Borodin, O.V.

Über die chromatische Zahl der Graphen mit 1-Einbettung in eine Pseudoebene.

Metody diskretnogo analiza v teorii grafov i logičeskich funkcij. (Sbornik naučnych trudov. Institut matematiki Sibirskogo otdelenija Akademii nauk SSSR.) Novosibirsk, 43 (1986), S. 3 - 11.

Russ.: О хроматическом числе графов, I-вложимых в псевдоплоскость
O chromatičeskom čisle grafov, I-vložimych v psevdoploskost'

Einleitung. Die Pseudoebene $S^{(p)}$ erhält man aus einer Ebene durch paarweise Identifizierung *2p* verschiedener Punkte. Bekannt sind drei Formen der Einbettung von Graphen in eine Pseudoebene:

a) die Kanten verlaufen nicht durch singuläre Punkte;
b) keine Beschränkungen;
c) in den singulären Punkten gibt es keine Ecken.

In Analogie zum klassischen Heawood-Ringel-Problem [1, 2] ergeben sich Probleme beim Auffinden des Maximums chromatischer Zahlen von Graphen mit Einbettung in $S^{(p)}$ im Sinne "a", "b", "c". Die Probleme "a" und "b" sind vollständig in [3] gelöst, das Problem "c" in [4].

1965 führte Ringel [5] den Begriff der 1-Einbettbarkeit eines Graphen in eine Fläche ein, wonach jede Kante im Innern von nicht mehr als einer einzigen anderen Kante gekreuzt werden kann. Dort zeigte Ringel auch auf, daß man einen beliebigen Graphen mit 1-Einbettung in eine Ebene mit 7 Farben färben kann, und äußerte die Vermutung, daß man auch mit 6 Farben auskommen kann. Am Beispiel eines Dreieckprismas, in dem alle 6 Diagonalen auf die Seitenkanten verlaufen, zeigte er, daß man mit weniger als 6 Farben nicht auskommt.

Unlängst gelang dem Verfasser des vorliegenden Artikels der Beweis der Ringelschen Vermutung [6]. Nachstehend wird eine Verallgemeinerung dieses Ergebnisses am Fall einer 1-Einbettung von Graphen in $S^{(p)}$ im Sinne von "a" mitgeteilt.

THEOREM. Die kleinste Zahl von Farben, die für eine Färbung eines beliebigen Graphen mit 1-***Einbettung in*** $S^{(p)}$ ***ohne Verschiebung der Ecken in die singulären Punkte notwendig ist, ist gleich*** $\lfloor (9+\sqrt{17+16p})/2 \rfloor$ ***füri*** $0 < p \neq 4$ ***und gleich*** 8 ***für*** $p = 4$.

BEWEIS des Theorems. Zuerst führen wir gewisse Definitionen ein. Der Graph G sei so in die Pseudoebene $S^{(p)}$ eingebettet, daß in seinen singulären Punkten die Ecken des Graphen nicht liegen. Die durch die singulären (doppelten) Punkte der Pseudoebene verlaufenden Kanten nennen wir besondere, und die restlichen unterteilen wir in einfache und gekreuzte. Infolge der Definition der 1-Einbettbarkeit verlaufen durch einen singulären Punkt nicht mehr als zwei Kanten. Ist v eine Ecke, dann sind $f(v)$, $g(v)$ und $h(v)$ die Zahlen der einfachen, gekreuzten und besonderen Kanten, inzident zu v, und $s(v) = f(v)+g(v)+h(v)$ ist der Grad (oder Valenz) der Ecke v. Mit G' bezeichnen wir den 1-ebenen Graphen [6], den man durch Zerlegung der singulären Punkte der Pseudosphäre erhält. Den Graphen G'' erhält man aus G' durch Entfernung der besonderen Kanten mit Ecken vom Grad 1. Bei Entfernung der gekreuzten Kanten aus G'' erhält man schließlich den Graphen G'''. Und wir nennen die so konstruierten Graphen erste, zweite und dritte Ableitungen des Graphen G.

Wir beschreiben die Prozedur der **Normalisierung** des Graphen G mit 1-Einbettung in $S^{(p)}$. Ihr Wesen besteht in der Hinzufügung von Kanten zu G, die nicht zum Auftreten von Zweiecken in G''' führen. Verlaufen in G die besonderen

Kanten (a, b) und (c, d) durch ein und denselben singulären Punkt, wobei in G' in einem der Exemplare dieses singulären Punktes die Halbkanten aus a und c zusammenkommen, und im anderen aus b und d, so ergibt sich in G bei $a \neq c$ eine Kante in Form eines "ausgedehnten Dreiecks" mit Halbkanten und einem singulären Punkt, und bei $b \neq d$ ergibt sich (b, d) (siehe Abb. 1).

