Šuchov, Vladimir Grigor'evič

DIE GLEICHUNG $EI\frac{d^4y}{dx^4} = -\alpha y$ IN AUFGABEN DER BAUMECHANIK[1)]

Deutsche Vollübersetzung aus:
Šuchov, V.G.: Izbrannye trudy. Stroitel'naja mechanika. Pod red. A.Ju. Išlinskogo. Moskva: Nauka, 1977, S. 53 - 64.

Russ.: УРАВНЕНИЕ $EI\frac{d^4y}{dx^4} = -\alpha y$
В ЗАДАЧАХ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ*

Uravnenie $EI\frac{d^4y}{dx^4} = -\alpha y$ v zadačach stroitel'noj mechaniki

Eine Gleichung dieser Gestalt dient als Lösung für viele äußerst wichtige Probleme, die sich dem Ingenieur in der Praxis stellen.

Soweit uns bekannt, wird die Frage der unmittelbaren Anwendung einer Ableitung 4ter Ordnung auf die analytische Untersuchung der Durchbiegung gerader Balken in der Literatur zur Baumechanik nicht erörtert, wobei dennoch die Anwendung dieser Gleichung die Lösung vieler Probleme vereinfacht, so soll in der vorliegenden Notiz auch auf die Anwendung der genannten Gleichung zum einfachsten Lösen vielfältigster Aufgaben hingewiesen werden.

Die beschriebene Gleichung ist ein Einzelfall der allgemeingültigen Theorie der Balkendurchbiegung, einer Theorie mit

---

1) Erstveröffentlichung: Moskva: "Russkoe tovariščestvo pečatnogo i izdatel'skogo dela", 1903, 22 S. (Anm.d.Übers.)

der Aussage, daß für gerade Querträger eine Ableitung vierter Ordnung durch eine elastische Biegungslinie die Belastung auf die Längeneinheit ausdrückt und folgendermaßen geschrieben wird:

$$EI \frac{d^4y}{dx^4} = -q, \qquad (\bar{A})$$

wobei x und y die Koordinaten der elastischen Linie, E den Elastizitätskoeffizienten und I das Trägheitsmoment des Balkens bezeichnen. Der Wert q kann entweder eine Konstante oder Funktion von x oder auch Funktion von y sein. Ist q konstant, oder Funktion von x, dann löst die Gleichung $\bar{A}$ alle Fragen bezüglich gewöhnlicher Balken, die statisch bestimmbar sind.[2] Der Fall, daß q Funktion von y ist, kommt bei Fragen von statisch unbestimmbaren Balken vor.

Die Art der Anwendung von Gleichung $\bar{A}$ ist in all diesen Fällen gleich. Wir wollen dies an Beispielen erklären.

1. Ein gewöhnlicher Balken, I ist konstant, die Last q ist konstant; dann ergibt die nachfolgende Integration von Gleichung $\bar{A}$

$$EI \frac{d^4y}{dx^4} = -q; \qquad EI \frac{d^3y}{dx^3} = -qx + C;$$

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = -q\frac{x^2}{2} + Cx + C_{\mathrm{I}};$$

$$EI \frac{dy}{dx} = -q\frac{x^3}{6} + C\frac{x^2}{2} + C_{\mathrm{I}}x + C_{\mathrm{II}};$$

$$EIy = -q\frac{x^4}{24} + C\frac{x^3}{6} + C_{\mathrm{I}}\frac{x^2}{2} + C_{\mathrm{II}}x + C_{\mathrm{III}}.$$

Wir wenden diese Gleichungen auf das bekannte Beispiel eines Balkens an, der an seinen beiden Enden befestigt und mit konstanter Last belastet wird (Abb. 1). Hier erhalten wir:

Bei $x = 0$, $y = 0$ und $C_{III} = 0$.

---

[2] Die Worte "statisch bestimmbar" sind an dieser Stelle überflüssig und die Worte "statisch unbestimmbare Balken" im folgenden Satz sind zu ersetzen durch: "... wenn die Verteilung der Last von der Balkendurchbiegung abhängt" - wie von Šuchov in seinem bereits früheren Aufsatz über die "Bestimmung der Abmessungen von senkrechten Zylindern" richtig definiert (Anm.d.Red.).

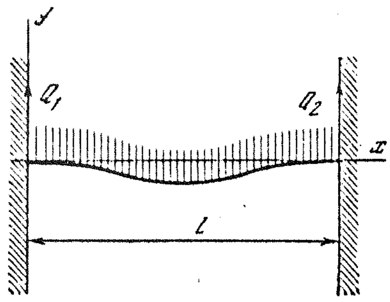

Abb. 1

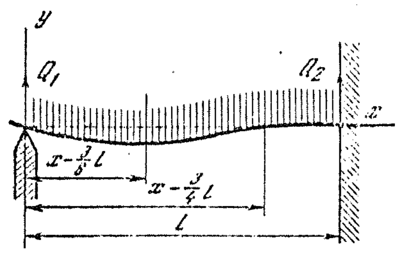

Abb. 2

Bei x = O, dy/dx = O, C_{II} = O.

