

ü/408

Raer, G.A. (Kand. der techn. Wiss.):

Näherungsverfahren zur Bestimmung der dynamischen Eigenschaften von TKM-Rädern

Deutsche Vollübersetzung aus:

Energomašinstroenie. Moskva, 10(1968), S. 9-13.

Russisch:

Приближенный метод определения динамических характеристик колес ЦКМ

Približennyj metod opredelenija dinamičeskich charakteristik koles CKM

Die Hauptgefahr für die Radfestigkeit stellen die Schwingungsformen dar, die beträchtliche Verschiebungen am Außendurchmesser verursachen. Wesentliche Wechsellastspannungen entstehen gewöhnlich nur in diesen Querschnitten [1].

Für die Beschreibung des dynamischen Prozesses ist es unzureichend, nur das Spektrum der Eigenfrequenzen zu kennen. Es ist auch notwendig, aus der ganzen Resonanzvielfalt mit verschiedenen Formen und Vielfachen die gefährlichsten für die vorgegebenen Arbeitsbedingungen des Rades herauszufinden.

Der Aufbau eines genauen Berechnungsmodells für die dynamische Charakteristik der Räder ist durch die Notwendigkeit der Betrachtung einer Schale mit veränderlicher Steifigkeit erschwert. Die Schalen sind mit gekrümmten Rippen versteift – den Schaufeln.

Bisher gewonnene Erfahrungen gestatten es jedoch, das Rechenmodell zu vereinfachen. Wenn man berücksichtigt, daß die Laufschaufeln eine genügend vollständige Einspannung der Außenränder der Laufradscheibe realisieren und daß sich die Wirkung einer Querbewegung auf einen Bereich verhältnismäßig geringer Ausdehnung begrenzt, so kann man jedes Fach annähernd als isoliertes Element betrachten.

Die mit der Entfernung vom Außendurchmesser erheblich zunehmende Scheibensteifigkeit und die nicht radiale Anordnung der Schaufeln, die zu einer Erhöhung der Einspannungswirkung der Schaufeln führt, begünstigen die statische und dynamische Isoliertheit der Fächer.

Die Möglichkeit der isolierten Betrachtung der Radfächer wird durch folgendes belegt:

1. Die Einwirkung der statischen Querbewegung auf eines der Radfächer ruft nur in diesem Fach bedeutende Spannungen und Verschiebungen hervor und macht sich bei den angrenzenden nicht bemerkbar; die Größe dieser Verschiebungen hängt praktisch nicht von der Geometrie der angrenzenden Fächer ab und verändert sich wenig, selbst wenn tiefe Aussparungen in ihnen vorhanden sind.
2. Die an stehenden und rotierenden Rädern erhaltenen Eigenfrequenzen hängen ebenfalls nur gering von der Steifigkeit und Masse der angrenzenden Fächer ab.
3. Bei den rotierenden Rädern wurde mehrfach eine Nichtübereinstimmung der Resonanzdrehzahlen in den benachbarten Fächern beobachtet. Außerdem gab es Fälle von gleichzeitiger Erregung verschiedener Schwingungsformen (Resonanzen mit verschiedenen Vielfachen) in ihnen. Versuchswerte zeigen außerdem, daß die Außenränder der Haupt- und Deckscheibe dynamisch und statisch isoliert sind. Die Möglichkeit der unabhängigen Betrachtung der dynamischen Eigenschaften dieser Teile vereinfacht das Rechenschema wesentlich.

Die Intensität des Schwingungsprozesses klingt je nach Entfernung vom Außen-

durchmesser des Rads überaus schnell ab. Deshalb genügt es, bei der Bestimmung der dynamischen (Grund-)Eigenschaften die Außenbereiche eines jeden Faches zu betrachten. Eine solche Vorgehensweise lassen wir auch deshalb zu, weil die Resonanzen mit den niedrigsten Eigenfrequenzen die Hauptgefahr darstellen. Diesen entsprechen knotenfreie Schwingungsformen und Formen mit einem Knotenpunkt im Fach.

Somit ist es notwendig, die Aufgabe zu den Schwingungen der Schalenbereiche mit variabler Stärke zu lösen. Das Fach ist entlang zweier gekrümmter Linien elastisch eingespannt (entlang der Schaufelverbindungslinien), starr eingespannt am Innenkreis und frei am Außenkreis.

Für die Lösung der Aufgabe verwenden wir die folgende rechnerisch-experimentelle Methode. Wir teilen das untersuchte Fach der Haupt- und Deckscheibe in eine Reihe von Abschnitten und ersetzen die verteilte Masse jedes Abschnitts durch die in seiner Mitte konzentrierte Masse  $m_i$  (Abb.1). Somit wird der untersuchte Schalenabschnitt durch ein System mit  $s$  konzentrierten Massen  $m_i$  ersetzt, die elastisch miteinander verbunden sind. Dabei nehmen wir annähernd an, daß sich jede Masse nur in Richtung der Normalen zur Oberfläche bewegt. Die übrigen Komponenten des Verschiebevektors vernachlässigen wir, was für die betrachteten Konstruktionen durchaus zulässig ist. Die Koeffizientenmatrix des Einflusses  $\|a_{ik}\|$  bestimmen wir auf dem üblichen Wege, indem wir die gegebene Querkraft  $P_i$  an jedem Punkt  $k$  anlegen und die Größe der Verschiebungen  $y_k$  ( $a_{ik} = y_k/p_i$ ) messen. Ein solches Vorgehen berücksichtigt automatisch die Besonderheiten der Randbedingungen an den Verbindungsstellen zwischen Scheibe und Schaufeln.

