

Borodin, O.V.; Mel'nikov, L.S.

Über die chromatische Zahl der Pseudoflächen

aus: Diskretnyj analiz. (Sbornik trudov. Institut matematiki Sibirskogo otdelenija Akademii nauk SSSR.) Novosibirsk, 24 (1974), S. 8 - 20.

Russ.: O хроматическом числе псевдоповерхности
 O chromatičeskom čisle psvedopoverchnosti

1. Einleitung. In [1] wurde für die chromatische Zahl $X(\mathfrak{G}_k)$ der Pseudosphäre \mathfrak{G}_k bewiesen, daß

$$X(\mathfrak{G}_k) \leq k + 4 \quad (k > 0), \quad (1)$$

$$X(\mathfrak{G}_k) = k + 4 \quad (k = 1, 2). \quad (2)$$

Dort wurde außerdem vermutet, daß die Gleichung (2) für beliebige $k > 0$ gilt. In dieser hier vorliegenden Arbeit wird die Klasse der Graphen, die eine Einbettung in die Pseudosphäre \mathfrak{G}_k erlauben, etwas erweitert, und für diese Klasse wird bewiesen, daß

$$X(\mathfrak{G}_k) = \begin{cases} k + 4, & 1 \leq k \leq 4, \\ 8 & k = 5, \\ \left[\frac{8 + \sqrt{1 + 24k}}{2} \right]^* & 6 \leq k \leq 11, \\ \left[\frac{11 + \sqrt{73 + 8k}}{2} \right] & k \geq 12, \end{cases}$$

d.h. die Vermutung über die Gleichung (2) ist widerlegt. Zum Schluß der Arbeit wird eine scharfe, von einem gewissen k an gültige, obere Abschätzung für die chromatische Zahl der Pseudofläche \mathfrak{F}_k gegeben.

Untersucht werden die gewöhnlichen Graphen $G(X, U)$, d.h. ungerichtete Graphen ohne Schleifen und Parallelkanten. Die hier nicht erklärten Begriffe kann der Leser in [2 - 4] finden.

Die **Pseudofläche** \mathfrak{F}_k wird definiert als eine Fläche, die aus einer geschlossenen zweidimensionalen (gerichteten oder ungerichteten) Fläche \mathfrak{F} (siehe [3] § 6) durch paarweise Identifizierung von k Paaren verschiedener Punkte ($k \geq 0$) ermittelt wird. Die ermittelten k Punkte der Pseudofläche nennen wir **singuläre**. Ist die geschlossene zweidimensionale Fläche eine Sphäre, $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}$, so heißt eine solche Fläche \mathfrak{F}_k **Pseudosphäre** und wird mit \mathfrak{G}_k bezeichnet. Als **Einbettung des Graphen G** in die Pseudofläche \mathfrak{F}_k wird eine solche Anordnung seiner Ecken und Kanten in der Pseudofläche bezeichnet, daß zwei beliebige Kanten keine gemeinsamen Punkte besitzen, mit Ausnahme des Falles, wo sie mit einer gemeinsamen Ecke im Graphen G inzident sind. Diese Definition der Einbettung des Graphen in die Pseudofläche unterscheidet sich von der in [1] gegebenen Definition, da sie einen beliebigen Punkt der Pseudofläche einen inneren Punkt der Kante des Graphen G sein läßt. Die Einbettung des Graphen in die Pseudofläche ist ein mathematisches Modell für jene reale Situation, wo wir, wegen erfolgloser Versuche, eine bestimmte elektrische Schaltung in eine Ebene einzubetten, eine gewisse Menge von Verbindungen und sogar von Elementen annehmen, die außerhalb der Ebene liegen (dabei zerfallen die Verbindungen der ausgewählten Schaltelemente in zwei Gruppen, wovon eine jede zu einem Stück der Ebene gehört, das die Punkte der bereits eingebetteten Schaltung nicht

* Die Klammern [] bezeichnen hier und desweiteren den ganzen Teil der Zahl, d.h. die größte, nicht über den in der Klammer stehenden Ausdruck hinausgehende, ganze Zahl.

enthält). Die **chromatische Zahl der Pseudofläche** $X(\mathfrak{F}_k)$ ist die größte chromatische Zahl in der Klasse der Graphen, die in \mathfrak{F}_k eingebettet werden können. Der Graph G sei in die Pseudofläche \mathfrak{F}_k mit Minimalzahl der besonderen Punkte eingebettet. Diese singulären Punkte unterteilen sich in e - und v -Punkte: durch die ersteren verläuft eine bestimmte Kante G ; die zweiteren stimmen mit gewissen Ecken des Graphen G überein, $n_e(n_v)$ sei die Zahl der e -(v -)Punkte, $n_e+n_v = k$. Die **Zerlegung** \tilde{G} des Graphen G heißt derjenige Graph, der auf der geschlossenen zweidimensionalen Fläche \mathfrak{F} liegt und aus G durch Zerlegung sämtlicher singulären Punkte der Pseudofläche \mathfrak{F}_k gebildet wurde. Dabei erzeugt jeder v -Punkt zwei Ecken des Graphen \tilde{G} , jeder e -Punkt erzeugt zwei isolierte Ecken; in Abbildungen werden die zerlegten singulären Punkte durch Kreise mit identischen Indizes bezeichnet. Der Graph \hat{G} , der durch Eliminierung der isolierten Ecken aus \tilde{G} , welche bei der Zerlegung der e -Punkte entstehen, ermittelt wird, heißt **fundamentaler**.