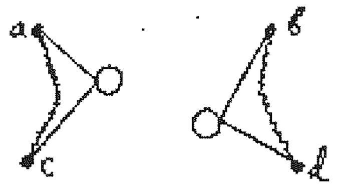

Abb.1

Kreuzen sich die Kanten (a, b) und (c, d), dann ergeben sich analog die Kanten (a, c), (c, b), (b, d), (d, a), die an den gekreuzten Halbkanten "anliegen" (siehe Abb. 2).

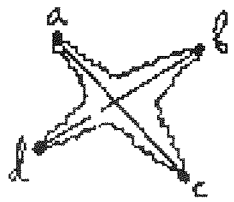

Abb.2

Gibt es in der dritten Ableitung H''' des ermittelten Multigraphen H Zweiecke, dann eliminieren wir sie alle und entfernen sukzessiv jene der hinzugefügten Kanten, die im Moment des Entfernens in irgendein Zweieck hineingehen. Wir führen die Triangulierung aller Flächenstücke des Graphen H''' außer der Vierecke durch, die durch Entfernen der Paare gekreuzter Kanten sich ergaben, danach sukzessiv jedes Paar Dreiecke, die zur Kante e inzident sind, transformieren in H''' in ein Viereck, indem wir zu H eine mit e gekreuzte Kante hinzufügen.

Den ermittelten Multigraphen G_+ nennen wir **Normalisierung** des Graphen G. Man kann leicht erkennen, daß G_+ aus G durch Hinzufügung von Kanten resultiert, und $G_+^{'''}$ enthält nur Drei- und Vierecke, wobei keine zwei Dreiecke benachbart sind.

Es gelten die Gleichungen:

$$V(G_+^{'''}) - E(G_+^{'''}) + F(G_+^{'''}) = 2,$$

$$3F_3(G_+^{'''}) + 4F_4(G_+^{'''}) = 2E(G_+^{'''}),$$

$$F_3(G_+^{'''}) + F_4(G_+^{'''}) = F(G_+^{'''}),$$

wobei V, E, F, F_3 und F_4 die Zahlen der Ecken, Kanten, Flächen, Dreiecke und Vierecke sind.

Hieraus folgt

$$8V(G'''_+) - 8E(G'''_+) + 8F_3(G'''_+) + 8F_4(G'''_+) = 16,$$
$$9F_3(G'''_+) + 12F_4(G'''_+) = 6E(G'''_+).$$

Und schließlich ist

$$8V(G'''_+) - 2E(G'''_+) - 4F_4(G'''_+) = F_3(G'''_+) + 16$$

oder

$$\sum_{v \in G} (f(v) + g(v) - 8) = - 16 - F_3(G'''_+). \qquad (1)$$

Im weiteren Verlauf brauchen wir die Ungleichungen:

$$\sum_{v \in G} (f(v) + g(v) + h(v) - 8) \leq - 16 - F_3(G'''_+) + 4p,$$
$$\sum_{v \in G} (s(v) - 8) \leq - 16 - F_3(G'''_+) + 4p \leq - 16 + 4p, \qquad (2)$$
$$2E(G_+) - 8V(G_+) \leq - 16 - F_3(G'''_+) + 4p,$$
$$E(G) \leq E(G_+) \leq 4V(G_+) + 2p - F_3(G'''_+)/2 \leq 4V(G) + 2p - 8. \qquad (3)$$

LEMMA 1. Ist G ***ein Multigraph ohne Schleifen, 1-einbettbar in*** $S^{(1)}$, ***dann ist*** $\mathrm{X}(\mathrm{G}) \leq 7$.

BEWEIS. G sei nach der Zahl der Ecken kleinstes Gegenbeispiel zum Theorem, und seine Einbettung in $S^{(1)}$ sei fixiert. Man kann annehmen, daß es in G''' bei dieser Einbettung keine Zweiecke gibt und G normalisiert ist, d.h. $G = G_+$.

FALL 1. In G''' gibt es keine trennenden 3- und 4-Zyklen.

