

Šuchov, Vladimir Grigor'evič

**Der Dachverband.
Ermittlung der rationellen geradlinigen Dachträger-Typen und
Theorie der Bogenbinder**

Deutsche Übersetzung von:

Šuchov, V. G.: Stropila. Izyskanie racional'nych tipov prjamolinejnych stropil'nych ferm i teorija aročnych ferm. Moskva: Politechničeskoe obščestvo, 1897, 120 Seiten

Wiederabdruck in:

Šuchov, V. G.: Izbrannye trudy. Stroitel'naja mehanika. Pod red. A. Ju. Iščinskogo. Moskva: Nauka, 1977, S. 65 – 139.

Russisch: Стропила. Изыскание рациональных типов прямолинейных стропильных ферм и теория арочных ферм.
Stropila. Izyskanie racional'nych tipov prjamolinejnych stropil'nych ferm i teorija aročnych ferm

Vorwort des Verfassers

Beim Entwurf eines Plans für einen Dachverband ist erste und allerwichtigste Frage die nach der Wahl des einen oder anderen Bindersystems, nach der Wahl der Anzahl seiner Verbindungspunkte bzw. Deckfelder und nach der Wahl der Abstände zwischen den Bindern.

Die Verwendung der graphischen Methode erleichtert die Berechnung wesentlich, sie macht den eigentlichen Vorgang der Berechnung der Kräfte in den verschiedenen Binderabschnitten sozusagen beinahe automatisch, aber dabei erhält der die Anlage Berechnende keine Antwort auf die Frage nach der günstigsten Anordnung der Verbindungen der Binder und Dachteile, und dem Planer eröffnet sich nicht die Möglichkeit, die Veränderungen des Gewichts in jedem einzelnen Binderabschnitt je nach System und geometrischer Lage der einzelnen Abschnitte zu verfolgen.

Im Nachfolgenden wird die von mir ausgearbeitete analytische Berechnung der Dachträger vorgestellt. Sie gibt Antwort auf die Fragen nach der Bestimmung der von den verschiedenen Binderabschnitten aufgenommenen Kräfte, nach der Bestimmung des Gewichts dieser Abschnitte und nach der planerischen Festlegung der günstigsten geometrischen Lage aller Binderabschnitte, bei der das Gewicht des für die Binderkonstruktion benutzten Werkstoffs am geringsten ist.

Eine allumfassende Lösung dieser Frage macht große Schwierigkeiten wegen der riesigen Vielfalt an Dachträgern, wobei diese Vielfalt nicht nur durch die architektonischen Bedürfnisse und Konstruktionsbesonderheiten bedingt ist, sondern auch durch die beiläufigen Vorstellungen und Einfälle des Konstrukteurs, der seinen persönlichen künstlerischen Geschmack in die Anordnung der Elemente des von ihm konstruierten Dachverbands einbringt. Deshalb unternehmen wir hier den Versuch, das oben genannte Hauptproblem dadurch zu lösen, indem wir nur die in der Praxis allernotwendigsten Dachträgersysteme heranziehen, nämlich die mit geradlinigem und gekrümmtem äußerem Dachumriß, wobei sich das Dach auf die Wände eines im Grundriß rechteckigen Gebäudes stützt.

Prof. P. K. Chudjakov, Vizepräsident der Polytechnischen Gesellschaft, war so liebenswürdig, sich der Mühe der Herausgabe dieser Arbeit zu unterziehen.

Vi. Šuchov

Form des Dachverbands

Jeder Dachverband kann als einfaches Dreieck angesehen werden, bestehend aus zwei symmetrisch angeordneten schrägen Beinen, die in einer Ebene geradlinig oder gekrümmt sind. Die oberen Enden dieser Beine sind durch Scharniere verbunden und bilden den Dachfirst, die unteren stützen sich auf die Wände und sind miteinander durch einen Zugbalken verbunden, um einen Schub der Wände zu verhindern. Ist der Träger gerade (Abb. 1) oder gekrümmt (Abb. 2), so stellen wir ihn uns als gleichmäßig belastet vor. Die Bezeichnungen bedeuten: q gleichmäßige Last auf den Träger, bezogen auf die laufende Längeneinheit der waagrechten Trägerprojektion; V_1 und V_2 Drücke aus dem Träger auf die Stützen; H Horizontalschubkraft bzw. Spannung des Spannbalkens am Träger; x, y Koordinaten der Variablen des Trägerquerschnitts; M Biegemoment in einem beliebigen Trägerquerschnitt; $2l$ Trägerlänge und f Trägerhöhe oder -hub.

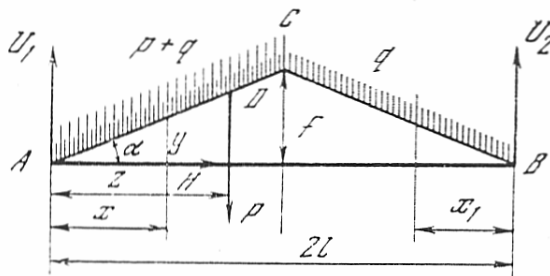


Abb. 1

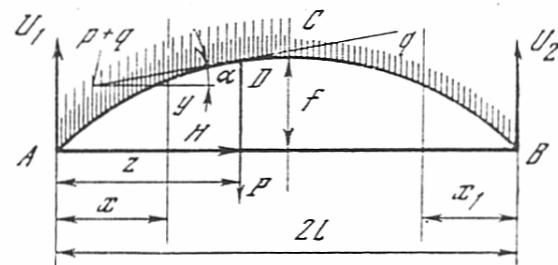


Abb. 2

Bei gleichmäßiger Verteilung der Last ermitteln wir die Drücke auf die Stützen als $V_1 = V_2 = ql$. Die Momente aller Kräfte rechts oder links vom mittleren Trägerquerschnitt ergeben $Hf = ql^2 - ql^2/2$, und hieraus

$$H = ql^2 / 2f. \quad (1)$$

In einem beliebigen Trägerquerschnitt wird das Biegemoment folgendermaßen geschrieben:

$$M = qlx - qx^2 / 2 - Hy. \quad (2)$$

Bei geraden Beinen erhalten wir $y = xf/l$ und daraus

$$M = qx(l - x) / 2, \quad (3)$$

d.h. bei geraden Beinen an einem Dachträger wird das Biegemoment in einem beliebigen Querschnitt ebenso ausgedrückt wie bei einem geraden Balken mit der Länge l . Bei $x = l/2$ erhalten wir den größten Wert des Biegemoments. Er beträgt

$$\max M = ql^2 / 8. \quad (4)$$

Die geringste Werkstoffmenge für die Trägerkonstruktion finden wir dann, wenn $M = 0$ ist. Davon ausgehend erhalten wir aus Gleichung (2)

$$y = f(2lx - x^2) / l^2. \quad (5)$$

Dies ist die Gleichung einer Parabel, deren Spitze im Punkt C liegt (Abb. 2). Hieraus folgt, daß

- 1) ein parabolischer Träger am günstigsten ist bei gleichmäßiger Belastung, und daß
- 2) die Gleichung $M = 0$ bei gleichmäßiger Trägerbelastung nur seine parabolische Form erfüllt.

Bei einseitiger Last, die gleichmäßig von einer Stütze bis zur Spitze verteilt ist, z.B. von A bis C (Abb. 1 und 2), bezeichnen wir mit p die Last auf die laufende Längeneinheit der Horizontalprojektion des Halbträgers. Die Gesamtlast auf den Träger beträgt pl . Die Drücke auf die Stützen sind $V_1 = \frac{3}{4}pl$, $V_2 = \frac{1}{4}pl$. Nimmt man das Moment aller auf den Träger links oder rechts vom Punkt C wirkenden Kräfte, ermitteln wir links $\frac{3}{4}pl - pl/2 = Hf$ und rechts $\frac{1}{4}pl = Hf$. Diese beiden Gleichungen ergeben

$$H = \frac{1}{4}p \frac{l^2}{f}. \quad (6)$$

In einem beliebigen Querschnitt des linken belasteten Trägerabschnitts wird das Biegemoment folgendermaßen geschrieben:

$$M = \frac{3}{4}plx - px^2/2 - \frac{1}{4}pl^2y/f. \quad (7)$$

Bei geraden Beinen erhalten wir $y = xf/l$ und daraus

$$M = px(l-x)/2. \quad (8)$$

Diese Gleichung hat die Gestalt wie (3). Bei $x = l/2$ erhalten wir den größten Wert des Biegemoments. Er beträgt

$$\max M = pl^2/8. \quad (9)$$

Bei einem einseitig belasteten parabolischen Träger, der die Bedingungen von Gleichung (5) erfüllt, bezeichnen wir das Biegemoment mit M_1 . Dann erhalten wir aus den Gleichungen (5) und (7)

$$M_1 = px(l-x)/4. \quad (10)$$

Bei $x = l/2$ erhalten wir den größten Wert dieses Moments

$$\max M = pl^2/16. \quad (11)$$

In einem beliebigen Querschnitt eines unbelasteten Trägerabschnitts, dessen Koordinaten x_1 und y sind, wobei $x_1 = 2l - x$ ist, beträgt das Biegemoment für einen geraden Träger

$$M = V_2r_1 - Hy \quad \text{oder} \quad M = \frac{1}{4}plx_1 - \frac{1}{4}p \frac{l^2}{f} x_1 \frac{f}{l} = 0$$

für alle Punkte von B bis C (siehe Abb. 1). Da ein Dachträger aber abwechselnd sowohl von links als auch von rechts belastet sein kann, müssen seine beiden Hälften auf das Moment berechnet, dessen größter Wert in der Gleichung (9) enthalten ist.

Bei einem parabolischen Träger, der die durch Gleichung (5) ausgedrückte Bedingung erfüllt, beträgt das Biegemoment bei einseitiger Trägerbelastung in einem beliebigen Querschnitt des unbelasteten Trägerabschnitts

$$M_1 = V_2(2l-x) - \frac{1}{4}p \frac{l^2}{f} (2lx - x^2) \frac{f}{l^2}$$

oder

$$M_1 = \frac{1}{4}p(2l-x)(l-x). \quad (12)$$

Den größten Wert dieses Moments erhält man bei $x = \frac{3}{2}l$. Er beträgt

$$\max M_1 = -pl^2/16. \quad (13)$$

Folglich müssen beide Seiten des parabolischen Trägers auf das Biegemoment berechnet werden, dessen größter Wert $pl^2/16$ ist.

Die Betrachtung der Gleichungen (7), (9), (11) und (13) führt uns zu folgenden Schlußfolgerungen:

- 1) der Ausdruck des größten Biegemoments sowohl für den geradlinigen Träger als auch für den parabolischen hängt nicht von der Hubhöhe ab;
- 2) bei einseitiger Last auf den Träger ist das errechnete Biegemoment für den parabolischen Träger doppelt so gering als bei einem geraden Träger.

Bei einseitiger Last auf den Träger gibt es keine derartige Kurvenform, bei der man $M = 0$ vorfände. Lassen wir den allgemeinen Ausdruck des Biegemoments (siehe Gleichung (7)) bei einseitiger Belastung auf Null zugehen, dann erhalten wir in der Tat

$$y = f(3l - 2x)/l^2. \quad (14)$$

Dies ist die Gleichung einer Parabel, deren Spitze jedoch nicht mit der Spitze der durch Gleichung (5) dargestellten Parabel übereinstimmt. Nimmt der Träger die Gestalt einer Parabel an, wie sie Gleichung (14) entspricht, dann sind die Momente für die Punkte der belasteten Seite gleich Null, aber dafür bekommt die unbelastete Seite dieses Trägers negative Momente, deren absoluter Wert größer ist als bei einer Parabel, die nach Gleichung (5) konstruiert ist. Den größten Wert des Biegemoments bei diesem neuen Träger erhält man bei $x_l = l/2$ (zu Beginn der Koordinaten im Punkt B in Abb.2), und er ist doppelt so groß wie bei einer Parabel, dargestellt durch Gleichung (5).

Durch ähnliche Überlegungen und Abwägungen kann man leicht beweisen, daß jegliche Abweichung von der durch Gleichung (5) dargestellten parabolischen Form mit dem Ziel, die Biegemomente der belasteten Seite zu vermindern, unweigerlich zur Folge hat, daß die Biegemomente der unbelasteten Trägerseite zunehmen, und umgekehrt. Folglich ist bei einseitig verteilter Last die parabolische Form des Dachverbands die allergünstigste.

Wir drücken durch S die Druckkraft in einem beliebigen Trägerquerschnitt mit den Koordinaten x und y aus. Bei gleichmäßiger Last q auf die gesamte Länge erhalten wir (siehe Abb. 1)

$$S = H \cos \alpha + (V_1 - qx) \sin \alpha. \quad (15)$$

Bei der Stütze, wo $x = 0$, beträgt die Druckkraft $H \cos \alpha + V_1 \sin \alpha$. In der Balkenspitze, wo $x = l$, beträgt die Druckkraft $H \cos \alpha$. Schließlich beträgt die Druckkraft im Querschnitt des größten Biegemoments, d.h. bei $x = l/2$, $H \cos \alpha + \sin \alpha ql/2$.

Bei allen Punkten eines geraden Trägers haben wir $\operatorname{tg} \alpha = f/l$. Bei der Parabel hingegen, die die Gleichung (5) erfüllt, erhalten wir $\operatorname{tg} \alpha = dy/dx = 2f(l-x)/l^2$ und im Querschnitt des größten Biegemoments, d.h. bei $x = l/2$, erhalten wir in diesem Fall ebenfalls $\operatorname{tg} \alpha = f/l$. Im Querschnitt des größten Biegemoments ist folglich die Druckkraft sowohl im geraden als auch im parabolischen Träger identisch.

Somit zeigt der Vergleich von geradlinigen und gekrümmten Trägern, daß ein Träger, der der geringsten Werkstoffspannung unterworfen ist, bei gleichmäßiger Belastung die Form einer Parabel haben muß. Wenn dem Konstrukteur also überlassen ist, frei die Dachoberfläche zu wählen, dann muß er, um das geringste Gewicht für den Dachverband zu erzielen, bei parabolischen Trägern bleiben, die Suche nach irgendeiner anderen Trägerform geringeren Gewichts ist in diesen Fällen sinnlos.

Die oben erwähnten einfachen Dreiecksträger können entweder aus massiven Balken konstanten oder variablen Querschnitts oder, um das Widerstandsmoment zu steigern, aus Balken mit einem bestimmten Verstrebungssystem gefertigt werden.

Massive Balken können für geringe Spannweiten benutzt werden, die bei einem geraden Balken nicht mehr als 4 – 5 m und bei einem gebogenen Balken nicht mehr als 10 – 12 m betragen dürfen. Bei größeren Spannweiten müssen unbedingt Fachwerkträger verwendet werden. Bei massiven Balken wird nach den ermittelten Rechenwerten für M und S und bei der gewählten zulässigen Werkstoffspannung der Widerstandsmodul bestimmt, nach dem das entsprechende Eisenprofil in den verfügbaren Tabellen ermittelt wird. Das Doppel-T-Profil ist in diesem Fall das allergünstigste. Im Allgemeinen ist ein solcher Querschnitt zu wählen, der beim jeweiligen Modul das geringste Gewicht ergibt. Bei der Druckberechnung muß man wegen der Länge der zusammendrückbaren Abschnitte eine Korrektur einbeziehen.

Bezüglich des zu wählenden Eisens für die druck- und zugabhängigen Stützen sind die von Belejubskij und Boguslavskij veröffentlichten Tabellen die vollständigsten Planungsgrundlagen¹. Wir halten es deshalb für überflüssig, uns hier mit derartigen Berechnungsbeispielen aufzuhalten.

¹ Zu diesen Tabellen konnte lediglich ermittelt werden: Nikolaj Apollonovič Belejubskij (1845 – 1922), russ. Ing., Brückenbauer gab ein Lehrbuch der Baumechanik (Stroitel'naja mehanika) heraus, das 1897 in Sankt-Petersburg in dritter Auflage erschien (Anm.d.Übers.).

Geradlinige Fachwerk-Dachträger

Einteilung der Träger. Die Fachwerk-Dachträger mit geraden Stützen können in 2 Klassen eingeteilt werden.

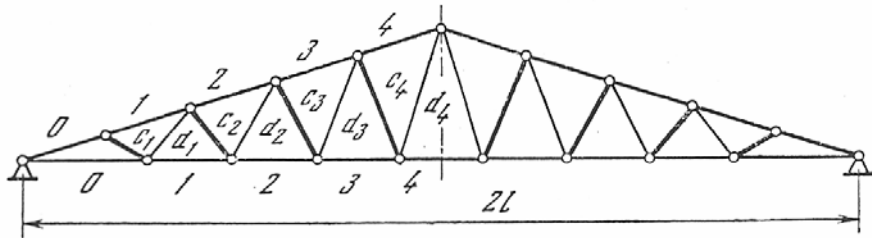


Abb. 3

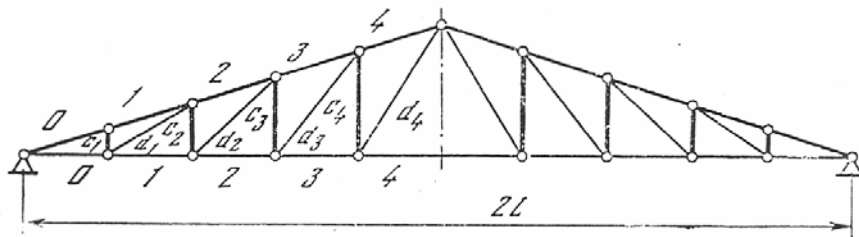


Abb. 4

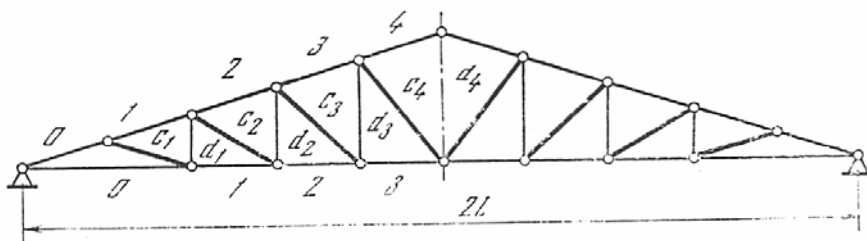


Abb. 5

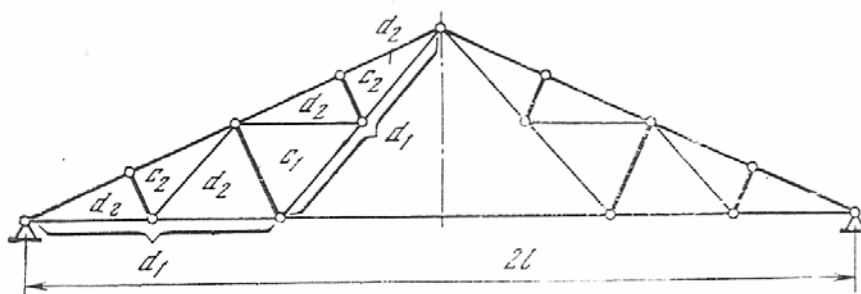


Abb. 6

Die Träger der 1. Klasse haben unter jeder Fußstütze Zugbänder und Streben, deren Länge je nach Entfernung von den Stützen zum Dachfirst zunimmt. Als Beispiele für solche Träger mögen englische und amerikanische Trägerformen dienen, wie in den Abb. 3, 4 und 5 dargestellt.

Die Träger der 2. Klasse haben Zugbänder und Streben, die zur Fußstützenmitte symmetrisch angeordnet sind. Als Beispiel für solche Träger mag der Polonceau-Träger dienen (Abb. 6).

Träger der 1. Klasse

Bestimmung der auf die Streben und Zugbänder im m -ten Feld übertragenen Kräfte. Es gelten folgende Bezeichnungen: $2l$ Spannweite des Fachwerkträgers der 1. Klasse, $2n$ Anzahl seiner Felder, q gleichmäßig verteilte Last, bezogen auf die laufende Längeneinheit in horizontaler Trägerprojektion. Dann wird auf jede obere Trägerverbindung die Last übertragen: $\theta = q/n$.

Die Last kann auf zweierlei Art auf den Träger übertragen werden:

1) die Last kann unmittelbar am oberen Bindergurt anliegen. Dann erfahren die zwischen den Verbindungen liegenden Gurtabschnitte aufgrund der darauf ruhenden Last eine Durchbiegung. In diesem Fall befindet sich die Dachlatte unmittelbar am oberen Bindergurt;

2) die Last wird in den Verbindungsstellen des Trägers durch Pfetten übertragen, auf denen die Dachlatte ruht².

Für die weiteren Schlußfolgerungen nehmen wir die 1. Lastübertragungsart an, d.h. die unmittelbare Verteilung am oberen Bindergurt.

Der Druck auf die Stützen sei $V_1 = V_2 = ql$.

Als Bezeichnungen gelten: $c_1, c_2, c_3, \dots, c_{n-1}$ Länge der Streben; $u_1, u_2, u_3, \dots, u_{n-1}$ Druckkräfte in den Streben; $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}$ Projektionen der Strebenlängen auf die Waagrechte; $h_1, h_2, h_3, \dots, h_{n-1}$ Abstand von den oberen Trägerverbindungen bis zur Zugbalkenachse, wobei $h_n = f$ den Dachhub bezeichnet; $d_1, d_2, d_3, \dots, d_{n-1}$ Länge der Züge; $t_1, t_2, t_3, \dots, t_{n-1}$ Dehnungskräfte in den Zügen; $S_0, S_1, S_2, S_3, \dots, S_{n-1}$ Druckkräfte in den Abschnitten des oberen Gurtes; $T_0, T_1, T_2, T_3, \dots, T_{n-1}$ Zugkräfte in den Abschnitten des unteren Gurtes. Die Druckgurtlänge ist $s = \sqrt{f^2 + l^2}$. Wir führen die Bezeichnungen $s/n = b$ und $l/n = a$ ein. Dann ist $b/a = s/l$.

Aus dem ganzen Träger wählen wir das untere Feld aus (Abb. 7), das begrenzt ist durch den Abschnitt des Druckgurtes mit der Kraft S_m , des Zuggurtes mit der Kraft T_m und durch die Streben c_m und c_{m+1} und den dazugehörenden Zug d_m .

² In diesem Fall nimmt der Träger in den Verbindungspunkten die konzentrierten Lasten auf, die Pfetten erfahren Biegebelastungen.

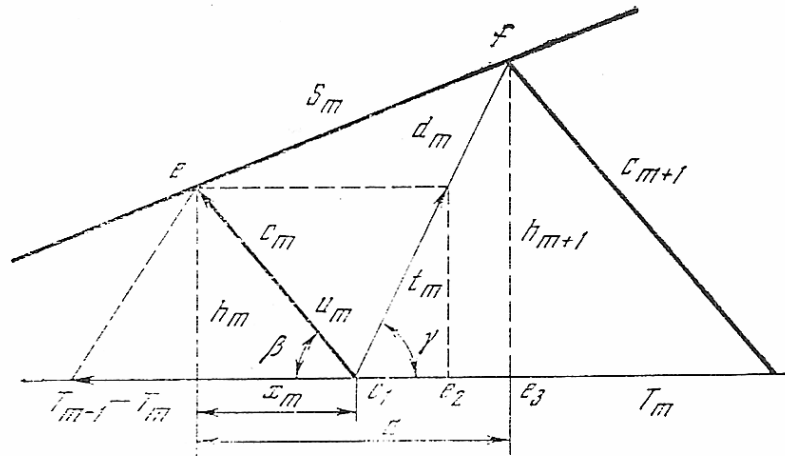


Abb. 7

Befindet sich die m -te Verbindungsstelle, d.h. der Punkt e (Abb. 7), von der Trägerstütze im Abstand g , wobei $g = m/n$, dann wird das Moment der äußeren Kräfte für die Verbindung e folgendermaßen geschrieben:

$$M_m = V_1 g - q \frac{g^2}{2}, \text{ oder } M_m = ql^2 \frac{m}{n} \frac{2n-m}{2n}. \quad (16)$$

Die Spannung des $(m-1)$ -ten Abschnitts des unteren Gurtes wird bestimmt durch die Gleichung $T_{m-1} h_m = M_m$, aber da $h_m = fm/n$, ist folglich

$$T_{m-1} = q \frac{l^2}{f} \frac{2n-m}{2n}. \quad (16.a)$$

Auf dieselbe Weise erhalten wir aus der Gleichung der Außenkraftmomente bezüglich der $(m+1)$ -ten Verbindung, d.h. des Punktes f (Abb. 7)

$$T_m = q \frac{l^2}{f} \frac{2n-m-1}{2n}. \quad (17)$$

Für das Feld 0 (Abb. 3, 4 und 5), bei $m=0$, ist die Kraft im unteren Gurt

$$T_0 = q \frac{l^2}{f} \frac{2n-1}{2n}. \quad (17.a)$$

Für das Gleichgewicht der auf die Verbindung e_1 wirkenden Kräfte ist notwendig, daß die algebraische Summe ihrer Projektionen auf die Waagrechte gleich Null ist. Folglich muß die Differenz der Spannungen $T_{m-1} - T_m = ql^2/2nf$ gleich der Summe der horizontalen Projektionen der Zugkräfte t_m des Zugs d_m und der Druckkräfte u_m der Strebe c_m sein, d.h.

$$t_m \cos \gamma + u_m \cos \beta = ql^2 / 2nf. \quad (18)$$

Aus der Zeichnung (Abb. 7) geht hervor, daß $u_m \cos \beta / t_m \cos \gamma = x_m / e_1 e_2$; $e_1 e_2 / e_1 e_3 = h_m / h_{m+1} = m / (m+1)$; $e_1 / e_3 = a - x_m$. Folglich ist

$$u_m \cos \beta / t_m \cos \gamma = x_m (m+1) / m(a - x_m). \quad (19)$$

Wir lösen die Gleichungen (18) und (19) und erhalten

$$u_m \cos \beta = \frac{ql^2}{2nf} \frac{(m+1)x_m}{ma+x_m},$$

$$t_m \cos \gamma = \frac{ql^2}{2nf} \frac{m(a-x_m)}{ma+x_m}.$$

Aber $\cos \beta = x_m/c_m$, $\cos \gamma = (a-x_m)/d_m$, folglich muß die Druckkraft in einer beliebigen Strebe nach der Gleichung

$$u_m = \frac{ql^2}{2nf} (m+1) \frac{c_m}{ma+x_m} \quad (20)$$

berechnet werden, und zur Bestimmung der Zugkraft in einem beliebigen Zug erhalten wir die Gleichung

$$t_m = \frac{ql^2}{2nf} m \frac{d_m}{ma+x_m}. \quad (21)$$

Wir bestimmen nunmehr die Druckkraft im oberen Zugband. Die Horizontalkomponente der Kraft S_m aus dem Druck des oberen Bandes ist gleich der Kraft des $(m-1)$ -ten Teils des unteren Zugs unter Abzug der Horizontalkomponente der m -ten Strebe³. Die Druckkraft selbst ist gleich ihrer Horizontalkomponente, multipliziert mit s/l , und folglich

$$S_m = \frac{ql^2}{2nf} \left(2n - m - \frac{(m+1)x_m}{ma+x_m} \right). \quad (22)$$

Bemerkt sei, daß beim Feld mit dem Zeichen 0 die Druckkraft nicht von der Lage der Strebe abhängt und nach der Gleichung

$$S_0 = \frac{qls}{f} \frac{2n-1}{2n} \quad (22.a)$$

bestimmt wird.

Bestimmung des Gewichts des m -ten Feldes. Bei Veränderung von x zwischen $x = 0$ bis $x = a$ verändern sich die Kräfte und die Länge der vier untersuchten Feldabschnitte des Trägers, und die Aufgabe der geradlinigen Dachträger reduziert sich im weiteren Verlauf auf die Bestimmung desjenigen Wertes x , bei dem die Summe der Gewichte dieser vier Abschnitte am geringsten ist.

Wir bezeichnen mit k den Koeffizienten des festen Werkstoffwiderstandes des Trägers beim Zug, mit k_1 den dasselbe bei Druck in den Streben und mit k_2 bei Druck in den Zügen.

Ist P die Kraft, die auf einen der Feldabschnitte Druck oder Zug ausübt, dann ist der Allgemeinausdruck für die Querschnittsfläche des gedehnten Teils P/k und beim Druck P/k_1 bzw. P/k_2 .

³ Obwohl geometrisch offensichtlich, kann man sich davon auch leicht durch Untersuchung der Momente der wirksamen Außenkräfte überzeugen.

Ist λ die Länge des untersuchten Abschnitts und γ das Gewicht der Kubikeinheit des Werkstoffs, dann hat das Gewicht des für die Teile des gesamten Trägers aufgewendeten Werkstoffs die Form eines der folgenden Ausdrücke:

$$\frac{P}{k} \lambda \gamma \quad \text{oder} \quad \frac{P}{k_1} \lambda \gamma \quad \text{bzw.} \quad \frac{P}{k_2} \lambda \gamma.$$

Zerlegen wir den Träger in $2n$ gleich lange Abschnitte und bestimmen das Gewicht, das für jenen Abschnitt aufgewandt wird, der zwischen den Loten h_m und h_{m+1} liegt.

