Dobrušin, A. L.

ÜBER DIE REGULARITÄTSBEDINGUNGEN BEI ZEITLICH HOMOGENEN MARKOFFSCHEN PROZESSEN MIT ABZÄHLBAREM ZUSTANDSRAUM

Deutsche Vollübersetzung aus:
Uspechi matematičeskich nauk. Moskva, 7 (1952), Nr 6(52), S. 185 - 191.

Russ.: ОБ УСЛОВИЯХ РЕГУЛЯРНОСТИ ОДНОРОДНЫХ ПО ВРЕМЕНИ МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ СО СЧЁТНЫМ ЧИСЛОМ ВОЗМОЖНЫХ СОСТОЯНИЙ

Ob uslovijach reguljarnosti odnorodnych po vremeni Markovskich processov so sčetnym čislom vozmožnych sostojanij

1. Überblick über die bereits ermittelten Ergebnisse. Mit $\{P_i^j(t)\}$ bezeichnen wir die Übergangswahrscheinlichkeiten vom Zustand i zum Zustand j in der Zeit t, die den allgemeinen Forderungen entsprechen. Wir setzen voraus (vgl. /7/), daß die Wechselraten

$$a_i = \lim_{t\to 0} \frac{1-P_i^i(t)}{t} \qquad (1)$$

und die Übergangsraten

$$a_i^j = \lim_{t\to 0} \frac{P_i^j(t)}{t}, \qquad (2)$$

endlich sind, die durch die Beziehungen

$$a_i = \sum_{j\neq i} a_i^j \quad (i=1,\ 2,\ \ldots) \qquad (3)$$

verknüpft sind. Für die beliebig vorgegebenen nichtnegativen Größen und $\{a_i^j\}$, die durch die Beziehung (3) verbunden sind, findet man einen Prozeß, bei dem sie die Übergangsraten darstellen (siehe /3/).

Die Wahrscheinlichkeiten ${}_nP_i^j(t)$, die in genau n Sprüngen in der Zeit t vom Zustand $\mathcal{E}_i$ zum Zustand $\mathcal{E}_j$ gelangen, werden bestimmt (siehe /2/, S. 63) durch $\{a_i\}$ und $\{a_i^j\}$ mit Hilfe der Rekursionsgleichungen

$$
\begin{aligned}
{}_0P_i^j(t) &= \delta_i^j e^{-a_i t}, \\
{}_{n+1}P_i^j(t) &= \sum_{k \neq i} \int_0^t e^{-a_i(t-s)} a_i^k \, {}_nP_k^j(s)\, ds
\end{aligned}
\tag{4}
$$

(wobei $\delta_i^j = 0$ bei $i \neq j$, $\delta_i^i = 1$). Die Größen

$$\overline{P}_i^j(t) = \sum_{n=0}^{\infty} {}_nP_i^j(t) \tag{5}$$

sind die Übergangswahrscheinlichkeiten vom Zustand $\mathcal{E}_i$ nach $\mathcal{E}_j$ in endlich vielen Sprüngen in der Zeit t. Diese erfüllen immer die Ungleichungen

$$\sum_{j=1}^{\infty} \overline{P}_i^j(t) \leqslant 1 \quad (i = 1, 2, \ldots). \tag{6}$$

Wie Doob in /2/ und /3/ nachgewiesen hat, sind die folgenden vier Bedingungen äquivalent und trennen ein und dieselbe Klasse von Prozessen ab:

a) Für alle i steht in (6) das Gleichheitszeichen.

b) Bei beliebigen Anfangsbedingungen und innerhalb eines beliebigen endlichen Zeitraums macht das System mit der Wahrscheinlichkeit 1 nur endlich viele Sprünge.

c) Die Übergangswahrscheinlichkeiten $\{P_i^j(t)\}$ werden eindeutig bestimmt durch ihre Wechselraten $\{a_i^j\}$.

d) Die zum Prozeß gehörigen Kolmogoroffschen Differentialgleichungen sind erfüllt.

