Raer, G.A. (Kand. d. techn. Wiss.)

EINIGE BESONDERHEITEN DER RESONANZSCHWINGUNGSERREGUNG IN DEN RÄDERN VON TURBOKOMPRESSORMASCHINEN (TKM)

Deutsche Vollübersetzung aus:

Ēnergomašinostroenie. Moskva, 17 (1971), Nr 7, S. 23 - 25.

Russ.: Некоторые особенности возбуждения резонансных колебаний в колесах ЦКМ

Nekotorye osobennosti vozbuždenija rezonansnych kolebanij v kolesach CKM

In den früheren Arbeiten [1 - 3] wurde gezeigt, daß das TKM-Laufrad ein Schwingungssystem darstellt, das aus schwach miteinander verbundenen Fächern besteht, und daß man beim Bestimmen der Eigenfrequenzen, welche den gefährlichsten Schwingungsformen entsprechen, jedes Fach der Haupt- oder Abdeckscheibe in erster Näherung als isoliertes Element betrachten kann. Dieses Verfahren kann auch eingesetzt werden, um aus der gesamten Vielfalt von Resonanzen die gefährlichste herauszufinden. Dabei wird die verteilte Masse der Fächer durch die konzentrierte Masse m_i ersetzt. Die Werte des Einflusses a_{ik} für die Querverschiebungen werden experimentell ermittelt.

Die Stärke der Resonanzschwingung wird bestimmt durch das Verhalten der äußeren Last A_k bei den Verschiebungen der schwingenden Teile. Sie wird ermittelt aus der Relation [2]:

$$A_k = \pi^2 ray_{max} D_2 \sqrt{(a_k')^2 + (a_k'')^2}\, F_1, \qquad (1)$$

mit a'_k und a''_k für die Koeffizienten der Fourier-Reihe der Funktion $P(\xi)$, die die Verteilung der unbeweglichen aerodynamischen Last um D_2 charakterisiert; ay_{max} für die maximale Schwingungsamplitude eines Faches; $r = k/z_k$, k für die Teilbarkeit der untersuchten Resonanz, gleich der Nummer der Harmonischen der Auflösung der Funktion $P(\xi)$.

Beim Herleiten von Gleichung (1) wurde angenommen, daß die Form der Zwangs-Resonanzschwingungen mit der Form der freien Schwingungen übereinstimmt.

Der Faktor $B_k = \sqrt{(a_k')^2 + (a_k'')^2}$ hängt vom Verteilungsgesetzt der aerodynamischen Last und von der Teilbarkeit der Erregungsresonanz (Nummer der Harmonischen k) ab. F_1 wird bestimmt durch die Schwingungsform des untersuchten Faches [2] und die Teilbarkeit der Resonanz. Somit kann der Einfluß der Schwingungsform und des Verteilungsgesetzes der äußeren Last auf die Stärke der Schwingungen unabhängig bestimmt werden. In Arbeit [2] sind die Abhängigkeiten $F_1(r)$ für die 1. und 2. Schwingungsform der Teile von typischen Rädern sowie die Gleichungen angegeben, die die Stärke der Schwingungen bei Einwirkung auf ein isoliertes Fach eines rotierenden Rades einer einzigen Kraft und z_∂ konzentrierter Kräfte bestimmen, sowie einer Last, die die Form eines rechtwinkligen Impulses besitzt.

Wir untersuchen den Fall, wo die Last aus dem Schaufeldiffusor, bei dem die Teilung einer einzigen Schaufel um $\Delta\varphi$ verschoben ist und die Winkel zwischen dieser und den verschobenen Schaufeln $\frac{2\pi}{z_\partial} \pm \Delta\varphi$ betragen (Abb. 1). Die auf das Fach wirkende Last kann man als Summe von zwei Kräftesystemen darstellen: z_∂ der Lasten mit gleicher Teilung, die nur die Grundresonanzen mit den Teilbarkeiten $k = iz_\partial$ hervorrufen, und die zwei Lasten P' und - P' , die größenmäßig gleich und richtungsmäßig entgegengesetzt sind und die voneinander um den Winkel $\Delta\varphi$ entfernt sind (Abb. 1). Wir verwenden die Gleichung für das Verhalten der konzentrierten Kraft [2] und erhalten den Ausdruck für die zusätzliche Arbeit ΔA, die die Stärke der Schwingungen bei den Nichtgrundresonanzen mit $k \neq iz_\partial$ charakterisiert:

