t, \ldots, \xi_q) = -\Phi(\xi_1, \ldots, \xi_t, \ldots, \xi_s, \ldots, \xi_q). \tag{1.13}$$

Damit die Form Φ alternierend ist, ist notwendig und hinreichend, daß der Tensor $a_{\alpha_1 \ldots \alpha_q}$ schiefsymmetrisch ist, d.h. die Relation

$$a_{\alpha_1 \ldots \alpha_s \ldots \alpha_t \ldots \alpha_q} = -a_{\alpha_1 \ldots \alpha_t \ldots \alpha_s \ldots \alpha_q} \tag{1.14}$$

erfüllt. Zu den alternierenden Formen zählen wir auch die linearen Formen (Formen ersten Grades).

---

1) δ^α_β ist das Kroneckersymbol, welches gleich 0 für $\alpha \neq \beta$ und gleich 1 für $\alpha = \beta$ ist. Im weiteren Verlauf kann das Kroneckersymbol auch mit $\delta_{\alpha\beta}$ bezeichnet werden.

$\varphi^1(\xi), \ldots, \varphi^q(\xi)$ seien q linear unabhängige lineare Formen. Die Determinante

$$\Phi(\xi_1, \ldots, \xi_q) = \begin{vmatrix} \varphi^1(\xi_1) & \varphi^1(\xi_2), & \ldots, & \varphi^1(\xi_q) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi^q(\xi_1) & \varphi^q(\xi_2), & \ldots, & \varphi^q(\xi_q) \end{vmatrix} \qquad (1.15)$$

ist offensichtlich eine alternierende q-lineare Form. Wenn wir die Symbole

$$\varepsilon^{\alpha_1, \ldots, \alpha_q}_{\beta_1, \ldots, \beta_q} = \begin{cases} 1, & \text{wenn die Substitution } \begin{pmatrix} \alpha_1, & \ldots, & \alpha_q \\ \beta_1, & \ldots, & \beta_q \end{pmatrix} \text{ eine} \\ & \text{gerade Permutation ist.} \\ 0, & \text{wenn unter den Indizes } \alpha_1, \ldots, \alpha_q \text{ oder} \\ & \beta_1, \ldots, \beta_q \text{ gleiche vorkommen.} \\ -1, & \text{wenn die Substitution } \begin{pmatrix} \alpha_1, & \ldots, & \alpha_q \\ \beta_1, & \ldots, & \beta_q \end{pmatrix} \text{ eine} \\ & \text{ungerade Permutation ist.} \end{cases}$$

$$\varepsilon^{\alpha_1, \ldots, \alpha_q} = \varepsilon^{\alpha_1, \ldots, \alpha_q}_{1, \ldots, q},$$
$$\varepsilon_{\alpha_1, \ldots, \alpha_q} = \varepsilon^{1, \ldots, q}_{\alpha_1, \ldots, \alpha_q},$$
$$(\alpha_s, \beta_s = 1, \ldots, q),$$

einführen, dann erhält die Koordinaten-Darstellung der Determinante $\Phi(\xi_1, \ldots, \xi_q)$ der Basis $\varphi^1, \ldots, \varphi^m$ die Gestalt:

$$\Phi(\xi_1, \ldots, \xi_q) = \varepsilon_{\alpha_1 \ldots \alpha_q} \varphi^{\alpha_1}(\xi_1) \ldots \varphi^{\alpha_q}(\xi_q) \qquad (1.16)$$

Die Determinante (1.16) bezeichnen wir folgendermaßen:

$$\Phi(\xi_1, \ldots, \xi_q) = [\varphi^1 \ldots \varphi^q]. \qquad (1.17)$$

Wir führen jetzt den wichtigen Begriff der einfachen Form ein.

Definition 3. Die alternierende q-Form $\Phi(\xi_1, \ldots, \xi_q)$ heißt einfach, wenn es q-lineare Formen $\varphi^1, \ldots, \varphi^q$ gibt, so daß gilt:

$$\Phi(\xi_1, \ldots, \xi_q) = [\varphi^1 \ldots \varphi^q]. \qquad (1.18)$$

3. Wir zeigen, daß eine beliebige alternierende q-Form $\Phi(\xi_1 \dots \xi_q)$ nach den einfachen q-Formen $[\varphi^{\alpha_1} \dots \varphi^{\alpha_q}]$ $(\alpha_1 > \alpha_2 > \dots > \alpha_q,$ $\alpha_s = 1, \dots, m)$, entwickelt werden kann, wenn die $\varphi^1(\xi), \dots, \varphi^m(\xi)$ eine Basis von $\mathcal{E}_m$ sind; d.h. daß sie folgendermaßen dargestellt werden kann

$$\Phi = \sum_{\alpha_1 > \alpha_2 > \dots > \alpha_q} \lambda_{\alpha_1 \dots \alpha_q} [\varphi^{\alpha_1} \dots \varphi^{\alpha_q}] = \sum_{(\alpha)} \lambda_{\alpha_1 \dots \alpha_q} [\varphi^{\alpha_1} \dots \varphi^{\alpha_q}] \qquad (1.19)$$

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_q = 1, \dots, m).$$

es sei nämlich

$$\Phi = \lambda_{\alpha_1 \dots \alpha_q} \varphi^{\alpha_1}(\xi_1) \dots \varphi^{\alpha_q}(\xi_q) \qquad (1.20)$$

die Koordinatendarstellung der Form Φ bezüglich der Basis $\varphi^1, \dots, \varphi^m$. Aufgrund der Schief-Symmetrie des Tensors $\lambda_{\alpha_1 \dots \alpha_q}$ kann man schreiben

$$\Phi = \sum_{(\alpha)} \lambda_{\alpha_1 \dots \alpha_q} \varepsilon^{\alpha_1 \dots \alpha_q}_{\beta_1 \dots \beta_q} \varphi^{\beta_1}(\xi_1) \dots \varphi^{\beta_q}(\xi_q), \qquad (1.21)$$

wobei die Indizes $\beta_1, \dots, \beta_q$ bei festen $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_q)$ sämtliche Permutationen von α durchlaufen. Wir beachten Gleichung (1.16) und erhalten:

$$\varepsilon^{\alpha_1 \dots \alpha_q}_{\beta_1 \dots \beta_q} \varphi^{\beta_1}(\xi_1) \dots \varphi^{\beta_q}(\xi_q) = [\varphi^{\alpha_1} \dots \varphi^{\alpha_q}]. \qquad (1.22)$$

Hieraus folgt

$$\Phi = \sum_{\alpha_1 > \dots > \alpha_q} \lambda_{\alpha_1 \dots \alpha_q} [\varphi^{\alpha_1} \dots \varphi^{\alpha_q}]. \qquad (1.23)$$

q.e.d.

Es ist klar, daß die Menge aller alternierenden q-Formen einen Vektorraum $\mathcal{E}_N$ bildet. Wie bewiesen, bilden die einfachen q-Formen $[\varphi^{\alpha_1} \dots \varphi^{\alpha_q}]$, $\alpha_1, \dots, \alpha_q = 1, \dots, m$, ein Erzeugendensystem von $\mathcal{E}_m$, wobei $\varphi^1, \dots, \varphi^m$, eine Basis von $\mathcal{E}_N$ ist. Im weiteren Verlauf werden wir beweisen, daß dieses Erzeugendensystem minimal ist, d.h. die Entwicklung der Form Φ nach $[\varphi^{\alpha_1} \dots \varphi^{\alpha_q}]$ ist eindeutig.

4. Wir führen den Begriff des äußeren Produkts alternierender Formen ein.

Als äußeres Produkt $\Theta_{p+q}=[\Omega_p\Phi_q]$ zweier beliebiger alternierender Formen Ω_p, Φ_q vom jeweiligen Grade p und q bezeichnen wir eine gewisse alternierende Form vom Grad p + q, die nach einem bestimmten Gesetz gebildet wird. Ohne dieses Gesetz vorerst zu definieren, fordern wir von vorn herein die Distributivität des Produkts:

$$\begin{gathered}[\lambda\Omega+\mu\Phi;\ \Theta]=\lambda[\Omega\Theta]+\mu[\Phi\Theta],\\ [\Theta;\ \lambda\Omega+\mu\Phi]=\lambda[\Theta\Omega]+\mu[\Theta\Phi].\end{gathered} \tag{1.24}$$

Da eine beliebige alternierende Form als Summe einfacher alternierender Formen dargestellt werden kann, ist es hinreichend, das Produkt für einfache Formen festzulegen, um dann eineindeutig das Produkt beliebiger alternierender Formen bestimmen zu können. Per Definition bezeichnen wir als Produkt der einfachen alternierenden Formen $[\varphi^1 \dots \varphi^p]\ [\psi^1 \dots \psi^q]$ die Form

$$[[\varphi^1 \dots \varphi^p]\,[\psi^1 \dots \psi^q]]=[\varphi^1 \dots \varphi^p\psi^1 \dots \psi^q]. \tag{1.25}$$

Es ist klar, daß das Produkt der einfachen Formen die Eigenschaft der Assoziativität besitzt, d.h. wenn Ω_1, Ω_2, Ω_3 drei einfache Formen sind, dann ist

$$[[\Omega_1\Omega_2]\,\Omega_3]=[\Omega_1\,[\Omega_2\Omega_3]]. \tag{1.26}$$

Somit können wir für das Produkt einer beliebigen Zahl einfacher alternierender Formen $\Omega_1, \dots, \Omega_p$ das Symbol

$$[\Omega_1 \dots \Omega_p]=[\Omega_1\,[\Omega_2 \dots \Omega_p]]=\dots=[[\Omega_1 \dots \Omega_{p-1}]\,\Omega_p]\ ^{1)}. \tag{1.27}$$

einführen. Im einzelnen ist $[\varphi^1 \dots \varphi^p]$ das äußere Produkt der linearen Formen $\varphi^1, \dots \varphi^p$. Wir benutzen die Eigenschaft der Distributivität und erkennen, daß das äußere Produkt die Eigenschaft der Assoziativität besitzt.

---

1) Angemerkt sei, daß es in der mathematischen Literatur zwei Definitionen für das äußere Produkt gibt, die sich durch den Normierungsfaktor unterscheiden. In den Untersuchungen, die die ω-Symbolik (Cartansches Kalkül) verwenden, wird das Produkt der linearen Formen $\omega^1, \dots, \omega^p$ bestimmt als Determinante

5. Wir stellen einige Eigenschaften äußerer Produkte auf. Für die einfache Form $\Phi = [\varphi^1 \ldots \varphi^p]$ gilt offensichtlich die Relation

$$\Phi = [\varphi^1 \ldots \varphi^p] = \varepsilon^{\alpha_1, \ldots, \alpha_p} [\varphi^{\alpha_1} \ldots \varphi^{\alpha_p}] \tag{1.28}$$

(nach $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ wird nicht summiert),

wobei $(\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$ eine beliebige Permutation aus 1,...,p ist. Gleichung (1.28) drückt die bekannte Eigenschaft der Determinante aus, das Vorzeichen bei der Permutation von Zeilen und Spalten zu wechseln. Wenn

$$\Phi_p = [\varphi^1 \ldots \varphi^p], \qquad \Omega_q = [\psi^1 \ldots \psi^q],$$

dann ist

$$[\Phi_p \Omega_q] = (-1)^{p+q} [\Omega_q \Phi_p]. \tag{1.29}$$

Dies geht leicht aus der obigen Eigenschaft des äußeren Produkts hervor. Aufgrund der Distributivität ist die Eigenschaft (1.29) für das äußere Produkt beliebiger alternierender Formen gültig.

Aus den bekannten Eigenschaften der Determinante folgt weiter, daß

$$[\varphi^1 \ldots \varphi^p] = 0, \tag{1.30}$$

wenn die Formen $\varphi^1, \ldots \varphi^p$ linear abhängig sind.

Wir verwenden die Eigenschaft der Distributivität des äußeren Produkts und können das Multiplikationsgesetz der

---

Forts. von 1)

$$[\omega^1 \ldots \omega^p] = \Delta = \begin{vmatrix} \omega^1(\xi_1), \ldots, \omega^p(\xi_1) \\ \omega^1(\xi_p), \ldots, \omega^p(\xi_p) \end{vmatrix}.$$

In den Untersuchungen, die die übliche Symbolik der Tensoralgebra verwenden wird

$$[\omega^1 \ldots \omega^p] = \frac{1}{p!} \Delta.$$

angenommen. Dementsprechend ändert sich auch die Definition des äußeren Produkts sowie der äußeren Ableitung (siehe § 2). Wir halten uns an die erste Definition.

alternierenden Formen unabhängig von ihrer Entwicklung nach den einfachen Formen bestimmen und dadurch gleichzeitig seine Wohldefiniertheit zeigen.

$\Phi_p = [\varphi^1 \ldots \varphi^p]$, $\quad \Omega_q = [\varphi^{p+1} \ldots \varphi^{p+q}]$ seien zwei einfache Formen. Dann ist

$$\Theta_{p+q}(\xi_1, \ldots, \xi_{p+q}) = [\Phi_p \Omega_q] = [\varphi^1(\xi_1) \ldots \varphi^p(\xi_p)\varphi^{p+1}(\xi_{p+1}) \ldots \varphi^{p+q}(\xi_{p+q})] = \\ = [\varphi^1 \ldots \varphi^{p+q}].$$

Wir verwenden den Laplaceschen Entwicklungssatz und erhalten:

$$\begin{aligned}\Theta_{p+q}(\xi_1, \ldots, \xi_{p+q}) &= (-1)^{\frac{p(p+1)}{2}} \sum (-1)^{i_1+\cdots+i_p} [\varphi^1(\xi_{i_1}) \ldots \varphi^p(\xi_{i_p})] \times \\ &\quad \times [\varphi^{p+1}(\xi_{i_{p+1}}) \ldots \varphi^{p+q}(\xi_{i_{p+q}})] = \\ &= (-1)^{\frac{p(p+1)}{2}} \sum (-1)^{i_1+\cdots+i_p} \Phi_p(\xi_{i_1}, \ldots, \xi_{i_p})\, \Omega_q(\xi_{i_{p+1}}, \ldots, \xi_{i_{p+q}}),\end{aligned} \tag{1.31}$$

wobei die Summierung nach den komplementären Kombinationen $(i_1 < i_2 \ldots < i_p)$; $(i_{p+1} < i_{p+2} < \ldots < i_{p+q})$ erfolgt. Aufgrund der Distributivität gilt die Gleichung (1.31) auch für zwei beliebige alternierende Formen $\Phi_p(\xi_1, \ldots, \xi_p)$, $\Omega_q(\xi_{p+1}, \ldots, \xi_{p+q})$.

Wenn Ω_q eine lineare Form $\varphi(\xi)$ ist, dann erhalten wir insbesondere nach einer Zeile entwickelt,

$$[\Phi_p(\xi_1, \ldots, \xi_p)\varphi(\xi)] = \Phi_p(\xi_1, \ldots, \xi_p)\varphi(\xi) - \Phi_p(\xi_1, \ldots, \xi_{p-1}\,\xi)\varphi(\xi_p) + \ldots \\ \ldots + (-1)^p \Phi_p(\xi, \xi_2 \ldots \xi_p)\varphi(\xi_1). \tag{1.32}$$

Wir beweisen folgende wichtige Eigenschaft des äußeren Produkts der linearen Formen.

<u>Theorem 1.</u> Damit die linearen Formen $\varphi^1, \ldots, \varphi^p$ linear unabhängig sind, ist notwendig und hinreichend, daß

$$[\varphi^1\varphi^2 \ldots \varphi^p] \not\equiv 0. \tag{1.33}$$

Beweis. Die Notwendigkeit ist offensichtlich (vgl. Gleichung (1.30)). Wir beweisen, daß die Gleichung (1.33) hinreichend ist. Wir nehmen an, daß das äußere Produkt gewisser p-r Formen, z.B. $\varphi^1, \varphi^2, \ldots, \varphi^{p-r}$ von Null verschieden ist, und daß das äußere Produkt von je p-r+1 der gegebenen Formen stets gleich Null ist. Indem wir die Determinante $[\varphi^1, \ldots, \varphi^{p-r}\varphi^{p-r+1}]$

nach den Elementen der letzten Spalte entwickeln (siehe (1.32)), erhalten wir dann

$$\begin{aligned}[\varphi^1(\xi_1)\dots\varphi^{p-r}(\xi_{p-r})\varphi^{p-r+1}(\xi_{p-r+1})] &= [\varphi^1(\xi_1)\dots\varphi^{p-r}(\xi_{p-r})]\,\varphi^{p-r+1}(\xi_{p-r+1})-\\ &-[\varphi^1(\xi_1)\dots\varphi^{p-r+1}(\xi_{p-r})]\,\varphi^{p-r}(\xi_{p-r+1})+\dots\\ &\dots+(-1)^p[\varphi^2(\xi_1)\dots\varphi^{p-r+1}(\xi_{p-r})]\,\varphi^1(\xi_{p-r+1})=0. \end{aligned}\tag{1.34}$$

Nun wählen wir $\xi_1,\dots,\xi_{p-r}$, so daß $[\varphi^1\varphi^2\dots\varphi^{p-r}]=A_{p-r+1}\neq 0$, lassen ξ_{p-r+1} beliebig und erhalten

$$A_1\varphi^1(\xi)+,\dots,+A_{p-r+1}\varphi^{p-r+1}(\xi)=0.\tag{1.35}$$

Damit ist die lineare Abhängigkeit der Formen $\varphi^1,\dots,\varphi^{p-r+1}$, und damit auch der Formen $\varphi^1,\dots,\varphi^p$ bewiesen.

Es sei noch folgende Eigenschaft des äußeren Produkts erwähnt.

Wenn $\{\psi^1,\dots,\psi^q\}$, $\{\varphi^1,\dots,\varphi^q\}$ zwei Mengen linearer Formen sind, deren lineare Hüllen übereinstimmen, dann ist

$$[\varphi^1\dots\varphi^q]=\mathrm{Det}\,|a^i_j|\,[\psi^1\dots\psi^q],\tag{1.36}$$

wobei

$$\varphi^i=a^i_j\psi^j\qquad(i,j=1,\dots,q).\tag{1.37}$$

Dies folgt aus bekannten Eigenschaften der Determinante. Hieraus folgt unmittelbar, daß sich alle alternierenden m-Formen $\Phi(\xi_1,\dots,\xi_m)$, über dem m-dimensionalen Raum S_m nur durch einen Faktor unterscheiden.

6. Wir beweisen nun die Eindeutigkeit der Entwicklung einer beliebigen alternierenden q-Form nach einfachen q-Formen.

Theorem 2. (Eindeutigkeitstheorem). Eine beliebige alternierende q-Form $\Phi(\xi_1,\dots,\xi_q)$ ist eindeutig als Linearkombination der einfachen q-Formen $[\varphi^{\alpha_1}\dots\varphi^{\alpha_q}]$ darstellbar.

Beweis. Die Möglichkeit einer solchen Darstellung wurde oben aufgezeigt (vgl. Gleichung (1.23)). Wir beweisen die Eindeutigkeit. Es sei

$$\Phi(\xi_1,\dots,\xi_q)=\sum_{\alpha_1>\dots>\alpha_q}\lambda_{\alpha_1\dots\alpha_q}[\varphi^{\alpha_1}\dots\varphi^{\alpha_q}],\quad \alpha_s=1,\dots,m.\tag{1.38}$$

Wir fixieren eine gewisse Kombination $\alpha_1 \dots \alpha_q$. $\alpha_{q+1}, \dots, \alpha_m$ sei eine dazu komplementäre Kombination. Wir multiplizieren Gleichung (1.38) äußerlich mit $[\varphi^{\alpha_{q+1}} \dots \varphi^{\alpha_m}]$, dann verschwinden auf der rechten Seite alle Glieder außer

$$\lambda_{\alpha_1 \dots \alpha_q}[\varphi^{\alpha_1} \dots \varphi^{\alpha_q}\varphi^{\alpha_{q+1}} \dots \varphi^{\alpha_m}]. \tag{1.39}$$

Hieraus erhalten wir:

$$[\Phi\varphi^{\alpha_{q+1}} \dots \varphi^{\alpha_m}] = \lambda_{\alpha_1 \dots \alpha_q}[\varphi^{\alpha_1} \dots \varphi^{\alpha_q}\varphi^{\alpha_{q+1}} \dots \varphi^{\alpha_m}] \tag{1.40}$$

(nach α wird nicht summiert)

$$\lambda_{\alpha_1 \dots \alpha_q} = \frac{[\Phi\varphi^{\alpha_{q+1}} \dots \varphi^{\alpha_m}]}{[\varphi^{\alpha_1} \dots \varphi^{\alpha_q}\varphi^{\alpha_{q+1}} \dots \varphi^{\alpha_m}]}. \tag{1.41}$$

Da sich die m-Formen $[\Phi\varphi^{\alpha_{q+1}} \dots \varphi^{\alpha_m}]$, $[\varphi^{\alpha_1} \dots \varphi^{\alpha_m}]$ nur durch einen Faktor unterscheiden, erhalten wir für $\lambda_{\alpha_1 \dots \alpha_q}$ eine wohlbestimmte Zahl. Die Eindeutigkeit ist damit bewiesen. Gleichzeitig liegt ein expliziter Ausdruck für die Entwicklungskoeffizienten der Form Φ nach den Formen $[\varphi^{\alpha_1}, \dots, \varphi^{\alpha_q}]$ mit Hilfe äußerer Produkte der Formen Φ, φ^{α} vor.

Das Auffinden des Koeffizienten $\lambda_{\alpha_1 \dots \alpha_q}$ mit Hilfe des genannten Algorithmus der äußeren Multiplikation nennen wir auch eine Projektion der Gleichung (1.38) auf $[\varphi^{\alpha_1} \dots \varphi^{\alpha_q}]$.

7. Wir haben nachgewiesen, daß eine beliebige q-lineare alternierende Form $\Phi(\xi_1, \dots, \xi_q)$ sich nach einfachen q-Formen $[\varphi^{\alpha_1} \dots \varphi^{\alpha_q}]$ entwickeln läßt, die aus der Basis $\{\varphi^1, \dots, \varphi^m\}$ gebildet werden; sie wird dann dargestellt als

$$\Phi = \lambda_{\alpha_1 \dots \alpha_q}\varphi^{\alpha_1}(\xi_1) \dots \varphi^{\alpha_q}(\xi_q) = \sum_{(\alpha)} \lambda_{\alpha_1 \dots \alpha_q}[\varphi^{\alpha_1} \dots \varphi^{\alpha_q}]$$
$$(\alpha_1, \dots, \alpha_q = 1, \dots, m), \tag{1.42}$$

wobei $\lambda_{\alpha_1 \dots \alpha_q}$ ein schiefsymmetrischer Tensor ist.

Wir betrachten alle möglichen Darstellungen von (1.42), die verschiedenen Wahlen der Basis $\varphi^1, \dots, \varphi^m$ entsprechen. Im allgemeinen ist die Möglichkeit nicht ausgeschlossen, daß de facto in (1.42) nur über die Indizes $1, \dots, p$, $p < m$ summiert wird, da die übrigen Koeffizienten $\lambda_{\alpha_1 \dots \alpha_q}$ verschwinden; d.h. die Form Φ läßt eine Entwicklung nach den Formen $\varphi^1, \dots, \varphi^p$, $p < m$ zu.

Definition 4. Wir betrachten alle Entwicklungen der Form Φ in der Gestalt

$$\Phi = \sum_{(\alpha)} a_{\alpha_1 \dots \alpha_q} [\psi^{\alpha_1} \dots \psi^{\alpha_q}], \quad \alpha_1, \dots, \alpha_q = 1, \dots, p \leqslant m. \tag{1.43}$$

Das Minimum der Zahlen p nennen wir den Rang ρ der Form Φ; ein System $\psi^1, \dots, \psi^p$ von Formen, für welche das Minimum p erreicht wird, nennen wir eine Basis der Form Φ und die Hülle der Formen $\psi^1, \dots, \psi^p$ den Raum der Form Φ.

Die Eindeutigkeit des Raumes Φ ist nicht offensichtlich und wird im folgenden aufgezeigt.

Wir wollen vorher einige Begriffe einführen.

Definition 5. Das Assoziierte System der linearen Formen einer gegebenen alternierenden q-Form $\Phi = \Phi(\xi_1, \dots, \xi_q)$ besteht aus dem System der linearen Formen

$$\varphi(\xi) = \Phi(\xi_1^0, \dots, \xi_{q-1}^0, \xi), \tag{1.44}$$

wobei $\xi_1^0, \dots, \xi_{q-1}^0$ beliebige feste Werte von $\xi_1, \dots, \xi_{q-1}$ sind. Diese Definition kann man auch etwas anders formulieren.

Definition 6. Die Form Φ sei durch Zerlegung in einer beliebigen Basis $\varphi^1, \dots, \varphi^m$ des Raumes $\mathcal{E}_m$ vorgegeben:

$$\Phi = a_{\alpha_1 \dots \alpha_q} \varphi^{\alpha_1}(\xi_1) \dots \varphi^{\alpha_q}(\xi_q) = \sum_{(\alpha)}{}' a_{\alpha_1 \dots \alpha_q} [\varphi^{\alpha_1} \dots \varphi^{\alpha_q}], \tag{1.45}$$

wobei der Tensor $a_{\alpha_1 \dots \alpha_q}$ schiefsymmetrisch ist. Dann heißt die lineare Form

$$\psi_{\alpha_1 \dots \alpha_{q-1}}(\xi) = a_{\alpha_1 \dots \alpha_{q-1}, \alpha} \varphi^{\alpha}(\xi) \tag{1.46}$$

eine assoziierte lineare Form von Φ; die Gesamtheit $\{\psi_{\alpha_1 \dots \alpha_{q-1}}\}$ bildet das System der assoziierten Formen.
Die Äquivalenz dieser Definitionen ist leicht zu beweisen.

Wir beweisen die Eindeutigkeit der Hülle U_r des Systems der assoziierten Formen , d.h. seine Unabhängigkeit von der Wahl der Basis $\varphi^1, \dots, \varphi^m$.

Denn es seien $\varphi^1, \dots, \varphi^m$, $\psi^1, \dots, \psi^m$ zwei verschiedene Basen des $\mathcal{E}_m$, die durch die Relation

$$\varphi^{\alpha} = a^{\alpha}_{\beta} \psi^{\beta}, \quad \det |a^{\alpha}_{\beta}| \neq 0 \quad (\alpha, \beta = 1, \dots, m). \tag{1.47}$$

verbunden sind. Die entsprechenden Zerlegungen Φ haben die

Gestalt

$$\Phi = \lambda_{\alpha_1 \ldots \alpha_q} \psi^{\alpha_1}(\xi_1) \ldots \psi^{\alpha_q}(\xi_q),$$
$$\Phi = \mu_{\alpha_1 \ldots \alpha_q} \varphi^{\alpha_1}(\xi_1) \ldots \varphi^{\alpha_q}(\xi_q), \tag{1.48}$$

wobei die schiefsymmetrischen Tensoren $\lambda_{\alpha_1 \ldots \alpha_q}$, $\mu_{\alpha_1 \ldots \alpha_q}$ durch die Relationen

$$\mu_{\alpha_1 \ldots \alpha_q} = A^{\beta_1}_{\alpha_1} \ldots A^{\beta_q}_{\alpha_q} \lambda_{\beta_1 \ldots \beta_q},$$
$$A^{\alpha}_{\beta} a^{\gamma}_{\beta} = \delta^{\alpha}_{\beta} \quad (\alpha, \beta = 1, \ldots, m). \tag{1.49}$$

verbunden sind. $\psi_{\alpha_1 \ldots \alpha_{q-1}} = a_{\alpha_1 \ldots \alpha_{q-1}, \alpha} \psi^{\alpha}$ sei eine assoziierte Form, die der Basis $\psi^1, \ldots, \psi^m$ entspricht, $\varphi_{\alpha_1 \ldots \alpha_{q-1}} = \mu_{\alpha_1 \ldots \alpha_{q-1}, \alpha} \varphi^{\alpha}$ eine assoziierte Form, die der Basis $\varphi^1, \ldots, \varphi^m$ entspricht. Dann ist leicht zu erkennen, daß

$$\varphi_{\alpha_1 \ldots \alpha_{q-1}} = A^{\beta_1}_{\alpha_1} \ldots A^{\beta_{q-1}}_{\alpha_{q-1}} \psi_{\beta_1 \ldots \beta_{q-1}}. \tag{1.50}$$

Somit wird eine beliebige Form $\varphi_{\alpha_1 \ldots \alpha_{q-1}}$ nach den assoziierten Formen $\psi_{\beta_1 \ldots \beta_{q-1}}$ entwickelt und umgekehrt.

Wir beweisen jetzt die Eindeutigkeit des Raumes der Form Φ.

Theorem 3. Der Raum der Form Φ stimmt mit der Hülle des assoziierten Systems von Formen überein und ist somit eindeutig.

Beweis. $\psi^1, \ldots, \psi^\rho$ sei eine Basis der Form $\Phi(\xi_1, \ldots, \xi_q)$. Dann erhalten wir im einzelnen:

$$\Phi(\xi_1, \ldots, \xi_q) = \lambda_{\alpha_1 \ldots \alpha_q} \psi^{\alpha_1}(\xi_1) \ldots \psi^{\alpha_q}(\xi_q), \quad \alpha_1, \ldots, \alpha_q = 1, \ldots, \rho. \tag{1.51}$$

Nach der Definition der Basis ist keine Darstellung

$$\Phi(\xi_1, \ldots, \xi_q) = \mu_{\alpha_1 \ldots \alpha_q} \varphi^{\alpha_1}(\xi_1) \ldots \varphi^{\alpha_q}(\xi_q), \quad \alpha_1, \ldots, \alpha_q = 1 \ldots r < \rho. \tag{1.52}$$

möglich. Es ist klar, daß die Hülle U_r des assoziierten Systems der Formen zum Raum V_ρ gehört, der der Basis $\psi^1, \ldots, \psi^\rho$ entspricht:

$$U_r \subseteq V_\rho, \qquad r \leqslant \rho. \tag{1.53}$$

Wir nehmen an, daß $U_r \subset V_\rho$, $r < \rho$. Durch Transformation der Formen der Basis $\psi^1, \ldots, \psi^\rho$ kann man dazu gelangen, daß $\psi^1, \ldots, \psi^r$ Basisformen der Hülle U_r sind. Die assoziierten Formen haben die Gestalt:

$$\psi_{\alpha_1 \ldots \alpha_{q-1}} = \lambda_{\alpha_1 \ldots \alpha_{q-1} \alpha} \psi^{\alpha} \quad (\alpha_1, \ldots, \alpha_{q-1}, \alpha = 1, \ldots, \rho). \tag{1.54}$$

Aufgrund der Eindeutigkeit der Hülle U_r muß gelten

$$\lambda_{\alpha_1 \ldots \alpha_{q-1} \alpha} = 0 \quad (\alpha = r+1, \ldots, \rho, \; \alpha_1, \ldots, \alpha_q = 1, \ldots, \rho). \tag{1.55}$$

Aus der schiefen Symmetrie der $\lambda_{\alpha_1 \ldots \alpha_q}$ folgt, daß $\lambda_{\alpha_1 \ldots \alpha_q} = 0$, wenn auch nur einer der Indizes α_s größer r ist. Hieraus folgt

$$\Phi = \lambda_{\alpha_1 \ldots \alpha_q} \psi^{\alpha_1}(\xi_1) \ldots \psi^{\alpha_q}(\xi_q) \qquad (\alpha_1, \ldots, \alpha_q = 1, \ldots, r < \rho).$$

Dies ist ein Widerspruch. Somit ist

$$\rho = r \qquad U_r = V_r. \tag{1.56}$$

q.e.d.

8. Nunmehr kann man leicht ein Kriterium für die Einfachheit der alternierenden q-Form aufstellen. Nach der Definition kann eine einfache q-Form $\Phi(\xi_1, \ldots, \xi_q)$ dargestellt werden als

$$\Phi = [\psi^1, \ldots, \psi^q]. \tag{1.57}$$

Hieraus ist sofort offensichtlich, daß die Gesamtheit der Formen $\psi^1, \ldots, \psi^q$ Basis der Form Φ ist. Man sieht leicht, daß umgekehrt das äußere Produkt beliebiger q linear unabhängiger Formen der Basis der einfachen q-Form Φ mit der Form Φ genau bis auf einen Faktor übereinstimmt. Somit kann man die einfache q-Form als eine q-Form erkennen, die eine q-dimensionale Basis besitzt. Die notwendige und hinreichende Bedingung besteht also darin, daß der Rang des assoziierten Linearformen-Systems

$$\varphi_{\alpha_1 \ldots \alpha_{q-1}}(\xi) \qquad (\alpha_1, \ldots, \alpha_q = 1, \ldots, m) \tag{1.58}$$

gleich q ist.

Die notwendige und hinreichende Bedingung kann auch mit dem Begriff des äußeren Produkts ausgedrückt werden. Es gilt nämlich:

Damit die q-Form einfach ist, ist notwendig und hinreichend, daß die äußeren Produkte verschwinden:

$$[\Phi \varphi_{\alpha_1 \ldots \alpha_{q-1}}] = 0.$$

9. Die Begriffe Raum, Basis, Rang, angeschlossenes Linearformen-System werden in natürlicher Weise auf den Fall eines solchen Systems q-linearer alternierender Formen übertragen, bei dem die Grade der Formen unterschiedlich sein können. Die Basis (der Raum) U des Systems $\{\Phi_\alpha\}$ ist nämlich die Vereinigung der Basen (Räume) U_r der Formen Φ_α des Systems; der Rang $\{\Phi_\alpha\}$ ist die Dimension der Basis; das angeschlossene Linearformen-System des Systems $\{\Phi_\alpha\}$ besteht aus denjenigen linearen Formen, die zu irgendeiner Form Φ_α assoziiert sind.

10. Im Falle der alternierenden 2-Form

$$\Omega(\xi_1, \xi_2) = a_{\alpha\beta}\,\xi_1^\alpha \xi_2^\beta = \sum_{(\,)} a_{\alpha\beta}\,[\xi_1^\alpha \xi_2^\beta] \qquad (\alpha, \beta = 1, \ldots, m) \tag{1.59}$$

kann man leicht zeigen, daß der Rang $\Omega(\xi_1, \xi_2)$ gerade ist. Denn der Rang der Form $\Omega(\xi_1, \xi_2)$ ist gleich der Dimension der Hülle der angeschlossenen Linearformen

$$\varphi_\alpha(\xi) = a_{\alpha\beta}\,\xi^\beta \qquad (\alpha, \beta = 1, \ldots, m),$$

oder, was dasselbe ist, gleich dem Rang der quadratischen schiefsymmetrischen Matrix $a_{\alpha\beta}$; dieser Rang ist bekanntlich gerade.

Bei der 2-Form ist eine weitere Vereinfachung der Basisdarstellung der Form Φ möglich.

Theorem 4. Die alternierende 2-Form vom Rang r=2p kann durch geeignete Wahl der Basis $\psi^1 \ldots \psi^{2p}$ folgende Gestalt annehmen:

$$\begin{aligned}\Omega(\xi_1, \xi_2) &= [\psi^1\psi^2] + \ldots + [\psi^{2p-1}\psi^{2p}] = \\ &= \psi^1(\xi_1)\psi^2(\xi_2) - \psi^1(\xi_2)\psi^2(\xi_1) + \ldots + \psi^{2p-1}(\xi_1)\psi^{2p}(\xi_2) - \psi^{2p-1}(\xi_2)\psi^{2p}(\xi_1).\end{aligned} \tag{1.60}$$

Eine solche Gestalt nennen wir kanonisch.

Beweis. Wir betrachten zwei Vektoren ξ_1, ξ_2, so daß

$$\Omega(\xi_1, \xi_2) \neq 0. \tag{1.61}$$

Durch Normierung der Vektoren ξ_1, ξ_2 können wir erreichen, daß

$$\Omega(\xi_1, \xi_2) = 1. \tag{1.62}$$

Wir untersuchen das Gleichungssystem

$$\left.\begin{aligned}\Omega(\xi_1, \xi) &= 0,\\ \Omega(\xi_2, \xi) &= 0.\end{aligned}\right\} \tag{1.63}$$

Es besitzt m − 2 Lösungen von $\xi_3, \dots, \xi_m$ $(m = r = 2p)$, die linear unabhängig zu ξ_1, ξ_2 sind. Wir wählen die Vektoren $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_m$ als neue Basis $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_m$ des Raumes S_m. Dann kann man jeden Vektor ξ als Linearkombination von $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_m$ mit Koeffizienten $\bar{\xi}^\alpha$ schreiben:

$$\xi = \bar{\xi}^\alpha \bar{e}_\alpha. \tag{1.64}$$

Die Variablen $\bar{\xi}^\alpha$ bilden die neue Basis $\varphi^\alpha = \bar{\xi}^\alpha$ des Raumes $\mathcal{E}_{2p}$. In den neuen Variablen hat die Form Ω die Gestalt:

$$\Omega = \sum_{(\alpha)} \bar{a}_{\alpha\beta} [\bar{\xi}^\alpha \bar{\xi}^\beta] = \sum_{(\alpha)} \bar{a}_{\alpha\beta} [\varphi^\alpha \varphi^\beta], \tag{1.65}$$

wobei

$$\bar{a}_{\alpha\beta} = \Omega(\bar{e}_\alpha, \bar{e}_\beta). \tag{1.66}$$

Aufgrund der Gleichungen (1.62),(1.63) erhalten wir:

$$\Omega = [\varphi^1\varphi^2] + \sum_{(\alpha)} a_{\alpha\beta} [\varphi^\alpha \varphi^\beta] = [\varphi^1\varphi^2] + \Omega_1 \qquad (\alpha, \beta > 2), \tag{1.67}$$

wobei die Form Ω_1 nur von den Variablen $\varphi^3 \dots \varphi^m$ abhängt. Analog transformieren wir Ω_1 und erhalten auf diese Weise als Ergebnis:

$$\Omega = [\varphi^1\varphi^2] + \dots + [\theta^{2p-1}\theta^{2p}], \tag{1.68}$$

wobei $\varphi^1, \varphi^2, \dots, \theta^{2p-1}, \theta^{2p}$ lineare Formen sind.

q.e.d.