Es sei $k/k_1 = \beta$, $k/k_2 = \beta_1$. Das Gewicht der Strebe ist $V_c = u_m c_m \beta \gamma / k$. Da aber $c_m^2 = h_m^2 + x_m^2$ ist, erhalten wir folglich bei Benutzung von Gleichung (20) zur Bestimmung des Gewichts der Strebe

$$V_c = \frac{ql^2}{2nf} (m+1) \frac{h_m^2 + x_m^2}{ma + x_m} \frac{\beta \gamma}{k}.$$

Auf gleiche Weise wird das Gewicht des Zuges d_m mit Hilfe von Gleichung (21) folgendermaßen ausgerechnet:

$$V_t = \frac{ql^2}{2nf} m \frac{h_{m+1}^2 + (a - x_m)^2}{ma + x_m} \frac{\gamma}{k}.$$

Das Gewicht des m -ten Abschnitts der Druckzone ist (siehe Gleichung (22)):

$$V_s = \frac{qls}{2nf} b \left(2n - m - \frac{(m+1)x_m}{ma + x} \right) \frac{\beta_1 \gamma}{k}.$$

Die Zugzone mit der Länge x_m hat das Gewicht (siehe Gleichung (16.a))

$$\frac{ql^2}{2f} \frac{(2n-m)}{2n} x_m \frac{\gamma}{k},$$

und das Gewicht der Zugzone mit der Länge $e_1 e_3$ (Abb. 7) wird mit Hilfe von Gleichung (17) folgendermaßen errechnet:

$$\frac{ql^2}{f} \frac{(2n-m-1)}{2n} \frac{\gamma}{k} (a - x_m).$$

Wir machen aus den beiden letzten Gewichten einen einzigen Ausdruck und erhalten das Gewicht der Zugzone zwischen den Loten h_m und h_{m+1} , d.h. auf der Länge a . Dies ist das Gewicht

$$V_a = \frac{ql^2}{2nf} \left[(2n-m-1) \frac{a}{k} + \frac{x_m}{k} \right] \gamma.$$

Das Gesamtgewicht des m -ten Feldes ohne Berücksichtigung des Gewichts der Befestigungen in den Verbindungspunkten kann nun folgendermaßen geschrieben werden:

$$Z = \frac{ql^2}{2nf} \frac{\gamma}{k} (A + B + C + D), \quad (23)$$

wobei A , B , C und D die Komponenten sind, die beim Bilden ihrer Summe aus den oben genannten vier Abschnitten dazugehören:

$$A = \frac{h_m^2 + x_m^m}{ma + x_m} (m+1)\beta, \quad B = \frac{h_{m+1}^2 + (a - x_m)^m}{ma + x_m} m,$$

$$C = \frac{s}{l} b \beta_1 \left(2n - m - \frac{(m+1)x_m}{ma + x_m} \right), \quad D = (2n - m - 1)a + x_m.$$

Bestimmung der günstigsten Lage der unteren Trägerverbindungen. Bei Veränderung von x von 0 bis a verändert sich auch das Gewicht des Trägerfeldes. Wir ermitteln die Bedingung, die die Lage der unteren Trägerverbindungen bei geringstem Gewicht erfüllen muß. Um diese Bedingung ermitteln zu können, muß man die 1. Ableitung von Z nach x gleich Null setzen. Wir lassen die konstanten Größen weg und können somit die 1. Ableitung aus dem Bruchausdruck nehmen, bei dem der Nenner gleich $ma + x$ ist und der Zähler folgendermaßen geschrieben wird: $[h_{m+1}^2 + (a-x)^2] + \beta(m+1)(h_m^2 + x^m) - (s/l)b\beta_1(m+1)x + x(ma+x)$. Der Ausdruck der 1., auf Null gehenden Ableitung wird nach ersten Transformationen so geschrieben:

$$\frac{x^2}{m^2 a^2} - \frac{2x}{ma} + \frac{1 + \frac{1}{m} + \frac{h_{m+1}^2}{ma^2}}{(m+1)(\beta+1)} - \frac{\frac{\beta h_m^2}{m^2 a^2} + \frac{b\beta_1}{am}}{\beta+1} = 0. \quad (24)$$

Aber $b/a = s/l$, $h_m^2/a^2 = m^2 h^2/l^2$, $\frac{h_{m+1}^2}{a^2} = (m+1)^2 \frac{h^2}{a^2 n^2} = \frac{h^2}{l^2} (m+1)^2$.

Wir setzen den Wert dieser Gleichungen in (24) ein und erhalten:

$$\frac{x^2}{m^2 a^2} - \frac{2x}{ma} - \frac{h^2}{l^2} - \frac{1 + \beta_1}{m(1 + \beta)} \left(\frac{h^2}{l^2} + 1 \right) = 0,$$

und hieraus

$$\frac{x}{ma} = \sqrt{\left(1 + \frac{h^2}{l^2} \right) \left(1 + \frac{1 + \beta_1}{m(1 + \beta)} \right)} - 1,$$

oder schließlich

$$x_m = ma \left[\frac{s}{l} \sqrt{1 + \frac{1 + \beta_1}{m(1 + \beta)}} - 1 \right]. \quad (25)$$

Dies ist auch die gesuchte Bedingung. Da die Bedingung in den Streben mit zunehmender Länge aber größer wird, kann man deshalb zur Vereinfachung der letzten Herleitung annehmen, daß β_1 bei allen Druckstreben konstant und gleich β ist. Unter dieser Annahme erhalten wir

$$x_m = ma \left[\frac{s}{l} \sqrt{\frac{m+1}{m}} - 1 \right]. \quad (26)$$

Einen Träger, der die Bedingung (26) erfüllt, nennen wir „rationellen Träger“. Unter der Bedingung (26) vergleichen wir das Gewicht des rationellen Trägers mit dem Gewicht der anderen, am häufigsten verwendeten Trägertypen, insbesondere mit dem Gewicht der Träger mit Vertikalstützen (Abb. 4), wo $x_m = 0$, mit Vertikalzügen (Abb. 5), wo $x_m = a$, und mit dem Gewicht des Polonceau-Trägers bei einer Anzahl von Feldern in Zweierpotenzen.

Ableitung der Berechnungsangaben

Rationelle Träger. $x = ma \left[\frac{s}{l} \sqrt{\frac{m+1}{m}} - 1 \right]$.

Wir führen die Bezeichnung $ql^2/2nf = E$ ein. Die Herleitung aller Angaben zur Berechnung der Kräfte in diesen Trägern hat folgende Gestalt:

Druck der Streben $u_m = E(m+1) \frac{c_m}{ma + x_m}$;

Spannung der Züge $t_m = Em \frac{d_m}{ma + x_m}$;

Druck des oberen Bindergurtes $S_m = E \frac{s}{l} \left[2n - m - \frac{(m+1)x_m}{ma + x_m} \right]$;

Druck des oberen Bindergurtes des Feldes 0 $S_0 = E \frac{s}{l} (2n - 1)$;

Spannung des unteren Bindergurtes $T_m = E(2n - m - 1)$;

Spannung des unteren Bindergurtes des Feldes 0 $T_0 = E(2n - 1)$.

Wir führen die Bezeichnungen

$$\frac{ql^2}{2nf} \frac{a\gamma}{k} = N, \quad \frac{s}{l} = \frac{b}{a} = r$$

ein. Das Gewicht des m -ten Teils des unteren Bindergurtes ist nach dem Vorhergehenden

$$V_a = N \left(2n - 2m - 1 + mr \sqrt{\frac{m+1}{m}} \right).$$

Das Gewicht des gesamten unteren Bandes erhält man, wenn man die Summe n jener Glieder bildet, in denen m sich von 0 bis $n-1$ verändert. Diese Summe ist

$$Nr \sum_0^{n-1} \sqrt{m(m+1)} + Nn^2. \quad (27)$$

Das Gewicht des m -ten Teils des oberen Bindergurtes ist nach dem Vorhergenannten

$$\begin{aligned} V_s &= Nr^2 \beta \left(2n - m - (m+1) \frac{r \sqrt{m(m+1)} - m}{r \sqrt{m(m+1)}} \right) = \\ &= Nr^2 \beta \left(2n - m - (m+1) \frac{1}{r} \sqrt{m(m+1)} \right). \end{aligned}$$

Das Gewicht des gesamten Druckgurtes erhält man, wenn man die Summe n jener Glieder bildet, in denen m sich von 0 bis $n-1$ verändert. Diese Summe ist

$$Nr\beta \sum_0^{n-1} \sqrt{m(m+1)} + Nr^2 n^2 \beta. \quad (28)$$

Das Gewicht der Strebe erhalten wir nach dem Obengenannten in folgender Gestalt:

$$V_c = N\beta \frac{m+1}{a} \frac{h_m^2 + x_m^2}{ma + x_m} =$$

$$= N\beta \left[r(1+2m)\sqrt{m(m+1)} - 2m(m+1) \right]$$

Das Gewicht aller Streben erhält man, wenn man die Summe $n - 1$ jener Glieder bildet, in denen m sich von 0 bis $n - 1$ verändert. Diese Summe ist

$$Nr\beta \sum_1^{n-1} \left[r(1+2m)\sqrt{m(m+1)} - 2m(m+1) \right] \quad (29)$$

Auf die ganz gleiche Art und Weise erhält man das Gewicht aller $n - 1$ Züge in Gestalt der in Gleichung (29) dargestellten Summe, nur ohne den Koeffizienten β . Diese letzte Summe, hier nicht angeschrieben, sei mit der laufenden Nummer (30) bezeichnet. Ein Teil des Gewichts Nn^2 des Zuggurtes und Nn^2r^2 des Druckgurtes stellen jene Gewichtsgröße dar, die der Träger ohne Streben hätte. Wie wir gesehen haben (siehe Gleichung (1)), ist die Spannung der Züge, die die Sparrenaufgaben des Trägers ohne Streben verbinden, tatsächlich gleich $ql^2/2f$, die Länge der Züge an . Folglich ist das Werkstoffgewicht des Zugbalkens

$$\frac{ql^2}{2f} \frac{na}{k} \gamma = Nn^2.$$

Die Auflagen beim Träger ohne Streben werden nach der Druckkraft $ql^2r/2f$ berechnet, deren Länge ist anr . Folglich ist ihr Gewicht $Nn^2r^2\beta$. Sind beim Träger Streben vorhanden, erhält man in seinen Zuggurten die zusätzlichen Werkstoffgewichte $Nr\beta \sum_1^{n-1} \sqrt{m(m+1)}$ und $Nr\beta \sum_1^{n-1} \sqrt{m(m+1)}$. Diese beiden letztgenannten Größen unterscheiden sich voneinander nur durch den Koeffizienten β , so auch das Gewicht der Streben und der Züge (siehe Gleichungen (29) und (30)). Da β aber das Verhältnis der bekannten Koeffizienten des festen Werkstoffwiderstands ausdrückt, besteht letztlich das Unterscheidungsmerkmal der rationellen Träger darin, daß in ihnen die Summe der Kräfteprodukte auf die Länge der Druckstreben gleich der Summe der Kräfteprodukte auf die Länge der Zuggurte ist. Ein derartiges Verhältnis gilt auch bezüglich der zusätzlichen Gurtkräfte.

Wir addieren die vorhergehenden Ausdrücke für die Gewichte der einzelnen Teile, ohne das Gewicht der Befestigungen in den Verbindungspunkten zu berücksichtigen, und erhalten das Gewicht des Halbträgers in folgender Gestalt:

$$V = 2N(1 + \beta) \left[r \sum_1^{n-1} (m+1)\sqrt{m(m+1)} + \sum_1^{n-1} m(m+1) \right] + Nn^2(1 + r^2\beta). \quad (31)$$

Mit einer für die Praxis ausreichenden Genauigkeit kann man annehmen, daß

$$\sum_1^{n-1} (m+1)\sqrt{m(m+1)} = \sum_1^{n-1} \left(m^2 + \frac{3}{2}m + \frac{1}{3} \right). \text{ Dann ist}$$

$$V = 2N(1 + \beta) \sum_1^{n-1} \left[(r-1)(m+m^2) + r \left(\frac{m}{2} + \frac{1}{3} \right) \right] + Nn^2(1 + r^2\beta). \quad (32)$$

Wir summieren in Gleichung (32) und erhalten anstelle der algebraischen Summe mit ihrem Koeffizienten $2N(1 + \beta)$ folgenden Ausdruck

$$(n-1) \left[\frac{1}{3} + \frac{n}{4} + (r-1)n \left(\frac{2n-1}{6} + \frac{1}{2} \right) \right].$$

Danach ergibt sich

$$V = \frac{ql^2}{2f} \frac{\gamma}{k} \left[1 + r^2 \beta + 2(\beta + 1) \frac{n-1}{n} \left(\frac{r}{4} + \frac{r}{3n} + (r-1) \frac{n+1}{3} \right) \right]. \quad (33)$$

Die günstigste Lage der Streben wurde von uns für den Fall einer gleichmäßigen Last ermittelt, die auf die gesamte Spannweite des Trägers wirkt, während der Dachverband außer dieser Last (nur noch) einer einseitigen Windbelastung ausgesetzt ist. Wie nach der vorhergehenden Ableitung zu verfolgen war, hängen die Kräfte in den Streben nicht davon ab, ob eine Last von einer Seite einwirkt oder ob sie über den gesamten Träger verteilt ist, weil die Differenz der Spannungen des unteren Gurtbandes, nach der die Kräfte in den Streben bestimmt werden, in beiden Fällen eine konstante Größe bleibt. Die zusätzliche Spannung in den Trägergurten wird dabei um eine gewisse konstante Größe vermindert, die in der Ableitung beim Bestimmen des Gewichtes \min nicht zum Ausdruck kommt. Die Windbelastung stellt einen relativ geringen Teil der Gesamtlast dar, auf die ein Dachverband berechnet wird, weshalb man ohne besondere Fehlergröße zur Berechnung der Bindergurte die Belastung aufgrund von Windeinwirkungen auch für die andere Seite als andauernd annehmen darf. Bei Dachverbänden mit großem Hub muß man die Windbelastung als einseitige Last ansetzen, sonst fallen die Querschnittsmaße der Dachverbands-teile allzu groß aus.

Englische Träger mit vertikalen Streben (Abb. 4). Die Herleitung aller Angaben zur Berechnung der Kräfte in diesen Trägern erhalten wir aus den vorhergehenden allgemeinen Gleichungen, indem wir in ihnen $x = 0$ annehmen. $U_m = \frac{ql}{2n}(m+1)$, da bei $x_m = 0$, $c_m = h_m = fm/n$ und $a = l/n$.

Die Spannung der Züge ist $t_m = \frac{ql}{2f} \sqrt{a^2 + h_{m+1}^2}$;

der Druck des oberen Bindergurtes ist $S_m = \frac{ql^2}{2} r(2n - m)$;

der Druck des oberen Bindergurtes des Feldes 0 ist $S_0 = S_1 = \frac{ql^2}{2nf} r(2n - 1)$;

die Spannung des unteren Bindergurtes ist $T_m = \frac{ql^2}{2nf} (2n - m - 1)$;

die Spannung des unteren Bindergurtes des Feldes 0 ist $T_0 = \frac{ql^2}{2nf} (2n - 1)$.

Wie vorhergehend ermitteln wir nun das Gewicht aller Teile.

Das Gewicht des unteren Gurtes ist

$$N \sum_0^{n-1} (2n - m - 1) - N \left(\frac{3}{2} n^2 - \frac{n}{2} \right) = \frac{ql^3}{2f} \frac{\gamma}{k} \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2n} \right). \quad (35)$$

Das Gewicht des oberen Gurtes ist

$$Nr^2 \beta \sum_0^{n-1} (2n - m - 1) + Nr^2 \beta (2n - 1) = Nr^2 \beta \left(\frac{3}{2} n^2 + \frac{n}{2} - 1 \right) =$$

$$= \frac{ql^3}{2f} \frac{\gamma}{k} r^2 \beta \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{n^2} \right). \quad (36)$$

Das Gewicht der Stützen ist

$$\frac{ql}{2n} \frac{\beta\gamma}{k} \frac{f}{n} \sum_1^{n-1} m(m+1) = \frac{qlf}{6} \frac{\beta\gamma}{k} \left(n - \frac{1}{n} \right). \quad (37)$$

Das Gewicht der Züge ist

$$\frac{ql}{2f} \frac{\gamma}{k} \sum_1^{n-1} \left(\frac{l^2}{n^2} + \frac{(m+1)^2 f^2}{n^2} \right) = \frac{ql}{2f} \frac{\gamma}{k} \frac{n-1}{n^2} \left(s^2 + f^2 n \frac{2n+5}{6} \right). \quad (38)$$

Das Gesamtgewicht des Halbträgers ist

$$V = \frac{ql^2}{2f} \frac{\gamma}{k} \left[\frac{3}{2} (1 + r^2 \beta) + \frac{r^2 \beta - 1}{2n} - \frac{r^2 \beta}{n^2} + \frac{n-1}{n^2} r^2 + \frac{f^2}{l^2} \left(\frac{1}{3n} + \frac{1}{2} - \frac{5}{6n} + \frac{\beta}{3} \frac{n^2 - 1}{n} \right) \right]. \quad (39)$$

Und schließlich ist

$$V = \frac{ql^2}{2f} \frac{\gamma}{k} \left[1 + r^2 \beta \right] + \frac{\beta + 1}{3} \left\{ 1,5r^2 + \frac{1 + 0,5r^2}{n} + n(r^2 - 1) - \frac{3r^2}{n^2} \right\}. \quad (40)$$

Träger mit vertikalen Zügen (Abb. 5). Die Ableitung aller Angaben zur Berechnung der Kräfte in diesen Trägern erhalten wir aus den vorhergehenden allgemeinen Gleichungen unter der Annahme von $x = a$. Danach ist $c_m^2 = h_m^2 + a^2$, $d_m = h_{m+1}$.

Der Druck der schrägen Stützen ist $U_m = \frac{ql}{2nf} \sqrt{l^2 + f^2 m^2}$.

Die Spannung der vertikalen Züge ist $f_m = \frac{ql}{2n} m$.

Der mittlere Zug hat eine doppelt so große Spannung auszuhalten, als diese letzte Gleichung hergibt, da dieser Zug (d_1 in Abb. 5) zwei Züge der beiden Halbträger in sich vereinigt.

Der Druck des oberen Bindergurtes ist $S_m = \frac{ql^2}{2nf} (2n - m - 1)$.

Der Druck des oberen Bindergurtes des Feldes 0 ist $S_0 = \frac{ql^2}{2nf} (2n - 1)$.

Die Spannung des unteren Bindergurtes ist $T_m = \frac{ql^2}{2nf} (2n - m - 1)$.

Spannung des unteren Bindergurtes des Feldes 0 ist $T_0 = \frac{ql^2}{2nf} (2n - 1)$.

Die Länge des unteren Gurtes des Feldes 0 ist gleich $2a$. Das Gewicht des unteren Bindergurtes drückt sich folgendermaßen aus:

$$N(2n - 1) + N \sum_1^{n-1} (2n - m - 1) = \frac{ql^3}{2f} \frac{\gamma}{k} \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{n^2} \right). \quad (41)$$

Das Gewicht des oberen Bindergurtes ist

$$Nr^2 \beta \sum_0^{n-1} (2n - m - 1) = \frac{ql^3}{2f} \frac{\gamma}{k} r^2 \beta \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2n} \right). \quad (42)$$

Das Gewicht der Stützen ist

$$\frac{ql^2}{2f} \frac{\beta \gamma}{k} \frac{n-1}{n^2} \left(1 + \frac{f^2}{l^2} \frac{n(2n-1)}{6} \right). \quad (43)$$

Das Gewicht der Züge ist

$$\frac{ql}{2n} \frac{\beta \gamma}{k} \frac{l}{n} \sum_1^{n-1} m(m+1) = \frac{ql}{2n^2} \frac{\beta \gamma}{k} f \frac{n(n^2-1)}{3}. \quad (44)$$

Das Gewicht des Halbträgers bei $x = a$ ist

$$V = \frac{ql^2}{2f} \frac{\gamma}{k} \left[\frac{3}{2} (1 + r^2 \beta) - \frac{r^2 (\beta - 1)}{2n} - \frac{1}{n^2} + K \right],$$

wobei

$$K = \frac{f^2}{3l^2} \left(n - \frac{1}{n} \right) + \frac{n-1}{n^2} \left(\beta \frac{f^2}{6l^2} n(n-1)(2n-1) + 1 \right) = \beta \frac{n-1}{n^2} + \frac{f^2}{l^2} \left(\frac{\beta n}{3} - \frac{\beta}{2} + \frac{n^2-1}{3n} \right).$$

Und schließlich ist

$$V = \frac{ql^2}{2f} \frac{\gamma}{k} \left[1 + r^2 \beta + \frac{\beta+1}{3} \left\{ 1,5 + n(r^2-1) + \frac{1}{n} (2,5 - r^2) - \frac{3}{n^2} \right\} \right]. \quad (45)$$

Träger der 2. Klasse

Bei den oben untersuchten Trägern nehmen die Stützen und Züge eines jeden folgenden Feldes die Lasteinwirkungen aller vorhergehenden Felder auf. Bei den Trägern der 2. Klasse (Polonceau-System, Abb. 6) ist dies nicht der Fall, weil sie aus mehreren symmetrischen und ähnlichen Dreiecksträgern bestehen, die sich in halb so großer Anzahl auf die Verbindungspunkte der darauffolgenden Träger stützen, und diese letzteren wiederum stützen sich ebenfalls in halb so großer Anzahl auf die nächstfolgende Trägerreihe u.s.w. Beim Bau derartiger Träger werden die richtungsmäßig übereinstimmenden Züge und Binder von zwei aufeinanderfolgenden Trägerreihen zu einem Ganzen.

Die Untersuchung der Kräfte und des Gewichts bei Polonceau-Trägern kann auf die oben aufgezeigte allgemeine Weise erfolgen, unter Heranziehung ihrer herausragenden geometrischen Eigenschaft zur Ermittlung der gesuchten Ergebnisse.

Rationelle Träger der 2. Klasse. Ein jeder elementarer Träger (Abb. 8), ähnlich dem Polonceau-Träger, besteht aus zwei Feldern. Zur Ermittlung der günstigsten Lage der Stützen muß man in diesem Fall in den Ausdruck x , der das Gewicht \min liefert und durch Gleichung (26) wiedergegeben wird, $m = 1$ einsetzen. Dann erhalten wir

$$x = ar\sqrt{2} - a. \quad (46)$$

Danach erhalten wir

$$c_m = \sqrt{h_m^2 + a_m^2 (r\sqrt{2} - 1)^2} = a_m \sqrt{3r^2 - 2\sqrt{2}r},$$

$$d_m = \sqrt{4h_m^2 + a_m^2(2 - r\sqrt{2})^2} = a_m \sqrt{6r^2 - 4^2 \sqrt{2}r}.$$

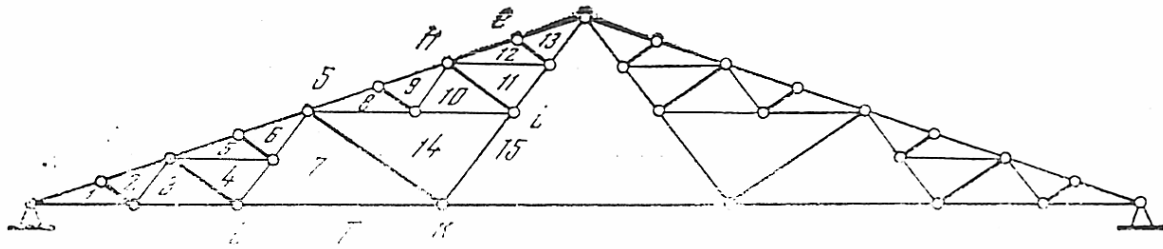


Abb. 8

Die Kraft einer Strebe ist nach Gleichung (20)

$$U_m = qa_m \frac{l}{f} \frac{c_m}{a_m r \sqrt{2}} = qa_m \frac{l}{f} \sqrt{\frac{3}{2} - \frac{1}{r}} \sqrt{2}.$$

Die Kraft eines Schrägzuges ist nach Gleichung (21)

$$t_m = qa_m \frac{l}{2f} \frac{d_m}{a_m r \sqrt{2}} = qa_m \frac{l}{2f} \sqrt{3 - \frac{2}{r}} \sqrt{2}.$$

Das Gewicht der Strebe ist $V_c = \frac{\gamma}{k} \beta qa_m^2 \frac{l}{f} \left(\frac{3r}{\sqrt{2}} - 2 \right)$.

Das Gewicht des Schrägzuges ist $V_t = \frac{\gamma}{k} qa_m^2 \frac{l}{f} \left(\frac{3r}{\sqrt{2}} - 2 \right)$.

Bei mittlerer Strebe und Zug ist $a_m = l/2$. Derartige Streben und Schrägzüge werden einmal eingesetzt. Bei zwei Streben und zwei Zügen zweiter Ordnung erhalten wir $a_m = l/4$. Bei vier Streben und vier Zügen dritter Ordnung erhalten wir $a_m = l/8$ u.s.w.

Das Gesamtgewicht der Streben beträgt

$$\frac{\gamma}{k} \beta \frac{ql^3}{4f} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots \right) \left(\frac{3r}{\sqrt{2}} - 2 \right).$$

Das Gesamtgewicht der Schrägzüge wird folgendermaßen ausgedrückt:

$$\frac{\gamma}{k} \frac{ql^3}{4f} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots \right) \left(\frac{3r}{\sqrt{2}} - 2 \right).$$

Die Spannung der Horizontalzüge, die den unteren Gurt bilden, ist gleich $\frac{1}{2} qa_m l / f$.

Die Länge der Horizontalzüge beträgt $a_m + x = a_m r \sqrt{2}$, mit Ausnahme des Zuges 0, bei dem $x = 0$ und dessen Länge gleich l ist. Der Allgemeinausdruck des Horizontalzuggewichts ist $V_a = \frac{\gamma}{k} \frac{ql}{f} \frac{r}{\sqrt{2}} a_m^2$. Beim ersten Zug muß man in diese Gleichung $a_m = l/2$ einsetzen, beim zweiten $a_m = l/4$, beim dritten $a_m = l/8$ u.s.w.

Für den Horizontalzug 0 beträgt das Gewicht $\frac{\gamma ql^2}{k 2f}$. Das Gesamtgewicht der Horizontalzüge ist

$$\frac{\gamma ql^3}{k 4f} \left[2 + \frac{r}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots \right) \right].$$

Die Kraft der linken Druckgurthälfte eines jeden elementaren Trägers ist nach Gleichung (22a)

$$\frac{1}{2} qa_m \frac{s}{f} = \frac{1}{2} q \frac{l}{f} ra_m,$$

ihre Länge $S_m = ra_m$.

Die Kraft der rechten Druckgurthälfte ist nach der allgemeinen Gleichung (22) gleich

$q \frac{l}{f} ra_m \left(\frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{r\sqrt{2}} \right)$. Die Summe dieser Kräfte beider Hälften des oberen Gurtes ist

$q \frac{l}{f} a_m \frac{1}{\sqrt{2}}$ und ihr Gewicht $q \frac{l}{f} \frac{\gamma \beta r}{k \sqrt{2}} a_m^2$.

Beim 1. Träger muß man in diesen Gleichungen $a_m = 1/2$ einsetzen, beim zweiten $1/4$, beim dritten $1/8$ u.s.w.

Der Druckgurt von Träger 0 macht eine Ausnahme. Seine Länge ist gleich lr , seine Kraft $\frac{1}{2} q \frac{l^2}{f} r$, und das Gewicht von Gurt 0 ist gleich $\frac{1}{2} \frac{ql^2}{f} r^2$.

Das Gesamtgewicht des Druckgurtes aller elementaren Träger ist somit

$$\frac{ql^3}{4f} \frac{\beta \gamma}{k} \left[2r^2 + \frac{r}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots \right) \right].$$

Die Summe ist $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 2(1 - 1/n)$, mit n für die Anzahl der Felder, einem Vielfachen von 2, d.h. 2, 4, 8, 16, ... u.s.w.

Das Gesamtgewicht aller Teile der Hälfte eines rationellen Trägers der 2. Klasse ist somit

$$\frac{ql^3}{2f} \frac{\gamma}{k} \left[1 + \beta r^2 + 2(\beta + 1)(r\sqrt{2} - 1) \left(1 - \frac{1}{n} \right) \right]. \quad (47)$$

In Abb. 8 ist der rationelle symmetrische Träger mit der Felderzahl $2n = 16$ dargestellt.

Gewöhnliche Polonceau-Träger. Bei den üblicherweise gebauten Polonceau-Trägern sind die Stützen zum Druckgurt senkrecht ausgerichtet (Abb. 6.).