$$\Delta A = 2\pi ray_{\max} PF_1 \, 2 \sin \frac{k\Delta\varphi}{2} \quad \text{или} \quad \frac{\Delta A}{A} = \frac{2 \sin \frac{k\Delta\varphi}{2}}{z_\partial}, \tag{2}$$

mit A Arbeit der Grundlast aus dem Schaufeldiffusor, gleich $2\pi ray_{\max} z_\partial PF_1$. Die Amplitude der Resonanzschwingungen mit $k \neq iz_\partial$ ist bei ungenauem Einrichten der Schaufeln (Kanäle) des Diffusors mit kleinem z_∂ (im Kanaldiffusor) bedeutender. So erhalten wir z.B. für $\Delta\varphi = 0{,}1 \frac{2\pi}{z_\partial}$ bei $z_\partial = 20$ und k = 20 $\Delta A/A = 0{,}031$, und bei $z_\partial = 6$ und k = 12 erhalten wir $\frac{\Delta A}{A} = 0{,}197$.

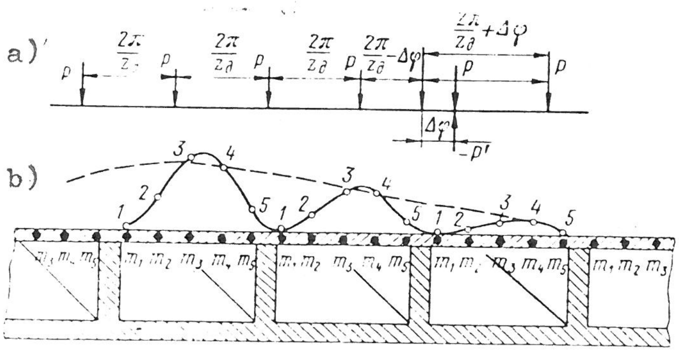

Abb. 1. Berechnungsschemata: a) Belastung des Rades mit z_∂ konzentrierten Kräften (Arbeit mit dem Schaufeldiffusor), von denen eine Kraft mit verstimmter Teilung angebracht ist; b) elastische Linien in den miteinander verbundenen Fächern:
——— elastische Linie, die die momentane Lage der Massen charakterisiert; - - - - - elastische Linie, die die identischen Massen der Fächer verbindet;
1 - 5 Nummern der Massen.

Analoge Werte wurden auch beim Lösen eines Systems inhomogener Gleichungen [2] für den untersuchten Fall ermittelt.

Der Umstand, daß zwischen den Fächern eine (wenn auch äußerst schwache) Verbindung besteht, ruft zusätzliche Eigenfrequenzen hervor, die sich größenmäßig nur wenig von denen für das isolierte Fach unterscheiden. Diesen Eigenfrequenzen entsprechen die Formen mit verschiedenen Zusammensetzungen der Schwingungsphasen der Fächer.

Die charakteristische (Häufigkeits-)Gleichung für geschlossene symmetrische Systeme, darunter auch für Systeme mit zyklischer Symmetrie (welches die Haupt- und die Abdeckscheibe sind) hat vielfache Wurzeln, d.h. für diese Systeme sind gleiche Eigenfrequenzen charakteristisch [4 - 6]. In unserem Fall ist das Vielfache zwei, d.h. es sind paarweise gleiche Eigenfrequenzen vorhanden. Im Spektrum der Eigenfrequenzen gibt es gleichzeitig (bei z_k gerade) zwei oder (bei z_k ungerade) eine nichtvielfache Eigenfrequenz. Alle Fächer des rotierenden Rades sind gleichen Bedingungen unterworfen, und deshalb müssen die Schwingungsamplituden von identischen Massen verschiedener Fächer gleich sein. Den Ausdruck für die Verschiebung der Massen m_i bei freien Schwingungen des Systems mit der Frequenz $\omega_s = \omega_{s+1}$ kann man folgendermaßen darstellen:

$$\bar{y}_i = a \sqrt{(y_i^s)^2 + (y_i^{s+1})^2} \sin(\omega_s t + \alpha_1 + \Delta\beta_i + z\Delta\alpha), \quad (3)$$