In Abb.1 werden die Werte des Einflusses  $a_{ii}$  (Diagonalelemente der Matrix) für die verschiedenen Punkte der Deckscheiben zweier Radtypen mit gefrästen Schaufeln angeführt. Da die Querverschiebungen der Schaufeln (sogar relativ fein geschmiedeter) bedeutend geringer sind als die Verschiebungen der Radscheiben, hat die Masse der Schaufeln und folglich auch ihre Breite keinen merklichen Einfluß auf den Frequenzgang. In die Berechnung müssen also nur die Einflußkoeffizienten der Scheibe eingeführt werden <sup>1</sup>.

Transversalschwingungen der Schaufelmassen muß man nur bei der Bestimmung höherer Eigenfrequenzen der Räder mit geschmiedeten Schaufeln beachten, bei  $z_k > 24$ . Wie Experimente zeigen, werden jedoch in diesen Rädern nur niedrige Formen ohne Knotenlinie erzeugt. Deshalb ruft die Berechnung der Schwingungen der Schaufelmassen keine prinzipiellen Schwierigkeiten hervor.

Das System der Differentialgleichungen, die die Bewegung der Massen  $m_i$  beschrei-

---

<sup>1</sup>Eine Ausnahme bilden sogenannte Schaufelschwingungsformen, bei denen Relativverschiebungen zwischen zwei Schaufelenden auftreten. Solche Resonanzen trifft man überaus selten an und nur bei geschmiedeten Schaufeln mit geringer Schaufelzahl [1].

ben, hat folgendes Aussehen

$$z_i = - \sum_{k=1}^s b_{ik} \ddot{z}_k, \quad (1)$$

wobei  $z_i = \sqrt{m_i} y_i$  und  $b_{ik} = \sqrt{m_i m_k} a_{ik}$  ist.

Die charakteristische Gleichung des Systems (1) definiert das gesamte Spektrum der Eigenfrequenzen  $\omega_s$ . Die Lösung des Systems ergibt für jeden Wert  $\omega$  den Eigenvektor  $\bar{y}^s$ , der die Form der freien Schwingungen des Systems  $y_i = \bar{y}_i^s \sin \omega t$  bestimmt. Für die Bestimmung von  $\omega_s$  und  $y^s$  sind Standardprogramme auf dem Rechner erarbeitet worden.

Wir stellen fest, daß die erste Eigenfrequenz der Schwingung und die entsprechenden Schwingungsformen leicht aus den bekannten  $a_{ik}$  durch eine der Näherungsmethoden [2] bestimmt werden können, jedoch ergibt die Dunkerley-Formel  $\omega^{-2} = \sum m_i a_{ii}$  für das betrachtete System einen sehr hohen Fehler infolge der geringen Beziehungen der zweiten Eigenfrequenz zur ersten. Diese Formel kann präzisiert werden, wenn man beachtet, daß sich das Verhältnis  $\omega_{II}/\omega_I$  für die typischen Räder in sehr engen Grenzen ändert ( $\sim 3 \div 3,5$ ).

Dann ist

$$\begin{aligned} \omega_I^{-2} &= (0,75 \div 0,8) \sum_{i=1}^s m_i a_{ii} = (0,75 \div 0,8) \mu_i \int a_{ii} dx = \\ &= \sum \mu_i S_i(0,75 \div 0,8), \end{aligned}$$

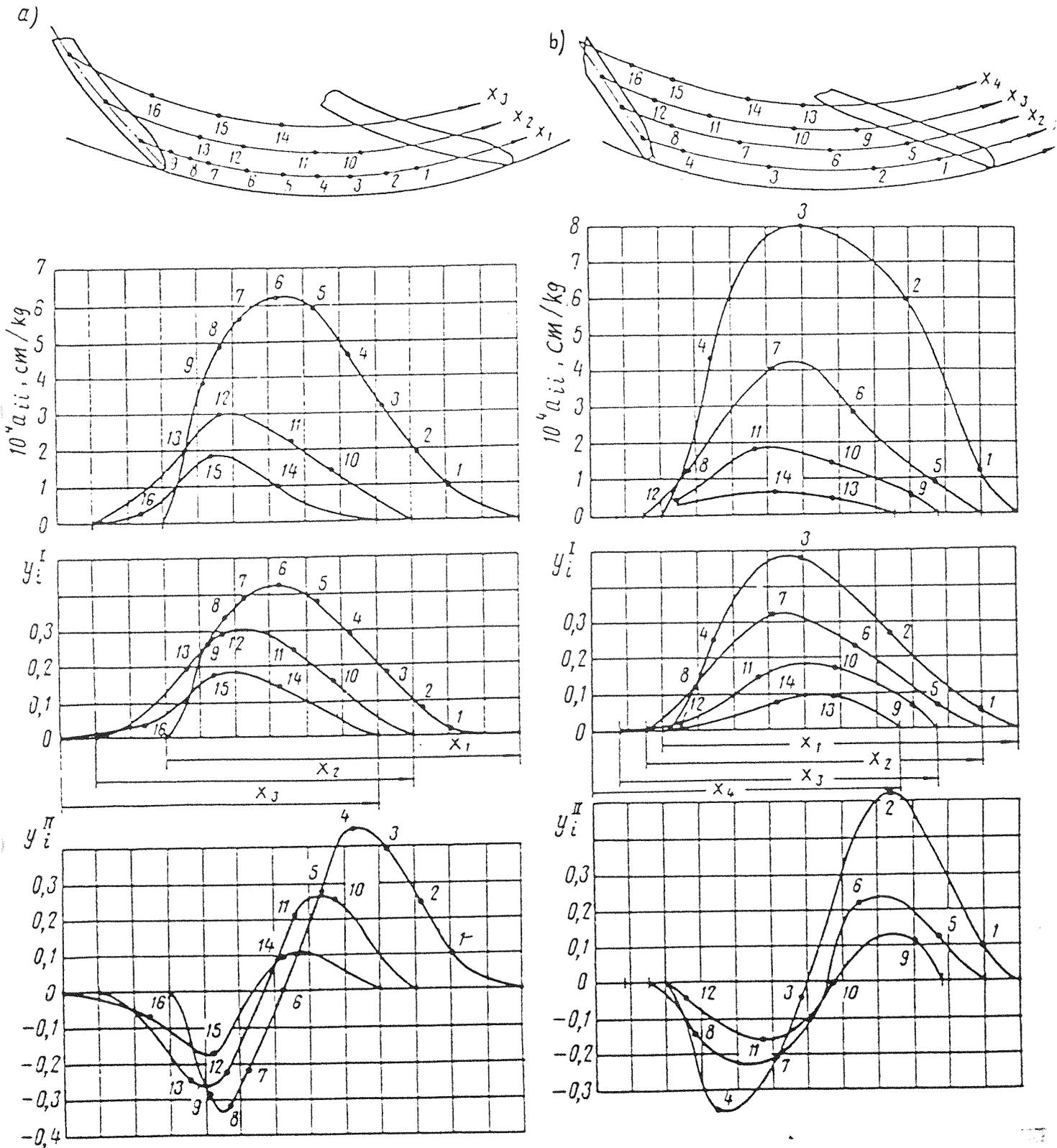
wobei sich die Summierung über alle Abschnitte erstreckt,  $a_{ii}$  – eine bewegte Masse ist und  $S_i$  – die Fläche, die durch die Kurve  $a_{ii}(x)$  begrenzt wird (Abb.1).