Die durch diese Bedingungen gekennzeichneten Prozesse heißen *regulär*.

Mit τ_i bezeichnen wir die Zufallsvariable, die den ersten Zeitpunkt angibt, zu dem das System unendlich viele Sprünge gemacht hat, wenn das System im Zustand $\mathcal{E}_i$ gestartet ist (d.h $\tau_i = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n$, wobei ξ_n die Zeit bezeichnet, die zwischen dem n-1ten und $n$ten Sprung des Systems vergeht)[1].

---

[1] siehe nächste Seite.

Sei Ω eine gewisse Menge von Systemzuständen $(\mathscr{E}_{i_1}, \mathscr{E}_{i_2}, \ldots)$ und $\mathscr{E}_i \subset \Omega$. Mit η_i^Ω bezeichnen wir die Zeit, die bis zu dem Moment vergeht, bis das System erstmals aus Ω austritt, wenn das System im Zustand $\mathscr{E}_i$ gestartet ist (falls das System niemals aus Ω austritt, ist $\eta_i^\Omega = \infty$). Die Menge Ω heißt *stabil*, wenn bei einem beliebigen $\mathscr{E}_i \subset \Omega$ die Wahrscheinlichkeit $P\{\eta_i^\Omega \geqslant \tau_i\} \neq 0$ ist. Angenommen $\tau_i^\Omega = \min(\tau_i, \eta_i^\Omega)$, dann ist $\overline{\tau}_i^\Omega$ gleich der Gesamtzeit, die das System in Ω bis zum Moment τ_i durchläuft, unter der Bedingung, daß das System im Zustand $\mathscr{E}_i$ gestartet ist.

Feller /4/ fand das folgende Regularitätskriterium, das nunmehr folgendermaßen formuliert werden kann:

S a t z   v o n   F e l l e r. *Für die Regularität eines Prozesses ist*

1) notwendig und hinreichend, daß bei einem beliebigen stabilen Ω *und beliebigen* $\mathscr{E}_i \subset \Omega$ *der Erwartungswert von* τ_i^Ω $M\tau_i^\Omega = \infty$ *ist,*

2) notwendig und hinreichend, daß bei einem beliebigen stabilen Ω *und beliebigen* $\mathscr{E}_i \subset \Omega$ *der Erwartungswert von* $\overline{\tau}_i^\Omega$ $M\overline{\tau}_i^\Omega = \infty$ *ist.*

Wir bringen einen einfachen Beweis für diesen Satz, der von E.B. Dynkin stammt.

Da immer $\overline{\tau}_i^\Omega \geqslant \tau_i^\Omega$, brauchen wir nur zu zeigen, daß die Bedingung 1) notwendig und die Bedingung 2) hinreichend ist. Anzumerken bleibt, daß die Behauptungen $P\{\tau_i = \infty\} = 1$ und $\sum_{j=1}^{\infty} \overline{P}_i^j(t) \equiv 1$ bei allen t äquivalent sind. Für die Regularität ist deshalb notwendig und hinreichend, daß für alle i $P\{\tau_i = \infty\} = 1$ ist.

Bei einem beliebigen $\mathscr{E}_i \subset \Omega$, wobei Ω stabil ist, sei $M\tau_i^\Omega < \infty$. Dann nimmt die Zufallsgröße τ_i^Ω fast überall nur endliche Werte an, zusammen mit der Bedingung für eine stabile Menge folgt daraus $P\{\tau_i^\Omega = \tau_i\} \neq 0$. Damit ist auch $P\{\tau_i < \infty\} \neq 0$, womit durch

---

1) Die Verteilungen aller untersuchten Zufallsgrößen werden durch $\{a_i^j\}$ festgelegt. So ist z.B. $P\{\tau_i > t\} = \sum_{j=1}^{\infty} \overline{P}_i^j(t)$. Deshalb sind unsere Untersuchungen zulässig, und wir stoßen auf keine komplizierten Fragen bezüglich der Abmessungen in Funktionalräumen.