Aus der kanonischen Darstellung (1.60) der Form $\Omega(\xi_1, \xi_2)$ geht hervor, daß die Form $[\Omega^p]$ eine einfache Form ist:

$$[\Omega^p] = q! \, [\psi^1\psi^2 \dots \psi^{2p-1}\psi^{2p}]. \tag{1.69}$$

Gleichzeitig ist

$$[\Omega^{p+1}] \equiv 0. \tag{1.70}$$

Hieraus folgt, daß der Halbrang $p = \frac{r}{2}$ der alternierenden 2-Form $\Omega(\xi_1, \xi_2)$ eine Zahl ist, die die Forderung

$$\left.\begin{aligned} [\Omega^p] &\neq 0, \\ [\Omega^{p+1}] &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{1.71}$$

erfüllt.

11. Bislang haben wir die q-Formen $\Phi(\xi_1, \dots, \xi_q)$, als im gesamten Raum S_m der Vektoren $\xi_1, \dots, \xi_q$ definiert angesehen. Es ist klar, daß man die Form $\Phi(\xi_1, \dots, \xi_q)$ auch in einem beliebigen Unterraum $S_p \subset S_m$ betrachten kann; dabei bleibt die

gesamte Entwicklung der Theorie gültig, insbesondere das Eindeutigkeitstheorem der Entwicklung der alternierenden q-Form nach einfachen q-Formen.

Der Unterraum S_ρ kann mit Hilfe des Gleichungssystems

$$\varphi^1 = \ldots = \varphi^p = 0 \qquad (p = m - \rho), \tag{1.72}$$

vorgegeben werden, wobei $\varphi^1, \ldots, \varphi^p$ linear unabhängige lineare Formen sind.

Dies bedeutet, daß wir die Form $\Phi(\xi_1, \ldots, \xi_q)$ nur für jene Werte der Variablen $\xi_1^\alpha, \ldots, \xi_q^\alpha$ untersuchen, auf denen die Formen $\varphi^1, \ldots, \varphi^p$ verschwinden. Eine solche Betrachtung nennen wir Betrachtung modulo der Formen $\varphi^1, \ldots, \varphi^p$.

<u>Definition 7</u>. Die Form $\Phi(\xi_1, \ldots, \xi_q)$ ist gleich Null modulo $\varphi^1, \ldots, \varphi^p$, wenn sie im Unterraum $S_\rho \subset S_m (\rho = m - p)$, gleich Null ist, der durch die Gleichungen

$$\varphi^1 = \ldots = \varphi^p = 0.$$

bestimmt wird. Das Verschwinden von Φ modulo $\varphi^1, \ldots, \varphi^p$ bezeichnen wir mit dem Symbol

$$\Phi \equiv 0 \mod \varphi^1, \ldots, \varphi^p. \tag{1.73}$$

Analog kann man die lineare Abhängigkeit der linearen Formen modulo $\varphi^1, \ldots, \varphi^p$ definieren.

Die Formen $\psi^1, \ldots, \psi^m$ heißen linear abhängig modulo $\varphi^1, \ldots, \varphi^p$, wenn es solche Koeffizienten λ_α gibt, die nicht alle gleich Null sind, so daß

$$\lambda_1\psi^1 + \ldots + \lambda_m\psi^m = 0 \mod \varphi^1, \ldots, \varphi^p. \tag{1.74}$$

Wir leiten die algebraische Struktur der alternierenden q-Form her, die modulo $\varphi^1, \ldots, \varphi^p$ verschwindet. Wir untersuchen zuerst den Einzelfall, wo Φ eine lineare Form φ ist. Es gilt:

<u>Lemma 1</u>. $\varphi \equiv 0 \mod \varphi^1, \ldots, \varphi^p$ dann und nur dann, wenn φ zur Hülle $\varphi^1, \ldots, \varphi^p$ gehört, d.h.

$$\varphi = \lambda_1\varphi^1 + \ldots + \lambda_p\varphi^p. \tag{1.75}$$

Denn aus der Gleichung (1.75) folgt unmittelbar

$$\varphi \equiv 0 \mod \varphi^1 \ldots \varphi^p. \tag{1.76}$$

Umgekehrt sei (1.76) erfüllt. Wir nehmen an, daß die Formen $\varphi, \varphi^1, \ldots, \varphi^p$ linear unabhängig sind. Dann bestimmt das Gleichungssystem

$$\varphi \quad \varphi^1 = \ldots = \varphi^p = 0 \tag{1.77}$$

den Unterraum S_{m-p-1}. Andererseits bedeutet die Gleichheit (1.76) nach Definition, daß φ zusammen mit den Formen $\varphi^1, \ldots, \varphi^p$ gleich Null ist im Teilraum $S_{m-p} \supset S_{m-p-1}$, der durch die Gleichungen

$$\varphi^1 = \ldots = \varphi^p = 0.$$

bestimmt wird. Dies ist ein Widerspruch. Folglich gilt

$$\varphi = \lambda_1 \varphi^1 + \ldots + \lambda_p \varphi^p. \tag{1.78}$$

q.e.d.

Folgerung. Wenn $\varphi^1, \ldots, \varphi^p, \varphi^{p+1}, \ldots, \varphi^m$ linear unabhängige Formen sind, dann sind $\varphi^{p+1}, \ldots, \varphi^m$ linear unabhängig mod $\varphi^1, \ldots, \varphi^p$.

Denn wir nehmen an, daß $\varphi^{p+1}, \ldots, \varphi^m$ linear abhängig mod $\varphi^1, \ldots, \varphi^p$, sind, d.h.

$$\varphi = \lambda_{p+1} \varphi^{p+1} + \ldots + \lambda_m \varphi^m = 0 \bmod \varphi^1, \ldots, \varphi^p. \tag{1.79}$$

Nach dem bewiesenen Lemma sind damit die Formen $\varphi, \varphi^1, \ldots, \varphi^p$ linear abhängig. Aber dies widerspricht der Annahme, daß $\varphi^1, \ldots, \varphi^p, \varphi^{p+1}, \ldots, \varphi^m$ linear unabhängig sind. Folglich ist

$$\lambda_{p+1} = \ldots = \lambda_m = 0. \tag{1.80}$$

q.e.d.

Jetzt kann man zum Allgemeinfall der alternierenden q-Form $\Phi(\xi_1, \ldots, \xi_q)$ übergehen, die modulo $\varphi^1, \ldots, \varphi^p$. gleich Null ist. Es gilt:

Theorem 5. Damit die q-Form $\Phi(\xi_1, \ldots, \xi_q)$ gleich Null mod $\varphi^1, \ldots, \varphi^p$ ist, ist notwendig und hinreichend, daß Φ dargestellt ist als

$$\Phi = [\varphi^1 \theta_1] + \ldots + [\varphi^p \theta_p], \tag{1.81}$$

wobei $\theta_1, \ldots, \theta_p$ alternierende Formen vom Grade q-1 sind.

Beweis. Wenn Φ als (1.81) dargestellt wird, dann kann man leicht erkennen, daß

$$\Phi = 0 \bmod \varphi^1, \ldots, \varphi^p. \tag{1.82}$$

Umgekehrt nehmen wir an, daß

$$\Phi = 0 \bmod \varphi^1, \ldots, \varphi^p.$$

Wir ergänzen $\varphi^1, \ldots, \varphi^p$ zu einer Basis $\{\varphi^1, \ldots, \varphi^p \varphi^{p+1}, \ldots, \varphi^m\}$ des Raumes $\mathcal{E}_m$ und entwickeln die Form Φ nach den einfachen q-Formen $[\varphi^{\alpha_1} \ldots \varphi^{\alpha_q}]$ der Basis $\{\varphi^1, \ldots, \varphi^m\}$:

$$\Phi = \sum_{(\alpha)} \lambda_{\alpha_1 \ldots \alpha_q} [\varphi^{\alpha_1} \ldots \varphi^{\alpha_q}] \qquad (\alpha_1, \ldots, \alpha_q = 1, \ldots, m). \tag{1.83}$$

Wir zerlegen die Summe in zwei Teile:

$$\Phi = \sum_{(\alpha)}{}' \lambda_{\alpha_1 \ldots \alpha_q} [\varphi^{\alpha_1} \ldots \varphi^{\alpha_q}] + \sum_{(\alpha)}{}'' \lambda_{\alpha_1 \ldots \alpha_q} [\varphi^{\alpha_1} \ldots \varphi^{\alpha_q}], \tag{1.84}$$

wobei $\sum'$ die Summation nach den Kombinationen $(\alpha_1, \ldots, \alpha_q)$ bedeutet, die wenigstens einen Index $\in \{1,\ldots,p\}$ enthalten, und $\sum''$ die Summation nach allen übrigen Kombinationen. Es ist klar, daß man die Summe $\sum'$ durch Transpositionen der Formen φ^α und durch Umordnung der Klammern darstellen kann als:

$$\sum{}' = [\varphi^1 \theta_1] + \ldots + [\varphi^p \theta_p], \tag{1.85}$$

wobei $\theta_1, \ldots, \theta_p$ gewisse alternierende Formen vom Rang q-1 sind. Wir untersuchen die Gleichheit (1.84) mod $\varphi^1, \ldots, \varphi^p$. Wir erhalten

$$0 \equiv \sum_{(\alpha)}{}'' \lambda_{\alpha_1 \ldots \alpha_q} [\varphi^{\alpha_1} \ldots \varphi^{\alpha_q}] \bmod \varphi^1, \ldots, \varphi^p. \tag{1.86}$$

Da es auf der rechten Seite nur Klammern gibt, die aus den Formen $\varphi^{p+1}, \ldots, \varphi^m$ zusammengesetzt sind, und $\varphi^{p+1}, \ldots, \varphi^m$ linear unabhängig mod $\varphi^1, \ldots, \varphi^p$ sind, ist nach dem Eindeutigkeitstheorem

$$\lambda_{\alpha_1 \ldots \alpha_q} = 0 \qquad \alpha_s > p. \tag{1.87}$$

Hieraus folgt

$$\Phi = [\varphi^1 \theta_1] + \ldots + [\varphi^p \theta_p]. \tag{1.88}$$

q.e.d.

12. Wir haben die algebraische Struktur der alternierenden q-Formen $\Phi(\xi_1, \ldots, \xi_q)$, die mod $\varphi^1, \ldots, \varphi^p$ verschwinden, hergeleitet. Wir wollen jetzt das endgültige Kriterium für das Verschwinden der Form mod $\varphi^1, \ldots, \varphi^p$ angeben.

Theorem 6. Die folgenden Bedingungen sind äquivalent:

A) $\Phi = 0 \bmod \varphi^1, \ldots, \varphi^p,$

B) $\Phi = [\varphi^1\theta_1] + \ldots + [\varphi^p\theta_p],$

C) $[\Phi\varphi^1 \ldots \varphi^p] = 0,$

wobei $\theta_1, \ldots, \theta_p$ gewisse alternierende q-Formen vom Grade q-1 sind.

Beweis. Die Äquivalenz A), B) wurde im vorhergehenden Theorem bewiesen. Wir beweisen die Äquivalenz B) und C). Wir nehmen an, daß B) erfüllt ist. Dann multiplizieren wir die Gleichung B) äußerlich mit $[\varphi^1 \ldots \varphi^p]$, wobei wir verwenden, daß das alternierende Produkt gleich Null ist, wenn zwei gleiche Linearformen vorkommen, und erhalten

$$[\Phi\varphi^1 \ldots \varphi^p] = 0. \tag{1.89}$$

Aus B) folgt somit C). Umgekehrt sei Gleichung C) erfüllt. Wir ergänzen $\varphi^1, \ldots, \varphi^p$ zu einer Basis $\varphi^1, \ldots, \varphi^m$ und entwickeln die Form Φ nach der Basis $\varphi^1, \cdots \varphi^m$. Die Entwicklung hat die Gestalt (siehe Beweis von Theorem 5)

$$\Phi = [\varphi^1\theta_1] + \ldots + [\varphi^p\theta_p] + \sum_{(\alpha)} \lambda_{\alpha_1\ldots\alpha_q} [\varphi^{\alpha_1} \ldots \varphi^{\alpha_q}], \quad \alpha_s > p, \tag{1.90}$$

wobei $\theta_1, \ldots, \theta_p$ gewisse alternierende Formen vom Grade q-1 sind. Wir multiplizieren die Gleichung (1.90) äußerlich mit $\varphi^1, \ldots, \varphi^p$, und erhalten

$$0 = \sum_{(\cdot)} \lambda_{\alpha_1\ldots\alpha_q} [\varphi^1 \ldots \varphi^p\varphi^{\alpha_1} \ldots \varphi^{\alpha_q}], \quad \alpha_s > p. \tag{1.91}$$

Da die Formen $\varphi^1, \ldots, \varphi^p, \varphi^{\alpha_1}, \ldots, \varphi^{\alpha_q}$ linear unabhängig sind, sind die Klammern $[\varphi^1 \cdots \varphi^p\varphi^{\alpha_1} \cdots \varphi^{\alpha_q}]$ nicht gleich Null. Die Kombinationen $(\alpha_1, \ldots, \alpha_q)$ stimmen untereinander paarweise nicht überein, folglich stimmen auch die Kombinationen $(1, \ldots, p, \alpha_1, \ldots, \alpha_q)$ untereinander paarweise nicht überein. Deshalb stellt die Gleichung (1.91) eine Entwicklung von 0 nach den einfachen p+q-Formen dar, die zur Basis $\varphi^1, \ldots, \varphi^m$ gehören. Nach dem Eindeutigkeitstheorem erhalten wir

$$\lambda_{\alpha_1\ldots\alpha_q} = 0, \quad \alpha_s > p. \tag{1.92}$$

somit ist

$$\Phi = [\varphi^1\theta_1] + \ldots + [\varphi^p\theta_p] \tag{1.93}$$

q.e.d.

§ 2. Die äußeren Differentialformen

1. In der Analysis und Differentialgeometrie wird nun eine Untersuchung von q-linearen alternierenden Formen [1] notwendig, deren Koeffizienten von gewissen Parametern $u^1, \ldots, u^m$ abhängen, und deren Variablen die Differentiale $d_1u^\alpha, \ldots, d_qu^\alpha$ $(\alpha = 1 \ldots m)$ sind.

Wir bezeichnen

$$\Omega(d_1, \ldots, d_q) = a_{\alpha_1 \ldots \alpha_q} d_1u^{\alpha_1} \ldots d_qu^{\alpha_q} = \sum_{(\alpha)} a_{\alpha_1 \ldots \alpha_q} [du^{\alpha_1} \ldots du^{\alpha_q}], \tag{2.1}$$

wobei

$$a_{\alpha_1 \ldots \alpha_q} \text{ schiefsymmetrischer Tensor} \tag{2.2}$$

$$[du^{\alpha_1} \ldots du^{\alpha_q}] = \begin{vmatrix} d_1u^{\alpha_1} & \ldots & d_qu^{\alpha_1} \\ d_1u^{\alpha_q} & \ldots & d_qu^{\alpha_q} \end{vmatrix} \quad (\alpha_1, \ldots, \alpha_q = 1, \ldots, m). \tag{2.3}$$

Wenn man von den Variablen $du^1, \ldots, du^m$ zu beliebigen Variablen $\omega^1 \ldots \omega^m$ übergeht, wobei $\omega^\alpha = a^\alpha_\beta(u^1, \ldots, u^m)\, du^\beta$, dann läßt sich die Form Ω darstellen als

$$\Omega = b_{\alpha_1 \ldots \alpha_q} \omega^{\alpha_1}(d_1) \ldots \omega^{\alpha_q}(d_q) = \sum_{(\alpha)} b_{\alpha_1 \ldots \alpha_q} [\omega^{\alpha_1} \ldots \omega^{\alpha_q}], \tag{2.4}$$

$$b_{\alpha_1 \ldots \alpha_q} = b^{\beta_1}_{\alpha_1} \ldots b^{\beta_q}_{\alpha_q} a_{\beta_1 \ldots \beta_q}, \qquad b^\gamma_\alpha a^\beta_\gamma = \delta^\beta_\alpha \quad (\alpha, \beta = 1, \ldots, q). \tag{2.5}$$

Für alternierende Differentialformen ist die genannte Algebra der schiefen Formen anwendbar. Der Bereich der Variablen $u^1, \ldots, u^m$, in dem die Funktionen $a_{\alpha_1 \ldots \alpha_q}(u^1, \ldots, u^m)$ bestimmt sind, nennen wir Definitionsbereich der q-Form Ω.

Im weiteren Verlauf beschränken wir uns auf die Betrachtung der Formen, deren Definitionsbereiche hinreichend kleine einfach zusammenhängende Bereiche und die Koeffizienten $a_{\alpha_1 \ldots \alpha_q}$ zweimal stetig differenzierbare Funktionen der Variablen $u^1, \ldots, u^m$ sind.

Somit besitzen alle formulierten Theoreme lokalen Charakter.

---

[1] Die alternierenden Differentialformen werden manchmal auch äußere Formen genannt.

2. Für die alternierenden Differentialformen kann man eine Differentialoperation einführen, die wieder zu einer alternierenden Differentialform, jedoch nun eine Stufe höher als die Ausgangsstufe, führt.

Definition 1. Äußeres Differntial $D\Phi$ [1] der Form $\Phi(d_1 \ldots d_q) = = \sum_{(\alpha)} a_{\alpha_1 \ldots \alpha_q} [du^{\alpha_1} \ldots du^{\alpha_q}]$ heißt die Form $\Omega(d_1, \ldots, d_q, d)$, die aus Φ nach dem folgenden Gesetz gebildet wird:

$$\Omega = D\Phi = \sum_{(\alpha)} [da_{\alpha_1 \ldots \alpha_q} du^{\alpha_1} \ldots du^{\alpha_q}] \doteq \sum_{(\alpha)} \sum_{i} \frac{\partial a_{\alpha_1 \ldots \alpha_q}}{\partial u^i} [du^i du^{\alpha_1} \ldots du^{\alpha_q}]. \quad (2.6)$$

Wenn Φ lineare Form $\varphi = a_\alpha du^\alpha$ ist, dann hat das äußere Differential $D\varphi$ im einzelnen die Gestalt

$$\Omega = D\varphi = [da_\alpha du^\alpha] = \sum_{\alpha<\beta} \left(\frac{\partial a_\beta}{\partial u^\alpha} - \frac{\partial a_\alpha}{\partial u^\beta} \right) [du^\alpha du^\beta]. \quad (2.7)$$

Das äußere Differential der linearen Form wird auch bilineare Kovariante genannt.

Das äußere Differential der Skalarfunktion $f(u^1, \ldots, u^m)$ (einer nulldimensionalen Form) wird wie das vollständige Differential df bestimmt.

Der Differentialoperator D besitzt folgende Eigenschaften, die denen des gewöhnlichen Differentiationsoperators ähnlich sind:

1) $$D(\Phi_1 + \Phi_2) = D\Phi_1 + D\Phi_2,$$
$$Dc\Phi = cD\Phi,$$

wobei c Konstante ist.

---

1) Neben der Bezeichnung $D\Phi$ für das äußere Differential verwenden wir auch das Zeichen $(\Phi)'$.

Bemerkt sei, daß in der Literatur auch ein anderer Ausdruck für das äußere Differential der Form verwendet wird, der sich von unserem durch einen gewissen numerischen Faktor unterscheidet (siehe z.B. [17]).

Somit ist D linearer Differentialoperator.

2) $$D[\Omega\Phi] = [D\Omega, \Phi] + (-1)^p [\Omega, D\Phi],$$

wobei p der Grad der Form Ω ist.

Da eine beliebige äußere q-Form als Summe einfacher alternierender Differentialformen (Monome) derselben Dimension dargestellt wird (siehe 3. Abschnitt §1), genügt es, aufgrund der Eigenschaft 1) des äußeren Differentials die Eigenschaft 2) für Monome zu beweisen:

$$\Omega = a[du^1 \dots du^p],$$
$$\Phi = b[dv^1 \dots dv^q].$$

Wir erhalten dann tatsächlich

$$[\Omega\Phi] = ab[du^1 \dots du^p dv^1 \dots dv^q],$$

$$\begin{aligned} D[\Omega\Phi] &= [d(ab);\ du^1 \dots du^p dv^1 \dots dv^q] = \\ &= [a\,db + b\,da;\ du^1 \dots du^p dv^1 \dots dv^q] = \\ &= b[da\,du^1 \dots du^p dv^1 \dots dv^q] + a[db\,du^1 \dots du^p dv^1 \dots dv^q] = \\ &= [[da\,du^1 \dots du^p][b\,dv^1 \dots dv^q]] + \\ &\qquad + (-1)^p[[a\,du^1 \dots du^p][db\,dv^1 \dots dv^q]] = \\ &= [D\Omega\Phi] + (-1)^p[\Omega D\Phi], \end{aligned}$$

q.e.d.

Wenn die Form Ω eine Nullform (Skalarfunktion f) ist, erhalten wir insbesondere

$$D[f\Phi] = [Df\,\Phi] + f\,D\Phi = [df\,\Phi] + f\,d\Phi. \tag{2.8}$$

Die Eigenschaft 2) ist ein Analogon der bekannten Produktregel der Differentialrechnung.

Wir leiten schließlich folgende bemerkenswerte Eigenschaft des äußeren Differentials her:

3) $DD\Phi = 0$ für eine beliebige äußere Form

$$\Phi = \sum_{(\alpha)} a_{\alpha_1 \dots \alpha_q}[du^{\alpha_1} \dots du^{\alpha_q}].$$

Aufgrund der Eigenschaft 1) des äußeren Differentials genügt der Beweis für Monome

$$\Phi = a[du^{\alpha_1} \dots du^{\alpha_q}].$$

Wir beweisen die Eigenschaft 3) zunächst für den Spezialfall, wo die Form Φ eine Nullform ist, d.h. Skalarfunktion $f(u^1, \ldots, u^m)$.

In diesem Fall erhalten wir

$$Df = a_\alpha du^\alpha, \quad a_\alpha = \frac{\partial f}{\partial u^\alpha} \quad \alpha = 1, \ldots, m,$$

$$DDf = [da_\alpha du^\alpha] = \sum_{\alpha < \beta} \left(\frac{\partial a_\beta}{\partial u^\alpha} - \frac{\partial a_\alpha}{\partial u^\beta} \right) [du^\alpha du^\beta] =$$

$$= \sum_{\alpha < \beta} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^\beta \partial u^\alpha} - \frac{\partial^2 f}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} \right) [du^\alpha du^\beta] \equiv 0.$$

Aus der Definition 1 folgt unmittelbar, daß das äußere Differential des Monoms $\Omega = [du^{\alpha_1} \ldots du^{\alpha_q}]$ gleich Null ist.

Wir betrachten nun $DD\Phi$, verwenden die Eigenschaft 2) und erhalten

$$DD\Phi = D[da\, du^{\alpha_1} \ldots du^{\alpha_q}] = D[da\Omega] = [DDa\Omega] - [DaD\Omega] = 0,$$

da $DDa = D\Omega = 0$. Damit ist die Eigenschaft 3) bewiesen.

Damit die Form Φ äußeres Differential einer Form ist, ist somit notwendig, daß ihr äußeres Differential identisch verschwindet.

Bei einem einfach zusammenhängenden Bereich erweist sich diese Bedingung auch als hinreichend. Es gilt nämlich:

<u>Theorem 1.</u> (<u>Poincarés Theorem</u>)[1] Damit die q-Form

$$\Phi = \sum_{(\alpha)} a_{\alpha_1 \ldots \alpha_q} [du^{\alpha_1} \ldots du^{\alpha_q}], \quad \alpha_1, \ldots, \alpha_q = 1, \ldots, m,$$

im einfach zusammenhängenden Bereich G definiert, äußeres Differential einer Form Ω vom Grade q-1 ist, ist notwendig und hinreichend, daß das äußere Differential Φ identisch gleich Null im Bereich G ist :

$$D\Phi = \sum_{(\alpha)} [da_{\alpha_1 \ldots \alpha_q} du^{\alpha_1} \ldots du^{\alpha_q}] \equiv 0.$$

---

1) Für den Beweis siehe [17], S.65-67; [18], S.111.

Definition 2. Die lineare Differentialform

$$\varphi = a_\alpha du^\alpha$$

heißt vollständiges Differential, wenn es eine solche Skalarfunktion $f = f(u^1, \ldots, u^n)$ gibt, daß

$$\varphi = df$$

im gesamten Definitionsbereich G der Form φ gilt.

Wo G ein einfach zusammenhängender Bereich ist, erhalten wir die bekannte Bedingung für das vollständige Differential.

Theorem 2. Damit die lineare Form $\varphi = a_\alpha(u^1, \ldots, u^m)\, du^\alpha$ $(\alpha = 1, \ldots, m)$, definiert im einfach zusammenhängenden Bereich G, ein vollständiges Differential ist, ist notwendig und hinreichend, daß ihr äußeres Differential $D\varphi$ im Bereich G verschwindet.

3. Wir untersuchen im Raum X_N der Variablen $x^1, \ldots, x^N$ das System der linearen Differentialformen

$$\Omega^i(d) = a^i_\alpha(x^1, \ldots, x^N)\, dx^\alpha \quad (i = 1, \ldots, p,\ \alpha = 1, \ldots, N).$$

Definition 3. Das Gleichungssystem

$$\Omega^i(d) = a^i_\alpha dx^\alpha = 0 \tag{2.9}$$

heißt reines Gleichungssystem in Differentialen.

Die Funktionen $a^i_\alpha(x^1, \ldots, x^N)$ seien dabei in einem einfach zusammenhängenden Bereich des Raumes X_N definiert, und entsprechend wird das System (2.9) in diesem Bereich untersucht (dem Definitionsbereich des Gleichungssystems (2,9)).

Definition 4. Die Fläche V_m, die durch die Parametergleichungen

$$\begin{gathered} x^\alpha = f^\alpha(u^1, \ldots, u^m) \quad (\alpha = 1, \ldots, N), \\ \text{Rang} \left\| \frac{\partial x^\alpha}{\partial u^i} \right\| = m \quad (i = 1, \ldots, m) \end{gathered} \tag{2.10}$$

vorgegeben ist, heißt Integral-Mannigfaltigkeit des Systems (2,9), wenn die Einsetzung der Funktionen (2.10) in die linke Seite von (2.9) zur Identität bezüglich $u^1, \ldots, u^m, du^1, \ldots, du^m$: führt:

$$\Omega^i(d) = a^i_\alpha[f^\beta(u^1, \ldots, u^m)]\, df^\alpha(u^1, \ldots, u^m) \equiv 0, \tag{2.11}$$

oder, übergehend zur gewöhnlichen Schreibweise mit Ableitungen, wenn

$$a^i_\alpha\,[f^1(u^1,\ldots,u^m)\ldots,f^N(u^1,\ldots,u^m)]\,\frac{\partial f^\alpha(u^1,\ldots,u^m)}{\partial u^k}=0 \qquad (2.12)$$
$$(k=1,\ldots,m,\ \alpha=1,\ldots,N)$$

für alle $u^1,\ldots,u^m$.

Man kann nachweisen, daß ein beliebiges Gleichungssystem in partiellen Ableitungen auf ein Gleichungssystem in vollständigen Differentialen zurückgeführt werden kann (siehe [17], 11.Kap.,S.231).

Die Untersuchung über die Existenz der Integral-Mannigfaltigkeiten eines Gleichungssystems in vollständigen Differentialen stellt eine schwierige Aufgabe dar. Der Nachweis, daß es eine Lösung für ein Anfangswertproblem gibt, ist äußerst kompliziert und verlangt, daß alle zur Gleichung gehörenden Funktionen in allen Argumenten analytisch sind.

Wir beschränken uns auf die Betrachtung des Spezialfalls der sogenannten vollständig integrierbaren Systeme, wo das Existenztheorem einfach ist und keine Analytizität verlangt. Für die Koeffizienten $a^i_\alpha(u^1,\ldots,u^m)$ wird nur angenommen, daß sie stetig differenzierbare Funktionen der Parameter $u^1,\ldots,u^m$ sind.

Vorher führen wir einige neue Begriffe ein.

Wenn man in den linken Seiten von Gleichung (2.9) die Variablen $x^1,\ldots,x^N$ fixiert, dann stellt Gleichung (2.9) ein rein analytisches System linearer Gleichungen bezüglich der unabhängigen Variablen $\xi^\alpha=dx^\alpha,\ \alpha=1,\ldots,N$ dar.

<u>Definition 5</u>. Ein Paar bestehend aus einem Punkt $x = \{x^\alpha\}$ und einer Richtung $\xi = \{\xi^\alpha\}$ heißt <u>Richtungselement</u> des Raumes X_N. Das Element wird vollständig durch N Koordinaten x^α des Punktes und durch N-1 Relationen

$$\frac{\xi^\alpha}{\xi^1}=\frac{dx^\alpha}{dx^1},$$

d.h. durch 2N-1 Größen bestimmt.

Das geometrische Element kann durch den "unendlich kleinen Vektor" $\xi = \{\xi^\alpha\} = \{dx^\alpha\}$ dargestellt werden, der im Punkt

$x = \{x^\alpha\}$ abgetragen wird, wobei zwei Elemente zusammenfallen, wenn die Anfangspunkte $x = \{x^\alpha\}$ zusammenfallen und die Vektoren $\xi = \{\xi^\alpha\}$ kollinear sind.

Da die Variablen $\xi^\alpha = dx^\alpha$ bei fixiertem x das Element $(x,\xi) = \{x^\alpha, \xi^\alpha\}$ des Raumes X_N bestimmen, bestimmt die Gleichung (2.9) aus allen möglichen Elementen (x,ξ) des Raumes X_N eine gewisse Teilmenge, die wir die zulässigen Richtungselemente nennen.

Wenn die Elemente $(x_0, \xi_1), (x_0, \xi_2), \ldots, (x_0, \xi_\tau)$ zulässig sind, dann sind aufgrund der Linearität und Homogenität des Systems (2.9) auch

$$(x_0, \xi) = (x_0, \lambda^1\xi_1, \ldots, \lambda^\tau\xi_\tau).$$

zulässige Elemente.

Eine Ebene, die aus zulässigen Elementen (X_o, ξ) besteht, nennen wir zulässige Ebene.

Alle zulässigen Elemente (x_o, ξ) im gegebenen Punkt X_o des Raumes X_N füllen die maximal zulässige Ebene E_σ aus. Die Zahl $\rho = N - \sigma$ stimmt mit dem Rang des Systems der linearen Gleichungen (2.9) im gegebenen Punkt überein.

Definition 6. Die Zahl r, die gleich dem Maximum der Werte ρ im Bereich G ist, heißt Rang des Systems (2.9). Der Punkt $x = (x^1, \ldots, x^N)$, bei dem $\rho = r$, heißt Punkt allgemeiner Lage.

Es ist klar, daß aufgrund der Stetigkeit der Funktionen $a^i_a(x^1, \ldots, x^N)$ die Punkte allgemeiner Lage immer im Bereich $\bar{G} \subset G$ liegen, der ebenfalls die Dimension N hat.

Im weiteren Verlauf werden wir das System (2.9) immer in einem einfach zusammenhängenden Gebiet $\bar{G}$ der Punkte allgemeiner Lage betrachten, d.h. annehmen, daß überall $\rho = r$.

Jetzt kann man die geometrische Definition für die Integral-Mannigfaltigkeit V_m des Systems (2.9) geben, die äquivalent ist zur Definition 4.

Definition 7. Die Mannigfaltigkeit V_m heißt Integral-Mannigfaltigkeit, wenn in jedem Punkt die Tangentialebene E_m zulässige Ebene des Systems (2.9) ist.

Wir geben nun die Definition für das vollständig integrierbare System.

Definition 8. Ein reines Gleichungssystem in Differentialen heißt vollständig integrierbar, wenn durch jeden Punkt $x \subset \bar{G}$ eine Integral-Mannigfaltigkeit V_m der Dimension $m = N - r$ verläuft, wobei r der Rang des Systems ist.

Es ist klar, daß die Dimension m der integralen Mannigfaltigkeit nicht größer sein kann als N - r, da ihre Tangentialebene E_m zur maximalen zulässigen Ebene E_σ gehört, deren Dimension gleich N - r ist. Die Tangentialebene E_m der Integral-Mannigfaltigkeit V_m, die durch den Punkt X verläuft, ist aufgrund der Gleichungen (2.9) eindeutig bestimmt. Man kann nachweisen, daß auch die Mannigfaltigkeit V_m selbst eindeutig bestimmt ist. Somit verläuft durch jeden Punkt x des Bereiches $\bar{G}$ eine und nur eine Integralfläche V_{N-r} der Dimension N - r, wobei r der Rang des Systems ist. Mit anderen Worten: G läßt die Blätterung in ∞^r Integralflächen V_{N-r} zu. Eine solche Blätterung bezeichnen wir kurz mit

$$\bar{G} = \infty^r V_{N-r}.$$

4. Neben dem System der Formen $\Omega^i(d)$ aus (2.9) betrachten wir auch das System der bilinearen Formen

$$D\Omega^i(d, \delta) = \sum_{\alpha<\beta} \left(\frac{\partial a^i_\beta}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial a^i_\alpha}{\partial x^\beta}\right)[dx^\alpha dx^\beta]. \tag{2.13}$$

Die Bedingungen der vollständigen Integrierbarkeit des Gleichungssystems in vollständigen Differentialen können als algebraische Bedingungen für das System der bilinearen Formen $D\Omega^i$ formuliert werden.

Definition 9. Die zulässige Ebene E_τ heißt integrales Element, wenn für zwei beliebige Elemente (x^α, dx^α), $(x^\alpha, \delta x^\alpha)$ dieser Ebene die Bedingungen erfüllt werden:

$$\Omega^i(d) = \Omega^i(\delta) = 0, \tag{2.14}$$
$$D\Omega^i(d, \delta) = 0. \tag{2.15}$$

Nun kann man folgende notwendige und hinreichende Bedingung der vollständigen Integrierbarkeit des Systems (2.9) formulieren.

Theorem 3. [1] Damit das Gleichungssystem (2.9) vollständig integrierbar ist, ist notwendig und hinreichend, daß die maximal zulässige Ebene E_m $(m = N - r)$ integrales Element ist, d.h. daß für beliebige zwei lineare Richtungselemente $\{x^\alpha, dx^\alpha\}$, $\{x^\alpha, \delta x^\alpha\}$ die Relationen (2.14), (2.15) erfüllt werden.

Jetzt geben wir eine Reihe von Bedingungen der vollständigen Integrierbarkeit an, die zu den Bedingungen (2.14), (2.15) äquivalent sind.

Wir untersuchen das Gleichungssystem (2.14), (2.15). Da ein beliebiges zulässiges Element $\{x^\alpha, dx^\alpha\}$ nach der Definition die Relation (2.14) erfüllt, und umgekehrt jedes Element $\{x^\alpha, dx^\alpha\}$, das (2.14) erfüllt, zulässig ist, bedeutet die Erfüllung der Relationen (2.14), (2.15) für beliebige zwei zulässige Elemente, daß die Bedingungen (2.15) eine Folgerung der Bedingungen (2.14) sind, d.h. daß die bilinearen Formen $D\Omega^i(d, \delta)$ für alle Werte dx^α, δx^α, die die Formen Ω^i verschwinden lassen, verschwinden. Wir erinnern nur der Definition der Gleichheit der Formen modulo ... (siehe §1, Abschnitt 11) und können unsere Forderung folgendermaßen formulieren:

$$D\Omega^i(d, \delta) = 0 \mod \Omega^1, \ldots, \Omega^p. \tag{2.16}$$

Dies bedeutet (siehe §1, Abschnitt 11), daß die Formen $D\Omega^i$ dargestellt werden können als:

$$D\Omega^i(d, \delta) = [\Omega^1\theta_1] + \ldots + [\Omega^p\theta_p], \tag{2.17}$$

wobei $\theta_1, \ldots, \theta_p$ lineare Formen sind, wofür wiederum notwendig und

---

1) Zum Beweis siehe [17], S.91-100, [18], S.132-136.

hinreichend ist, daß

$$[D\Omega^i \Omega^1 \ldots \Omega^p] = 0. \tag{2.18}$$

Das Kriterium (2.18) ist das rechnerisch anwendbare Kriterium der vollständigen Integrierbarkeit des Systems (2.9), das Kriterium (2.17) ist für theoretische Untersuchungen geeignet.