In Abb.1 werden auch die ersten zwei Schwingungsformen der Deckscheibe zwischen zwei Schaufeln für zwei Radtypen gezeigt. Die Intensität der Schwingung klingt mit der Entfernung vom Außenrand ab. Die Knotenlinien sind deutlich unsymmetrisch in Bezug auf die Flächenmittellinie.

Wir stellen fest, daß die Schwingungsformen für jeden Radtyp (mit gegebenem  $\beta_2$ ) vollkommen stabil sind, sie hängen wenig vom Scheibenquerschnitt, der Schaufelanzahl und anderen Größen ab, die die Geometrie des Abschnitts charakterisieren. Das gibt uns die Möglichkeit, die erhaltenen Formen im weiteren für die Näherungsrechnung der Eigenfrequenzen neuer Räder zu verwenden, ohne vorher experimentell die Koeffizientenmatrix des Einflusses zu bestimmen.

Die Eigenfrequenzen  $\omega$  erhielten wir für das stehende Rad. Die Spannungen  $\sigma_t$  und  $\sigma_r$ , die durch Zentrifugalkräfte in den Peripheriequerschnitten der Haupt- und Deckscheibe entstanden sind, begünstigen eine gewisse Erhöhung der Eigenfrequenzen. Die Eigenfrequenzen der Peripherieabschnitte des rotierenden Rades  $\omega_\partial$  können nach der Rayleigh-Formel bestimmt werden [2]. Die Gegenüberstellung der rechnerischen und experimentellen Werte zeigt, daß die Berücksichtigung der Rotation eine verhältnismäßig geringe Steigerung der Eigenfrequenzen (um 5 – 15%) ergibt.

Abbildung 1



Rechenschema, Koeffizienten des Einflusses  $a_{ii}$ , I und II Formen der Schwingung für die Deckscheiben der Räder:

a -  $\beta_2 = 22^\circ$ ,  $z_k = 9$ ,  $D_2 = 620 \text{ mm}$ ;

b -  $\beta_2 = 38^\circ$ ,  $z_k = 10$ ,  $D_2 = 620 \text{ mm}$ .

Die Ziffern auf den Kurven kennzeichnen die Nummer der Masse.

Resonanztyp $\omega$ in Hz	Radtyp			
	$z_{\kappa} = 10$ $\beta_z = 38^\circ$	$z_{\kappa} = 9$ $\beta_z = 22^\circ$	$z_{\kappa} = 9^\circ$ $\beta_z = 22^\circ$	$z_{\kappa} = 14^\circ$ $\beta_z = 32^\circ$
	D		H	
$u_2 = 0, \omega_I$	1070	930	2000	1950
$u_2 = 280 \text{ m/s} \quad \omega_{I \text{ min}}$	1120	1030	2060	2170
$u_2 = 280 \text{ m/s} \quad \omega_{I \text{ max}}$	1200	1150	2140	2260
$u_2 = 0, \omega_{II}$	1870	1700	3230	3680
$u_2 = 280 \text{ m/s} \quad \omega_{II}$	1950	1900	nicht festgestellt	
$\omega_{II}^2 / \omega_I^2$	3,05	3,3	2,6	3,58
Bemerkung: H - bedeutet Haupt- und D - Deckscheibe				

Tabelle 1: Werte der Eigenfrequenzen

Besonders geringfügig ist diese Abweichung bei den Hauptscheiben, in deren Peripheriequerschnitten die Umfangsspannungen unbedeutend sind.

In der Tabelle werden die Werte der Eigenfrequenzen angeführt, die ohne Erfassung der Rotation errechnet und die, die experimentell an den Rändern ermittelt wurden.