Bemerkt sei, wenn es in G''' einen trennenden 2-Zyklus gibt, dann erhalten wir, unter Entfernung seines Außengebietes und danach einer seiner beiden Kanten, eine 3, 4-Angulation. Stellt sie nur ein Dreieck oder Viereck dar, dann läßt sich in G eine Ecke mit einem Grad unter 7 feststellen, was der Minimalität von G widerspricht. Das heißt, das Innere des sich bildenden äußeren Dreiecks oder Vierecks ist nicht leer.

Da es in G keine Ecken unter einem Grad von 7 gibt, besteht der negative Beitrag zur linken Seite von (2) nur aus 7-valenten Ecken, folglich liegt ihre Zahl über $12+F_3(G''')$. Nicht weniger als acht davon sind mit den besonderen Kanten nicht inzident. Wir wähle einen solche 7-valente Ecke v (siehe Abb. 3). Wenn bei Entfernung von v und Klammerung von a,c bzw. b, d keine Knoten auftreten würden, dann wäre der ermittelte Graph infolge der Minimalität von G 7-färbbar, obwohl sich seine 7-Färbung auf v ausdehnt, was der Annahme über G widerspricht. Folglich gibt es in G die Kanten (a, c) und (b, d). Sie können beide nicht einfach oder gekreuzt sein, da es in G keine trennenden 3- und 4-Zyklen gibt. D.h., sie sind beide besondere. Aber dann gibt es aufgrund der Normalität des Graphen G darin die einfache Kante (c, d), die einfachen Kanten (b, c) und (a, d), was ebenfalls dazu führt, daß man trennende 3-Zyklen festellt.

FALL 2. In G''' gibt es trennende 3- oder 4-Zyklen ohne Trennung der zwei Exemplare ein+es singulären Punktes in G'.

Daß es in G eine trennende Menge von Ecken gibt, die eine Clique induziert, widerspricht seiner Minimalität.

FALL 3. Der Zyklus C ist hinsichtlich des Einschlusses innerhalb der 3- und 4-Zyklen in G''' minimal, wobei C die Exemplare eines singulären Punktes abtrennt.

Wir bezeichnen mit $Out(C)$ und $Int(C)$ die Untergraphen des Graphen G, induziert durch die Ecken, die sich inner- und außerhalb des C-Zyklus befinden.

Aus (1) folgt für den Graphen $H = G'' \setminus Out(C)$ bei $C = C_3$:

$$\sum_{v \in C_3} (s_H(v) - 4) + \sum_{v \in Int(C_3)} (s_H(v) - 8) \leq -4 - F_3(H),$$

mit $s_H(v) \geq 4$ bei $v \in C_3$ infolge Minimalität von C.

Bei $C = C_4$ erhalten wir:

$$\sum_{v \in C_4} (s_H(v) - 5) + \sum_{v \in Int(C_4)} (s_H(v) - 8) \leq -4 - F_3(H),$$

wobei analog $S_H(v) \geq 5$ bei $v \in C_4$.

Somit ist

$$\sum (s_H(v) - 8) \leq -4 - F_3(H).$$

Und hieraus ist

$$\sum_{v \in Int(C)} (s(v) - 8) \leq -2 - F_3(H), \tag{4}$$

da nicht mehr als zwei Kanten inzident sind zu den Ecken aus $Int(C)$, wobei die zweiten Kanten dieser Enden infolge des Falles 2 in $Out(C)$ liegen.

Dies bedeutet: in $Int(C)$ gibt es nicht weniger als $2+F_3(H)$ Ecken vom Grad 7.

Wir behaupten, in $Int(C)$ haben mindestens drei Ecken den Grad 7. In Wirklichkeit sei $F_3(H) = 0$. Bemerkt sei, daß $s_H(v) = 5$ für $v \in C_4$ nur dann ist, wenn v zum Dreieck in H inzident ist, d.h.

$$\sum_{v \in Int(C)} (s(v) - 5) > 0,$$

und in (4) gilt eine strikte Ungleichung.

Da aufgrund des Falles 2 nicht mehr als zwei Ecken aus $Int(C)$ mit den besonderen Kanten inzident sind, so findet sich in $Int(C)$ eine 7-valente Ecke v, die mit den besonderen Kanten nicht inzident ist (siehe Abb. 3). In G gibt es keine einfachen oder gekreuzten Kanten (a, c) und (b, d). In Wirklichkeit gebe es (b, d), dann bezeichnen wir mit C' den kleinsten für den Einschluß unter den 3-Zyklen der Form bvd und den 4-Zyklen der Form $bldv$. Nach der Definition ist C,

$C' \notin \mathrm{H}$. Doch ist $v \in Int(C)$, d.h. $b, d \notin C$. Der Zyklus C wird durch die Ecken b, d in die zwei Ketten L_1, L_2 zerlegt, von denen die kürzere L_1 eine Länge von höchstens 2 hat. Dann widerspricht der Zyklus $L_1 v$ der Minimalität von C.