In diesem Fall ist $x = h_m f / l = a_m f^2 / l^2$, $c_m = r a_m f / l$, $d_m = a_m + x = r^2 a_m$. Die Kraft der Stütze ist $u_m = q a_m / r$. Die Kraft der Schrägzüge ist $t_m = q l a_m / 2 f$. Die Kräfte und Längen des unteren Gurtes sind gleich den Kräften und Längen der Schrägzüge. Der Gurt 0 besitzt dieselbe Kraft wie im vorhergehenden Fall. Die Kraft der 1. linken Druckgurthälfte ist gleich $\frac{1}{2} q s a_m / f$. Die Kraft der 2. rechten Druckgurthälfte ist $\frac{1}{2} q s a_m - q f a_m / s$. Die Summe beider Druckgurtkräfte ergibt $q(s/f - f/s) a_m$. Der Trägergurt 0 besitzt wie im vorhergehenden Fall eine Druckkraft von $\frac{1}{2} q r l^2 / f$.

Entsprechend dem Vorhergehenden erhält man das Gewicht aller Teile in folgender Form.

Das Gewicht der Stützen oder Streben ist

$$V_c = \frac{q l}{4} \frac{\beta \gamma}{k} f \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots \right) = \frac{q l f}{2} \frac{\beta \gamma}{k} \left(1 - \frac{1}{n} \right).$$

Die Summe des Gewichts der Züge und des Zuggurtes, mit Ausnahme von Feld 0, erhält man folgendermaßen:

$$V_t + V_a = \frac{q l}{2 f} s^2 \frac{\gamma}{k} \left(1 - \frac{1}{n} \right).$$

Das Gewicht des Druckgurtes ohne das Feld 0 ist $V_c = \frac{q l}{2} \frac{\beta \gamma}{k} s \left(\frac{s}{f} - \frac{f}{s} \right) \left(1 - \frac{1}{n} \right)$.

Das Gewicht des Druckgurtes des Feldes 0 ist $\frac{q l^3}{2 f} \frac{\beta \gamma}{k} r^2$.

Das Gewicht des Zuggurtes des Feldes 0 ist $\frac{q l^3}{2 f} \frac{\gamma}{k}$.

Die Summe der Gewichte des Druckgurtes und der Stützen ist $\frac{q l^3}{2 f} \frac{\beta \gamma}{k} s^2 \left(1 - \frac{1}{n} \right)$.

Wir setzen $s^2 = r^2 l^2$ ein und erhalten das Gesamtgewicht des gewöhnlichen Polonceau-Halbträgers (Abb. 6), bei dem die Stützen senkrecht zum Fuß stehen, durch

$$V = \frac{q l^3}{2 f} \frac{\gamma}{k} \left[r^2 \beta + r^2 (1 + \beta) \left(1 - \frac{1}{n} \right) + 1 \right]. \quad (48)$$

Es ist unschwer zu erkennen, daß das Gewicht der beiden Polonceau-Trägerformen, d.h. des rationellen und des gewöhnlichen, nach den Gleichungen (47) und (48) gleichermaßen ermittelt wird unter der Bedingung, daß $r^2 / 2 = r \sqrt{2} - 1$, d.h. der gewöhnliche Polonceau-Träger erfüllt die Bedingungen von min Gewicht nur dann, wenn die Dachsparren einen Horizontalwinkel von 45° bilden.

Herleitung der Angaben zur Bestimmung der Kräfte in den Teilen des rationalen und des gewöhnlichen Polonceau-Trägers

Diese Herleitung der Angaben erfolgt hier bei beiden Trägern mit der Felderzahl 16, d.h. bei $n = 8$. Polonceau-Träger mit einer Felderzahl über 16 sollten nicht gebaut werden, da sie unvorteilhaft sind.

In Abb. 8 ist der rationale Träger dargestellt, in Abb. 9 der gewöhnliche, bei dem die Stützen senkrecht zum Träger stehen. In den Dreiecken zwischen den einzelnen Trägerteilen sind die Zahlen 1, 2, ..., 14, 15. eingesetzt, mit denen man ganz gut die verschiedenen Abschnitte des Trägers bezeichnen kann. Z.B. besitzt die Stütze hi in Abb. 8 die Stützenbezeichnung 10-11, der Zug ik (Abb. 8) die Zugbezeichnung 14-15, der Druckgurt he (Abb. 8) wird zu 12 und der Zuggurt kl (Abb. 8) zu 7 u.s.w.

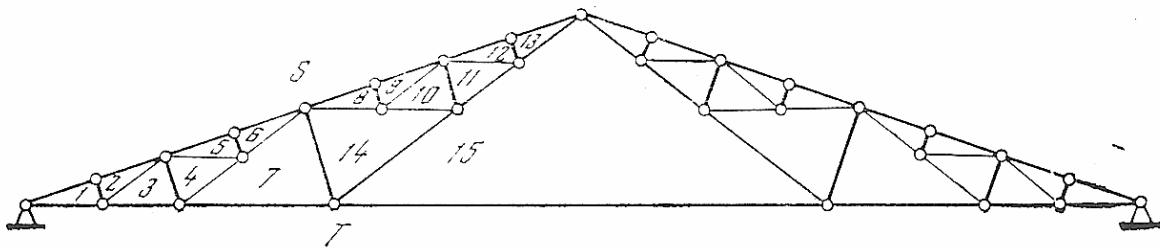


Abb. 9

Der rationale Träger in Abb. 8 hat die Felderzahl $2n = 16$.

Die Kräfte im Druckgurt werden nach der allgemeinen Formel in der Gestalt $\frac{1}{16}ql^2 \frac{r}{l} \left(A + \frac{B}{r\sqrt{2}} \right)$ errechnet, wobei A und B die Größen bezeichnen, die für die verschiedenen Felder variabel sind und nach der folgenden Tabelle gewählt werden:

Feld	1	2	5	6	8	9	12	13
Größe A	15	13	11	9	7	5	3	1
Größe B	0	2	4	6	8	10	12	14

Die Kräfte im Zuggurt werden nach der allgemeinen Formel in der Gestalt Cql^2/f berechnet.

Feld	1	3	7	15
Größe C	$\frac{15}{16}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$

Die Spannung in den Zügen wird nach der allgemeinen Formel in der Gestalt $D \frac{ql^2}{f} \sqrt{3 - \frac{2\sqrt{2}}{r}}$ berechnet.

Zug	2-3; 9-10; 4-5; 11-12	4-7; 10-14	6-7; 8-14	14-15	11-15	13-15
-----	--------------------------	------------	-----------	-------	-------	-------

Größe D	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{7}{16}$
-----------	----------------	---------------	----------------	---------------	---------------	----------------

Die Druckkräfte der Stützen werden nach der Formel $E \frac{ql^2}{f} \sqrt{\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{2}}{r}}$ berechnet.

Stütze	7-14	3-4; 10-11	1-2; 5-6; 8-9; 12-13
Größe E	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

Der gewöhnliche Träger nach Abb. 9 besitzt die Felderzahl $2n = 16$. Die Kräfte im Druckgurt werden berechnet nach der Formel $\frac{15}{16} \frac{ql^2}{f} r - F \frac{ql}{r}$.

Feld	1	2	5	6	8	9	12	13
Größe F	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{8}$

Die Kräfte im Zuggurt werden folgendermaßen berechnet: Hql^2/f .

Feld	1	3	7	15
Größe H	$\frac{15}{16}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$

Die Spannung in den Zügen wird nach der Formel Kql^2/f berechnet.

Zug	2-3; 9-10; 4-5; 11-12	4-7; 10-14	6-7; 8-14	14-15	11-15	13-15
Größe K	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{7}{16}$

Die Druckkräfte der Stützen werden nach der Formel Nql/r berechnet.

Stütze	7-14	3-4; 10-11	1-2; 5-6; 8-9; 12-13
Größe N	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

Angaben zum Vergleich des Gewichts der Träger 1. und 2. Klasse

In den Ausdrücken für das Gewicht der fünf von uns untersuchten Träger 1. und 2. Klasse, d.h. in den Gleichungen (33), (40), (45), (47) und (48), kommt das eine gemeinsame Glied $\frac{ql^3}{2f k} \gamma (1+r^2\beta)$ vor, d.h. das Gewicht eines Dreiecksbinders ohne Streben und Züge. Wir berechnen diese konstante Größe aus den Gewichts-

gleichungen und erhalten Vergleichsausdrücke jener Gewichtsabschnitte der verschiedenen Halbträger, die von der Position ihrer Streben abhängen, oder eine zusätzliche Größe zum Gewicht des Dreiecksbinders ohne Streben und Züge. Der Kürze wegen nennen wir diese Größe einfach Zusatzgewicht aus Streben und Zügen.

Wir führen die Bezeichnung

$$\Phi = \frac{ql^3 \gamma}{2f k} \quad (49)$$

ein.

Die Größen des Zusatzgewichts sind dann:

Im rationalen Träger 1. Klasse (siehe Gleichungen (33) und (34)), wo x nach Gleichung (26) bestimmt wird:

$$\Phi \frac{\beta+1}{3} \left(1.5r + 2n(r-1) + \frac{2}{n} \left(1 - \frac{3r}{4} \right) - \frac{2r}{n^2} \right). \quad (50)$$

Im Träger $x = 0$ (siehe Gleichung (40)):

$$\Phi \frac{\beta+1}{3} \left(1.5r^2 + \frac{1+0,5r^2}{n} + n(r^2-1) - \frac{3r^2}{n^2} \right). \quad (51)$$

Im Träger $x = a$ (siehe Gleichung (45)):

$$\Phi \frac{\beta+1}{3} \left(1.5 + n(r^2-1) + \frac{2,5-r^2}{n} - \frac{3}{n^2} \right). \quad (52)$$

Im rationalen Polonceau-Träger (siehe Gleichung (47)):

$$\Phi 2(\beta+1) \left(r\sqrt{2} - 1 \right) \left(1 - \frac{1}{n} \right). \quad (53)$$

Im gewöhnlichen Polonceau-Träger (siehe Gleichung (48)):

$$\Phi(\beta+1) \left(1 - \frac{1}{n} \right) r^2. \quad (53)$$

Betrachtet man all diese Formeln, sieht man, daß die Werte des Zusatzgewichts in allen Trägern proportional zu $(\beta + 1)$ sind.

Zum anschaulichen Vergleich der Formeln (50), (51), (52), (53) und (54) wurde im weiteren Verlauf die Größe des Faktors berechnet, der auf Φ in jeder Formel folgt. Dieser Faktor wurde mit A bezeichnet. Bei der Berechnung von A wurde angenommen,

- 1) die Dachhöhe f betrage $1/5$ ihrer Spannweite $2l$, d.h. $f/l = 1/2,5 = 0,4$;
- 2) der numerische Wert $r = b/a = s/l = \sqrt{((l^2 + f^2)/l^2)} = 1,077$, $r^2 = 1,16$;

3) das Verhältnis von einfachem Bruchwiderstand und Zug sei gleich 1,5. Bei der praktischen Berechnung von Dachverbänden, wo man den Druckkoeffizienten nach der Schwarz-Rankin-Formel korrigierend berücksichtigt, schwankt der Wert β zwischen 1,25 und 1,65. Wie bereits früher bemerkt, wirkt sich eine Veränderung von β gleichartig aus auf die Veränderung des Zusatzgewichts aller untersuchten Träger.

Wir legen der Berechnung zum Vergleich der Träger miteinander die oben genannten numerischen Werte zugrunde und berechnen den numerischen Wert des Koeffizienten A nach den Formeln:

$$\text{Träger } x = 0: A = \frac{1}{3} (4,35 + 0,4n + 3,95/n - 8,7/n^2);$$

$$\text{Träger } x = a: A = \frac{1}{3} (3,75 + 0,4n + 3,35/n - 7,5/n^2);$$

$$\text{rationeller Polonceau-Träger: } A = 2,6144 (1 - 1/n);$$

$$\text{gewöhnlicher Polonceau-Träger: } A = 2,9 (1 - 1/n).$$

Das Zusatzgewicht des Trägers ist

$$A\Phi = A \frac{ql^3 \gamma}{2f k}.$$

Tabelle der Größen A zum Vergleich des Zusatzgewichts der Träger untereinander

n	Träger der 1. Klasse			Polonceau-Träger	
	rationeller	$x = 0$	$x = a$	rationeller	gewöhnlicher
2	1,3077	1,65	1,45	1,307	1,45
4	1,8387	2,1313	1,9063	1,9607	2,175
8	2,3979	2,6359	2,4172	2,3875	2,5375
16	3.4209	3,6543	3,4434	2,4509	2,7187

Anmerkung zur Tabelle der Größen A . Die Gewichtsformeln aller von uns untersuchten Halbträger stellen exakte Ausdrücke dar mit Ausnahme der Gewichtsformel für den rationellen Träger 1. Klasse, bei deren Aufstellung die genaue Summierung ersetzt wird durch eine näherungsweise, einfachere, die ein Ergebnis liefert, das für die praktischen Zwecke ausreichend genau ist. Zum Zwecke des Vergleichs der Gewichte der verschiedenen Träger untereinander und mit dem rationellen Träger wurden die Werte von A in der Tabelle genau ausgerechnet, und die näherungsweise Formel wurde nicht benutzt.

Aus der Tabelle der Werte von A geht hervor, daß bei zunehmender Felderzahl von 2 auf 8 das Gewicht der zusätzlichen Trägerabschnitte (Streben und Züge) um beinahe 1,8 mal zunimmt.

Das Gewicht des Halbträgers ohne Streben ist bei den von uns gewählten Größen von β und r $\Phi(1 + r^2\beta) = 2,74\Phi$. Das Gewicht des rationellen Trägers 1. Klasse mit zwei Feldern ist $\Phi(2,74 + 1,31) = 4,05\Phi$, und mit acht Feldern $\Phi(2,74 + 2,40) = 5,14\Phi$.

Hieraus wird deutlich, wie wichtig die Frage ist, wieviele Felder bei jeweiliger Spannweite gewählt werden. Ein Vergleich der Zusatzgewichte der Halbträger der in der Tabelle angegebenen Größen A zeigt, daß

- 1) das Gewicht der rationellen Träger der 1. und 2. Klasse fast gleich bleibt bei einer Felderzahl bis acht (d.h. bis $n = 4$);
- 2) bei einer Felderzahl über acht die rationellen Träger der 2. Klasse leichter sind als die rationellen Träger der 1. Klasse;
- 3) von den übrigen, in der Praxis eingesetzten Trägern die Träger mit Vertikalzügen ($x = a$) ihrem Gewicht nach den rationellen am nächsten kommen und zwar deshalb, weil der numerische Wert von x bei den von uns gewählten Größen von β und r dem Wert a nahekommt.

Da es hinsichtlich Montage und Aufbau der von uns untersuchten Träger keinen Unterschied gibt, so können die Trägerkosten in praktischer Hinsicht annähernd proportional zum verwendeten Werkstoffgewicht gesetzt werden. Folglich sind, ganz allgemein gesehen, die rationellen Dachträger billiger als Träger, die gewöhnlich in der Praxis eingesetzt werden.

Aus eben dieser Tabelle geht hervor, daß bei richtig berechneten Trägern kein so krasser Unterschied vorkommt, da aufgrund praktischer Überlegungen (Aufhängung der Deckenbalken, Übertragung der Einzellasten und dgl.) der Einsatz eines jeden Trägers gerechtfertigt sein kann, auch wenn dadurch sein Gewicht etwas höher ausfällt.

Korrekturen für die theoretische Formel des Trägergewichts

Wollen wir die oben genannten Formeln für praktische Berechnungen verwenden, müssen wir unbedingt die Werte der Koeffizienten β und β_1 berücksichtigen, die zur Vereinfachung unserer Herleitungen als gleich angesetzt wurden. Benutzt man zur Berechnung der Druckabschnitte des Trägers die Schwarz-Rankin-Formel, so ist der Koeffizient β bei Trägern der 2. Klasse, bei denen die Druckstreben kürzer sind, tatsächlich kleiner als bei den Trägern der 1. Klasse, und folglich fällt das Gewicht der Druckstützen der ersten Träger geringer aus.

In gleicher Weise ist es manchmal praktisch nicht möglich, jeder Strebe und jedem Zug die speziellen Abmessungen, die rechnerisch ermittelt wurden, zukommen zu lassen, wenn man vorgefertigte Werkstoffe zur Herstellung des Daches verwendet, und infolgedessen muß man vom theoretischen Gewicht abweichen, das bei Streben von Trägern der 1. Klasse immer höher ist als bei den Polonceau-Trägern.

Eine Zunahme des Gewichts gegenüber seinem theoretisch errechneten Wert muß man in Kauf nehmen, wenn man folgende Umstände berücksichtigt:

- 1) Gurtstöße und Strebenbefestigungen schwächen bei Nietverbindungen den tragenden Querschnitt der Abschnitte um annähernd 15 – 20%. Bei der Verwendung

von Scharnieren tritt diese Schwächung nicht auf, dafür ist der Einbau von Scharnieren in Dächer wesentlich teurer als der von Nietverbindungen;

2) wenn es nicht möglich ist, exakt nach den Kräften das einzusetzende Eisen auszuwählen, dann muß man solches mit identischen Abmessungen für zwei und drei Felder nehmen, auch wenn in ihnen unterschiedliche Kräfte auftreten;

3) jeder Stoß für das Verbinden der Gurte mit den Streben oder Zügen erfordert für sich eine bestimmte zusätzliche Werkstoffmenge.

Welche Verbindung auch immer man für die Träger wählt, die Ausführung des Stoßes ist der wichtigste Arbeitsabschnitt. Bei Nietfugen nehmen die Stöße Profil- oder geradlinige Form an, sie werden aus Eisenblechen zugeschnitten und stellen den schwierigsten Arbeitsabschnitt bei der Fertigung des Daches dar. Bei Trägern mit kleinen Ausmaßen, mit einer Spannweite bis 4 *Sazhen*⁴, werden die Stöße aus Blechen mit $\frac{1}{4}$ bis $\frac{5}{16}$ *Quadratzoll*, bei größeren Spannweiten mit $\frac{3}{8}$ bis $\frac{1}{2}$ *Quadratzoll* gefertigt.

Obwohl das Gewicht der Stöße von den Kräften abhängt, drückt sich diese Abhängigkeit in geringerem Maße aus: bei kleiner Spannweite ist das Gewicht des Stoßes selbstverständlich kleiner als bei einer größeren, aber dafür sind seine relativen Kosten an den Gesamtkosten der Dachherstellung bei einer großen Spannweite geringer als bei einer kleinen. Aus den zahlreichen Beispielen zur Berechnung des Dachverbandes ergibt sich, daß man das Gewicht für das zusätzliche Material der Stöße nicht unter 1 *Pud*⁵ je Feld ansetzen darf.

Übertragung der Last auf die Träger

Ein aufgebauter Dachverband nimmt die Last auf, die ihm vom Dachmaterial, das auf den Dachlatten ruht, übertragen wird. Der Druck hieraus auf die Träger wird entweder direkt übertragen, wenn die Latte auf dem Trägergurt liegt, oder über die Unterzüge, die die gleichmäßige Last aus den Latten aufnehmen und danach als Einzellasten auf die Verbindungspunkte des Trägers übertragen.

Im 1. Fall, wo die Dachlatte unmittelbar auf dem Träger aufliegt, wird der Druckgurt am Dachträger der Einwirkung von Biegemomenten aus der gleichmäßigen Last, die zwischen zwei benachbarten Verbindungspunkten des Gurtes liegt, unterworfen; dabei ist der Wert des Biegemoments eines jeden Feldes des oberen Gurtes

$$\frac{q_0 e a^2}{8} = \frac{q_0 e l^2}{8 n^2}, \quad (55)$$

wenn q_0 die Last auf die Quadrateinheit der Dachfläche ist, e der Abstand zwischen den Trägern und $a = l/n$ die Länge des Feldes.

⁴ 1 *Sazhen* (altes russ. Längenmaß) \triangleq 2,1336 m (Anm.d.Übers.).

⁵ 1 *Pud* (altes russ. Gewichtsmaß) \approx 16,38 kg (Anm.d.Übers.).

Bei den längs des Daches durch die Verbindungspunkte des Trägers verlaufenden Unterzügen erfährt der Druckgurt keine Biegeeinwirkung. Diese wird in diesem Fall auf die Unterzüge übertragen, und die Größe des Biegemoments beim Unterzug ist

$$q_0 a l^2 / 8. \quad (56)$$

Je nach Abstand zwischen den Dachträgern kann man die Frage beantworten, ob es günstiger ist, Unterzüge einzubauen oder die Dachlatten direkt auf den oberen Trägergurt zu legen.

Lassen wir das für die Dachlatten verwendete Material unberücksichtigt, ist es immer günstiger, diese nicht direkt auf den Dachgurt zu legen; berücksichtigt man jedoch auch das Gewicht der Dachlatten, dann zeigt sich, daß es günstiger ist, wenn der Abstand zwischen den Verbindungspunkten des Trägers geringer ist als der Abstand zwischen den Trägern selbst, Längsunterzüge einzuziehen. Dabei ist jedoch das Gewicht des für die Unterzüge aufgewendeten Werkstoffs immer größer als das Gewicht des zusätzlichen Werkstoffs im Druckgurt, was eine Durchbiegung des Gurtes durch die Last zur Folge hat.

Bestimmung der Felderzahl des Dachträgers

Bei gegebener Spannweite des Dachträgers steigt das Gewicht seiner Zug- und Druckabschnitte je nach Zunahme der Felderzahl n . Das Gewicht des Zusatzmaterials im Druckgurt, das infolge Lastdurchbiegung des Gurtes auftritt, nimmt hingegen je nach Zunahme von n ab. Außerdem steigt damit der zulässige Widerstandswert im Druckgurt infolge Verringerung der Felderlänge. Man muß also n so wählen, daß die gesamten Baukosten bei \min liegen.

Die Aufgabe, die Anzahl der Felder in allgemeiner algebraischer Form zu bestimmen, macht große Schwierigkeiten, deshalb befassen wir uns hier mit der Erörterung eines numerischen Beispiels und nehmen an, daß die Dachlatten direkt auf dem oberen Gurt liegen und aus 6 *Quadrat Zoll* breiten festen Brettern bestehen. Die Dachbelastung aufgrund von Wind, Schnee, Dachblech und Latten, macht bei einer durchschnittlichen Dachneigung von $\frac{1}{6}$ bis $\frac{1}{4}$ der Spannweite nicht mehr als 1 *Pud* auf 1 *Qu.Fuß*⁶ (etwa 175 *kg* pro 1 *m*²). Für das Gewicht eines auf dem Dach gehenden Menschen (5 *Pud*) kann man annehmen, daß es auf zwei nebeneinander liegende Dachlatten übertragen wird, d.h. auf eine durchgehende 12 *Zoll* breite Dachlatte.

In *Fuß* drücke e den Abstand zwischen den Dachträgern aus. Dann ist das Biegemoment, das auf die 12 *Zoll* breite Dachlatte übertragen wird, $M = e^2 12/8 + 5e 12/4$ *Pud-Zoll*.

Den festen Biege widerstand des Holzes nehmen wir mit 30 *Pud* auf 1 *Qu.Zoll* an. Dann ist das Widerstandsmodul der 12 *Zoll* breiten Dachlatte $W = 12\delta/6 = e^2/20 + e/2$. Hierdurch ergibt sich die Brettstärke in *Zoll* $\delta = \sqrt{e^2/40 + e/4}$ mit e in *Fuß*. Wir nehmen für das Gewicht von 1 *Kub.Fuß* Holz = 1 *Pud* an und erhalten das Gewicht

⁶ 1 *Fuß* (altes russ. Flächenmaß) $\approx 9,29$ *dm*² (Anm.d.Übers.).

von 1 *Qu.Fuß* Dachlatten mit $\frac{1}{12}\sqrt{e^2/40+e/4}$. Bei $e = 7$ Fuß ist $\delta = 1,72$ Zoll, bei $e = 10$ $\delta = 2,25$.

Normalerweise werden die Dachlatten nicht mehr als $1\frac{3}{4}$ Zoll gemacht, weshalb der Abstand zwischen den Trägern mit 7 Fuß angenommen wird.

Liegen die Dachlatten auf den Unterzügen, dann ist der Abstand zwischen ihnen waagrecht gleich dem Abstand a zwischen den Verbindungspunkten des Dachträgers, und das Gewicht von 1 *Qu.Fuß* Dachlatten ist $\frac{1}{12}\sqrt{e^2/40+e/4}$ Pud.

Ist a größer e , dann ist das Gewicht der direkt auf den Trägern liegenden Dachlatten geringer als bei vorhandenen Unterzügen; ist aber a kleiner e , dann ist umgekehrt das Gewicht der auf den Unterzügen liegenden Dachlatten geringer als ohne sie, dafür kommt aber das Gewicht der Unterzüge hinzu.

Mit einer für unsere Überlegungen ausreichenden Genauigkeit kann man die Abhängigkeit zwischen den Größen des Biegemoments und dem ihm entgegengesetzten Gewicht des Balkens aus den Tabellen ermitteln, die das Gewicht und den Widerstandsmodul der verschiedenen Eisensorten liefern, die für den Druckgurt verwendet werden.

Wir untersuchen den Fall, daß Doppel-T-Balken eingesetzt werden, deren Normalprofile (entwickelt vom Verein Deutscher Ingenieure) folgenden Widerstandsmodul W besitzen (in Kub.Zoll) und das Gewicht v in Pud auf 1 *lfd. Fuß*:

N , Balken	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
W , Kub.Zoll	1,2	1,6	2,1	2,65	3,36	4,13	5,05	6	7,2	8,5	9,9
v , Pud	0,12	0,133	0,154	0,18	0,21	0,234	0,266	0,3	0,333	0,368	0,407

Mit ausreichender Genauigkeit kann die Abhängigkeit zwischen dem Gewicht von 1 *lfd. Fuß* des Balkens und seinem Widerstandsmodul durch die Gleichung

$$v = 0,12\sqrt{W} \quad (57)$$

ausgedrückt werden.

In ihrer Stelle kann man auch eine zwingendere Abhängigkeit ermitteln, indem man in den 2. Teil eine Konstante einbringt, wobei sich natürlich auch der Koeffizient 0,12 verändert. Doch der auf diese Weise ermittelte genauere Ausdruck hat keinen Einfluß auf die Bestimmung der Felderzahl, weil n sich nicht kontinuierlich verändert, sondern eine ganze Zahl sein muß.

Nach Gleichung (55) ist die Größe des Biegemoments eines jeden Feldes des

oberen Gurtes $M = \frac{q_0 e}{8} \frac{l^2}{n^2} 12$ Pud·Zoll.

Wir nehmen den Koeffizienten des festen Eisenbiegewiderstands mit 300 Pud auf 1

Qu.Zoll an und erhalten $W = \frac{q_0 e}{200} \frac{l^2}{n^2}$, $v = 0,0084 \frac{l}{n} \sqrt{q_0 e}$. Das Gewicht des Balkens, der für die Halbspannweite mit der Länge l verwendet wird, erhalten wir mit

$$0,0084 \frac{l^2}{n^2} \sqrt{q_0 e}. \quad (58)$$

Bei Verwendung von Eisen mit einem Querschnitt in Form des Buchstaben Z kann die Abhängigkeit zwischen dem Gewicht von 1 lfd. Fuß in Pud und dem Widerstandsmodul in Kub.Zoll mit derselben Gleichung (57) ausgedrückt werden, wie man leicht aus den Angaben der folgenden Tabelle für normale Z-Profil-Eisen erkennen kann:

<i>N</i> , Profil	3	4	5	6	8	10	12
<i>W</i> , Kub.Zoll	0,25	0,41	0,64	0,9	1,7	2,7	4,2
<i>v</i> , Pud	0,061	0,078	0,097	0,114	0,16	0,207	0,25

Bisweilen gibt man dem Dachsparren T-Form, die man durch Vernieten von zwei Winkeleisen und einem senkrechten Bandeisen dazwischen schafft. Verändert man dabei die Abmessungen des Bandeisens, kann man dementsprechend auch *W* ändern, angenommen, das gesamte Biegemoment werde nur durch ein einziges Bandeisen aufgenommen. Bei einer Höhe *h* und Dicke δ des Bandeisens ist sein Modul $W = \delta h^2 / 6$ Pud·Zoll.

Das Gewicht 1 lfd. Fußes Bandeisens mit den Abmessungen $\delta \cdot h$ ist $v = 0,093 \delta \cdot h = 0,228 \sqrt{\delta} \sqrt{W}$.

δ , Zoll	$\frac{5}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$
$0,228 \sqrt{\delta}$	0,127	0,114	0,137

Die Angaben in dieser kleinen Tabelle zeigen, daß man Gleichung (57) auch in diesem Fall mit ausreichender Genauigkeit anwenden kann. Deshalb ist auch Gleichung (58) in allen Fällen anwendbar. Wir ersetzen in ihr $q_0 e = q$, das Gewicht der Last, bezogen auf die Längeneinheit der Spannweite, und erhalten das Gewicht des Balkens, der dem Biegemoment in jedem Halbträger entgegenwirkt, in Form von

$$0,0084 \frac{l^2}{n} \sqrt{q}. \quad (58.a)$$

Wir verwenden diesen Ausdruck und können ohne Schwierigkeiten auch die Frage nach der günstigsten Position der Dachlatten, Unterzüge und Dachträger lösen. Dafür müssen wir Ausdruck (58.a) in die oben genannten Formeln des Gewichts der Dachträger einfügen, wobei wir die 1. Gewichtsableitung gleich Null setzen.