Bei x = l, y = O, d.h.

$$-q\frac{l^4}{24}+C\frac{l^3}{6}+C_I\frac{l^2}{2}=0.$$

Bei x = l, dy/dx = O, d.h.

$$-q\frac{l^3}{6}+C\frac{l^2}{2}+C_I l=0.$$

Hieraus erhalten wir $C = ql/2$; $C_1 = -ql^2/12$.

Folglich sind die 4 Konstanten bestimmt und, setzt man sie ein, erhält man die Schnittkraft

$$EI\frac{d^3y}{dx^3}=-qx+C.$$

Bei x = O, $Q_1 = ql/2$; bei x = l, $Q_2 = ql/2$. Das Moment in einem beliebigen Querschnitt beträgt

$$M=EI\frac{d^2y}{dx^2}=-q\frac{x^2}{2}+q\frac{l}{2}x-q\frac{l^2}{12}.$$

Bei x = O ist $M = -1/12\ ql^2$. Bei x = l ist $M = -1/12\ ql^2$. Bei x = l/2 ist $M = 1/24\ ql^2$. Die Gleichung der elastischen Linie lautet

$$y=\frac{ql^4}{24EI}\left(-\frac{x^2}{l^2}+2\frac{x^3}{l^3}-\frac{x^4}{l^4}\right).$$

Durch die Bestimmung der vier Konstanten wird also die Frage der Momente, der Schnittkräfte und die Form der Kurve des gegebenen Balkens vollständig beantwortet.

Es soll noch ein weiteres Beispiel angeführt werden. Ein gleichmäßig belasteter Querträger, am einen Ende an einer Wand befestigt, liegt mit dem anderen Ende frei auf einer Stütze (Abb. 2).

Bei $x = 0$, $y = 0$ und $C_{III} = 0$. Bei $x = 0$, $M = 0$, $C_I = 0$. Bei $x = l$, $y = 0$, $C = 3/8\ ql$. Bei $x = l$, $dy/dx = 0$, $C_{II} = -1/48\ ql$. Das Moment beträgt

$$M = EI\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{qlx}{2}\left({}^3/_4 - \frac{x}{l}\right).$$

Bei $x = 3/8\ l$, $M = 9/128\ ql^2$; $x = 0$, $M = 0$; $x = 3/4\ l$, $M = 0$; $x = l$, $M = -1/8\ ql^2$.

Die Schnittkraft beträgt $EId^3y/dx^3 = -qx + 3/8\ ql$. Bei $x = 0$, $Q_1 = 3/8\ ql$; $x = l$, $Q_2 = -5/8\ ql$.

Die Gleichung der elastischen Linie lautet

$$y = \frac{ql^4}{48EI}\left(-\frac{x}{l} + 3\frac{x^3}{l^3} - 2\frac{x^4}{l^4}\right).$$

Wirkt eine konzentrierte Last $q = 0$ ein, so ergibt die darauffolgende Integration von Gleichung $\bar{A}$

$$EI\frac{d^3y}{dx^3} = C,$$

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = Cx + C_I,$$

$$EI\frac{dy}{dx} = C\frac{x^2}{2} + C_Ix + C_{II},$$

$$EIy = C\frac{x^3}{6} + C_I\frac{x^2}{2} + C_{II}x + C_{III}.$$

Als Beispiel für eine konzentrierte Last wählen wir einen Balken, der am einen Ende verankert ist, am anderen Ende frei auf einer Stütze aufliegt und in der Mitte mit der Last P belastet wird (Abb. 3).

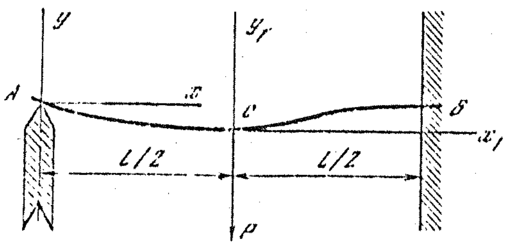

Abb. 3

In diesem Fall müssen zwei Reihen Ableitungen der Gleichungen mit den Koordinaten x, y und x_1, y_1 angeschrieben werden, eine von der Stütze A bis zum Punkt C der Kraftanwendung, die andere von C bis B.

Die Bezeichnungen der Konstanten für die Ableitungen von A bis C sind wie bisher C, C_I, C_{II} und C_{III}, und für die Ableitungen von C bis B B, B_I, B_{II} und B_{III}. In die so geschriebenen Gleichungen sind noch die Hauptangaben der Aufgabe einzutragen. Dies ergibt

$$EI\frac{d^3y}{dx^3} = C \quad \text{und} \quad EI\frac{d^3y_I}{dx_I^3} = B.$$

Nach der Aufgabenstellung ist $C + B = P$, folglich ist $B =$ $= C - P$.