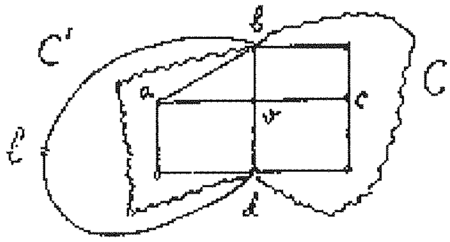

Abb.3

Es bleibt noch der Fall zu diskutieren, daß es zwei besondere Kanten (a, c) und (b, d) gibt. Aber da die Ecken a, b, c, d benachbart sind zur Ecke $v \in Int(C)$, ist $\{a, b, c, d\} \leq \mathrm{H}$. Weil G normalisierter Graph ist, gibt es in ihm entweder eine einfache Kante (b, c) oder (c, d), d.h. auch die trennenden Dreiecke (b, v, c) bzw. (c, v, d). Da entweder b und c oder c und d mit ein und demselben Exemplar des besonderen Punktes benachbart sind, so darf man annehmen, daß beide Exemplare auf einer Seite des ermittelten Trenn-Dreiecks liegen, was zum Fall 2 führt.

Das Lemma 1 ist damit bewiesen.

LEMMA 2. Ist G ***1-einbettbar in*** $\mathrm{S}^{(p)}$, $p \geq 2$, ***dann ist*** $\mathrm{X(G)} \leq \lfloor (9+\sqrt{17+16p})/2 \rfloor$.

BEWEIS. Wir nehmen an $\mu(p) = \lfloor (9+\sqrt{17+16p})/2 \rfloor$. G sei minimales Gegenbeispiel zum Lemma 2, dann ist $s(v) \geq \mu(p)$ bei allen $v \in \mathrm{V(G)}$. Hieraus ist $|\mathrm{V(G)}| \geq \mu(p)+1$. Angemerkt sei auch, daß $\mu(p) \geq 8$ für $p \geq 2$.

Aus (2) erhalten wir:

$$(\mu(p) + 1)(\mu(p) + 1 - 9) \leq \sum_{v \in V(G)} (s(v) - 8) \leq - 16 + 4p - F_3(G_+''') \leq - 16 + 4p.$$

Wir lösen die Ungleichung $(\mu(p)+1)(\mu(p)+1-9) \leq -16+4p$ bezüglich $\mu(p)+1$ und erhalten $\mu(p)+1 \leq (9+\sqrt{17+16p})/2$ oder, aufgrund der Ganzzahligkeit von $\mu(p)$

$$\mu(p) + 1 \leq \lfloor (9+\sqrt{17+16p})/2 \rfloor = \mu(p).$$

Dieser Widerspruch beweist Lemma 2.

LEMMA 3. Für $p \neq 4$ ***gibt es eine 1-Einbettung*** $\mathrm{K}_{\mu(p)}$ ***in*** $\mathrm{S}^{(p)}$, ***und es gibt eine 1-Einbettung*** K_9 ***in*** $\mathrm{S}^{(5)}$.

BEWEIS. In Abb. 4 sind die Ableitungen der minimalen (nach der Zahl der singulären Punkte) 1-Einbettungen der Graphen K_6, K_7, K_8, K_9 und K_{13} dargestellt sowie die Vorschriften zum Einzug der singulären Kanten. Die Minimalität der 1-Einbettung von K_9 wird im Lemma 4 aufgezeigt, die Minimalität der übrigen vier 1-Einbettungen folgt aus (3). Die Schreibweise (*a, b : c, d*) bedeutet, daß durch einen gemeinsamen singulären Punkt die Kanten (*a, c*) und (*b, d*) verlaufen, wobei eines der Exemplare des singulären Punktes an der Kante (*a, b*) und das andere an der Kante (*c, d*) "anliegt". Bei "d" führt der letzte Punkt nur eine einzige Kante (1, 8).