5. Wir führen den für den weiteren Verlauf wichtigen Begriff des gemischten Systems ein. Wir betrachten das Gleichungssystem in vollständigen Differentialen:

$$\text{I.} \qquad \Omega^i(d) = a^i_\alpha dx^\alpha \quad (i = 1, \ldots, p,\ \alpha = 1, \ldots, N)$$

und das System der finiten Relationen

$$\text{II.} \qquad f^s(x^1, \ldots, x^N) = 0 \quad (s = 1, \ldots, q).$$

Die Gleichungen II bestimmen eine gewisse Fläche Σ der Dimension $\rho = N - q$. Das Gleichungssystem I - II heißt gemischtes System. Integrale Fläche des Systems I - II heißt die Integralfläche des System I, die auf der Fläche Σ liegt. Es ist klar, daß die Integralfläche des Systems I - II auch das Systen I - II' erfüllt, wobei II' das Gleichungssystem

$$\text{II}'. \qquad df^s \equiv \frac{df^s}{dx^\alpha} dx^\alpha = 0.$$

ist.Bei dem gemischten System I - II' ist der Basispunkt x^α des zulässigen Elements $\{x^\alpha, dx^\alpha\}$ nicht beliebig, sondern muß auf der Fläche Σ liegen, die zulässige Richtung dx^α im Punkt $x = \{x^\alpha\}$ muß das System I - II' erfüllen.

Beim gemischten System kann man somit das zulässige Element (x^α, dx^α) des Systems I - II definieren als zulässige Elemente des Systems I - II', deren Basispunkt auf der Fläche Σ liegt. Dann kann man die Integralfläche I - II bestimmen als Fläche, zu der die Tangentialebene von Σ zulässige Ebene des Systems I - II' ist.

In Parameterform sind die Gleichungen der Fläche Σ

$$x^\alpha = \varphi^\alpha(u^1, \ldots, u^\rho) \quad (\alpha = 1, \ldots, N,\ \rho = N - q) \tag{2.19}$$

wobei

$$f^s[\varphi^1(u^1, \ldots, u^\rho) \ldots \varphi^N(u^1, \ldots, u^\rho)] \equiv 0 \tag{2.20}$$

identisch ist bezüglich $u^1, \ldots, u^m$.

Da eine m-dimensionale Teilfläche $S \subset \Sigma$ der Fläche Σ im analytischen Raum der Variablen $u^1, \ldots, u^\rho$ durch Parametergleichungen dargestellt werden kann:

$$u^s = u^s(t^1, \ldots, t^r) \quad (s = 1, \ldots, \rho), \tag{2.21}$$

kann eine beliebige Integralfläche des Systems I - II der Dimension r dargestellt werden als

$$x^\alpha = \varphi\, [u^1(t^1, \ldots, t^r), \ldots, u^\rho(t^1, \ldots, t^r)] \quad (\alpha = 1, \ldots, N). \tag{2.22}$$

Wir differenzieren die Relationen (2.19) und erhalten :

$$dx^\alpha = \frac{\partial \varphi\, (u^1, \ldots, u^r)}{\partial u^s}\, du^s \quad (\alpha = 1, \ldots, N,\ s = 1, \ldots, \rho). \tag{2.23}$$

Die Relationen (2.19), (2.23) stellen die eineindeutige Entsprechung zwischen den Elementen $\{u^i, du^i\}$ des analytischen Raumes U_ρ der Variablen $u^1, \ldots, u^\rho$ und den Elementen $\{x^\alpha, dx^\alpha\}$ des Raumes X^N auf, die auf der Fläche Σ liegen. [1] Diese Entsprechung nennen wir Projektion des Elements x^α, dx^α in das Element $\{u^i, du^i\}$. Wir betrachten im Raum U_ρ das reine Gleichungssystem in Differentialen:

$$\text{III.} \qquad \overline{\Omega}^i = \overline{a}^i_s du^s = 0 \quad (i = 1, \ldots, \rho,\ s = 1, \ldots, \rho), \tag{2.24}$$

wobei

$$\overline{a}^i_s = a^i_\alpha\, [\varphi^1(u^1, \ldots, u^\rho), \ldots, \varphi^N(u^1, \ldots, u^\rho)]\, \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial u^s}. \tag{2.25}$$

Man kann leicht erkennen, daß in der Entsprechung, die durch die Gleichungen (2.19), (2.23) bestimmt wird, dem zulässigen Element von System III das zulässige Element von System I-II entspricht und umgekehrt. Hieraus folgt insbesondere, daß die Dimensionen der maximal zulässigen Ebenen von System III und System I - II übereinstimmen.

---

1) Das Element $\{x^\alpha, dx^\alpha\}$ liegt auf der Fläche Σ, wenn sein Ursprung, - der Punkt $\{x^\alpha\}$ - auf der Fläche Σ liegt und der Vektor dx^α tangential zu Σ ist.

Es ist unschwer zu ersehen: wenn

$$u^s = u^s(t^1, \ldots, t^r) \qquad (s = 1, \ldots, \rho)$$

Integral des Systems III ist, dann ist die Fläche

$$x^\alpha = \varphi^\alpha [u^1(t^1, \ldots, t^r) \ldots u^\rho(t^1, \ldots, t^r)] \tag{2.26}$$

Integral des Systems I - II und umgekehrt: wenn die Fläche (2.26) Integral des Systems I - II ist, dann ist

$$u^1 = u^1(t^1, \ldots, t^r), \ldots, u^\rho = u^\rho(t^1, \ldots, t^r)$$

Integral des Systems III.

6. Wie im allgemeinen Fall beschränken wir uns auch bei den gemischten Systemen auf die Untersuchung der vollständig integrierbaren Systeme. Das vollständig integrierbare System wird analog zum Vorhergehenden definiert.

Definition 10. Das System I - II heißt vollständig integrierbar, wenn durch jeden Punkt der Fläche Σ eine Integralfläche verläuft, die dieselbe Dimension hat wie die maximale zulässige Ebene des Systems I - II.

Aus der Betrachtung in Abschnitt 5 geht leicht hervor, daß man die Definition 10 folgendermaßen äquivalent formulieren kann:

Definition 11. Das System I - II heißt vollständig integrierbar, wenn das ihm entsprechende System III vollständig integrierbar ist.

Die Formen $\overline{\Omega}^i = \overline{a}^i_s du^s$ kann man in natürlicher Weise Projektionen der Formen $\Omega^i = a^i_\alpha dx^\alpha$ auf die Fläche Σ nennen.

Definition 12. Die Form

$$\overline{\Phi}(d) = b_{i_1 \ldots i_q} d_1 u^{i_1} \ldots d_q u^{i_q} = \sum_{(i)} b_{i_1 \ldots i_q} [du^{i_1} \ldots du^{i_q}], \; i_1 \ldots i_q = 1 \cdot \rho$$

heißt Projektion der Form

$$\Phi(d) = a_{\alpha_1 \ldots \alpha_q} d_1 x^{\alpha_1} \ldots d_q x^{\alpha_q} = \sum_{(\alpha)} a_{\alpha_1 \ldots \alpha_q} [dx^{\alpha_1} \ldots dx^{\alpha_q}]$$

$(\alpha_1 \ldots \alpha_q = 1 \ldots N)$ auf die Fläche Σ :

$$x^\alpha = \varphi^\alpha(u^1, \ldots, u^\rho) \qquad (\alpha = 1, \ldots, N), \tag{2.27}$$

wenn nach Substitution von

$$dx^\alpha = \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial u^s} du^s \tag{2.28}$$

die Form $\Phi(d)$ identisch mit der Form $\overline{\Phi}(d)$ übereinstimmt.

Damit die Form $\overline{\Phi}(d)$ Projektion von $\Phi(d)$ ist, ist notwendig und hinreichend, daß

$$b_{i_1,\dots,i_q} = a_{\alpha_1\dots\alpha_q} \frac{\partial\varphi^{\alpha_1}}{\partial u^{i_1}} \dots \frac{\partial\varphi^{\alpha_q}}{\partial u^{i_q}} \quad (i_1,\dots,i_q = 1,\dots,p, \quad \alpha = 1,\dots,N). \tag{2.29}$$

Es gilt folgende Behauptung:

Theorem 4. Die Projektion des äußeren Differentials ist gleich dem äußeren Differential der Projektion.

Beweis. Es sei

$$\Phi = \sum_{(\alpha)} a_{\alpha_1\dots\alpha_q}[dx^{\alpha_1}\dots dx^{\alpha_q}] = \frac{1}{q!} a_{\alpha_1\dots\alpha_q}[dx^{\alpha_1}\dots dx^{\alpha_q}],$$

$$D\Phi = \frac{1}{q!}[da_{\alpha_1\dots\alpha_q} dx^{\alpha_1}\dots dx^{\alpha_q}] = \frac{1}{q!}\frac{\partial a_{\alpha_1\dots\alpha_q}}{\partial x^{\alpha}}[dx^{\alpha} dx^{\alpha_1}\dots dx^{\alpha_q}],$$

$$\overline{D\Phi} = \frac{1}{q!}\frac{\partial a_{\alpha_1\dots\alpha_q}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial\varphi^{\alpha}}{\partial u^{i}}\frac{\partial\varphi^{\alpha_1}}{\partial u^{i_1}}\dots\frac{\partial\varphi^{\alpha_q}}{\partial u^{i_q}}[du^{i} du^{i_1}\dots du^{i_q}],$$

$$\overline{\Phi} = \sum_{i} b_{i_1\dots i_q}[du^{i_1}\dots du^{i_q}] = \frac{1}{q!} b_{i_1\dots i_q}[du^{i_1}\dots du^{i_q}] =$$

$$= \frac{1}{q!} a_{\alpha_1\dots\alpha_q}\frac{\partial\varphi^{\alpha_1}}{\partial u^{i_1}}\dots\frac{\partial\varphi^{\alpha_q}}{\partial u^{i_q}}[du^{i_1}\dots du^{i_q}],$$

$$D\overline{\Phi} = \frac{1}{q!}[db_{i_1\dots i_q} du^{i_1}\dots du^{i_q}] = \frac{1}{q!}\frac{\partial b_{i_1\dots i_q}}{\partial u^{i}}[du^{i} du^{i_1}\dots du^{i_q}] =$$

$$= \frac{1}{q!}\frac{\partial a_{\alpha_1\dots\alpha_q}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial\varphi^{\alpha}}{\partial u^{i}}\frac{\partial\varphi^{\alpha_1}}{\partial u^{i_1}}\dots\frac{\partial\varphi^{\alpha_q}}{\partial u^{i_q}}[du^{i} du^{i_1}\dots du^{i_q}] +$$

$$+ \frac{1}{q!} a_{\alpha_1\dots\alpha_q}\frac{\partial^2\varphi^{\alpha_1}}{\partial u\,\partial u^{i_1}}\dots\frac{\partial\varphi^{\alpha_q}}{\partial u^{i_q}}[du^{i} du^{i_1}\dots du^{i_q}] + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{q!} a_{\alpha_1\dots\alpha_q}\frac{\partial\varphi^{\alpha_1}}{\partial u^{i_1}}\dots\frac{\partial^2\varphi^{\alpha_q}}{\partial u^{i_q}\partial u^{i}}[du^{i} du^{i_1}\dots du^{i_q}],$$

aber alle Summen außer der ersten verschwinden aufgrund der Symmetrie der zweiten Ableitungen nach den Indizes. Hieraus folgt

$$D\overline{\Phi} = \frac{1}{q!}\frac{\partial a_{\alpha_1\dots\alpha_q}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial\varphi^{\alpha}}{\partial u^{i}}\frac{\partial\varphi^{\alpha_1}}{\partial u^{i_1}}\dots\frac{\partial\varphi^{\alpha_q}}{\partial u^{i_q}}[du^{i} du^{i_1}\dots du^{i_q}] = \overline{D\Phi},$$

q.e.d.

Man kann auch unschwer folgende Behauptung beweisen:

Theorem 5. Wenn das System I vollständig integrierbar ist, dann ist das System I - II ebenfalls vollständig integrierbar.

Nach Definition 11 genügt es, die vollständige Integrierbarkeit von System III zu beweisen. Aufgrund der vollständigen Integrierbarkeit des Systems I erhalten wir

$$D\Omega^i = [\Theta^i_j \Omega^j] \quad (i, j = 1 \ldots p), \tag{2.30}$$

wobei Θ^i_j gewisse lineare Formen sind.

Wir projizieren die Formen von (2.30) auf die Fläche Σ und erhalten

$$\overline{D\Omega^i} = [\overline{\Theta}^i_j \overline{\Omega}^j]. \tag{2.31}$$

Nach Theorem 4 erhalten wir

$$D\overline{\Omega}^i = \overline{D\Omega^i} = [\overline{\Theta}^i_j \overline{\Omega}^j]. \tag{2.32}$$

Hieraus folgt unmittelbar die vollständige Integrierbarkeit des Systems III und damit auch des Systems I - II .

<u>Theorem 6</u>. Wenn das Gleichungssystem I - II folgende Forderungen erfüllt:

1) das System I ist vollständig integrierbar und hat überall den Rang R,

2) auf der Fläche Σ, die durch die Gleichungen II vorgegeben wird, sind die Gleichungen $df^s = 0$ Folgerungen des Systems I,

dann ist es vollständig integrierbar und durch jeden Punkt der Fläche Σ verläuft eine Integralfläche V_m der Dimension $m = N - R$.

Beweis. Die vollständige Integrierbarkeit des Systems I - II ergibt sich nach Theorem 5. Da die Gleichungen $dj^s = 0$ auf Σ Folgerungen der Gleichungen des Systems I sind, ist die Dimension der maximalen zulässigen Ebene des Systems III ebenfalls gleich N - R (siehe Abschnitt 5). Da das System III vollständig integrierbar ist, beweist dies die Behauptung.

7. Wir betrachten das reine Gleichungssysten in Differentialen von der speziellen Bauart:

$$\begin{array}{ll} \text{I.} & \left.\begin{array}{l} dr = \omega^\alpha I_\alpha \\ dI_\alpha = \omega^\beta_\alpha I_\beta \end{array}\right\} \\ \text{II.} & I_\alpha I_\beta = g_{\alpha\beta} \quad (\alpha, \beta = 1, \ldots, n), \end{array}$$

wobei ω^α, ω_β^α vorgegebene lineare Kombinationen der Differentiale $du^1, \ldots, du^m$ sind, deren Koeffizienten Funktionen von $u^1, \ldots, u^m$ $(m \leqslant n)$ sind; $g_{\alpha\beta}(u^1, \ldots, u^m)$ ist nichtentartete positiv definite Matrix im untersuchten Bereich der Variablen $u^1, \ldots, u^m$; $r = \{x^\alpha\}$, $I_\beta = \{I_\beta^\alpha\}$ sind Vektoren eines Vektorraumes E_n, die unbekannte Funktionen von $u^1, \ldots, u^m$ mit Koordinaten x^α bzw. I_β^α sind.

Wir gehen über zur Koordinatenschreibweise und können die Gleichungen I - II schreiben als

$$\left.\begin{aligned} dx^\alpha &= \omega^\beta I_\beta^\alpha, \\ dI_\beta^\alpha &= \omega_\beta^\gamma I_\gamma^\alpha, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

$$\sum_{\alpha=1}^{n} I_\beta^\alpha I_\gamma^\alpha = g_{\beta\gamma} \qquad (\alpha, \beta, \gamma = 1 \ldots n). \tag{2}$$

Im Raum X_N der Variablen $u^1, \ldots, u^m$, $x^1 \ldots x^n$, $I_\beta(\alpha, \beta = 1, \ldots, n)$ der Dimension $N = m + n + n^2$ stellen die Gleichungen (1),(2) ein gewöhnliches gemischtes System dar. Wenn man die Relationen II differenziert und dabei I verwendet, erhält man

$$dI_\alpha I_\beta + I_\alpha dI_\beta = \omega_\alpha^\gamma I_\gamma I_\beta + \omega_\beta^\gamma I_\gamma I_\alpha, \tag{II'}$$

und daraus

$$dg_{\alpha\beta} = \omega_\alpha^\gamma g_{\gamma\beta} + \omega_\beta^\gamma g_{\gamma\alpha}. \tag{II*}$$

In Koordinatenschreibweise erhalten wir

$$\sum_\gamma dI_\alpha^\gamma I_\beta^\gamma + dI_\beta^\gamma I_\alpha^\gamma = \sum_\gamma \omega_\alpha^\sigma I_\sigma^\gamma I_\beta^\gamma + \sum_\gamma \omega_\beta^\sigma I_\sigma^\gamma I_\alpha^\gamma \quad (\alpha, \beta, \gamma, \sigma = 1 \ldots n). \tag{2'}$$

Die Bedingung II* ist notwendige Verträglichkeitsbedingung der Gleichungen I - II. Wir schätzen den Rang R des Systems (1).

Man kann leicht erkennen, daß er genau gleich $n + n^2$ ist, da zu $n + n^2$ Gleichungen (1)-(2) jede der $n + n^2$ Unbekannten x^α, I_α^β einmal und nur einmal gehört.

Wenn die Funktionen $g_{\alpha\beta}$ und die Formen ω_β^α die Relatioen II* erfüllen, dann ist das Gleichungssystem (2') auf der Fläche Σ, die durch die Gleichungen (2) vorgegeben wird, eine Folgerung der Gleichungen (1).

Somit ist die Dimension der maximal zulässigen Ebene des Systems (1),(2) gleich $N - R = m$.

Wir betrachten nun die Verträglichkeitsbedingungen des Systems I (oder, was das Gleiche ist, des Systems (1)). Wir bilden die bilinearen Kovarianten der rechten und linken Seiten und erhalten :

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \{(\omega^\alpha)' - [\omega^\beta \omega^\alpha_\beta]\}\, I_\alpha, \\ 0 &= \{(\omega^\alpha_\beta)' - [\omega^\gamma_\beta \omega^\alpha_\gamma]\}\, I_\alpha. \end{aligned}\right\} \qquad (2.33)$$

Aufgrund der Bedingungen $\mathrm{Det}\,|g_{\alpha\beta}| \neq 0$, sind die Vektoren $I_1, \dots,$ I_n linear unabhängig, woraus folgt

$$\left.\begin{aligned} (\omega^\alpha)' - [\omega^\beta \omega^\alpha_\beta] &= 0, \\ (\omega^\alpha_\beta)' - [\omega^\gamma_\beta \omega^\alpha_\gamma] &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad \mathrm{III}$$

Die Relationen II*, III sind die notwendigen Verträglichkeitsbedingungen des Systems I - II.

Man kann leicht ersehen, daß die Bedingungen II* - III auch hinreichende Verträglichkeitsbedingungen für I - II sind, und daß das System (1) vollständig integrierbar ist, da seine bilinearen Kovarianten aufgrund der Gleichungen selbst gleich Null sind.

Somit erfüllt das gemischte Gleichungssystem I - II die Forderungen von Theorem 5, ist also im Sinne des Vorhergehenden vollständig integrierbar und läßt nach Theorem 6 eine Integral-Mannigfaltigkeit der Dimension m zu.

Folglich kann man folgendes Theorem formulieren:

<u>Theorem 7</u>. Damit das Gleichungssystem

$$\begin{array}{ll} \mathrm{I.} & \left.\begin{aligned} dr &= \omega^\alpha I_\alpha, \\ dI_\alpha &= \omega^\beta_\alpha I_\beta, \end{aligned}\right\} \\ \mathrm{II.} & I_\alpha I_\beta \quad g_{\alpha\beta} \end{array}$$

vollständig integrierbar ist, ist notwendig und hinreichend, daß die Bedingungen

$$\begin{array}{ll} \mathrm{II}^* & dg_{\alpha\beta} = \omega^\gamma_\alpha g_{\gamma\beta} + \omega^\gamma_\beta g_\gamma\,, \\ \mathrm{III.} & (\omega^\alpha)' = [\omega^\beta \omega_\beta], \\ & (\omega^\alpha_\beta)' = [\omega^\gamma_\beta \omega^\alpha_\gamma]. \end{array}$$

erfüllt werden.

Dies bedeutet, daß es eine und nur eine Lösung r, I_α des Systems I - II gibt, die durch den Punkt

$$u^i = u_0^i,\quad r = r_0,\quad I_\alpha = I_\alpha^0,\quad I_\alpha^0 I_\beta^0 = g_{\alpha\beta}(u^1, \ldots, u^m)$$

des Phasenraumes X_N verläuft.

Mit anderen Worten: Es gibt ein und nur ein System der Vektorfunktionen $r = r(u^1, \ldots, u^m)$, $I_\alpha = I_\alpha(u^1, \ldots, u^m)$, das das System I - II und die Anfangsbedingungen

$$r(u_0^1, \ldots, u_0^m) = r_0,$$
$$I_\alpha(u_0^1, \ldots, u_0^m) = I_\alpha^0,\quad I_\alpha^0 I_\beta^0 = g_{\alpha\beta}(u_0^1, \ldots, u_0^m).$$

erfüllt.

§ 3. Die Methode des beweglichen n-Beines

1. Die Methode des beweglichen n-Beines in der Differentialgeometrie eines mehrdimensionalen Euklidischen Raumes ist eine natürliche Verallgemeinerung der Methode des beweglichen Dreibeines, die mit großem Erfolg in der Geometrie des dreidimensionalen Euklidischen Raumes zur Untersuchung der geometrischen Eigenschaften von Flächen und Kurven angewandt wird. [1)]

Das Wesen dieser Methode besteht darin: der Punkt M mit dem Ortsvektor $r = r(u^1, \ldots, u^m)$ beschreibe eine gewisse Fläche V_m des Euklidischen Raumes E_n $(m < n)$. In jedem Punkt M der Fläche V_m wird ein n-Bein konstruiert, also eine Figur, die aus n Vektoren $I_1, \ldots, I_n$ mit Ursprung im Punkt M besteht.

Dieses n-Bein bestimmt ein "lokales" kartesisches Koordinatensystem im Raum E_n, in dem die Eigenschaften der Fläche V_m

---

1) Diese Methode kann auch in beliebigen Kleinschen Räumen angewandt werden, aber wir geben dafür keine allgemeine Beschreibung, sondern beschränken uns auf die Euklidischen Räume.

im Punkt M untersucht werden. Somit erhalten wir eine Schar von n-Beinen, die von m Parametern $u^1,\dots,u^m$ abhängen. Diese n-Bein-Schar bezeichnen wir mit dem Symbol $\{r(u), I_\alpha(u)\}$ oder $\{r(u^1,\dots,u^m), I_1(u^1,\dots,u^m),\dots,I_n(u^1,\dots,u^m)\}$, wobei $r(u)=r(u^1,\dots,u^m)$ den Ursprung des n-Beines und $I_\alpha(u^1,\dots,u^m)$ die Vektoren des n-Beines bezeichnet.

Man kann aufzeigen, daß die mit der Fläche assoziierte n-Bein-Schar und damit auch die Fläche selbst vollständig bestimmt wird durch die Matrix $g_{\alpha\beta}=I_\alpha\cdot I_\beta$ der Skalarprodukte der Vektoren I_α des n-Beines und durch das System der linearen Differentialformen $\omega^\alpha(u, du)$, $\omega^\alpha_\beta(u, du)$, die die Veränderung des n-Beines $r(u^1,\dots,u^m), I_\alpha(u^1,\dots,u^m)$ bei Verschiebung vom Punkt r(u) zum unendlich nahen Punkt r(u+du) charakterisieren.

Somit ist das System der Formen ω^α, ω^α_β und die Skalarmatrix $g_{\alpha\beta}$ der analytischen Apparat, mit dem die geometrischen Eidenschaften der Fläche V_m untersucht werden.

Die letztgenannten Punkte werden ausführlich besprochen.

2. Wir untersuchen im n=m+q-dimensionalen Euklidischen reellen Raum E_{m+q} die dreifach differenzierbare Vektorfunktion $r = r(u^1,\dots,u^m)$ von den Parametern $u^1,\dots,u^m$. Dabei nehmen wir an, daß die Funktionalmatrix

$$\left\| \begin{matrix} \frac{\partial x^1}{\partial u^1} & \dots & \frac{\partial x^{m+q}}{\partial u^1} \\ \frac{\partial x^1}{\partial u^m} & \dots & \frac{\partial x^{m+q}}{\partial u^m} \end{matrix} \right\|, \tag{3.1}$$

die aus Ableitungen der Koordinaten x^α des Vektors r nach den Parametern u^i gebildet ist, in einem Bereich G der Parameter $u^1,\dots,u^m$ den Rang m besitzt. Geometrisch bezeichnet diese Forderung die lineare Unabhängigkeit der Vektoren

$$r_1=\frac{\partial r}{\partial u^1},\ \dots,\ r_m=\frac{\partial r}{\partial u^m}$$

in jedem Punkt $u^1,\dots,u^m$ des Bereiches G. Wenn $u^1,\dots,u^m$ den Bereich G durchläuft, dann beschreibt der Punkt $r = r(u^1,\dots,u^m)$ die dreifach differenzierbare Fläche $V_m \subset E_{m+q}$.

Die zur Fläche V_m tangentiale Ebene $E_m(M)$ im gegebenen Punkt M ist definitionsgemäß die lineare Hülle der Vektoren $r_1 = \frac{\partial r}{\partial u^1}, \ldots, r_m = \frac{\partial r}{\partial u^m}$ in diesem Punkt. Man kann leicht aufzeigen, daß diese Definition invariant ist bezüglich der Wahl der Parameter $u^1,\ldots,u^m$ auf der Fläche und mit der Definition der Tangentialebene als geometrischer Ort der zu den auf der Fläche liegenden und durch den Punkt M laufenden Kurven tangentialen Vektoren t übereinstimmt.

Das orthogonale Komplement $E_q(M) \perp E_m(M)$ heißt q-normal- oder normal-Raum der Fläche V_m im Punkt M.

3. n-Bein $(r, I) = (r, I_1, \ldots, I_m)$ heißt die Figur, die aus n Vektoren $I_1,\ldots,I_n$ besteht, welche einen gemeinsamen Ursprung im Punkt M mit dem Ortsvektor r haben. Somit wird das n-Bein durch n+1 Vektoren $r,I_1,\ldots,I_n$ vorgegeben.

Die Gesamtheit der n-Beine $\{r(u), I(u)\} = \{r(u), I_1(u), \ldots, I_n(u)\}$, wobei die Vektoren $r,I_1,\ldots,I_n$ Funktionen von den Parametern $u^1,\ldots,$ u^p sind, heißt Schar der n-Beine. Die Zahl ρ der wesentlichen Parameter, von denen die Schar der n-Beine $\{r(u), I(u)\}$ (Dimension der n-Bein-Schar) abhängt, ist gleich dem Rang der Funktionalmatrix:

$$M = \left\| \begin{matrix} \frac{\partial x^1}{\partial u^1} & \cdots & \frac{\partial x^n}{\partial u^1} & \frac{\partial I_1^1}{\partial u^1} & \cdots & \frac{\partial I_1^n}{\partial u^1} & \cdots & \frac{\partial I_n^1}{\partial u^1} & \cdots & \frac{\partial I_n^n}{\partial u^1} \\ \frac{\partial x^1}{\partial u^p} & \cdots & \frac{\partial x^n}{\partial u^p} & \frac{\partial I_1^1}{\partial u^p} & \cdots & \frac{\partial I_1^n}{\partial u^p} & \cdots & \frac{\partial I_n^1}{\partial u^p} & \cdots & \frac{\partial I_n^n}{\partial u^p} \end{matrix} \right\|, \tag{3.2}$$

wobei x^α die Koordinaten des Vektors r und I_β^α die Koordinaten des Vektors I_β sind. Im weiteren Verlauf beschränken wir uns auf den Fall, wo die Matrix M nichtentartet ist, d.h. $\rho = p$.

Gegenstand unserer Untersuchung sind die geometrischen Eigenschaften der n-Bein-Scharen, d.h. die Eigenschaften, die invariant sind bezüglich der Bewegungsgruppe des reellen n-dimensionalen Raumes. Im Unterschied zu der allgemein gültigen Definition verstehen wir unter einer Bewegung jede eineindeutige Abbildung des Euklidischen Raumes auf sich selbst, die die Skalarprodukte eines beliebigen Vektorpaares invariant läßt. Bei dieser Definition ist die Spiegelung an einer beliebigen Hyperebene Bewegung.

Zwei Figuren heißen kongruent, wenn man sie durch eine Bewegung zur Deckung bringen kann. Damit zwei n-Beine $\{r, I_\alpha\}$, $\{\bar{r}, \bar{I}_\alpha\}$ kongruent sind, ist notwendig und hinreichend, daß die Bedingungen

$$I_\alpha \cdot I_\beta = \bar{I}_\alpha \cdot \bar{I}_\beta \qquad (\alpha, \beta = 1, \ldots, n).$$

erfüllt sind. Die zwei p-parametrigen n-Bein-Scharen

$$\{r(u^1, \ldots, u^p), I_\alpha(u^1, \ldots, u^p)\}, \{\bar{r}(u^1, \ldots, u^p), \bar{I}_\alpha(u^1, \ldots, u^p)\} \tag{3.3}$$

heißen kongruent, wenn man sie durch eine einzige Bewegung zur Deckung bringen kann.

4. Wir stellen jetzt die Ableitungsgleichungen der n-Bein-Schar auf und leiten die sogenannten Strukturgleichungen der n-Bein-Schar her, die die Verträglichkeitsformeln der Ableitungsgleichungen darstellen.

Wir untersuchen im n-dimensionalen reellen Euklidischen Raum E_n die m-parametrige n-Bein-Schar $\{r(u^1, \ldots, u^m), I_\alpha(u^1, \ldots, u^m)\}$, $m < n$, lie die Bedingungen

$$\left[\frac{\partial r}{\partial u^1} \cdots \frac{\partial r}{\partial u^m}\right] \neq 0, \quad [I_1 \ldots I_n] \neq 0, \tag{3.4}$$

erfüllt, wobei $[\ ] \neq 0$ die lineare Unabhängigkeit der Vektoren bezeichnet.

Dann kann ein beliebiger Vektor des Raumes E_n als Linearkombination der Vektoren $I_1, \ldots, I_n$ dargestellt werden. Wir entwickeln die Vektoren $dr(u)$, $dI_\alpha(u)$ nach den Vektoren $I_\alpha(u)$, die im selben Punkt $r = r(u)$ des Raumes E_n konstruiert sind, und erhalten die sogenannten Ableitungsformeln der n-Bein-Schar:

$$\text{I.} \qquad \begin{aligned} dr &= \omega^\alpha I_\alpha, & \alpha &= 1, \ldots, n, \\ dI_\alpha &= \omega_\alpha^\beta I_\beta, & \alpha, \beta &= 1, \ldots, n, \end{aligned}$$

wobei $\omega^\alpha = \omega^\alpha(u, du)$, $\omega_\alpha^\beta = \omega_\alpha^\beta(u, du)$ lineare Differentialformen der

Differentialen $du^1, \ldots, du^m$ mit von $u^1, \ldots, u^m$ abhängenden Koeffizienten bezeichnet.

Wir bilden die Matrix der Skalarprodukte der Vektoren I_α:

$$g_{\alpha\beta} = I_\alpha I_\beta.$$

Es ist klar, daß sie für beliebige Werte $u^1, \ldots, u^m$ $g_{\alpha\beta}(u^1, \ldots, u^m)$ eine nichtentartete positiv definite Matrix ist. Somit bestimmt die n-Bein-Schar $\{r, I_1, \ldots, I_n\}$ eindeutig die Gesamtheit der Formen $\omega^\alpha(u, du)$, $\omega^\alpha_\beta(u, du)$ und die Matrix $g_{\alpha\beta}(u^1, \ldots, u^m)$.

Umgekehrt seien ein gewisses System von Formen $\omega^\alpha(u, du)$, $\omega^\alpha_\beta(u, du)$ und eine nichtentartete positiv definite Matrix $g_{\alpha\beta}(u^1, \ldots, u^m)$. gegeben. In welchem Fall gibt es eine n-Bein-Schar, die die Relationen I, II mit den jeweiligen Formen ω^α, ω^α_β der Matrix $g_{\alpha\beta}$ erfüllt, und ist sie eindeutig ?

Bei den gegebenen Formen ω^α, ω^α_β der Matrix $g_{\alpha\beta}$ und den unbekannten Vektoren r, I_α bilden die Relationen I, II ein gemischtes System, das von uns in Abschnitt 7 von § 2 untersucht wurde.

Wie bereits gezeigt, sind die notwendigen und hinreichenden Verträglichkeitsbedingungen der Gleichungen I, II die Relationen

$$\text{III.} \quad \begin{aligned} (\omega^\alpha)' &= [\omega^\beta \omega^\alpha_\beta], \\ (\omega^\alpha_\beta)' &= [\omega^\gamma_\beta \omega^\alpha_\gamma], \end{aligned}$$

$$\text{IV.} \quad dg_{\alpha\beta} = \omega^\gamma_\alpha g_{\gamma\beta} + \omega^\gamma_\beta g_{\gamma\alpha}, \qquad \alpha, \beta, \gamma = 1 \ldots n.$$

Unter dieser Bedingung ist das System I, II vollständig integrierbar, da es eine und nur eine Lösung $r(u^1, \ldots, u^m)$, $I_\alpha(u^1, \ldots, u^m)$ des Systems I, II gibt, die die Anfangsbedingungen erfüllt:

$$\left.\begin{aligned} r(u^1_0, \ldots, u^m_0) &= r^0, \\ I_\alpha(u^1_0, \ldots, u^m_0) &= I^0_\alpha, \end{aligned}\right\} \tag{3.5}$$

wobei r^0, I^0_α beliebige Vektoren sind, die die Bedingung erfüllen:

$$I^0_\alpha \cdot I^0_\beta = g_{\alpha\beta}(u^1_0, \ldots, u^m_0). \tag{3.6}$$

Die Bedingungen III, IV nennen wir Strukturgleichungen der n-Bein-Schar.

Angemerkt sei, daß das Gleichungssystem I, II invariant ist bezüglich Bewegungen, d.h. wenn man die n-Bein-Schar $\{r, I\}$, die die Bedingungen I, II erfüllt, einer Bewegung unterwirft, dann erfüllt sie nach wie vor das System I, II mit denselben Formen ω^α, ω^α_β und der Matrix $g_{\alpha\beta}$.

Somit sind die Formen ω^α, ω^α_β und die Matrix $g_{\alpha\beta}$ invariant mit der n-Bein-Schar $\{r, I\}$ verbunden.

Wir zeigen nun: wenn die zwei n-Bein-Scharen $\{r(u), I(u)\}$, $\{\bar{r}(u), \bar{I}(u)\}$ ein und dasselbe System der Formen ω^α, ω^α_β und die Matrix $g_{\alpha\beta}$ bestimmt, dann stimmen sie umgekehrt genau bis auf eine Bewegung überein. Beide Scharen $\{r, I\}$, $\{\bar{r}, \bar{I}\}$ erfüllen nämlich ein und dasselbe System I, II. Es sei

$$\left.\begin{aligned} r(u_0^1, \ldots, u_0^m) &= r^0, & I_\alpha(u_0^1, \ldots, u_0^m) &= I^0_\alpha, \\ \bar{r}(u_0^1, \ldots, u_0^m) &= \bar{r}^0, & \bar{I}_\alpha(u_0^1, \ldots, u_0^m) &= \bar{I}^0_\alpha. \end{aligned}\right\} \tag{3.7}$$

Aufgrund der Bedingungen $I^0_\alpha I^0_\beta = \bar{I}^0_\alpha \bar{I}^0_\beta = g_{\alpha\beta}(u_0^1, \ldots, u_0^m)$ sind die n-Beine $\{r^0, I^0_\alpha\}$, $\{\bar{r}^0, \bar{I}^0_\alpha\}$ kongruent. A sei eine Bewegung, die $\{\bar{r}_0, \bar{I}^0_\alpha\}$ und $\{r^0, I^0_\alpha\}$ übereinanderlegt. Wir setzen die Schar $\{\bar{r}, \bar{I}_\alpha\}$ der Bewegung A aus, und überführen sie in eine gewisse Schar $\{r, I_\alpha\}$, die wie vorher das System I, II erfüllt. Dabei ist

$$\tilde{r}(u_0^1, \ldots, u_0^m) = r(u_0^1, \ldots, u_0^m) = r_0; \quad \tilde{I}_\alpha(u_0^1, \ldots, u_0^m) = I_\alpha(u_0^1, \ldots, u_0^m) = I^0_\alpha. \tag{3.8}$$

Aufgrund des Existenz- und Eindeutigkeitstheorems, das in Abschnitt 7 von § 2 bewiesen wurde, erhalten wir

$$\left.\begin{aligned} r(u^1, \ldots, u^m) &= \tilde{r}(u^1, \ldots, u^m), \\ I_\alpha(u^1, \ldots, u^m) &= \tilde{I}_\alpha(u^1, \ldots, u^m). \end{aligned}\right\} \tag{3.9}$$

Die Behauptung ist bewiesen. Somit können wir folgendes Haupttheorem formulieren:

<u>Theorem 1</u>. Wenn das System der Formen $\omega^\alpha(u, du)$, $\omega^\alpha_\beta(u, du)$ der Differentiale $du^1, \ldots, du^m$ und die positiv definite Matrix $g_{\alpha\beta}(u^1, \ldots, u^m)$ die Relationen

$$\text{III.} \quad \left\{\begin{aligned} (\omega^\alpha)' &= [\omega^\beta \omega^\alpha_\beta], \\ (\omega^\alpha_\beta)' &= [\omega^\gamma_\beta \omega^\alpha_\gamma], \end{aligned}\right.$$

$$\text{IV.} \quad dg_{\alpha\beta} = \omega^\gamma_\alpha g_{\gamma\beta} + \omega^\gamma_\beta g_{\gamma\alpha}, \qquad \alpha, \beta, \gamma = 1, \ldots, n,$$

erfüllen, dann ist das Gleichungssystem

Ia. $$dr = \omega^{\alpha} I_{\alpha},$$

Ib. $$dI_{\alpha} = \omega_{\alpha}^{\beta} I_{\beta},$$

II. $$I_{\alpha} I_{\beta} = g_{\alpha\beta}, \quad \alpha, \beta = 1 \ldots n,$$

vollständig integrierbar und bestimmt die m-parametrige Schar der n-Beine $\{r, I\}$ eindeutig bis auf Bewegungen. Aufgrund der Relationen I, II erfüllen umgekehrt die Formen $\omega^{\alpha}, \omega_{\beta}^{\alpha}$ und die Matrix $g_{\alpha\beta}$, die durch eine jeweilige n-Bein-Schar $\{r, I\}$ bestimmt werden, die Bedingungen III, IV und sind mit dem n-Bein invariant verbunden.