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = Cx + C_I;$$

$$EI\frac{d^2y_I}{dx_I^2} = -Bx + B_I^*;$$

wobei $X = 0$, $EId^2y/dx^2 = 0$ und $C_I = 0$.

Im Punkt C ist $x = l/2$, $x_I = 0$ und $d^2y/dx^2 = d^2y_I/dx_I^2$, dies ergibt $B_I = Cl/2$,

$$EI\frac{dy}{dx} = C\frac{x^2}{2} + C_{II}$$

und

$$EI\frac{dy_I}{dx_I} = -(P - C)\frac{x_I^2}{2} + \frac{Cl}{2}x_I + B_{II}.$$

Im Punkt C bei $x = l/2$ ist $x_I = 0$, $dy/dx = dy_I/dx_I$; im Punkt B bei $x_I = l/2$, $dy_I/dx_I = 0$ (befestigtes Ende).

Diese zwei Bedingungen ergeben
$B_{II} = -3/8\ Cl^2 + 1/8\ Pl^2$ und $C_{II} = -1/2\ Cl^2 + 1/8\ Pl^2$.
Aus den Gleichungen

$$EIy = C\frac{x^3}{6} - {}^1/_2 Cl^2 + P\frac{l^2}{8}x + C_{III}$$

und

---

*Das Minuszeichen "-" steht deshalb, weil die Kurve x_I, y_I bezüglich der Kurve x, y vom Koordinatenursprung aus zur anderen Seite verläuft.

$$EIy_I = -(P-C)\frac{x_I^3}{6} + {}^1/_4 Clx_I^2 - {}^3/_8 Cl^2x_I + {}^1/_8 Pl^2x_I + B_{III}$$

erhalten wir schließlich bei $x = 0$, $y = 0$ und bei $x_I = 0$, $y_I = 0$ $B_{III} = 0$ und $C_{III} = 0$; bei $x = l/2$ und $x_I = l/2$, $y = -y_I$ erhalten wir $C = 5/16\ P$.

Alle Konstanten sind bestimmt und die Drücke auf die Stützen betragen im Punkt A $C = 5/16\ P$ und im Punkt B $P - C = 11/16\ P$. Das Moment vom Punkt A bis C ist $EId^2y/dx^2 = 5/16\ Px$, vom Punkt C bis B ist das Moment gleich $-11/16\ Px_I + 5/32\ Pl$ usw.

<u>Anmerkung:</u> Die Lösung einer Aufgabe über nichtdurchgehende Balken, die auf vielen Stützen aufliegen, wird auf gleiche Weise gewonnen.

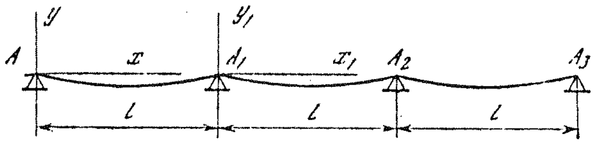

Abb. 4

Zum Beispiel ein Balken auf 4 Stützen, gleichmäßig belastet, die Abstände zwischen den Stützen sind gleich und betragen l (Abb. 4).

Für den Abschnitt AA_1 gilt

$$\frac{d^3y}{dx^3} = -qx + C$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -q\frac{x^2}{2} + Cx + C_I$$

usw.

Für den Abschnitt A_1A_2 gilt

$$\frac{d^3y_1}{dx_1^3} = -qx + B, \text{ где } B = q\frac{l}{2}$$

$$\frac{d^2y_1}{dx_1^2} = -q\frac{x_1^2}{2} + Bx_1 + B_1$$

usw.

Bei $x = 0$ ist $d^2y/dx^2 = 0$ und $C_I = 0$; bei $x_1 = 0$ $d^2y_1/dx_1^2 = d^2y/dx^2$; bei $x = l$ ist $-ql^2/l + Cl = B_1$; bei $x = l$ $dy/dx = dy_1/dx_1$; $x_1 = 0$ ergibt

$$-q\frac{l^3}{6} + C\frac{l^2}{2} + C_{II} = B_{II}; \qquad \text{(a)}$$

bei $x = 0$, $y = 0$ erhalten wir $C_{III} = 0$;
bei $x = l$, $y = 0$ erhalten wir

$$-q\frac{l^3}{24} + C_I\frac{l^2}{6} + C_{II} = 0,$$

bei $x_1 = l,\ y_1 = 0$

$$-q\frac{l^3}{24J} + B\frac{l^2}{6} + B_{\mathrm{I}}\frac{l}{2} + B_{\mathrm{II}} = 0. \qquad \text{(b)}$$

In die Gleichungen a und b tragen wir die Werte B_I und C_{II} ein, eliminieren B_{II} und erhalten $C = 2/5\ ql$; folglich beträgt der Druck auf die Stütze A $3/5\ ql + 1/2\ ql = 11/10\ ql$, und das Problem der Druckmomente ist gelöst. Dabei wurde die bekannte Gleichung über drei Kraftmomente beiläufig ermittelt.