Bleiben wir etwas ausführlicher bei der chromatischen Zahl der Pseudosphäre $X(\mathfrak{B}_k)$.

2. Obere Abschätzung. Wir definieren die Funktion $\mathfrak{D}(k)$ folgendermaßen:

$$\mathfrak{D}(k) = \begin{cases} k + 4 & 0 \leq k \leq 5, \\ \left[\frac{7 + \sqrt{1 + 24k}}{2} \right] & 3 \leq k \leq 12, \\ \left[\frac{11 + \sqrt{73 + 8k}}{2} \right] & k \geq 10. \end{cases}$$

Es ist leicht zu erkennen, daß $\mathfrak{D}(k)$ eindeutig bestimmt ist. Für $k \geq 0$ ist $\mathfrak{D}(k) = \min\{k+4, [(7 + \sqrt{1+24k})/2], [(11 + \sqrt{73+8k})/2]\}$. Wir bezeichnen mit $\delta(G)$ den minimalen Eckengrad des Graphen G , $\delta(G) = \min_{x \in X} S(x)$; $n(G)$, $m(G)$ und $f(G)$ seien die Anzahlen der Ecken, Kanten und Flächen des Graphen G .

LEMMA 1. G sei in die Pseudosphäre \mathfrak{B}_k ($k \geq 2$) eingebettet. Dann gilt $\delta(G) \leq \mathfrak{D}(k) - 1$.

BEWEIS durch Widerspruch. Es sei $\delta(G) \geq \mathfrak{D}(k)$. Dann ist $n(G) \geq \mathfrak{D}(k)+1$. Da die Zerlegung \tilde{G} des auf der Pseudosphäre liegenden Graphen G ein ebener Graph ist, so gilt

$$m(\tilde{G}) \leq 3n(\tilde{G}) - 6. \quad (3)$$

Nach den in der Einleitung gegebenen Definitionen gilt $n(\tilde{G}) = n(G)+n_v$, $m(\tilde{G}) = m(G)-n_e$, $n_e+n_v = k$. Wir setzen diese Gleichungen in (3) ein und erhalten

$$m(G) \leq 3n(G) + 2n_v + k - 6$$

oder

$$\sum_{x \in \mathcal{X}} (S(x) - 6) \leq 4n_v + 2k - 12. \quad (4)$$

Offensichtlich sind die folgenden Ungleichungen richtig: (a) $n_v \leq k$; (b) $n_v \leq n(G)$. Setzt man (a) oder (b) in (4) ein, dann erhält man

$$\sum_{x \in \mathcal{X}} (S(x) - 6) \leq 6k - 12 \quad (5)$$

oder

$$\sum_{x \in \mathcal{X}} (S(x) - 10) \leq 2k - 12. \quad (6)$$

Aber nach der Annahme $S(x) \geq \delta(G) \geq \mathfrak{D}(k)$ und $n(G) \geq \mathfrak{D}(k)+1$ aus (5) und (6) erhalten wir bei $k > 2$ und $k > 6$ dementsprechend

$$(\mathfrak{D}(k) + 1)(\mathfrak{D}(k) - 6) \leq 6k - 12, \quad (7)$$

$$(\mathfrak{D}(k) + 1)(\mathfrak{D}(k) - 10) \leq 2k - 12. \quad (8)$$

Aus (7) erhalten wir

$$\mathfrak{D}(k) + 1 \leq \left\lceil \frac{7 + \sqrt{1 + 24k}}{2} \right\rceil.$$

Rechts jedoch steht die Funktion $\mathfrak{D}(k)$ für $3 \leq k \leq 12$; ein Widerspruch. Aus (8) erhalten wir

$$\mathfrak{D}(k) + 1 \leq \left\lceil \frac{11 + \sqrt{73 + 8k}}{2} \right\rceil.$$

Rechts jedoch steht $\mathfrak{D}(k)$ für $k \geq 10$. Der Widerspruch beweist vollständig Lemma 1.

THEOREM 1. Für die chromatische Zahl der Pseudosphäre gilt die obere Abschätzung $X(\mathfrak{B}_k) \leq \mathfrak{D}(k)$, $k \geq 1$.