Da die geometrischen Eigenschaften einer beliebigen Figur im mehrdimensionalen Euklidischen Raum Eigenschaften sind, die bezüglich der Bewegungsgruppe invariant sind, bestimmen das System der Formen $\omega^{\alpha}, \omega_{\beta}^{\alpha}$ und die Matrix $g_{\alpha\beta}$, die die Forderungen III, IV erfüllen, die n-Bein-Schar geometrisch völlig und dienen als analytisches Instrument zur Untersuchung der n-Bein-Schar.

5. Wenn die Fläche $V_m \subset E_{m+q}$ Gegenstand der Untersuchung ist, dann ist mit ihr eine m-parametrige Schar von n-Beinen $\{r, I\}$ mit dem Ursprung M und dem Ortsvektor $r = r(u^1, \ldots, u^m)$, welcher auf der Fläche V_m liegt, assoziiert.

Es ist klar, daß die Matrix $g_{\alpha\beta}$ und die Formen $\omega^{\alpha}, \omega_{\beta}^{\alpha}$, , die der gegebenen n-Bein-Schar entsprechen, die n-Bein-Schar und damit auch die Fläche V_m vollständig bestimmen. Die Gleichungen I heißen in diesem Fall Ableitungsformeln der Fläche, die Gleichungen III Strukturgleichungen der Fläche.

Bei der geometrischen Untersuchung von Flächen benutzt man gewöhnlich ein n-Bein, bei dem die ersten m Vektoren $I_1, \ldots, I_m$ tangential sind zur Fläche, die letzten q Vektoren $I_{m+1}, \ldots, I_{m+q}$ Einheitsvektoren, paarweise orthogonal und normal zur Fläche. Ein solches n-Bein nennen wir halborthogonal.

Wir betrachten, wie die Gleichungen I - IV im halborthogonalen n-Bein modifiziert werden. Nach der Definition des halborthogonalen n-Beins gilt:

$$g_{\alpha\, m+s} = I_\alpha \cdot I_{m+s} = \delta_{\alpha\, m+s}, \quad \alpha = 1, \dots, m+q, s = 1, \dots, q, \tag{3.10}$$

$$\omega^{m+1} =, \dots, = \omega^{m+q} = 0. \tag{3.11}$$

Hieraus erhalten die Ableitungsformeln Ia die Form

$$dr = \omega^i I_i, \quad i = 1, \dots, m. \tag{3.12}$$

Die Integrierbarkeitsbedingungen in Gleichung (3.11) ergeben

$$(\omega^{m+s})' = 0 = [\omega^i \omega_i^{m+s}], \quad i = 1, \dots, m. \tag{3.13}$$

Unter Anwendung des Eindeutigkeitstheorems (siehe Theorem 2 von § 1) erhalten wir hieraus:

$$\omega_i^{m+s} = \lambda_{ij}^s \omega^j, \quad \lambda_{ij}^s = \lambda_{ji}^s, \quad i, j = 1, \dots, m, \quad s = 1, \dots, q. \tag{3.14}$$

Die Bedingungen IV haben die Gestalt

$$dg_{ij} = \omega_i^k g_{kj} + \omega_j^k g_{ki}, \quad i, j, k = 1, \dots, m, \tag{3.15}$$

$$\omega_{m+s}^i = -g^{ij} \omega_j^{m+s}, \tag{3.16}$$

$$\omega_{m+t}^{m+s} = -\omega_{m+s}^{m+t}, \tag{3.17}$$

wobei

$$g^{ij} g_{jk} = \delta_k^i, \quad i, j, k = 1, \dots, n, \quad s, t = 1, \dots, q. \tag{3.18}$$

Bemerkt sei, daß die Bedingungen (3,15) aufgrund der Gleichungen (3.18) äquivalent sind zu den Bedingungen

$$dg^{ij} = -(\omega_k^i g^{kj} + \omega_k^j g^{ki}), \quad i, j, k = 1, \dots, m. \tag{3.19}$$

6. Wenn die Formen ω^i vollständige Differentiale du^i sind, dann heißt das n-Bein $I_1, \dots, I_{m+q}$ holonom. Ansonsten heißt das n-Bein nicht-holonom.

Im Falle des holonomen n-Beines erhalten wir

$$dr = du^i I_i, \tag{3.20}$$

woraus folgt

$$I_i = \frac{\partial r}{\partial u^i}. \tag{3.21}$$

Somit ist das holonome n-Bein immer mit der Auswahl eines Koordinatensystems $u^1, \dots, u^m$ auf der Fläche verbunden. Darin besteht sein Vorteil und gleichzeitig ein Mangel. Bei geometrischer Untersuchung ist nämlich in jedem Punkt ein n-Bein auszuwählen, das bestimmte geometrische (algebraische) Forderungen erfüllt.

Dabei darf man im vorhinein nicht annehmen, daß ein gewähltes n-Bein holonom ist. Folglich vermindert die Verwendung eines holonomen n-Beins die Freiheit bei der Wahl des n-Beins und engt die Anzahl der Transformationen der n-Bein-Schar, mit der die Fläche ausgestattet ist, ein.

Der Vorzug des holonomen n-Beins besteht darin, daß die Vektoren I_i ganz einfach mit dem Ortsvektor r der Fläche V_m verbunden sind. Außerdem vereinfacht die holonome Basis $\omega^i = du^i$ das Aufstellen der Integrierbarkeitsbedingungen der verschiedenen Gleichungen.

Wenn man davon absehen will, daß das n-Bein holonom sei, dann hat man ein ganz einfaches und für geometrische Untersuchungen im Euklidischen Raum geeignetes n-Bein zu wählen, das aus paarweise orthogonalen Einheitsvektoren besteht. Ein solches n-Bein nennen wir kurz orthogonal.

Im orthogonalen n-Bein hat die Matrix der Skalarprodukte die besonders einfache Gestalt:

$$g_{\alpha\beta} = I_\alpha I_\beta = \delta_{\alpha\beta}, \qquad \alpha, \beta = 1, \ldots, m+q.$$

Die Relationen IV bekommen die Gestalt:

$$\omega^\alpha_\beta + \omega^\beta_\alpha = 0, \qquad \alpha, \beta = 1, \ldots, m+q,$$

d.h. die Formen ω^α_β werden im oberen und unteren Index antisymmetrisch.

Im Unterschied zum holonomen n-Bein besteht die n-Bein-Schar in diesem Fall aus untereinander kongruenten n-Beinen, und die Formen ω^α_β bekommen eine besonders einfache kinematische Bedeutung, kennzeichnend für eine Momenten-Drehung, welche das n-Bein $I_\alpha(u)$ in das unendlich nahe n-Bein $I_\alpha(u+du)$ überführt.

In unserer Untersuchung verwenden wir n-Beine aller drei Arten: holonome, orthogonale und halborthogonale.

7. Bei einem halborthogonalen n-Bein unterteilen wir die Formen in die drei Gruppen :

$$\omega_j^i = \Gamma_{jk}^i \omega^k \qquad \text{(innere Formen)},$$

$$\omega_i^{m+s} = \lambda_{ij}^s \omega^j, \quad \lambda_{ij}^s = \lambda_{ji}^s; \quad \omega_{m+s}^i = -g^{ij}\omega_j^{m+s} \qquad \text{(gemischte Formen)},$$

$$\omega_{m+t}^{m+s} = -\omega_{m+s}^{m+t} = A_{tj}^s \omega^j, \quad s, t = 1, \ldots, q, \quad i, j = 1 \ldots m \qquad \text{(äußere Formen)}.$$

Man kann leicht erkennen, daß die inneren Formen eindeutig durch die Metrik der Fläche bestimmt werden. Wir zeigen dies der Einfachheit halber am holonomen n-Bein. Es gelten dann die Relationen:

$$\omega^i = du^i, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{3.22}$$

$$I_i = \frac{\partial r}{\partial u^i}, \quad i = 1, \ldots, m. \tag{3.23}$$

Das Linien-Element ds^2 der Fläche wird ausgedrückt durch die quadratische Form:

$$ds^2 = dr^2 = g_{ij}\, du^i du^j. \tag{3.24}$$

Aus den Bedingungen (3,22) folgt

$$(\omega^i)' = (du^i)' = [\omega^j \omega_j^i] = \Gamma_{jk}^i [du^j du^k] = 0. \tag{3.25}$$

Nach dem Eindeutigkeitstheorem erhalten wir

$$\Gamma_{jk}^i = \Gamma_{kj}^i, \quad i, j, k = 1, \ldots, m. \tag{3.26}$$

Aus den Relationen (3.15) folgt

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} = \Gamma_{ik}^l g_{lj} + \Gamma_{jk}^l g_{li} = \Gamma_{j,ik} + \Gamma_{i,jk}, \quad i, j, k, l = 1, \ldots, m. \tag{3.27}$$

Wir setzen dies in den Ausdruck

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} \tag{3.28}$$

ein, benutzen die Symmetrie der Γ_{jk}^i für die unteren Indizes und erhalten:

$$\Gamma_{i,kj} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i}\right). \tag{3.29}$$

Hieraus folgt

$$\Gamma_{kj}^i = g^{i\alpha}\Gamma_{\alpha,kj}. \tag{3.30}$$

Die Koeffizienten Γ_{jk}^i sind somit die Zusammenhangskoeffizienten, die der jeweiligen Metrik entsprechen.

Wenn die inneren Formen ω_j^i mit der Metrik invariant verbunden sind, bestimmen die gemischten Formen $\omega_i^{m+s} = \lambda_{ij}^s \omega^j$ die Einbettung der Fläche und entsprechen der Vorgabe des Systems der quadratischen Formen $\lambda_{ij}^s \omega^i \omega^j$ (Einbettungstensoren). Bei einer Hyperfläche gibt es keine äußeren Formen, sondern nur gemischte Formen $\omega_i^{m+1}=\lambda_{ij}\omega^j$, die die quadratische Form $\lambda_{ij}\omega^i\omega^j$ bestimmen, welche in der Theorie über die Einbettung von Hyperflächen dieselbe Rolle spielt wie die zweite quadratische Fundamentalform der Fläche im dreidimensionalen Fall (siehe Abschnitt 10). Entsprechend der Einteilung der Formen ω_β^α in drei Gruppen werden die Integrierbarkeitsbedingungen in die folgenden Gruppen eingeteilt:

$$
\begin{array}{ll}
\text{(IIIa)} & (\omega^i)' = [\omega^j \omega_j^i], \\
\text{(IIIb)} & (\omega^{m+s})' = [\omega^j \omega_j^{m+s}] = 0, \\
\text{(IIIc)} & \Omega_j^i = (\omega_j^i)' - [\omega_j^k \omega_k^i] = [\omega_j^{m+s} \omega_{m+s}^i], \\
\text{(IIId)} & (\omega_i^{m+s})' - [\omega_i^j \omega_j^{m+s}] = [\omega_i^{m+t} \omega_{m+t}^{m+s}], \\
\text{(IIIe)} & (\omega_{m+s}^i)' - [\omega_{m+s}^j \omega_j^i] = [\omega_{m+s}^{m+t} \omega_{m+t}^i], \\
\text{(IIIf)} & (\omega_{m+t}^{m+s})' = [\omega_{m+t}^i \omega_i^{m+s}] + [\omega_{m+t}^{m+\tau} \omega_{m+\tau}^{m+s}], \\
 & i, j, k = 1 \dots m, \quad s, t, \tau = 1 \dots q.
\end{array}
$$

Analog zum dreidimensionalen Fall nennen wir die Bedingungen (IIIc) Gaussche Bedingungen und die Bedingungen (IIId),(IIIe) und (IIIf) Bedingungen von Peterson-Codazzi.

8. Wir gehen nun zu einer detaillierteren Analyse der Integrierbarkeitsbedingungen (IIIa) - (IIIf) über.

Da die Bedingungen (IIIa) zusammen mit den Bedingungen (3.15) zur Bestimmung der Formen ω_j^i dienen (siehe Abschnitt 7), nehmen wir im weiteren Verlauf die Formen $\omega_j^i=\Gamma_{jk}^i\omega^k$ als so bestimmt an, daß (IIIa) - (3.15) identisch erfüllt werden [1], und die Flächenstrukturgleichungen können auf die Gleichungen (IIIb) - (IIIf) zurückgeführt werden.

Die Bedingungen (IIIc) können auf eine mehr symmetrische Gestalt gebracht werden. Wir multiplizieren beide Teile der

---

[1] Wie in Abschnitt 7 gezeigt, ist dafür im Falle des holonomen n-Beins notwendig und hinreichend, daß Γ_{jk}^i Christoffelsche Koeffizienten der Metrik $ds^2=g_{ij}du^i du^j$ sind.

Gleichung (IIIc) mit g_{ik}, summieren nach i und erhalten

$$\Omega_{ij} = \sum_{s=1}^{q} [\omega_i^{m+s} \omega_j^{m+s}], \qquad i, j = 1, \ldots, m, \tag{3.31}$$

wobei

$$\Omega_{ij} = g_{ik} \Omega_j^k, \qquad i, j, k = 1, \ldots, m. \tag{3.32}$$

Wir untersuchen nun die Gleichungen (IIId), (IIIe). Beim orthogonalen n-Bein stimmen die Bedingungen (IIId), (IIIe) aufgrund von Gleichung (3,23) überein. Beim halborthogonalen n-Bein sind die Bedingungen (IIId), (IIIe) ebenfalls äquivalent. Genauer: wenn die Gleichungen (IV), (3.19) erfüllt werden, dann folgen aus den Bedingungen (IIId) die Bedingungen (IIIe) und umgekehrt. Wir wollen uns nicht damit aufhalten, diese Tatsache zu beweisen.

Vollkommen verschieden sind somit die Bedingungen (IIIb), (IIIc), (IIId), (IIIf).

Die Bedingungen (IIIe) können dargestellt werden als

$$\Delta_i^s = [\omega_i^{m+t} \omega_{m+t}^{m+s}], \qquad s, t = 1, \ldots, q; \quad i = 1, \ldots, m, \tag{3.33}$$

wobei

$$\Delta_i^s = (\omega_i^{m+s})' - [\omega_i^j \omega_j^{m+s}] = \sum_{k<l} L_{ikl}^s [\omega^k \omega^l], \quad s = 1, \ldots, q; \quad i, j, k, l = 1, \ldots, m. \tag{3.34}$$

Die bilineare Form Δ_i^s nennen wir kovariante äußere Ableitung [1] der Form ω_i^{m+s}.

Wir wollen auf das Gesetz der Transformation der Formen ω^i, ω_β^α, eingehen, die durch die Transformation des n-Beins $I_1, \ldots, I_m$, $I_{m+1}, \ldots, I_{m+q}$ hervorgerufen wird. Man kann leicht nachweisen:

---

[1] Die Bezeichnung "kovariant" ist nicht zufällig. Geht man zu Tensoren über, kann man zeigen, daß die Operation direkt mit der kovarianten Differenzierung des Tensors λ_{ij}^s zusammenhängt. Beim holonomen n-Bein ist nämlich

$$L_{i,\,kl}^s = \lambda_{ik,\,l}^s - \lambda_{il,\,k}^s,$$

wobei $\lambda_{ik,\,l}^s$ die kovariante Ableitung des Tensors λ_{ik}^s ist (siehe Abschnitt 9, Gleichungen (3.50) - (3.51)).

Wenn das tangentiale n-Bein I_i mit Hilfe der Matrix

$$\bar{I}_i = A_i^j I_j, \tag{3.35}$$

transformiert wird, dann werden die Formen ω^i nach dem Kontravarianzgesetz transformiert:

$$\bar{\omega}^i = a_j^i \omega^j, \tag{3.36}$$

wobei

$$a_j^i A_i^k = \delta_j^k, \quad i, j, k = 1, \ldots, m, \tag{3.37}$$

und die Formen ω_i^{m+s}, Δ_i^s werden nach dem Kovarianzgesetz transformiert:

$$\bar{\omega}_i^{m+s} = A_i^j \omega_j^{m+s}, \quad \bar{\Delta}_i^s = A_i^j \Delta_j^s, \quad i, j = 1, \ldots, m; \; s = 1, \ldots, q. \tag{3.38}$$

Bei Transformation des normalen n-Beins $I_{m+1}, \ldots, I_{m+q}$ in seiner Ebene $E_q = [I_{m+1}, \ldots, I_{m+q}]$ mit Hilfe der orthogonalen Matrix A_t^s :

$$\bar{I}_{m+s} = A_s^t I_{m+t}, \quad s, t = 1, \ldots, q, \tag{3.39}$$

werden die Formen ω_i^{m+s}, Δ_i^s nach folgendem Gesetz transformiert:

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_i^{m+s} &= \sum_t A_s^t \omega_i^{m+t}, \\ \bar{\Delta}_i^s &= \sum_t A_s^t \Delta_i^t, \end{aligned} \qquad i = 1, \ldots, m; \; s, t = 1, \ldots, q. \tag{3.40}$$

9. Die Flächenstrukturgleichungen stellen algebraische Relationen zwischen den bilinearen schiefen Formen $(\omega^\alpha)'$, $(\omega_\beta^\alpha)'$, $[\omega^\beta \omega_\beta^\alpha]$, $[\omega_\alpha^\gamma \omega_\gamma^\beta]$ dar. Wir entwickeln die Formen nach den Klammern $[\omega^\alpha \omega^\beta]$, wenden das Eindeutigkeitstheorem an und kommen zu Relationen zwischen den Entwicklungskoeffizienten und erhalten infolgedessen die Strukturgleichungen in Koordinaten -(Tensor-)Schreibweise.

Wir beschränken uns auf die Betrachtung des holonomen n-Beins. Aus den Bedingungen (IIIc) folgt:

$$\omega_i^{m+s} = \lambda_{ij}^s du^j, \tag{3.41}$$

wobei

$$\lambda_{ij}^s = \lambda_{ji}^s, \quad s = 1, \ldots, q; \; i, j = 1, \ldots, m. \tag{3.42}$$

Wir entwickeln die Formen $\Omega_j^i = (\omega_j^i)' - [\omega_j^\alpha \omega_\alpha^i]$ nach den einfachen

Formen $[du^k\ du^l]$ und erhalten:

$$\Omega^i_j = \sum_{k<l} R^i_{jkl}\,[du^k\,du^l], \tag{3.43}$$

wobei

$$R^i_{jkl} = \frac{\partial\Gamma^i_{jl}}{\partial u^k} - \frac{\partial\Gamma^i_{jk}}{\partial u^l} - \Gamma^\alpha_{jk}\Gamma^i_{\alpha l} + \Gamma^\alpha_{jl}\Gamma^i_{\alpha k}, \tag{3.44}$$
$$i,\ j,\ k,\ l,\ \alpha = 1,\ \ldots,\ m.$$

Da bereits früher nachgewiesen wurde (siehe Abschnitt 7, Gleichungen (3,22) - (3.30)), daß Γ^i_{jk} die Christoffelschen Koeffizienten der Fläche $ds^2 = g_{ij}\,du^i\,du^j$, sind, folgt daraus, daß R^i_{jkl} Riemann-Christoffelscher Tensor mit dem bekannten Index ist. Wir projizieren die Gleichungen (IIIc) auf die Klammern $[du^k\ du^l]$ und erhalten

$$R^i_{jkl} = \lambda^s_{jk}\lambda^i_{sl} - \lambda^s_{jl}\lambda^i_{sk}, \tag{3.45}$$

wobei

$$\lambda^i_{sj} = -g^{ik}\lambda^s_{kj}, \qquad i,\ j,\ k,\ l = 1,\ \ldots,\ m;\quad s = 1,\ \ldots,\ q. \tag{3.46}$$

Wir projizieren die Gleichungen (3.31) auf die Klammern $[du^k\ du^l]$ und erhalten

$$R_{ij,\,kl} = \sum_{s=1}^{q}(\lambda^s_{ik}\lambda^s_{jl} - \lambda^s_{il}\lambda^s_{jk}), \qquad i,\ j,\ k,\ l = 1,\ \ldots,\ m, \tag{3.47}$$

wobei $R_{ij,kl}$ Riemann-Christoffelscher Tensor der Fläche ist [1].

Wir projizieren die Gleichungen (IIId) und erhalten

$$L^s_{ijk} = \frac{\partial\lambda^s_{ik}}{\partial u^j} - \frac{\partial\lambda^s_{ij}}{\partial u^k} - (\Gamma^\alpha_{ij}\lambda^s_{\alpha k} - \Gamma^\alpha_{ik}\lambda^s_{\alpha j}) = \lambda^t_{ij}A^s_{tk} - \lambda^t_{ik}A^s_{tj}, \tag{3.48}$$
$$s,\ t = 1,\ \ldots,\ q;\ i,\ j,\ k,\ \alpha = 1,\ \ldots,\ m,$$

wobei

$$\omega^{m+s}_{m+t} = A^s_{tj}\,du^j, \qquad s,\ t = 1,\ \ldots,\ q;\ j = 1,\ \ldots,\ m. \tag{3.49}$$

---

1) Aus der Darstellung (3.47) folgen leicht die bekannten algebraischen Eigenschaften des Riemann-Christoffelschen Tensors:

$$\left.\begin{aligned} R_{ij,\,kl} &= R_{kl,\,ij}, \\ R_{ij,\,kl} &= -R_{ji,\,kl}, \\ R_{ij,\,kl} + R_{ik,\,lj} + R_{il,\,jk} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{3.47'}$$

Bemerkt sei, daß Gleichung (3.48) dargestellt werden kann als:

$$L^s_{ijk} = \lambda^s_{ik,j} - \lambda^s_{ij,k} = \lambda^l_{ij} A^s_{lk} - \lambda^l_{ik} A^s_{lj}, \tag{3.50}$$

wobei $\lambda^s_{ij,k}$ kovariante Ableitung [1] des Tensors λ^s_{ij} nach der Koordinate u^k ist:

$$\lambda^s_{ij,k} = \frac{\partial \lambda^s_{ij}}{\partial u^k} - \Gamma^\alpha_{ki} \lambda^s_{\alpha j} - \Gamma^\alpha_{kj} \lambda^s_{\alpha i}, \qquad i, j, k, \alpha = 1, \ldots, m; \ s = 1, \ldots, q. \tag{3.51}$$

Schließlich projizieren wir Gleichung (IIIf) und erhalten

$$\frac{\partial A^s_{lk}}{\partial u^j} - \frac{\partial A^s_{lj}}{\partial u^k} = \lambda^\alpha_{lj} \lambda^s_{\alpha k} - \lambda^\alpha_{lk} \lambda^s_{\alpha j} + A^\tau_{lj} A^s_{\tau k} - A^\tau_{lk} A^s_{\tau j}. \tag{3.52}$$

Die Bedingungen (3.47), (3.48), (3.52) stellen die Bedingungen von Gauss-Codazzi in Tensor-Form dar.

10. Im Falle einer Hyperfläche lassen sich die Strukturgleichungen auf die Gleichungen

$$[\omega^i \omega_i^{m+1}] = 0, \tag{3.53}$$

$$\Omega_{ij} = [\omega_i^{m+1} \omega_j^{m+1}], \qquad i, j = 1, \ldots, m, \tag{3.54}$$

$$\Delta^1_i = (\omega_i^{m+1})' - [\omega_i^\alpha \omega_\alpha^{m+1}] = 0, \qquad i, \alpha = 1, \ldots, m. \tag{3.55}$$

zurückführen.

Wenn auf der Fläche ein holonomes n-Bein $I_i = \frac{\partial r}{\partial u^i}$ $(i = 1, \ldots, m)$, ausgewählt ist, dann erhalten wir nach Projektion der Gleichungen (3.53) - (3.55) auf die Klammern $[du^i \, du^j]$ die Strukturgleichungen in gewöhnlicher Tensorschreibweise:

$$\omega_i^{m+1} = \lambda_{ij} \, du^i, \ \lambda_{ij} = \lambda_{ji}, \tag{3.56}$$

$$R_{ij,kl} = \lambda_{ik} \lambda_{jl} - \lambda_{il} \lambda_{jk}, \tag{3.57}$$

$$L^1_{ijk} = \frac{\partial \lambda_{ik}}{\partial u^j} - \frac{\partial \lambda_{ij}}{\partial u^k} - (\Gamma^\alpha_{ij} \lambda_{\alpha k} - \Gamma^\alpha_{ik} \lambda_{\alpha j}) = \lambda_{ik,j} - \lambda_{ij,k} = 0,$$
$$i, j, k, \alpha = 1, \ldots, m, \tag{3.58}$$

wobei $\lambda_{ij,k}$ die kovariante Ableitung des Tensors λ_{ij} nach der Koordinate u^k bezeichnet.

Man kann sich leicht davon überzeugen, daß

$$d^2 r \cdot I_{m+1} = \lambda_{ij} \, du^i \, du^j, \quad i, j = 1, \ldots, m, \tag{3.59}$$

---

1) siehe [19], S.70 - 76

d.h. daß die Koeffizienten λ_{ij} der Entwicklung der Formen ω_i^{m+1} nach der Basis $du^1,\dots,du^m$ mit den Koeffizienten der zweiten quadratischen Form übereinstimmen.

Aus den Ableitungsformeln

$$dr = du^i I_i, \quad dI_i = \omega_i^j I_j + \omega_i^{m+1} I_{m+1},$$

erhalten wir nämlich durch Differenzieren:

$$\left.\begin{array}{l} d^2r = du^i\, dI_i = du^i\, \omega_i^{\alpha} I_{\alpha}, \qquad \alpha = 1,\dots,m+1, \\ d^2r \cdot I_{m+1} = \omega_i^{m+1}\, du^i = \lambda_{ij}\, du^i\, du^j, \end{array}\right\} \tag{3.60}$$

q.e.d.

Somit sind die in Koordinaten- (Tensor-)form geschriebenen Strukturgleichungen die gewöhnlichen Gauß- und Petersen-Codazzi-Bedingungen für die erste und zweite Grundform der Hyperflächen, und wir gelangen zum bekannten Existenztheorem einer Hyperfläche, die durch ihre Grundformen gegeben wird:

Theorem 2. Damit die zwei Formen $\mathrm{I} = g_{ij}\, du^i\, du^j$ und $\mathrm{II} = \lambda_{ij}\, du^i\, du^j$, von denen die erste positiv definit ist, erste und folglich auch zweite quadratische Grundform der Hyperfläche $V_m \subset E_{m+1}$ sind, ist notwendig und hinreichend, daß ihre Koeffizienten die Bedingungen von Gauss und Peterson-Codazzi (3,57), (3.58) erfüllen. [1)]

11. In dem Fall, wo die n-Bein-Schar dieselbe Dimension besitzt wie der Raum E_m, beschreibt der Ursprung des n-Beins $r(u^1,\dots,u^m)$ einen Bereich G des Raumes, und die Zahl $u^1,\dots,u^m$ stellt eine krummlinige Koordinate des Raumes E_m im Bereich G dar.

Somit ist das n-Bein $I_1,\dots,I_m$ in jedem Punkt $r(u^1,\dots,u^m)$ des Bereiches G definiert, und wir erhalten das Feld der n-Beine. In diesem Fall haben die Ableitungsformeln die Ge-

---

1) siehe [20], S. 179-182; [21], S. 358-360.

stalt

$$dr = \omega^i I_i,\quad dI_i = \omega_i^j I_j,\qquad i, j = 1, \ldots, m, \tag{3.61}$$

wobei ω^i, ω_j^i lineare Differentialformen von $du^1, \ldots, du^m$ sind. Aus den Gleichungen (3.61) erhalten wir leicht den Ausdruck für das metrische Element des Euklidischen Raumes:

$$dr^2 = ds^2 = g_{ij}\omega^i\omega^j, \qquad i, j = 1, \ldots, m, \tag{3.62}$$

wobei

$$g_{ij} = I_i I_j. \tag{3.63}$$

Die Integrierbarkeitsbedingungen der Gleichung (3.61) führen zu folgenden Gleichungen (siehe Abschnitt 2):

$$(\omega^i)' = [\omega^j\omega_j^i], \qquad i, j = 1, \ldots, m, \tag{3.64a}$$

$$(\omega_j^i)' = [\omega_j^k\omega_k^i], \qquad i, j, k = 1, \ldots, m. \tag{3.64b}$$

Wir differenzieren die Gleichungen (3.63), wenden die Formeln (3.61) an und erhalten schließlich

$$dg_{ij} = \omega_i^k g_{kj} + \omega_j^k g_{ki}, \qquad i, j, k = 1, \ldots, m. \tag{3.65}$$

Die Gleichungen (3.64) heißen Strukturgleichungen des Euklidischen Raumes, dessen Metrik $ds^2 = g_{ij}\omega^i\omega^j$ in einem gewissen krummlinigen Koordinatensystem $u^1, \ldots, u^m$ vorgegeben ist.

12. Wir betrachten die beliebige Riemannsche Metrik (Riemannscher Raum)

$$ds^2 = g_{ij}\, du^i\, du^j, \qquad i, j = 1, \ldots, m. \tag{3.66}$$

Wir wählen beliebig m linear unabhängige Formen

$$\omega^i = \omega^i(u, du) = a_j^i(u^1, \ldots, u^m)\, du^j, \ \det|a_j^i| \neq 0, \qquad i, j = 1, \ldots, m, \tag{3.67}$$

als neue Basis und können dem metrischen Element ds^2 des Riemannschen Raumes die Gestalt geben

$$ds^2 = \overline{g}_{ij}\omega^i\omega^j, \tag{3.68}$$

wobei

$$\overline{g}_{ij} = A_i^k A_j^l g_{kl}, \qquad A_i^j a_j^k = \delta_i^k, \qquad i, j, k, l = 1, \ldots, m. \tag{3.69}$$

Wir bestimmen das System der linearen Differentialformen ω_j^i mit Hilfe der Gleichungen

$$(\omega^i)' = [\omega^j \omega_j^i], \tag{3.70a}$$
$$dg_{ij} = \omega_i^h g_{hj} + \omega_j^k g_{hi}. \tag{3.70b}$$

Wie im Abschnitt 7 gezeigt, bestimmen die Relationen (3.70) die Formen ω_j^i vollständig. Die Formen ω_j^i nennen wir Zusammenhangsformen der Metrik. Aufgrund der holonomen Basis, wo $\omega^i = du^i$, haben die Relationen (3.70) die Gestalt

$$0 = [du^j \omega_j^i],$$

woraus wir unter Verwendung des Eindeutigkeitstheorems (siehe § 1, Abschnitt 2) erhalten:

$$\omega_j^i = \Gamma_{jk}^i \, du^k, \quad \Gamma_{jk}^i = \Gamma_{kj}^i.$$

Die Koeffizienten Γ_{jk}^i sind in diesem Fall die Zusammenhangskoeffizienten der Riemannschen Metrik.

Wir stellen schließlich die bilinearen Formen

$$\Omega_j^i = (\omega_j^i)' - [\omega_j^h \omega_h^i], \quad i, j, k = 1, \ldots, m. \tag{3.71}$$

auf. Wir entwickeln die Form Ω_j^i nach den Klammern $[\omega^k \ \omega^l]$ und erhalten

$$\Omega_j^i = \sum_{k<l} R_{jkl}^i [\omega^k \omega^l] = (\omega_j^i)' - [\omega_j^h \omega_h^i]. \tag{3.72}$$

Von den Formen Ω_j^i kann man zu den Formen Ω_{ij} mit Hilfe der Gleichungen

$$\Omega_{ij} = g_{ik} \Omega_j^k = \sum_{k<l} R_{ij,\,kl} [\omega^k \omega^l], \tag{3.73}$$

übergehen, wobei

$$R_{ij,\,kl} = g_{is} R_{jkl}^s, \quad i, j, k, l, s = 1, \ldots, m. \tag{3.74}$$

Die bilinearen Formen Ω_j^i (oder, was gleichbedeutend ist, Ω_{ij}) nennen wir Krümmmungsformen der Metrik.

Wir projizieren die Gleichungen (3.71) auf die Klammern $[\omega^k \ \omega^l]$ (siehe § 1 Abschnitt 6) und erhalten im Falle der holonomen Basis

$$\begin{aligned} R_{ij,\,k}^l &= \frac{\partial \Gamma_{jk}^l}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial x^j} - (\Gamma_{ik}^\alpha \Gamma_{j\alpha}^l - \Gamma_{jk}^\alpha \Gamma_{i\alpha}^l), \\ R_{ij,\,kl} &= g_{l\alpha} R_{ij,\,k}^\alpha, \quad i, j, k, l, \alpha = 1, \ldots, m. \end{aligned} \tag{3.75}$$

Die Koeffizienten $R_{ij,\,kl}$ stimmen in diesem Fall mit den Komponenten des Riemann-Christoffelschen Tensors überein.

Bei einer nicht-holonomen Basis $\omega^i (D\omega^i \neq 0)$ kann man ebenfalls von nicht-holonomen Zusammenhangskoeffizienten $\Gamma^i_{jk} (\neq \Gamma^i_{kj})$ und von nicht-holonomen Komponenten $R_{ij,kl}$ des Riemann-Christoffelschen Tensors sprechen.

Die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} (\omega^i)' &= [\omega^j \omega^i_j], \\ (\omega^i_j)' &= [\omega^k_j \omega^i_k] + \sum_{k<l} R^i_{jkl} [\omega^k \omega^l], \\ dg_{ij} &= \omega^k_i g_{kj} + \omega^k_j g_{ki}, \qquad i, j, k, l = 1, \ldots, m \end{aligned}\right\} \tag{3.76}$$

nennen wir Strukturgleichungen der Riemannschen Metrik.

Wir betrachten den Fall, wo $\Omega^i_j = 0$, d.h. der Riemann-Christoffelsche Tensor verschwindet. Dann bekommen die Strukturgleichungen der Riemannschen Metrik die Gestalt

$$\begin{aligned} (\omega^i)' &= [\omega^j \omega^i_j], \\ (\omega^i_j)' &= [\omega^k_j \omega^i_k], \\ dg_{ij} &= \omega^k_i g_{kj} + \omega^k_j g_{ki}, \qquad i, j, k = 1, \ldots, m \end{aligned}$$

und stimmen mit den Strukturgleichungen des Euklidischen Raumes überein. Die Metrik selbst ist in diesem Fall euklidisch, d.h. der Riemannsche Raum ist isometrisch zu einem Bereich G des Euklidischen Raumes.

Das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} dr &= \omega^i I_i, \\ dI_i &= \omega^j_i I_j, \\ I_i I_j &= g_{ij} \end{aligned}$$

ist nämlich vollständig integrierbar und bestimmt die Schar der n-Beine $\{r, I\}$. Der Ursprung r des n-Beines beschreibt einen Bereich G des Euklidischen Raumes, dessen Metrik die Gestalt

$$dr^2 = g_{ij} \omega^i \omega^j,$$

hat, d.h. sie stimmt mit der jeweiligen Metrik des Riemannschen Raumes überein.

Wenn $R_{ij,kl} = 0$, dann wird somit die Riemannsche Metrik euklidisch. Die umgekehrte Behauptung ist offensichtlich (siehe Abschnitt 11).

Und folglich gilt das

Theorem 3. Damit die Riemannsche Metrik $ds^2 = g_{ij}\omega^i\omega^j$ euklidisch ist, ist notwendig und hinreichend, daß der Riemann-Christoffelsche Tensor verschwindet.

13. Bei der geometrischen Untersuchung von Flächen ist es häufig nützlich, die sogenannten Tangentialgleichungen einer Fläche anzuwenden.

Wir untersuchen die Hyperebene E_{n-1} des Euklidischen Raumes E_n, die durch die Gleichungen

$$I \cdot (\rho - r) = \sum_{\alpha=1}^{n} I^\alpha (x^\alpha - x_0^\alpha) = \sum_{\alpha=1}^{n} A^\alpha x^\alpha + A^{n+1} = 0, \tag{3.77}$$

vorgegeben wird, wobei $I = \{I^\alpha\}$ Normalvektor der Hyperfläche; I^α seine Koordinaten; $\rho = \{x^\alpha\}$ der Ortsvektor eines Punktes der Hyperebene; x^α seine Koordinaten, r der Ortsvektor eines Punktes der Hyperfläche und

$$A^\alpha = I^\alpha, \quad A^{n+1} = -\sum_{\alpha=1}^{n} I^\alpha x_0^\alpha = -(Ir). \qquad \alpha = 1, \ldots, n.$$

Somit ist die linke Seite der Gleichung der Hyperebene E_{n-1} lineare Funktion der Koordinaten x^α :

$$P = \sum_{\alpha=1}^{n} A^\alpha x^\alpha + A^{n+1}. \tag{3.78}$$

Wenn A^α, A^{n+1} Funktionen der Variablen $u^1, \ldots, u^m$ sind, dann verstehen wir unter dem Ausdruck dP die lineare Funktion

$$\sum_{\alpha=1}^{n} B^\alpha x^\alpha + B^{n+1}, \tag{3.79}$$

deren Koeffizienten B^α, B^{n+1} Differentiale der entsprechenden Koeffizienten A^α, A^{n+1} der Funktion P sind :

$$B^\alpha = dA^\alpha, \quad B^{n+1} = dA^{n+1}. \tag{3.80}$$

$V_m \subset E_{m+q}$ sei eine m-dimensionale Fläche des m+q-dimensionalen Euklidischen Raumes, die mit einem halborthogonalen n-Bein $\{r, I_\alpha\}$ ausgestattet ist. Wir betrachten Hyperebenen, die durch die Gleichungen

$$P_\alpha = I_\alpha(\rho - r) = 0, \quad \alpha = 1, \ldots, m+q, \tag{3.81}$$

vorgegeben werden, wobei ρ Ortsvektor des beliebigen Punktes der Hyperebene und r Ortsvektor von Punkten auf der Fläche V_m ist.