Die aerodynamischen Belastungen, die stationär im Raum sind und Schwingungen in den Radteilen hervorrufen, sind bisher noch ungenügend untersucht worden und ihre quantitative Abschätzung fehlt. Indirekte Experimente zeigen jedoch [1 und 3], daß die Belastungen, die in den Stufen mit Schaufeldiffusoren entstehen, durch  $z_{\partial}$  Einzelkräfte ersetzt werden können ( $z_{\partial}$ -Schaufelzahl des Diffusors). Die Belastungen in den Stufen mit diffusorloser Spirale können durch eine Einzelkraft ersetzt werden.

Im folgenden werden wir bei der Lösung der Aufgabe zur Entstehung von Resonanzen mit besonders gefährlichen Vielfachen den Einfluß der Einzelkräfte auf das mit konstanter Geschwindigkeit rotierende Rad untersuchen. Außerdem untersuchen wir die sich nach dem Sinusgesetz  $P_1 \sin 2\pi i \bar{\xi}$  verändernden Belastungen. Wenn man das Superpositionsprinzip verwendet, kann man die erhaltenen Ergebnisse auch auf den Fall einer komplizierteren Verteilung der aerodynamischen Belastungen übertragen.

Bei allen nachfolgenden Berechnungen wird angenommen, daß die Belastung nur in der Nähe des Radaußendurchmessers wirkt, wo ihre Einwirkung in Hinsicht auf die Erregung von Schwingungen am effektivsten ist.

Das System der Differentialgleichungen, das die Bewegung der Massen  $m_i$  (Abb.1) bei der Einwirkung der Kraft  $P$  auf das System beschreibt, welches sich mit konstanter Geschwindigkeit  $v$  bewegt, kann in folgender Art beschrieben werden

$$z_i = - \sum_{k=1}^s b_{ik} \ddot{z}_k - a_{is} \sqrt{\frac{m_i}{m_s}} \mu \dot{z}_s + \sqrt{m_i} a_{i,x=vt} P, \quad (2)$$

wobei  $a_{i,x=vt}$  die Auslenkung  $y_i$  der Masse  $m_i$  durch die im Punkt  $x$  ( $x$  ist die momentane Lagekoordinate der Erregerkraft) angreifende Einzelkraft definiert und  $a_{ik}$  aus experimentell ermittelten Einflußkoeffizienten bestimmt wird;  $\mu \dot{z}_s$  ist die Reibkraft der Masse  $m_s$ .

Die Erfahrung zeigt, daß wesentliche Wechsellspannungen nur bei Resonanzschwingungen entstehen, d.h. bei einer Rotationsgeschwindigkeit  $vk = \omega R$  ( $\omega$  ist eine der Eigenfrequenzen). Die Lösung des Gleichungssystems für verschiedene Geschwindigkeiten  $v$  ermöglicht es, aus der gesamten Resonanzvielfalt mit verschiedenen Vielfachen  $k$  die gefährlichsten Resonanzen auszuwählen.

Betrachten wir die Näherungslösung der Aufgabe. Wir nehmen an, daß das System im festgelegten Resonanzzustand harmonische Schwingungen mit einer der Eigenfrequenzen ausführt, d.h. es finden freie Schwingungen statt, die von der äußeren Kraft aufrechterhalten werden. Wir berücksichtigen außerdem, daß sich der Kraftverlauf beim Durchgang durch das Radfach nicht verändert. Eine solche Näherungsmethode ist durch die geringe Dämpfung im System, die geringe Intensität der äußeren Belastung und die Isoliertheit der Fächer gerechtfertigt. Eine Vielzahl von Experimenten zeigt, daß die Bewegungen der Schwingteile nahezu harmonisch sind, da die Oszillogramme, die die Spannungsänderung bei intensiven Resonanzen beschreiben, Sinuskurven sind.

Die Spezifik der Erregung von Resonanzschwingungen bei TKM-Rädern erklärt sich dadurch, daß die Dauer der Krafteinwirkung auf jedes Fach einen bedeutenden Teil der Schwingungsperiode bildet und sie in einigen Fällen überschreitet. Deshalb hängt die Intensität der erregten Schwingungen nicht nur von der Größe  $P$  ab, sondern auch von der Arbeit, die von dieser Last bei der Verschiebung der Schwingteile des Rades verrichtet wird.

Die Arbeit der Verschiebungskraft während des Durchgangs durch das Fach ist

$$A = P \int_0^{t_0} \dot{y} dt \quad , \quad (3)$$

wobei  $t_0 = (nz_k)^{-1}$  die Zeit ist, in der die Kraft das Fach durchläuft ( $z_k$  ist die Laufschaufelzahl). Bei der angenommenen Aufgabenstellung ist

$$y = a\varphi(x) \sin(\omega t + \alpha_0) \quad \text{und} \quad \dot{y} = a\omega\varphi(x) \cos(\omega t + \alpha_0),$$

wobei  $\varphi(x)$  die Schwingungsform definiert und aus den von der Lösung des homogenen Gleichungssystems (1) bekannten Werten  $\bar{y}_i$  gebildet wird. Wenn wir den Ausdruck für  $\dot{y}$  in den Ausdruck (3) einsetzen und die Beziehungen  $t = \tau \frac{2\pi r}{\omega}$ ,  $r = k/z_k$ ,  $x = vt = l_k \tau$  ( $l_k$  ist die Länge des Faches) einführen, erhalten wir

$$A = 2\pi r P a [f_1(r) \cos \alpha_0 - f_2(r) \sin \alpha_0] \quad , \quad (4)$$

wobei  $f_1(r) = \int_0^1 \varphi(\tau) \cos 2\pi r \tau d\tau$  und  $f_2(r) = \int_0^1 \varphi(\tau) \sin 2\pi r \tau d\tau$  ist.