BEWEIS. Bei $k = 1, 2$ kann man leicht eine beliebige minimale Einbettung in \mathfrak{B}_k umwandeln in eine Einbettung im Sinne Dewdney's [1] in \mathfrak{B}_k , d.h. wenn alle singulären Punkte v -Punkte sind. Jeder e -Punkt entspricht einer bestimmten durch ihn verlaufenden Kante. Verschiebt man diese besonderen Punkte zu verschiedenen, diesen Kanten inzidenten Ecken ($k = 2$) - und dies ist möglich, weil wir gewöhnliche Graphen untersuchen -, erhält man eine Einbettung im Sinne Dewdney's. Dann ist das Theorem für $k = 1, 2$ mit dem in der Einleitung erwähnten (1) äquivalent.

Da jeder Untergraph G' eines beliebigen in \mathfrak{B}_k eingebetteten Graphen G ebenfalls in die Pseudosphäre \mathfrak{B}_k eingebettet ist, ist nach Lemma 1 $W(G) = 1 + \max_{G' \in G} \delta(G') \leq \mathfrak{D}(k)$. Nach dem Szekeres-Wilf-Theorem [5] ist $X(G) \leq W(G)$, d.h. $X(G) \leq \mathfrak{D}(k)$.

3. Minimale Einbettung vollständiger Graphen. In Abb. 1 ist der zerlegte Graph $\tilde{K}_{\mathfrak{D}(4)} \equiv \tilde{K}_8$ mit vier Paaren zerlegter Ecken abgebildet. Die Zerlegungen $\tilde{K}_{\mathfrak{D}(k)}$ bei $0 \leq k < 4$ erhält man durch Elimination der Ecken mit Nummern größer als $\mathfrak{D}(k)$ aus \tilde{K}_8 . In den Abb. 2, 3 und 4 sind die Zerlegungen

$\tilde{K}_{\mathfrak{D}(k)}$ für $k = 10, 11, 12$ abgebildet. Die Zerlegung \tilde{K}_9 , ermittelt aus der Einbettung K_9 in \mathfrak{G}_6 , erhält man unmittelbar durch Weglassen der Ecken mit der Nummer 10 aus Abb. 2. Damit ist die Gleichung $X(G) = \mathfrak{D}(k)$ für $1 \leq k \leq 12, k \neq 5$ bewiesen.

Einfache 2-Triangulierung heißt eine ebene Triangulierung, deren Ecken so in Paare zerlegt sind, daß nach Identifikation eines jeden Paares ein gewöhnlicher Graph entsteht.

LEMMA 2. *Gibt es eine einfache 2-Triangulierung G mit $\mathfrak{D}(k)$ Ecken-Paaren, dann gibt es eine Einbettung $K_{\mathfrak{D}(k)}$ in \mathfrak{G}_k .*

BEWEIS. Da G eine Triangulierung ist, ist die Anzahl ihrer Kanten $6\mathfrak{D}(k)-6$. Mit den restlichen $[k-\mathfrak{D}(k)]$ e-Punkten kann man dieselbe Menge beliebiger Kanten erzeugen, aber in dem bislang nicht auskonstruierten Graphen $K_{\mathfrak{D}(k)}$ müssen $\mathfrak{D}(k)(\mathfrak{D}(k)-1)/2 - 6\mathfrak{D}(k) + 6$ Kanten eingezogen werden. Offensichtlich ist

$$k - \mathfrak{D}(k) \geq 6 - 6\mathfrak{D}(k) = \mathfrak{D}(k)(\mathfrak{D}(k) - 1)/2,$$

da

$$\mathfrak{D}^2(k) - 11\mathfrak{D}(k) + 12 - 2k \leq 0 \quad (\text{siehe (8)}).$$