Durch solche unmittelbare Anwendung der Gleichungen 4ter Ordnung auf die analytische Untersuchung von Balken können die vielfältigsten Lastfälle[3] leicht und schnell gelöst werden, wobei jede Aufgabe hinsichtlich eines geraden Balkens völlig selbständig gelöst wird, d.h. unabhängig von den Lösungen jeglicher vorhergehender Aufgaben.

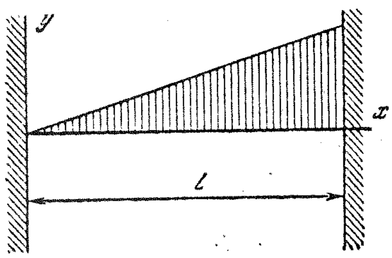

Abb. 5

Ähnlich wie beim Vorhergehenden, liefert auch die Gleichung $d^4y/dx^4 = -xy$, in der der zweite Teil Funktion von y ist, eine Lösung von Aufgaben, bei denen die Verteilung der Last von der Balkendurchbiegung abhängt.

---

[3] Für diejenigen, die sich mit der Berechnung von Balken befassen, erlauben wir uns, die bekannte Aufgabe eines Balkens anzuführen, der an seinen beiden Enden befestigt und proportional zu x belastet wird (Abb. 5). Das übliche Verfahren zur Berechnung der Momente erfordert in diesem Fall ziemlich viele Herleitungen, wohingegen die Gleichung 4ter Ordnung $EId^4y/dx^4 = -px/l$ eine schnelle und allgemein gültige Lösung des Problems ergibt.

Unter vielen Aufgabenstellungen dieser Art wollen wir hier die für die Praxis wichtigen Probleme des Binnenschiffbaus untersuchen.

1. A u f g a b e. AB (Abb. 6) stelle einen schwimmenden Balken (Flußbarke) mit der Länge 2l dar. In der Mitte des Balkens liege die Last 2Q. Gesucht ist das Bruchmoment aus der Lasteinwirkung.

Unter der Einwirkung der Last 2Q senkt sich der Balken um die gewisse Höhe λ ins Wasser, deren Größe gleich $\lambda = Q : l\gamma$ ist, wenn man den Balkenquerschnitt als Einheit nimmt, wobei γ das Kubikgewicht pro Wassereinheit darstellt.

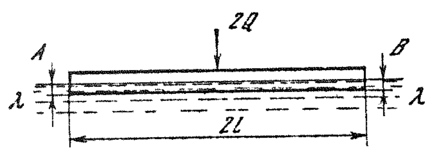

Abb. 6

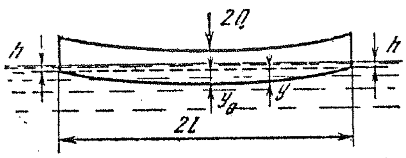

Abb. 7

Wir betrachten den Angriffspunkt von 2Q als Stütze und den Wasserdruck $\lambda\gamma$ als gleichmäßige Belastung und bekommen den Ausdruck für das Bruchmoment. Dies entspricht aber aus folgendem Grunde nicht der Wirklichkeit, da sich der Balken unter dem Einfluß des Bruchmoments in der Mitte durchbiegt und da der als Last angenommene Wasserdruck hier von der Größe der Balkendurchbiegung abhängt. Mit y bezeichnen wir die Ordinaten der Balkendurchbiegung (Abb. 7) und mit h die Belastung seiner Enden. Wir nehmen den Angriffspunkt der Last 2Q als Stütze an und erhalten den Fall eines eingeklemmten Balkens, dessen Belastung nach dem Gesetz $q = (h + y)\gamma$ bestimmt wird. Folglich gilt

$$EI\frac{d^4y}{dx^4} = -(h + y)\gamma.$$

Wir integrieren diese Gleichung und erhalten

$$y = e^{fx}(C\cos fx + C_I \sin fx) + e^{-fx}(C_{II}\cos fx + C_{III}\sin fx) - h, \quad (1)$$

wobei e Basis natürlicher logarithmischer Zahlen und $f = \sqrt[4]{\gamma/4EI}$, C, C_I, C_{II}, C_{III} Konstanten sind.