Auf diese Weise hängt die Größe A von dem Parameter  $r = k/z_k$ , von der Schwingungsform  $\varphi(x)$  und vom Winkel  $\alpha_0$  ab, der die Anfangsphase im Moment des Angreifens der Kraft P am Fachaussgangspunkt bestimmt. Bei stationären Resonanzschwingungen richtet sich der Winkel  $\alpha_0$  so ein, daß die Größe A maximal ist, d.h.

$$\tan \alpha_0 = -\frac{f_2}{f_1} \quad \text{und} \quad A_{max} = 2\pi r P a \sqrt{f_1^2 + f_2^2} = 2\pi r a P F_1. \quad (5)$$

Für Räder, die in Stufen mit Schaufeldiffusoren arbeiten, stellen Resonanzen mit den Vielfachen  $k = i z_\partial$ , insbesondere die Fälle  $k = z_\partial$ , die größte Gefahr dar. Im Verlaufe jeder Umdrehung greifen am Rad  $z_\partial$  Kräfte an. Dabei wird die Anfangsphase  $\alpha_0$  für jede Kraft ein und dieselbe sein, weil die Durchlaufzeit des Rades durch den Abstand zwischen zwei benachbarten Diffusorschaukeln gleich der Schwingungsperiode ist. Die Arbeit aller Kräfte bei den Verschiebungen eines Fachteils ist gleich  $z_\partial A_{max}$ .

Eine kompliziert zusammengesetzte Belastung kann in Form der Summe  $P(\bar{\xi}) = \sum P_i \sin 2\pi \bar{\xi}$  dargestellt werden, wobei  $\bar{\xi}$  eine Koordinate im raumfesten Koordinatensystem ist und  $\bar{\xi} = \xi/\pi D_2$ . Die Arbeit der Elementarkraft  $P_i \sin 2\pi i \bar{\xi} d\bar{\xi}$  der i-ten Harmonischen der Belastung während des Durchlaufs eines Fachteils ist

$$dA_\xi = 2\pi r a \frac{\pi D_2}{i} P_i \sin 2\pi \bar{\xi} d\bar{\xi} \int_0^1 \varphi(\tau) \cos(2\pi r \tau + \alpha_0 + 2\pi \frac{k}{i} \bar{\xi}) d\tau.$$

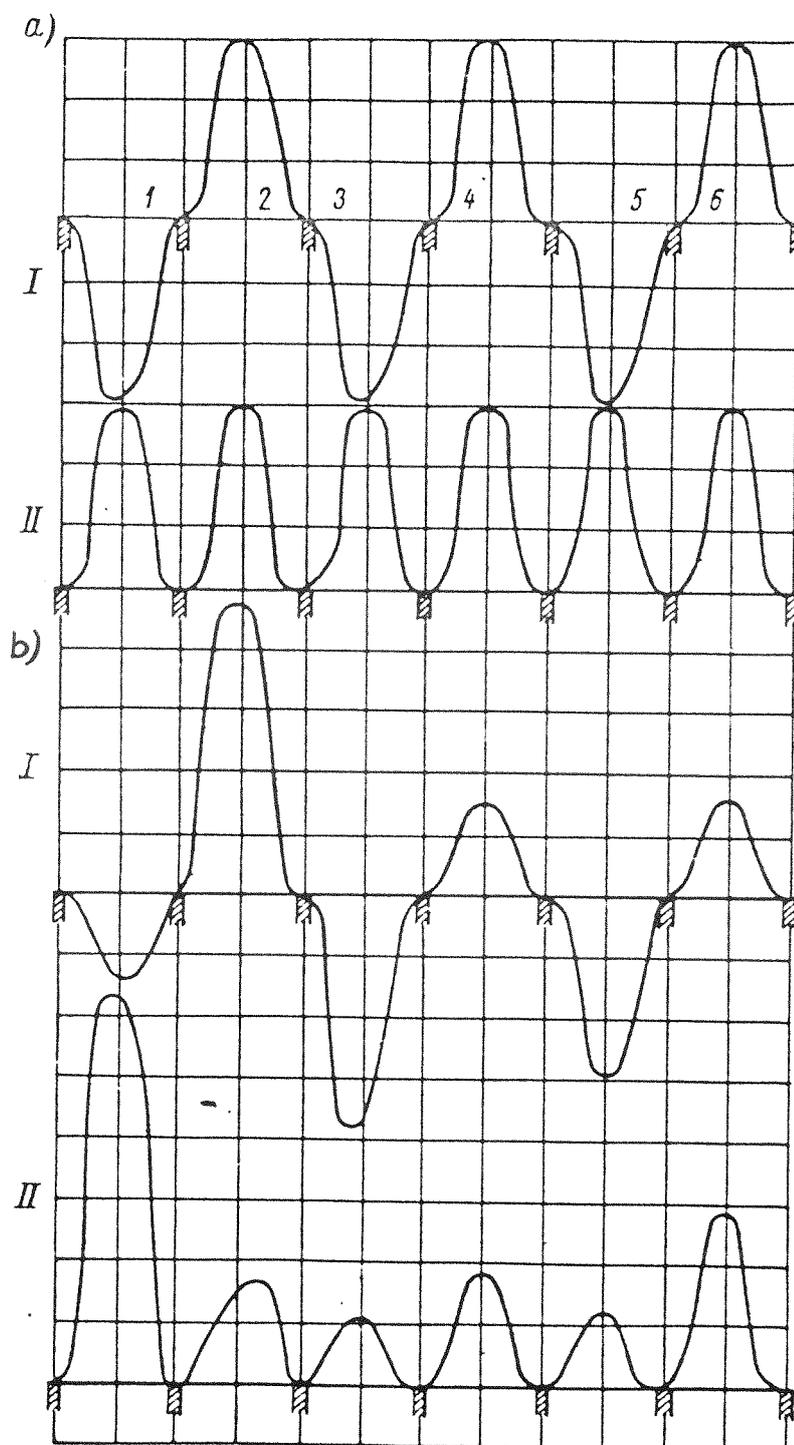
Es läßt sich leicht zeigen, daß bei  $i \neq k$  der Wert der gesamten Arbeit  $A=0$  ist, d.h. in einem linearen System ist das Vielfache k der Resonanz gleich der Ordnung i der Harmonischen. Für den Fall  $i=k$  haben wir