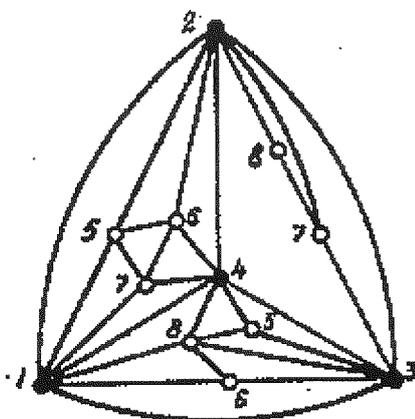


Abb. 1

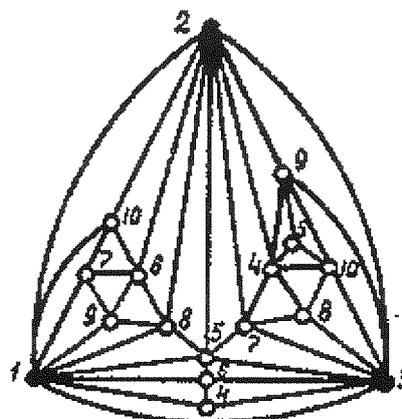


Abb. 2

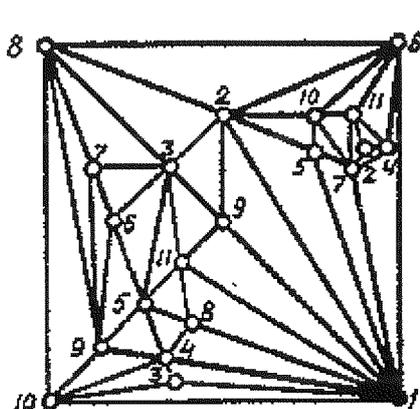


Abb. 3

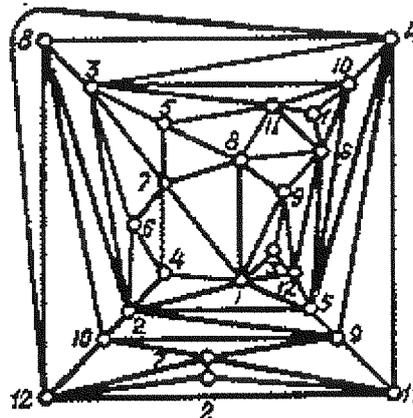


Abb. 4

Eine einfache 2-Triangulierung mit minimaler Eckenzahl ist in Abb. 4 dargestellt (siehe auch [3] S. 26).

LEMMA 3. *Es gibt eine gewöhnliche 2-Triangulierung mit k ($k \geq 12$) Eckenpaaren.*

Das Lemma 3 gilt für $k = 12$. Es gebe eine gewöhnliche 2-Triangulierung T_k mit k Eckenpaaren. Wir zeigen, wie wir daraus eine gewöhnliche 2-Triangulierung T_{k+1} mit $(k+1)$ Eckenpaaren konstruieren können. Dafür wählen wir ein beliebiges Dreieck $F = (x, y, z)$ in T_k und untersuchen die Menge der Dreiecke, die zu den sechs, mit den Indizes x, y, z bezeichneten Ecken inzident sind. Die Kapazität dieser Menge liegt nicht über $3(k-1)-5$, da jedes Eckenpaar zu nicht mehr als $k-1$ Restpaaren inzident ist und drei Ecken zu dem Dreieck F inzident sind. Die Anzahl der Dreiecke $f(T_k)$ in einer ebenen Triangulierung mit $2k$ Ecken ist gleich $4k-4$. Somit hat die Menge der zu keinem einzigen, mit den Indizes x, y, z bezeichneten Ecke inzidenten Dreiecke mindestens eine Kapazität von $k+4$. Wir wählen ein Dreieck $F_0 = (u, v, w)$ aus dieser Menge; offensichtlich ist $\{x, y, z\} \cap \{u, v, w\} = \emptyset$. Jedes der Dreiecke F und F_0 ergänzen wir mit je einer Ecke, indem wir sie mit den Ecken des Randes verbinden. Offensichtlich erhalten wir die einfache 2-Triangulierung T_{k+1} .

LEMMA 4. *Es gibt keine Einbettung K_9 in \mathcal{G}_5 .*

BEWEIS durch Widerspruch. Wir nehmen an, es gäbe eine Einbettung K_9 in \mathcal{G}_5 . Nach (4) jedoch hat die Einbettung 5 v -Punkte, und da in (4) eine Gleichheit besteht, ist die induzierte Zerlegung eine ebene Triangulierung. Die restlichen 4 Ecken von K_9 bilden in der Zerlegung einen vollständigen Untergraphen K_4 (seine Ecken sind mit A, B, C, D bezeichnet), der die Ebene in vier Bereiche zerlegt, von denen wir einen jeden mit a, b, c, d bezeichnen. Die fünf Eckenpaare der Zerlegung sind mit den Ziffern 1, 2, 3, 4, 5 bezeichnet. Angemerkt sei, daß in keinem einzigen Bereich x gleichzeitig Ecken liegen können, die zu einem einzigen Paar α gehören, da dann eine Kante (α, X) nicht möglich ist. Deshalb können in jedem Bereich nicht mehr als fünf Ecken liegen. Hieraus begrenzt sich jede mögliche Verteilung der zehn Ecken auf die vier Bereiche auf folgende 12 Fälle:

- | | | |
|-----------------|-----------------|------------------|
| 1. (5, 5, 0, 0) | 5. (5, 2, 2, 1) | 9. (4, 3, 2, 1) |
| 2. (5, 4, 1, 0) | 6. (4, 4, 2, 0) | 10. (4, 2, 2, 2) |
| 3. (5, 3, 2, 0) | 7. (4, 4, 1, 1) | 11. (3, 3, 3, 1) |
| 4. (5, 3, 1, 1) | 8. (4, 3, 3, 0) | 12. (3, 3, 2, 2) |

Der Graph G heißt außeneben, wenn er so in die Ebene eingebettet sein kann, daß alle seine Ecken am Rand der Außenfläche liegen. Über die außenebenen Graphen ist nach [6] und [7] bekannt: der Graph G ist dann und nur dann außeneben, wenn er keine zu K_4 oder $K_{2,3}$ homeomorphen Teile enthält. Wenn G ein außenebener Graph ist, dann ist $m(G) \leq 2n(G)-3$.