Wir eliminieren die nicht von *n* abhängigen Mengenkennkonstanten, ebenso die Glieder mit dem Faktor der Größenordnung $1 : n$ und $1 : n^2$, da sie fast keinen Einfluß auf das Gewicht der Halbträger haben, und erhalten den Wert der untersuchten Funktion, von der man die 1. Ableitung machen muß, für den rationalen Träger der 1. Klasse in der Gestalt:

$$Z = 0,13 \Phi n + n + 0,00315 \sqrt{q} l^2 / n. \quad (59)$$

Min dieser Funktion sowie des Trägergewichts ergibt sich beim Wert *n*, der aus der Gleichung

$$n^2 = 0,0084 l^2 \sqrt{q} / (1 + 0,13 \Phi) \quad (60)$$

bestimmt wird, wobei Φ nach Gleichung (49) bestimmt wird.

Angenommen sei, wie früher, $e = 7$ Fuß – Abstand zwischen den Trägern, $k = 300$ Pud auf 1 Qu.Zoll – zulässige Zugspannung im Eisen, $\gamma = 0,093$ Pud – Gewicht je lfd. Fuß Bandeisen mit 1 Qu.Zoll Querschnitt, $q = 7$ Pud – Last auf den lfd. Fuß Dachträger in Horizontalprojektion (entsprechend der Last von 1 Pud auf 1 Qu.Fuß) und $l/f = 2,5$, dann erhalten wir

$$\Phi = \frac{0,093 \cdot 7 l^3}{2 \cdot 300 f} = 0,0027125l^2, \quad 0,0084l^2 \sqrt{q} = 0,022l^2.$$

Dann erhalten wir für den rationellen Träger 1. Klasse

$$n^2 = 22l^2 / (1000 + 0,35l^2). \quad (61)$$

Bei $l = 7$	14	21	30	42	60 Fuß
$n = 1$	2	3	4		

Ist l ein sehr großer Wert, dann ist $n = \sqrt{22/0,35}$, d.h. dann ist $n = 8$ zu wählen. Folglich ist es bei den von uns angenommenen Belastungen und bei einem Abstand zwischen den Trägern von $e = 7$ Fuß ungünstig, mehr als 8 Felder pro Halbspannweite zu bauen, und dies auch bei großen Spannweiten. Man kann unschwer erkennen, daß bei Halbspannweiten bis 40 Fuß die Anzahl der Felder proportional ist zu $l : 7$, und dies ist in etwa die Zahl, die man am günstigsten als Feldwert ansetzt. Bei geringen Spannweiten, wenn man das Gewicht der Stöße geringer ansetzen darf als den von uns oben angegebenen Wert (1 Pud pro Feld), kommen auf das Feld etwa 6 Fuß.

Sollte man den Abstand zwischen den Dachträgern (bei sonst gleichen Werten) mit 14 Fuß ansetzen, dann erhielte man $0,13\Phi = 0,0007l^2$, $0,0084l^2 \sqrt{q} = 0,0314l^2$,

$$n^2 = 31l^2 / (10000 + 0,7l^2). \quad (62)$$

Bei $n = 7$	2	3	4	5	6
$l = 5,74$	11,9	19,1	28,4	43	79

Ist l ein sehr großer Wert, $n =$ etwa $\sqrt{31/0,7}$, nehmen wir gleich 7 an. Wir setzen in den Ausdruck für das Gewicht des rationellen Trägers 1. Klasse $n = l/7$ ein, mit l in Fuß, und erhalten bei den von uns gewählten Belastungen, dem Trägerhub und bei einem Abstand zwischen den Trägern von 7 Fuß das Gewicht des Halbträgers 1. Klasse des rationellen Systems mit

$$V = 0,31l + 0,011l^2 + 0,00005l^3. \quad (63)$$

mit V in Pud und l in Fuß.

Wir wenden uns nun der Gewichtsformel des rationellen Trägers der 2. Klasse zu und können unschwer erkennen, daß hier die Anzahl der Felder einen unwesentlichen Einfluß auf die Gewichtszunahme hat. Zur Kürzung der Erläuterungen vernachlässigen wir diesen Einfluß total und gehen davon aus, daß die Felderzahl vom Gewicht der Stöße und vom Werkstoffgewicht des Balkens abhängt, der die Biege-wirkung der Kräfte aufnimmt.

Wir nehmen das Gewicht der Stöße pro Feld mit 1 Pud und das Gewicht des Gurtbalkens nach Formel (58.a) an und ermitteln aus dem gegen Null gehenden Ausdruck der 1. Ableitung aus Z nach n für den rationellen Träger der 2. Klasse

$$n = l\sqrt{0,022} = 0,15 l. \quad (64)$$

Folglich ergibt der Wert des Feldes hier gleich $a = 1/n = 6,6$ Fuß. Wir nehmen $n = l : 6,6$ an mit l in Fuß, $e = 7$ Fuß und sonst die gleichen Werte wie früher bezüglich Last und Dachhub und erhalten das Gewicht des Halbträgers 2. Klasse des rationalen Systems

$$V = 0,25l + 0,01446l^2 \quad (65)$$

mit V in Pud und l in Fuß.

Die Gewichte der Halbträger der übrigen Systeme können ebenfalls auf Formeln wie (63) und (65) zurückgeführt werden. Damit halten wir uns nicht auf, bemerken nur, daß der günstigste Wert n mit allen hier untersuchten Trägern der 1. Klasse identisch ist.

Vorhergehende Überlegungen hatten uns zu der Annahme geführt, die Dachlatten übertrügen die Lasteinwirkung direkt auf den oberen Trägergurt. Beim Einbau von Unterzügen erfährt der obere Gurt keine Biegekräfteinwirkung, und deshalb ist die oben genannte Definition von n hier darauf anzuwenden, die günstigste Kombination von Gewicht des Dachverbands und Dachlattengewicht herauszufinden.

Sind Unterzüge vorhanden, darf die Feldgröße 7 Fuß auch nicht übersteigen, da dabei die Gewichtszunahme und ihre Kosten schneller steigen als die Gewichtsverminderung des Dachverbandes, bedingt durch eine Verminderung der Felderzahl. Macht man die Abmessungen des Feldes größer, bekommt der obere Gurt außerdem längere Druckabschnitte und dies erzeugt eine Zunahme des Korrekturkoeffizienten des Druckgurtes.

Zu denselben numerischen Größen der Feldlänge (von 6 bis 8 Fuß) kommen wir auch bei eisernen Dachlatten. Eine Ausnahme stellt nur der Fall dar, wo Wellblech als Dachmaterial verwendet wird, wobei die gewählten Abmessungen so sind, daß es eine gewöhnliche Last im Abstand von 10 – 12 Fuß aushalten kann. In diesem Fall muß die Feldlänge ebenfalls 10 – 12 Fuß betragen.

Wenn in Dachverbänden der untere Gurt nicht horizontal verläuft, sondern leicht schräg, dann ist die Korrektur zur Bestimmung der günstigsten Position der Felder sehr klein, aber das Gewicht des Dachverbandes nimmt stark zu, da anstelle der Größe f des Dachhubs in die Kräfte- und Gewichtsformeln die Differenz von oberem und unterem Gurt eingeht.

Berechnung eines geraden und parabolischen Trägers ohne Streben im Falle von Einzellasteinwirkung

Einzellasten sind in Fabriksgebäuden Antriebsgeschäfte, Hebewerksmassen für die Montage von Werkstücken und dgl.

Wenn im Punkt D , der von der Stütze A (siehe Abb. 1 und 2) im Abstand z entfernt ist, die Einzellast P wirkt, dann ist in einem beliebigen Querschnitt, der die Koordinaten x und y besitzt und zwischen den Punkten A und D liegt, das Moment $M_1 = V_1x - Hy$, im Querschnitt, der zwischen den Punkten D und B liegt, wird der Ausdruck für das Moment aber so geschrieben:

$$M_2 = V_2(2l - x) - Hy. \quad (66)$$

Dabei ist $V_1 = P(2l - z)/2l$, $V_2 = Pz/2l$, $H = Pz/2f$.

Die Abhängigkeit zwischen x und y ist im geraden Träger $y = fx/l$, und im parabolischen wird sie durch Gleichung (5) wiedergegeben: $y = f(2lx - x^2)/l^2$. Wir setzen diese Werte in die Ausdrücke für M_1 und M_2 ein und erhalten für den geraden Träger zwischen A und C (Abb. 1):

$$M_1 = Px(l - z)/l, \quad M_2 = Pz(l - x)/l.$$

Zwischen den Querschnitten C und B , wo $y = f(2l - x)/l$, geht Gleichung (66) gegen Null.

Beim parabolischen Träger ist

$$\begin{aligned} M_1 &= Px(l - z)/l - Pxz(l - x)/2l^2, \\ M_2 &= Pz(l - x)/l - Pxz(l - x)/2l^2. \end{aligned}$$

Es ist unschwer zu erkennen, daß M_1 und M_2 beim geraden Träger positiv sind für jedes x bei beliebigem z ; beim parabolischen Träger hingegen können beide Momente sowohl positiv als auch negativ sein. Positive Momente sind im untersuchten Fall diejenigen Momente, die unter Verformung des Balkens ihn der Horizontale AB annähern, negativ jene, die die Balkenachse unter Verformung von der Horizontale AB entfernen. Die positiven Werte von M_1 sind beim parabolischen Träger geringer als beim geraden, bei beliebig gewähltem z und für alle x . Die negativen Werte von M_1 können beim parabolischen Träger nur bei z größer $2/3l$ auftreten. Das größte positive Moment erhält man im Querschnitt $x = z$, und sein Wert ist für die Gerade

$$M_1 = M_2 = Pz \frac{l - z}{l}, \quad (67)$$

für die Parabel

$$M_1 = M_2 = Pz \frac{l - z}{l} \frac{2l - z}{2l},$$

d.h. das größte positive Moment ist beim parabolischen Träger kleiner als beim geraden.

Wir setzen im Fall der Parabel die 1. Ableitung von M_2 nach x gleich Null und erhalten $x = 2/3l$ und

$$\max M_2 = -Pz/8. \quad (68)$$

Wenn die Einzellast auf den linken Fuß des parabolischen Trägers wirkt, wird folglich das größte Moment nur im rechten Fuß hervorgerufen und es ist gleich $-Pz/8$. Im geraden Träger ist das Moment in den Querschnitten des unbelasteten Fußes gleich 0. Den größten negativen Wert von M_1 kann es im parabolischen Träger nur bei Z über $2/3l$ geben.

Die Koordinaten dieses Querschnitts erhält man, wenn man die 1. Ableitung von M_2 nach x gleich Null setzt, was $x = (3z - 2l)/2z$ liefert. Bei diesem Wert von x erhalten wir

$$\max M_1 = -\frac{P}{8z}(3z - 2l)^2.$$

Diese Größe von $\max M_1$ ist bei allen Werten von z kleiner $\max M_2$, und nur im Falle einer Last, die an der Spitze der Parabel aufgehängt ist, sind die beiden Werte gleich.

Wir vergleichen die rechnerischen Momente für den geraden und den parabolischen Träger, die durch die Gleichungen (67) – (68) ausgedrückt werden, und sehen, daß sie bei $z = \frac{7}{8}l$ identisch sind.

Setzt also eine Einzellast im Abstand $\frac{7}{8}l$ von der Stütze an, dann ist das Moment, nach dem man den geraden Träger berechnet, identisch.

Bei z kleiner $\frac{7}{8}l$ ist das Moment im parabolischen Träger kleiner als im geraden, bei z über $\frac{7}{8}l$ ist es umgekehrt.

Beim Bau von Werkstätten ist es in der Praxis niemals angebracht, den Dachverband mit Einzellasten in der Nähe der Trägerspitze zu belasten. Wenn man es für möglich ansieht, eine Einzellast auf der gesamten Spannweite anzubringen, dann ist der parabolische Träger leichter als der gerade. Für letzteren erhalten wir in diesem Fall bei $z = l/2$ $\max M_1 = Pl/4$, und für die Parabel bei $z = 0,423l$ $\max M_1 = Pl/5$.

Im Fall von zwei symmetrisch verteilten Lasten erhalten wir für die Parabel

$$M_1 = Px \left(1 - \frac{2x}{l} + \frac{xz}{l^2} \right), \quad M_2 = Pz \left(\frac{l-x}{l} \right)^2$$

und bei der Geraden bleiben die Ausdrücke M_1 und M_2 wie bei einer einzelnen Last.

Parabolische Bogenträger

Gewicht des parabolischen Trägers ohne Streben und Schrägzüge. Eine gleichmäßig über die gesamte Spannweite verteilte Last ruft im parabolischen Bogen keine Biegemomente hervor, folglich müssen bei einer solchen Last keine Anstalten getroffen werden, Streben einzusetzen, die die Größe des Biegemoments verringern sollen.

Die Zugspannung (siehe Gleichung (1)) wurde ermittelt mit $H = ql^2/2f$. Der Druck des Bogens in einem beliebigen Querschnitt ist $S = H \cos \alpha + (V_1 - qx) \sin \alpha$, wobei $V_1 = ql$ den Druck auf die Stütze bezeichnet.

Die Länge eines Elements des Krümmungsbogens ist $dx/\cos \alpha$, und das Gewicht des Druckgurts des Halbträgers beträgt

$$V_s = \frac{\gamma\beta}{k} \int_0^l [H + q(l-x)\operatorname{tg}\alpha] dx.$$

Wir nehmen an, der parabolische Träger werde rationell ausgeführt, d.h. er entspreche Gleichung (5) und erhalten

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{dy}{dx} = 2f \frac{l-x}{l^2}, \quad V_s = \frac{ql^3}{2f} \frac{\gamma\beta}{k} \left(1 + \frac{4f^2}{l^2} \right).$$

Wir führen die durch Gleichung (49) definierte Bezeichnung ein und ermitteln, ohne Berücksichtigung der Sekantenkräfte in der Berechnung, das Gesamtgewicht des halben Bogenträgers in der folgenden Form:

$$V = \Phi \left[1 + \beta \left(1 + 4f^2/l^2 \right) \right] \quad (69)$$

Parabolische Träger mit Streben, Vorteil eines Systems aus Schrägzügen anstelle der Streben. Bei einseitiger Belastung (p auf die Längeneinheit) treten in parabolischen Bögen Biegemomente auf. Man kann diese auch hier - wie bei den geraden Trägern - durch den Einbau von Streben verringern.

Wie bei der Bestimmung der Kräfte in den Streben, so kann ihre günstigste Ausrichtung unter der Bedingung des geringsten Trägergewichts auch in diesem Fall nach demselben Verfahren erfolgen wie vorher bei den geraden Trägern.

Bei einseitiger Belastung der Halbspannweite ist der Druck auf die Stützen $V_1 = \frac{3}{4}pl$, $V_2 = \frac{1}{4}pl$.

Das Moment der äußeren Kräfte in einem beliebigen Punkt (xy) der belasteten Bogenseite ist $M = \frac{3}{4}plx - \frac{1}{2}px^2$.

Für den Punkt r (Abb. 10) im m -ten Feld ist bei $x = ma = ml/n$

$$M_m = \frac{1}{4}pl^2(3mn - 2m^2)/n^2. \quad (70)$$

Der Abstand von Punkt r vom Zuggurt in Parabelrichtung (siehe Gleichung (5)) ist dann $h_m = fa^2(2mn - m^2)/l^2$.

Die Spannung des unteren Gurtes im m -ten Feld ist

$$t_m = M_m : h_{m1} = \frac{pl^2}{4f} \frac{3n - 2m}{2n - m}.$$

Die Spannung des unteren Gurtes im $(m + 1)$ -ten Feld ist

$$t_{m+1} = M_{m+1} : h_{m+1} = \frac{pl^2}{4f} \frac{3n - 2m - 2}{2n - m - 1}.$$

Die Differenz der Spannungen, nach denen Druck und Zug der entsprechenden Streben und Züge bestimmt wird, ist

$$t_m - t_{+1} = \frac{pl^2}{4f} \frac{n}{(2n - m)(2n - m - 1)}. \quad (71)$$

Bei Verschiebung der Last von der einen Trägerhälfte zur anderen beträgt das Moment der äußeren Kräfte im selben Punkt (x, y)

$$M_m = V_2 x = \frac{1}{4} p l x = \frac{1}{4} p l^2 m/n, \text{ und die Spannungen}$$

$$t_m = \frac{p l^2}{4 f} \frac{n}{2n-m}, \quad t_{m+1} = \frac{p l^2}{4 f} \frac{n}{2n-m-1}.$$

Die rechnerische Differenz der Spannungen ist dann

$$t_m - t_{m+1} = -\frac{p l^2}{4 f} \frac{n}{(2n-m)(2n-m-1)}, \quad (72)$$

d.h. bei einem Wechsel der Last von einer Trägerseite auf die andere ändert die Differenz der Spannungen des unteren Gurtes in zwei benachbarten Feldern lediglich das Vorzeichen, nicht ihren Wert.

Bei der Berechnung eines Trägers muß man den Fall berücksichtigen, daß seine beiden Hälften belastet werden und jede Strebe einer gleichen Druck- und Zugkraft ausgesetzt ist, von der Position einer ungleichmäßigen Last aus gesehen.

Die Differenz in den Kräften der Gurte zweier benachbarter Felder aufgrund einer einseitigen Belastung zur vollen Kraftgröße in den Gurten aufgrund konstanter Belastung, darauf kann man bei der Ermittlung der günstigsten Position der Streben die Aufgabe einschränken, nämlich eine solche Stellung der Streben ausfindig zu machen, bei der ihr Gewicht minimal ist.

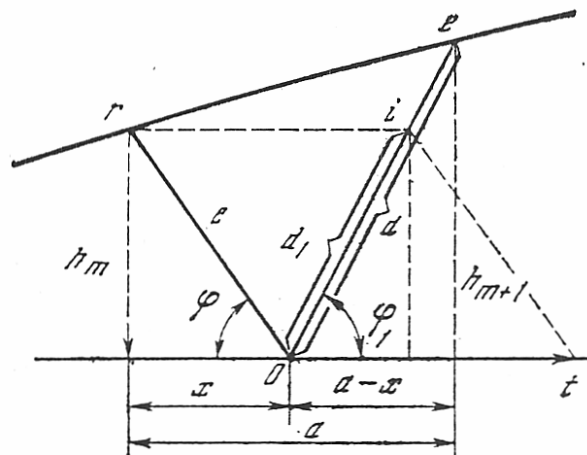


Abb. 10

Wir entwickeln deshalb, wie auch bei den geraden Formen geschehen, die Differenz der Kräfte $t_m - t_{m+1}$ in Richtung c und d (Abb. 10) und erhalten:

Wirkt auf die Strebe c die Druck- (oder Zug-)kraft Qc/a , dann wirkt auf die Strebe d eine Zug- (oder Druck-)kraft, die reziprok ist zu der Kraft, deren Größe Qoi/a ist, wobei nach Abb. 10 $oi/oe = h_m/h_{m+1}$.

Das Gewicht der Strebe c ist proportional zu Qc^2/a . Das Gewicht der Strebe d ist proportional zu $Q\frac{d^2}{a}h_m : h_{m+1}$.

Aber $c^2 = x^2 + h_m^2 + \frac{h_m}{h_{m+1}}[(a-x)^2 + h_{m+1}^2]$ Folglich ist das Gewicht der beiden Streben dieses Feldes proportional zur Größe

$$L = x^2 + h_m^2 + \frac{h_m}{h_{m+1}}[(a-x)^2 + h_{m+1}^2] \quad (73)$$

Wir lassen die 1. Ableitung aus L nach x gegen Null gehen und erhalten nach algebraischer Umwandlung

$$x/h_m = (a-x)/h_{m+1}, \quad (74)$$

d.h. min Gewicht bei zwei Streben in einem Feld wird dann erreicht, wenn beide schräg zum Druckgurt unter gleichem Winkel verlaufen, bzw. wenn $\varphi = \varphi_1$ in Abb. 10.

Wir halten uns nicht weiter mit der völligen Beantwortung der Frage auf, wie die Streben am günstigsten in einem parabolischen Träger von Dachverbänden verlaufen, ausgehend von den Vorstellungen: eine einseitige Last auf die Dachträger stellt die Windeinwirkungskomponente dar, und ihre Größe ist weit geringer als eine konstante, d.h. gleichmäßig über die gesamte Spannweite verteilte Last. Diese konstante Last besteht aus dem Gewicht des Dachverbands, der Dachlatten und der Verkleidung, des Dachmaterials und dem Schneegewicht. Die konstante Last ruft jedoch keine Spannungen in den Zügen des parabolischen Bogens hervor, übt aber die größten Kräfte in den Gurten aus. Folglich muß man die Streben in diesen Bögen nach einem relativ geringen Wert für eine einseitige Last berechnen, und nimmt man an, die Länge der Druckstreben sei in Bögen größer als in geraden Trägern, dann wird deutlich, daß die Verwendung von Druckteilen großer Länge bei geringen Kräften einen zu abträglichen Werkstoffverbrauch nach sich zieht. In diesem Fall ersetzt man die Streben durch ein System von Zügen oder Sehnen, die die verschiedenen Punkte des Bogens mit seiner Sohle verbinden, und dies ist von beträchtlichem Nutzen sowohl hinsichtlich Werkstoffersparnis als auch wegen der einfachen Montage.

Geht man beim Entwurf wegen der größeren Genauigkeit beim Berechnen der Streben von der Annahme aus, der Schnee liege nicht nur auf einer Seite des Trägers, dann ist in diesem Fall die Montage eines Systems von Zügen günstiger als der Einbau von Streben, da die Trägergurte so berechnet werden, als ob die Schneelast auf die gesamte Spannweite verteilt wäre.

Wir veranschaulichen das Gesagte am einfachen Beispiel eines viereckigen geraden Trägers (Abb. 11). Seine Verbindungspunkte B und D nehmen eine gleiche Last Q auf, unter deren Einfluß die Abschnitte AB , BD und DE zusammengedrückt, der Abschnitt AE aber gedehnt wird. Theoretisch verhält sich ein solcher Träger auch ohne Sehnen und ohne Streben ruhig. Entfernen wir den Teil P der Last von Punkt D , dann bedarf die Kraft P im Punkt B , die gleich dem von Punkt D entfernten Lastanteil ist, daß (zum Erhalt des Gleichgewichts des Trägers) Streben oder Sehnen

eingebaut werden. In Abb. 11 ist der Fall dargestellt, wo Streben benutzt werden, in Abb. 12 der Einsatz von Zügen.

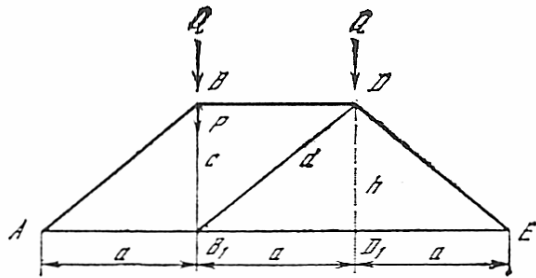


Abb. 11

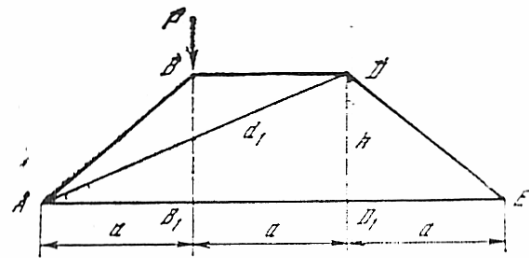


Abb. 12

Die Kraft der Strebe c (siehe Abb. 11) ist gleich P , ihr Gewicht ist dann $\frac{\gamma}{k}\beta Ph$, wobei β die Relation der zulässigen Spannungen bei Zug und Druck bezeichnet. Über den Zug d wird die Kraft $\frac{1}{3}Pd/h$ übertragen. Das Gewicht von Zug d ist $\frac{\gamma}{k}\frac{1}{3}P\frac{d^2}{h} = \frac{\gamma}{k}\frac{1}{3}P\frac{a^2+h^2}{h}$. Die Summe der Gewichte von Strebe c und Zug d ist

$$V_1 = \frac{\gamma}{k} \frac{a^2 + h^2 + 3\beta h^2}{3h} P. \quad (75)$$

Die Frage, wie sich die Zug- und Druckkräfte der Abschnitte AB , BD , DE und EA verändern, erörtern wir nicht, da diese Abschnitte nach den größten und gleichen Lasten Q berechnet werden müssen.

Bei Verwendung des Zuges AD (Abb. 12) anstelle von Streben besitzt er die Spannung $\frac{1}{3}\frac{P}{h}d_1$, und sein Gewicht ist

$$V_2 = \frac{1}{3} \frac{\gamma}{k} \frac{P}{h} d_1^2 = \frac{1}{3} \frac{\gamma}{k} P \frac{4a^2 + h^2}{h}. \quad (76)$$

Die Differenz der Gewichte ist $V_1 - V_2 = \frac{\gamma}{k} P \frac{\beta h^2 + a^2}{h}$.

Bei den üblichen Angaben zur Berechnung von Dachverbänden macht der Wert β nicht unter 3 aus⁷, und die Differenz $V_1 - V_2$ spricht für den Einbau einer Sehne,

⁷ Als Beispiel nehmen wir $h = 5 \text{ Fuß} = 6 \text{ Zoll}$, $a = 10 \text{ Fuß}$, $AE = 30 \text{ Fuß}$; wir nehmen eine einseitige Belastung aufgrund von Windeinwirkung und Schnee von etwa $0,28 \text{ Pud}$ auf auf 1 Qu.Fuß an. Bei einem Abstand zwischen den Trägern von 7 Fuß erhalten wir $P = 0,28 \cdot 7 \cdot 10 = 20 \text{ Pud}$.

Nimmt man das kleinste Winkeleisen ($1 \times 1 \times \frac{1}{8} \text{ Zoll}$), dann ergibt bei ihm die Relation von Länge zu kleinster Profilbreite 60, der Druckkorrekturkoeffizient nach der Loewe-Formel (siehe Tab. 13 bei Beljubschij und Boguslavskij, 3. Aufl., 1894) beträgt 0,3. Der Querschnitt des Winkeleisens ist etwa $\frac{1}{4} \text{ Qu.Zoll}$. Die auf den Querschnitt von 1 Qu.Zoll bezogene Kraft beträgt $20 : \frac{1}{4} = 80 = k_1$, und die Werkstoffspannung der langen Stütze ist $80 : 0,3 = \text{etwa } 270 \text{ Pud}$. Folglich kann man kein Eisen mit noch geringeren Maßen nehmen. Im Falle eines Zuges muß man unabhängig von dessen Profilmaßen die Werkstoffspannung bei Zug annehmen mit $k = 350 \text{ Pud}$ und $\beta = k : k_1 = 350 : 80 = 4,3$.

wenn der Trägerhub $\frac{1}{5}$ bis $\frac{1}{6}$ seiner Spannweite ausmacht. Außerdem wird bei einer Sehne der Aufwand für Werkstoff und Montage von Stößen in den Verbindungspunkten B und B_1 vermieden (Abb. 11 und 12).

Ersetzt man in Bogenbinder die Streben durch Sehnen, vereinfacht dies außerordentlich die Arbeit bei der Herstellung letzterer. Die Befestigung einer Sehne am Bogenkörper (ein einziger Bolzen) ist wesentlich einfacher als die Fertigung eines normalen Stoßes von Strebe und Gurt. Außerdem ermöglichen es uns Sehnen, wie wir nachfolgend sehen werden, einen Bogen viel leichter in Abschnitte gleichen Widerstands bezüglich der Biegemomente aufzuteilen.

Soweit uns bekannt, gibt es in der technischen Literatur bis heute keine Berechnung von Bogendachbindern mit zahlreichen Zügen, und deshalb verweilen wir etwas ausführlicher beim theoretischen Teil einer solchen Berechnung. Doch zuvor lösen wir erst die allgemeine Aufgabe bei n Sehnen, und erklären den Rechengang bei drei Zügen. Dieses Vorgehen macht es dem Leser leichter, den algebraischen Lösungsteil bei n Sehnen nachzuvollziehen.

Bogenbinder mit drei Zügen

Definition der Zügespannungen. Abb. 13 stellt schematisch einen einfachen Träger mit drei Zügen dar, dem horizontalen AB und zwei schrägen AC_1 und BC , d.h. mit den 4 Scharnieren A, B, C und C_1 . Die Position der Abschnitte ist symmetrisch, d.h. $AD = BD_1 = a$, $CD = C_1D_1 = h$.