mit $\Delta\beta_i$ für die Verschiebung der Schwingungsphasen der Massen innerhalb eines jeden Faches (zwischen den Massen m_i und m_1, Abb. 1). Für die untersuchten Systeme mit äußerst schwacher Verbindung kann man $\Delta\beta_i \approx 0$ annehmen. $\Delta\alpha$ bezeichnet die Verschiebung der Schwingungsphasen von identischen Massen verschiedener Fächer und z die Nummer des Faches. y_i^s und y_i^{s+1} definieren zwei linear unabhängige Eigenvektoren, die den Frequenzen ω_s und ω_{s+1} entsprechen, und der Wert $\sqrt{(y_i^s)^2 + (y_i^{s+1})^2}$, die Konstante für identische Massen verschiedener Abstände, charakterisiert die Form der Schwingungen innerhalb der Fächer. Die Berechnungen zeigen, daß die Form der Schwingungen innerhalb eines jeden Faches kaum von der Berechnung der Wechselbeziehung der Fächer abweicht.

Die Verschiebung der Phasen $\Delta\alpha$ ist für alle identischen Massen gleichartig und beträgt $\Delta\alpha = \pm 2\pi \frac{p}{2z_k}$, wobei p die Anzahl der Knotenpunkte der bedingten elastischen Linie bezeichnet, die sich beim Verbinden der identischen Massen aller Fächer ergibt. Die Anzahl der Winkelpunkte dieser bedingten elastischen Linie wird bestimmt durch die Nummer s der Eigenfrequenz: für z_k gerade ist $p = z_k - 2(s-1)$, und $s = 1; 2; \ldots;$ $\frac{z_k}{2} + 1$; für z_k ungerade ist $p = z_k - (2s-1)$, und $s = 1; 2; \ldots; \frac{z_{k+1}}{2}$.

Die Intensität des Schwingungsvorgangs im wechselbezogenen System wird bestimmt durch die Arbeit der äußeren Last während einer vollen Radumdrehung. Folgt man den Angaben in [4], kann man nachweisen, daß die Gesamtarbeit der unbeweglichen Last bei den Resonanzschwingungen eines rotierenden Rades mit identischen Fächern bei den für jede Form der Schwingungen völlig bestimmten kritischen Rotationsgeschwindigkeiten $n = \omega_k/2\pi k$ von Null abweicht, wobei $k = iz_k \pm 0{,}5\ p$. Für die kritischen Rotationsgeschwindigkeiten ist die Arbeit der unbeweglichen Last $A = z_k A_k$. Dieses Ergebnis kann unmittelbar aus der Untersuchung der Schwingungserregung in jedem Fach ermittelt werden. Denn wenn sich der Phasenwinkel ωt_0 in der Zeit, wo ein einzelnes Fach mit der Kraft ($t_o = 1/nz_k$) durchlaufen wird, um einen Wert ändert, der gleich der Phasenverschiebung $\Delta\alpha = 2\pi\left(i \pm \frac{p}{2z_k}\right)$ ist, d.h. wenn $\frac{\omega}{nz_k} = 2\pi\left(i \pm \frac{p}{2z_k}\right)$ oder $k = iz_k \pm 0{,}5\ p$, dann sind die ursprünglichen Schwingungsphasen aller Fächer zum Zeitpunkt des Lastangriffs identisch. In diesem Fall ist die durch die Kraft bei den Verschiebungen in allen Abschnitten bewältigte Arbeit ebenfalls gleich und $A = z_k A_k$. In Abb. 2 sind die Abhängigkeiten der Schwingungsamplituden der Massen des gegenseitig verbundenen Systems von der Rotationsgeschwindigkeit (genauer: von der Teilbarkeit der Resonanz) dargestellt, die durch Lösen eines Systems inhomogener Differentialgleichungen für den Fall der Einwirkung einer einzigen konzentrierten Kraft ermittelt wurden [2]. Genaue Lösungen zeigen ebenfalls, daß sich starke Resonanzschwingungen nur bei den kritischen Rotationsgeschwindigkeiten einstellen können.