Offensichtlich ist jeder Untergraph der Zerlegung, der in einem beliebigen der vier Bereiche a, b, c, d liegt, ein außenebener Verbundgraph, da jede seiner Ecken wenigstens mit einer Ecke am Rande des Bereiches verbunden sein muß, und

jede seiner Innenflächen ist ein Dreieck, da jede Zerlegung eine ebene Triangulierung ist.

Fall 1. Alle 5 Paarvertreter bilden einen außerebenen Untergraph, von denen eine jede Innenfläche ein Dreieck ist. Man kann leicht verifizieren, daß es eine einzige Variante zur Zerlegung des vollständigen Graphen K_5 in die außerebenen Untergraphen G und \bar{G} mit den Dreiecksinnenflächen gibt (Abb. 5). Liegen die fünf Ecken in den Bereichen a und b , dann sind alle Ecken des ersten Bereichs mit der Ecke B , und des zweiten mit A verbunden. Aber dann befindet sich unter den fünf Ecken 1, 2, 3, 4, 5 eine solche (in Abb. 5 ist dies Ecke 4), daß zu dessen Vertretern aus den Ecken C und D , die am Rand der Bereiche a und b auf einer Kante liegen, keine Verbindung hergestellt werden kann.

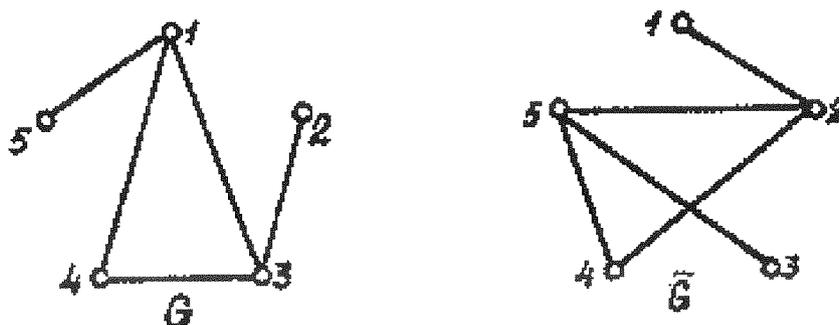


Abb. 5

Fall 2. Es sei $\{1, 2, 3, 4\} \in a$, $\{5\} \in b$, $\{1, 2, 3, 4, 5\} \in c$. Dann muß es die Kanten $(5,B)$, $(A,1)$, $(A,2)$, $(A,3)$, $(A,4)$, $(5,1)$, $(5,2)$, $(5,3)$, $(5,4)$ im Bereich c geben. Aber dann gibt es unter den vier Ecken $\{1, 2, 3, 4\}$ in a mindestens zwei verbundene Ecken, von denen eine jede mit allen drei am Bereichsrand liegenden Ecken verbunden ist. Diese 5 Ecken bilden zusammen mit den sie verbindenden Kanten und der Kette einen Teil des Ausschnitts, der zu K_5 isomorph ist, was dem Pontrjagin-Kuratovskij-Theorem widerspricht ([4] S. 428).

Fälle 3 und 4. In beiden Fällen zerfallen die fünf Ecken natürlicherweise in zwei Mengen, von denen die erste durch die Duplikate von drei, die zweite durch die restlichen Ecken bestimmt werden. Zwischen diesen zwei Mengen müssen alle Verbindungskanten vorkommen. Somit enthält der außerebene 5-Ecken-Untergraph der Zerlegung, der in einem einzigen Bereich liegt, einen Teil, der zu $K_{2,3}$ isomorph ist, was dem Chartrand-Harary-Kriterium für außerebene Graphen widerspricht [7].

Fälle 5, 9, 10, 11 und 12. In all diesen Fällen ist die Verwendung der Außenplanarität der im Bereich liegenden Untergraphen und die Verwendung der Ungleichung für ihr $m(G) \leq 2nG - 6$ ausreichend. Die Gesamtkantenzahl ist in all diesen Fällen kleiner als 10, obwohl der vollständige 5-Eckengraph 10 Kanten haben muß.

Fall 6. Es sei $\{1, 2\} \in a$, $\{1, 3, 4, 5\} \in b$, $\{2, 3, 4, 5\} \in c$. Aber dann muß es die Kanten $(A,1)$, $(C,3)$, $(C,4)$, $(C,5)$, $(1,3)$, $(1,4)$, $(1,5)$ im Bereich b , $(A,2)$, $(B,3)$, $(B,4)$, $(B,5)$, $(2,3)$, $(2,4)$, $(2,5)$ im Bereich c geben. Doch die Ecke D muß ebenfalls mit den Ecken 3, 4, 5 verbunden sein, was nicht möglich ist.

Fall 7. Bei allen Vier muß eines der Duplikate der Ecken, welches darin nicht vorkommt, in einem besonderen Bereich liegen. Untersuchen wir das Paar der Ecken, die in diesem besonderen Bereich liegen. Sie können nicht verbunden sein. Widerspruch.