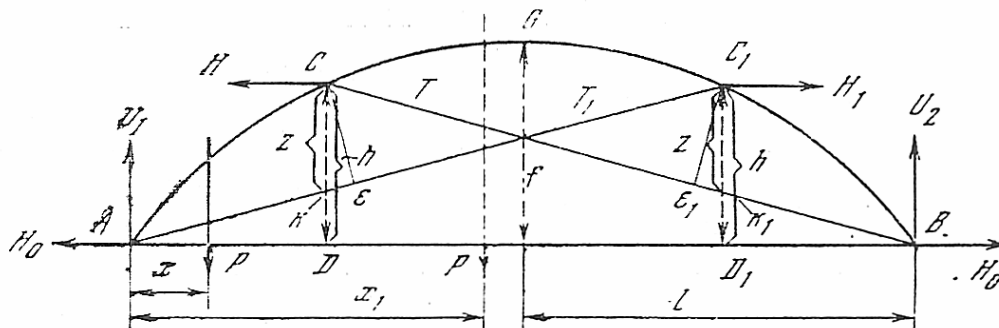


Abb. 13

Für jede auf den Bogen wirkende und auf den Abstand x von der Stütze A angelegte Last P kann man die Spannung der Züge auf der Grundlage der Momentengleichung bestimmen.

Wir bezeichnen mit H_0 die Spannung des Zuges AB , T Spannung des Zuges BC , T_1 Spannung von Zug AC_1 , V_1, V_2 Drücke auf die Stützen A und B . Die Summe der Momente bezüglich Punkt C_1 ergibt

$$V_2 a = T \cdot C_1 E_1 + H_0 \cdot C_1 D_1,$$

bezüglich Punkt C

$$V_2 (2l - a) = T_1 \cdot C E + H_0 \cdot C D.$$

Liegt die Last P zwischen den Verbindungspunkten C und C_1 auf den Abstand x_1 von der Stütze A an, dann ist

$$V_2 a = T \cdot C_1 E_1 + H_0 \cdot C_1 D_1, \quad V_1 a = T_1 \cdot C E + H_0 \cdot C D.$$

Zur Bestimmung der drei Unbekannten T , T_1 und H_0 reichen diese zwei Gleichungen nicht aus. Die dritte Gleichung bezieht man aus der geometrischen Betrachtung der Position der Last P . So ist bei jeder zwischen A und C angelegten Last (siehe Abb. 13) die Spannung $BC - T = 0$, da dann der Bogen ACC_1 zusammengedrückt wird und Punkt C nach rechts ausweicht.

Gleichermaßen betrachtet, können wir den relativen Wert der Spannung der Züge BC und $C_1 A$ in Abhängigkeit von der Position der Last zwischen den Punkten C und C_1 bestimmen. Offensichtlich ist, daß bei Lasten, die zwischen den Punkten C und G anliegen, d.h. an der Bogenspitze, der Zug BC weggelassen werden kann, bzw. gilt für ihn $T = 0$.

Auf dieselbe Weise bestimmen wir auch die Spannung beliebig vieler Züge. Sind n Züge gegeben, dann erhält man immer $(n - 1)$ Momentengleichungen, und die eine Bedingung ergibt sich aus geometrischer Betrachtung der Position der einwirkenden Last.

H und H_1 seien die Horizontalkomponenten der Spannungen T und T_1 ; dann kann man der einfachen Ableitung wegen ersetzen: $T \cdot C_1 E_1 = H \cdot C_1 K_1 = H z, T_1 \cdot C E = H_1 \cdot C K = H_1 z$.

Sind die Kräfte für die Züge ermittelt, dann kann man die Momentengleichung bezüglich eines beliebigen Bogenquerschnitts aufstellen, aus der auch das Biegemoment in diesem Querschnitt bestimmt wird.

Auf einen parabolischen Bogen (Abb. 14) wirke eine gleichmäßig verteilte Last ein, deren Größe auf die Länge der Spannweite gleich p sei. Bei der Berechnung des Dachverbandes führt diese unter der Annahme, die Last erstrecke sich von einer der Stützen bis zur Bogenmitte, z.B. von A bis N . Die Größe dieser Last ist pl , wenn die Spannweite $2l$ beträgt.

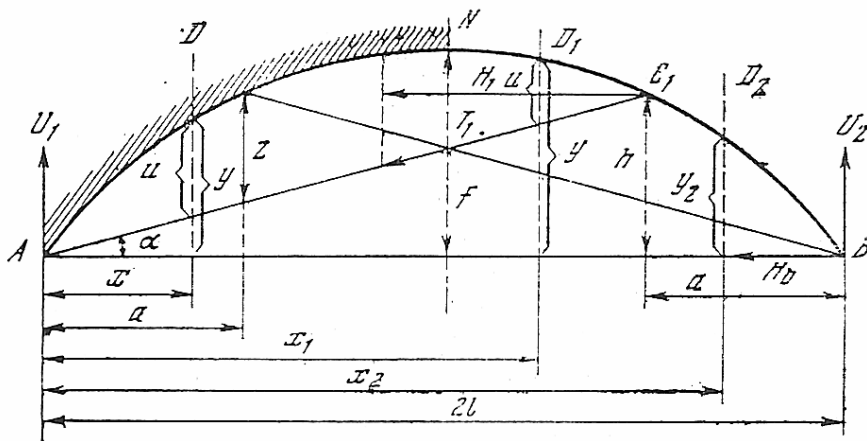


Abb. 14

Die Gleichung der Parabel ANB , bezogen auf den Koordinatenursprung in Punkt A , wurde in Gleichung (5) dargestellt, deshalb erhalten wir (siehe Abb. 14):

$$h = f(2la - a^2)/l^2, \quad z = h - ah/(2l - a) = 2af(l - a)/l^2.$$

Die Drücke auf die Stützen sind $V_1 = 3/4pl$, $V_2 = 1/4pl$.

Bei der von uns angenommenen Position der Last kann der Zug BC entfallen, d.h. $T = 0$.

Wir nehmen den Punkt C_1 als Zentrum der Momente an und schreiben $V_2a = H_0h$, und hieraus

$$H_0 = \frac{1}{4f} \frac{pl^3}{2l - a}. \quad (77)$$

Wir wählen die Momente aller Kräfte im Bogenquerschnitt, der durch den Punkt C verläuft, und ermitteln $V_1a - pa^2/2 = H_0h + H_1z$, und hieraus

$$H_1 = \frac{(V_1 - V_2)a - pa^2/2}{2a(l - a)} \frac{l^2}{f} = \frac{1}{4} p \frac{l^2}{f}, \quad (78)$$

d.h. die Horizontalkomponente der Spannung des Zuges AC bei Verteilung einer gleichmäßigen Last auf dem halben parabolischen Träger hängt nicht von der Größe a ab und ist bei allen Positionen der Züge gleich. Im Grenzfall, wo $a = 0$, d.h. im Falle eines einzigen horizontalen Zuges, wird dessen Spannung bei Belastung des halben Trägers durch dieselbe Gleichung (78) ausgedrückt, die völlig identisch ist mit der von uns am Anfang hergeleiteten Gleichung (6).

Bestimmung der Biegemomente in einem Bogen mit drei Zügen und günstigster Position der Züge. In einem beliebigen Querschnitt D (siehe Abb. 14), der in einem Abstand x von der Stütze A steht und zwischen A und N liegt, d.h. bei x von 0 bis l , ist

$$M = V_1x - px^2/2 - H_1u - H_0y,$$

wobei H_0 und H_1 nach den Gleichungen (77) und (78) gewählt werden, und

$$u = y - hx/(2l - a) = f(2lx - x^2 - ax)/l^2.$$

Wir setzen diese Größen in den Ausdruck für M ein und erhalten nach Transformationen

$$M = 1/4 px(a - x)(la)/(2l - a). \quad (79)$$

Bei $x = 0$ und bei $x = a$ ist $M = 0$.

Im Bogenabschnitt AC liegen die größten Werte des Moments bei $x = a/2$, wie dies auch aus der Gleichung $dM/dx = 0$ hervorgeht.

Beim Querschnitt F (Abb. 15) ist

$$\max M = 1/16 p(a^2l - a^3)/(2l - a). \quad (80)$$

Ab Punkt A , wo $M = 0$, nimmt das Moment bis \max im Punkt F bei $x = a/2$ zu, danach ab, und im Punkt C ist es wieder $M = 0$. Zwischen C und N wird das Mo-

ment negativ, d.h. die Durchbiegung des Bogens erfolgt in umgekehrter Richtung, und im Punkt N , wo $x = l$, ist

$$M_0 = -\frac{1}{4} p(l-a)^2 / (2l-a). \quad (81)$$

Beim Bogenabschnitt C_1N ist das Moment im beliebigen Querschnitt D_1

$$M_1 = V_2(2l-x) - H_0y - H_1u.$$

Gleiche Transformationen wie vorher ergeben

$$M_1 = \frac{1}{4} p \frac{x(a-x)(l-a)}{2l-a} + \frac{p}{2} (l-x)^2, \quad (81.a)$$

wobei x von l bis $(2l-a)$ gilt.

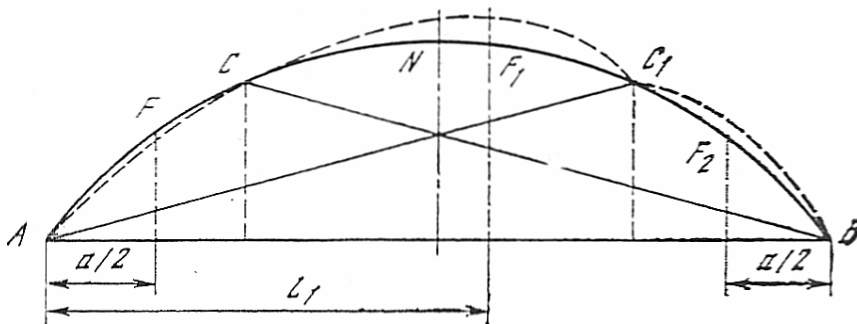


Abb. 15

Im Punkt N , d.h. bei $x = l$, liefert Gleichung (81.a) den Wert M_0 (siehe Gleichung 81)), und bei $x = 2l-a$ $M_1 = 0$.

Den größten Wert M_1 erhalten wir bei

$$x_1 = l_1 = (8l^2 - 5la + a^2) / (6l - 2a),$$

den wir aus der Bedingung $dM_1/dx_1 = 0$ ermitteln. Dann ist im Querschnitt F_1 (Abb. 15)

$$\max M_1 = -\frac{1}{4} p \left(2l^2 + l_1^2 \frac{3l-2a}{2l-a} \right). \quad (82)$$

Gehen wir von N zu C_1 über, erhalten wir folglich ständig einen negativen Wert des Moments; zwischen N und F_1 ergibt sich zuerst eine Zunahme des Moments, danach nimmt sein Wert ab und wird gleich 0 in C_1 bei $x_1 = 2l-a$.

Beim Bogenabschnitt BC_1 liegt das Moment im beliebigen Querschnitt D_2 (siehe Abb. 14) bei

$$M_2 = V_2(2l-x_2) - H_0y_2,$$

wobei sich x von $(2l-a)$ bis $2l$ verändert.

Nach Transformationen sieht die vorhergehende Gleichung folgendermaßen aus:

$$M_2 = -\frac{1}{4} pl(2l-x)(2l-a-x)/(2l-a). \quad (83)$$

Bei $x = 2l-a$ und bei $x = 2l$ ist $M_2 = 0$.

Den größten Wert M_2 erhält man bei $x_2 = 2l - a/2$, den wir aus der Bedingung $dM_2/dx_2 = 0$ ermitteln.

Dann ist im Querschnitt F_2 (Abb. 14)

$$\max M_2 = -\frac{1}{16}pla^2/(2l-a). \quad (84)$$

Im Verlauf des Bogens BC_1 bleibt das Moment folglich negativ; in den Punkten B und C_1 ist es gleich Null, den größten Wert erreicht es im Querschnitt F_2 im Abstand $a/2$ von der Stütze B , d.h. die größten Biegemomente – positiv im Abschnitt AC des parabolischen Trägers und negativ im Abschnitt C_1B – gehören zu den Querschnitten F und F_2 (Abb. 15), die von den Stützen gleich weit entfernt sind.

Die Ausbiegung des Bogens in Abhängigkeit von der Veränderung der von uns untersuchten Momente ist in Abb. 15 als gestrichelte Linie dargestellt.

Bei einem Bogen mit drei Zügen erhalten wir drei Ausdrücke für $\max M$, die durch die Gleichungen (80), (82) und (84) wiedergegeben werden. Es ist unschwer zu erkennen, daß $\max M_2$ immer größer ist als $\max M$.

Für die günstigste Verteilung des Werkstoffs, der den Biegemomenten entgegenwirkt, ist es notwendig, daß die Gleichung

$$\max M_1 = \max M_2 \quad (85)$$

erfüllt wird.

Wir erfüllen diese Bedingung und erhalten

$$a = 0,68l \text{ bzw. } \frac{2}{3}l, \quad (86)$$

wobei

$$\max M_1 = \max M_2 = -0,22pl^2, \quad \max M = +0,0072pl^2. \quad (87), (87.a)$$

Im Falle eines Bogens mit einem einzigen horizontalen Zug, dessen Halbspannweite gleichmäßig belastet ist, werden die Momente durch die Gleichungen (8) und (12) ausgedrückt. Ihr größter Wert wird dabei im Abstand $l/2$ von den Stützen erreicht und war (siehe Gleichungen (11) und (13))

$$\max M_1 = 0,00625pl^2, \quad \max M_2 = -0,00625pl^2.$$

Im Vergleich mit (87) zeigen diese Gleichungen, daß im parabolischen Bogen mit drei ganz günstig positionierten Zügen das rechnerische Biegemoment fast drei mal kleiner ist als bei einem Bogen mit nur einem Zug.

Druckkräfte in Bögen mit drei Zügen und mit einem. Wir untersuchen im einzelnen die Druckkräfte in Bögen:

- 1) bei einer gleichmäßig über die gesamte Bogenlänge verteilten Last $q2l$ und
- 2) bei einer gleichmäßig auf die halbe Spannweitenlänge verteilten einseitigen Last pl .

In Abb. 16 wird der Winkel zwischen der Tangente im beliebigen Punkt D und der Horizontalen bezeichnet mit β und der Winkel zwischen dem Schrägzug und der Horizontalen mit α .

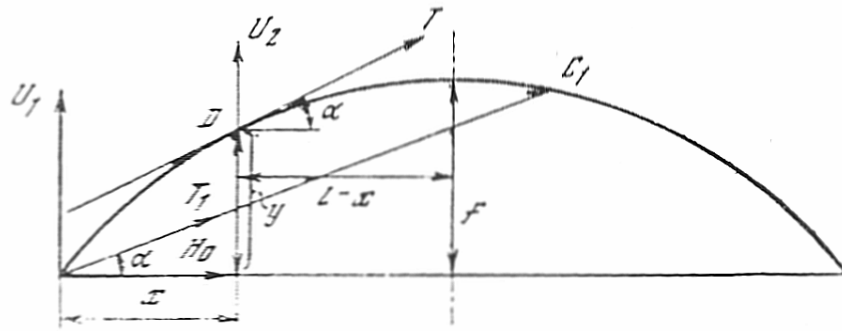


Abb. 16

Die Indizes p und q bei den Kräften bezeichnen desweiteren die Abhängigkeit dieser Kräfte von den Lasten pl und $q2l$.

Die Druckkraft aus der Belastung über die gesamte Spannweite (Abb. 16) ist

$$S_q = V_q \sin \beta + H_{0q} \cos \beta.$$

Die Druckkraft aufgrund einer einseitigen Last ist für die belastete Trägerseite

$$S_p = V_p \sin \beta + H_{0p} \cos \beta + T_p \cos(\alpha - \beta),$$

und für die unbelastete Trägerseite

$$S_p = V_{2p} \sin \beta + H_{0p} \cos \beta.$$

Diese Druckkräfte rufen in den Bogenquerschnitten zusätzliche Spannungen zu den aus den Biegemomenten resultierenden hervor.

In einem Bogen mit drei Zügen wirken die Biegemomente in den zwei Querschnitten F und F_2 (Abb. 15), die von den Stützen im Abstand $a/2$ entfernt sind, und im Querschnitt F_1 , der bei der Bogenspitze liegt. Nur für diese drei Querschnitte müssen auch die Spannungen bestimmt werden, die durch die Druckkräfte hervorgerufen werden.

Aus Gleichung (5) ermittelten wir $\operatorname{tg} \beta = 2f(l-x)/l^2$. Aus Abb. 14 erhielten wir $\operatorname{tg} \alpha = h/(2l-a) = fa/l^2$.

Für den Querschnitt F (siehe Abb. 15) ist bei $x = a/2$ $\operatorname{tg} \beta = f(2l-a)/l^2$. Wir nehmen den Bogenhub mit $1/5$ seiner Spannweite an und erhalten $f = 2/5l$. Wir nehmen danach $a = 2/3l$ und erhalten $\sin \beta = 0,47$; $\cos \beta = 0,882$; $\operatorname{tg} \beta = 0,533$; $\cos \alpha = 0,966$; $\operatorname{tg} \alpha = 0,266$; $\cos(\alpha - \beta) = 0,97$.

Beim Querschnitt F (Abb. 15) ist $V_q = ql - qa/2 = 0,67ql$, $V_p = 3/4pl - pa/2 = 0,42pl$. Gleicherweise ist beim Querschnitt F_2 (Abb. 15) $V_q = 0,67ql$, $V_{2p} = 1/4pl = 0,25pl$. Nach Gleichung (78) ist $T_{1p} = H_{1p} : \cos \alpha = 1/4pl^2/f \cos \alpha = 0,645pl$. Nach Gleichung (77) ist $H_{0p} = 1/4pl^3/f(2l-a) = 0,47pl$.

Nach Gleichung (1) ist $H_{0q} = 1/2ql^2/f = 1,25ql$.

Wir tragen diese Angaben in die Gleichungen der Druckkräfte ein und erhalten für beide Bogenhälften $S_q = 1,415ql$; bei der belasteten Bogenseite ist $S_p = 1,238pl$; bei der unbelasteten Bogenseite ist $S_p = 0,531pl$. Für die Bogenspitze, wo der Winkel $\beta = 0$, erhalten wir $S_q = 1,25ql$, $S_p = 0,47pl + 0,625pl = 1,1pl$.

Die vollständige Druckkraft in den gefährlichen Bogenquerschnitten ist $S = S_p + S_q$.

Für die belastete Bogenseite (Querschnitt F in Abb. 15) erhalten wir

$$S = 1,415ql + 1,238pl. \quad (88)$$

Für die unbelastete Seite (Querschnitt F_2 in Abb. 15) erhalten wir

$$S = 1,415ql + 0,531pl. \quad (89)$$

Für die Bogenspitze (Querschnitt N in Abb. 15) erhalten wir

$$S = 1,25ql + 1,1pl. \quad (90)$$

Da das Biegemoment im Querschnitt F (siehe Abb. 15) wesentlich geringer ist als das Moment im Querschnitt F_2 (siehe Gleichungen (87) und (87.a)), fällt die Summe der Werkstoffspannungen aus Durchbiegung und Druck für den Querschnitt F mit $x = 0,5a$ immer geringer aus als für den Querschnitt F_2 , wo $x = 2l - 0,5a$, und deshalb kann man sich bei der Berechnung des Bogens darauf beschränken, S nur in den Querschnitten N und F_2 in Abb. 15 zu untersuchen. Wenn irgendeine der beiden Größen von S nach den von der Belastung vorgegebenen Bedingungen stark über der anderen liegt, dann ist es in diesem Fall nützlich, die Schrägzüge soweit zu verschieben, daß die Größe S nach den Gleichungen (89) und (90) fast identisch ausfällt.

Im Falle von Bögen mit einem einzigen horizontalen Zug ist das größte Biegemoment dem absoluten Wert nach gleich $\max M = -\frac{1}{16}pl^2$, und wird für Querschnitte erzielt, bei denen $x = l/2$ und $x = 2/3l$ ist. Bei $f = 2/5l$ ist in diesem Fall $\tan \beta = f/l = 0,4$; $\cos \beta = 0,928$; $\sin \beta = 0,372$. Für beide Bogenseiten ist $V_q = 1/2ql$. Für die belastete Bogenseite ist $V_p = 3/4pl - 1/2pl = 1/4pl$, und für die unbelastete $V_p = 1/4pl$.

Nach Gleichung (1) erhalten wir danach $H_q = 1/2ql^2/f = 1,25ql$, und nach Gleichung (6) $H_p = 1/4pl^2/f = 0,025pl$. Dann ist $S_q = 0,5ql \sin \beta + 1,5ql \cos \beta = 1,346ql$; $S_p = 0,25pl \sin \beta + 0,625pl \cos \beta = 0,673pl$

Der volle Druck für die beiden gefährlichen Querschnitte des Bogens mit einem Zug ist $S = 1,346ql + 0,673pl$.

Herleitung der Angaben zur Berechnung von parabolischen Trägern mit 1 und 3 Zügen

Spannweite der Bögen $2l$; Hub $f = 2/5l$; Last über die gesamte Spannweite $q2l$; Last auf die halbe Spannweite pl .

Bogen mit einem Zug. Moment im gefährlichen Querschnitt $\frac{1}{16}pl^2$; Spannung des Horizontalzuges $1,25ql + 0,625pl$; größte Druckkraft im gefährlichen Querschnitt $1,346ql + 0,673pl$.

Bogen mit 3 Zügen (ein horizontaler und zwei Schrägzüge). Die Scharniere befinden sich in einem Abstand von $\frac{2}{3}l$ von der Stütze auf der Horizontalen; größtes Biegemoment $\frac{1}{40}pl^2$; Spannung des Horizontalzuges $1,25ql + 0,47pl$; Spannung der Schrägzüge $0,645pl$; größte Druckkraft im gefährlichen Bogenquerschnitt $1,415ql + 0,532pl$; Druckkraft in der Bogenspitze $1,25ql + 1,1pl$.

Parabolische Träger mit beliebiger Anzahl an Zügen

Bestimmung der Horizontalkomponenten der Spannungen der Züge und der Summe dieser Komponenten. In Abb. 17 ist als Skizze der parabolische Träger dargestellt, dessen Bogen mit jedem Auflagerknoten durch $2n$ Züge verbunden ist. Das Gewicht der Schrägzüge am Träger beträgt $4n$.

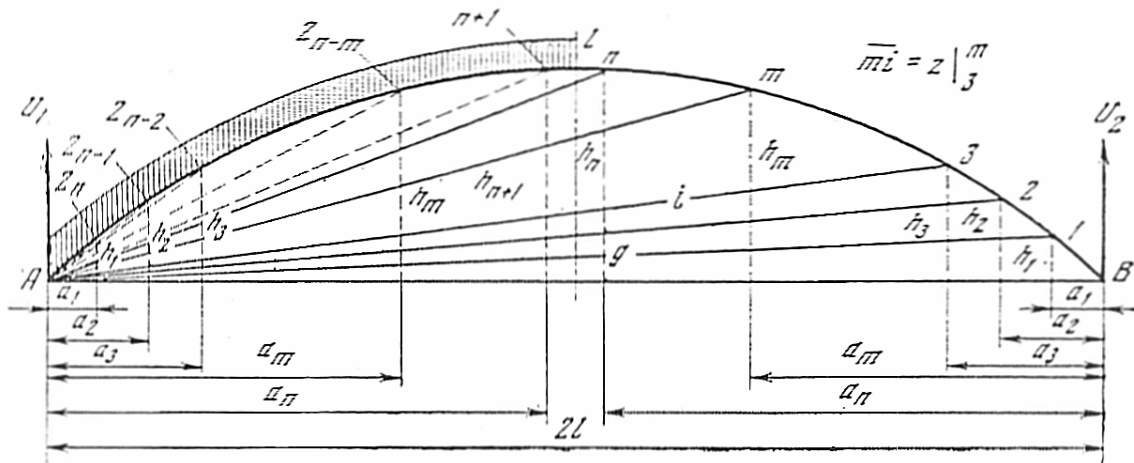


Abb. 17

Die Last verteilt sich von der linken Stütze A bis zur Trägermitte; n Schrägzüge, die den Auflagerknoten A mit der belasteten Bogenseite verbinden, sind gestrichelt gezeichnet, die anderen n Züge, die von A zur unbelasteten Seite verlaufen, sind als durchgehende Linien dargestellt. Die Züge, die den Auflagerknoten B mit $2n$ Punkten des Bogens verbinden, werden in der Zeichnung nicht widergegeben, um sie nicht zu unübersichtlich zu machen⁸. Die Befestigungspunkte oder Knoten der Schrägzüge werden in Abb. 17 mit den Zahlen und Buchstaben $1, 2, 3, \dots, n, n+1, \dots, 2n-1, 2n$ und definieren die Koordinaten folgendermaßen: ihre Ordinaten heißen $h_1, h_2, h_3, \dots, h_n$, wobei sich jede Ordinate zweimal wiederholt, auf der linken und auf der rechten Seite; die Abszissen der Verbindungspunkte $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ für die Züge, bezeichnet mit durchgehenden Linien, die von der Stütze B ausgehen, und für die mit gestrichelten Linien bezeichneten Züge von der Stütze A .

⁸ Bei einseitiger Belastung (siehe Abb. 17) stehen nicht alle Züge, die zur rechten Stütze B verlaufen, unter Spannung, da alle Punkte des Bogens bei einer derartigen Belastung nach rechts verschoben werden; gleichzeitig werden nur jene Züge gedehnt und belastet, die zur Stütze A verlaufen, alle übrigen werden entlastet.

Nach der Parabel-Gleichung (siehe Gleichung (5)) erhalten wir

$$h_m = fa_m(2l - a_m)/l^2. \quad (91)$$

Die Drücke auf die Stützen werden wie oben bezeichnet: V_1 auf die linke, V_2 auf die rechte Stütze. Die Horizontalkomponenten der Spannungen der Schrägzüge sind bezeichnet mit $H_1, H_2, H_3, \dots, H_n, H_{n+1}, \dots, h_{2n}$.

Wie beim Fall mit den drei Zügen, muß man auch hier zum Auffinden der Momente, die die Kräfte der Züge bestimmen, in die Betrachtung die Abschnitte z (siehe Abb. 13) der Ordinaten einbeziehen. Um diese Abschnitte unterscheiden zu können, stellen wir folgende Bedingung auf: der obere Index rechts vom Strich bei z bezeichne den Verbindungspunkt, von dem aus der Abschnitt abgelesen wird, und der untere Index rechts vom Strich bei z die Nummer des Schrägzuges. Somit ist der Abschnitt mi in Abb. 17 für die m -te Auflagerung und den 3. Zug mit $z|_3^m$ zu bezeichnen. Genauso wird nq für die n -te Auflagerung und 1. Zug mit $z|_1^n$ bezeichnet u.s.w. Der Abschnitt mr für die Auflagerung m und den Zug $m - 1$ (Abb. 18) wird geometrisch folgendermaßen bestimmt:

$$z|_{m-1}^m = h_m - h_{m-1} \frac{2l - a_m}{2l - a_{m-1}} = \frac{f}{l^2} (2l - a_m)(a_m - a_{m-1}). \quad (92)$$

Auf dieser Grundlage kann man für denselben Verbindungspunkt m (Abb. 18) und den Zug k den Abschnitt mr_k folgendermaßen schreiben:

$$z|_k^m = \frac{f}{l^2} (2l - a_m)(a_m - a_k).$$

Wir bezeichnen die Spannung des Horizontalzuges mit H_0 , betrachten die Druckmomente V_2 auf die Stütze B hinsichtlich der Auflagerungen $1, 2, 3, \dots, n - 1, n$ der unbelasteten Bogenseite und erhalten folgende Gleichungen:

für Auflagerung 1 (Abb. 17) $V_2 a_1 = H_0 h_1$,

für Auflagerung 2 (Abb. 17) $V_2 a_2 = H_0 h_2 + H_1 z|_1^2$,

für Auflagerung 3 (Abb. 17) $V_2 a_3 = H_0 h_3 + H_1 z|_1^3 + H_2 z|_2^3$,

für Auflagerung m (Abb. 17) $V_2 a_m = H_0 h_m + H_1 z|_1^m + H_2 z|_2^m + \dots + H_{m-1} z|_{m-1}^m$,

für Auflagerung n (Abb. 17) $V_2 a_n = H_0 h_n + H_1 z|_1^n + \dots + H_m z|_m^n + \dots + H_{n-1} z|_{n-1}^n$,

Wir ersetzen die Größen z und $h_1, h_2, h_3, \dots, h_n$ durch ihre Werte nach den Gleichungen (91) und (92) und erhalten folgende n Gleichungen:

für den horizontalen Zug

$$H_0 = V_2 \frac{l^2}{f} \frac{1}{2l - a_1},$$

für den 1. Schrägzug ($A1$ in Abb. 17)

$$H_1 = V_2 \frac{l^2}{f} \frac{a_2}{(2l - a_1)(2l - a_2)},$$

für den 2. Schrägzug (A_2 in Abb. 17)

$$H_2 = V_2 \frac{l^2}{f} \frac{2l(a_2 - a_1)}{(2l - a_1)(2l - a_2)(2l - a_3)},$$

für den 3. Schrägzug

$$H_3 = V_2 \frac{l^2}{f} \frac{2l(a_4 - a_2)}{(2l - a_2)(2l - a_3)(2l - a_4)},$$

für den m -ten Schrägzug (A_m in Abb. 17)

$$H_m = V_2 \frac{l^2}{f} \frac{2l(a_{m+1} - a_{m-1})}{(2l - a_{m-1})(2l - a_m)(2l - a_{m+1})},$$

für den $(n - 1)$ -ten Schrägzug

$$H_{n-1} = V_2 \frac{l^2}{f} \frac{2l(a_n - a_{n-2})}{(2l - a_{n-2})(2l - a_{n-1})(2l - a_n)}.$$

Diese Ausdrücke zeigen, daß die Horizontalkomponente des jeweiligen Schrägzugs des parabolischen Trägers gleich der Konstante $V_2 \frac{l^2}{f} 2l$ ist, multipliziert mit einem

Bruch, bei dem der Zähler gleich der Differenz der Horizontalabstände zwischen dem nächsten Punkt zur jeweiligen Auflagerung der Trägerstütze und zwei, diesem benachbarten Auflagerungen ist, d.h. zum vorhergehenden und darauffolgenden, und bei dem der Nenner gleich dem Produkt der drei Horizontalabstände zwischen der Stütze, dem von der jeweiligen Auflagerung entferntesten und dem Nebengewichtspunkt der drei Züge ist: dem eigentlichen, dem vorhergehenden und dem darauffolgenden.