$$A = 2\pi r a \frac{P_k \pi D_2}{2} [\cos \alpha_0 f_1 - \sin \alpha_0 f_2] \quad , \quad (6)$$

wobei  $\alpha_0$  das Anfangsstadium der Schwingung ist, das dem Moment des Angreifens der maximalen Last ( $\bar{\xi} = 0,25$ ) am Fachaussgangspunkt entspricht. Formel (6) kann man auch für die Abschätzung der Einwirkung des Schaufeldiffusors verwenden. In diesem Fall ist  $0,5 P_k \pi D_2 = 0,5 P_k z_\partial l_\partial$ , wobei  $P_k$  der Scheitelwert der Last ist und  $l_\partial$  der Abstand zwischen zwei benachbarten Diffusorschaukeln.

Für den Fall, daß die Belastung die Form eines rechtwinkligen Impulses mit der Breite b hat, definiert sich die Arbeit dieser Last bei der Verschiebung eines Faches nach der Formel

Abbildung 2



Schwingungsformen von Systemen in Wechselbeziehung:  
a-die geometrischen Charakteristika aller Fächer stimmen überein;  
b-Fall der verstimmten Fächer.

$$A = \frac{\sin \pi r \nu}{\pi r \nu} \sqrt{f_1^2 + f_2^2} 2\pi r a \bar{P} \quad , \quad (7)$$

wobei  $\nu = b/l_k$  die relative Impulsbreite ist und  $\bar{P} = Pb$ . Die Arbeit erhöht sich bei Verringerung der Breite  $b$  (bei konstantem  $\bar{P}$ ). Der Einfluß der Begrenztheit der Belastungsbreite kann sehr wesentlich für Resonanzen mit großen Vielfachen  $k$  (großen  $r$ ) sein. Bei der Auswahl des Düsendurchmessers für die Radversuche mit künstlicher Erregung [1] muß der Einfluß der Belastungsbreite beachtet werden. Formel (7) erklärt z.T. auch die Tatsache, daß in den Rädern, die in den Stufen mit diffusorloser Spirale arbeiten, bei sehr großer Ungleichförmigkeit der Druckfelder Resonanzen von verhältnismäßig geringer Intensität und Deutlichkeit erregt werden. Diese sind bedeutend kleiner als bei künstlicher Erregung durch konzentrierten Luftstrahl.

Das Dargelegte gilt für den Fall der völligen Isoliertheit der Radfächer. Sind Wechselbeziehung zwischen ihnen vorhanden (sogar nur sehr schwache) entstehen zusätzliche Eigenfrequenzen, die sich in ihrer Höhe wenig von denen unterscheiden, die wir bei isolierten Fächern erhalten haben. Gewöhnlich umfaßt das Spektrum der Eigenfrequenzen für die knotenfreien Formen ein Frequenzband (siehe Tabelle) mit der Breite  $\omega_0(1 \pm 0.05)$ . Diesen Eigenfrequenzen entsprechen Formen, bei denen die Radfächer gleich- oder gegenphasig schwingen. Die quantitative Abschätzung der Eigenfrequenzen des Systems und der Werte  $y_i$ , die die Schwingungsform bestimmen, kann man aus der Lösung des Systems vom Typ (1) erhalten. Die Ordnung eines solchen Systems ist jedoch gleich  $z_k \cdot s$ . Da knotenfreie Formen und Formen mit einem Knotenpunkt in der Fachmitte die Hauptgefahr darstellen, ist es zweckmäßig, die Zahl der Massen in jedem Feld mittels der Massenreduktion zu verringern. Näherungsweise betrachten wir die Form der elastischen Linien des reduzierten Systems und des Ausgangssystems als kongruent. Danach definieren sich die reduzierten Massen nach der Formel

$$M_k = \sum_{i=1}^P m_i \left( \frac{y_i}{y_k} \right)^2.$$

Bei Verwendung dieser Formel bleibt der Wert der kinetischen Energie für die gegebene Schwingungsform erhalten.

Der Koeffizient, der die Wechselbeziehung der Fächer berücksichtigt, wird auf der Grundlage der Analyse experimenteller Werte bestimmt. Für ein System, das aus Fächern mit einer konzentrierten Masse besteht, ist der Koeffizient der Wechselbeziehung  $b_{12} \approx 0,08a_{11}$ .