Fall 8. Es sei $\{1, 2, 3, 4\} \in a$, $\{1, 2, 5\} \in b$, $\{3, 4, 5\} \in c$. Dann muß es die Kanten $(B,1)$, $(B,2)$, $(C,3)$, $(C,4)$, $(1,3)$, $(1,4)$, $(2,3)$, $(2,4)$ im Bereich a geben. Aber dann gibt es in der Zerlegung einen Teil auf den Ecken 1, 2, C, 3, 4, B, der mit den acht oben gekennzeichneten Kanten und der Kante (B,C) den Graphen $K_{3,3}$ bildet. Aber da der Ausschnitt ein ebener Graph ist, widerspricht dies dem Pontrjagin-Kuratovskij-Theorem. Das Lemma 4 ist bewiesen.

Bevor wir zum folgenden Lemma übergehen, wollen wir auf einen Begriff und ein Resultat eingehen. Der Graph G heißt **kritisch k -chromatisch**, wenn $X(G) = k$ und für einen jeden Untergraphen $G' \subset G$, $X(G') < k$.

THEOREM von Dirac [8]. *Ist G kritisch k -chromatisch ($k \geq 4$) und verschieden vom vollständigen Graphen K_k , dann ist*

$$m(G) \geq (k - 1)n(G) + k - 3.$$

Nach [9] beweisen wir das folgende Lemma.

LEMMA 5. *Ist der Graph G in \mathfrak{B}_k ($k \geq 3$) eingebettet und seine chromatische Zahl ist $X(G) = \mathfrak{D}(k)$, dann enthält G einen vollständigen $\mathfrak{D}(k)$ -Ecken-Untergraphen $K_{\mathfrak{D}(k)}$.*

Angenommen, das Lemma 5 sei nicht richtig, dann enthält der Graph G keinen vollständigen $\mathfrak{D}(k)$ -Eckengraphen, wobei, nach dem Theorem von Dirac, für den kritischen $\mathfrak{D}(k)$ -chromatischen Graphen G' (G' ist Teil von G , $G' \subseteq G$) gilt:

$$2m(G) \geq (\mathfrak{D}(k) - 1)n(G') + \mathfrak{D}(k) - 3. \quad (9)$$

Da der Teil $G' \subseteq G$ ebenfalls in \mathfrak{B}_k eingebettet ist, ist somit (siehe (5))

$$2m(G) \leq 6n(G') + k - 2. \quad (10)$$

Wir setzen (9) und (10) ein und erhalten

$$n(G')(\mathfrak{D}(k) - 7) + \mathfrak{D}(k) \leq 6k - 9. \quad (11)$$

In [10] bewies Dirac, daß der kritische k -chromatische, vom vollständigen k -Ecken-Graphen verschiedene Graph nicht weniger als $k + 2$ Ecken besitzt, was in unserem Fall $n(G') \geq \mathfrak{D}(k) + 2$ ist. Bei $k \geq 3$ erhalten wir aus (11)

$$(\mathfrak{D}(k) + 2)(\mathfrak{D}(k) - 7) + \mathfrak{D}(k) \leq 6k - 9$$

oder

$$\mathfrak{D}(k) \leq 2 + \sqrt{9 + 6k},$$

was der Definition von $\mathfrak{D}(k)$ für $3 \leq k \leq 12$ widerspricht. Die übrigen Fälle werden analog bewiesen, indem anstelle (5) die Ungleichung (6) eingesetzt wird.

THEOREM 2. Für die chromatische Zahl einer Pseudosphäre ist für alle natürlichen $k \neq 5$ die Gleichung $X(\mathfrak{G}_k) = \mathfrak{D}(k)$ gültig, wogegen $X(\mathfrak{G}_5) = 8$.

BEWEIS. Im Falle $k = 5$ ergibt sich die Richtigkeit des Theorems aus den Lemmata 4 und 5, dem Theorem 1 und der Möglichkeit der Einbettung von K_8 in \mathfrak{G}_4 . In allen übrigen $1 \leq k \leq 12$ wurde das Theorem bereits zu Beginn dieses Abschnitts bewiesen. Der Fall mit $k \geq 12$ ergibt sich aus dem Theorem 1 und den Lemmata 2 und 3.

ANMERKUNG 1. Lemma 5 ist auch von Interesse an sich, da es zeigt, daß in der Klasse von Graphen gemäß Theorem 2 der vollständige $\mathfrak{D}(k)$ -Ecken-Untergraph ausschlaggebend ist ($k \geq 3, k \neq 8$). Das Lemma 5 ist für den Fall $k = 1$ unwahrscheinlich, da ein gewöhnlicher Graph, ermittelt durch Hinzufügung von zwei Ecken, da der folgende Graph die Voraussetzungen von Lemma 5 erfüllt und keinen K_5 enthält: man nehme einen Zyklus mit ungerader Länge $2t + 1$ ($t \geq 2$) und verbinde jede Ecke mit zwei zusätzlichen Ecken.