Die Ableitungen von y nach x sind

$$\frac{dy}{dx} = fe^{fx}[C(\cos fx - \sin fx) + C_{\mathrm{I}}(-\sin fx + \cos fx)] + \\ + fe^{-fx}[-C_{\mathrm{II}}(\cos fx + \sin fx) + C_{\mathrm{III}}(-\sin fx + \cos fx)], \quad (2)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = fe^{2fx}(-C\sin fx + C_{\mathrm{I}}\cos fx) + 2f^2e^{-fx}(C_{\mathrm{II}}\sin fx - C_{\mathrm{III}}\cos fx), \quad (3)$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 2f^3e^{fx}[-C(\sin fx + \cos fx) + C_{\mathrm{I}}(\cos fx - \sin fx)] + \\ + 2f^3e^{-fx}[C_{\mathrm{II}}(\cos fx - \sin fx) + C_{\mathrm{III}}(\cos fx + \sin fx)], \quad (4)$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = -4f^4e^{fx}[C\cos fx + C_{\mathrm{I}}\sin fx] - \\ - 4f^4e^{-fx}[C_{\mathrm{II}}\cos fx + C_{\mathrm{III}}\sin fx]. \quad (5)$$

Die letzte Gleichung ergibt $\frac{d^4y}{dx^4} = -\frac{\gamma}{EI}(h+y)$, folglich war das Integral richtig gewählt.

Die Ausgangsangaben für die oben gestellte Aufgabe sind:

1) im Angriffspunkt der Last $2Q$ bei $x = 0$ ist $dy/dx = 0$. Gleichung (2) ergibt

$$C + C_{\mathrm{I}} - C_{\mathrm{II}} + C_{\mathrm{III}} = 0; \quad (6)$$

2) der Druck auf die Stütze von der einen Hälfte des belasteten Balkens ist Q, folglich $EId^3y/dx^3 = 0$ bei $x = 0$, und aus (3) folgt

$$C + C_{\mathrm{I}} + C_{\mathrm{II}} + C_{\mathrm{III}} = \frac{Q}{2EIf^3} = \beta; \quad (7)$$

3) bei $x = 1$ ist das Bruchmoment am Ende des Balkens 0. e^{fl} bezeichnen wir mit A, tg e^{fl} mit a und erhalten aus (3)

$$-CA^2a + C_{\mathrm{I}}A^2 + C_{\mathrm{II}}a - C_{\mathrm{III}} = 0; \quad (8)$$

4) die Schnittkraft am Ende des Balkens, d.h. bei $x = 1$, ist gleich 0, und deshalb erhalten wir aus (4)

$$-CA^2(1+a) + C_{\mathrm{I}}A^2(1-a) + C_{\mathrm{II}}(1-a) + C_{\mathrm{III}}(1+ \\ + a) = 0. \quad (9)$$

Wir lösen diese Gleichungen und erhalten unter Einsatz von (6) und (7) $C_{\mathrm{II}} = \beta/2 + C$, $C_{\mathrm{III}} = \beta/2 - C_{\mathrm{I}}$. Wir setzen diese Werte in die Gleichungen (8) und (9) ein und erhalten

$$C = \frac{\beta A^2(3-2a+a^2)+1+a^2}{2A^4(a^2+1)+4A^2a-1-a^2},$$

$$C_{\mathrm{I}} = \frac{\beta A^2(1+2a-a^2)-(1+a^2)}{2A^4(a^2+1)+4A^2a-1-a^2}.$$

Durch Bestimmung dieser Konstanten wird die Aufgabe gelöst. Den größten Wert des Bruchmoments erhält man bei $x = 0$, nämlich

$$M = EI\frac{d^2y}{dx^2} = EI2f^2(C_{\mathrm{I}} - C_{\mathrm{III}}) = EI2f^2\left(2C_{\mathrm{I}} - \frac{\beta}{2}\right). \qquad (10)$$

Er bestimmt sich nach den Angaben für A und a und den Abmessungen des Balkens. Ist der Wert fl groß, dann ist der Wert C_{I} annähernd Null und $M = -EIf^2\beta$, d.h. das Moment im Angriffspunkt der Last ist konstant und hängt nicht von der Balkenlänge ab (was in der Praxis beim Bau langer Flußkähne vorkommt). Durch einfache Berechnungen kann man sich davon überzeugen, daß bei $fl < 1$ ohne wesentliche Fehlergröße es für praktische Zwecke nicht notwendig ist, bei der Berechnung die Größe der Balkendurchbiegung zu berücksichtigen. Es genügt, das Moment nach der gewöhnlichen Formel $M = -Ql/2$ zu bestimmen. Ist aber $fl > 1$, dann kann man $M = -{}^1/_2\beta EI2f^2$ ansetzen, wobei $\beta = Q/2f^3EI$.