In Abb. 2a und b werden zwei Schwingungsformen von gekoppelten Systemen dargestellt. Innerhalb eines einzelnen Fachs unterscheidet sich die Schwingungsform wenig von der für ein isoliertes Fach ermittelten. In Abb. 2a werden Schwingungsformen für ein System mit identischer geometrischer Charakteristik aller Fächer

gezeigt. Beim betrachteten Beispiel beträgt die Eigenfrequenz jedes isolierten Faches  $\omega_0 = 914Hz$ ; die niedrigste und die höchste erste Frequenz des gekoppelten Systems  $\omega_1 = 876Hz$  und  $\omega_2 = 951Hz$ . Die Streuung der Größe der einzelnen Fächer führt zum Auftreten von Schwingungsformen mit sehr unterschiedlichen Amplituden. So ergibt sich bei  $\omega_{02}/\omega_{01} = 1,08$  ein Amplitudenverhältnis von  $A_1/A_2 \approx 4$ , wobei  $\omega_{02} = 950Hz$  und  $\omega_{01} = 882Hz$  die Eigenfrequenzen zweier isolierter benachbarter Fächer sind (Abb.2b). Die niedrigste und die höchste erste Eigenfrequenz eines solchen gekoppelten Systems ist  $\omega_1 = 867Hz$  und  $\omega_2 = 965Hz$ . Im verstimmten System zeigt sich die Isoliertheit der Fächer noch stärker, d.h. jedes von den erhaltenen  $z_k$  der Eigenfrequenzen entspricht faktisch (wenn man die Dämpfung berücksichtigt) der Resonanz eines Faches allein.

Die Intensität des Schwingungsprozesses im gekoppelten System ergibt sich aus der Arbeit, die von der Last während einer vollen Radumdrehung verrichtet wird, d.h. während des Durchgangs der Last durch alle Fächer. Die Schwingungsamplituden aller Fächer nehmen wir als gleich an (Abb.2a) und die Phasendifferenz der Schwingungen der Fächer als gleich 0 oder  $\pi$ . Für ein solches System kann die Arbeit der konzentrierten Kraft bei der Verschiebung eines jeden Faches nach Formel 4 bestimmt werden. Jedoch werden die Anfangsphasen der Schwingungen, die dem Moment des Angreifens der Kraft an jedes Fach entsprechen, verschieden sein. Wenn die Anfangsphase für das Fach Nr.1  $\alpha_1 = \alpha_0$  ist, so ist sie für Fach Nr.2  $\alpha_2 = \alpha_0 + \frac{\omega}{nz_k} = \alpha_0 + 2\pi r$  und für das i-te Fach  $\alpha_i = \alpha_0 + 2\pi r \times (i - 1)$ .

Die Arbeit der Kraft P bei der Verschiebung des i-ten Faches ist

$$A_i = \pm Pa2\pi r \int_0^1 \varphi(\tau) \cos[2\pi r\tau + 2\pi r(i - 1) + \alpha_0] d\tau \quad (8)$$

Das Vorzeichen in Formel (8) wird in Abhängigkeit von der Schwingungsphase des betrachteten i-ten Faches gewählt (Abb.2): für die Fächer, die im Vergleich zum Ausgangsfach Nr.1 gegenphasig schwingen, muß man zum Anfangswinkel  $2\pi r(i - 1) + \alpha_0$  noch  $\pi$  hinzufügen, d.h. vor das Integral das Minuszeichen setzen. Man kann annehmen, daß sich eine solche Schwingungsform einstellt, bei der die Kraft P in jedem Fach eine positive Arbeit verrichtet. Dann ist die Arbeit der Kraft P beim Durchgang durch alle Radfächer (während einer vollen Umdrehung)  $A = \sum |A_i|$ . Der Wert  $\alpha_0$  muß aus der Maximumbedingung der summierten Verschiebungsarbeiten entsprechend der gegebenen Schwingungsform ausgewählt werden. Die dazwischenliegenden Berechnungen auslassend, geben wir die Formel für die maximale Gesamtarbeit an:

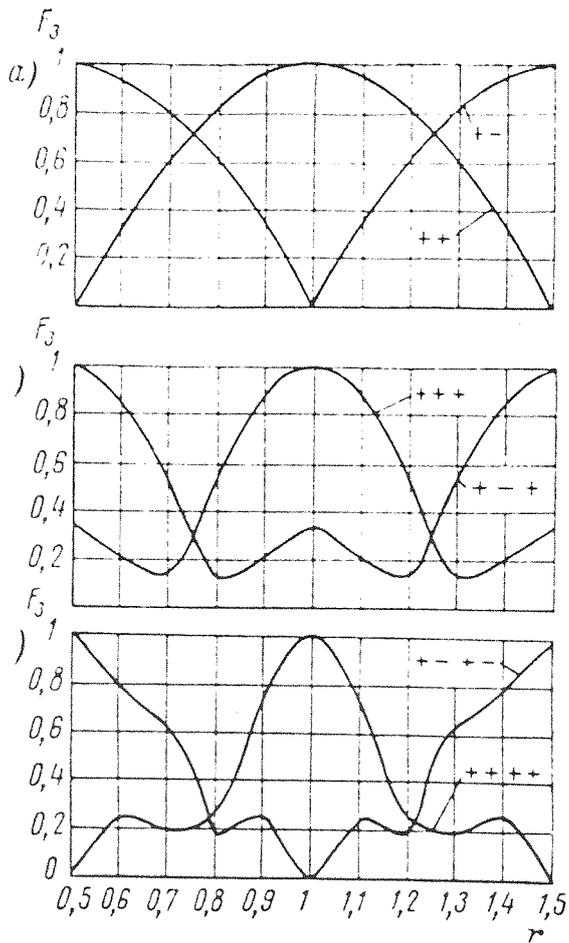
$$A_{max} = 2\pi raPF_1F_3 \quad , \quad (9)$$

wobei

$$F_1 = \sqrt{f_1^2 + f_2^2} \quad ;$$

$$F_3 = \sqrt{\left[\sum_{i=1}^{z_k} \pm \sin 2\pi r(i - 1)\right]^2 + \left[\sum_{i=1}^{z_k} \pm \cos 2\pi r(i - 1)\right]^2} \quad .$$