ANMERKUNG 2. Wir bezeichnen mit $X_{\mathfrak{D}}(\mathfrak{G}_k)$ die chromatische Zahl der Pseudosphäre \mathfrak{G}_k bei Einbettung der Graphen im Sinne Dewdneys. Bei $X_{\mathfrak{D}}(\mathfrak{G}_k)$ ist unsere obere Einschätzung (Theorem 1 und Lemmata 4 und 5) richtig, da sie für eine größere Klasse von Graphen aufgestellt wurde. Die zu Beginn des 3. Abschnitts angegebenen Einbettungen der maximalen vollständigen Graphen sind Einbettungen im Sinne Dewdneys. Hieraus folgt, daß $X_{\mathfrak{D}}(\mathfrak{G}_k) = X(\mathfrak{G}_k)$ für $1 \leq k \leq 12$. Aber jeder im Sinne Dewdneys in die Pseudosphäre eingebettete Graph G hat $X(G) \leq 12$, da im entgegengesetzten Falle jeder beliebige kritische Teil G' von ihm, ebenfalls einbettbar in \mathfrak{G}_k , $\delta(G') \leq 12$ sein muß, was der Relation (4) für G' widerspricht. Folglich ist $X_{\mathfrak{D}}(\mathfrak{G}_k) = 12$ für $k \geq 12$.

4. Chromatische Zahl der Pseudoflächen. Aufgrund der Arbeiten von Ringel, Youngs, Gustin u.a. hat in der letzten Zeit das Interesse an der Färbung von Graphen im Zusammenhang mit ihrer topologischen Klassifikation zugenommen. Durch gemeinsame Bestrebungen gelang es ihnen [11], das von Heawood im Jahre 1890 [12] gestellte Problem: Ermittlung der chromatischen Zahl einer geschlossenen 2-dimensionalen, von einer Sphäre verschiedenen Fläche, zu lösen. Damit ist der einzig offengebliebene Fall das berühmte Vierfarben-Problem.

In diesem Abschnitt untersuchen wir das Problem der chromatischen Zahl der Pseudoflächen \mathfrak{F}_k^N , wobei N die Eulersche Charakteristik einer geschlossenen 2-dimensionalen Fläche und k die Anzahl der singulären Punkte der Pseudofläche bezeichnen. Wir bestimmen die ganzzahlige Funktion $R(k, N)$, wobei stets $N \leq 2$:

$$R(k, N) = \begin{cases} \left[\frac{7 + \sqrt{24k + 49 - 24N}}{2} \right] & \text{für } 0 \leq k \leq \left[\frac{13 + \sqrt{169 - 24N}}{2} \right], \\ \left[\frac{11 + \sqrt{8k + 121 - 24N}}{2} \right] & \text{für die übrigen } k. \end{cases}$$

THEOREM 3. Für eine beliebige, von der Sphäre verschiedene Pseudofläche \mathfrak{F}_k^N gilt die obere Abschätzung $X(\mathfrak{F}_k^N) \leq R(k, N)$; dabei ist diese Abschätzung bei einem beliebigen N und hinreichend großen $k(N)$ scharf.

Offensichtlich ist die Abschätzung des Theorems 3 konsistent mit dem Heawood-Theorem [12]. In Fortführung des 2. Abschnitts ersetzen wir hieraus \mathfrak{G}_k durch \mathfrak{F}_k^N , $\mathfrak{D}(k)$ durch $R(k, N)$, dann sieht die Ungleichung (3) so aus ([3]): $m(\bar{G}) \leq 3(n(\bar{G}) - N)$. Alle Erörterungen des 2. Abschnitts ergeben den Beweis des ersten Teils des Theorems 3, wenn man in der Formulierung von Lemma 1 $k \geq 3$ wegläßt.

Wir konstruieren eine **einfache 2-Triangulierung** der geschlossenen Fläche \mathfrak{F}^N , d.h. eine Triangulierung von \mathfrak{F}^N , deren Ecken in Paare zerfallen. Nach Identifikation der letzteren erhält man einen gewöhnlichen Graphen mit hinreichend großer Eckenpaarzahl. Beim Beweis der Heawood-Hypothese war das Wichtigste zu beweisen, daß der vollständige Graph $K_{H(N)}$ - mit $H(N) = [(7 + \sqrt{49 - 24N})/2]$ für die Heawood-Zahl - in die geschlossene 2-dimensionale Fläche \mathfrak{F}^N mit der Eulerschen Charakteristik N einbettbar ist. Ausnahme ist der Fall der Kleinschen Flasche. Somit haben wir die Einbettung von $K_{H(N)}$ in \mathfrak{F}^N . Es ist leicht zu verifizieren, daß all seine Flächenstücke in $\mathfrak{F}^N \setminus K_{H(N)}$ nicht größer als 8-Ecke sind.