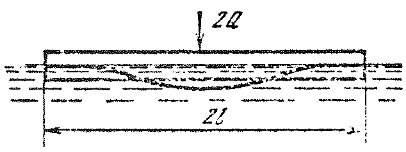

Abb. 8

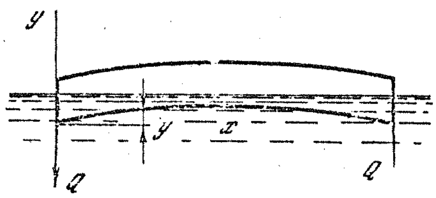

Abb. 9

Folglich ist das Moment $M = -Q/2f$ konstant und unabhängig von der Balkenlänge unter der unerläßlichen Bedingung $fl > 1$. Der Sinn dieser Schlußfolgerung ist offensichtlich. Biegt sich der Balken unter Einwirkung einer Last durch, wie in Abb. 8 dargestellt, dann kann jede Balkenlänge keinerlei Einfluß auf seine Enden haben, da diese Enden keinen merklichen Einfluß auf die Balkendurchbiegung und auf sein Bruchmoment haben können, wenn auch nur die Enden im Wasser schwimmen. Für die an dieser Frage interessierten Leser bringen wir nachstehend noch numerische Angaben, die in elementarer Form die gemachte Schlußfolgerung bestätigen.

2. A u f g a b e. Ein schwimmender Balken mit der Länge 2l sei an den Enden mit der Last Q belastet (Abb. 9). Die Angaben dieser Aufgabe sind folgende:

1) bei $x = a$ ist $M = 0$ und folglich $C_I = C_{III}$;
2) bei $x = 0$ ist $EId^3y/dx^3 = 0$ und deshalb erhalten wir $C + C_I + C_{II} + C_{III} = Q/2f^3EI = \beta$;
3) bei $x = l$ ist $dy/dx = 0$;
4) bei $x = l$ ist $EId^3y/dx^3 = 0$.

Wie vorher setzen wir in die beiden letzten Gleichungen die Werte C_{III} und C_{II} aus den beiden ersten Gleichungen ein und erhalten schließlich unter Bezug auf dieselben Bezeichnungen A und a

$$C = \beta \frac{A^2(1-a^2)+a^2+1}{A^4(a^2+1)+4A^2a-1-a^2},$$

$$C_I = \beta \frac{2A^2a}{A^4(a^2+1)+4A^2a-1-a^2},$$

$$C_{III} = C_I, \qquad C_{II} = \beta + C - 2C_I,$$

$$M = EI\frac{d^2y}{dx^2} = 2f^2EI\left[-Ce^{fx}\sin fx + C_Ie^{fx}\cos fx + \right.$$
$$\left. + \frac{C_{II}\sin fx}{e^{fx}} - \frac{C_{III}\cos fx}{e^{fx}}\right].$$

Ist fl, das zur Bestimmung A gehört, ein größerer Wert, dann sind auch hier - wie im vorhergehenden Fall - C und C_I annähernd Null. Das Moment hat in diesem Fall den Ausdruck

$$M = 2f^2EI\frac{C_{II}}{e^{fx}}\sin fx.$$

Bei zunehmendem x, jenseits der bekannten Grenze, geht das Moment gegen Null, analog zur 1. Aufgabe. Seinen größten Wert erreicht es in diesem Fall bei einem Wert x, der aus der Gleichung $dM/dx = 0$ bestimmt wird, d.h. bei

$$M = 2f^2EI\frac{\sin(\pi/4)}{e^{\pi/4}} = 0,35\frac{Q}{f}.$$

Dies läßt sich sehr einfach erklären: stellen wir uns ein langes und dünnes Brett vor, das im Wasser schwimmt. Wir belasten ein Brettende so stark, daß es aussieht wie in Abb. 10.

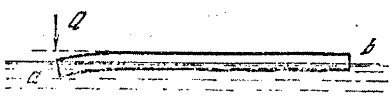

Abb. 10

Am Ende b verändert das lange Brett seine Lage kaum, ungeachtet der Belastung am Ende a. Verbinden wir zwei solche Bretter an den Enden b (Abb. 11), erhalten wir den Fall eines Balkens, bei dem in der Mitte M = 0, das maximale Moment im Punkt $fx = \pi/4$ liegt.