Es ist klar, daß die Hyperebenen

$$P_{m+1} = 0, \ldots, P_{m+q} = 0$$

tangential zur Fläche V_m sind, da ihre Normalen Normalen der Fläche sind. Der Schnitt der Hyperebenen

$$P_\alpha = P_\alpha(u^1, \ldots, u^m) = 0, \qquad \alpha = 1, \ldots, m+q$$

bestimmt den Punkt $r = r(u^1, \ldots, u^m)$ der Fläche.

Die Gleichungen

$$P_\alpha(u^1, \ldots, u^m) = 0, \qquad \alpha = 1, \ldots, m+q, \tag{3.82}$$

heißen Tangentialgleichungen der Fläche V_m.

Wir differenzieren P_α, wenden die Ableitungsformeln der Fläche an :

$$\begin{aligned} dr &= \omega^i I_i, \qquad i = 1, \ldots, m, \\ dI_\alpha &= \omega_\alpha^\beta I_\beta, \quad \alpha, \beta = 1, \ldots, m+q, \end{aligned} \tag{3.83}$$

und erhalten

$$dP_\alpha = dI_\alpha(\rho - r) - I_\alpha \cdot dr = \omega_\alpha^\beta I_\beta(\rho - r) - I_\alpha \cdot dr = \omega_\alpha^\beta P_\beta - \omega_\alpha, \tag{3.84}$$

wobei

$$\omega_\alpha = I_\alpha \cdot dr = I_\alpha I_\beta \omega^\beta = g_{\alpha\beta}\, \omega^\beta. \tag{3.85}$$

Die Gleichungen

$$dP_\alpha = \omega_\alpha^\beta P_\beta - \omega_\alpha, \qquad \alpha, \beta = 1, \ldots, m+q \tag{3.86}$$

heißen tangentiale Ableitungsformeln der Fläche V_m.

Beim halborthogonalen n-Bein ist

$$\omega_{m+1} = 0, \ldots, \omega_{m+q} = 0,$$

und die Ableitungsformeln (3.86) haben die Gestalt

$$\begin{aligned} dP_{m+s} &= \omega_{m+s}^{\alpha} P_\alpha, \\ &\qquad s = 1, \ldots, q;\ i = 1, \ldots, m;\ \alpha = 1, \ldots, m+q. \\ dP_i &= \omega_i^\alpha P_\alpha - \omega_i, \end{aligned} \tag{3.87}$$

Wir führen die Größen

$$P^i = g^{ij} P_j, \qquad P^{m+s} = g^{m+s,\alpha} P_\alpha = P_{m+s}, \tag{3.88}$$

ein, wobei

$$g^{ij} g_{jk} = \delta_k^i, \quad \delta^{m+s,\alpha} = \delta_\alpha^{m+s}, \quad i, j, k = 1, \ldots, m;\ \alpha = 1, \ldots, m+q;\ s = 1, \ldots, q. \tag{3.89}$$

Es ist leicht nachzuweisen , daß P^α die Gleichungen

$$dP^i = -\omega_\alpha^i P^\alpha - \omega^i, \qquad s = 1, \ldots, q;\ i = 1, \ldots, m;\ \alpha = 1, \ldots, m+q. \tag{3.90}$$
$$dP^{m+s} = -\omega_\alpha^{m+s} P^\alpha,$$

erfüllt.

Bekanntlich heißt projektive Transformation des Euklidischen Raumes E_n eine solche eineindeutige Punkttransformation des Raumes E_n in sich selbst, bei der die Koordinaten $\bar{x}^\alpha$ des transformierten Punktes mit den Koordinaten x^α des ursprünglichen Punktes durch die linear gebrochene Gleichung

$$\bar{x}^\alpha = \frac{A_\beta^\alpha x^\beta + A_{n+1}^\alpha}{B_\beta x^\beta + B_{n+1}^\alpha}. \tag{3.91}$$

verbunden sind. Bei einer projektiven Transformation geht die Fläche V_m in eine Fläche $\bar{V}_m$ über. Die bezüglich projektiver Transformation invarianten Eigenschaften der Fläche V_m heißen projektiv.

Die Tangentialkoordinaten sind bei der Untersuchung der projektiven Eigenschaften einer Fläche besonders nützlich.

14. Bei der Untersuchung der metrischen Eigenschaften von Flächen spielen zwei arithmetische Invarianten der Fläche eine große Rolle, die gleichzeitig metrische wie auch projektive Invarianten der Fläche sind. Diese für die weitere Untersuchung wichtigen Invarianten haben die Bezeichnungen Rang und Typ der Fläche.

Wir geben zunächst eine formal algebraische Definition von Rang und Typ, danach gehen wir zur geometrischen Interpretation dieser Invarianten über, aus denen insbesondere ihre projektive Invarianz folgt.

Angemerkt sei, daß Rang und Typ vollständig mit dem System der gemischten Formen einer Fläche verbunden sind.

Definition 1. Als Rang der Fläche V_m in einem gegebenen Punkt M wird der Rang des Systems der gemischten Formen ω_i^{m+s} im Punkt M bezeichnet, d.h. die Zahl der linear unabhängigen Formen dieses Systems.

Bemerkt sei: Da bei Transformationen des halborthogonalen n-Beins die gemischten Formen nach dem linearen Gesetz transformiert werden (siehe Gleichungen (3.38) - (3.40)), hängt der Rang der Fläche im gegebenen Punkt nicht von der Wahl des n-Beins ab und ist folglich eine geometrische Invariante.

Klar ist: Wenn der Rang der Fläche V_m im gegebenen Punkt M gleich ρ ist, dann ist er in einem beliebigen Punkt einer gewissen Umgebung des Punktes M nicht kleiner als ρ; wenn der Rang im gegebenen Punkt M ein Maximum erreicht, erhält er somit in einer Umgebung von M ebenfalls seinen Maximalwert.

Im weiteren Verlauf beschränken wir uns auf die Betrachtung von Flächen, die in jedem Punkt ein und denselben Rang ρ haben. Die Zahl ρ nennen wir den Rang der Fläche.

Angemerkt sei, daß der Rang bei einer Hyperfläche auf folgende Weise definiert werden kann.

Definition 1^*. Die Hyperfläche $V_m \subset E_{m+1}$ hat den Rang ρ dann und nur dann, wenn man eine solche n-Bein-Schar $\{r, I_\alpha\}$ konstruieren kann, daß das System der gemischten Formen ω_i^{m+1} die Relationen

$$\left.\begin{array}{ll}[\omega_{i_1}^{m+1}\ldots\omega_{i_\rho}^{m+1}]\neq 0, & i_1,\ldots,i_\rho=1,\ldots,m,\quad i_1\neq i_2\neq\ldots\neq i_\rho,\\ [\omega_{i_1}^{m+1}\ldots\omega_{i_\rho}^{m+1}\,\omega_{i_{\rho+1}}^{m+1}]=0, & i_1,\ldots,i_{\rho+1}=1,\ldots,m.\end{array}\right\} \tag{3.92}$$

erfüllt.

Wir gehen nun zur Definition des Typs über.

Bei Hyperflächen $V_m \subset E_{m+1}$ stimmen Typ und Rang überein.

Bei einer beliebigen Fläche $V_m \subset E_{m+q}$ wird der Typ analog zum Rang der Hyperfläche definiert (siehe Definition 1^*), mit jenem Unterschied, daß die lineare Form ω_i^{m+1} durch die einfache q-Form $P_i = [\omega_i^{m+1} \ldots \omega_i^{m+q}]$ ersetzt wird.

Definition 2. Die Fläche $V_m \subset E_{m+q}$ hat den Typ t dann und nur dann, wenn man eine solche n-Bein-Schar $\{r, I_\alpha\}$ konstruieren kann, daß das System der gemischten Formen die Relationen

$$\left.\begin{array}{lll}[P_{i_1}\dots P_{i_t}]\neq 0, & i_1,\dots,i_t=1,\dots,m, & i_1\neq\dots\neq i_t,\\ [P_{i_1}\dots P_{i_{t+1}}]=0, & i_1,\dots,i_{t+1}=1,\dots,m, & \end{array}\right\} \tag{3.93}$$

invariant bezüglich der infinit. Transformationen des n-Beins erfüllt. 1) Hierbei ist

$$P_i=[\omega_i^{m+1}\dots\omega_i^{m+q}], \quad i=1,\dots,m. \tag{3.94}$$

Die von uns gegebene Definition des Typs hat den Nachteil, daß sie nicht völlig effektiv ist und nicht zuläßt, in einem beliebigen n-Bein den Typ der Fläche aufzustellen. Sie ist jedoch geeignet für die geometrische Interpretation des Typs.

Man kann leicht eine invariante Definition des Typs geben. Wir betrachten die alternierende q-Form

$$P_a=[\omega^{m+1}_{(\alpha_1}\dots\omega^{m+q}_{\alpha_q)}], \quad \alpha_1,\dots,\alpha_q=1,\dots,m, \tag{3.95}$$

wobei $(\alpha_1\dots\alpha_q)$ die Symmetrierung nach $\alpha_1,\dots,\alpha_q$ bezeichnet und a allgemein eine Kombination mit Wiederholungen der Indizes $\alpha_1,\dots,\alpha_q$ ist.

Definition 3. Die Fläche $V_m \subset E_{m+q}$ hat den Typ t, wenn es solche Kombinationen $a_1,\dots,a_t$ gibt, daß

$$[P_{a_1}\dots P_{a_t}]\neq 0 \tag{3.96}$$

und daß gleichzeitig für alle Kombinationen $a_1,\dots,a_{t+1}$

$$[P_{a_1}\dots P_{a_{t+1}}]\equiv 0. \tag{3.97}$$

Die Definition 3 ist äquivalent zur Definition 2. Mit ihrem Beweis halten wir uns nicht auf (siehe [13]).

---

1) Ein solches n-Bein bezeichnen wir als n-Bein allgemeiner Lage. Als n-Bein allgemeiner Lage wird im allgemeinen jenes n-Bein bezeichnet, in dem ein endliches System von Relationen invariant bezüglich aller zulässigen ausreichend geringen Transformationen des n-Beins erfüllt wird.

15. Wir stellen die geometrische Struktur der Flächen $V_m \subset E_{m+q}$ eines gegebenen Ranges ρ auf.

Theorem 4. Der Rang ρ der Fläche $V_m \subset E_{m+q}$ ist gleich der Zahl der Parameter, von denen die Tangentialebene der Fläche abhängt.

Beweis. Man kann leicht erkennen, daß das Gleichungssystem

$$\omega_\alpha^{m+s} = 0, \qquad s = 1, \ldots, q; \qquad \alpha = 1, \ldots, m, \tag{3.98}$$

vollkommen integrierbar ist. Bilden wir die bilinearen Kovarianten der Formen ω_α^{m+s}, sehen wir nämlich, daß sie gerade aufgrund der Gleichungen (3.98) verschwinden :

$$(\omega_\alpha^{m+s})' = [\omega_\alpha^\gamma \omega_\gamma^{m+s}] = [\omega_\alpha^k \omega_k^{m+s}] + [\omega_\alpha^{m+t} \omega_{m+t}^{m+s}] =$$
$$= 0 \bmod \omega_\beta^{m+s}, \quad s, t = 1, \ldots, q; \ k, \alpha, \beta = 1, \ldots, m; \ \gamma = 1, \ldots, m+q. \tag{3.99}$$

Hieraus folgt: Wenn das System der linearen Formen $\Omega^1, \ldots, \Omega^\rho$ Basis von $\{\omega_\alpha^{m+s}\}$ ist, dann ist das Gleichungssystem

$$\Omega^1 = \Omega^2 = \ldots = \Omega^\rho = 0 \tag{3.100}$$

vollkommen integrierbar.

Diese Behauptung geht aus der Äquivalenz von Gleichungssystem (3.98) und System (3.100) hervor.

Durch Transformation des tangentialen n-Beins $I_1, \ldots, I_m$ können wir die Kongruenz der Koordinatenformen $\omega^1, \ldots, \omega^\rho$ mit der Basis $\Omega^1, \ldots, \Omega^\rho$ der gemischten Formen ω_α^{m+s} erreichen. Dann erhalten wir :

$$\omega_\alpha^{m+s} = \lambda_{\alpha i}^s \omega^i, \qquad i = 1, \ldots, \rho; \qquad s = 1, \ldots, q; \ \alpha = 1, \ldots, m, \tag{3.101}$$

d.h.

$$\lambda_{\alpha\beta}^s = 0 \qquad \alpha = 1, \ldots, m; \ \beta = \rho + 1, \ldots, m; \ s = 1, \ldots, q. \tag{3.102}$$

Aufgrund der Symmetrie von $\lambda_{\alpha\beta}^s$ folgt hieraus :

$$\lambda_{\beta\alpha}^s = 0, \qquad \beta = \rho + 1, \ldots, m; \ \alpha = 1, \ldots, m; \ s = 1, \ldots, q, \tag{3.103}$$

d.h.

$$\omega_\alpha^{m+s} = 0, \qquad s = 1, \ldots, q; \qquad \alpha = \rho + 1, \ldots, m. \tag{3.104}$$

Wir bilden die Integrierbarkeitsbedingungen für die Gleichungen (3.104) und erhalten :

$$(\omega_\alpha^{m+s})' = [\omega_\alpha^\beta \omega_\beta^{m+s}] = [\omega_\alpha^i \omega_i^{m+s}] = 0;$$
$$\alpha = \rho + 1, \ldots, m; \ i = 1, \ldots, \rho; \ s = 1, \ldots, q; \ \beta = 1, \ldots, m+q. \tag{3.105}$$

Wir projizieren die Gleichungen (3.105) auf $[\omega^i \ \omega^\alpha]$, $[\omega^i \ \omega^j]$ (siehe § 1, Abschnitt 6) und ermitteln :

$$\Gamma^i_{\alpha\beta}\lambda^s_{ij}=0, \tag{3.106}$$

$$\Gamma^i_{\alpha j}\lambda^s_{ik}-\Gamma^i_{\alpha k}\lambda^s_{ij}=0, \tag{3.107}$$

wobei angenommen ist

$$\left.\begin{array}{c} \omega^i_\alpha=\Gamma^i_{\alpha j}\,\omega^j+\Gamma^i_{\alpha\beta}\,\omega^\beta, \\ \omega^{m+s}_i=\lambda^s_{ij}\,\omega^j, \\ s=1,\ldots,q;\quad \alpha,\beta=\rho+1,\ldots,m;\quad i,j=1,\ldots,\rho. \end{array}\right\} \tag{3.108}$$

Da der Rang des Gleichungssystems

$$\lambda^s_{ij}\,\xi^j=0,\qquad s=1,\ldots,q;\ i,j=1,\ldots,\rho, \tag{3.109}$$

gleich ρ ist, folgt aus den Gleichungen (3.106)

$$\Gamma^i_{\alpha\beta}=0,\qquad \alpha,\beta=\rho+1,\ldots,m;\qquad i=1,\ldots,\rho. \tag{3.110}$$

Also

$$\omega^i_\alpha=\Gamma^i_{\alpha j}\,\omega_j=0 \bmod \omega^1\ldots\omega^\rho,\qquad i,j=1,\ldots,\rho;\quad \alpha=\rho+1,\ldots,m. \tag{3.111}$$

Wie bereits gezeigt, ist das Gleichungssystem

$$\omega^1=\ldots=\omega^\rho=0 \tag{3.112}$$

vollkommen integrierbar und bestimmt die Schichtung der Fläche V_m in ∞ Flächen $V_{m-\rho}$ (siehe § 2, Abschnitt 3) :

$$V_m=\infty^\rho\, V_{m-\rho}, \tag{3.113}$$

wobei $V_{m-\rho}$ integrale Mannigfaltigkeiten sind, längs derer

$$\omega^1=\ldots=\omega^\rho=0.$$

Wir zeigen, daß $V_{m-\rho}$ die Ebenen $E_{m-\rho}$ sind. Der Einfachheit halber verwenden wir ein orthogonales n-Bein. Wir untersuchen die tangentialen Ableitungsformeln längs der Fläche $V_{m-\rho}$:

$$\begin{array}{c} dr=\omega^\alpha I_\alpha, \\ dP_{m+s}=\omega^{m+t}_{m+s}P_{m+t}, \\ dP_i=\omega^j_i P_j, \\ \alpha=\rho+1,\ldots,m;\quad i,j=1,\ldots,\rho;\quad s,t=1,\ldots,q. \end{array} \tag{3.114}$$

Hieraus folgt, daß längs $V_{m-\rho}$ der Schnitt $E_{m-\rho}$ der Hyperebenen

$$P_{m+s}=0,\qquad P_i=0,\qquad i=1,\ldots,\rho;\quad s=1,\ldots,q, \tag{3.115}$$

konstant bleibt. Da $E_{m-\rho}$ $V_{m-\rho}$ berührt, ist

$$V_{m-\rho}=E_{m-\rho}.$$

Aus den Bedingungen (3.114) folgt außerdem, daß die Tangentialebene E_m längs $E_{m-\rho}$ konstant bleibt.

q.e.d.

Da der Begriff des Ranges aufgrund von Theorem 3 in projektivinvarianten Begriffen formuliert ist, kann man leicht erkennen, daß der Rang die projektive Invariante der Fläche ist, d.h. die Fläche $\bar{V}_m$, die aus V_m durch eine projektive Transformation hervorgeht, hat denselben Rang.

16. Wir gehen nun zur geometrischen Charakterisierung der Flächen $V_m \subset E_{m+q}$ eines gegebenen Typs t über. Wir beschränken uns auf die Formulierung der Theoreme, für den Beweis verweisen wir auf die entsprechenden Arbeiten.

Theorem 5. Die Flächen $V_m \subset E_{m+2}$ (Flächen mit zwei Normalen) eines gegebenen Typs t erfüllen die Alternative :

1. Die Fläche V_m ist Fläche des Ranges 2t oder 2t + 1 .
2. Die Fläche V_m liegt in einer Hyperfläche V_{m+1} des Ranges t.

Bei einer Fläche mit zwei Normalen wird somit der Typ in projektiv-invarianten Begriffen ausgedrückt : "Zugehörigkeit", "Rang"; hieraus geht insbesondere die projektive Invarianz des Typs hervor. Zum Beweis siehe [13].

Im Allgemeinfall einer Fläche mit q Normalen (q>2) ist die geometrische Interpretation etwas schwieriger.

Wir untersuchen der Einfachheit halber den Fall t = 0. Wir ziehen durch jeden Punkt M der Fläche eine tangentiale Gerade, d.h. eine Gerade in Richtung eines Tangentialvektors I. Die Fläche V, die durch diese Tangenten beschrieben wird, hat allgemein die Dimension m+1. Der Ortsvektor R dieser Fläche wird folgendermaßen ausgedrückt:

$$R = r + sI,$$

wobei R den Ortsvektor der Ausgangsfläche V_m und s den Parameter bezeichnet, der sich längs der Tangente verändert.

Wir nennen das Feld der Tangenten (oder, was dasselbe ist, das Feld der Vektoren I) sich berührend, wenn längs der Tangente r + sI (r,I sind fixiert) eine tangentiale Hyperebene zur Fläche V_{m+1}, die diesem Feld entspricht, unverändert bleibt. Dann können wir folgende Charakterisierung der Flächen $V_m \subset E_{m+q}$ des Typs t = 0 geben.

Theorem 6. Die Fläche $V_m \subset E_{m+q}$ besitzt den Typ t = 0, wenn ein beliebiges Tangentenfeld sich berührend ist.

Da das sich berührende Feld ein projektiver Begriff ist, folgt aus dieser Definition unmittelbar die projektive Invarianz des Typs.

Angemerkt sei, daß bei einem dreidimensionalen Raum E_3 für die Flächen folgende Fälle möglich sind :

Die Fläche V_2 kann vom Rang 0 (Ebene), Rang 1 (abwickelbare Fläche), Rang 2 (belibige Fläche) sein.

Die "Flächen" V_1 (Kurven) haben immer den Typ 0 und den Rang 0 (Geraden) oder 1 (beliebige Kurven).

17. Die wesentlichen Invarianten der Fläche - Typ und Rang - bestimmen die Art der Einbettung der Fläche V_m in den Euklidischen Raum E_{m+q}. Bekanntlich heißen zwei Flächen V_2 mit dem Ortsvektor r und V_2 mit dem Ortsvektor $\bar{r}$ isometrisch, wenn man zwischen ihnen eine solche eindeutige Abbildung aufstellen kann, daß wir in den entsprechenden Punkten

$$dr^2 = d\bar{r}^2$$

erhalten. Eine solche Abbildung nennen wir Isometrie oder Verbiegung und bezeichnen sie mit dem Symbol

$$V_2 \backsim \bar{V}_2.$$

Ganz analog wird auch die Verbiegung im mehrdimensionalen Fall bestimmt. Die Verbiegung heißt nicht-trivial, wenn die isometrischen Flächen nicht kongruent sind.

Im dreidimensionalen Fall läßt eine beliebige ausreichend glatte Fläche immer eine nicht-triviale Verbiegung zu, zumindest im kleinen. Die Ausnahme stellen einige Flächen mit einem Flachpunkt höherer Ordnung dar, wie von N. V. Efimov untersucht (siehe [10]). Im Unterschied dazu ist im mehrdimensionalen Fall eine Verbiegung nicht immer möglich, i.a. fehlt sie. Richtig ist folgendes Theorem, das zum ersten Mal von Beez [11] aufgestellt wurde:

Theorem 7. Die Hyperflächen $V_m \subset E_{m+1}$ des Rangs $r>2$ sind nicht verbiegbar, d.h. wenn V_m den Rang $r>2$ besitzt, dann ist eine beliebige Fläche $\overline{V}_m \sim V_m$ ($\sim$ Isometrie-Zeichen) kongruent mit V_m:

$$\overline{V}_m \equiv V_m \qquad (\equiv \text{ Kongruenz-Zeichen}).$$

Die Eigenschaft der Nichtverbiegbarkeit ist so stark, daß sie auch bei den Flächen erhalten bleibt. Von Allendörfer [12] stammt folgendes Theorem, das eine Verallgemeinerung des Beezschen Theorems ist:

Die Flächen $V_m \subset E_{m+q}$ des Typs $t>2$ sind nicht verbiegbar.

Wir beschränken uns darauf, das Theorem für den Fall einer Hyperfläche zu beweisen.

$V_m \subset E_{m+1}$ sei eine dreifach differenzierbare Hyperfläche des Ranges $r>2$. Wir statten V_m so mit der zweifach differenzierbaren Schar orthogonaler n-Beine $r, I_1, \ldots, I_m, I_{m+1}$ aus, daß die Gleichungen

$$dr = \omega^i I_i, \qquad i = 1, \ldots, m, \tag{3.116}$$

$$dI_\alpha = \omega_\alpha^\beta I_\beta, \qquad \alpha, \beta = 1, \ldots, m+1, \tag{3.117}$$

$$I_\alpha \cdot I_\beta = \delta_{\alpha\beta}, \qquad \alpha, \beta = 1, \ldots, m+1, \tag{3.118}$$

$$\omega_\alpha^\beta + \omega_\beta^\alpha = 0. \tag{3.119}$$

erfüllt werden.

$\overline{V}_m$ sei eine mit V_m isometrische Fläche. Wir statten sie mit dem halborthogonalen n-Bein $\overline{r}, \overline{I}_1, \ldots, \overline{I}_m, \overline{I}_{m+1}$ aus, das die Forderung

$$d\overline{r} = \overline{\omega}^i \overline{I}_i = \omega^i \overline{I}_i, \qquad i = 1, \ldots, m, \tag{3.120}$$

erfüllt, wobei $\overline{r}$ Ortsvektor der Fläche $\overline{V}_m$ und ω^i Formen der

Fläche V_m sind. Ein solches n-Bein gibt es und es ist eindeutig bestimmt. Aufgrund der Isometrie $V_m \sim \overline{V}_m$ erhalten wir

$$dr^2 = I_i I_j \omega^i \omega^j = dr^2 = \overline{I}_i \overline{I}_j \overline{\omega}^i \overline{\omega}^j = \overline{I}_i \overline{I}_j \omega^i \omega^j. \tag{3.121}$$

Hieraus folgt

$$\overline{I}_i \overline{I}_j = I_i I_j = \delta_{ij}, \tag{3.122}$$

d.h. das n-Bein $I_1, \ldots, I_{m+1}$ ist orthogonal und eindeutig.

Wir untersuchen die Integrierbarkeitsbedingungen der Gleichungen

$$\omega^i = \overline{\omega}^i. \tag{3.123}$$

Wir setzen die bilinearen Kovarianten ein und erhalten

$$(\omega^i)' = [\omega^j \omega_j^i] = (\overline{\omega}^i)' = [\overline{\omega}^j \overline{\omega}_j^i] = [\omega^j \overline{\omega}_j^i]. \tag{3.124}$$

Hieraus folgt

$$[\omega^j \Delta_j^i] = 0, \tag{3.125}$$

wobei

$$\Delta_j^i = \overline{\omega}_j^i - \omega_j^i = -\Delta_i^j, \quad i, j = 1, \ldots, m. \tag{3.126}$$

Wir wenden das Eindeutigkeitstheorem (Theorem 2 § 1) an und leiten aus den Gleichungen (3.126) ab :

$$\Delta_j^i = x_{jk}^i \omega^k, \quad x_{jk}^i = x_{kj}^i = -x_{ik}^j. \tag{3.127}$$

Somit sind die Zerlegungskoeffizienten der Größe x_{jh}^i antisymmetrisch im unteren und oberen Index und symmetrisch in den unteren Indizes.

Wir wenden diese Eigenschaft an und erhalten

$$x_{jk}^i = -x_{ik}^j = -x_{ki}^j = x_{ji}^k = x_{ij}^k = -x_{kj}^i = -x_{jk}^i. \tag{3.128}$$

Hieraus folgt

$$x_{jk}^i = 0, \tag{3.129}$$

d.h.

$$\Delta_j^i = 0, \quad \overline{\omega}_j^i = \omega_j^i \text{ [1]}. \tag{3.130}$$

---

[1] Bemerkt sei, daß dieses Ergebnis aus der allgemeinen Behauptung in Abschnitt 7 § 3 hervorgeht. Wir haben es jedoch noch einmal für den Fall des orthogonalen n-Beins bewiesen, wo die Berechnung besonders einfach ist.

Wir setzen die Integrierbarkeitsbedingungen der Gleichungen (3.130) ein und erhalten

$$(\omega_j^i)' = [\omega_j^\alpha \omega_\alpha^i] = (\bar{\omega}_j^i)' = [\bar{\omega}_j^\alpha \bar{\omega}_\alpha^i], \tag{3.131}$$

woraus unmittelbar folgt :

$$[\omega_j^{m+1} \omega_{m+1}^i] = [\bar{\omega}_j^{m+1} \bar{\omega}_{m+1}^i]. \tag{3.132}$$

Verwenden wir die Antisymmetrie-Eigenschaft der Formen ω_β^α, erhalten wir

$$[\omega_i^{m+1} \omega_j^{m+1}] = [\bar{\omega}_i^{m+1} \bar{\omega}_j^{m+1}]. \tag{3.133}$$

Wir multiplizieren diese Gleichungen von außen mit $\bar{\omega}_i^{m+1}$ und erhalten

$$[\omega_i^{m+1} \bar{\omega}_i^{m+1} \omega_j^{m+1}] = 0, \quad i, j = 1, \ldots, m. \tag{3.134}$$

Die Formen ω_i^{m+1}, $\bar{\omega}_i^{m+1}$ erfüllen die Alternative:

A) Wenn auch nur für ein einziges i $[\omega_i^{m+1} \bar{\omega}_i^{m+1}] \neq 0$, d.h. wenn die Formen ω_i^{m+1}, $\bar{\omega}_i^{m+1}$ linear unabhängig sind, dann bezeichnen die Gleichungen (3.134), daß

$$\bar{\omega}_j^{m+1} = 0 \bmod \omega_i^{m+1}, \bar{\omega}_i^{m+1}, \quad j = 1, \ldots, m, \tag{3.135}$$

d.h. daß der Rang der Formen ω_i^{m+1}, $\bar{\omega}_j^{m+1}$ gleich 2 ist, was unmöglich ist.

B) Für alle Indizes i und bei beliebiger Wahl des n-Beins $I_1, \ldots, I_m$ erhalten wir

$$[\omega_i^{m+1} \bar{\omega}_i^{m+1}] = 0, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{3.136}$$

und hieraus

$$\bar{\omega}_i^{m+1} = \lambda_i \omega_i^{m+1}, \quad i = 1, \ldots, m. \tag{3.137}$$

Wir setzen (3.137) in Gleichung (3.133) ein und erhalten

$$(\lambda_i \lambda_j - 1)[\omega_i^{m+1} \omega_j^{m+1}] = 0. \tag{3.138}$$

Da der Rang der Formen ω_i^{m+1} größer zwei ist, gilt im n-Bein allgemeiner Lage

$$[\omega_i^{m+1} \omega_j^{m+1}] \neq 0. \tag{3.139}$$

Hieraus folgt

$$\lambda_i \lambda_j = 1, \quad i, j, = 1, \ldots, m. \tag{3.140}$$

Aus der Gleichung (3.140) erhalten wir bei $m \geqslant 3$

$$\lambda_i = \pm 1. \tag{3.141}$$

Ändern wir die Richtung der Normalen an der Fläche $\bar{V}_m$ im Fall $\lambda_i = -1$, erhalten wir

$$\lambda_i = 1. \tag{3.142}$$

Somit erhalten wir

$$\left.\begin{aligned} &\omega^i = \bar{\omega}^i, \\ &\omega^i_j = \bar{\omega}^i_j, \\ &\omega^{m+1}_i = \bar{\omega}^{m+1}_i = -\omega^i_{m+1} = -\bar{\omega}^i_{m+1}, \\ &I_\alpha I_\beta = \bar{I}_\alpha \bar{I}_\beta = \delta_{\alpha\beta}, \quad i, j = 1, \dots, m; \quad \alpha, \beta = 1, \dots, m+1. \end{aligned}\right\} \tag{3.143}$$

Die Flächen V_m, $\bar{V}_m$ sind kongruent.

q.e.d.

§ 4. Einbettung der Riemannschen Metrik in den Euklidischen Raum

1. Wir betrachten die m-dimensionale Riemannsche Metrik

$$ds^2 = g_{ij}\omega^i\omega^j, \quad i, j = 1, \dots, m, \tag{4.1}$$

wobei ω^i differenzierbare lineare Formen von $du^1, \dots, du^m$ sind :

$$\omega^i = a^i_j du^j, \quad i, j = 1, \dots, m, \ \det|a^i_j| \neq 0, \tag{4.2}$$

g_{ij}, a^i_j sind zweimal stetig differenzierbare [1] Funktionen von den Parametern $u^1, \dots, u^m$.

---

1) Die Forderungen nach zweimaliger Differenzierbarkeit der Metrik und dreifacher Differenzierbarkeit der sie realisierenden Fläche sind die minimalen Glattheitsbedingungen, die in unserer Theorie über die Formulierung der Theoreme zur Realisierung der Metrik notwendig sind. Diese Forderungen gewährleisten die Existenz eines Tensors der Riemann-Christoffelschen Metrik. Bei vielen Behauptungen hingegen, wo die Differenzierbarkeit des Riemann-Christoffelschen Tensors gefordert wird, wird die Metrik als dreifach differenzierbar angenommen. In einigen Fällen, die von uns strikt ausbedungen werden, fordern wir eine 4- oder 5-fache Differenzierbarkeit oder sogar die Analytizität der Metrik.

Definition 1. Wir sagen, daß die m-dimensionale Metrik $ds^2 = g_{ij}\omega^i\omega^j$ $(i, j = 1, \ldots, m)$ die Einbettung in den m+q-dimensionalen reellen Raum E_{m+q} zuläßt (oder im m+q-dimensionalen reellen Euklidischen Raum realisiert wird), wenn es in E_{m+q} eine dreimal stetig differenzierbare Fläche V_m mit dem Ortsvektor $r = r(u^1, \ldots, u^m)$ gibt, die die gegebene Metrik besitzt :

$$dr^2 = ds^2 = g_{ij}\omega^i\omega^j. \tag{4.3}$$

Die Fläche $V_m \subset E_{m+q}$ heißt Realisierung der Metrik.

Wir leiten die Einbettungsbedingungen der m-dimensionalen Metrik in E_{m+q} her. Angenommen, die Metrik (4.1) habe die Realisierung $V_m \subset E_{m+q}$. Man kann leicht erkennen, daß es für die Fläche V_m bei gegebenen Formen $\omega^1, \ldots, \omega^m$ immer möglich ist, ein solches tangentiales n-Bein $I_1, \ldots, I_m$ zu konstruieren, daß gilt :

$$dr = \omega^i I_i. \tag{4.4}$$

Quadrieren wir (4.4), so erhalten wir

$$dr^2 = I_i I_j \omega^i\omega^j = g_{ij}\omega^i\omega^j. \tag{4.5}$$

Da die Gleichung (4.5) identisch ist bezüglich ω^i müssen wir

$$I_i I_j = g_{ij}, \quad i, j = 1, \ldots, m. \tag{4.6}$$

erhalten.

Somit kann man ein tangentiales n-Bein $I_1, \ldots, I_m$ der Fläche V_m konstruieren, das die Bedingungen

$$dr = \omega^i I_i, \tag{4.7a}$$
$$I_i I_j = g_{ij}, \quad i, j = 1, \ldots, m. \tag{4.7b}$$

erfüllt. Wir ergänzen die Vektoren $I_1, \ldots, I_m$ so durch normale Vektoren $I_{m+1}, \ldots, I_{m+q}$, daß ein halborthogonales n-Bein $I_1, \ldots, I_m, I_{m+1}, \ldots, I_{m+q}$ gebildet wird, d.h. daß die Bedingungen

$$I_{m+s} \cdot I_\alpha = \delta_{m+s\,\alpha}, \quad s = 1, \ldots, q; \ \alpha = 1, \ldots, m+q. \tag{4.8}$$

erfüllt werden. Die Ableitungsformeln der Fläche $V_m \subset E_{m+q}$ haben die Gestalt

$$\begin{aligned} dr &= \omega^i I_i, & i &= 1, \ldots, m, \\ dI_\alpha &= \omega_\alpha^\beta I_\beta, & \alpha, \beta &= 1, \ldots, m+q. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Die Strukturgleichungen ergeben (siehe § 3 Abschnitte 7, 8) :

$$(\omega^i)' = [\omega^j \omega_j^i], \tag{4.10a}$$
$$[\omega^i \omega_i^{m+s}] = 0, \tag{4.10b}$$
$$\Omega_{ij} = [\omega_i^{m+s} \omega_j^{m+s}], \tag{4.10c}$$
$$\Delta_i^s = (\omega_i^{m+s})' - [\omega_i^j \omega_j^{m+s}] = [\omega_i^{m+t} \omega_{m+t}^{m+s}], \tag{4.10d}$$
$$(\omega_{m+t}^{m+s})' = [\omega_{m+t}^j \omega_j^{m+s}] + [\omega_{m+t}^{m+\tau} \omega_{m+\tau}^{m+s}]. \tag{4.10e}$$

Die algebraischen Abhängigkeiten IV zwischen den Formen ω_β^α erhalten dann die Gestalt (siehe § 3 Abschnitt 5) :

$$dg_{ij} = \omega_i^k g_{kj} + \omega_j^k g_{ki}, \tag{4.11a}$$
$$\omega_{m+s}^i = -g^{ij} \omega_j^{m+s}, \tag{4.11b}$$
$$\omega_{m+t}^{m+s} = -\omega_{m+s}^{m+t}, \qquad i, j, k = 1, \ldots, m; \quad s, t = 1, \ldots, q_1, \tag{4.11c}$$

wobei $g^{ij} g_{jh} = \delta_k^i$.

Angemerkt sei, daß die inneren Formen ω_j^i der Fläche $V_m \subset E_{m+q}$, die die gegebene Metrik realisiert, mit den Zusammenhangsformen ω_j^i der Metrik übereinstimmen (siehe § 3 Abschnitt 12). Dies folgt aus den Relationen (4.10a), (4.11a), die von den inneren Formen erfüllt werden und die definitionsgemäß auch von den Zusammenhangsformen der Metrik erfüllt werden müssen.

Die bilinearen Formen Ω_{ij} sind die Krümmungsformen der Metrik (siehe § 3 Abschnitt 12), so daß die Relationen

$$\Omega_{ij} = \sum_{k<l} R_{ij,kl} [\omega^k \omega^l], \tag{4.12}$$

gelten, wobei $R_{ij,kl}$ der Krümmungstensor der Riemann-Christoffelschen Metrik ist.