Widerspruch bewiesen ist, daß die Bedingungen unseres Satzes notwendig sind.

Ist der Prozeß irregulär, so gibt es einen Zustand $\mathcal{E}_i$, daß $P\{\tau_i = \infty\} \neq 1$, und demzufolge gibt es ein $h < \infty$, so daß die Wahrscheinlichkeit $P\{\tau_i \leqslant h\} = \alpha > 0$. Mit Ω bezeichnen wir die Menge aller Zustände, für die $P\{\tau_j \leqslant h\} \geqslant \alpha$. Wir setzen voraus, daß die Menge Ω nicht stabil sei. Dann gilt für ein $\mathcal{E}_k \in \Omega$ mit Wahrscheinlichkeit eins $\eta_k^\Omega \leqslant \tau_k$. Damit $\tau_k \leqslant h$ ist, ist es notwendig, daß erstens $\eta_k^\Omega \leqslant h$, und zweitens, daß das System im Zeitraum (η_k^Ω, h) unendlich viele Sprünge macht. Im Moment η_k^Ω gelange das System in $\mathcal{E}_l \bar{\in} \Omega$. Unter dieser Bedingung ist die Wahrscheinlichkeit für eine unendliche Zahl von Sprüngen im Zeitraum (η_k^Ω, h) kleiner als $P\{\tau_l \leqslant h\} < \alpha$. Somit kommt das System im Moment η_k^Ω immer in einen Zustand, der nicht zu Ω gehört, und damit ist folglich die Wahrscheinlichkeit für unendlich viele Sprünge im Zeitintervall (η_k^Ω, h) kleiner als α, womit wir beim Widerspruch zu $\mathcal{E}_k \in \Omega$ sind.

Wir weisen nach, daß $M\tau_i^\Omega < \infty$. Im Moment 0 befinde sich das System in $\mathcal{E}_i$. Untersuchen wir eine Zufallsfolge von Zeitpunkten $t_0, t_1, t_2 \ldots$, die folgendermaßen bestimmt wird: $t_0 = 0$ und $t_j = \tilde{t}_{j-1} + h$, wobei $\tilde{t}_{j-1}$ der erste Moment nach t_{j-1} ist, in dem das System in einen Zustand, der zu Ω gehört, übergegangen ist. $\xi(t_j, t_{j+1})$ gibt die Zeit an, die das System während des Zeitraums (t_j, t_{j+1}) in Ω verbleibt. Dann ist $\overline{\tau}_i^\Omega \leqslant \sum_{j=0}^{\nu} \xi(t_j, t_{j+1})$, wobei ν den Index des größten, nicht über τ_i liegenden Zeitpunkt t_j bezeichnet. Der Wert ν kann gleich null sein. Für jede der Zufallsgrößen gilt $\xi(t_j, t_{j+1}) \leqslant h$, da sich das System nur während des Zeitraums $(\tilde{t}_j, t_{j+1})$ in Ω befinden kann. Deshalb ist $M\tau_i^\Omega \leqslant h \sum_{j=0}^{\infty} P\{\nu \geqslant j\}$. Damit $\nu \geqslant j$ ist, ist es notwendig, daß erstens $\nu \geqslant j-1$ und zweitens, daß in der Zeit $(\tilde{t}_{j-1}, t_j)$ nicht unendlich viele Übergänge stattfinden. Da das System im Moment $\tilde{t}_{j-1}$ sich in Ω befindet, ist die Wahrscheinlichkeit $P\{\nu \geqslant j\} \leqslant P\{\nu \geqslant j-1\} \cdot (1-\alpha)$. Hieraus folgt $P\{\nu \geqslant j\} \leqslant (1-\alpha)^j$ und $M\tau_i^\Omega \leqslant h \sum_{j=0}^{\infty} (1-\alpha)^j = h/\alpha < \infty$, was zu beweisen war.