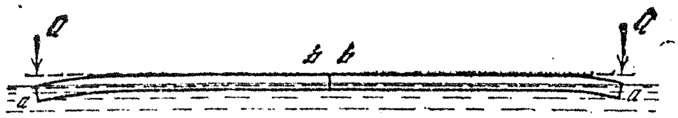

Abb. 11

Bei Anwendung auf praktische Aufgaben muß man zuerst das Moment im Punkt $x = l$ bestimmen, den algebraischen Ausdruck erhält man durch Einsetzen der Werte C, C_I, C_{II}, C_{III} in die Gleichung d^2y/dx^2. Schließlich sieht die Gleichung folgendermaßen aus:

$$M = EI2f^2\beta 2\,\frac{(A^{8'} - A)(a^2 \sin fl + a \cos fl)}{A^4(a^2+1) + 4A^2a - a^2 - 1}.$$

Bei geringem Wert von fl (was dann vorkommt, wenn das Trägheitsmoment I groß oder l klein ist) kann man $A = 1 + fl$ und $\sin fl = \alpha = fl$ annehmen. Dann erhalten wir $M = fl\,EIf^2\beta$, wobei $\beta = Q/2EIf^3$. Folglich ist $M = 0{,}5\ Ql$, wie bei der vorhergehenden Aufgabe.[3)]

Mit zunehmendem fl wird das Moment M kleiner. Aber da sein Maximum nicht mit $x = l$ übereinstimmt, muß man dieses Maximum jedes Mal bestimmen. Vorberechnungen sind dafür nicht nötig. Es reicht auch hier aus anzunehmen, daß das maximale Moment bei allen Werten von $fl < 1$ zwischen $0{,}5\ Ql$ und $0{,}35\ Ql$ variiert und daß es bei $fl > 1$ konstant bleibt und gleich $0{,}35\ Q/f$ ist.

[3)] Hingewiesen sei auf die Behauptung, die Herleitung der Momente aus der Gleichung $d^4y/dx^4 = -y$ ergebe bei kleinen Werten von y dieselben Ergebnisse wie die Gleichung $d^4y/$ $/dx^4 = -q$. (Mit dieser Feststellung kann man unmöglich einverstanden sein. Wahrscheinlich hatte Šuchov an die Gleichung $d^4y/dx^4 = -\alpha y + q$ bei geringen Werten des Koeffizienten α gedacht - Anm.d.Red.).

An diesen beiden Beispielen kann man erkennen, daß die Gleichung für y trotz ihres komplizierten Aussehens für praktische Aufgaben sehr einfach anzuwenden ist. Bei $fl > 1$ kann man C und C_I gleich Null setzen, was für y die Gestalt $y = e^{-fx} - fx$ $(C_{II}\cos fx + C_{III}\sin fx)$ ergibt. Je größer fl, desto genauer entsprechen die Rechenergebnisse der Wirklichkeit. Eine einfache Analyse der Gleichung liefert ein vollständiges Bild über die Veränderung der Momente, der Schnittkräfte und der Ordinaten der Kurve y, die allgemein eine Reihe von Wellen mit schnell fallender Höhe darstellt, wobei sich alle angewandten Untersuchungen auf die erste Welle beschränken. Mit diesen Beispielen schließen wir die Darstellung unserer Gleichung, da ihre Anwendung auf andere Fragen völlig analog ist.

Wird z.B. der schwimmende Balken ab (Abb. 12) im Punkt a abgestützt und mit der ungleichmäßigen Last $p(l - x)$ belastet, erhalten wir eine Aufgabe, die identisch ist mit der, die von mir bei der Bestimmung der größten Spannung in den Blechplatten von Behältern erörtert wurde.[4] Anstelle von γ (Gewicht des Wassers) wird hier der Eisenwiderstand eingesetzt, der durch E/R^2 ausgedrückt wird, wobei R den Behälterradius bezeichnet. Die Lösung dieser Aufgabe ist interessant, weil hier d^4y/dx^4 Funktionen von x und y sind.

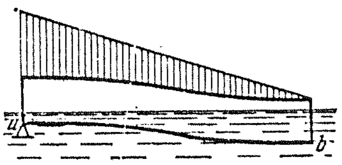

Abb. 12

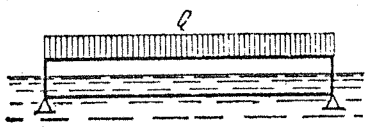

Abb. 13

Nimmt man desweiteren an, der schwimmende Balken werde an den Enden abgestützt und gleichmäßig belastet (die Enden können frei aufliegen oder vermauert sein) (Abb. 13), dann erhalten wir eine Aufgabe, die in dem klassischen Werk "Resal Traite de Mechanique Generale" zur Feststellung der Spannungen in Kesselwänden abgehandelt wurde.

---

[4] Siehe z.B. "Mechanische Anlagen der Erdölindustrie" (Anm.d. Übers.)

Man muß nur berücksichtigen, daß die allgemeine Anwendung der Gleichung $d^4y/dx^4 = -\alpha y$ unter der Voraussetzung gilt, daß bei der Durchbiegung des Balkens der aktive und der passive Widerstand des Stoffes (in unserem Fall Wasser, Eisen und dgl.) gleich sind, d.h. beim Heben des Balkens wie beim Senken sind die Widerstände des Stoffes gleich und proportional zu y. Bekanntlich besitzt der Erdboden diese Eigenschaft nicht.