Man kann leicht erkennen, daß man die Kraftkomponente des 1. Zuges nach dieser allgemeinen Regel auch so schreiben kann:

$$H_1 = V_2 \frac{l^2}{f} 2l \frac{a_2 - a_0}{(2l - a_2)(2l - a_1)(2l - a_0)}.$$

Dieser Ausdruck läßt sich auf den oben angeschriebenen für H_1 reduzieren, wenn man in ihn $a_0 = 0$ einsetzt.

Die tatsächliche Spannung einer jeden Sehne oder Zuges erhält man durch Teilung seiner Horizontalkomponente durch den Kosinus des von Zug und Horizontale gebildeten Winkels.

Beim m -ten Zug (Abb. 1) erhalten wir

$$\cos \alpha_m = \frac{2l - a_m}{\sqrt{(2l - a_m)^2 + h_m^2}} = 1 : \sqrt{1 + \frac{f^2 a_m^2}{l^4}}. \quad (93)$$

Die Summe aller Größen H von H_0 bis H_{n-1} einschließlich wird folgendermaßen bestimmt:

$$\sum_0^{n-1} H = V_2 \frac{2l}{(2l - a_n)(2l - a_{n-1})}. \quad (94)$$

Zur Bestimmung der Größe H für die Züge, die auf der belasteten Bogenseite verlaufen, und gleichermaßen für den n -ten Zug (A_n in Abb. 17) muß man in die Momentengleichung außer dem Moment aus dem Druck V_2 auf die rechte Stütze noch das Moment aus der gleichmäßigen Last einbringen, die zwischen der Trägermitte und dem Punkt aufliegt, der als Momentenzentrum genommen wurde. So muß man z.B. beim n -ten Zug das Moment hinsichtlich des Verbindungspunktes $(n + 1)$ wählen (siehe Abb. 17), dessen Koordinaten die gleichen sind wie beim Punkt n , d.h. h_n und a_n , und man muß das Moment $\frac{1}{2}pl(l - a_n)^2$ aus der gleichmäßigen Belastung auf die Länge $(l - a_n)$ hereinnehmen.

Die Größen der Abschnitte z für alle Punkte der linken Bogenhälfte besitzen einen anderen algebraischen Ausdruck als für die rechte.

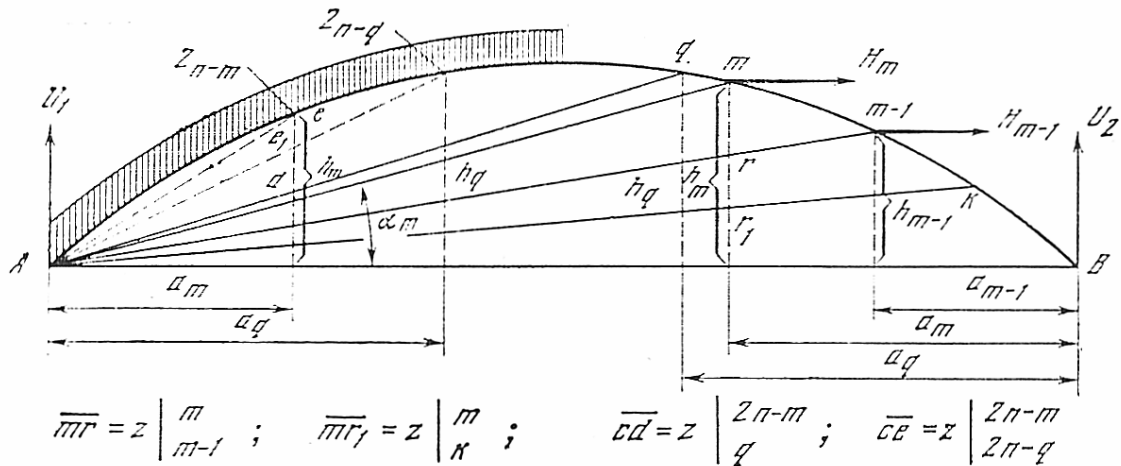


Abb. 18

Wenden wir uns der Zeichnung (Abb. 18) zu und nehmen das $(2n - m)$ -te Auflager mit den Koordinaten a_m und h_m .

Für den beliebigen Zug q (Abb. 18 – Aq) der rechten, unbelasteten Seite haben wir die Koordinaten h_q und a_q , die Größe des Abschnitts ist

$$z \Big|_q^{2n-m} = h_m - a_m h_q \frac{1}{2l - a_q} = \frac{f}{l^2} (2l - a_m - a_q). \quad (95)$$

Für den Zug $(2n - q)$, der von der linken belasteten Seite zum Stützlager A verläuft, haben wir ebenfalls die Koordinaten h_q und a_q , aber die Größe des Abschnitts ist

$$z \Big|_{2n-q}^{2n-m} = h_m - h_q \frac{a_m}{a_q} = \frac{f}{l^2} a_m (a_q - a_m). \quad (96)$$

Bei der Aufstellung der Momentengleichung bezüglich des $(2n - m)$ -ten Auflagers beachten wir, daß die Abszisse des Verbindungspunktes $(n + 2)$ z.B. bereits a_{n-1} ist und daß letzterer Zug in diesem Falle der $(2n - m + 1)$ -te. Dann ist

$$\begin{aligned}
V_2(2l - a_m) &= \frac{f}{l^2} a_m [H_0(2l - a_m) + H_1(2l - a_m - a_1) + \dots + H_{n-1}(2l - a_m - a_{n-1}) + \\
&+ H_n(2l - a_m - a_n) + H_{n+1}(a_n - a_m) + H_{n+2}(a_{n-1} - a_m) + \dots + \\
&+ H_{2n-m+1}(a_{m+1} - a_m) + \frac{p}{2}(l - a_m)^2.
\end{aligned} \tag{97}$$

Jener Teil von Gleichung (97), der die Summe der Kräftemomente der Züge der unbelasteten Seite darstellt, wird auf der Grundlage von Gleichung (94) so transformiert:

$$\begin{aligned}
&\frac{f}{l^2} a_m \{H_0(2l - a_m) + H_1(2l - a_m - a_1) + \dots + H_{n-1}(2l - a_m - a_{n-1})\} = \\
&= \frac{f}{l^2} a_m \left[(2l - a_m) \sum_0^{n-1} H - \sum_0^{n-1} Ha \right] = \\
&= V_2 \frac{a_m}{(2l - a_{n-1})(2l - a_n)} (2l(2l - a_m) - a_{n-1}a_n).
\end{aligned} \tag{98}$$

Dann nimmt Gleichung (97) folgende Gestalt an:

$$\begin{aligned}
V_2 \left[2l - a_m - a_m \frac{2l(2l - a_n) - a_{n-1}a_n}{(2l - a_{n-1})(2l - a_n)} \right] &= \frac{f}{l^2} a_m \{H_n(2l - a_m - a_n) + \\
&+ H_{n-1}(a_n - a_m) + \dots + H_{2n-m+1}(a_{m+1} - a_m)\} + \frac{p}{2}(l - a_m)^2.
\end{aligned} \tag{99}$$

Wir wenden Gleichung (99) auf die Bestimmung von H_n an und wählen das Moment bezüglich des $(n + 1)$ -ten Auflagers mit den Koordinaten h_n und a_n ; dann müssen wir in dieser Gleichung alle Glieder entfernen, die nach H_n als nicht zum Moment bezüglich des $(n + 1)$ -ten Auflagers gehörende in der Klammer stehen; außerdem müssen wir in diesem Fall $a_m = a_n$ annehmen. Dann ist

$$H_n a_n \frac{2f}{l^2} (l - a_n) = V_2 \left[2l - a_n - a_n \frac{2l(2l - a_n) - a_{n-1}a_n}{(2l - a_{n-1})(2l - a_n)} \right] - \frac{p}{2} (l - a_n)^2.$$

Bei Verteilung der Last auf die Halbspannweite ist aber $p = 4V_2/l$, und deshalb erhalten wir schließlich

$$H_n = V_2 \frac{l^2}{f a_n} \left[2l \frac{2l - a_n - a_{n-1}}{(2l - a_n)(2l - a_{n-1})} - \frac{l - a_n}{l} \right]. \tag{100}$$

Wenden wir diese allgemeine Gleichung auf den Einzelfall von drei Zügen an, müssen wir $a_n = a_1$, $a_{n-1} = 0$ setzen und erhalten

$$H_1 = V_2 \frac{l^2}{f a_1} \left(1 - \frac{l - a_1}{l} \right) = V_2 \frac{l}{f} = \frac{1}{4} p \frac{l^2}{f},$$

was völlig mit Gleichung (78) übereinstimmt.

Auf die gleiche Weise finden wir die Größen H auch für die übrigen Züge.

Der gefundene Wert H_n ermöglicht es uns jetzt, die Summe aller H von H_0 bis H_n einschließlich zu bestimmen, indem wir die Gleichungen (94) und (100) benutzen:

$$\sum_0^n H = V_2 \frac{l}{f} \frac{3l - a_n}{2l - a_n}, \quad (101)$$

$$\sum_0^n Ha = V_2 \frac{l}{f} a_n. \quad (102)$$

Wir wenden Gleichung (99) auf das $(n + 2)$ -te Auflager an, dessen Koordinaten a_{n-1} und h_{n-1} sind und erhalten H_{n+1} aus dem Ausdruck

$$V_2 \left[2l - a_{n-1} - a_{n-1} \frac{(2l - a_{n-1})(3l - a_n)}{l(2l - a_n)} + \frac{a_n a_{n-1}}{l} \right] - \frac{p}{2} (l - a_n)^2 = H_{n+1} \frac{f}{l^2} a_{n-1} (a_n - a_{n-1}),$$

und hieraus

$$H_{n+1} = V_2 \frac{l}{f} \frac{l - a_n}{2l - a_n}, \quad (103)$$

$$\sum_0^{n+1} H = 2V_2 \frac{l}{f} = \frac{pl^2}{2f}, \quad (104)$$

$$\sum_1^n Ha + H_{n+1}(2l - a_n) = V_2 \frac{l^2}{f}. \quad (105)$$

Wir wenden Gleichung (99) auf das $(n + 3)$ -te Auflager an, dessen Koordinaten a_{n-2} und h_{n-2} sind und erhalten

$$V_2 \left[2l - a_{n-2} - 2a_{n-2} \frac{2l - a_{n-2}}{l} + a_{n-2} \right] - \frac{p}{2} (l - a_{n-2})^2 = H_{n+2} a_{n-2} (a_{n-1} - a_{n-2}).$$

Hieraus erhalten wir

$$H_{n+2} = 0. \quad (106)$$

Auf die ganz gleiche Weise ermitteln wir, daß alle übrigen Werte von H_{n+3} , H_{n+4} , H_{n+5} u.s.w. gleich Null sind. Folglich ist das Einbringen von noch so vielen Zügen in den Zwischenraum zwischen den Verbindungspunkten $n + 1$ und A sinnlos, wenn die Last auf der linken Halbspannweite gleichmäßig verteilt ist. Bei anderer Lastverteilung ändern sich in den oben angegebenen Gleichungen lediglich die Relationen zwischen p und V_2 , die allgemeine Form der Gleichungen, die die Spannung eines beliebigen Zuges bestimmen, bleibt jedoch gleich.

Wir vergleichen die Gleichungen (104) und (1) und sehen, daß die Summe der Horizontalprojektionen der Spannungen aller Züge bei einseitiger Belastung gleich jener Spannung ist, welcher ein einziger Horizontalzug im Fall eines parabolischen Trägers hätte, der gleichmäßig über die gesamte Spannweite mit derselben Last p auf die Spannweiten-Längeneinheit wie bei einseitiger Belastung belastet wird.

Beim Wert $a_n = l$ nach Gleichung (103) sehen wir, daß

$$H_{n+1} = 0, \quad (107)$$

d.h. wenn die Spitze des parabolischen Bogen eines der Auflager zur Befestigung der Züge am Träger ist, dann ist der letzte der von rechts zum linken Stützlager ver-

laufenden Züge jener Zug, der zur Bogenspitze geht. In diesem Fall liefert Gleichung (101)

$$\sum_0^n H = V_2 \frac{2l}{f} = p \frac{l^2}{2f}. \quad (108)$$

Im Falle eines Bogens mit drei Zügen erhalten wir bei $a = l$ nach den Gleichungen (77) und (78)

$$\sum_0^1 H = H_0 + H_1 = pl^2 / f. \quad (109)$$

Ein Vergleich der Gleichungen (104), (108) und (109) zeigt, daß die Summe der Horizontalprojektionen der Spannungen in den Zügen nicht von der Anzahl der Schrägzüge abhängt, die vom Stützlager des parabolischen Trägers ausgehen. Die Bestimmung der Anzahl an Schrägzügen muß wie bei der Bestimmung der Felderzahl in geraden Trägern in Abhängigkeit von der ausgemachten Größe der Biegemomente im Bogen getroffen werden.

Bestimmung der Biegemomente im Bogenquerschnitt. Die Größe der Biegemomente und ihr \max für die verschiedenen Bogenabschnitte bei beliebiger Anzahl an Zügen wird auf die gleiche Weise bestimmt wie im Falle von drei Zügen.

Wir nehmen den Koordinatenursprung in Punkt B (siehe Abb. 17) an und erhalten zwischen den Verbindungspunkten B und 1

$$\begin{aligned} M_1 &= V_2 x - H_0 y = V_2 x - V_2 (2lx - x^2) / (2l - a_1), \\ M_1 &= -V_2 x (a_1 - x) / (2l - a_1). \end{aligned} \quad (110)$$

Bei $x = a_1$ und $x = 0$ ist $M_1 = 0$. Der größte Wert von M_1 tritt auf bei $x = a_1/2$, bestimmt aus der Bedingung $dM_1/dx = 0$,

$$\max M_1 = -\frac{V_2}{4} \frac{a_1^2}{2l - a_1}. \quad (111)$$

Zwischen den Verbindungspunkten 1 und 2 (Abb. 17) ermitteln wir bei Veränderung von x von a_1 bis a_2

$$\begin{aligned} M_2 &= V_2 x - H_0 y - H_1 \left(y - h_1 \frac{2lx - x}{2l - a_1} \right), \\ M_2 &= -V_2 2l \frac{(a_1 - x)(a_2 - x)}{(2l - a_1)(2l - a_2)}. \end{aligned} \quad (112)$$

Bei $x = a_1$ und $x = a_2$ ist $M_2 = 0$. Der größte Wert von M_2 ergibt sich aus der Bedingung $dM_2/dx = 0$, die $x = (a_2 - a_1)/2$ liefert,

$$\max M_2 = -V_2 \frac{l}{2} \frac{(a_2 - a_1)^2}{(2l - a_1)(2l - a_2)}. \quad (113)$$

Auf dieselbe Weise ermitteln wir zwischen den Verbindungspunkten 2 und 3 für den Querschnitt, der auf dem halben horizontalen Abstand zwischen ihnen liegt,

$$\max M_3 = -V_2 \frac{l}{2} \frac{(a_3 - a_2)^2}{(2l - a_3)(2l - a_2)}.$$

Analog finden wir für den m -ten Bogenabschnitt zwischen seinen Verbindungspunkten $(m - 1)$ und m

$$\max M_m = -V_2 \frac{l}{2} \frac{(a_m - a_{m-1})^2}{(2l - a_m)(2l - a_{m-1})}. \quad (114)$$

Im letzten nicht belasteten Bogenabschnitt ermitteln wir schließlich zwischen seinen Verbindungspunkten $(n - 1)$ und n

$$M_n = V_2 2l \frac{(x - a_n)(x - a_{n-1})}{(2l - a_n)(2l - a_{n-1})}. \quad (115)$$

Bei $x = a_n$ und $x = a_{n-1}$ ist $M_n = 0$, und folglich ist

$$\max M_n = -V_2 \frac{l}{2} \frac{(a_n - a_{n-1})^2}{(2l - a_n)(2l - a_{n-1})}. \quad (116)$$

Gleichung (116) zeigt, daß das größte Moment in einem beliebigen Abschnitt der unbelasteten Seite des parabolischen Bogens gleich der Konstante $V_2 l / 2$ ist, multipliziert mit dem Bruch, dessen Zähler die Differenz der Horizontalabstände der Verbindungspunkte des untersuchten Bogenabschnittes und seiner nächsten Stütze im Quadrat ist, und dessen Nenner ausgedrückt wird durch das Produkt der Horizontalabstände der Verbindungspunkte dieses Abschnitts von seiner weitestentfernten Stütze.

Wir bieten hier eine graphische Darstellung des maximalen Moments zwischen zwei angenommenen Verbindungspunkten $(m - 1)$ und m (Abb. 19). Nach den Eigenschaften der Parabel entspricht Punkt e (Abb. 19), der in der Mitte des Horizontalabstands zwischen den Verbindungspunkten liegt, auch dem größten Stich oo_1 des Parabelbogens. \max des Moments zwischen diesen Punkten wird graphisch dargestellt durch das Produkt von Stich oo_1 mit der Projektion des Druckes V_2 , ausgerichtet auf die Sehne $(m, m - 1)$.

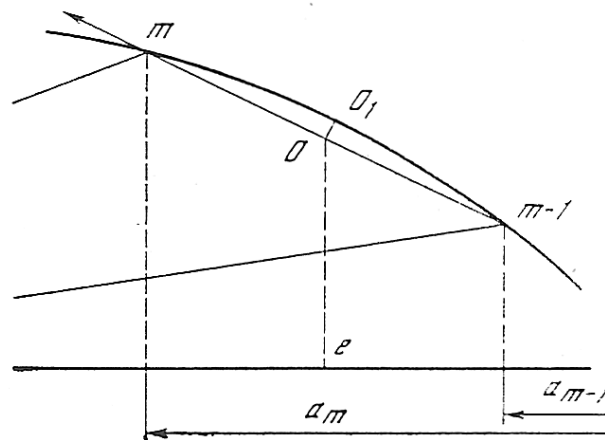


Abb. 19

Alle Momente der unbelasteten Bogenseite sind negativ. Dies weist darauf hin, daß alle Abschnitte der untersuchten Bogenhälfte ihren Krümmungsradius nach Belastung verringern.

Im Bogenabschnitt zwischen den Verbindungspunkten n und $(n - 1)$ erhalten wir zwei verschiedene Ausdrücke: einen rechts von der Bogenspitze l (Abb. 17), den anderen links davon, wo zu den Einwirkungskräften auch die gleichmäßige Last auf den Bogen hinzukommt.

Zwischen den Punkten n und l (Abb. 17) erhalten wir bei Veränderung x von $x = a_n$ bis $x = l$

$$M_{n+1} = \frac{V_2}{l} \frac{x - a_n}{2l - a_n} [lx - (2l - x)(2l - a_n)] \quad (117)$$

Den größten Wert dieses Moments erhalten wir, wenn

$$x = (4l^2 + la_n - a_n^2)/(6l - 2a_n). \quad (118)$$

Der Ausdruck M_{n+1} selbst wie auch der \max Moment entsprechende Wert x hängen nicht von der Anzahl der Züge ab und sind mit denen identisch, die für den Fall von drei Zügen ermittelt wurden. Dort wurde der Koordinatenursprung in Punkt A angesetzt, und folglich muß man zum Vergleich der Ergebnisse in den Gleichungen (117) und (118) $2l - x$ anstelle von x einsetzen.

Wir wollen hier anmerken, daß bei mehr als zwei Schrägzügen der Abschnitt a_n so nahe an l herankommt, daß man ohne besondere Berechnungsfehler $x = l$ anstelle jener Größe annehmen darf, die Gleichung (118) liefert. Dann ist

$$\max M'_{n+1} = -V_2(l - a_n)^2 / (2l - a_n). \quad (119)$$

Zwischen den Punkten l und $(n - 1)$ in Abb. 17 wird das Moment folgendermaßen ausgedrückt:

$$M''_{n+1} = M'_{n+1} - \frac{P}{2}(x - l)^2,$$

wobei in dieser Gleichung x sich von $x = l$ bis $x = 2l - a_n$ verändert. Wir setzen in diesen Ausdruck

$$V_2 = \frac{1}{4}pl$$

ein und erhalten

$$M''_{n+1} = \frac{V_2}{l} \left[lx \frac{x - a_n}{2l - a_n} - 2(x - l)^2 - (2l - x)(x - a_n) \right]. \quad (120)$$

Man kann unschwer erkennen, daß dieser Ausdruck des Moments unter Beibehaltung des negativen Werts von der absoluten Größe her stetig abnimmt, und bei $x = 2l - a_n$ ist $M''_{n+1} = 0$.

Würde der $(n + 1)$ -te Zug nicht eingezogen, dann würde das Moment auf der gesamten linken Bogenhälfte von Punkt l bis A durch Gleichung (120) ausgedrückt,

seine größte wäre ständig positiv und bei $x = 2l$ wäre $M_{n+1}'' = 0$. Der größte positive Wert dieses Moments betrüge dann bei $x = 2l - a_n/2$

$$\max M_{n+1}'' = + \frac{V_2}{4l} a_n^2 \frac{l - a_n}{2l - a_n}, \quad (121)$$

d.h. dieses \max Moment hinge im Falle des Fehlens des $(n + 1)$ -ten Zuges überhaupt nicht von der Zugzahl ab und wäre vollkommen identisch mit jenem, den wir im Falle von drei Zügen erhalten (siehe Gleichung (80)).

Haben wir jedoch den $(n + 1)$ -ten Zug, dann schreiben wir für jeden Querschnitt c (Abb. 18) zwischen den Verbindungspunkten $(n + 1)$ und A unter Verwendung von Gleichung (96)

$$M_{n+2} = M_{n+1}'' - H_{n+1} \frac{f}{l^2} (2l - x)(a_n - 2l + x) = 0, \quad (122)$$

d.h. wenn es den $(n + 1)$ -ten Zug gibt, erfährt der gesamte von der $(n + 1)$ -ten Sehne gespannte Bogen keine Einwirkung von Biegemomenten.

Bestimmung der günstigsten Positionierung der Züge des Bogenträgers und seiner rechnerischen Momente. Für eine richtige Einteilung des Werkstoffs und zur Ermittlung des kleinstmöglichen Gewichts des Trägers ist es notwendig, die Summe der Werkstoffspannungen aufgrund der Druckkraft und des größten Biegemoments aller Bogenabschnitte zwischen seinen Verbindungspunkten gleich ausfallen zu lassen. Aber da die Druckkräfte bei geringen Gewölbehöhen nur gering voneinander abweichen, ist es für die Lösung des Problems in erster Näherung ausreichend, die Positionierung der Züge unter der Bedingung einer Gleichheit der größten Momente zu bestimmen, d.h. $\max M_1 = \max M_2 = \dots = \max M_{n+1}$, was eine Reihe der folgenden Gleichungen ergibt:

$$\begin{aligned} \frac{a_1^2}{2(2l - a_1)} &= \frac{(a_2 - a_1)^2}{(2l - a_1)(2l - a_2)} = \frac{(a_3 - a_2)^2}{(2l - a_2)(2l - a_3)} = \dots = \\ &= \frac{(a_n - a_{n-1})^2}{(2l - a_{n-1})(2l - a_n)} = 2 \frac{(l - a_n)^2}{2l - a_n}. \end{aligned} \quad (123)$$

Besitzt der Bogen über seine gesamte Länge einen einheitlichen Querschnitt, dann hat man bei der Wahl der Größen a_1, a_2, a_3 u.s.w., die die Bedingung (123) erfüllen, beim Abrunden der Zahlen solche Werte zu nehmen, bei denen die Momente für die Bogenabschnitte bei der Stütze B und im Mittelteil des Trägers gleich bleiben und das Moment M_{n+1} an der Bogenspitze nur etwas kleiner ist als die übrigen Maximalmomente, da die wahre Größe von $\max M_{n+1}$ größer als jene ist, die die näherungsweise Gleichung (119) liefert.

Die genaue Lösung der aus Bedingung (123) ermittelten Gleichungen macht allerlei algebraische Schwierigkeiten. Zum Zwecke der praktischen Berechnung jedoch können die Angaben, die den wahren sehr nahe kommen, durch folgendes Verfahren ermittelt werden: wir geben die Anzahl der Züge n für den Halbträger vor, die vom Verbindungspunkt A ausgehen, und nehmen an, daß

$$A_n = l2n / (2n + 1). \quad (124)$$

Dann ermitteln wir nach Gleichung (119) den absoluten Wert

$$\max M_n = \frac{V_2 l}{2(n+1)(2n+1)} = \frac{pl^2}{8} \frac{1}{(n+1)(2n+1)}. \quad (125)$$

Danach bestimmen wir a_{n-1} aus der Gleichung

$$2(l - a_n)^2 / l = (a_n - a_{n-1})^2 / (2l - a_{n-1}). \quad (125)$$

Nach der ermittelten Größe a_{n-1} ergibt sich auf ähnliche Weise auch a_{n-2} u.s.w. bis a_1 . Im Ergebnis erhalten wir mit einer solchen Berechnung die gleichen Momente von M_{n+1} bis M_2 , und lediglich das Moment M_1 , das nach Gleichung (111) berechnet wird, ist kleiner als die übrigen. Wegen M_1 kann man danach alle Momente bis M_n etwas kleiner ausfallen lassen. Dieses Lösungsverfahren der Gleichungen (123) führt zu folgenden Ergebnissen:

Bei $n = 2$ (am Bogen 4 Schrägzüge und 1 horizontaler) ist $a_2 = 0,81l$; $a_1 = 0,45l$. Die rechnerischen Momente sind

$$M_1 = M_2 = M_3 = \frac{1}{120} pl^2. \quad (127)$$

Bei $n = 3$ ermitteln wir $a_3 = 0,86l$; $a_2 = 0,625l$; $a_1 = 0,335l$. Die rechnerischen Momente sind

$$M_1 = M_2 = M_3 = M_4 = \frac{1}{224} pl^2. \quad (128)$$

Bei $n = 4$ erhalten wir $a_4 = 0,89l$; $a_3 = 0,72l$; $a_2 = 0,51l$; $a_1 = 0,27l$. Die rechnerischen Momente sind

$$M = \frac{1}{360} pl^2. \quad (129)$$

Bei $n = 5$ erhalten wir $a_5 = 0,91l$; $a_4 = 0,766l$; $a_3 = 0,605l$; $a_2 = 0,425l$; $a_1 = 0,22l$. Die rechnerischen Momente sind

$$M = \frac{1}{528} pl^2. \quad (130)$$

Bei $n = 1$, d.h. im Falle eines Bogens und drei Zügen, liefert Gleichung (124) $a_n = l2n / (2n + 1) = \frac{2}{3}l$, was Gleichung (86) entspricht.

Nach Gleichung (55) ist in geraden Trägern die Abhängigkeit des rechnerischen Moments von der Feldzahl mit $M = \frac{1}{8n^2} ql^2$ gegeben. Es sei $M : ql^2 = N$. Wir nehmen $p = \frac{1}{3} q$ an und erhalten die Werte der Biegemomente für den geraden und den Bogenbinder bei gleicher Felderzahl in folgender Form:

Felderzahl	$n =$	2	3	4	5
Bogenbinder	$N =$	$\frac{1}{360}$	$\frac{1}{672}$	$\frac{1}{1080}$	$\frac{1}{1584}$
Gerader Träger	$N =$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{72}$	$\frac{1}{128}$	$\frac{1}{200}$

Diese Tabelle zeigt, daß bei ein und derselben Felder- und Zügezahl das Biegemoment beim Bogenbinder im Durchschnitt acht mal kleiner ausfällt als beim geraden Träger.