Der Satz von Feller führt ganz allgemein zur Notwendigkeit, eine Zahl von Bedingungen zu verifizieren, die die Mächtigkeit des Kontinuums haben können. Deshalb ist es wichtig, ein wirkungsvolles Regularitätskriterium für verschiedene Einzelfälle zu ermitteln.

Der Fall des sogenannten reinen Geburtsprozesses, wo $a_i^j = 0$ bei $j \neq i+1$ und $a_i^{i+1} = a_i$ ist, wurde von Feller behandelt /4/. Es ergab sich[1)], daß die Divergenz der Reihe eine notwendige undhinreichende Regularitätsbedingung

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{a_i} = \infty. \tag{7}$$

beim reinen Geburtsprozeß ist.

<u>2. Beziehung des kontinüierlichen Prozesses mit der Markoffschen Kette.</u> Unter der Bedingung, daß das System aufgrund des $n$ten Sprunges in den Zustand $\mathcal{E}_i$ gelangt, ist die zwischen dem $n$ten und $n+1$ ten Sprung vergangene Zeit eine Zufallsvariable mit der Verteilungsfunktion $1-e^{-a_i t}$. Ihr Erwartungswert ist $1/a_i$. Die Wahrscheinlichkeit, daß das System beim $n+1$ ten Sprung in den Zustand $\mathcal{E}_k$ übergeht, ist gleich $\pi_i^k = a_i^k / a_i$. Zu unseren Bedingungen ist anzumerken, daß die zwischen dem n ten und dem $n+1$ ten Sprung vergangene Zeit und der Zustand, in den das System beim $n+1$ ten Sprung gelangt, voneinander unabhängig sind.

Wir nehmen $\pi_i^i = 0$ an. Dann kann man $\sum_k \pi_i^k = 1$ und die Matrix $\Pi = \{\pi_i^k\}$ als die Matrix der Übergangswahrscheinlichkeiten einer diskreten Markoffschen Kette annehmen. Bei dieser Kette stimmt die Wahrscheinlichkeit für den Übergang beim $n$ten Schritt in den Zustand $\mathcal{E}_i$ mit jener Wahrscheinlichkeit überein, daß bei unserem Prozeß der $n$te Sprung das System in den Zustand $\mathcal{E}_i$ versetzt. Der Markoffsche Prozeß wird vollständig bestimmt, gibt man die Matrix Π und die Größe $\{a_i\}$ vor, wobei Π für die "Trajektorie" des Systems steht und $\{a_i\}$ für die "Ge-

---

1) Bemerkt sei, daß es im Beweis dieser in Arbeit /4/ enthaltenen und danach im Buch /5/ wiederholten Behauptung einen Fehler gibt. Denn, anstelle zu beweisen, daß die Bedingung (7) notwendig und hinreichend sei, wurde zweimal bewiesen, daß sie hinreichend ist. Dieser Fehler läßt sich übrigens unschwer bereinigen (siehe die Anmerkung des Herausgebers auf S. 382 der russischen Übersetzung des Buches /5/). Außerdem ergibt sich die Bedingung (7) leicht aus dem allgemeinen Kriterium von Feller oder aus unserem Theorem 2.

schwindigkeit" ihrer Fortbewegung auf ihr. Genauer: die Matrix Π gibt die Verteilung der Wahrscheinlichkeiten in der Menge der Trajektorien des Systems vor, d.h. in der Menge von derartigen Folgen von Zuständen $(\mathscr{E}_{i_0}, \mathscr{E}_{i_1}, \mathscr{E}_{i_2}, \ldots)$, daß sich zwischen dem $n$ten und dem n+1ten Sprung das System in $\mathscr{E}_{i_n}$ befindet.

Man kann die folgende Behauptung leicht beweisen, indem man das Beispiel von Feller (7) verallgemeinert:

T h e o r e m 2. *Für die Regularität des Prozesses ist notwendig und hinreichend, daß bei beliebigem Anfangszustand* $\mathscr{E}_i = \mathscr{E}_{i_0}$ *in beinahe allen Trajektorien des Systems die Reihe*

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{a_{i_j}} = \infty. \tag{8}$$

gegen unendlich divergiert.