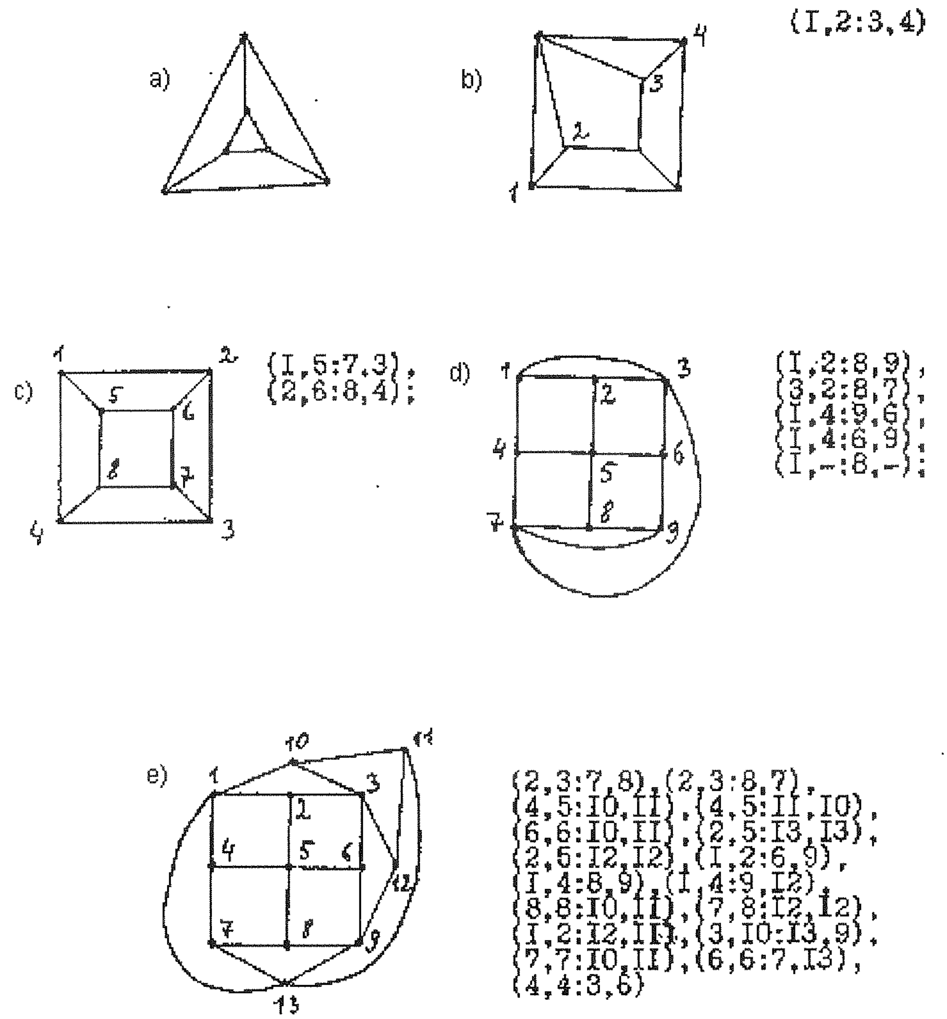

Abb. 4

Jetzt beweisen wir, wie man aus einer Minimal-1-Einbettung des Graphen K_n, $n \neq 9$ die Minimal-1-Einbettung des Graphen K_{n+4} konstruiert. Es gebe im Graphen K_n''' das Viereck *abcd*. Wir legen in es das Viereck 1234 und ziehen noch die Kanten (*a, 1*), (*b, 2*), (*c, 3*) und (*d, 4*). In dem ermittelten Graphen sind im Vergleich zum vorhergehenden die gekreuzten Kanten (*a, c*) und (*b, d*) verloren gegangen; wir ziehen sie folgendermaßen: (*a, b : c, d*). Für jede der Ecken x des

Graphen $K_n\setminus\{a, b, c, d\}$ muß die Nachbarschaft von x mit 1, 2, 3, 4 erreicht werden. Dies gelingt durch zwei singuläre Punkte: (x, x : 1, 2) und (x, x : 3, 4). Der Vollständigkeit des konstruierten Graphen wegen bedarf es noch der Kanten (*a, 3*), (*b, 4*), (*c, 1*) und (*d, 2*); man kann sie folgendermaßen ziehen: (*a, 1 : 3, c*), (*b, 4 : 2, d*). Die Minimalität des konstruierten Graphen nach der Zahl der singulären Punkte, die bei der 1-Einbettung in die Pseudosphäre verwendet werden, folgt aus (3).

Das Lemma 3 ist bewiesen.

LEMMA 4. Ist der Graph G ***1-einbettbar in*** $S^{(4)}$***, dann ist*** $\chi(G) \leq 8$.