Die ermittelten Werte des Biegemoments bestimmen die Abmessungen des Bogenquerschnitts, die über die gesamte Bogenlänge gleich ausfallen. Das positive Moment $\max M''_{n+1}$, bestimmt nach Gleichung (121) für die unbelastete Bogenseite bei Fehlen des $(n + 1)$ -ten Zuges, ist nach dem absoluten Wert geringer als $\max M'_{n+1}$, das nach Gleichung (119) berechnet wird. Bei geringer Zügezahl muß man in den Ausdruck $\max M'_{n+1}$ (in Gleichung 119)) eine Korrektur einfügen, indem man die Abszisse seines Querschnitts genauer nach Gleichung (118) bestimmt und das Moment nach Gleichung (117). Verläuft der $(n + 1)$ -te Zug durch die Bogenspitze, dann ist $a_n = l$, und nach den Gleichungen (119) und (121) ermitteln wir $\max M'_{n+1} = \max M''_{n+1} = 0$, und nach Gleichung (116) erhalten wir

$$\max M_n = -\frac{V_2}{2} \frac{(l - a_{n-1})^2}{2l - a_{n-1}}.$$

Dann ist das oben aufgezeigte Lösungsverfahren für die Gleichungen (123) nicht anwendbar. In diesem Fall darf man wie auch bei der näherungsweise Lösung mit ziemlicher Genauigkeit

$$\frac{V_2}{2} \frac{(l - a_{n-1})^2}{2l - a_{n-1}} = V_2 \frac{l}{4n^2}$$

annehmen und hieraus a_{n-1} bestimmen und seinen Wert in die Gleichung $(a_{n-1} - a_{n-2})^2 / (2l - a_{n-1})(2l - a_{n-2}) = l/2n^2$ einsetzen, aus dem man a_{n-2} ermitteln kann. Dieses Verfahren zur Lösung der Gleichungen (123) ergibt

bei $n = 2$ $a_1 = 0,586l$, $a_2 = l$, $\max M = \max M_1 = M_2 = V_2l/16 = V_2l/(4 \times 2^2)$;

bei $n = 3$ $a_1 = 0,415l$, $a_2 = 0,74l$, $\max M = V_2l/36 = V_2l/(4 \times 3^2)$;

bei $n = 4$ $a_1 = 0,32l$, $a_2 = 0,58l$, $a_3 = 0,81l$, $a_4 = l$, $\max M = V_2l/64 = V_2l/(4 \times 4^2)$.

Bei einseitiger Belastung ist $V_2 = 1/4pl$.

Folglich ist im Falle von n Zügen, von denen der letzte durch die Spitze verläuft, auf der nicht belasteten Seite $\max M = 1/16pl/n^2$.

Im rechtwinkligen Dachverband, wo jede Trägerhälfte in n Felder zerfällt, ist für jedes Feld (siehe Gleichung (55)) $\max M = 1/8q_0l^2/n^2$, wobei $q_0 = q + p$.

Druckkräfte. Die Druckkräfte für einen Träger mit beliebiger Zahl an Zügen wird wie im Falle eines Bogens mit drei Zügen auf gleiche Weise in denjenigen Querschnitten bestimmt, wo die größten Biegemomente auftreten.

Der größte Druck aufgrund einseitiger Belastung, hervorgerufen an der Bogenspitze, ist gleich der Summe der Horizontalkomponenten der Spannungen von n Zügen und wird berechnet nach Gleichung (101):

$$S = V_2 \frac{l}{f} \frac{3l - a_n}{2l - a_n}.$$

Zugunsten der Festigkeit nehmen wir $a_n = l$ an und erhalten

$$S_p = 2V_2 l / f = pl^2 / 2f, \quad (131)$$

d.h. der größte Druck aus der Einwirkung einer einseitigen Last verläuft so, als ob eine Last über die gesamte Spannweite mit derselben Lastgröße auf die Längeneinheit vorhanden wäre (siehe Gleichung (1)). Wir fügen dieser Größe auch den Druck aus der gleichmäßig über die gesamte Spannweite verteilten Last $2lq$ hinzu und erhalten den vollen Druck in der Bogenspitze aus beiden Lasten mit

$$S = (p + q)l^2 / 2f. \quad (132)$$

Bei den in der Praxis vorkommenden Relationen von p und q übersteigt der Druck im Querschnitt $\max M_1$ die durch Gleichung (132) bestimmte Größe nicht.

Der Druck ist im belasteten Bogenabschnitt größer als im unbelasteten, doch dafür ist dort das Moment geringer, und die Werkstoff-Gesamtspannung übersteigt bei gleicher Bogenquerschnittsgröße über seinen gesamten Verlauf auf der belasteten Seite nicht den im unbelasteten Abschnitt.

Der größte Druck an der Stütze A , wo das Moment gleich 0, ist

$$\frac{ql^2}{2f} \cos \alpha + ql \sin \alpha = \frac{ql^2}{2f} \sqrt{1 + 4 \frac{f^2}{l^2}}, \quad (133)$$

da aus Gleichung (5) $\operatorname{tg} \alpha = 2l(l - x)/l^2$, und in der Nähe der Stütze, wo $x = 0$, ist $\operatorname{tg} \alpha = 2fl$.

Herleitung der Angaben zur Berechnung eines Bogens mit beliebiger Anzahl an Zügen

Züge gesamt $(2n + 1)$, wobei einer von ihnen horizontal verläuft, konstante Belastung auf die gesamte Spannweite $q_0 2l$, einseitige Belastung auf die Halbspannweite pl .

Bei der Wahl der Anzahl der Züge, die eine jede Bogenhälfte mit der gegenüberliegenden Bogenstütze verbinden, muß man sich nach folgenden Angaben richten:

Länge der Spannweite	Anzahl n
Unter 3 Sazhen (6 m)	Keine Schrägzüge 1 Zug 2 Züge 3 Züge
Von 3 bis 5 Sazhen (bis 10 m)	
Von 5 bis 8 Sazhen (bis 16 m)	
Von 8 bis 12 Sazhen (bis 24 m)	

Bei größeren Spannweiten über 12 Sazhen muß man für alle weiteren 3 Sazhen 1 Zug vorsehen.

Bei einer Zugzahl $n \geq 2$ kann der Wert des rechnerischen Biegemoments mit einer für die praktischen Berechnungen ausreichenden Genauigkeit nach der Gleichung (125) bestimmt werden mit

$$M = \frac{pl^2}{8} \frac{1}{(n+1)(2n+1)}.$$

Die Spannung des Horizontalzuges ist

$$H_0 = \frac{l^2}{f} \left(\frac{q_0}{2} + \frac{p}{4} \frac{l}{2l-a_1} \right).$$

Die Spannung eines beliebigen Schrägzuges, der den m -ten Verbindungspunkt mit der Stütze verbindet, ist

$$\frac{H_m}{\cos \alpha_m} = \frac{pl^2}{4f} \frac{2l(a_{m+1} - a_{m-1})}{(2l - a_{m-1})(2l - a_m)(2l - a_{m+1})} \sqrt{1 + \frac{f^2}{l^4} a_m^2}.$$

Die Spannung des n -ten Zuges neben der Bogenspitze ist

$$\frac{H_n}{\cos \alpha_n} = \frac{pl^2}{4f} \frac{1}{a_n} \left[2l \frac{2l - a_n - a_{n-1}}{(2l - a_n)(2l - a_{n-1})} - \frac{l - a_n}{l} \right] \sqrt{1 + \frac{f^2}{l^4} a_n^2}.$$

Der Druck in der Bogenspitze ist $(p + q_n)l^2/f$.

Der Druck bei den Bogenstützen ist $\frac{q_0 l^2}{2f} \sqrt{(1+4) \frac{f^2}{l^2}}$.

Gewicht eines Bogenbinders mit $(2n + 1)$ Zügen. Wir setzen voraus, der Gewölbebogen und sein Horizontalzug seien auf eine gleichmäßige Last $q_0 + p = q$ ausgelegt, d.h. eine Belastung mit der Größe p auf die laufende Längeneinheit sei ebenfalls gleichmäßig über die gesamte Spannweite verteilt. Unter einer solchen Voraussetzung ergibt sich das Bogengewicht am getreuesten.

Die Summe der Spannungen der Schrägzüge unter Einfluß einer einseitigen Last pl nehmen wir gleich der größten Summe der Horizontalkomponenten aller Züge an (siehe Gleichung (108)), d.h. $pl^2/2f$. Die durchschnittliche Länge der Schrägzüge nehmen wir gleich $1,5l$ an, was größer als der tatsächliche Wert ist. Dann ist das

Gewicht von n Zügen $\frac{\gamma}{k} \frac{3}{4} p \frac{l^3}{f}$.

Unter solchen Voraussetzungen ergibt sich nach den Gleichungen (49) und (69) das Gewicht des bogenförmigen Halbträgers ohne des für den Widerstand der Bruchmomente durch die Züge berechneten Werkstoffs

$$V_a = \Phi \left[1 + \frac{3}{2} \frac{p}{q} + \beta \left(1 + 4 \frac{f^2}{l^2} \right) \right]. \quad (134)$$

Wir nehmen für die Relation $p/q = 1/3$ an und erhalten

$$V_a = \Phi \left[1,5 + \beta \left(1 + 4 \frac{f^2}{l^2} \right) \right]. \quad (135)$$

Zum Vergleich des Gewichts eines bogenförmigen mit einem geraden Träger nehmen wir für letzteren einen Träger der 2. Klasse an (siehe Gleichung (47)), bei großer Felderzahl, z.B. bei $n = 8$, als wirtschaftlichstem aller übrigen geraden Träger. Ein solcher Vergleich ist für den bogenförmigen Träger am ungünstigsten.

Wie bereits früher, nehmen wir an, $f/l = 1/2,5$; $\beta = 1,5$; $r = 1,077$; $r^2 = 1,16$.

Das Gewicht des bogenförmigen Trägers ist dann

$$V_a = \frac{\gamma}{k} q l^3 1,25 (1,5 + 2,46) = \frac{\gamma}{k} q l^3 1,25 \cdot 3,96. \quad (136)$$

Das Gewicht des rationellen Trägers der 2. Klasse bei $n = 8$ ist

$$V_{gerade} = \frac{\gamma}{k} q l^3 1,25 (2,74 + 2,23) = \frac{\gamma}{k} q l^3 1,25 \cdot 5,03, \quad (137)$$

d.h. die Relation der Gewichte des Werkstoffs, der für Druck und Zug eines bogenförmigen Trägers und eines rationellen geraden Trägers 2. Klasse bei einer Felderzahl von 8 aufgewandt wird, macht fast $4/5$ aus, d.h. letzterer ist 25 % schwerer als ein Bogenbinder.

In Bezug auf den Werkstoff, der für den Widerstand der Biegemomente aufgewandt wird und gleichermaßen auf die Verbindung der Abschnitte, sind Bogenbinder nachweislich wesentlich leichter als gerade Träger.

In bogenförmigen Trägern mit Schrägzügen fällt der Querschnitt dieser Züge sehr gering aus ($3/8$ bis $5/8$ Zoll) und – wie oben aufgezeigt wurde – wird zur Verbindung der Züge mit dem Bogen eine ganz einfache Verbindung benutzt, die entweder aus einer Öschraube zur Befestigung des gebogenen Zugendes oder aus einer einfachen Öse besteht, mit der der Zug ausläuft, wobei diese Öse in einem in den Bogenkörper gebohrtem Loch steckt.

Werkstoffmenge und Arbeitsaufwand für eine solche Verbindung sind sehr gering, und bei der Gewichtsrechnung werden sie durch die überschüssigen Kräfte und Länge der Züge abgedeckt, die bei der Berechnung des In-Etwa-Gewichts von Gewölben zulässig ist. Wenig Werkstoff, doch dafür viel wertvolle Arbeit werden verbraucht für die Herstellung von Verschlüssen, die zur Befestigung der Sehnen nach ihrer Montage dienen, und außerdem wird ein beträchtlicher Anteil an Werkstoff aufgewandt für Eisendraht zum Abhängen der Züge, damit ein Durchhängen derselben vermindert wird.

Hält man es für möglich, die Anzahl der Schrägzüge ohne besondere Zunahme an Werkstoff- und Zeitaufwand zu erhöhen, kann man die Biegemomente wesentlich verringern und damit auch das Gewicht des Bogens.

Aus den vorhergehenden Schlußfolgerungen ergibt sich ganz klar, daß der Hauptnutzen von Bögen, im Vergleich mit geraden Trägern, in der Verringerung der Biegemomente besteht. Daraus wiederum ergibt sich die Notwendigkeit, in Längsrichtung des Bogendaches Dachsparren einzubauen, die das Dachmaterial tragen, d.h. Unterzüge zu vermeiden, da eine von den Dachsparren übertragene gleichmäßige Belastung bei der Verwendung von Unterzügen zu Biegemomenten in den Unterzügen führt. Letztere wiederum übertragen die auf sie ausgeübte Belastung als mehrere Einzellasten auf den Bogen, und diese Einzellasten erzeugen Biegemomente in den zwischen den Unterzügen liegenden Bogenabschnitten. Beim Einsatz von Unterzügen benötigt man somit eine bestimmte Menge an Werkstoff zum

Widerstand gegen die Biegemomente. Wird aber die Last direkt auf den Bogen übertragen (man spricht hier von konstanter Belastung), treten keine Biegemomente auf.

Auch wenn der höhere Arbeitsaufwand bei größerer Zügezahl nicht besonders ins Gewicht fällt, wenn man berücksichtigt, daß das Werkstoffgewicht für den Widerstand der Biegemomente proportional zur Quadratwurzel aus der Größe des Moments abnimmt (siehe Gleichung (57)), stößt man auf eine gewisse Grenze, über der es bei einer gewissen Spannweite nicht mehr ökonomisch ist, die Anzahl an Schrägzügen zu erhöhen. Zum Vergleich des Gewichts von Bogenbindern und geraden Trägern, einschließlich des für den Widerstand der Biegemomente aufgewandten Werkstoffs, untersuchen wir jenen Fall, wo die Anzahl an Zügen so ist, daß die Größe des Biegemoments beim Bogen annähernd 4 mal geringer ausfällt als das Biegemoment bei einem geraden Träger.

Wir setzen dieses für die Vergleichsberechnung des theoretischen Ausdrucks der Gewichte zugrunde und ermitteln

bei einem Abstand von 7 *Fuß* zwischen den Auflagern des geraden Trägers ein Gewicht des Werkstoffs für den Widerstand der Biegemomente von $0,022 l^2 \cdot 7 = 0,154 l \text{ Pud}$. Das Moment im Bogen sei nach unserer Berechnung 4 mal kleiner, dann ist das Gewicht des dafür verbrauchten Werkstoffs 2 mal geringer, d.h. es ist $0,077 l \text{ Pud}$; bei einem Abstand von 7 *Fuß* zwischen den Trägern und $q = 1 \text{ Pud}$ auf 1 *Qu.Fuß* sieht, wie früher bereits festgestellt, Gleichung (136) folgendermaßen aus: $V_a = 0,0107 l \text{ Pud}$. Das volle Gewicht des für den Bogen verbrauchten Werkstoffs ist dann

$$V_1 = 0,0107 l^2 + 0,077 l. \quad (138)$$

Beim rationalen Träger der 2. Klasse wird das Gewicht nach Gleichung (65) bestimmt: $V_2 = 0,0145 l^2 + 0,25 l$. Die Relation V_2/V_1 bei großen Spannweiten beträgt etwa 1,5.

Bei geringen Spannweiten wird ein Dreiecksbinder ohne Streben gebaut und der Bogenbinder ohne Schrägzüge. Nach der von uns angenommenen Relation der Belastungen ist das Biegemoment beim Bogenbinder 6 mal geringer als beim Dreiecksbinder. Das Gewicht des Dreiecksbinders ohne Streben ist $0,0027 l^2 (1 + 1,5 \times 1,16) = 0,0074 l^2 \text{ Pud}$. Das Gewicht des den Biegemomente Widerstand leistenden Werkstoffs im Dreiecksbinder wurde über $0,022 l^2 \text{ Pud}$ angesetzt. Das Gesamtgewicht des Dreiecksbinders ist dann $(0,0074 + 0,022) l^2 = 0,0294 l^2$.

Das Gewicht des Bogenbinders ohne Schrägzüge ist $0,0027 l^2 (1 + 1,5 \times 1,64) = 0,00924 l^2 \text{ Pud}$. Das Gewicht des zusätzlichen Werkstoffs für den Widerstand gegen die Biegemomente macht $0,009 l^2 \text{ Pud}$ aus, so daß das Gesamtgewicht des Bogens ohne Züge $0,01824 l^2$ beträgt.

Die Relation des Gewichts des Dreiecksbinders ohne Streben zum Gewicht des Bogenbinders ohne Schrägzüge fällt $294/182 \cong 1,6$ aus. Folglich darf man ganz allgemein annehmen, ein Bogenbinder sei 1,5 mal leichter als ein gerader Träger.

In den vorhergehenden Vergleichen von geraden und bogenförmigen Trägern wurde die theoretische Werkstoffmenge ausgeklammert, die zum Widerstand gegen die Druck-, Zug- und Biegekräfte aufgewandt werden muß.

Im Kapitel über gerade Träger wurde darauf hingewiesen, daß bei ihrer Fertigung noch zusätzlich Werkstoff benötigt wird, weil es praktisch nicht möglich ist, jedem einzelnen Abschnitt des Dachverbands gerade denjenigen Querschnitt zukommen zu lassen, der den in diesem Abschnitt auftretenden Kräften entspräche, und man die Abmessungen einiger Abschnitte vergrößern müsse. Verändert man die Abmessungen der Bänder von einem zum anderen Feld entsprechend den einwirkenden Kräften, müßte man jedes Mal Verbindungsglaschen einbauen; sie brauchen eine bestimmte Menge zusätzlichen Werkstoff; außerdem aber schwächen sie auch noch den effektiven Querschnitt der Abschnitte; infolgedessen ist es im Sinne des Arbeitsaufwands und der Gewichtseinsparung günstiger, in mehreren Feldern einen einheitlichen Querschnitt zu verwenden, der auf die größte Kraft berechnet wird.

Bei Vollwandbögen aus Walzblech, deren Berechnung auf der Grundlage eines einheitlichen Querschnitts erfolgte, gibt es keinen derartigen Werkstoffüberschuß; der Bogen selbst wie auch seine Züge besitzen über ihre gesamte Länge den gleichen Querschnitt, deshalb ist in der Praxis das Gewichtsverhältnis von Bogen und geradem Träger noch günstiger für den Bogen. Besteht der Bogen jedoch aus 2 Bändern, die miteinander durch ein Gitter oder mit einer an den Bändern befestigten Blechtafel verbunden sind, dann ergibt sich bei der Montage ebenfalls eine gewisse Werkstoffmenge, die nicht in die Gewichtsrechnung Eingang findet; außerdem ist die Herstellung solcher aus genieteten Teilen bestehender Bögen teurer als die Fertigung gerader Träger.

Bei allen von uns untersuchten Trägern leistet das Druckband den in Abhängigkeit von der Länge seiner einzelnen Feldelemente wirkenden Druckkräften Widerstand; die Auflager der Felder werden dabei als verstärkte Enden des kompressiblen Bandes betrachtet. Damit diese Verbindungspunkte der Träger tatsächlich verstärkte Stellen sind, muß man – direkte und diagonale – Längsverbindungen zwischen den Dachträgern einsetzen. Dies ist besonders in den Fällen notwendig, wo die Eisenträger mit Unterzügen und Sparren aus Holz zusammenwirken. Bei Dachlatten aus Eisen, die am Druckband des Trägers befestigt sind, muß man keine direkten Verbindungen einsetzen, Diagonalverbindungen sind jedoch unabkömmlich.

Die bei Holzsparren benötigte Werkstoffmenge für die Längs- und Diagonalverbindungen beträgt mindestens 10 – 15 % des Gesamtgewichts der Träger in Abhängigkeit von der Spannweite des Dachverbands.

Kombination der Abstände zwischen Trägern und Dachlatten und Feldgröße

Wir nehmen zuerst den Fall von Dachlatten aus Eisen. Günstigster Querschnitt des Eisens ist das Z-Profil. Das Gewicht der Längeneinheit dieses Profils wird vollkommen exakt durch Gleichung (57) ausgedrückt. Die Abhängigkeit zwischen Gewicht und Modul für das Feld bzw. für den Unterzug kann ebenfalls nach dieser Gleichung gefunden werden.

Es gelten folgende Bezeichnungen: e Abstand zwischen den Trägern, a Feldlänge, c Abstand zwischen zwei Sparren bei Dachblech, vorgegeben durch die Praxis, z.B. $c \leq 4 \text{ Fuß}$.

Das Biegemoment bei einem Dachsparren ist $qce^2/8$, und sein Widerstandsmodul beträgt $W = \frac{q ce^2}{k 8}$.

Das Gewicht eines Sparren beträgt (siehe Gleichung (57))

$$ev = e0,12\sqrt{W} = \delta e^2 \sqrt{c}, \quad (139)$$

wobei $\delta = 0,12\sqrt{q/8k}$.

Die Anzahl der Sparren auf die Feldlänge beträgt $a : c$. Folglich wird das Gewicht der auf der Fläche ae liegenden und auf jedes Feld kommenden Dachsparren durch $\delta ae^2 / \sqrt{c}$ ausgedrückt. Das Feldgewicht a wird ausgedrückt durch $\delta a^2 \sqrt{e}$. Das Gesamtgewicht des Werkstoffs, der der Einwirkung der Biegemomente Widerstand leistet und auf die Fläche ae entfällt, ist $\delta(ae^2 / \sqrt{c} + a^2 \sqrt{e})$, und auf die Feldeinheit beträgt dieses Gewicht

$$v_0 = \delta(e / \sqrt{c} + a / \sqrt{e}). \quad (140)$$

Dieser Ausdruck zeigt, daß

- 1) das Gewicht des den Biegemomenten Widerstand leistenden Werkstoffs für das Dach, bezogen auf die Flächeneinheit des Daches, mit Abnahme der Feldlänge a und des Abstandes e zwischen den Trägern sinkt;
- 2) das praktische \min dieses Gewichts dann erreicht wird, wenn $a = e = c$, d.h. wenn keine Dachsparren vorhanden sind und der Abstand zwischen den Trägern gleich dem Abstand zwischen den Sparren ist, wobei der Träger in Felder mit der Länge c unterteilt ist.

Man kann leicht feststellen, daß man den Träger im Falle von Dachsparren oder einer Vollabdeckung aus Holz zum Zwecke der Verringerung des Werkstoffgewichts in eine große Anzahl von Feldern aufteilen und den Abstand zwischen den Trägern bis zu jener Grenze verringern muß, bei deren Erreichen eine weitere Verminderung der Holzstärke unmöglich wird (z.B. sollte die Dicke der Abdeckung nicht unter 1 Zoll betragen). Entsprechend dieser Bedingung läßt sich auch die theoretische Grenze bei der Wahl des Abstands zwischen den Trägern definieren.

Die vorhergehende Schlußfolgerung gilt auch für den Fall, wenn man die Druckkräfte der Felder in die Berechnung einbezieht, weil diese Kräfte (und folglich das Gewicht der Abschnitte) mit zunehmender Felderzahl nur wenig ansteigen. Beim Übergang von 8 zu 16 Feldern (siehe Gleichungen (47) und (48)) z.B. nimmt das Gewicht des Druckbandes proportional $1 - 1/n$ zu, d.h. der Proportionalitätskoeffizient geht von $7/8$ auf $15/16$ über, während, wenn man $a = e$ annimmt und ihren Wert zweifach verkleinert, wir die Größe v_0 proportional zur Relation $2,414/1,2$ verändern. Derart günstige Herstellungsbedingungen für Dachträger sind bei den bis heute in der Praxis gebräuchlichen Konstruktionen von Dachverbänden völlig unerreichbar, da einerseits mit abnehmendem Abstand zwischen den Trägern die auf die Flächen-

einheit des Daches entfallende Werkstoffmenge für die Stoßflächen zunimmt, und andererseits mit abnehmender Feldlänge die Anzahl der Streben und die Zahl der Verbindungen zwischen den Auflagern der Träger zunimmt.

Der einzige, praktisch mögliche Weg zur Verringerung der Abmessungen a und e bei Dächern besteht darin, gitterförmige Oberflächen einzusetzen, die in großer Variation nach von mir entworfenen Plänen vom Baubüro A. V. Bari für die Ausstellung in Nižnij Novgorod gebaut wurden.⁹ Die Berechnung solcher Dächer erfolgt auf der Grundlage der hier dargelegten Theorie der bogenförmigen Dächer.

⁹ Zur Beschreibung dieser Dächer siehe Nr 5 der Zeitschrift „Techničeskij sbornik i Vestnik promyšlennosti“ von 1896 und darin den Aufsatz von Professor P. K. Chudjakov. Gemeint ist: Chudjakov, P. [K.]: Novye tipy metalličeskich i derevjannyh pokrytij dlja zdaniy po sisteme inženera V. G. Šuchova. - In: In: Techničeskij sbornik i Vestnik promyšlennosti. Ežemesjačnyj žurnal otkrytij, izobretenij i usoveršenstvovanij po vsem otrasljam promyšlennosti. Moskva, 7 (1896) Nr 5, S. 169 – 172.

Dt.: Neue Metall- und Holzdachtypen für Gebäude nach dem System des Ingenieurs V. G. Šuchov. – Übersetzung Nr 361 der Übersetzungsstelle der Universitätsbibliothek Stuttgart, 14 Seiten. - http://elib.uni-stuttgart.de/opus/volltexte/2008/3745/pdf/Ue_361_Chudjakov.pdf

Berechnung der Bogenbinder unter Berücksichtigung der Windeinwirkung

Windeinwirkung auf den Bogenbinder. Bestimmung der Drücke auf seine Stützen. Die endgültigen Gleichungen zur Berechnung von bogenförmigen Trägern wurden aus der allgemeinen Analyse unter der Annahme hergeleitet, die einseitige Belastung sei gleichmäßig auf die Länge von einer der Stützen bis zur Trägerspitze verteilt.

Unter Anwendung der allgemeinen Gleichungen zur Ermittlung der Größe der gesuchten Zug- und Druckkräfte und der Biegemomente bereitet auch jede andere Position einer gleichmäßigen Last keine Schwierigkeiten. Aber außer ihr erfahren die Bogenbinder bei Windeinwirkung auch noch eine ungleichmäßige Belastung, die es unter den bekannten Bedingungen nötig macht, zusätzliche Züge bzw. Windschutzzüge einzuziehen.

Die Windeinwirkung liegt normalerweise in der Normalen und in der Tangentialrichtung zur untersuchten Oberfläche. Die über die Oberfläche ziehende Tangentialkomponente erzeugt schwache Kräfte, die von der Luftreibung abhängen; ihre Einwirkung ist so gering, daß man sie vernachlässigen kann. Die Normalkraft hingegen ist als Last aufgrund der Windeinwirkung bemerkbar.

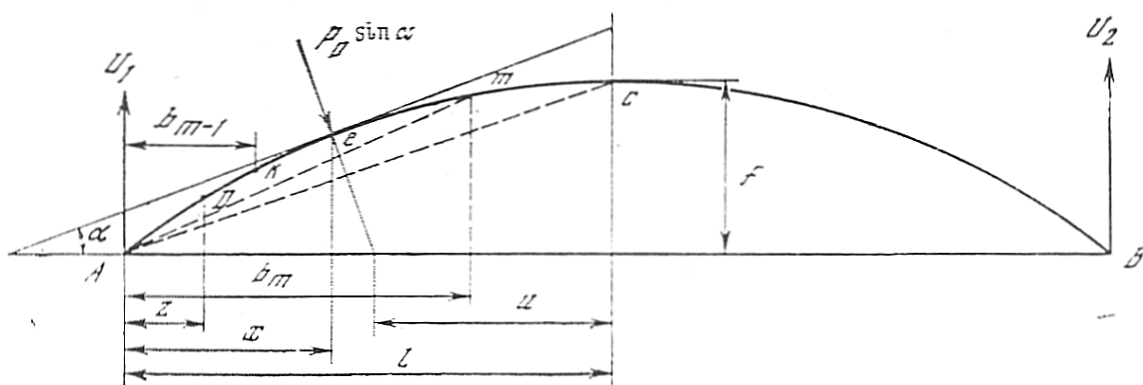


Abb. 20

Von vielen praktischen Gleichungen, die uns einen Ausdruck für die Normalkomponente liefern, ist die treffendste die Lessel-Formel¹⁰, auch wenn sie große Werte liefert,

$$p = p_0 \sin^2 \alpha, \quad (141)$$

mit p_0 Winddruck auf die zu seiner Richtung normalen Flächeneinheit und α Winkel zwischen Oberfläche und Windrichtung. Die Windrichtung eines starken Windes, für den ein Dachverband auch berechnet wird, muß man horizontal annehmen. Unter solchen Bedingungen ist der Winddruck auf das Bogenelement ds der Parabel in einem beliebigen Punkt E (Abb. 20)

$$p_0 \sin^2 \alpha ds = p_0 \operatorname{tg} \alpha dx.$$

Der näherungsweise Wert des Moments dieser Kraft bezüglich Punkt A bei einem nicht großen Gewölbehub ist

¹⁰ Die Formel $p = p_0 \sin^2 \alpha$ liefert bei einem 10°-Winkel der Windrichtung zum Horizont Druckwerte, die wesentlich kleiner sind als die Lessel-Formel bei einem Winkel α über 5°.

$$dM = p_0 \operatorname{tg} \alpha x dx. \quad (142)$$

Der genaue Wert des Moments ist

$$dM = p_0 \operatorname{tg} \alpha (l - u) \cos \alpha dx. \quad (143)$$

Nach der Parabeleigenschaft ist $l - u = x + 2fy(l - x)/x^2$, und folglich

$$dM = p_0 \sin \alpha \left[(x + 2) \frac{f^2}{l^4} (2lx - x^2)(l - x) \right] dx. \quad (144)$$

Nähme man diesen genauen Ausdruck des Moments, würden alle darauffolgenden Ableitungen sehr kompliziert werden, deshalb beschränken wir uns hier auf die näherungsweise Lösung, die treffend genug zum Zwecke der praktischen Berechnung ist und ersetzen Gleichung (144) durch die einfachere (142). Dies ist auch deshalb zulässig, weil Gleichung (141) keinen exakten mathematischen Ausdruck der Windeinwirkung darstellt.