B e w e i s. Unter der Bedingung[1)], daß das System auf der vorgegebenen Trajektorie $L = \{\mathscr{E}_i, \mathscr{E}_{i_1}, \mathscr{E}_{i_2}\}$ verläuft, stellt die Reihe (8) tatsächlich den Erwartungswert von τ_i dar. Wenn die Reihe (8) mit positiver Wahrscheinlichkeit konvergiert, dann ist mit positiver Wahrscheinlichkeit $M\tau_i < \infty$. Mit positiver Wahrscheinlichkeit ist somit die Zufallsgröße τ_i finit und der Prozeß irregulär. Umgekehrt gilt: ist (8) für fast alle Trajektorien unendlich groß, dann ist τ_i mit der Wahrscheinlichkeit eins infinit unter der Zusatzbedingung, daß die Trajektorie des Systems insgesamt innerhalb einer stabilen Menge Ω liegt. Das heißt: $M\tau_i^{\Omega} = \infty$, und nach dem Satz von Feller ist der Prozeß regulär.

Interessant ist, in welchen Fällen die Regularität eines Prozesses allein durch die Matrix Π unabhängig von $\{a_i\}$ und, umgekehrt, nur durch die Größen $\{a_i\}$ unabhängig von Π gewährleistet wird.[2)]

[1)] Die gewählten mathematischen Wahrscheinlichkeiten werden hier unter der Bedingung der Null-Wahrscheinlichkeit im Sinne Kolmogoroffs /6/ verstanden.

[2)] Diese Frage stellte E.B. Dynkin auf einem von ihm geleiteten Seminar. Theorem 4 wurde vom Verfasser zusammen mit N.D. Vvedenskaja bewiesen.

T h e o r e m 3. Damit der Prozeß bei vorgegebener Folge $\{a_i\}$ und beliebiger Matrix Π regulär ist, ist notwendig und hinreichend, daß die Größen $\{a_i\}$ gleichmäßig beschränkt sind.

B e w e i s. Es sei $a_i < C < \infty$; dann divergiert die Reihe (8) auf jeder beliebigen Trajektorie, und nach Theorem 2 ist der Prozeß regulär. Umgekehrt gilt: die Folge $\{a_i\}$ sei nicht beschränkt. Dann kann man die Zustände so durchnumerieren, daß $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a_{2k}} < \infty$. Sei $\pi_i^{i+2} = 1$ bei $i > 2$, $\pi_1^2 = 1/2$, $\pi_1^3 = 1/2$ und alle übrigen $\pi_i^k = 0$, und war das System anfangs in $\mathscr{E}_1$, dann divergiert die Reihe (8) mit der Wahrscheinlichkeit 1/2, und der Prozeß ist somit irregulär.

Jedem Zustand $\mathscr{E}_i$ der diskreten Markoffschen Kette entspricht eine Wahrscheinlichkeit α_i, daß das System, welches in $\mathscr{E}_i$ startete, irgendwann erneut dahin zurückkehrt. Ist $\alpha_i = 1$, dann heißt das System $\mathscr{E}_i$ rekurrent, bei $\alpha_i < 1$ transient (zur genauen Analyse siehe /5/, 15. Kapitel). Den transienten Zustand $\mathscr{E}_i$ nennen wir gefährlich, wenn die Wahrscheinlichkeit, niemals wieder in einen rekurrenten Zustand zu gelangen, wenn man in $\mathscr{E}_i$ gestartet ist, größer als null ist.

T h e o r e m 4. Damit der Prozeß bei vorgegebener Matrix Π und beliebiger Folge $\{a_i\}$ regulär ist, ist es notwendig und hinreichend, daß die durch die Matrix Π bestimmte Kette keine gefährlichen Zustände enthält.