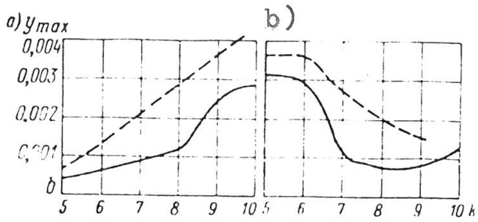

Abb. 2. Maximale Schwingungsamplituden in einem Zehnfeldersystem bei Resonanzen verschiedener Teilbarkeiten: a) Rotationsgeschwindigkeit ω_{max}/k (kritische Geschwindigkeit $\omega_{max}/10$); b) Rotationsgeschwindigkeit ω_{min}/k (kritische Geschwindigkeit $\omega_{min}/5$):
——— System mit identischen Feldern; - - - - - System mit einem verstimmten Feld $\left(\frac{\omega_{i\,verst}}{\omega_{i\,symm}} = 1.03\right)$

Dieser Vorgang ähnelt bis zu einem gewissen Grade der Schwingungserregung in den Scheiben von Dampfturbinen [6] und auch in Schaufeln, die durch einen Dämpfungsdraht zu einem einzigen System verbunden sind [4].

In unserem Fall tritt die stehende Welle jedoch nur bei den angenommenen elastischen Linien auf, die die indentischen Punkte eines jeden Faches verbinden. Aber da die Schwingungsamplituden der Massen innerhalb des Faches verschieden sind, können die stehenden Wellen nicht auf gewöhnliche Weise festgestellt werden (z.B. durch einen unbeweglichen Geber). Außerdem bedingt die beträchtliche Länge eines jeden Faches - das ein Schwingungselement darstellt - in Kreisrichtung eine Abhängigkeit der Gesamtarbeit der äußeren Last und folglich der Intensität des Schwingungsprozesses von der erregten Schwingungsform (innerhalb des Feldes) und von der Teilbarkeit der Resonanz [siehe Formel (1)].

Die Wechselbeziehung der Fächer drückt sich stark aus in der Verteilung der Spannungen in den Blattquerschnitten der Deckscheibe, die an den Schaufeln anliegen (insbesondere derer, die an den Arbeitsteilen der Schaufeln anliegen). Der Grund dafür ist, daß die Spannungen in diesen Blattquerschnitten sowohl bei Einwirkung der Last in gleichen Fach als auch im gemischten Fach auftreten, d.h.

$$\bar{\sigma}_i = \sigma_i' \sin \omega t + \sigma_i'' \sin (\omega t + \Delta\alpha).$$

Das erste Glied dieser Gleichung ist gleich der Spannung im Punkt i aus den Trägheitslasten des gleichen Faches, das zweite aus den Lasten des gemischten Faches, und die Verschiebung der Schwingungsphasen der Fächer $\Delta\alpha$ hängt von der resonierenden Schwingungsform ab. Deshalb hängt das Niveau der veränderlichen Spannungen in den genannten (gefährdetsten [1]) Grenzquerschnitten von der Teilbarkeit der erregten Resonanz ab. Z.B. bei $r = \frac{k}{z_k} = 1; 2; \ldots$ ist der Winkel $\Delta\alpha = 0$ und beide Spannungskomponenten werden addiert. Aber bei $r \approx 0{,}5; 1{,}5; \ldots$ und $\Delta\alpha \approx \pi$ haben die Spannungskomponenten verschiedene Vorzeichen. Experimentell wurde mehrfach eine starke Spannungszunahme in den mittleren Querschnitten bei Veränderung der Teilbarkeit der Resonanz festgestellt.

Die Streuung der Abmessungen der einzelnen Fächer führt dazu, daß die Symmetrie des Systems zerstört wird. Die entsprechende charakteristische Häufigkeitsgleichung hat z_k verschiedene Wurzeln (Eigenfrequenzen) für jede Schwingungsform innerhalb eines Faches.

Der Einfluß der Verstimmung auf die Amplituden der Resonanz-Zwangsschwingungen kann bewertet werden, indem man die Lösungen des Systems der inhomogenen Differentialgleichungen analysiert [2].

Die Berechnungen, die für einige Systeme durchgeführt werden, zeigen folgendes:

1. Die stärksten Schwingungen mit jeder Eigenfrequenz werden bei Rotationsgeschwindigkeiten erregt, denen im symmetrischen System die kritischen Geschwindigkeiten entsprechen. Am stärksten sind z.B. die Schwingungen mit den maximalen Eigenfrequenzen ω_{max} bei den Resonanzen mit $r = 1$ und mit den minimalen Eigenfrequenzen ω_{min} bei $r = 0,5$ (Abb. 2).