Wir wählen eines der k -Ecke F_0 mit dem größten $k = s$. Wir unterteilen jedes Nicht-Dreieck, das von F_0 verschieden ist, durch eine zusätzliche Ecke im Inneren. Wir erhalten dann eine Zerlegung von \mathfrak{F}^N in Dreiecke sowie F_0 und $\beta(N)$ Ecken. Wir plazieren in F_0 eine gewöhnliche 2-Triangulierung der Ebene, wobei die Anzahl ihrer Kanten größer als $\beta(N)$ ist. Das Flächenstück F_0 sei (f_1, \dots, f_s) , $3 \leq s \leq 8$; es seien α, β, γ die Indizes der Ecken der Außenfläche einer gewöhnlichen 2-Triangulierung. Aufgrund der Erörterungen im Beweis von Lemma 3 ist die Zahl der keine Ecken mit den Indizes α, β, γ enthaltenden Kanten offensichtlich größer s . Wir plazieren in s derartiger Kanten die zweiten Exemplare f_1, \dots, f_s und in die übrigen Kanten die zweiten Exemplare der restlichen $\beta(N) - s$ Ecken. Wir konstruieren alle möglichen Kanten. Man kann verifizieren, daß nach Identifikation aller Eckenpaare sich ein Graph ohne Schleifen und Parallelkanten ergibt, d.h. die 2-Triangulierung der geschlossenen Fläche \mathfrak{F}^N ist einfach.

Es gilt die Behauptung analog zu Lemma 2. Und zwar, ist eine einfache 2-Triangulierung für \mathfrak{F}^N mit einer Eckenzahl $2R(k, N)$ konstruiert, dann kann man $\mathbb{K}_{R(k, N)}$ in \mathfrak{F}_k^N einbetten. Es ist hinreichend, im Beweis des Lemmas 2 $6\mathfrak{D}(k)-6$ durch $2R(k, N)-3N$ zu substituieren und desweiteren die restlichen Einfügungen $\mathfrak{D}(k)$ durch $R(k, N)$ zu ersetzen. Das Theorem 3 ist bewiesen.

Zum Schluß bringen wir folgende Vermutung zum Ausdruck: die Abschätzung $X(\mathfrak{F}_k^N) \leq R(k, N)$ ist scharf bis auf die Anfangswerte von k und N .

LITERATUR

1. *Dewdney, A.K.*: The chromatic number of a class of pseudo-2-manifolds. In: Manuscripta mathematica. Berlin/Heidelberg, 6 (1972), Nr 4, S. 311 - 319.
2. *Sachs, Horst*: Einführung in die Theorie der endlichen Graphen. Unter Mitarbeit von H.-J. Finck, H. Hutschenreuther, E. Kaiser, R. Lang, M. Schäuble, H.-J. Voß, H. Walther. Teil 2. Leipzig: BSB B.G. Teubner, 1971.
3. *Ringel, G.*: Färbungsprobleme auf Flächen und Graphen. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1959.
4. *Зыков Александр/ Александрович*: Теория конечных графов. Новосибирск: Наука, Сибирское отделение, 1969, том 1, 544 стр.
Zykov, A/leksandr/ A/leksandrovič: Teorija konečnych grafov. Novosibirsk: Nauka, Sibirskoe otделение, 1969, tom 1, 544 S.
 /Theory of finite graphs; russ./
5. *Szekeres, G.; Wilf, Herbert S.*: An inequality for the chromatic number of a graph. In: Journal of combinatorial theory. New York/London, 4 (1968), Nr 1, S. 1 - 3.
6. *Tang, D.T.*: A class of planar graphs containing Hamiltonian circuits. In: IBM research notes. NC 503 (1965).
7. *Chartrand, Gary; Harary, Frank*: Planar permutation graphs. In: Annales de l'Institut de Poincare. Section B: Calcul des probabilites et statistique. Paris, 3 (1967), S. 433 - 438.
8. *Dirac, G.A.*: A theorem of R.L. Brooks and a conjecture of H. Hadwiger. In: Proceedings of the London Mathematical Society. Series 3. London, 7 (1957), S. 161 - 195.
9. *Dirac, G.A.*: Short proof of map-colour theorem. In: Canadian journal of mathematics. Toronto, 9 (1957), S. 225 - 226.
10. *Dirac, G.A.*: Some theorems on abstract graphs. In: Proceedings of the London Mathematical Society. Series 3. London, 2 (1952), S. 69 - 81.
11. *Ringel, Gerhard; Youngs, J.W.T.*: Solution of the Heawood map-colouring problem. In: Proceedings of the National Academy of sciences of the United States of America. Washington, D.C., 60 (1968), S. 438 - 445.

12. Heawood, P.J.: Map-colour theorem. In: The quarterly journal of pure and applied mathematics. London, 24 (1890), S. 332 - 338.

Redaktionseingang
17.5.1973

Stuttgart, den 10. Juli 1998

übersetzt von

Ottmar Pertschi

(Ottmar Pertschi)
Dipl.-Übersetzer