B e w e i s. Ist der Anfangszustand nicht gefährlich, dann gelangt das System nach einer endlichen Zahl von Sprüngen in einen rekurrenten Zustand, in den es danach unendlich oft zurückkehrt. Die Reihe (8) enthält fast sicher eine unendliche Anzahl gleichartiger Glieder und divergiert gegen unendlich. Aus Theorem 1 folgt, daß die Bedingungen von Theorem 4 hinreichend sind.

Nun sei die Menge Ω der gefährlichen Zustände nicht leer. Dann ist Ω stabil. Tatsächlich gelangt das System, das sich anfangs $\mathscr{E}_i \subset \Omega$ befindet, mit positiver Wahrscheinlichkeit nach einer beliebigen endlichen Zahl von Sprüngen nicht in einen rekurrenten Zustand. Gelangt das System in einen ungefährlichen Zustand, gelangt es nach endlich vielen Sprüngen auch in einen rekurrenten Zustand. Deshalb verläßt es Ω mit der Wahrscheinlichkeit $\beta > 0$ nicht nach beliebig vielen Sprüngen. Der Erwartungswert der Zufallsvariable ν, die angibt, wie oft man nach $\mathcal{E}_i$ gelangt, ist gleich $M_i = \sum_{k=0}^{\infty} P\{\nu \geqslant k\} = \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha_i)^k = = \frac{1}{1-\alpha_i} < \infty$. Wir wählen a_i so, daß $\sum_{\mathcal{E}_i \subset \Omega} \frac{M_i}{a_i} < \infty$. Bei einem beliebigen $\mathcal{E}_i \subset \Omega$ ist $M\tau_i^{\Omega}$ finit, da man τ_i^{Ω} als Summe von Komponenten darstellen kann, die geneigt sind, in verschiedenen $\mathcal{E}_i \subset \Omega$ zu verweilen, und der Erwartungswert einer jeder dieser Komponenten ist kleiner M_j/a_j. Nach dem Satz von Feller ist somit der konstruierte Prozeß irregulär.

3. Notwendige und hinreichende Regularitätsbedingungen in einem Einzelfall. Wir ermitteln nun das Regularitätskriterium der Prozesse, die die Bedingung $a_i^j = 0$ bei $j \geqslant i+2$ erfüllen. Einige getrennt notwendige und getrennt hinreichende Regularitätsbedingungen hatte Arley ermittelt /1/. Wir nehmen darüberhinaus an, daß alle $a_i^{i+1} > 0$. Bei einem solchen Prozeß ist die Bedingung $M\tau_1 = \infty$ notwendig und hinreichend für seine Regularität. Tatsächlich folgt seine Notwendigkeit direkt aus dem Satz von Feller. Ist der Prozeß irregulär, dann ist bei einem gewissen $\mathcal{E}_i$ und der Zahl $\tilde{h} < \infty$ die Wahrscheinlichkeit $P\{\tau_i \leqslant \tilde{h}\} \geqslant 0$. Einzige stabile Menge der Zustände, die $\mathcal{E}_1$ einschließen, ist die Menge aller Zustände. Deshalb hatten wir beim Beweis des Satzes von Feller gezeigt, daß die Bedingungen notwendig sind und daß aus der Irregularität des Prozesses hervorgeht, daß $M\tau_1 < \infty$.

War das System anfangs in $\mathcal{E}_1$, dann gelangt es mit der Wahrscheinlichkeit eins nach endlich vielen Sprüngen in einen beliebigen Zustand $\mathcal{E}_i$. Deshalb ist $\tau_1 = \sum_{j=1}^{\infty} \zeta_j$, wobei ζ_j die Zeit bezeichnet, die vergeht, nachdem das System erstmals in dem Zustand $\mathcal{E}_j$ war und bis es zum ersten Mal in den Zustand $\mathcal{E}_{j+1}$ gelangt. Der Kürze wegen schreiben wir $a_i^{i+1} = b_i$, $q_i^k = \frac{1}{b_i} \sum_{j \leqslant k} a_i^j$ und $M\zeta_i = M_i$. Dann ist

$$M_i = \pi_i^{i+1} \frac{1}{a_i} + \sum_{k<i} \pi_i^k \left(\frac{1}{a_i} + M_k + M_{k+1} + \ldots + M_i \right) =$$
$$= \frac{1}{a_i} + \sum_{k<i} \pi_i^k M_k + \frac{1-b_i}{a_i} M_i. \tag{9}$$