2. Die Hinzunahme der Verstimmung führte zu einer starken Zunahme der maximalen Schwingungsamplituden bei "kritischen" Rotationsgeschwindigkeiten. Besonders stark ist die Zunahme der Schwingungsamplituden (1,5 mal größer), wenn ein verstimmtes Fach vorhanden ist. In Abb. 3 sind die relativen Schwingungsamplituden der Fächer Y_i/Y_{symm} (wobei Y_i die maximalen Schwingungsamplituden des Faches i und Y_{symm} die maximale Schwingungsamplitude ohne Verstimmung bezeichnen) für zwei Verstimmungsarten bei Resonanzen mit ω_{max} dargestellt.

3. In einem System mit verstimmten Fächern weicht (im Unterschied zu einem symmetrischen System) die Arbeit der äußeren Last für jede Schwingungsform nicht nur bei den kritischen Rotationsgeschwindigkeiten von Null ab. In solchen Systemen werden deshalb auch bei Resonanzen, die von den kritischen Schwingungen abweichen, starke Schwingungen erregt. Ein anschauliches Bild von der Abhängigkeit der maximalen Schwingungsamplituden von der Teilbarkeit der Resonanz liefern die in Abb. 2 enthaltenen Angaben (gestrichelte Kurve).

Die Erregung starker Schwingungen bei nichtkritischen resonanten Rotationsgeschwindigkeiten führt dazu, daß der gefährliche Drehzahlenbereich größer wird. Für derartige Räder ist charakteristisch, daß für jede Teilbarkeit eine ganze Zone von Resonanzdrehzahlen anstelle einer festen kritischen Drehzahl bei symmetrischem Rad vorhanden ist.

4. Nimmt man die Verstimmung hinzu, führt dies zu einer beträchtlichen Streuung der Schwingungsamplituden der verschiedenen Fächer. Bei den in Abb. 3 untersuchten Beispielen beträgt die Streuung der Schwingungsamplituden bis zu 300 % (siehe auch die Arbeiten [6 und 7]).

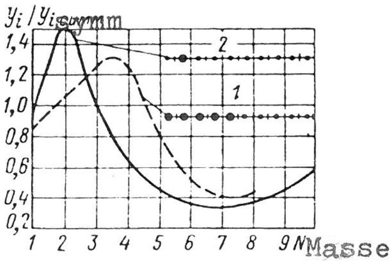

Abb. 3. Relative Amplituden (y_i/y_{symm}) der Resonanzzwangsschwingungen der Massen eines Zehnfeldersystems:
1) System mit fünf verstimmten Fächern (№ 1—5). $k = 10$. $\omega_{max} = 1000$ Hz; $\frac{\omega_{i\,verst}}{\omega_{i\,symm}} = 1{,}05$;
2) System mit einem verstimmten Fach (Nr 2) $k = 10$, $\omega_{max} = 970$ Hz; $\frac{\omega_{i\,verst}}{\omega_{i\,symm}} = 1{,}03$.

Ein System mit Verstimmung zerfällt im wesentlichen in mehrere voneinander isolierte Abschnitte. Dieses Isoliertsein tritt besonders deutlich bei den Resonanzen mit den minimalen und maximalen Eigenfrequenzen zutage.

5. In Systemen mit Verstimmung beobachtet man ein Überspringen der Energie aus den ungestimmten Fächern in das gestimmte Fach beim jeweiligen Resonanzfach, was eine kontinuierliche Kompensierung der Reibungsverluste zu dem Zeitpunkt gewährleistet, wo die Erregungskraft in den vom untersuchten Fach entfernten schwach vibrierenden Fächern liegt. In symmetrischen Systemen bleibt ein solches Überspringen der Energie praktisch aus. Deshalb ist die Verringerung der Schwingungsamplitude auf Grund der Ermüdung bei den am stärksten schwingenden Massen wesentlich niedriger als bei den Massen eines symmetrischen Systems. Damit läßt sich auch die Zunahme, der Schwingungsamplituden der Massen im verstimmten System in Abb. 3 erklären.

Der Einfluß der Verstimmung auf die Intensität der Schwingungen wurde an einem rotierenden Rad mit Zusatzmassen auch experimentell untersucht. Diese Versuche bestätigten die Ergebnisse der theoretischen Analyse: die Hinzunahme einer zusätzlichen Masse, welche die Eigenfrequenzen nur gering verändert (~ 3 - 5 %), führt bei bestimmten Resonanzen zu einer beträchtlichen Zunahme der Spannungen. Außerdem wurden Resonanzen mit bestimmten Teilbarkeiten nicht bei einer einzigen festen Drehzahl erregt, sondern bei mehreren Werten von n.