Somit kann man folgende Einbettungsbedingung der Metrik in den Raum E_{m+q} formulieren :

<u>Theorem 1</u>. Notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die gegebenen m-dimensionale Metrik $ds^2 = g_{ij}\omega^i\omega^j$ die Einbettung in E_{m+q} zuläßt, ist die Existenz von Formen ω_i^{m+s}, ω_{m+s}^i, ω_{m+t}^{m+s}, , die die Bedingungen (4.10b) ÷ (4.10e), (4.11b), (4.11c) erfüllen.

Beweis. Die Notwendigkeit ist offensichtlich. Wir beweisen, daß sie hinreichend sind. Wir ergänzen das System der Formen ω^i, ω_i^j $(i, j=1, \ldots, m)$ durch die Formen $\omega^{m+s}=0$, ω_i^{m+s}, ω_{m+s}^i, ω_{m+t}^{m+s}, die die Bedingungen (4.10b) - (4.10e), (4.11b), (4.11c) erfüllen. Aufgrund dieser Bedingungen erfüllt das System der Formen ω^α, ω_β^α $(\alpha, \beta=1, \ldots, m+q)$ die Relationen

$$\left.\begin{aligned} (\omega^\alpha)' &= [\omega^\beta \omega_\beta^\alpha], \\ (\omega_\beta^\alpha)' &= [\omega_\beta^\gamma \omega_\gamma^\alpha]. \end{aligned}\right\} \tag{4.13}$$

Hieraus folgt die vollständige Integrierbarkeit der Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} dr &= \omega^i I_i, \\ dI_\alpha &= \omega_\alpha^\beta I_\beta, \\ I_\alpha I_\beta &= g_{\alpha\beta}, \qquad i=1, \ldots, m;\ \alpha,\ \beta=1, \ldots, m+q, \end{aligned}\right\} \tag{4.14}$$

wobei g_{ij} $(i,j = 1,\ldots,m)$ die Komponenten des metrischen Tensors $g_{\alpha m+s}=\delta_{\alpha m+s}$ $(\alpha=1, \ldots, m+q;\ s=1, \ldots, q)$ sind.

Integral-Mannigfaltigkeiten der Gleichungen sind Flächen $V_m \subset E_{m+q}$, welche die gegebene Metrik induzieren.

q.e.d.

2. Wir führen nun den Begriff der Metrik-Klasse ein.

<u>Definition 2</u>. Metrik-Klasse heißt diejenige Zahl q, so daß die Metrik ds^2 in E_{m+q} realisiert wird, aber nicht realisiert wird in einem Raum geringerer Dimension E_{m+p} $(p<q)$.

Somit können wir das Theorem 1 folgendermaßen formulieren (notwendiges und hinreichendes Kriterium der Klasse) :

Damit die Metrik $ds^2=g_{ij}\omega^i\omega^j$ die Klasse $\leqslant q$ hat, ist notwendig und hinreichend, daß das System der Formen ω^i, ω_j^i ergänzt werden kann durch das System der Formen

$$\left.\begin{aligned} \omega^{m+s} &= 0 \qquad s=1, \ldots, q, \\ \omega_i^{m+s},\ \omega_{m+s}^i &= -g^{ij}\omega_j^{m+s}, \\ \omega_{m+t}^{m+s} &= -\omega_{m+s}^{m+t}, \end{aligned}\right\} \tag{4.15}$$

welche die Relationen (4.10b) - (4.10e) erfüllen.

Wir führen schließlich den für den weiteren Fortgang wichtigen Begriff des Metrik-Ranges ein.

Definition 3. Rang der Metrik $ds^2 = g_{ij}\omega^i\omega^j$ $(i, j = 1, \ldots, m)$ heißt der Rang des Systems der alternierenden bilinearen Formen (Krümmungsformen der Metrik)

$$\Omega_{ij} = \sum_{k<l} R_{ij,kl}[\omega^k\omega^l], \quad i, j, k, l = 1, \ldots, m. \tag{4.16}$$

Man kann leicht erkennen, daß der Rang der Metrik gleich dem Rang der Matrix $R_{ij,k\alpha}$ ist, wobei die Kombination (i,j,k) der Matrixzeile entspricht, α ist Spaltennummer, $i,j,k,\alpha = 1,\ldots,m$. Klar ist, daß der Rang invariant bestimmt wird hinsichtlich linearen nichtentarteten Transformationen der Formen ω^i der Metrik.

3. Wir betrachten die Metrik $ds^2 = g_{ij}\omega^i\omega^j$. $(i, j = 1, \ldots, m)$. Da die Metrik ihrem Sinn nach invariant sein muß bezüglich Transformationen der Basisformen ω^i, werden bei Transformationen der Formen ω^i nach dem Gesetz

$$\bar{\omega}^i = a^i_j\omega^j, \quad i, j = 1, \ldots, m, \tag{4.17}$$

die Komponenten g_{ij} des metrischen Tensors nach dem Gesetz

$$\bar{g}_{ij} = A^k_i A^l_j g_{kl}, \; A^j_i a^k_j = \delta^k_i, \quad i, j, k, l = 1, \ldots, m. \tag{4.18}$$

transformiert. Die Variablen ω^i kann man als Koordinaten eines Vektors im Euklidischen Hilfsraum E_n, betrachten, der mit dem gegebenen Punkt $u^1,\ldots,u^m$ des Riemannschen Raumes assoziiert wird.[1)] Dabei wird in E_n das Koordinaten-n-Bein $I_1,\ldots,I_m$ fixiert, das die Forderung

$$I_i \cdot I_j = g_{ij}, \quad i, j = 1, \ldots, m. \tag{4.19}$$

erfüllt. Dann können wir annehmen, daß umgekehrt die Transformation der Variablen ω^i eine Transformation des n-Beins $I_1,\ldots,I_m$ in S_m induziert. Dafür ist notwendig, daß die Transformation

$$\bar{I}_i = A^j_i I_j, \quad i, j = 1, \ldots, m \tag{4.20}$$

des n-Beins $\{I_i\}$ eine Transformation

$$\bar{\omega}^i = a^i_j\omega^j, \; a^i_j A^j_k = \delta^i_k, \quad i, j, k = 1, \ldots, m \tag{4.21}$$

der Formen ω^i induziert. Bei einer derartigen Entsprechung

---

1) siehe Definition des tangentialen Euklidischen Raumes in [19], S. 77-78, [22], S.86 .

bleibt das Element ds^2 invariant, da g_{ij} als kovarianter Tensor transformiert wird. Wenn wir ein solches n-Bein $I_1,\ldots,I_m$ mit

$$g_{ij} = \delta_{ij}, \qquad i, j = 1, \ldots, m, \tag{4.22}$$

wählen, dann erhält ds^2 die Gestalt

$$ds^2 = (\omega^1)^2 + \ldots + (\omega^m)^2. \tag{4.23}$$

Ein solches n-Bein nennen wir orthogonal.

Die Relationen

$$dg_{ij} = \omega_i^k g_{kj} + \omega_j^k g_{ki}, \qquad i, j, k = 1, \ldots, m \tag{4.24}$$

haben im orthogonalen n-Bein die Gestalt

$$\omega_k^i + \omega_i^k = 0, \qquad i, k = 1, \ldots, m. \tag{4.25}$$

Klar ist, daß die orthogonale Transformation

$$\bar{I}_i = A_i^j I_j, \quad \| A_j^i \| \text{ orthogonale Matrix} \tag{4.26}$$

des orthogonalen n-Beins wieder zu einem orthogonalen n-Bein wie vorher führt :

$$ds^2 = (\bar{\omega}^1)^2 + \ldots + (\bar{\omega}^m)^2.$$

Im orthogonalen n-Bein verlieren die Unterschiede zwischen den oberen und unteren Indizes ihre Bedeutung, da wir z.B. erhalten :

$$\Omega_{ij} = g_{ik}\Omega_j^k = \delta_{ik}\Omega_j^k = \Omega_j^i, \tag{4.27}$$

wobei

$$\Omega_{ij} = \sum_{k<l} R_{ij,kl}\,[\omega^k\omega^l], \quad \Omega_j^i = \sum_{k<l} R_{jkl}^i\,[\omega^k\omega^l]. \tag{4.28}$$

Wir führen den Begriff des n-Beins allgemeiner Lage ein.

Es sei ein gewisses Relationensystem

$$f_\alpha(\omega^1, \ldots, \omega^n) = 0, \qquad \alpha = 1, \ldots, N_1,$$
$$g_\beta(\omega^1, \ldots, \omega^n) \neq 0, \qquad \beta = 1, \ldots, N_2,$$

gegeben, wobei f_α, g_β gewisse Funktionen der Formen $\omega^1,\ldots,\omega^m$ sind. Wenn dieses Relationensystem im n-Bein $I_1,\ldots,I_m$ erfüllt wird, und dabei stabil ist bezüglich aller ausreichend geringen Transformationen des n-Beins $I_1,\ldots,I_m$, dann heißt das n-Bein $I_1,\ldots,I_m$ n-Bein allgemeiner Lage.

4. Wir untersuchen eine Metrik $ds^2 = g_{ij}\omega^i\omega^j$ vom Rang $r<m$. Richtig ist folgendes

Theorem 2. Durch nichtentartete Transformation des n-Beins der Metrik mit dem Rang $r<m$ kann man erreichen, daß die Formen Ω_{ij} die Gestalt

$$\left.\begin{array}{ll} \Omega_{i\alpha}=0, \; i=1, \ldots, m; & \alpha=r+1, \ldots, m, \\ \Omega_{ij}=\sum\limits_{k<l} R_{ij,kl}\,[\omega^k\omega^l], & i, j, k, l=1, \ldots, r. \end{array}\right\} \tag{4.29}$$

annehmen.

Beweis. $\bar{\omega}^1, \ldots, \bar{\omega}^r$ sei Basis der Form Ω_{ij}. Wir schließen die Formen $\bar{\omega}^1, \ldots, \bar{\omega}^r$ in die neue Basis $\bar{\omega}^1, \ldots, \bar{\omega}^r, \bar{\omega}^{r+1}, \ldots, \bar{\omega}^m$ als erste r Formen ein. In der neuen Basis erhalten wir

$$\bar{\Omega}_{ij}=\sum_{s<t} R_{ij,st}\,[\bar{\omega}^s\bar{\omega}^t], \quad i, j=1, \ldots, m; \; s, t=1, \ldots, r, \tag{4.30}$$

d.h.

$$R_{ij,k\alpha}=0, \quad i, j, k=1, \ldots, m; \; \alpha=r+1, \ldots, m. \tag{4.31}$$

Aufgrund der Symmetrie des Tensors $R_{ij,kl}$ bezüglich der Paare i,j,k,l erhalten wir

$$R_{k\alpha,ij}=0, \tag{4.32}$$

woraus folgt

$$\Omega_{k\alpha}=-\Omega_{\alpha k}=0, \quad k=1, \ldots, m; \; \alpha=r+1, \ldots, m. \tag{4.33}$$

q.e.d.

Wenn die Gleichungen (4.29) erfüllt werden, dann nennen wir eine solche Gestalt der Metrik des Rangs r kanonisch und das entsprechende n-Bein $I_1, \ldots, I_m$ kanonisches n-Bein.

Man kann unschwer aufzeigen, daß es ein orthogonales kanonisches n-Bein gibt, für das folglich die Gleichungen

$$\Omega_\alpha^i=-\Omega_i^\alpha=\Omega_{i\alpha}=0, \quad i=1, \ldots, m; \; \alpha=r+1, \ldots, m. \tag{4.34}$$

gelten. Bemerkt sei, daß im kanonischen n-Bein die Ebene $E_{m-r} = \{I_{r+1}, \ldots, I_m\}$ eindeutig bestimmt ist; die Vektoren $I_1, \ldots, I_r$ sind beliebig.

Die Ebene E_{m-r} und die Formen $\omega^1, \ldots, \omega^r$ werden durch Operationen der linearen Algebra bestimmt.

5. Wir leiten jetzt die geometrische Struktur der Metrik des Ranges r her. Richtig ist folgende Behauptung :

Theorem 3. Metriken des Rangs r lassen eine Blätterung in ∞^r Euklidische Metriken zu.

Wir beweisen vorab folgendes Lemma :

Lemma. Wenn $\Omega^1,\ldots,\Omega^r$ Basis der Formen Ω_{ij} ist, dann ist das Gleichungssystem

$$\Omega^1 = \ldots = \Omega^r = 0 \tag{4.35}$$

vollständig integrierbar.

Beweis. $I_1,\ldots,I_m$ sei ein orthogonales kanonisches n-Bein. Dann ist nach Definition

$$\Omega^i_\alpha = 0, \quad i = 1, \ldots, m; \ \alpha = r+1, \ldots, m. \tag{4.36}$$

Wir beweisen, daß in dem von uns gewählten n-Bein die Gleichungen

$$\omega^i_\alpha = \Gamma^i_{\alpha j}\omega^j, \ \Gamma^i_{\alpha\beta} = 0, \quad i, j = 1, \ldots, r; \ \alpha = r+1, \ldots, m. \tag{4.37}$$

erfüllt werden. Wir differenzieren die Strukturgleichungen der Metrik

$$(\omega^i_j)' = [\omega^k_j\omega^i_k] + \Omega^i_j, \quad i, j, k = 1, \ldots, m. \tag{4.38}$$

Wir verwenden die Eigenschaften 2), 3) des äußeren Differentials (siehe § 2 Abschnitt 2) und erhalten

$$0 = [D\omega^k_j\omega^i_k] - [\omega^k_j D\omega^i_k] + D\Omega^i_j. \tag{4.39}$$

Wir setzen in (4.39) anstelle $D\omega^k_j$ den Ausdruck aus (4.38) ein und erhalten nach Reduktion der geeigneten Glieder

$$D\Omega^i_j = [\omega^k_j\Omega^i_k] - [\omega^i_k\Omega^k_j], \quad i, j, k = 1, \ldots, m. \tag{4.40}$$

Hieraus erhalten wir bei $i = 1,\ldots,r$; $\alpha = r+1,\ldots,m$:

$$0 = [\omega^j_\alpha\Omega^i_j], \quad i, j = 1, \ldots, r; \ \alpha = r+1, \ldots, m. \tag{4.41}$$

Wir projizieren die Gleichungen (4.41) auf die Klammer $[\omega^\beta\omega^i\omega^j]$, $\beta = r+1, \ldots, m$; $i, j = 1, \ldots, r$, und erhalten

$$\omega^i_\alpha = 0 \bmod \omega^1, \ldots, \omega^r, \quad i = 1, \ldots, r; \ \alpha = r+1, \ldots, m \tag{4.42}$$

oder

$$\omega^i_\alpha = \Gamma^i_{\alpha j}\omega^j, \quad i, j = 1, \ldots, r; \ \alpha = r+1, \ldots, m, \tag{4.43}$$

q.e.d.

Wir betrachten nunmehr das Gleichungssystem

$$\omega^1 = \ldots = \omega^r = 0. \tag{4.44}$$

Wir setzen die bilinearen Kovarianten ein, verwenden die Strukturgleichungen und erhalten

$$(\omega^i)' = [\omega^j\omega^i_j] + [\omega^\alpha\omega^i_\alpha], \quad i, j = 1, \ldots, r, \ \alpha = r+1, \ldots, m. \tag{4.45}$$

Aufgrund der Gleichung (4.43) erhalten wir hieraus

$$(\omega^i)' = 0 \bmod \omega^1, \ldots, \omega^r. \tag{4.46}$$

q.e.d.

Aufgrund des bewiesenen Lemmas ist die Metrik ds^2 in ∞^r Metriken der Dimension m-r geblättert , längs deren $\Omega_{ij} = 0$ ist. Wir bezeichnen die ursprüngliche m-dimensionale metrisierte Mannigfaltigkeit mit U_m und erhalten : $U_m = \infty^r\, U_{m-r}$, wobei längs U_{m-r} $\Omega_{ij} = 0$ ist.

Wir leiten die Struktur der Mannigfaltigkeit U_{m-r} her. Längs U_{m-r} erhalten wir :

$$\omega^1 = \ldots = \omega^r = 0, \tag{4.47}$$

$$d\bar{s}^2 = g_{\alpha\beta}\bar{\omega}^\alpha\bar{\omega}^\beta, \quad \alpha, \beta = r+1, \ldots, m, \tag{4.48}$$

wobei $\bar{\omega}^\alpha$ Projektionen der Formen ω^α auf die Mannigfaltigkeit U_{m-r} sind (siehe § 2 Definition 12), Die Zusammenhangsformen $\tilde{\omega}^\alpha_\beta$ $(\alpha, \beta = r+1, \ldots, m)$ der Metrik $d\bar{s}^2$ werden durch die Gleichungen

$$D\bar{\omega}^\alpha = \overline{D\omega^\alpha} = [\bar{\omega}^\beta\tilde{\omega}^\alpha_\beta], \quad \alpha, \beta = r+1, \ldots, m,$$
$$\overline{dg_{\alpha\beta}} = \tilde{\omega}^\gamma_\alpha g_{\gamma\beta} + \tilde{\omega}^\gamma_\beta g_{\gamma\alpha}, \quad \alpha, \beta, \gamma = r+1, \ldots, m. \tag{4.49}$$

bestimmt. Infolge der Gleichungen (4.42), die man jetzt in der Gestalt

$$\bar{\omega}^\alpha_i = -\bar{\omega}^i_\alpha = 0, \quad i = 1, \ldots, r; \quad \alpha = r+1, \ldots, m,$$

anschreiben kann, nehmen die Relationen

$$dg_{ij} = \omega^k_i g_{kj} + \omega^k_j g_{ki}, \quad i, j = r+1, \ldots, m; \quad k = 1, \ldots, m$$

auf der Mannigfaltigkeit U_{m-r} die Gestalt

$$\overline{dg}_{ij} = \bar{\omega}^k_i g_{kj} + \bar{\omega}^k_j g_{ki}, \quad i, j, k = r+1, \ldots, m,$$

an, woraus folgt :

$$\tilde{\omega}^i_j = \bar{\omega}^i_j, \quad i, j = r+1, \ldots, m. \tag{4.50}$$

Somit sind die linearen Formen $\tilde{\omega}^i_j (i, j = r+1, \ldots, m)$ die Zusammenhangsformen der Metrik $d\bar{s}^2$ und die Projektionen der Formen $\omega^i_j\,(i, j = r+1, \ldots, m)$ auf die Mannigfaltigkeit U_{m-r}.

$\tilde{\Omega}^i_j (i, j = r+1, \ldots, m)$ seien die Krümmungsformen der Metrik ds^2. Definitionsgemäß müssen sie die Relationen

$$\tilde{\Omega}^i_j = D\tilde{\omega}^i_j - [\tilde{\omega}_j \tilde{\omega}^i_k] = D\bar{\omega}^i_j - [\bar{\omega}^k_j\bar{\omega}^i_k]. \tag{4.51}$$

erfüllen. Gleichzeitig (siehe Theorem 4 § 2) ist

$$\bar{\Omega}^i_j = 0 = \overline{D\omega^i_j} - [\bar{\omega}^\alpha_j\bar{\omega}^i_\alpha] = \overline{D\omega^i_j} - [\bar{\omega}^k_j\bar{\omega}^i_k] =$$
$$= D\bar{\omega}^i_j - [\bar{\omega}^k_j\bar{\omega}^i_k], \quad i, j, k = r+1, \ldots, m; \alpha = 1, \ldots, r. \tag{4.52}$$

Hieraus folgt

$$\tilde{\Omega}^i_j = \bar{\Omega}^i_j = 0, \qquad i, j = r+1, \ldots, m. \tag{4.53}$$

Somit sind die Krümmungsformen der Metrik $d\bar{s}^2$ identisch gleich Null. Hieraus ergibt sich, daß die Mannigfaltigkeit U_{m-r} eine Euklidische Metrik trägt (siehe § 3 Abschnitt 12).

q.e.d.

Aus dem bewiesenen Theorem geht auch hervor, daß das kanonische n-Bein durch Transformation der Vektoren des n-Beins holonom gemacht werden kann. Denn

$$v^1(u^1, \ldots, u^m) = c^1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$v^r(u^1, \ldots, u^m) = c^r$$

seien Integrale der Gleichungen (4.44). Wir führen auf den Integral-Mannigfaltigkeiten U_{m-r} der Gleichungen (4.44) das Koordinatensystem $\{v^{r+1}, \ldots, v^m\}$ ein und erhalten auf der gesamten metrischen Mannigfaltigkeit U_m das Koordinatensystem $v^1, \ldots, v^m$. Es ist klar, daß das n-Bein, welches der Basis $dv^1, \ldots, dv^r, dv^{r+1}, \ldots, dv^m$ entspricht, kanonisch und holonom ist.

6. Die m-dimensionale Metrik $ds^2 = g_{ij}\omega^i\omega^j$ der Klasse 1 kann definitionsgemäß als m-dimensionale Hyperfläche im m+1-dimensionalen reellen Euklidischen Raum E_{m+1} realisiert werden. Nach Theorem 1 hat die Metrik $ds^2 = g_{ij}\omega^i\omega^j$ dann und nur dann die Klasse $\leqslant 1$, wenn das System der Formen der Metrik ω^i, ω^i_j (i,j = 1,...,m) durch das System der Formen ω_i^{m+1} so ergänzt werden kann, daß die Strukturgleichungen erfüllt werden :

$$\begin{aligned} &[\omega^i\omega_i^{m+1}] = 0, \\ &\Omega_{ij} = \sum_{k<l} R_{ij,kl}[\omega^k\omega^l] = [\omega_i^{m+1}\omega_j^{m+1}] \quad \text{(Gaussche Bedingungen)} \\ &\Delta_i = (\omega_i^{m+1})' - [\omega_i^j\omega_j^{m+1}] = 0 \quad i, j, k, \ l = 1, \ldots, m. \end{aligned} \tag{4.54}$$

(Bedingungen von Peterson-Codazzi)

Dann ist nämlich das Gleichungssystem

$$\left.\begin{aligned} &dr = \omega^i I_i, \\ &dI_\alpha = \omega_\alpha^\beta I_\beta, \\ &I_\alpha I_\beta = g_{\alpha\beta}, \qquad g_{m+1\alpha} = \delta_{m+1,\alpha} \\ &i = 1, \ldots, m; \ \alpha, \beta = 1, \ldots, m+1 \end{aligned}\right\} \tag{I}$$

vollständig integrierbar und bestimmt die Fläche V_m, für welche die Relationen (I) Ableitungsformeln sind, und das n-Bein $\{I_1, \ldots, I_{m+1}\}$ ist halborthogonales n-Bein der Fläche.

Somit ist bei der Konstruktion des Systems der Formen $\omega^\alpha, \omega^\alpha_\beta$ $(\alpha, \beta = 1, \ldots, m+1)$ der Realisierung immer eine Übereinstimmung der Formen ω^i, ω^i_j $(i, j = 1, \ldots, m)$ der Realisierung mit den entsprechenden Formen der Metrik vorauszusetzen.

Gültig ist folgendes Theorem (siehe [6]) :

<u>Theorem 4</u>. Wenn die Metrik der Klasse 1 den Rang $r \geqslant 2$ besitzt, dann stimmen der Rang der Metrik und ihrer Realisierung überein.

Beweis. $\omega^{m+1}_i = \psi_i$ seien gemischte Formen der Fläche $V_m \subset E_{m+1}$, die die gegebene Metrik ds^2 realisiert. Dann müssen die Gausschen Relationen erfüllt werden:

$$\Omega_{ij} = [\psi_i \psi_j].$$

Nach der Annahme ,$r \geqslant 2$, erhalten wir auch im n-Bein allgemeiner Lage :

$$\Omega_{ij} = [\psi_i \psi_j] \neq 0, \quad i \neq j;\ i, j = 1, \ldots, m. \qquad (4.55)$$

Hieraus folgt, daß der Raum der bilinearen Formen Ω_{ij} zweidimensional ist und mit der Hülle der Formen ψ_i, ψ_j übereinstimmt. Entsprechend stimmen folglich der Raum des Systems Ω_{ij} $(i, j = 1, \ldots, m)$ und die Hülle der Formen ψ_i $(i = 1, \ldots, m)$ überein (siehe § 1, Abschnitt 9).

q.e.d.

Außerdem haben wir die Übereinstimmung der Basis des Systems der Formen Ω_{ij} mit der Basis der Formen ψ_i der Realisierung bewiesen.

Wenn die Metrik der Klasse 1 den Rang $r \geqslant 3$ besitzt, ist deren Realisierung nach Theorem 7 § 3 eineindeutig, d.h. zwei beliebige Realisierungen V_m, $\overline{V}_m$ sind kongruent. Die Formen ψ_i insbesondere werden genau bis auf das Vorzeichen bestimmt.

Wenn $r \geqslant 4$ ist, dann sind die Formen ψ_i nicht nur aus den Gausschen Gleichungen (die bei einer Metrik der Klasse 1 verträglich sind) eineindeutig bestimmt, sondern erfüllen auch die Bedingungen von Peterson-Codazzi. Richtig ist nämlich (siehe [6]) das

Theorem 5. Bei Metriken der Klasse 1 und dem Rang $r \geqslant 4$ sind die Bedingungen von Peterson-Codazzi Folgerungen der Gaussschen Bedingungen.

Beweis. Der Einfachheit halber führen wir den Beweis für ein orthogonales n-Bein der Metrik durch. Die Gausschen Gleichungen haben die Gestalt:

$$\Omega_{ij} = D\omega_{ij} - [\omega_i^k \omega_{kj}] = [\psi_i \psi_j]^{1)}, \quad i, j = 1, \ldots, m. \tag{4.56}$$

Wir verwenden die Eigenschaften 2), 3) des äußeren Differentials (siehe § 2 Abschnitt 2), differenzieren die äußeren Gleichungen (4.56) und erhalten :

$$\begin{aligned} D\Omega_{ij} &= DD\omega_{ij} - [D\omega_i^k \omega_{kj}] + [\omega_i^k D\omega_{kj}] = \\ &= -[\omega_i^l \omega_l^k \omega_{kj}] - [\psi_i \psi_k \omega_j^k] + [\omega_i^k \omega_k^l \omega_{lj}] + [\omega_{ik} \psi_k \psi_j] = \\ &= [D\psi_i \psi_j] - [\psi_i D\psi_j], \quad i, j, k, l = 1, \ldots, m. \end{aligned} \tag{4.57}$$

Hieraus folgt

$$[\Delta_i \psi_j] - [\Delta_j \psi_i] = 0, \quad i, j = 1, \ldots, m, \tag{4.58}$$

wobei

$$\Delta_i = D\psi_i - [\omega_i^k \psi_k], \quad i, k = 1, \ldots, m. \tag{4.59}$$

Äußerlich multipliziert mit ψ_i erhalten wir aus (4.58) :

$$[\psi_i \psi_j \Delta_j] = 0. \tag{4.60}$$

Im orthogonalen n-Bein allgemeiner Lage erhalten wir :

$$[\psi_i \psi_j \psi_k \psi_l] \neq 0, \quad i \neq j \neq k \neq l. \tag{4.61}$$

Nehmen wir in Gleichung (4.60) für i nacheinander gleich 1, ...,m an, so stellen wir fest, daß die 3-Form $\theta = [\psi_j \Delta_j]$ gleich Null ist. Sie erfüllt nämlich die Gleichungen

$$[\theta \psi_\alpha] = 0, \quad \alpha = 1, \ldots, m. \tag{4.62}$$

Nach Theorem 6 § 1 folgt aus (4.62), daß die Form θ dargestellt wird als

$$\theta = [\theta_1 \psi_1] = [\theta_2 \psi_2] = \ldots = [\theta_m \psi_m], \tag{4.63}$$

wobei $\theta_1, \ldots, \theta_m$ bilineare Formen sind. Wir wenden noch einmal Theorem 6 § 1 an und stellen fest, daß θ_i dargestellt wird als

---

1) Aufgrund der Orthogonalität des n-Beins kann man schreiben : $\omega_j^i = \omega_{ij} = -\omega_{ji}$.

$$\theta_i = [\Omega^{ij}\psi_i] + [\varphi^{ij}\psi_j] \qquad \text{(nach i,j wird nicht summiert)} \tag{4.64}$$

wobei Ω^{ij}, φ^{ij} lineare Formen sind. Folglich wird θ dargestellt als

$$\theta = [\varphi^{ij}\psi_i\psi_j] \qquad \text{(nach i,j wird nicht summiert)} \tag{4.65}$$

Aus den Gleichungen (4.62) ermitteln wir :

$$[\varphi^{ij}\psi_i\psi_j\psi_k] = [\varphi^{ij}\psi_i\psi_j\psi_l] = 0;$$

und wegen der Annahme

folgt $[\psi_i\psi_j\psi_k\psi_e] \neq 0,$

$$\varphi^{ij} = 0 \mod \psi_i, \psi_j,$$
$$\theta = 0.$$

q.e.d.

Somit werden die Gleichungen

$$[\Delta_i\psi_i] = 0, \quad i = 1, \ldots, m. \tag{4.66}$$

erfüllt.

Da diese Gleichungen in einem beliebigen n-Bein gelten, erhalten wir aufgrund des kovarianten Transformationsgesetzes Δ_i, ψ_i nach dem Index i :

$$[\Delta_i\psi_j] + [\Delta_j\psi_i] = 0. \tag{4.67}$$

Wir vergleichen mit Gleichung (4.58) und erhalten :

$$[\Delta_i\psi_j] = 0. \tag{4.68}$$

Wir wenden analoge Überlegungen an und erhalten schließlich :

$$\Delta_i = D\psi_i - [\omega_i^j\psi_j] = 0. \tag{4.69}$$

q.e.d.

Bemerkt sei, daß bei den durchgeführten Berechnungen keine Symmetrie der Matrix λ_{ij} der Entwicklung der Formen ψ_i nach der Basis $\omega^1,\ldots,\omega^m$ erforderlich war. Es zeigt sich, daß die Symmetrie von λ_{ij} automatisch aus den Gausschen Bedingungen im Falle einer Metrik des Ranges $r \geqslant 3$ folgt.

Gültig ist das

Theorem 6. Wenn der Rang der Metrik gleich $r \geqslant 3$ und das Gaussche Gleichungssystem lösbar ist, dann lassen sich die Lösungen ψ_i der Gausschen Gleichungen

$$\Omega_{ij} = [\psi_i\psi_j], \quad i, j = 1, \ldots, m,$$

zerlegen nach den Formen $\omega^1,\ldots,\omega^m$ mit Hilfe der symmetrischen

Matrix

$$\psi_i = \lambda_{ij}\omega^j, \quad \lambda_{ij} = \lambda_{ji}, \quad i, j = 1, \ldots, m.$$

Beweis. Nach der bekannten Eigenschaft des Krümmungstensors (siehe § 3 Formel (3.47*) erhalten wir

$$[\Omega_{ij}\omega^j] = [\psi_i\Delta] = 0, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{4.70}$$

wobei

$$\Delta = [\psi_j\omega^j], \quad j = 1, \ldots, m. \tag{4.71}$$

Wenden wir Theorem 2 § 1 (das Eindeutigkeitstheorem) analog an, wie bereits früher, so erhalten wir hieraus

$$\Delta = [\psi_i\omega^i] = 0, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{4.72}$$

und nach dem Eindeutigkeitstheorem

$$\psi_i = \lambda_{ij}\omega^j, \quad \lambda_{ij} = \lambda_{ji}, \quad i, j = 1, \ldots, m. \tag{4.73}$$

q.e.d.

Somit ist die folgende Behauptung richtig :

Theorem 7. 1) Damit die Metrik des Rangs $\geqslant 4$ die Klasse 1 besitzt, ist notwendig und hinreichend, daß das Gaussche Gleichungssytem

$$\Omega_{ij} = [\psi_i\psi_j], \quad i, j = 1, \ldots, m, \tag{4.74}$$

lösbar ist.

2) Damit die Metrik des Rangs $\geqslant 3$ die Klasse 1 besitzt, ist notwendig und hinreichend, daß das Gleichungssystem (4.74) lösbar ist und die Lösungen ψ_i die Relationen von Peterson-Codazzi

$$D\psi_i = [\omega_i^j\psi_j], \quad i, j = 1, \ldots, m,$$

erfüllen.

Beweis. Wir ergänzen das System der Formen ω^i, ω_i^j $(i, j = 1, \ldots, m)$ durch die Formen

$$\omega^{m+1} = 0, \quad \omega_i^{m+1} = \psi_i, \quad \omega_{m+1}^i = -g^{ij}\psi_j, \quad i, j = 1, \ldots, m, \tag{4.75}$$

und sehen, daß die Strukturgleichungen erfüllt werden :

$$\begin{aligned} (\omega^\alpha)' &= [\omega^\beta\omega_\beta^\alpha], \\ (\omega_\beta^\alpha)' &= [\omega_\beta^\gamma\omega_\gamma^\alpha], \quad \alpha, \beta = 1, \ldots, m+1. \end{aligned} \tag{4.76}$$

Nach Theorem 1 besitzt die Metrik die Klasse 1. Wie bewiesen kann bei der Metrik des Rangs 4 die Aufgabe der Ermittlung der notwendigen und hinreichenden Bedingungen der Klasse 1 auf eine rein algebraische Aufgabe der Ermittlung der Verträglichkeitsbedingungen der Gausschen Gleichungen reduziert werden.

7. Bevor wir an die allgemeine Aufgabe herangehen, die Kriterien der Klasse 1 für die Riemannschen Metriken ausfindig zu machen, wollen wir auf einige Einzelprobleme eingehen.

Wir beweisen zu allererst folgendes Theorem :

Theorem 8. Metriken mit einer stetig positiven Krümmung besitzen die Klasse 1.

Beweis. Bekanntlich wird der Krümmungstensor von Metriken mit konstanter Krümmung K folgendermaßen dargestellt (siehe [19], S. 152-154) :

$$R_{ij,kl} = K(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}), \quad i, j, k, l = 1, \ldots, m. \tag{4.77}$$

Wir bezeichnen

$$\sqrt{K}g_{ij} = \lambda_{ij} = \lambda_{ji}, \quad i, j = 1, \ldots, m, \tag{4.78}$$

und sehen, daß die Gausschen Gleichungen lösbar sind und daß der Tensor λ_{ij} seine Lösung ist. Wir beweisen, daß die Formen $\psi_i = \lambda_{ij}\,\omega^j$ die Gleichungen von Peterson-Codazzi erfüllen. Wir verifizieren dies der Einfachheit halber am orthogonalen n-Bein.

Dann ist

$$I_i I_j = g_{ij} = \delta_{ij},$$

$$\psi_i = \sqrt{K}g_{ij}\omega^j = \sqrt{K}\omega^i, \tag{4.79}$$

$$D\psi_i = \sqrt{K}D\omega^i = \sqrt{K}\,[\omega^j\omega_j^i] = [\psi_j\omega_j^i] = [\omega_i^j\psi_j]. \tag{4.80}$$

Die Gleichungen von Peterson-Codazzi werden erfüllt, und damit ist das Theorem bewiesen.

Man kann zeigen, daß Metriken mit positiv stetiger Krümmung bei m > 3 als Hyperflächen des Euklidischen Raumes realisiert werden. Aufgrund von Theorem 7 § 3 ist dabei die Realisierung eineindeutig.

Wir betrachten zweidimensionale Metriken $ds^2 = g_{ij}du^i du^j$ $(i, j = 1, 2)$. Damit die Metrik die Klasse 1 hat, d.h. die Einbettung in E_3 zuläßt, ist notwendig und hinreichend, daß das Gleichungssystem (siehe § 3 Abschnitt 10)

$$\left.\begin{aligned} &R_{12,12} = R = \lambda_{11}\lambda_{22} - \lambda_{12}^2, \\ &-\frac{\partial\lambda_{i1}}{\partial u^2} + \frac{\partial\lambda_{i2}}{\partial u^1} = \Gamma^j_{i1}\lambda_{j2} - \Gamma^j_{i2}\lambda_{j1}, \qquad i, j = 1, 2, \end{aligned}\right\} \tag{4.81}$$

eine Lösung λ_{11}, λ_{12}, λ_{22} hat.

Bianchi [22] bewieß, daß bei einer hyperbolischen ($R < 0$) vierfach differenzierbaren Metrik das Gleichungssystem (4.81) lösbar und eine Einbettung möglich ist (im kleinen, d.h. für einen ausreichend geringen Bereich der metrischen Mannigfaltigkeit). A. V. Pogorelov [23] gelang der Nachweis, daß bei einer elliptischen ($R > 0$) fünffach differenzierbaren Metrok die Einbettung (im kleinen) ebenfalls möglich ist.

Wir möchten schließlich bemerken, daß man für die Riemannschen Metriken U_m die Frage nach der Einbettung in der Riemannschen Mannigfaltigkeit S_{m+p} mit stetiger Krümmung stellen kann. Insbesondere für die zweidimensionale analytische Metrik $ds^2 = g_{ij}\omega^i\omega^j$ ist eine derartige Einbettung in die Mannigfaltigkeit S_3 mit stetiger positiver Krümmung immer möglich. Die Einbettungsbedingung läßt sich reduzieren auf das Gleichungssystem :

$$\left.\begin{aligned} &R_{12,12} = K^2 + \lambda_{11}\lambda_{22} - \lambda_{12}^2 \quad (K > 0 \text{ Krümmung des Raumes}) \\ &-\frac{\partial\lambda_{i1}}{\partial u^2} + \frac{\partial\lambda_{i2}}{\partial u^1} = \Gamma^j_{i1}\lambda_{i2} - \Gamma^j_{i2}\lambda_{i1}, \qquad i, j = 1, 2. \end{aligned}\right\} \tag{4.82}$$

8. Wir gehen nun zur allgemeinen Klassifikation der Metriken der Klasse 1 über. Nach Theorem 7 § 3 sind für Metriken des Ranges $\geqslant 3$ die Lösungen ψ_i der Gausschen Gleichung, wenn es sie gibt, eineindeutig bestimmt. Außerdem kann man in diesem Fall einen expliziten Ausdruck für ψ_i ermitteln. Und dadurch lassen sich wiederum die notwendigen und hinreichenden Lösbarkeitsbedingungen der Gausschen Gleichungen ermitteln.