Zur Erläuterung der vorhergehenden Schlußfolgerungen und zur realitätsgerechten Darstellung sowohl der Herleitung als auch der Endergebnisse nennen wir für die erste Aufgabe Zahlenbeispiele. Auf der Wolga verkehren zahlreiche Eisenkähne (für Schüttgüter) verschiedener Länge von 50 bis 130 m und ca. 2 m Höhe.

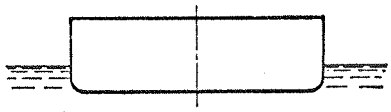

Abb. 14

Der Querschnitt des Kahnes ist beinahe rechtwinklig und die (diesbezügliche) Eisendicke von Deck und Sohle beträgt gewöhnlich 0,5 cm (Abb. 14). Folglich beträgt das Trägheitsmoment I des Kahnquerschnitts bezogen auf die Länge 1 cm seiner Längenabmessung $I = 0{,}5 \times 100^2 \times 2 = 10\,000 \text{ cm}^4$, das Gewicht von 1 cm^3 Wasser $= 0{,}001$ kg. Für das Eisen gilt $E = 2 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$ und $f = \sqrt[4]{\gamma/4EI} \cong 1/3000$. Angenommen, der Kahn wird in der Mitte mit der Last 2Q beladen, wobei $\beta = Q/E2If^3$, werden für die verschiedensten Kahnlängen mit ein und demselben I nach den Formeln dieser Aufgabe für C_I und C_{II} folgende Koeffizienten errechnet.

Bei einer Länge von $2l = 27{,}8$ m ist $fl = 1300/3000 \cong 0{,}464$ (abstrakte Zahl); $a = \operatorname{tg} fl = \operatorname{tg}(180/\pi)0{,}464 = \operatorname{tg} 26°40' = 0{,}5$; $a^2 = 0{,}25$; $A = e^{fl} = 1{,}59$; $A^2 = 2{,}53$; $A^4 = 6{,}4$ und wir erhalten $C = 0{,}58784\,(\beta/2)$; $C_I = 0{,}26905\,(\beta/2)$.

Das größte Bruchmoment in der Kahnmitte beträgt

$$M = 2Ef^2I\,(2C_{\mathrm{I}} - \beta/2) = -f^2EI\beta\cdot 0{,}4619;$$

Wir setzen den Ausdruck β ein und erhalten

$$M = \frac{QEIf^2}{2EIf^3}\,0{,}4619 = -\,0{,}4619\,\frac{Q}{2f}\,.$$

Berücksichtigt man die Durchbiegung des Kahnes nicht und bestimmt das Moment auf übliche Weise ohne Hinzuziehung der Gleichung 4ter Ableitung, dann ist $\mathfrak{m} = -Ql/2$, aber $l = 0{,}464/2f$ und $\mathfrak{m} = -0{,}464Q/2f$, d.h. unter praktischen Bedingungen ist in diesem Fall der Unterschied zwischen M und $\mathfrak{m}$ völlig belanglos, weshalb, wie bereits gezeigt, in diesem Fall M durch $\mathfrak{m}$ ersetzt werden kann.

Bei $l = 20$ m, $fl = 0{,}6748$ ist auf die gleiche Weise $C = 0{,}27069$ und $C_I = 0{,}16858$; bei $l = 33$ m und $fl \cong 1$ ist $C = 0{,}06646$ und $C_I = 0{,}0085$. Hieraus geht hervor, daß mit zunehmendem fl der Koeffizient C_I sehr schnell abnimmt, weshalb man ihn auch gleich Null setzen kann und bei $fl > 1$ für das Bruchmoment

$$M = \frac{Q}{2f}\left[\frac{2C_{\mathrm{I}}}{\beta} - 1\right] = -\frac{Q}{2f} = 1500Q \text{ kg cm},$$

annehmen kann, d.h. das Bruchmoment hängt nicht von der Länge des Kahnes ab.

Ist einmal dieses Moment bekannt, ist auch die Frage vollständig beantwortet, welche Last man in die Mitte eines Kahnes legen kann, ohne seinen Querschnitt zu gefährden. Auf dieselbe Weise wird auch der zulässige Wellenwiderstand des Kahnquerschnitts bestimmt.

Nach den ermittelten numerischen Werten für C, C_I, C_{II}, C_{III} läßt sich desweiteren auch die Durchbiegung y an der Stelle der Lasteinwirkung bestimmen, was uns wichtige Hinweise dafür gibt, wie sehr die Durchbiegung des Schiffsrumpfes sein Eindringen ins Wasser zunehmen läßt. Ohne derartige Berechnungen können die Enden oder die Mitte solche Durchbiegungen erfahren, die einen Betrieb des Schiffes unmöglich machen.

Stuttgart, den 18. August 1988

übersetzt von
Ottmar Pertschi
(Ottmar Pertschi)
Dipl.-Übersetzer