Für ein wechselbezogenes System ist somit eine Vielzahl von Eigenfrequenzen charakteristisch. In einem System mit gleichen Fächern werden starke Resonanzschwingungen hingegen nur bei den kritischen Rotationsgeschwindigkeiten erregt, d.h. bei $n = \omega_k/2\pi k$. Die Streuung der geometrischen Abmessungen der einzelnen Teile führt zu einer Zunahme der maximalen Schwingungsamplituden bei den nichtkritischen resonanten Rotationsgeschwindigkeiten, zu einer Verbreiterung des gefährlichen Drehzahlbereichs und zu einer beträchtlichen Streuung der Werte der Schwingungsamplituden in den verschiedenen Fächern.

Literatur

1. Раер Г. А. Динамика и прочность центробежных компрессорных машин. Изд-во «Машиностроение», 1968.
2. Раер Г. А. — «Энергомашиностроение», 1968, № 10.
3. Раер Г. А., Васильев А. В. и Левина Е. И. Исследование динамических свойств рабочих колес ЦКМ. — Турбо- и компрессоростроение. Изд-во «Машиностроение», 1970.
4. Боришанский К. Н. — «Энергомашиностроение», 1965, № 1.
5. Аронсон А. Я. — «Энергомашиностроение», 1960, № 3.
6. Иванов В. П. К вопросу о причинах разброса резонансных напряжений в упругих телах, конструктивно обладающих циклической симметрией. Труды Куйбышевского авиационного института. Вып. XXXVI, 1969.
7. Дай, Генри. Амплитуды вибраций лопаток компрессоров, обусловленные разбросом значений собственных частот лопаток. — «Энергетические машины и установки». № 3. Изд-во «Мир», 1969.

1.
Raer, G. A.
Dinamika i pročnost' centrobežnych kompressornych mašin.
Moskva: Verlag "Mašinostroenie", 1968.
(Dynamik und Stabilität von Turbokompressormaschinen; russ.)

2.
Raer, G.A.: Približennyj metod opredelenija dinamičeskich charakteristik koles CKM.
In: Ėnergomašinostroenie. Moskva, 14 (1968), Nr 10, S. 9 - 13.
(Näherungsweises Bestimmungsverfahren der dynamischen Charakteristiken der TKM-Räder; russ.)

3.
Raer, G. A., Vasil'ev, A.V., Levina, E.I.
Issledovanie dinamičeskich svojstv rabočich koles CKM. - Turbo- i kompressorostroenie.
Moskva: Verlag "Mašinostroenie", 1970.
(Untersuchung der dynamischen Eigenschaften der Laufräder von TKM. - Turbinen- und Kompressorenbau; russ.)

4.
Borišanskij, K.N.: Kolebanija steržnej i lopatok, svjazannych provolokami.
In: Ėnergomašinostroenie. Moskva, 11 (1965), Nr 1, S. 7 - 10.
(Schwingungen der miteinander durch Draht verbundenen Bolzen und Schaufeln; russ.)

5.
Aronson, A.Ja.: Rasčet častot sobstvennych kolebanij rabočich koles radial'noosevych gidroturbin.
In: Ėnergomašinostroenie. Moskva, 6 (1960), Nr 3, S. 8 - 12.
(Berechnung der Eigenschwingungsfrequenzen der Laufräder von Spiralturbinen; russ.)

6.
Ivanov, V.P.: K voprosu o principach razbrosa rezonansnych naprjaženij v uprugich telach, konstruktivno obladajuščich cikličeskoj simmetriej.
In: Trudy. Kujbyševskij aviacionnyj institut. Kujbyšev, 36 (1969).
(Zu den Prinzipien der Streuung der Resonanzspannungen in elastischen Körpern mit baumäßig zyklischer Symmetrie; russ.)

7.
Daj, Genri
Amplitudy vibracii lopatok kompressorov, obuslovlennye razbrosom značenij sobstvennych častot lopatok.
Moskva: Verlag "Mir", 1969.
(Schwingungsamplituden von Kompressorschaufeln, die durch die Streuung der Eigenfrequenzwerte der Schaufeln bedingt sind; russ. - vermutlich Übersetzung aus dem Englischen, jedoch nicht nachweisbar)

Stuttgart, den 7. Dezember 1982

übersetzt von

Ottmar Pertschi

(Ottmar Pertschi)
Dipl.-Übersetzer