Aus dieser Rekursionsgleichung folgt, daß

$$M\tau_1 = \sum_{i=1}^{\infty} M_i = \sum_k \frac{1}{b_k} \left(\sum_{\theta_k} q_{i_1 i_2} q_{i_2 i_3} \ldots q_{i_l k} \right) + \sum_k \frac{1}{b_k} = \infty, \tag{10}$$

wobei über alle möglichen finiten Tupel θ_k der Indizes $i_1 > i_2 > \ldots > i_l > k$ summiert wird. Im Falle eines sogenannten Geburts-Todes-Prozesses, wo nur $a_i^{i+1} = b_i$ und $a_i^{i-1} = c_i$ sich von null unterscheiden, geht die Regularitätsbedingung (10) in die Bedingung

$$\sum_{k<l} \frac{1}{b_k} \left(\frac{c_l}{b_l} \cdot \frac{c_{l-1}}{b_{l-1}} \cdot \ldots \cdot \frac{c_{k+1}}{b_{k+1}} \right) + \sum_k \frac{1}{b_k} = \infty \tag{11}$$

über.

Redaktionseingang
2. Juli 1952

L I T E R A T U R V E R Z E I C H N I S

1. Arley, Niels
On the theory of stochastic processes and their application to the theory of cosmic radiation.
New York: 1948.

2. Doob, J.L.: Topics in the theory of Markoff chains.
In: Transactions of the American Mathematical Society.
Menasha, Wisc., 52 (1942), Nr 1, S. 37 - 64.

3. Doob, J.L.: Markoff chains - denumerable case.
In: Transactions of the American Mathematical Society.
Menasha, Wisc., 59 (1945), Nr 3, S. 455 - 473.

4. Feller, W.: On the integro-differential equations of the purely discontinuous Markoff process.
In: Transactions of the American Mathematical Society. Menasha, Wisc., 48 (1940), Nr 3, S. 488 - 501.

5. Feller, William
An introduction to the probability theory and its applications.
New York: Wiley, 1950.
(Russ. Übers.: Vvedenie v teoriju verojatnostej i ee priloženija. Moskva: Verlag "Inostrannaja literatura", 1952).

[6] А. Н. Колмогоров, Основные понятия теории вероятностей, М.—Л., ОНТИ (1936), 1—80.

Kolmogorov, Andrej Nikolaevič
Osnovnye ponjatija teorii verojatnostej.
Moskva-Leningrad: Ob"edinenie naučno-techničeskich izdatel'stv, 1936.
Deutsche Übers.: Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Berlin: Springer, 1933.

[7] А. Н. Колмогоров, К вопросу о дифференцируемости переходных вероятностей в однородных по времени процессах Маркова со счётным числом состояний Учёные записки МГУ, 4, вып. 148 (1951), 53—59.

Kolmogorov, A.N.: K voprosu o differenciruemosti perechodnych verojatnostej v odnorodnych po vremeni processach Markova so sčetnym čislom sostojanij.
In: Učenye zapiski. Moskovskij gosudarstvennyj universitet. Moskva, 4 (1951), Nr 148, S. 53 - 59.
/Zur Differenzierbarkeit der Übergangswahrscheinlichkeiten in zeitlich homogenen Markoffschen Prozessen mit abzählbarem Zustandsraum; russ./

Stuttgart, den 9. November 1983

übersetzt von

Ottmar Pertschi

(Ottmar Pertschi)
Dipl.-Übersetzer