BEWEIS. Zuerst weisen wir nach, daß es keine 1-Einbettung des Graphen K_9 in $S^{(4)}$ gibt. Wir unterstellen das Entgegengesetzte, nämlich daß er vorkommt, und bezeichnen ihn mit G. Dann folgt aus (2), daß G''' Quadrangulierung ist, aber G'''' enthält keine Mehrfach-Kanten. Dies bedeutet, daß in G'''' keine Ecken vom Grad 2 vorkommen. Andererseits gibt es in G''' keine Ecken des Grades 5 oder höher. Man kann leicht aus (1) ableiten, daß in G''' eine der Ecken den Grad 4 hat und die übrigen den Grad 3. Wir untersuchen die 4-valente Ecke *v* des Graphen G''''. Man kann leicht erkennen, daß die vier, nicht mit *v* benachbarten Ecken nicht mit den zwei vorhandenen Kanten so verbunden werden können, daß es eine ebene Quadrangulierung gäbe. Widerspruch.

Jetzt beweisen wir die Behauptung des Lemmas. Der Graph G sei kleinster unter den in $S^{(4)}$ einbettbaren, mit 8 Farben nicht färbbaren. Dann ist $s(v) \geq 8$ für ein beliebiges $v \in V(G)$, deshalb ist

$$\sum_{v \in G} s(v) \geq 8\ |V(G)|,$$

und aus (2) folgt, daß

$$\sum_{v \in G} s(v) \leq 8\ |V(G)|,$$

und daher G gleichartigen Grades $s(v) = 8$ ist. Aber dies widerspricht dem Theorem von Brooks.

Das Lemma 4 ist damit bewiesen.

Der Beweis des Theorems folgt aus der 6-Färbbarkeit 1-ebener Graphen, bewiesen in [6], und aus den Lemmata 1 - 4.

Der Verfasser ist Herrn V. A. Aksënov für seine fruchtbaren Anmerkungen während der Niederschrift dieser Arbeit zu Dank verbunden.

Literatur

1. *Heawood, P.J.:* Map-colour theorem. - In: The quarterly journal of pure and applied mathematics. London, 24 (1890), S. 332 - 338.

2. *Ringel, Gerhard; Youngs, J.W.T.:* Solution of the Heawood map-colouring problem. - In: Proceedings of the National Academy of sciences of the United States of America. Washington, D.C., 60 (1968), S. 438 - 445.

3. *Бородин О.В.; Мельников Л.С.:* О хроматическом числе псевдоповерхности. - Сборник трудов. Институт математики Сибирского отделения Академии наук СССР. Новосибирск, 24 (1974), S. 8 - 20.
Borodin, O.V.; Mel'nikov, L.S.: O chromatičeskom čisle psevdopoverchnosti. - In: Sbornik trudov. Institut matematiki Sibirskogo otdelenija Akademii nauk SSSR. Novosibirsk, 24 (1974), S. 8 - 20.
/Über die chromatische Zahl der Pseudoflächen. - Übersetzung Nr Ü/511 der Übersetzungsstelle der Universitätsbibliothek Stuttgart, 12 Seiten/

4. *Kainen, Paul C.:* Chromatic number and skewness. - In: Journal of combinatorial theory. Series B. New York/London, 18 (1975), Nr 1, S. 32 - 34.

5. *Ringel, Gerhard:* Ein Sechsfarbenproblem auf der Kugel. (Emanuel Sperner zum 60. Geburtstag gewidmet.) - In: Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg. Hamburg, 29 (1966), S. 107 - 117.

6. *Бородин О.В.:* Решение задач Рингеля о вершинно–граневой раскраске плоских графов и о раскраске 1-планарных графов. - Методы дискретного анализа в изучении реализаций логических функций. (Сборник научных трудов. Институт математики Сибирского отделения Академии наук СССР.) Новосибирск, 41 (1984), S. 12 - 26.
Borodin, O.V.: Rešenie zadač Ringelja o veršinno-granevoj raskraske ploskich grafov i o raskraske 1-planarnych grafov. - In: Metody diskretnogo analiza v izučenii realizacij logičeskich funkcij. (Sbornik naučnych trudov. Institut matematiki Sibirskogo otdelenija Akademii nauk SSSR.) Novosibirsk, 41 (1984), S. 12 - 26.
/Solution of Ringel's problems concerning the vertex-faced coloring of planar graphs and the coloring of 1-planar graphs; russ./

Redaktionseingang
17. Mai 1985

Stuttgart, den 10. Juli 1998

übersetzt von

Ottmar Pertschi

(Ottmar Pertschi)
Dipl.-Übersetzer