Bei einer Metrik des Rangs $r \geqslant 4$ besteht nach Theorem 7 die notwendige und hinreichende Bedingung der Klasse 1 in der Lösbarkeit der Gausschen Gleichungen

$$\Omega_{ij} = [\psi_i \psi_j]. \tag{4.83}$$

Bei einer Metrik des Rangs $r \geqslant 3$ ist notwendig und hinreichend, daß die aus den Gausschen Bedingungen ermittelten Formen ψ_i zusätzlich die Bedingungen von Peterson-Codazzi erfüllen.

Der Algorithmus zum Auffinden von ψ_i wurde erstmals von Weise [5] ermittelt.

Wir formulieren vorab folgendes Lemma :

Lemma. Es seien drei linear unabhängige Formen $\psi_i = \lambda_{i\alpha}\xi^\alpha$, $i = 1, 2, 3$; $\alpha = 1,\ldots,m$ gegeben, für die die paarweise schiefen Produkte bekannt sind :

$$[\psi_i \psi_j] = \Omega_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3. \tag{4.84}$$

Dann wird das Produkt $[\psi_1 \psi_2 \psi_3]$ folgendermaßen durch die Ableitungen $[\psi_i \psi_j] = \Omega_{ij}$ ausgedrückt :

$$[\psi_1 \psi_2 \psi_3] = \sqrt{\Delta}, \tag{4.85}$$

wobei

$$\Delta = \begin{vmatrix} \Omega_{23}(\xi_2, \xi_3) & \Omega_{23}(\xi_3, \xi_1) & \Omega_{23}(\xi_1, \xi_2) \\ \Omega_{31}(\xi_2, \xi_3) & \Omega_{31}(\xi_3, \xi_1) & \Omega_{31}(\xi_1, \xi_2) \\ \Omega_{12}(\xi_2, \xi_3) & \Omega_{12}(\xi_3, \xi_1) & \Omega_{12}(\xi_1, \xi_2) \end{vmatrix}. \tag{4.86}$$

Wir fixieren nämlich beliebige Werte $\xi_1^i, \xi_2^i, \xi_3^i$ der Variablen ξ. Dann ist $[\psi_1(\xi_1)\ \psi_2(\xi_2)\ \psi_3(\xi_3)]$ definitionsgemäß gleich der Determinante 3.Ordnung

$$\begin{vmatrix} \psi_1(\xi_1) & \psi_1(\xi_2) & \psi_1(\xi_3) \\ \psi_2(\xi_1) & \psi_2(\xi_2) & \psi_2(\xi_3) \\ \psi_3(\xi_1) & \psi_3(\xi_2) & \psi_3(\xi_3) \end{vmatrix}. \tag{4.87}$$

Nach dem bekannten Theorem der linearen Algebra ist das Quadrat der Determinante 3.Ordnung gleich der Determinante aus den Minoren 2.Ordnung :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} & \Delta_{13} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & \Delta_{23} \\ \Delta_{31} & \Delta_{32} & \Delta_{33} \end{vmatrix}, \tag{4.88}$$

wobei

$$\Delta_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \ldots \tag{4.89}$$

Wir wenden dieses Theorem auf die Determinante $[\psi_1\psi_2\psi_3]$ an und verwenden, daß

$$\begin{vmatrix} \psi_i(\xi) & \psi_i(\eta) \\ \psi_j(\xi) & \psi_j(\eta) \end{vmatrix} = [\psi_i(\xi)\psi_j(\eta)] = \Omega_{ij}(\xi, \eta), \tag{4.90}$$

und erhalten

$$[\psi_1\psi_2\psi_3]^2 = \begin{vmatrix} \psi_1(\xi_1) & \psi_1(\xi_2) & \psi_1(\xi_3) \\ \psi_2(\xi_1) & \psi_2(\xi_2) & \psi_2(\xi_3) \\ \psi_3(\xi_1) & \psi_3(\xi_2) & \psi_3(\xi_3) \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} \Omega_{23}(\xi_2, \xi_3) & \Omega_{23}(\xi_3, \xi_1) & \Omega_{23}(\xi_1, \xi_2) \\ \Omega_{31}(\xi_2, \xi_3) & \Omega_{31}(\xi_3, \xi_1) & \Omega_{31}(\xi_1, \xi_2) \\ \Omega_{12}(\xi_2, \xi_3) & \Omega_{12}(\xi_3, \xi_1) & \Omega_{12}(\xi_1, \xi_2) \end{vmatrix}. \tag{4.91}$$

q.e.d.

Wir gehen nun zur Bestimmung der linearen Formen ψ_i aus den Gausschen Relationen über und zwar für den Fall, wo der Rang der Metrik $\geqslant 3$.

Multiplizieren wir beide Teile der Gleichung (4.83) äußerlich mit ψ_i, erhalten wir

$$\begin{aligned} &[\Omega_{ij}\ \psi_i] = 0 \\ &[\Omega_{ik}\ \psi_i] = 0, \qquad i \neq j \neq k. \end{aligned} \tag{4.92}$$

Gleichzeitig folgt aus dem Lemma, daß

$$[\Omega_{jk}\psi_i] = [\psi_j\psi_k\psi_i] = [\psi_i\psi_j\psi_k] = \sqrt{\Delta_{ijk}}, \tag{4.93}$$

wobei

$$\Delta_{ijk} = \Delta_{ijk}(d_1, d_2, d_3) = \begin{vmatrix} \Omega_{jk}(d_2, d_3) & \Omega_{jk}(d_3, d_1) & \Omega_{jk}(d_1, d_2) \\ \Omega_{ki}(d_2, d_3) & \Omega_{ki}(d_3, d_1) & \Omega_{ki}(d_1, d_2) \\ \Omega_{ij}(d_2, d_3) & \Omega_{ij}(d_3, d_1) & \Omega_{ij}(d_1, d_2) \end{vmatrix}. \tag{4.94}$$

Bemerkt sei, daß wir aufgrund der Bedingung $r \geqslant 3$ im n-Bein allgemeiner Lage

$$[\psi_i\ \psi_j\ \psi_k] \neq 0, \quad \Delta_{ijk} \neq 0. \tag{4.95}$$

erhalten. Das System der Gleichungen (4.92) - (4.93) ist ein System linearer Gleichungen bezüglich $\psi_i(d_1)$, $\psi_i(d_2)$, $\psi_i(d_3)$ mit der Determinante $\Delta_{ijk}(d_1, d_2, d_3)$. Ausführlich geschrieben hat sie nämlich die Gestalt

$$\left.\begin{aligned} &\Omega_{jk}(d_2, d_3)\ \psi_i(d_1) + \Omega_{jk}(d_3, d_1)\ \psi_i(d_2) + \Omega_{jk}(d_1, d_2)\ \psi_i(d_3) = \sqrt{\Delta_{ijk}}, \\ &\Omega_{ki}(d_2, d_3)\ \psi_i(d_1) + \Omega_{ki}(d_3, d_1)\ \psi_i(d_2) + \Omega_{ki}(d_1, d_2)\ \psi_i(d_3) = 0, \\ &\Omega_{ij}(d_2, d_3)\ \psi_i(d_1) + \Omega_{ij}(d_3, d_1)\ \psi_i(d_2) + \Omega_{ij}(d_1, d_2)\ \psi_i(d_3) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{4.96}$$

Die Determinante des Systems ist gleich Δ_{ijk}. Hieraus erhalten wir

$$\psi_i(d_1) = \frac{\sqrt{\Delta_{ijk}} \begin{vmatrix} \Omega_{ki}(d_3, d_1) & \Omega_{ki}(d_1, d_2) \\ \Omega_{ij}(d_3, d_1) & \Omega_{ij}(d_1, d_2) \end{vmatrix}}{\Delta_{ijk}} = \frac{\begin{vmatrix} \Omega_{ki}(d_3, d_1) & \Omega_{ki}(d_1, d_2) \\ \Omega_{ij}(d_3, d_1) & \Omega_{ij}(d_1, d_2) \end{vmatrix}}{\sqrt{\Delta_{ijk}(d_1, d_2, d_3)}} \tag{4.97}$$

oder nach Bezeichnung mit $d_1 = d$, $d_2 = \delta_1$, $d_3 = \delta_2$

$$\psi_i(d) = \frac{\begin{vmatrix} \Omega_{ij}(d, \delta_1) & \Omega_{ij}(d, \delta_2) \\ \Omega_{ik}(d, \delta_1) & \Omega_{ik}(d, \delta_2) \end{vmatrix}}{\sqrt{\Delta_{ijk}(d, \delta_1, \delta_2)}}. \tag{4.98}$$

Und somit hat die notwendige und hinreichende Lösbarkeitsbedingung der Gausschen Gleichungen (4.83) die Gestalt :

$$\frac{\begin{vmatrix} \Omega_{ij}(d, \delta_1) & \Omega_{ij}(d, \delta_2) \\ \Omega_{ik}(d, \delta_1) & \Omega_{ik}(d, \delta_2) \end{vmatrix}}{\sqrt{\Delta_{ijk}(d, \delta_1, \delta_2)}} = \frac{\begin{vmatrix} \Omega_{il}(d, \delta_3) & \Omega_{il}(d, \delta_4) \\ \Omega_{im}(d, \delta_3) & \Omega_{im}(d, \delta_4) \end{vmatrix}}{\sqrt{\Delta_{ilm}(d, \delta_3, \delta_4)}} \tag{4.99}$$

identisch bezüglich d, δ_1, δ_2, δ_3, δ_4, i, j, k, l, m. Die Lösung ist genau bis aufs Vorzeichen eindeutig.

Die Bedingungen (4.99) sind die notwendigen und hinreichenden Bedingungen der Klasse 1 für Metriken des Rangs $r \geqslant 4$.

Bei den Metriken des Rangs $r = 3$ muß man den Bedingungen (4.95) noch die Bedingungen von Peterson-Codazzi hinzufügen :

$$D\psi_i = [\omega_i^j \psi_j], \quad i, j = 1, \ldots, m, \tag{4.100}$$

wobei

$$\omega_j^i = \Gamma_{jk}^i \omega^k, \quad i, j, k = 1, \ldots, m; \tag{4.101}$$

Γ_{jk}^i (nichtholonome) Zusammenhangskoeffizienten der gegebenen Metrik sind.

Die Bedingungen (4.99) - (4.100) liefern die notwendigen und hinreichenden Bedingungen der Klasse 1 für Metriken des Rangs $r = 3$.

Die Bedingungen für die reelle Realisierung der gegebenen Metrik haben die Gestalt :

$$\Delta_{ijk}(d_1, d_2, d_3) > 0, \quad i, j, k = 1, \ldots, m; \quad i \neq j \neq k. \tag{4.102}$$

9. Wir gehen jetzt zur Untersuchung der Metriken des Rangs $r \geqslant 2$ über. Der Fall, wo der Rang $r = 0$ ist, führt zur Metrik der Klasse 0. Denn in diesem Fall ist:

$$\Omega_{ij} = 0, \quad i, j = 1, \ldots, m, \tag{4.103}$$

d.h. der Riemann-Christoffelsche Tensor ist gleich Null. Bekanntlich (siehe § 3 Abschnitt 12) ist dies die notwendige und hinreichende Bedingung der Null-Klasse, d.h. die Metrik ist euklidisch.

Der Fall, wo r = 1, ist aufgrund der Geradzahligkeit des Rangs einer bilinearen Form nicht möglich (siehe § 1 Abschnitt 10).

Somit bleibt noch die Untersuchung der Metrik des Rangs 2 übrig.

Nach Theorem 2 kann man die Metrik des Rangs r durch Transformation des n-Beins $I_1, \dots, I_m$ auf eine Gestalt zurückführen :

$$\Omega_{i\alpha}=0, \qquad i=1, \dots, m; \quad \alpha=r+1, \dots, m,$$
$$\Omega_{ij}=\sum_{k<l} R_{ij,kl}[\omega^k\omega^l], \qquad i, j, k, l=1, \dots, r. \tag{4.104}$$

Dabei kann man annehmen, daß das kanonische n-Bein holonom ist, d.h. daß die Gleichungen [1]

$$\omega^\alpha = du^\alpha, \qquad \alpha=1, \dots, m.$$

erfüllt werden. Somit haben die Formen Ω_{ij} der Metrik des Ranges 2 im holonomen kanonischen n-Bein folgende Gestalt:

$$\Omega_{12}=R_{12,12}[du^1 du^2],$$
$$\Omega_{i\alpha}=0, \qquad i=1, \dots, m; \quad \alpha=3, \dots, m. \tag{4.105}$$

Nach Theorem 4 stimmt die Basis $\omega^1 = du^1$, $\omega^2 = du^2$ des Systems der Formen Ω_{ij} mit der Basis der Realisierung $\psi_i=\omega_i^{m+1}$ überein. Und hieraus folgt, daß die Formen der realisierenden Fläche $V_m = E_{m+1}$ die Bedingung

$$\psi_\alpha=0, \qquad \alpha=3, \dots, m, \tag{4.106}$$
$$\psi_i=\lambda_{ij}du^j, \qquad \lambda_{ij}=\lambda_{ji}, \qquad i, j=1, 2 \text{ [2]}. \tag{4.107}$$

---

1) Dies ist möglich, da es holonome kanonische n-Beine gibt (vgl. Bemerkung zu Theorem 3 dieses Paragraphen). Im weiteren werden wir allgemein überall holonome n-Beine verwenden. Der Übergang vom nichtholonomen zum holonomen n-Bein kann zwar nicht durch rein algebraische Operationen durchgeführt werden, deshalb besitzen die von uns abgeleiteten notwendigen und hinreichenden Kriterien der Klasse 1 keinen invarianten Charakter. Aber dieser Umstand ist nicht wesentlich, da wir uns die Aufgabe gestellt haben, alle möglichen Typen von Metriken der Klasse 1 und ihre Einbettungen zu untersuchen.

2) Angemerkt sei, daß die Symmetrie-Bedingung des Tensors λ_{ij} nicht automatisch aus den Gausschen Bedingungen hervor-

erfüllen müssen. Wir untersuchen die Affinore [3]

$$\Gamma^i_{\alpha j}, \quad i, j = 1, 2; \quad \alpha = 3, \ldots, m. \tag{4.108}$$

Aus den Integrierbarkeitsbedingungen der Gleichungen (4.106) folgt, daß die Größen λ_{ij} das Gleichungssystem

$$\Gamma^i_{\alpha j}\lambda_{ih} - \Gamma^i_{\alpha h}\lambda_{ij} = 0. \tag{4.109}$$

erfüllen. Das System (4.108), das wir definierend nennen, ist das System der linearen homogenen Gleichungen bezüglich der hauptsächlichen Komponenten des Tensors λ_{ij}:

$$\lambda_{11}, \lambda_{12}, \lambda_{22}. \tag{4.110}$$

Wir folgen der Darlegung Cartans [4] und können die folgenden Fälle betrachten :

1. Der Rang ρ des definierenden Systems ist gleich 2. [4]

Forts. von 2)

geht, wie dies bei den Metriken des Rangs $r \geqslant 3$ der Fall war. Bei den Metriken des Rangs 2 verlangen wir deshalb die Symmetrie des Tensors λ_{ij}, d.h. gehen der Sache nach zur Tensoruntersuchung über und untersuchen anstelle der Formen ψ_i den Tensor λ_{ij}.

3) Die Werte $\Gamma^i_{\alpha j}$ kann man als Affinore im Raum $\{I_1, I_2\}$ betrachten, da bei Transformation der Vektoren I_1, I_2

$$\bar{I}_i = a^j_i I_j, \quad i, j = 1, 2,$$

die Größen $\Gamma^i_{\alpha j}$ transformiert werden nach dem Gesetz

$$\bar{\Gamma}^i_{\alpha j} = a^k_j A^i_l \Gamma^l_{\alpha k}, \quad A^i_j a^k_i = \delta^k_j, \quad i, j, k, l = 1, 2; \quad \alpha = 3, \ldots, m.$$

Bei Transformation der Vektoren I_α

$$\bar{I}_\alpha = A^\beta_\alpha I_\beta, \quad \alpha, \beta = 3, \ldots, m,$$

werden die Größen $\Gamma^i_{\alpha j}$ transformiert nach dem Gesetz

$$\bar{\Gamma}^i_{\alpha j} = A^\beta_\alpha \Gamma^i_{\beta j}, \quad \alpha, \beta = 3, \ldots, m; \quad i, j = 1, 2.$$

4) Der Fall, wo $\rho \geqslant 3$ ist, führt zu den Gleichungen

$$\lambda_{ij} = 0, \quad i, j = 1, 2,$$

und dies bedeutet, daß die untersuchte Metrik Null-Rang besitzt und euklidisch ist, was der Annahme widerspricht.

In diesem Fall kann die Einbettung der Metrik nur eineindeutig sein. Bei $\rho = 2$ wird λ_{ij} aus den Gleichungen (4.109) nämlich genau bis auf den Multiplikator bestimmt, so daß wir

$$\frac{\lambda_{11}}{\Delta_{11}} = \frac{\lambda_{12}}{\Delta_{12}} = \frac{\lambda_{22}}{\Delta_{22}}, \qquad (4.111)$$

erhalten, wobei Δ_{11}, Δ_{12}, Δ_{22} gewisse Determinanten 2.Ordnung sind, die aus den Größen $\Gamma^i_{\alpha j}$ bestehen. Wir setzen (4.111) in die Gaussche Relation

$$R_{12,12} = \lambda_{11}\lambda_{22} - \lambda_{12}^2,$$

ein und erhalten

$$\lambda^2 = \frac{R_{12,12}}{\Delta_{11}\Delta_{22} - \Delta_{12}^2}, \qquad (4.112)$$

d.h. λ_{ij} wird genau bis auf das Vorzeichen bestimmt.

Bemerkt sei, daß die Relation $\Delta_{11}\Delta_{12} - \Delta_{12}^2 = 0$ ausgeschlossen ist, da dann $R_{12,12} = 0$ wäre. Somit erhalten wir

$$\left.\begin{aligned} \lambda_{11} &= \pm \Delta_{11}\sqrt{\frac{R_{12,12}}{\Delta_{11}\Delta_{22} - \Delta_{12}^2}}, \\ \lambda_{12} &= \pm \Delta_{12}\sqrt{\frac{R_{12,12}}{\Delta_{11}\Delta_{22} - \Delta_{22}^2}}. \\ \lambda_{22} &= \pm \Delta_{22}\sqrt{\frac{R_{12,12}}{\Delta_{11}\Delta_{12} - \Delta_{22}^2}}. \end{aligned}\right\} \qquad (4.113)$$

Die ermittelten Größen λ_{ij} müssen die Bedingungen von Peterson-Codazzi erfüllen :

$$(\psi_i)' = [\omega_i^j \psi_j], \qquad (4.114)$$

oder in Tensorschreibweise

$$\frac{\partial \lambda_{i2}}{\partial u^1} - \frac{\partial \lambda_{i1}}{\partial u^2} = \Gamma^j_{i1}\lambda_{j2} - \Gamma^j_{i2}\lambda_{j1}, \quad i, j = 1, 2. \qquad (4.115)$$

Somit haben wir in diesem Fall eine eindeutige Einbettung, da wir zwei kongruente Realisierungen ermitteln.

Eine reelle Einbettung gibt es im Fall

$$\frac{R_{12,12}}{\Delta_{11}\Delta_{22} - \Delta_{12}^2} > 0. \qquad (4.116)$$

2. Der Rang des definierenden Systems ist gleich 1.
In diesem Fall erhalten wir

$$\frac{\Gamma^1_{\alpha 2}}{\Gamma^1_2} = \frac{\Gamma^2_{\alpha 1}}{\Gamma^2_1} = \frac{\Gamma^2_{\alpha 2} - \Gamma^1_{\alpha 1}}{\Gamma^2_2 - \Gamma^1_1} = \varkappa, \quad \alpha = 3, \ldots, m, \qquad (4.117)$$

wobei Γ^i_j ein gewisser Affinor 2.Ordnung ist. Das definierende System läßt sich reduzieren auf die Gleichung

$$\Gamma^1_2\lambda_{11} + (\Gamma^2_2 - \Gamma^1_1)\lambda_{12} + \Gamma^2_1\lambda_{22} = 0. \qquad (4.118)$$

Möglich sind folgende Unterfälle :

2_1. Der Affinor Γ^i_j hat zwei verschiedene Wurzeln λ_1, λ_2 , denen zwei verschiedene invariante Richtungen I_1, I_2 entsprechen, die reell oder konjugiert komplex sind. Nimmt man I_1, I_2 als Vektoren des kanonischen n-Beins an, dann erhält man im neuen n-Bein

$$\Gamma^1_2 = \Gamma^2_1 = 0, \quad \Gamma^1_1 = \lambda_1, \quad \Gamma^2_2 = \lambda_2 \neq \lambda_1. \tag{4.119}$$

Dann erhalten wir aus der definierenden Gleichung

$$\lambda_{12} = 0. \tag{4.120}$$

Die Gaussche Bedingung läßt sich reduzieren auf die Gleichung

$$R = R_{12,\,12} = \lambda_{11}\lambda_{22}. \tag{4.121}$$

Durch Beibehaltung der Richtungen der Vektoren I_1, I_2 und durch Veränderung ihrer Länge kann man erreichen, daß die Formen ω^1, ω^2 vollständige Differentiale werden, d.h. das n-Bein $I_1,\ldots,I_m$ wird holonom. Dann erhalten wir : $\omega^1 = du^1$, $\omega^2 = du^2$, und die Relationen (4.119), (4.121) bleiben erhalten.

Die Bedingungen von Peterson-Codazzi nehmen die Gestalt

$$\frac{\partial\lambda_{11}}{\partial u^2} = \Gamma^1_{12}\lambda_{11} - \Gamma^2_{11}\lambda_{22},$$
$$\frac{\partial\lambda_{22}}{\partial u^1} = \Gamma^2_{21}\lambda_{22} - \Gamma^1_{22}\lambda_{11}, \tag{4.122}$$

$$\frac{\partial\lambda_{11}}{\partial u^\alpha} = \Gamma^1_{1\alpha}\lambda_{11},$$
$$\frac{\partial\lambda_{22}}{\partial u^\alpha} = \Gamma^2_{2\alpha}\lambda_{22}. \tag{4.123}$$

an. Wir nehmen an, daß

$$\lambda^2_{11} = s_1, \quad \lambda^2_{22} = s_2 = \frac{R^2}{s_1}, \tag{4.124}$$

und ermitteln die Gleichungen

$$\frac{\partial s_1}{\partial u^2} = 2\Gamma^1_{12}s_1 - 2\Gamma^2_{11}R,$$
$$\frac{\partial s_2}{\partial u^1} = 2\Gamma^2_{21}s_2 - 2\Gamma^1_{22}R, \tag{4.125}$$

$$\frac{\partial s_1}{\partial u^\alpha} = 2\Gamma^1_{1\alpha}s_1,$$
$$\frac{\partial s_2}{\partial u^\alpha} = 2\Gamma^2_{2\alpha}s_2. \tag{4.126}$$

Wir setzen die Verträglichkeitsbedingungen der Gleichungen von Peterson-Codazzi ein und erhalten

$$As^2 + 2Bs + C = 0 \qquad (s = s_1), \tag{4.127}$$

wobei

$$A = \frac{\partial}{\partial u^2}\left(\frac{\Gamma^1_{22}}{R}\right) + 2\Gamma^1_{12}\frac{\Gamma^1_{22}}{R}, \quad 2B = \frac{\partial^2 \ln R}{\partial u^1 \partial u^2} - \frac{\partial \Gamma^1_{12}}{\partial u^1} - \frac{\partial \Gamma^2_{21}}{\partial u^2} - 4\Gamma^1_{22}\Gamma^2_{11},$$
$$C = \left[\frac{\partial}{\partial u^1}\left(\frac{\Gamma^2_{11}}{R}\right) + 2\Gamma^2_{21}\frac{\Gamma^2_{11}}{R}\right] \cdot R^2, \tag{4.128}$$

$$\frac{\partial \ln \Gamma^2_{11}}{\partial u^\alpha} = -\frac{\partial \ln \Gamma^1_{22}}{\partial u^\alpha} = \Gamma^1_{1\alpha} - \Gamma^2_{2\alpha}, \qquad \alpha = 3, \ldots, m, \tag{4.129}$$

$$\frac{\partial \ln R}{\partial u^\alpha} = \Gamma^1_{1\alpha} + \Gamma^2_{2\alpha}, \qquad \alpha = 3, \ldots, m. \tag{4.130}$$

Die Bedingungen (4.129) - (4.130) sind die direkten Bedingungen für die Metrik. Aus Gleichung (4.127) folgt unmittelbar die Bedingung der reellen Realisierung der Metrik :

$$B^2 - AC > 0, \tag{4.131}$$

$$-\frac{B}{A} \pm \sqrt{\frac{B^2 - AC}{A^2}} > 0. \tag{4.132}$$

Die letztgenannte Ungleichung muß für mindestens ein Vorzeichen gelten. Hier sind folgende Unterfälle möglich :

2_{11}. Die Gleichung (4.127) hat zwei verschiedene Wurzeln t_1, t_2 :

$$t_{1,2} = -\frac{B}{A} \pm \sqrt{\frac{B^2 - AC}{A^2}}. \tag{4.133}$$

Die notwendige und hinreichende Bedingung besteht darin, daß t_1 oder t_2 die Bedingungen von Peterson-Codazzi (4.122) - (4.123) erfüllen, in denen die Größen λ_{11}, λ_{22} mittels Gleichung (4.124) durch den Parameter s_1 (= t_1, t_2) ausgedrückt werden.

Die Einbettung ist eineindeutig, wenn nur eine einzige Wurzel diese Bedingung erfüllt. Die Einbettung ist nicht eineindeutig, wenn beide Wurzeln die Gleichungen von Peterson-Codazzi erfüllen. In diesem Fall wird die Metrik von genau zwei nichtkongruenten isometrischen Flächen realisiert, und wir haben eine diskrete Verbiegung (siehe [14], [15]).

2_{12}. Gleichung (4.127) besitzt eine mehrfache Wurzel, d.h. die Gleichung

$$B^2 - AC = 0. \tag{4.134}$$

wird erfüllt. Damit die Metrik realisiert wird, ist notwendig und hinreichend, daß

$$t = -\frac{B}{A} \tag{4.135}$$

die Bedingungen von Peterson-Codazzi (4.122) - (4.123) erfüllt. Die Einbettung ist dann eineindeutig. Dieser Fall erfolgt als Grenzübergang aus dem Fall 2_{11}: unter Annäherung fließen die isometrischen Flächen zu einer zusammen.

Man kann nachweisen, daß die Fläche V_m, die die Metrik realisiert, nichtverbiegbar ist, aber ein Feld unendlich kleiner Verbiegungen zuläßt (siehe [14]).

2_{13}. Gleichung (4.127) gilt identisch, d.h.

$$A = B = C = 0. \tag{4.136}$$

In diesem Fall kann man das Gleichungssystem von Peterson-Codazzi (4.122) -(4.123) auf die völlig integrierbare Pfaffsche Gleichung

$$dt - a_\alpha (t, u^\beta)\, du^\alpha = 0, \tag{4.137}$$

zurückführen, wobei

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= 2\frac{\Gamma^1_{22}}{R} t^2 + 2\left(\frac{\partial \ln R}{\partial u^1} - \Gamma^2_{21}\right) t, \\ a_2 &= 2\Gamma^1_{12} t - 2\Gamma^2_{11} \cdot R, \\ a_\alpha &= 2\Gamma^1_{1\alpha} \cdot t, \quad t = s_1, \quad \alpha = 3, \dots, m. \end{aligned}\right\} \tag{4.138}$$

Somit gibt es unendlich viele Lösungen $t = t(u^1,\dots,u^n)$ der Gleichung von Peterson-Codazzi. Es läßt sich leicht aufzeigen, daß wir in diesem Fall eine einparametrische Schar von Lösungen $t = t(u^1,\dots,u^m)$ haben. Die Metrik läßt eine nichteineindeutige Einbettung zu und wird durch eine einparametrische Schar nichtkongruenter isometrischer Flächen realisiert.

Wir überblicken den Fall 2 und können bequem folgende Schlußfolgerung ziehen :

Metriken, die zur Klasse 2_1 gehören und mehr als zwei nichtkongruente Realisierungen zulassen, lassen ∞ Realisierungen zu. Somit schließt die diskrete Realisierung nicht mehr als 2 realisierende Flächen ein (siehe [14]).

2_2. Der Affinor $\Gamma^i_j (i, j = 1, 2)$ habe eine einzige charakteristische Wurzel, die notwendig reell ist. Dieser Wurzel entspricht der einzige reelle invariante Vektor I. Wir lassen Vektor I_1 des kanonischen n-Beins mit dem Vektor I zusammenfallen und erhalten

$$\Gamma_1^2 = 0,\ \Gamma_1^1 = \Gamma_2^2,\ \Gamma_2^1 \neq 0. \tag{4.139}$$

Der Einfachheit halber nehmen wir dabei wie vorher an, daß das n-Bein holonom ist.

Das definierende System bekommt die Gestalt

$$\Gamma_2^1 \lambda_{11} = 0, \tag{4.140}$$

und, da $\Gamma_2^1 \neq 0$, folgt hieraus

$$\lambda_{11} = 0. \tag{4.141}$$

Die Gaussche Bedingung erhält die Gestalt

$$R = R_{12,\,12} = -\lambda_{12}^2. \tag{4.142}$$

Hieraus folgt

$$\lambda_{12} = \sqrt{-R}. \tag{4.143}$$

Die Codazzischen Bedingungen erhalten die Gestalt

$$\frac{\partial \lambda_{12}}{\partial u^1} = (\Gamma_{11}^1 - \Gamma_{12}^2)\lambda_{12} + \Gamma_{11}^2 \lambda_{22}, \tag{4.144}$$

$$\frac{\partial \lambda_{22}}{\partial u^1} - \Gamma_{21}^2 \lambda_{22} = \frac{\partial \lambda_{12}}{\partial u^2} + (\Gamma_{12}^1 - \Gamma_{22}^2)\lambda_{12}, \tag{4.145}$$

$$\frac{\partial \lambda_{12}}{\partial u^\alpha} = \Gamma_\alpha \lambda_{12},\ \Gamma_\alpha = \Gamma_{1\alpha}^1 = \Gamma_{2\alpha}^2, \tag{4.146}$$

$$\frac{\partial \lambda_{22}}{\partial u^\alpha} - \Gamma_\alpha \lambda_{22} = \Gamma_{2\alpha}^1 \lambda_{12}. \tag{4.147}$$

Bedingung (4.146) ist äquivalent zur Bedingung für die Metrik

$$\frac{\partial \ln \sqrt{-R}}{\partial u^\alpha} = \Gamma_\alpha. \tag{4.148}$$

Möglich sind zwei Unterfälle:

2_{21}.

$$\Gamma_{11}^2 \neq 0. \tag{4.149}$$

Dann läßt sich λ_{22} eineindeutig bestimmen aus der Gleichung (4.144) als

$$\lambda_{22} = \frac{\frac{\partial \lambda_{12}}{\partial u^1} - (\Gamma_{11}^1 - \Gamma_{12}^2)\lambda_{12}}{\Gamma_{11}^2}. \tag{4.150}$$

Die notwendige und hinreichende Bedingung besteht darin, daß λ_{22}, das mit Hilfe von (4.150) bestimmt wird, die Gleichungen (4.145), (4.157) erfüllt.

Die Einbettung ist eineindeutig.

2_{22}. $$\Gamma^2_{11} = 0. \tag{4.151}$$

Gleichung (4.144) geht in eine Nebenbedingung für die Metrik über. Wir setzen die Integrierbarkeitsbedingungen der Gleichungen (4.145) - (4.147) ein und erhalten die Bedingung für die Metrik

$$\frac{\partial A_\beta}{\partial u^\alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial u^\beta} = \begin{vmatrix} \Gamma_\alpha & A_\alpha \\ \Gamma_\beta & A_\beta \end{vmatrix}, \quad \alpha, \beta = 1, 3, \ldots, m, \tag{4.152}$$

wobei

$$A_1 = \frac{\partial \sqrt{-R}}{\partial u^2} + (\Gamma^1_{12} - \Gamma^2_{22})\sqrt{-R}, \qquad \Gamma_1 = \Gamma^2_{21},$$

$$A_\alpha = \Gamma^1_{2\alpha}\sqrt{-R}, \; \Gamma_\alpha = \Gamma^1_{1\alpha} = \Gamma^2_{2\alpha}, \qquad \alpha = 3, \ldots, m. \tag{4.153}$$

Wenn die Bedingungen (4.152) erfüllt werden, dann ist die Gleichung

$$d\lambda_{22} - A_\alpha du^\alpha = 0^{1)}, \qquad \alpha = 1, 3, \ldots, m, \tag{4.154}$$

völlig integrierbar und bestimmt die Lösungsschar, die von einer einzigen beliebigen Funktion eines einzigen Arguments abhängt.

Die Einbettung der Metrik ist nichteineindeutig.

2_3. Wir untersuchen schließlich den Fall, wo der Rang des definierenden Systems gleich Null ist. Dies ist nur dann möglich, wenn

$$\Gamma^2_{\alpha 1} = \Gamma^1_{\alpha 2} = \Gamma^2_{\alpha 2} - \Gamma^1_{\alpha 1} = 0, \qquad \alpha = 3, \ldots, m. \tag{4.155}$$

Man kann leicht erkennen, daß das Gleichungssystem

$$\omega^3 = \ldots = \omega^m \tag{4.156}$$

in diesem Fall vollständig integrierbar ist.

Die Relationen (4.155) bleiben nämlich in einem beliebigen kanonischen n-Bein erhalten. Wir wählen das orthogonale kanonische n-Bein und erhalten

$$\omega^\alpha_i = -\omega^i_\alpha = -\Gamma^i_{\alpha i}\omega^i \qquad i = 1, 2; \alpha = 3, \ldots, m. \tag{4.157}$$

(über i wird nicht summiert)

---

1) Die Variable u^2 wird als Parameter betrachtet, nach dem keine Differentiation ausgeführt wird.

Hieraus folgt

$$(\omega^\alpha)' = [\omega^\beta \omega^\alpha_\beta] = [\omega^i \omega^\alpha_i] = 0 \mod \omega^3 \ldots \omega^m, \quad \alpha, \beta = 3, \ldots, m; \ i = 1, 2. \tag{4.158}$$

Im weiteren Verlauf verwenden wir ein kanonisches holonomes n-Bein, in dem die Gleichungen

$$I_i \cdot I_\alpha = 0, \quad i = 1, 2; \ \alpha = 3, \ldots, m. \tag{4.159}$$

erfüllt werden. Dies ist aufgrund der vollständigen Integrierbarkeit des Systems (4.156) möglich. Die Bedingungen von Gauss und Peterson-Codazzi haben die Gestalt

$$R = R_{12,\,12} = \lambda_{11}\lambda_{22} - \lambda_{12}^2, \tag{4.160}$$

$$-\frac{\partial \lambda_{i1}}{\partial u^2} + \frac{\partial \lambda_{i2}}{\partial u^1} = \Gamma^j_{i1}\lambda_{j2} - \Gamma^j_{i2}\lambda_{j1}, \tag{4.161}$$

$$\frac{\partial \lambda_{i1}}{\partial u^\alpha} = \Gamma_\alpha \lambda_{i1}, \tag{4.162}$$

$$\frac{\partial \lambda_{i2}}{\partial u^\alpha} = \Gamma_\alpha \lambda_{i2}, \quad \Gamma_\alpha = \Gamma^1_{1\alpha} = \Gamma^2_{2\alpha}, \quad i, j = 1, 2; \ \alpha = 3, \ldots, m. \tag{4.163}$$

Wir betrachten die Strukturgleichungen der Metrik

$$(\omega^i_j)' - [\omega^k_j \omega^i_k] = \Omega^i_j, \quad i, j = 1, \ldots, m,$$

verwenden die Gleichungen (4.155) und können leicht nachweisen, daß die Funktionen Γ^i_{jk} nur von den Parametern u^1, u^2 abhängen, und daß die Funktionen Γ_α nur von den Parametern $u^3, \ldots, u^m$ abhängen und die Bedingung

$$\frac{\partial \Gamma_\alpha}{\partial u^\beta} - \frac{\partial \Gamma_\beta}{\partial u^\alpha} = 0, \quad \alpha, \beta = 3, \ldots, m. \tag{4.164}$$

erfüllen. Hieraus ergibt sich aufgrund der Gleichungen (4.162), daß λ_{ij} dargestellt wird als

$$\lambda_{ij} = \bar{\lambda}_{ij} e^{\upsilon(u^3, \ldots, u^m)}, \tag{4.165}$$

wobei $\bar{\lambda}_{ij}$ Funktionen der Parameter u^1, u^2, υ eine Funktion der Parameter $u^3, \ldots, u^m$ ist. Aus (4.165) folgt, daß R dargestellt wird als

$$R = e^{2\upsilon(u^3, \ldots, u^m)} \cdot r(u^1, u^2),$$
$$\ln R = 2\upsilon(u^3, \ldots, u^m) + \ln r(u^1, u^2). \tag{4.166}$$

Damit die Relation (4.166) erfüllt wird, ist notwendig und hinreichend, daß die Bedingungen

$$\frac{\partial \ln R}{\partial u^\alpha} = 2\Gamma_\alpha(u^3, \ldots, u^m). \tag{4.167}$$

erfüllt werden. Dann läßt sich die Gaussche Bedingung zurückführen auf die Bedingung

$$r(u^1, u^2) = \bar{\lambda}_{11}\bar{\lambda}_{22} - \bar{\lambda}_{12}^2. \tag{4.168}$$

Offensichtlich werden die Gleichungen von Peterson-Codazzi dann und nur dann erfüllt, wenn $\bar{\lambda}_{ij}$ das System

$$-\frac{\partial\bar{\lambda}_{i1}}{\partial u^2}+\frac{\partial\bar{\lambda}_{i2}}{\partial u^1}=\Gamma^j_{i1}\bar{\lambda}_{j2}-\Gamma^j_{i2}\bar{\lambda}_{j1}. \tag{4.169}$$

erfüllt.