Der vom Moment dM erzeugte Druck auf die Stütze B ergibt sich aus der Momentengleichung bezüglich Punkt a:

$$2ldV_2 = p_0 \operatorname{tg} \alpha x dx = q_0 \frac{2f}{l^2} (l - x)x dx. \quad (145)$$

Die Integration dieser Gleichung bei Veränderung von x innerhalb von 0 bis l ergibt

$$V_2 = \frac{1}{6} p_0 f, \quad V_1 = \frac{5}{6} p_0 f. \quad (146)$$

Bestimmung der Spannungen der Züge. Nachdem die Drücke auf die Stützen aufgrund der Windeinwirkung ermittelt wurden, die – wie ersichtlich – nur von der Bogenhöhe f abhängen und nicht von seiner Spannweite, kann man die Spannung aller Züge bestimmen, bis H_{n-1} einschließlich, und zwar nach den Angaben der obigen Gleichungen, indem man in ihnen den neuen Wert V_2 einsetzt, der die Abhängigkeit aller Züge auch von f herstellt, als ob bei gleichmäßiger Belastung diese Abhängigkeit nicht aufträte.

Auf die im allgemeinen Teil erklärte Weise wird die Spannung aller Züge bestimmt, wobei jedes Mal nur der Momentenausdruck der Lasten bezüglich des jeweils untersuchten Punktes verändert wird.

Bei Ermittlung der Spannung H_n muß das Belastungsmoment unter Veränderung von x innerhalb von l bis a_0 bezüglich des Verbindungspunktes $(n + 1)$ in Abb. 17 eingesetzt werden. Die Größe dieses Moments ist

$$\frac{2f}{l^2} p_0 \int_l^{a_n} (l - x)(x - a_n) dx = p_0 \frac{2f}{l^2} \frac{(a_n - l)^3}{6} = 2V_2 \frac{(a_n - l)^3}{l^2}. \quad (147)$$

Wir setzen diesen Wert des Moments in die allgemeine Gleichung ein, die H_n bestimmt, und erhalten

$$H_n = V_2 \frac{l^2}{fa_n} \left[2l \frac{2l - a_{n-1} - a_n}{(2l - a_{n-1})(2l - a_n)} - \frac{(l - a_n)^2}{l^2} \right], \quad (148)$$

$$\sum_0^n H = V_2 \frac{l^2}{f} \left(\frac{2l - a_n}{l^2} + \frac{1}{2l - a_n} \right). \quad (149)$$

Wie bereits früher gezeigt, können auf diese Weise die Spannungen auch aller übrigen Züge von H_{n+1} bis H_{2n} bestimmt werden.

Im Falle einer gleichmäßigen Belastung auf die Halbspannweite ist die Spannung aller Züge mit der Nummer $(n + 2)$ und größer gleich Null (siehe Gleichung 106)), während, wie man sieht, bei ungleichmäßiger Last – und baute man noch so viele Züge ein, die die Bogenhälfte mit der nächsten Stütze verbinden – alle diese Züge unter Spannung stehen. Fehlen diese Züge, ruft dies ein zusätzliches Biegemoment im belasteten Bogenabschnitt hervor; und wenn die Gesamtgröße der Biegemomente hier einen bestimmten Wert übersteigt, dann muß man zur Verringerung der Biegemomente zusätzliche Windschutzzüge einbauen, deren Anzahl, wie wir unten sehen werden, im allgemeinen geringer sein muß als die Anzahl derjenigen Züge, die zur unbelasteten Bogenseite verlaufen.

Im weiteren Verlauf muß man die Spannung eines beliebigen Windschutzzuges bestimmen, indem man dafür das Kräfte moment bezüglich eines beliebigen Punktes der unbelasteten Bogenseite wählt.

Angenommen sei, der Zug H_n verlaufe durch die Bogenspitze, d.h. $a_n = l$. Wir wählen als Momentenzentrum den beliebigen Punkt m (Abb. 20) der belasteten Bogenseite, der bezüglich der linken Stütze durch die Abszisse b_m bestimmt wird, und erstellen nach dem oben aufgezeigten Verfahren den Ausdruck H_n (siehe Herleitung von Gleichung (100):

$$V_2 \left[2l - b_m - b_m \frac{2(2l - b_m) - a_{n-1} - 2(l - b_m)^3}{2l - a_{n-1}} \right] = H_n \frac{f}{l^2} b_m (l - b_m). \quad (150)$$

Dieser Ausdruck ergibt sich aus dem allgemeinen bei Ersetzung der Koordinate a_n des Zugaufagers durch l (bezüglich der rechten Seite) und der Koordinate a_n des Momentenzentrums durch b_m (bezüglich der linken Seite). Nach algebraischen Transformationen erhalten wir

$$H_n = H_1 = V_2 \frac{l^2}{f} \frac{2}{b_m} \left[1 - \frac{b_m}{2l - a_{n-1}} - \frac{(l - b_m)^2}{l^2} \right]$$

bzw.

$$H_1 = V_2 \frac{2l^2}{f} \left[\frac{2l - b_m}{l^2} - \frac{1}{2l - a_{n-1}} \right]. \quad (151)$$

Bei $a_n = l$ haben wir folglich zur Bestimmung der Spannungen aller darauffolgenden Züge folgenden Ausdruck:

$$\sum_0^1 H = V_2 \frac{2l^2}{f} \frac{2l - b_m}{l^2}, \quad (152)$$

$$\sum_1^1 Ha = V_2 \frac{l^2}{f} \frac{3l - 2b_m}{l^2}. \quad (152.a)$$

Gibt es im bereits genannten Punkt m mit der Koordinate b_m den Zug H_{mb} , erhalten wir bei der Untersuchung des Ausdrucks des Moments bezüglich des Momentenzentrums s mit der Koordinate b_{m-1} den allgemeinen Ausdruck

$$H_{bm} = V_2 \frac{2l^2}{f} \frac{l - b_{m-1}}{l^2}. \quad (153)$$

Biegemomente in einem Bogen mit einem einzigen Horizontalzug (ohne Schrägzüge). Im Falle eines Bogens mit einem einzigen Horizontalzug (ohne Schrägzüge) ermitteln wir die Spannung unter Heranziehung von Formel (146)

$$H_0 = V_2 l / f = \frac{1}{6} p_0 l. \quad (154)$$

Das Moment m des Winddrucks auf den Bogen AE (Abb. 20) bezüglich Punkt E ermitteln wir als algebraische Summe der elementaren Momente, deren Ausdruck sich für einen beliebigen Punkt D (Abb. 20) mit der Abszisse z folgendermaßen zusammensetzt: die Kraft $p_0 l \frac{2f}{l^2} (l - z)$, ihr Kraftarm $x - z$.

Wir summieren die Größen dieser elementaren Momente unter Veränderung von z innerhalb von 0 bis x und erhalten

$$m = \frac{2l^2}{f} p_0 \int_0^x (l - z)(x - z) dz = p_0 \frac{2f}{l^2} \left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right). \quad (155)$$

Das Moment im Querschnitt E (siehe Abb. 20) ist dann $M = V_1 x - m - H_0 y$. Nach algebraischen Transformationen dieser Gleichung erhalten wir

$$M = \frac{1}{6} p_0 f x (3l^2 - 5lx + 2x^2) / l^2. \quad (156)$$

Der größte Wert von M ergibt sich bei $x = \frac{l}{6} (5 - \sqrt{7}) \cong 0,4l$:

$$\max M = 0,088 p_0 f l. \quad (157)$$

Im Falle eines geraden Trägers erhalten wir bei denselben Größen bezüglich Windwirkung und im gleichen Trägerabschnitt:

$$\max M = \frac{1}{8} p_0 f l, \quad (158)$$

d.h. im parabolischen Bogen ist das rechnerische Moment aus der Windeinwirkung auf der belasteten Bogenseite $1\frac{1}{2}$ mal geringer als beim geraden Träger.

Für einen beliebigen Punkt der unbelasteten Bogenseite mit einem einzigen Horizontalzug bekommen wir den Ausdruck des Moments mit

$$M_1 = V_2 (2l - x) - H_0 y, \quad \text{bzw.} \quad M_1 = \frac{1}{6} p_0 f (2l - x)(1 - x/l). \quad (159)$$

Bei $x = \frac{3}{2}l$ erhalten wir

$$\max M_1 = \frac{1}{24} p_0 f l. \quad (160)$$

Biegemomente in einem Bogen mit Schrägzügen. Windunbelastete Bogenseite.

Die Ausdrücke der Momente $\max M_m$ in Abhängigkeit vom Druck V_2 sehen im Grunde genau so aus, wie von Gleichung (116) wiedergegeben, nur der Wert V_2 ändert sich von $1/4pl$ zu $1/16pof$, und alle diese Werte werden proportional zu f , dem Dachhub, was bei einer gleichmäßig auf die Halbspannweite verteilten Last nicht der Fall war.

Windbelastete Bogenseite. a) Die Aufhängungspunkte der Züge auf der linken und rechten Bogenseite sind symmetrisch verteilt. Von der Bogenspitze bis zum Verbindungspunkt $(n + 1)$ in Abb. 17, d.h. bei Veränderung von x von l bis a_n wird der Ausdruck des Moments so geschrieben (siehe Gleichungen (92) und (147)):

$$M_{1+n} = M_n - H_n \frac{f}{l^2} (2l - x)(x - a_n) - p_0 \frac{2f}{l^2} \frac{(l - x)^3}{6}.$$

Nach algebraischen Transformationen erhalten wir

$$M_{n+1} = V_2 x \frac{a_n - x}{l} \left(4 - \frac{a_n}{l} - \frac{2x}{l} - \frac{l}{2l - a_n} \right). \quad (161)$$

Im gesamten Verlauf zwischen Bogenspitze und Verbindungspunkt $(n + 1)$ in Abb. 17 bleibt der negative Wert erhalten und wird in diesem letzten Punkt gleich Null. Der größte Wert dieses Moments kann näherungsweise bestimmt werden, aber mit einer für unsere praktischen Zwecke ausreichenden Genauigkeit ist die Annahme $x = l$ gerechtfertigt, wie dies bei einer gleichmäßig über die Halbspannweite verteilten Last geschah, und dann ist

$$\max M'_{n+1} = -V_2 (l - a_n) \left(\frac{2l - a_n}{l} - \frac{l}{2l - a_n} \right). \quad (162)$$

Die Größe dieses Moments darf jenes nicht übersteigen, das bei vorgegebener gleichmäßiger Belastung erreicht wurde.

Wenn kein Zug H_{n+1} vorhanden ist, dann behält auch hier, wie bei gleichmäßiger Belastung, M_{n+1} das Aussehen seines Ausdrucks von x innerhalb von a_n bis 0 bei, wobei die Größe des Moments innerhalb derselben positiv ist und ihren größten Wert bei x erreicht, bestimmt aus der Gleichung $dM_{n+1}/dx = 0$. Dies führt zu

$$x^2 - \beta x + \gamma = 0, \quad \beta = \frac{l}{3} \left(4 + \frac{a_n}{l} - \frac{l}{2l - a_n} \right), \quad \gamma = \frac{1}{6} \left(4la_n - a_n^2 - \frac{l^2 a_n}{2l - a_n} \right). \quad (163)$$

Die aus dieser Gleichung ermittelte Größe x ist danach in Gleichung (161) einzusetzen, und dann erhalten wir den genauen Ausdruck \max des Moments bei vorgegebenem Wert a_n . Aber dieser Lösungsweg ist – begleitet von zahlreichen algebraischen Untermauerungen – sehr lang. Man kann folgende Vereinfachungen vornehmen: bei den Werten a_n , die l nahekommen oder gleich sind, liefert Gleichung (163)

$$x = 1/3 l. \quad (164)$$

Diese Größe nehmen wir auch für alle Werte a_n , die – wie wir aus der allgemeinen Theorie der Bogenbinder wissen – von $1/3 l$ (bei einem einzigen Schrägzug) bis l

(im Falle einer großen Zügezahl) variieren kann. Dann erhalten wir nach Gleichung (161)

$$\max M_{n+1} = V_2 \frac{3a_n - l}{9} \left(3,33 - \frac{a_n}{l} - \frac{l}{2l - a_n} \right). \quad (165)$$

Für schnellere vorläufige Berechnungen kann man anstelle dieser Gleichung die noch einfachere Gleichung

$$\max M_{n+1} \cong V_2 0,3a_n \quad (166)$$

benutzen.

Zum Vergleich der Rechenergebnisse nennen wir folgende Angaben:

a_n/l	Größen M_{n+1}/V_2l		
	echter Wert	nach Gleichung (165)	nach Formel (166)
$\frac{2}{3}$	0,217	0,213	0,20
1	0,296	0,296	0,30

Gibt es den Zug H_{n+1} , dann ist die Größe des Moments, angefangen beim Punkt mit der Abszisse $x = a_{n-1}$,

$$M_{n+2} = M_{n+1} - H_{n+1} z_{n+1}^x = M_{n+1} - H_{n+1} \frac{f}{l^2} x(a_{n-1} - x),$$

wobei x von der Stütze A aus gerechnet wird (Abb. 17). Nach Transformationen erhalten wir

$$M_{n+2} = 2V_2 x(a_{n-1} - x)(a_{n-1} - x) / l^2. \quad (167)$$

Der Wert dieses Moments zwischen den Punkten mit den Abszissen a_n und a_{n-1} ist negativ. Fehlt der Zug H_{n+2} , dann behält der Ausdruck dieses Moments sein Aussehen über den gesamten Bogenverlauf zwischen den Verbindungspunkten $(n+2)$ und A (Abb. 17) bei, wobei sich das Vorzeichen des Moments von Minus nach Plus verändert.

b) Die Aufhängungspunkte der Windschutzzüge liegen asymmetrisch zu den Aufhängungspunkten der Züge der unbelasteten Seite.

Die Bestimmung der Biegemomente auf der belasteten Bogenseite, die mehrere Windschutzzüge besitzt, deren Aufhängungspunkte asymmetrisch zu den Aufhängungspunkten der Züge der unbelasteten Seite liegen, erfolgt ebenso wie oben, d.h. es wird die Gleichung der Momente bezüglich der gewählten Aufhängungspunkte der Züge aufgestellt.

Wir untersuchen den Fall, wo einer der Windschutzzüge durch die Bogenspitze c (siehe Abb. 20) verläuft, d.h. bei der Bestimmung des Moments nehmen wir $a_n = l$ an in einer allgemeinen Formel, die der ähnelt, aus der unmittelbar Gleichung (161) folgte. Ist der zur Bogenspitze nächste Zug mA mit den Koordinaten seines Aufhängungspunktes h_m und b_m , dann wird das Biegemoment in einem beliebigen Bogenquerschnitt cm (Abb. 20) so geschrieben:

$$M_{cm} = M_n - H_n (2l - x)(l - x) f / l^2 - 2V_2 (l - x)^3 / l^2,$$

wobei M_n und H_n die Größen des Moments und der Horizontalkomponente der Spannung des Zuges für den Punkt c sind. Nach algebraischen Transformationen wird die vorhergehende Gleichung zu folgender:

$$M_{cm} = 2V_2 r \frac{l-x}{l} \frac{b_m-x}{l}. \quad (168)$$

Wir setzen die 1. Ableitung dieses Ausdruckes nach x gleich Null und ermitteln, daß \max des Moments dann erreicht wird, wenn

$$x_{cm} = \frac{1}{3} \left(l + b_m + \sqrt{b_m^2 - b_m l + l^2} \right) \quad (169)$$

Bei einer Relation l/b_m , die in der Praxis innerhalb von 1,25 bis 2 variiert, kann man den Ausdruck des Maximalmoments mit einer Fehlergröße unter 2 % ausdrücken durch die einfache Formel:

$$\max M_{cm} = -2V_2 \frac{l+b_m}{4} \left(\frac{l-b_m}{l} \right). \quad (170)$$

Der folgende Aufhängungspunkt des Windschutzzuges sei k (siehe Abb. 20) mit den Koordinaten h_{m-1} und b_{m-1} . Die Spannung H_{bm} des vom Verbindungspunkt A nach m (siehe Abb. 20) verlaufenden Zuges war durch Gleichung (153) gegeben. Das Biegemoment in einem beliebigen Bogenquerschnitt mk wird folgendermaßen geschrieben:

$$M_{mk} = M_{cm} - H_{bm} \frac{f}{l^2} x(b_m - x) = 2V_2 x \frac{b_m - x}{l} \frac{b_{m-1} - x}{l}. \quad (171)$$

Der größte Wert dieses Moments ergibt sich, wie vorher, für den Querschnitt, wo

$$x_{mk} = \frac{1}{3} \left(b_m + b_{m-1} + \sqrt{b_m^2 - b_m b_{m-1} + b_{m-1}^2} \right) \quad (172)$$

Befinden sich links vom Punkt k noch weitere Windschutzzüge, dann werden die Momente auch in den übrigen Bogenabschnitten, die zwischen zwei benachbarten Zügen liegen, bestimmt. Befinden sich links vom Punkt k keine weiteren Züge, dann bleibt über den gesamten restlichen Bogenabschnitt, d.h. im Abschnitt Ak , der Ausdruck des Moments gleich wie zwischen den Punkten m und k , nur \max des Moments wird bei einem anderen Wert von x zu:

$$x_{kA} = \frac{1}{3} \left(b_m + b_{m-1} - \sqrt{b_m^2 - b_m b_{m-1} + b_{m-1}^2} \right) \quad (173)$$

Bei gleichem Bogenquerschnitt müssen die Biegemomente in den Bogenabschnitten kA und km gleich sein. Diese Bedingung wird bei Einhaltung der Gleichung

$$b_{m-1} = \frac{1}{2} b_m. \quad (174)$$

erfüllt. Dann nimmt Gleichung (171) folgende Gestalt an:

$$M_{mk} = M_{kA} = 2V_2 x \frac{b_m - x}{l} \frac{0,5b_m - x}{l}. \quad (175)$$

Den größten Wert dieses Moments erhalten wir im Abschnitt km beim Wert $x_{km} = b_m(1/2 + 1/3,5) = 5,5/7 b_m$, im Abschnitt kA beim Wert $x_{kA} = b_m(1/2 - 1/3,5) = 1,5/7 b_m$. Bei diesen Werten von x ist \max des Moments

$$\max M = \pm 2V_2 \frac{1,5}{7} \frac{5,5}{7} \frac{2}{7} b_m^2 / l^2 \cong \frac{1}{10} V_2 b_m^2 / l^2. \quad (176)$$

Gilt dieser Wert des größten Moments auch für den Abschnitt mc , dann muß auf der Grundlage der Gleichungen (170) und (176)

$$\frac{1}{10} V_2 \frac{b_m^2}{l^2} = V \frac{l+b_m}{4} \left(\frac{l-b_m}{l} \right)^2. \quad (177)$$

geschrieben werden. Diese Gleichung liefert die näherungsweise

$$b_m = \frac{1}{1,41} l. \quad (178)$$

Wir nehmen diese Beziehung und erhalten das rechnerische Moment für die gesamte windbelastete Seite bei zwei Windschutzzügen (cA und mA) in folgender endgültiger Gestalt:

$$\max M \cong \frac{1}{28} V_2 l. \quad (179)$$

Kommt außer den Zügen cA und mA noch der Zug kA vor, dann erhalten wir analog zum vorhergehenden

$$l : b_m : b_{m-1} = 1,78 : 1,41 : 1 \quad (180)$$

und das rechnerische Moment für die belastete Seite ist

$$\max M \cong \frac{1}{57} V_2 l. \quad (181)$$

Zur Vorauswahl der Anzahl an Windschutzzügen n_1 , die auf der belasteten Bogenhälfte einzuziehen sind, kann mit genügender Zuverlässigkeit folgende näherungsweise Formel benutzt werden:

$$\max M = \frac{1}{6n_1^2} V_2 l. \quad (182)$$

Anzahl der Züge, die von jeder Auflagerung zur entfernten und nahen Bogenhälfte gehen. Die Frage nach der Zugzahl beantwortet sich nach den vorgegebenen Belastungen. Bei den Angaben der numerischen Werte bei einseitiger und Vollbelastung von Bogendächern muß man berücksichtigen, daß ein sehr starker Winddruck (Sturm) mit $p_0 = 1,25 \text{ kg}$ auf 1 *Qu.m* = 0,7 *Pud* auf 1 *Qu.Fuß* angenommen wird. Folglich sind die wichtigsten Angaben zur Berechnung der Momente der belasteten Seite durch den Druck p_0 :

$V_2 = \frac{1}{6} p_0 f = 21f$, wenn V_2 in *kg*, f in *m*, und $V_2 = 0,117f$, wenn V_2 in *Pud* und f in *Fuß*. Diese Größe V_2 wird für jeden laufenden Meter Bandbreite des Daches ausgerechnet, die den Druck auf den Dachträger überträgt; die gleichmäßig auf die gesamte Spannweite verteilte Schneelast wird gewöhnlich mit 75 *kg* auf den *Qu.m* oder 0,42 *Pud* auf 1 *Qu.Fuß* angenommen. Eine ungleichmäßige Verteilung des Schnees auf beide Dachschrägen kann eine einseitige Belastung erzeugen, deren Größe allgemein vernachlässigbar ist. Eine einseitige Schneelast ist nur in dem Fall möglich, wenn ein starker Wind den gesamten Schnee von der Dachseite abträgt, auf die er bläst. Da die Zahl 0,42 *Pud* pro 1 *Qu.Fuß* für eine langanhaltende Schneeanhäufung gilt, besteht kein Anlaß zur Vermutung, daß gerade in dieser Zeit aus heiterem Himmel noch einmal Schnee falle und gleichzeitig ein Wind auftrete, der schlagartig den gesamten Schnee nur auf einer Seite abtrage und die andere Dachseite ganz unberührt lasse. Bei einem Bogenhub über $\frac{1}{6}$ seiner Spannweite, d.h. bei f größer

$l/3$, rutscht der Schnee von den Dachkanten ab (der Gleitwinkel des Schnees wird mit etwa 35° angenommen). Im Falle eines starken Windes wird der Schnee sowohl von der Bogenspitze als auch von der Seite heruntergeblasen, von der der Wind weht, so daß die Gesamteinwirkung eines starken Windes (besonders eines Orkans) und eine einseitige Schneebelastung auf ein und derselben Seite allgemein nicht möglich sind. Einzige Ausnahme kann der Fall sein, wo es zum sogenannten „nassen Schnee“ kommt, der am Dach festklebt und von Stürmen erzeugt wird. Der größte Wert einer solchen einseitigen Last kann etwa $1/3$ der vollen Schneelast ausmachen, d.h. $p = 0,42/3 = 0,14$ auf 1 Qu.Fuß nur bei Bögen, deren Hub $1/5$ ihrer Spannweite nicht übersteigt. Da eine einseitige Schneelast gleichmäßig auf der Halbspannweite des Bogens liegt, so erzeugt sie auf der belasteten Seite keine Biegemomente, die Momente der unbelasteten Seite werden nach einer Zusatzlast (in Pud) berechnet: $1/5pl = 0,035l$, mit l in Fuß. Die Momente der unbelasteten Seite müssen folglich nach dem Druck auf die Stütze $V_2 = 0,117f + 0,035l$ auf einen laufenden Fuß der Dachbandbreite bestimmt werden, bezogen auf einen einzigen Träger, wenn f und l in Fuß und V_2 in Pud, oder $V_2 = 21f + 6,25l$ auf 1 laufenden Meter der Dachbandbreite, wenn f und l in Meter und V_2 in Kilogramm. Zum Erhalt eines gleichförmigen Querschnitts im Bogen müssen die rechnerischen Biegemomente in beiden Bogenhälften gleich sein. Bezeichnet man mit n die Anzahl der Züge, die von einem Stützlager zur entfernten Bogenhälfte verlaufen, und mit n_1 die zur nächsten Hälfte, dann gilt

$$(0,117f + 0,035l)/4n^2 = 0,117f/6n^2. \quad (183)$$

Bei $f = 2l/6$ erhalten wir

$$n/n_1 = 1,75. \quad (184)$$

Folglich fällt die Anzahl der Windschutzzüge beim bogen um fast das Doppelte geringer aus gegenüber der Anzahl von Zügen, die die Stütze mit der gegenüberliegenden Bogenseite verbinden; in der Praxis sollten somit auch bei größten Spannweiten nicht mehr als zwei oder drei Windschutzzüge eingezogen werden, den Zug, der durch die Bogenspitze verläuft, mitgerechnet.

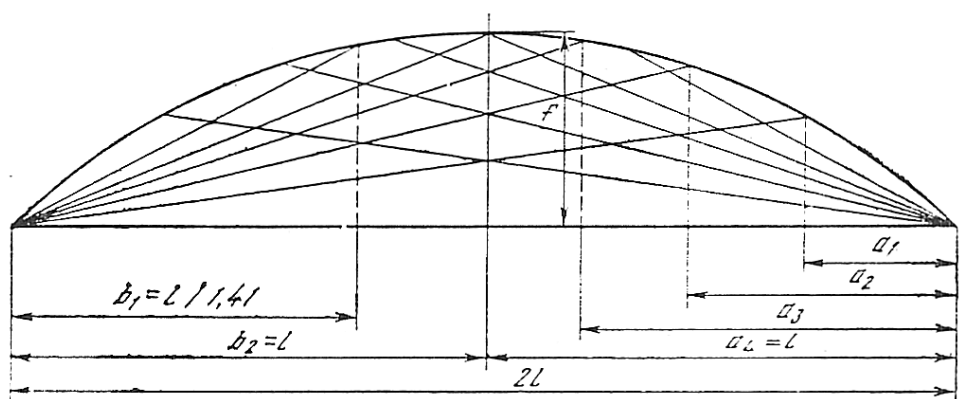


Abb. 21

Berücksichtigt man eine zufällige größere Schneeanhäufung auf dem Bogenbinder, dann sollte man der größeren Sicherheit wegen berücksichtigen:

- 1) die Züge der unbelasteten Seite auf eine einseitige gleichmäßige Last berechnen, die sich zusammensetzt aus Windeinwirkung plus Schneedruck mit $\frac{1}{3}$ *Pud* auf 1 *Qu.Fuß*;
- 2) die Windschutzzüge dürfen nur auf Windeinwirkung berechnet werden, wobei die Schneelast völlig unberücksichtigt bleibt.

In Abb. 21 ist der Bogenträger mit vollständiger Zügezahl bei $n = 4$ und $n_1 = 2$ dargestellt.

Schluß

Alle hier geäußerten Gedanken zur Berechnung bogenförmiger Dachträger gehen davon aus, daß an den Befestigungsstellen der Züge am Bogen Scharniere eingesetzt werden. Tatsächlich stellt der Bogenbinder einen kompakten elastischen Bogen dar, der durch die Aufhängung der Züge kaum belastet wird. Aber die Differenz zwischen den nach den Gleichungen berechneten und den tatsächlichen Spannungen ist in diesem Fall ganz ähnlich der bei geraden Trägern, wo das Druckband anstelle der untersuchten Aufreihung durch Scharniere verbundener Abschnitte einen massiven Balken darstellt. Im Falle kompakter oder masser Bögen wie auch gerader Bänder sind die Biegemomente in den Abschnitten des Bogens und der Felder geringer, als wenn Scharniere vorhanden sind. Eine ausführliche theoretische Darstellung der Berechnung kompakter Bögen erforderte äußerst komplizierte Ableitungen, die schließlich zu Gleichungen führten, die eher wahrscheinlich als zutreffend sind; deshalb ist es viel sicherer, sich bei den Berechnungen auf Formeln zu beschränken, die davon ausgehen, daß sich an den Stellen, wo die Züge aufgehängt werden, Scharniere befinden.

Die Verwendung der oben angegebenen Formeln verlangt, daß ein Ende des Trägers frei auf der Stütze ruhe, um zusätzliche Kräfte, hervorgerufen durch Veränderung der Länge der Bogenabschnitte bei Temperaturänderungen, zu vermeiden.

Beim Bau von Bögen und ihrer Montage ist das Hauptaugenmerk auf die Positionierung der Züge zu richten. Ihre Überbeanspruchung kann zusätzliche Kräfte erzeugen, auf deren Einwirkung die Trägerabschnitte nicht berechnet sind. Dasselbe kann bei übermäßiger Schwächung der Züge geschehen. Um zu verhindern, daß es zu unerwünschten Spannungen der Züge kommt, verwendet man in diesem Fall günstiger für die Züge keine starren, sondern die von uns empfohlenen elastischen Verschlüsse.

VI. Šuchov

27. Januar 1897

Stuttgart,
den 5. Dezember 2008

Übersetzt von
Ottmar Pertschi