Man kann leicht aufzeigen, daß im Fall 2_3 die Aufgabe der Einbettung der m-dimensionalen Metrik im Raum E_{m+1} hinausläuft auf die Einbettung V_2 in S_3.

Fixieren wir nämlich beliebig die Werte der Parameter $u^3 = u^3_o$, ..., $u^m = u^m_o$, erhalten wir die Mannigfaltigkeit V_2 mit der Metrik

$$d\bar{s}^2=g_{ij}(u^1, u^2, u^3_0, \ldots, u^m_0)\,du^i du^j,$$

i,j = 1,2 , und den Zusammenhangskoeffizienten $\Gamma^h_{ij}(u^1, u^2)$. Es läßt sich unschwer nachweisen, daß der Krümmungstensor $\tilde{R}_{ij}(u^1, u^2, u^3_0, \ldots, u^m_0)$ der zweidimensionalen Metrik $d\bar{s}^2$ mit dem Krümmungstensor $R_{ij}(u^1, u^2, u^3_0, \ldots, u^m_0)$ der Metrik ds^2 durch die Relation

$$R_{12,\,12}=R=\tilde{R}_{12,\,12}-\varkappa^2, \tag{4.170}$$

verbunden ist, wobei

$$\varkappa^2=\sum_{\alpha=3}^{m}\Gamma^2_{\alpha}(u^3_0, \ldots, u^m_0). \tag{4.171}$$

Bekanntlich (siehe Abschnitt 7) kann eine beliebige zweidimensionale Metrik ds^2 in die Metrik S_3 mit konstanter positiver Krümmung x eingebettet werden, sodaß ein System von Funktionen

$$\lambda_{11}(u^1, u^2),\ \lambda_{12}(u^1, u^2),\ \lambda_{22}(u^1, u^2), \tag{4.172}$$

gefunden wird, welches die Relationen

$$\tilde{R}_{12,\,12}-\varkappa^2=R_{12,\,12}(u^1, u^2, u^3_0, \ldots, u^m_0)=\lambda_{11}\lambda_{22}-\lambda^2_{12}, \tag{4.173}$$

$$\frac{\partial\lambda_{i2}}{\partial u^1}-\frac{\partial\lambda_{i1}}{\partial u^2}=\Gamma^j_{i1}\lambda_{j2}-\Gamma^j_{i2}\lambda_{j1}. \tag{4.174}$$

erfüllt.

Wir konstruieren die Funktionen

$$\bar{\lambda}_{ij}(u^1, u^2)=\frac{\lambda_{ij}(u^1, u^2)}{e^{v(u^3_0, \ldots, u^m_0)}}. \tag{4.175}$$

Die Funktionen λ_{ij} erfüllen die Bedingungen (4.168) - (4.169). Dann erfüllen die Funktionen

$$\lambda_{ij}(u^1, u^2, u^3, \ldots, u^m)=e^{v(u^3, \ldots, u^m)}\bar{\lambda}_{ij}(u^1, u^2) \tag{4.176}$$

die Bedingungen von Gauss (4.160) und Peterson-Codazzi (4.161) - (4.162), und die Metrik wird als Fläche $V_m \subset E_{m+1}$ realisiert. Die Behauptung ist bewiesen. Die Realisierung ist mit zwei beliebigen Funktionen von einer einzigen Variablen möglich.

2_{31}. In dem Fall, wenn $\Gamma_\alpha = 0$ ($\alpha = 3,\ldots,m$), kann man leicht nachweisen, daß g_{ij} $(i,j = 1,2)$ nur von u^1, u^2 abhängen.

Es gelten nämlich die Relationen

$$dg_{ij} = \omega_i^k g_{kj} + \omega_j^k g_{ki}, \quad i,\ j,\ k = 1,\ 2, \tag{4.177}$$

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^\alpha} = \Gamma_{i\alpha}^k g_{kj} + \Gamma_{j\alpha}^k g_{ki} = 0, \quad i,\ j,\ k = 1,\ 2;\ \alpha = 3,\ \ldots,\ m, \tag{4.178}$$

da in unserem Fall

$$\Gamma_{i\alpha}^k = \Gamma_{j\alpha}^k = 0, \quad i,\ j,\ k = 1,\ 2;\ \alpha = 3,\ \ldots,\ m. \tag{4.179}$$

In diesem Fall läuft die Aufgabe auf eine Einbettung V_2 in E_3 hinaus. Mit zwei beliebigen Funktionen einer einzigen Variablen ist die Einbettung nicht eineindeutig. [1)]

10. An dieser Stelle wollen wir untersuchen, welche Typen der Flächen die Metrik der Klasse 1 in allen von uns aufgezählten Fällen realisieren. Wir nehmen wie immer an, daß auf der Hyperfläche $V_m \subset E_{m+1}$, die die Metrik $ds^2 = g_{ij}\,\omega^i\,\omega^j$ realisiert, ein n-Bein $I_1,\ldots,I_m,I_{m+1}$ eingeführt ist, in dem die Gleichungen

$$dr = \omega^i I_i, \quad i = 1,\ \ldots,\ m. \tag{4.180}$$

erfüllt werden. Hieraus folgt unmittelbar (siehe Abschnitt 1), daß die inneren Formen der Realisierung mit den Zusammenhangsformen $\omega_j^i = \Gamma_{jk}^i \omega^k$ der Metrik übereinstimmen, und daß

$$I_i \cdot I_j = g_{ij}, \quad I_{m+1} \cdot I_i = 0, \quad I_{m+1}^2 = 1. \tag{4.181}$$

---

1) Angemerkt sei, daß im Falle 2_3 die Aufgabe der Einbettung einer mehrdimensionalen Metrik auf die Einbettung einer zweidimensionalen Metrik in einen dreidimensionalen Raum mit positiver (S_3) oder Nullkrümmung (E_3) hinausläuft. Folglich entsprechen die Forderungen nach Differenzierbarkeit der Metrik den letztgenannten Aufgaben (siehe Abschnitt 7).

Somit haben wir in dem von uns gewählten n-Bein

$$\omega_\alpha^i = \Gamma^i_{\alpha j}\omega^j, \tag{4.182}$$

$$\omega_i^{m+1} = \psi_i = \lambda_{ij}\omega^j, \tag{4.183}$$

$$\omega_\alpha^{m+1} = \psi_\alpha = 0, \tag{4.184}$$

$$\Gamma^i_{\alpha j}\lambda_{ik} - \Gamma^i_{\alpha k}\lambda_{ij} = 0, \tag{4.185}$$

$$g_{i\alpha} = 0, \qquad i, j, k = 1, 2; \qquad \alpha = 3, \ldots, m. \tag{4.186}$$

Wir führen den Begriff der Fokal-Richtung ein. Die Richtung $dr = \omega^1 I_1 + \omega^2 I_2$ heißt fokal, wenn sich die unendlich nahen ebenen Erzeugenden $E_{m-2}(r)$, $E_{m-2}(r + dr)$, die durch die Punkte r, $r + dr$ gehen, in der Ebene E_{m-3} schneiden. Bemerkt sei, daß die Erzeugenden $E_{m-2}(r)$, $E_{m-2}(r + dr)$ sich ganz allgemein in E_{m-4} schneiden, und daß keine beliebige Fläche V_m des Rangs 2 Fokalrichtung besitzt.

Dieser Infinitesimaldefinition kann man aufgrund des folgenden Theorems eine streng analytische Formulierung geben :

Theorem 9. Damit die Richtung $dr = \omega^i I_i$ fokal ist, ist notwendig und hinreichend, daß sie invariante Richtung der Affinore ist, d.h. daß für die Größen ω^i die Gleichungen

$$\omega_\alpha^i = \Gamma^i_{\alpha j}\,\omega^j = x_\alpha\,\omega^i, \quad i, j = 1, 2; \quad \alpha = 3, \ldots, m. \tag{4.187}$$

erfüllt werden müssen.

Beweis. [1] Die ebene Erzeugende $E_{m-2}(r)$ ist Schnittpunkt der Hyperebenen

$$P_{m+1} = P_1 = P_2 = 0; \tag{4.188}$$

die Erzeugende $E_{m-2}\ (r + dr)$ ist Schnittpunkt der Ebenen

$$P_{m+1} + dP_{m+1} = 0, \quad P_1 + dP_1 = 0, \quad P_2 + dP_2 = 0. \tag{4.189}$$

Hieraus ist ersichtlich, daß der Schnittpunkt der Flächen $E_{m-2}(r)$, $E_{m-2}(r + dr)$ mit dem Schnittpunkt der Ebenen

$$\begin{aligned} P_{m+1} &= P_1 = P_2 = 0, \\ dP_{m+1} &= dP_1 = dP_2 = 0. \end{aligned} \tag{4.190}$$

übereinstimmt. Wir verwenden die tangentialen Ableitungsfor-

---

[1] Die Berechnungen werden im orthogonalen n-Bein durchgeführt.

meln

$$dP_{m+1} = \omega^i_{m+1} P_i = -\sum_{i=1}^{m} \psi_i P_i, \tag{4.191}$$

$$dP_i = \omega^j_i P_j - \omega^i, \quad i = 1, \ldots, m; \; j = 1, \ldots, m+1, \tag{4.192}$$

und erhalten

$$dP_{m+1} = -\sum_{i=1}^{2} \psi_i P_i,$$

$$dP_i = \omega^j_i P_j - \sum_{\alpha=3}^{m} \omega^i_\alpha P_\alpha - \omega^i, \quad i, j = 1, 2. \tag{4.193}$$

Hieraus folgt, daß die Ebene $E_{m-2}(r) \cap E_{m-2}(r + dr)$ Schnittpunkt der Hyperebenen

$$P_{m+1} = P_1 = P_2 = 0, \tag{4.194}$$

$$\sum_{\alpha=3}^{m} \omega^i_\alpha P_\alpha + \omega^i = 0. \tag{4.195}$$

ist. Damit die Ebene $E_{m-2}(r) \cap E_{m-2}(r + dr)$ die Dimension m-3 besitzt, ist notwendig und hinreichend, daß die Ebenen (4.195) übereinstimmen, d.h. daß sie die Gleichungen

$$\omega^i_\alpha = \Gamma^i_{\alpha j} \omega^j = \varkappa_\alpha \omega^i, \quad i, j, = 1, 2; \quad \alpha = 3, \ldots, m. \tag{4.196}$$

erfüllen.[1)]

q.e.d.

Angemerkt sei, daß der Begriff Fokalrichtung von uns in projektiven Begriffen formuliert wurde. Die Flächen des Rangs 2, die Fokalrichtung haben, bilden somit eine projektiv invariante Klasse.

Wir leiten jetzt die Art der Einbettung der verschiedenen Typen der Metriken der Klasse 1 her, die von uns bereits in Abschnitt 2 untersucht wurden.

Metriken des Ranges $\geqslant$ 3 werden als Flächen des Rangs 0 (d.h. als Hyperebenen) oder als Flächen des Rangs 1 realisiert, d.h. als abwickelbare Flächen. Die Einbettung ist nicht eineindeutig, da die abwickelbaren Hyperflächen in eine Hyper-

---

1) Der Begriff Fokalebene und das formulierte Theorem werden unverändert auf den Fall r > 2 übertragen.

ebene verbogen werden können.

Metriken des Rangs 2 werden als Flächen des Rangs 2 realisiert. Hier sind verschiedene Fälle möglich:
1. Der Fall, wo der Rang des definierenden Systems gleich 2 ist. Dann wird die Metrik eineindeutig als nichtverbiegbare Fläche des Rangs 2 realisiert.
2. Der Fall 2_1: nach Theorem 1 wird die Metrik als Fläche des Rangs 2 mit zwei Fokalrichtungen realisiert.

Wir beweisen, daß in diesem Fall die realisierende Fläche $V_m \subset E_{m+1}$ Einhüllende der zweiparametrigen Schar der Hyperebenen $\pi = P_{m+1} = 0$ ist, die die Gleichung

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial u\, \partial v} = \alpha \frac{\partial \pi}{\partial u} + \beta \frac{\partial \pi}{\partial v} + \gamma \pi. \tag{4.197}$$

erfüllen.

Beweis. Wir wählen als Vektoren I_1, I_2 die Vektoren, die in Fokalrichtung ausgerichtet und so normiert sind, daß $\omega^i = du^i$ $(i = 1,2)$. Dann erhalten wir

$$\begin{gathered}\omega_\alpha^i = \varkappa_\alpha^i du^i, \quad \varkappa_\alpha^1 \neq \varkappa_\alpha^2, \qquad i = 1, 2; \ \alpha = 3, \ldots, m, \quad \omega_{m+1}^i = \psi^i = \lambda_j^i du^j, \\ \omega_\alpha^{m+1} = \psi_i = \lambda_i\, du^i \ \text{(über i wird nicht summiert)} \\ i, j = 1, 2.\end{gathered} \tag{4.198}$$

Wir betrachten die Ableitungsformeln (siehe § 3 Abschnitt 13)

$$\begin{gathered}dP_{m+1} = \psi^i P_i = -g^{ij} \lambda_j\, du^j\, P_i = -\lambda_j\, du^j\, P^j, \\ dP_i = \omega_i^j P_j - \omega_i,\end{gathered} \tag{4.199}$$

wobei

$$P^i = g^{ij} P_j. \tag{4.200}$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned}\frac{\partial \pi}{\partial u^1} &= -\lambda_1 P^1, \\ \frac{\partial \pi}{\partial u^2} &= -\lambda_2 P^2.\end{aligned} \tag{4.201}$$

Bemerkt sei, daß P^i die Gleichungen

$$dP^i = \omega_j^i P^j - \psi^i \cdot \pi - \omega^i = -\omega_j^i P^j - \psi^i \pi - du^i. \tag{4.202}$$

erfüllt. Hieraus folgt

$$\frac{\partial P^i}{\partial u^j} = -\Gamma_{kj}^i P^k - \delta_j^i \Gamma_{\alpha i}^i P^\alpha - \lambda_j^i \pi - \delta_j^i, \qquad i, j, k = 1, 2, \tag{4.203}$$

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial u^1 \partial u^2} = -\frac{\partial \lambda_1}{\partial u^2} P^1 - \lambda_1 \frac{\partial P^1}{\partial u^2} = \alpha \frac{\partial \pi}{\partial u^1} + \beta \frac{\partial \pi}{\partial u^2} + \gamma \pi, \tag{4.204}$$

wobei

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \frac{\partial \ln \lambda_1}{\partial u^2} - \Gamma_{12}^1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\Gamma_{11}^2, \\ \beta &= \frac{\partial \ln \lambda_2}{\partial u^1} - \Gamma_{21}^2 = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\Gamma_{22}^1, \\ \gamma &= \frac{\lambda_2^1}{\lambda_1} = \frac{\lambda_1^2}{\lambda_2}. \end{aligned}\right\} \tag{4.205}$$

q.e.d.

Die Fläche, deren tangentiale Hyperebene die Gleichung (4.204) erfüllt, ist allgemein nichtverbiegbar.

Wir betrachten die möglichen Fälle der Verbiegung. Wenn wir in Abschnitt 3 die Verbiegungsbedingungen der Realisierung (Bedingung der nicht eineindeutigen Realisierung der Metrik) als Bedingungen für die metrischen Größen ermittelt haben, dann ermitteln wir diese Bedingungen jetzt als Bedingungen für die Koeffizienten α, β der Gleichung (4.204). Damit die Fläche V_m eine Verbiegung zuläßt, ist notwendig und hinreichend, daß es die Funktionen μ_1, μ_2, $\mu_1 \neq \lambda_1$ gibt, die die Bedingungen

$$\mu_1 \cdot \mu_2 = R = R_{12,12} \qquad \text{(Gaussche Bedingung)} \tag{4.206}$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \mu_1}{\partial u^2} = \Gamma_{12}^1 \mu_1 - \Gamma_{11}^2 \mu_2, \\ &\frac{\partial \mu_2}{\partial u^1} = \Gamma_{21}^2 \mu_2 - \Gamma_{22}^1 \mu_1, \quad \frac{\partial \mu_i}{\partial u^\alpha} = \Gamma_{i\alpha}^i \mu_i, \quad i = 1, 2, \ \alpha = 3, \ldots, m \end{aligned}\right\} \tag{4.207}$$

(Bedingungen von Peterson-Codazzi)

erfüllen.

Wir führen den Parameter t mit Hilfe der Gleichungen

$$\mu_1 = \lambda_1 t, \qquad \mu_2 = \frac{\lambda_2}{t}, \tag{4.208}$$

ein und erhalten folgende Gleichungen für t:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \tau}{\partial u^1} = 2\beta(1-\tau)\tau, \\ &\frac{\partial \tau}{\partial u^2} = 2\alpha(1-\tau), \qquad \tau = t^2, \\ &\frac{\partial \tau}{\partial u^k} = 0, \qquad k = 3, \ldots, m. \end{aligned}\right\} \tag{4.209}$$

Wir setzen die Integrierbarkeitsbedingungen der Gleichungen (4.209) ein und erhalten

$$\left(\frac{\partial \alpha}{\partial u^1} - 2\alpha\beta\right) - \left(\frac{\partial \beta}{\partial u^2} - 2\alpha\beta\right)\tau = 0. \tag{4.210}$$

Wir betrachten zunächst den Fall

$$\frac{\partial \beta}{\partial u^2} - 2\alpha\beta \neq 0. \tag{4.211}$$

Dann ist

$$\tau = \frac{\frac{\partial\alpha}{\partial u^1} - 2\alpha\beta}{\frac{\partial\beta}{\partial u^2} - 2\alpha\beta}. \tag{4.212}$$

Damit wir eine isometrische nichtkongruente Fläche bekommen, ist notwendig, daß τ, welches aus (4.212) bestimmt ist, die Gleichungen (4.209) erfüllt. In diesem Fall haben wir eine diskret verbiegbare Fläche, die der Metrik des Typs 2_{11} entspricht.

In dem Fall, wo sich die isometrische Fläche $\bar{V}_m$ der Fläche V_m annähert, erhalten wir an der Grenze

$$\frac{\partial\alpha}{\partial u^1} = \frac{\partial\beta}{\partial u^2}. \tag{4.213}$$

In diesem Fall geht die diskrete Verbiegbarkeit in das Vorhandensein einer infinitesimalen Verbiegung über. Wir kommen zum Fall 2_{12}.

Schließlich ist der Fall möglich, wo die bezüglich t lineare Funktion (4.210) identisch gleich 0 ist, d.h. wir erhalten :

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\alpha}{\partial u^1} - 2\alpha\beta = 0, \\ &\frac{\partial\beta}{\partial u^2} - 2\alpha\beta = 0. \end{aligned} \tag{4.214}$$

In diesem Fall sind die Gleichungen (4.209) äquivalent zu der vollständig integrierbaren Gleichung

$$d\tau - 2\beta(1-\tau)\tau\, du^1 - 2\alpha(1-\tau)\, du^2 = 0, \tag{4.215}$$

die die einparametrige Lösungsschar $\tau = \tau(u^1, u^2)$ zuläßt. Die Fläche V_m läßt somit ∞ isometrische nichtkongruente Flächen zu. Wir haben den Fall 2_{13}.

Wir betrachten den Fall 2_2.

In diesem Fall ist

$$\Gamma^2_{\alpha 1} = \Gamma^2_{\alpha 2} - \Gamma^1_{\alpha 1} = 0, \qquad \alpha = 3, \ldots, m. \tag{4.216}$$

Die Richtung I_1 ist einzige (reelle) Fokalrichtung. Wenn $\Gamma^2_{11} \neq 0$ ist, dann ist die Einbettung eindeutig, die Fläche nichtverbiegbar. Wenn $\Gamma^2_{11} = 0$ ist, dann ist die Einbettung nichteineindeutig. Wir untersuchen, welchen Aufbau in diesem Fall die Fläche hat. Wir gehen auf die Gleichungen

$$\Gamma_{11}^2 = 0,\ \Gamma_{\alpha 1}^2 = 0,\ \lambda_{11} = 0, \qquad \alpha = 3, \dots, m, \tag{4.217}$$

ein und sehen, daß die Ableitungsformeln :

$$dP^\alpha = -\omega_\beta^\alpha P^\beta - \omega^\alpha, \tag{4.218}$$

längs der Fläche $\omega^2 = du^2 = 0$ die Gestalt

$$\begin{aligned} dP^2 &= -\omega_2^2 P^2 - \omega_{m+1}^2 P^{m+1}, \\ dP^{m+1} &= -\omega_2^{m+1} P^2. \end{aligned} \tag{4.219}$$

bekommen. Hieraus können wir erkennen, daß die Fläche

$$P^2 = P^{m+1} = 0 \tag{4.220}$$

längs der Fläche V_{m-1}, die durch die Gleichung $du^2 = 0$ charakterisiert wird, stetig bleibt. Da die Vektoren I^2, I^{m+1} orthogonal sind zu I_α ($\alpha = 1,3,..,m$), folgt hieraus, daß die Ebene (4.220) die Vektoren $I_1, I_3, \dots, I_m$ enthält, d.h. die Mannigfaltigkeit V_m ist die Ebene E_{m-1}.

Im Fall 2_2 ist somit die Realisierung nicht eineindeutig, die realisierende Fläche ist Fläche des Rangs 2 mit einer Fokalrichtung, die eine Schichtung in ∞ E_{m-1} zuläßt ("Regel"-Fläche). Man kann nachweisen, daß diese Bedingungen die Fläche des Typs 2_2 völlig charakterisieren.

2_3. Wir betrachten letztendlich den Fall, wo

$$\Gamma_{2\alpha}^1 = \Gamma_{1\alpha}^2 = 0. \tag{4.221}$$

Dann hat die Fläche $V_m \subset E_{m+1}$ ∞ Fokalrichtungen. Die Einbettung ist in diesem Fall nicht eineindeutig.

Wir leiten die Struktur der Fläche V_m und die Art der Verbiegung her.

Die Gleichungen (4.221) gelten in einem beliebigen kanonischen n-Bein. Der Einfachheit halber wählen wir das orthogonale kanonische n-Bein. Die Fläche V_m läßt eine doppelte Schichtung zu :

$$\begin{aligned} V_m &= \infty^2 E_{m-2}, \\ V_m &= \infty^{m-2} V_2, \end{aligned}$$

wobei längs E_{m-2} $\omega^1 = \omega^2 = 0$, längs V_2 $\omega^3 = \dots = \omega^m = 0$.

Dabei ist $V_2 \perp E_{m-2}$. Durch Drehung der Vektoren $I_3, \dots, I_m$ in ihre Ebenen kann man die Werte $\Gamma_\alpha = \Gamma^1_{1\alpha} = \Gamma^2_{2\alpha}$ $(\alpha = 4, \dots, m)$ annullieren, sodaß wir erhalten :

$$\omega^i_\alpha = 0, \qquad i = 1, 2; \quad \alpha = 4, \dots, m. \tag{4.222}$$

Wir untersuchen die Integrierbarkeitsbedingungen der Gleichungen (4.222) und stellen fest :

$$\begin{gathered} (\omega^i_\alpha)' = [\omega^\beta_\alpha \omega^i_\beta] = [\omega^j_\alpha \omega^i_j] + [\omega^\gamma_\alpha \omega^i_\gamma] + [\omega^3_\alpha \omega^i_3] = 0; \\ \Gamma_3 [\omega^3_\alpha \cdot \omega^i] = 0, \qquad i, j = 1, 2; \quad \alpha, \gamma = 4, \dots, m. \end{gathered} \tag{4.223}$$

Infolgedessen, daß $\Gamma_3 \neq 0$, $[\omega^1 \omega^2] \neq 0$ erhalten wir

$$\omega^3_\alpha = 0, \qquad \alpha = 4, \dots, m. \tag{4.224}$$

Somit gelten die Gleichungen

$$\omega^i_\alpha = 0, \qquad i = 1, 2, 3; \quad \alpha = 4, \dots, m. \tag{4.225}$$

Es ist klar, daß jede Gleichung aus dem Gleichungssystem

$$\omega^1 = \omega^2 = \omega^3 = 0, \tag{4.226}$$
$$\omega^4 = \dots = \omega^m = 0 \tag{4.227}$$

vollständig integrierbar ist.

Somit läßt sich die Schichtung der Fläche V_m bestimmen

$$V_m = \infty^3 V_{m-3} = \infty^3 E_{m-3}, \qquad \text{längs } E_{m-3} \quad \omega^4 = \dots = \omega^m, \tag{4.228}$$
$$V_m = \infty^{m-3} V_3, \qquad \text{längs } V_3 \quad \omega^1 = \omega^2 = \omega^3 = 0. \tag{4.229}$$

Verwenden wir die tangentialen Ableitungsformeln (siehe §3 Abschnitt 13) erhalten wir auf der Fläche V_3

$$\left.\begin{aligned} dP_i &= \omega^j_i P_j + \omega^{m+1}_i P_{m+1} - \omega^i, \\ dP_{m+1} &= \omega^i_{m+1} P_i, \\ dP_\alpha &= \omega^\beta_\alpha P_\beta, \quad \alpha, \beta = 4, \dots, m. \end{aligned}\right\} \tag{4.230}$$

Hieraus folgt, daß die durch die Gleichungen $P_\alpha = 0$ $(\alpha = 4, \dots, m)$ vorgegebene vierdimensionale Ebene E_4 längs V_3 stetig bleibt; folglich ist $V_3 \subset E_4$. Dabei ist die Ebene E_4 orthogonal zur Ebene E_{m-1}. Hieraus folgt, daß alle Ebenen E_4 parallel sind. Desweiteren erhalten wir längs V_2

$$dI_3 = \omega^1_3 I_1 + \omega^2_3 I_2 = \Gamma_3 (\omega^1 I_1 + \omega^2 I_2) = \Gamma_3 \, dr, \tag{4.231}$$

wobei r Ortsvektor von V_2 ist.

Wir setzen die Integrierbarkeitsbedingungen der Gleichungen (4.231) ein und erhalten

$$(dI_3)' = 0 = [d\Gamma_3 \, dr] + \Gamma_3 (dr)' = [d\Gamma_3 \, dr] = [d\Gamma_3 \omega^1] \, I_1 + [d\Gamma_3 \omega^2] \, I_2. \tag{4.232}$$

Hieraus folgt

$$[d\Gamma_3 \omega^1] = [d\Gamma_3 \omega^2] = 0. \tag{4.233}$$

Folglich ist längs V_2

$$\Gamma_3 = \text{const.} \tag{4.234}$$

Aus den Gleichungen (4.231) folgt

$$I_3 = \Gamma_3 (r - r_0). \tag{4.235}$$

Da $I_3^2 = 1$ ist, gehört die Fläche V_2 zu einer gewissen Sphäre S_3 mit dem Radius $\frac{1}{\Gamma_3}$. Die Fläche V_m erhält man auf folgende Weise: in den Punkten $V_2 \subset S_3$ werden die Ebenen $E_{m-2} \perp S_3$ errichtet, die Erzeugende V_m sind. Diese Flächen kann man konisch nennen.

Da Γ_3 Verbiegungsinvariante ist, liegt die Fläche $\overline{V}_2 \subset \overline{V}_m$, welche V_2 in der Isometrie $V_m \sim \overline{V}_m$ entspricht, ebenfalls in einer gewissen Sphäre $\overline{S}_3$ mit demselben Radius $\frac{1}{\Gamma_3}$.

Somit läuft die Verbiegung V_m auf die Verbiegung V_2 in der Sphäre S_3 hinaus; jede Erzeugende E_{m-2} bewegt sich dabei als starrer Körper. Man kann aufzeigen, daß die Verbiegung von zwei beliebigen Funktionen eines einzigen Parameters abhängt.

Wir betrachten den Fall 2_3. Dann erhalten wir

$$\omega_\alpha^i = 0, \quad i = 1, 2; \qquad \alpha = 3, \ldots, m. \tag{4.236}$$

Hieraus folgt, daß $V_2 \subset E_3$, $E_{m+2} \perp E_3$, die Fläche also einen zylindrischen Aufbau hat.

Die Verbiegung läuft auf eine Verbiegung der Grundfläche V_2 in E_3 hinaus und hängt folglich von zwei beliebigen Funktionen eines einzigen Parameters ab.

Zum Schluß wollen wir auf folgende wichtige Besonderheiten der stetig verbiegbaren Hyperflächen des n-dimensionalen Euklidischen Raumes E_n $(n > 3)$ eingehen :

1. Alle Flächen haben den Rang $\leqslant 2$, d.h. sie sind Einhüllende einer r-parametrigen Schar von Hyperebenen $(r \leqslant 2)$.

Somit stellen die verbiegbaren Flächen $V_{n-1} \subset E_n$ r-parametrige Scharen der ebenen Erzeugenden E_{n-1-r} dar, längs derer die Tangential-Hyperebene E_{n-1} der Fläche konstant bleibt. Dabei geschieht die Verbiegung der Hyperfläche so, daß jede Erzeugende sich als starrer Körper bewegt.

2. All die aufgezählten Unterklassen der stetig verbiegbaren Flächen (mit Ausnahme der Unterklasse 2_{13}) sind projektiv invariant.

Dies hängt eng mit der projektiven Invarianz des Feldes der unendlich kleinen Verbiegung der Fläche zusammen.

LITERATURNACHWEISE

[1] Schläfli, L.: Nota alla Memoria del sign. Beltrami.
In: Annali di matematica pura ed applicata. Bolognja, 5 (1871), S. 176 - 193.

[2] Bianchi, L.: Sulle varietà a tre dimensioni deformabili entro lo spazio euclideo a quattro dimensione.
In: Atti della R. Academia d'Italia. Serie 3. Roma, 13 (1905), S. 261 - 323.

[3] Sbrana, Umberto: Sulle varietà ad n-1 dimensioni deformabili nello spazio euclideo ad n dimensioni.
In: Rendiconti del Circulo matematico di Palermo. Palermo, 27 (1909), S. 1 - 45.

[4] Cartan, E.: La déformation des hypersurfaces dans l'espace euclidien réel à n dimensions.
In: Bulletin de la Société mathématique de France. Paris, 44 (1916), S. 65 - 99.

[5] Weise, K.H.: Beiträge zum Klassenproblem der quadratischen Differentialformen.
In: Mathematische Annalen. Berlin, 110 (1934), S. 522 - 570.

[6] Thomas, T.Y.: Riemann spaces of class one and their characterization.
In: Acta mathematica. Uppsala, 67 (1936), S. 169 - 211.

[7] Розенсон Н. А., О римановых пространствах класса 1, Изв. АН СССР, мат. серия, 4 (1940), 181—192.
Rozenson, N.A.: O rimanovych prostranstvach klassa I. Čast' 1.
In: Izvestija. Akademija nauk SSSR. Serija matematičeskaja. Moskva, 4 (1940), S. 181 - 192.
[Sur les espaces riemanniens de classe I; russ.]

[8] Розенсон Н. А., О римановых пространствах класса 1, Изв. АН СССР, 5 (1941), 325—351.
Rozenson, N.A.: O rimanovych prostranstvach klassa I. Čast' 2.
In: Izvestija. Akademija nauk SSSR. Serija matematičeskaja. Moskva, 5 (1941), S. 325 - 351.
[Sur les espaces riemanniens de classe I; russ.]

[9] Розенсон Н. А., О римановых пространствах класса 1, Изв. АН СССР, 7 (1943), 253—284.
Rozenson, N.A.: O rimanovych prostranstvach klassa I. Čast' 3.
In: Izvestija. Akademija nauk SSSR. Serija matematičeskaja. Moskva, 7 (1943), S. 253 - 284.
[Sur les espaces riemanniens de classe I; russ.]

[10] Е ф и м о в Н. В., Качественные вопросы теории деформаций поверхностей в «малом», Труды математического института им. В. А. Стеклова, XXX (1949).
Efimov, N.V.: Kačestvennye voprosy teorii deformacii poverchnostej v "malom".
In: Trudy. Matematičeskij institut im. V.A. Steklova. Moskva-Leningrad, 30 (1949), 128 S.
[Qualitative Fragen der Deformationstheorie von Flächen im "Kleinen"; russ.]

[11] Beez, R.: Zur Theorie des Krümmungsmaßes von Mannigfaltigkeiten höherer Ordnung.
In: Zeitschrift für Mathematik und Physik. Leipzig, 21 (1876), S. 373 - 401.

[12] Allendörfer, Carl B.: Rigidity for spaces of class greater than one.
In: American journal of mathematics. Baltimore, Md., 61 (1939), Nr 3, S. 633 - 644.

[13] Я н е н к о Н. Н., Некоторые необходимые признаки изгибаемых поверхностей многомерного евклидова пространства (кандидатская диссертация), НИИМ МГУ, 1948.
Janenko, N.N.
Nekotorye neochodimye priznaki izgibaemych poverchnostej mnogomernogo evklidova prostranstva.
(Kandidatskaja dissertacija).
Naučno-issledovatel'skij institut matematikí. Moskovskij gosudarstvennyj universitet im. M.V. Lomonosova, 1948.
⟨Einige notwendige Merkmale verbiegbarer Mannigfaltigkeiten eines mehrdimensionalen Euklidischen Raumes (Kandidatendissertation); russ.⟩

[14] Я н е н к о Н. Н., О связи между метрическими и проективными свойствами поверхностей, ДАН, 82, 5 (1952), 685.
Janenko, N.N.: O svjazi meždu metričeskimi i proektivnymi svojstvami poverchnostej.
In: Doklady. Akademija nauk SSSR. Moskva, 82 (1952), Nr 5, S. 685 - 688.
⟨Über die Beziehung zwischen den metrischen und projektiven Eigenschaften der Flächen; russ.⟩

[15] Darboux, G.: Leçons sur la théorie générale des surfaces. Paris, 1896, S. 76 - 79.

[16] Р а ш е в с к и й П. К., Геометрическая теория уравнений с частными производными, Гостехиздат, 1947.
Raševskij, P.K.
Geometričeskaja teorija uravnenij s častnymi proizvodnymi.
Moskva-Leningrad: Gostechizdat, 1947.
[Geoemtrische Theorie der partiellen Differentialgleichungen; russ.]

[17] Ф и н и к о в С. П., Метод внешних форм Картана, Гостехиздат, 1948.
Finikov, Sergej Pavlovič
Metod vnešnich form Kartana.
Moskva: Gostechizdat, 1948.
⟨Cartansche Methode der äußeren Differentialformen; russ.⟩

[18] Р а ш е в с к и й П. К., Введение в риманову геометрию и тензорный анализ, ОНТИ НКТП, 1936.
Raševskij, Petr Konstantinovič
Vvedenie v rumanovu geometriju i tenzornyj analiz.
Otdel naučno-techničeskoj informacii. Narodnyj komissariat tjaželoj promyšlennosti: 1936.
Deutsch:
Riemannsche Geometrie und Tensoranalysis. Übers.aus.d.Russ.: W. Richter.
Berlin: Dt.Verl.d.Wissenschaften, 1959.

[19] Э й з е н х а р т Л. П., Риманова геометрия, ГИИЛ, 1948.
Ējzenchart, L.P
Rimanova geometrija.
Moskva: Gos. izdatel'stvo inostrannoj literatury, 1948.
Übersetzung aus dem Engl.:
Eisenhart, Luther Pfahler
Riemannian geometry.
Princeton: Princeton Univ.Press, 1960, 4. Aufl.

[20] Р а ш е в с к и й П. К., Курс дифференциальной геометрии, Гостехиздат, 1950.
Raševskij, Petr Konstantinovič
Kurs differencial'noj geometrii.
Moskva: Gostechizdat, 1950; 1956, 4. Aufl.
[Lehrbuch der Differentialgeometrie; russ.]

[21] К а р т а н Э., Геометрия римановых пространств, ОНТИ НКПТ, 1936.
Kartan, Ê.
Geometrija rimanovych prostranstv.
Otdel naučno-techničeskoj informacii. Narodnyj komissariat tjaželoj promyšlennosti: 1936.
Übersetzung aus dem Franz.:
Cartan, Elie
La Géometrie des espaces de Riemann.
Paris: Gauthier-Villars, 1925.

[22] Bianchi, L.: Sulle deformazione delle superficie flessibili ed inestendibili.
In: Atti della R. Academia delle scienze di Torino. Torino, 40 (1904-1905), S. 714 - 731.

[23] П о г о р е л о в А. В., Изгибание выпуклых поверхностей, Гостехиздат, 1951.
Pogorelov, Aleksej Vasil'evič
Izgibanie vypuklych poverchnostej.
Moskva: Gostechizdat, 1951.
Deutsch:
Die Verbiegung konvexer Flächen. Übers.aus d.Russ.: A. Linger.
Berlin: Akademie-Verlag, 1957.