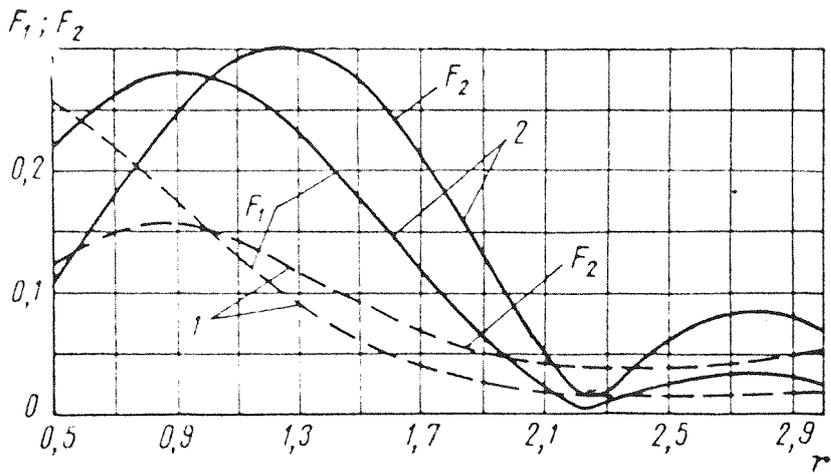
Abbildung 3



Zum Erfassen der Wechselbeziehung der Fächer: a, b und c entsprechen den Fällen mit zwei, drei oder vier abgestimmten Fächern.

Die Zeichen geben die Schwingungsphasen der benachbarten Felder an.

Abbildung 4



Abhängigkeit  $F_1(r)$  für die Schale der Deckscheibe des Rads.

1 und 2 entsprechen den Schwingungsformen I und II.

Die Vorzeichen in den quadratischen Klammern werden für jedes Fach in Abhängigkeit von der jeweiligen Schwingungsphase dieses Fachs in Bezug auf Fach Nr. 1 gewählt. Wenn man Formel (9) verwendet, kann man die wahrscheinlichste Schwingungsform für jedes Resonanzvielfache bestimmen. Der erste Faktor in Formel (9) entspricht der Verschiebungsarbeit eines isolierten Fachs, der zweite charakterisiert die Verringerung der Arbeit auf Grund der Kopplung der Fächer. Bei der Herleitung dieser Formel wurde angenommen, daß die Amplituden aller Fächer gleich sind und das ganze Rad als einheitliches Ganzes schwingt. Das gilt für ein Rad, das aus gut abgestimmten Fächern mit identischen Eigenfrequenzen besteht. Die an einem realen Rad vorhandene Streuung der Wanddicke führt zur Verstimmung der Fächer. In diesem Falle sind nur einige Fächer gekoppelt, und dann darf sich die Summierung nur auf diese Fächer erstrecken. In Abb.3 werden die Werte  $F_3$  bei zwei, drei und vier abgestimmten Fächern (mit gleichem  $\sqrt{m_i m_k} a_{ik}$ ) aufgeführt. Aus den angeführten Daten folgt, daß Schwingungsformen mit identischen Phasen in den Fächern (mit höherer erster Eigenfrequenz, Abb.2a, Pos.I) bei  $0,8 \leq r \leq 1,2$  erregt werden; bei  $0,7 \geq r \geq 1,3$  werden Schwingungsformen mit Gegenphasen in den Feldern erregt (Abb.2a, Pos.II). Diese Angaben stimmen mit den Experimenten [1] überein. Z.B. findet beim Rad mit  $z_k = 10$  beim Übergang von den Resonanzen mit  $k=7$  zu den Resonanzen mit  $k=8$  eine starke Frequenzänderung ( $f_{k=7} = 1100 Hz$  und  $f_{k=8} = 1200 Hz$ ) und eine Änderung der Schwingungsphasen statt. Eine analoge Erscheinung kann man beim Übergang von  $k=12$  zu  $k=13$  beobachten.

Die Resonanzschwingungsamplituden der Radteile können aus der Gleichungsbedingung der Arbeit der beweglichen Last und der Dämpfungskraft bestimmt werden. Die Dämpfungsarbeit während einer Schwingungsperiode in einem Fach errechnet sich näherungsweise nach der Formel

$$A_\mu = \mu a^2 \omega \pi l_k F_4,$$

wobei  $F_4 = \sum \int_0^{l_k} \varphi^2(x) dx$  ist und von der Schwingungsform des Fachs abhängt. Dabei ist es notwendig, daß die Summation auf einige Peripheriebereiche des Rades erweitert wird. Wenn wir  $kA_\mu = A$  gleichsetzen, erhalten wir die Formeln für die Schwingungsamplituden

$$a = \frac{2PF_1}{z_k \mu \omega F_4} \text{ und } a_\partial = \frac{2PrF_1}{\mu \omega F_4},$$

entsprechend den Fällen der Einwirkung einer Kraft oder von  $z_\partial$  Punktkräften auf ein isoliertes Fach. Für die anderen Fälle müssen die Formeln (7),(8) oder (9) verwendet werden.

In Abb.4 werden die Beziehungen  $F_1 = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}$  und  $F_2 = F_1 r$  für die I. und II. Schwingungsform der Deckscheibe angeführt. Bei Erhöhung des Parameters  $r = k/z_k$  verringern sich der Betrag der Kraftarbeit und folglich auch die Schwingungsamplituden  $a$  und die Wechsellasten. Die Ordnung der gefährlichen Vielfachen

ist bei Rädern mit großer Schaufelanzahl höher. Die Funktion  $F_2$ , die proportional zur Kraftarbeit bei Einwirkung des Schaufeldiffusors ist, hat bei  $r \approx 0,9$  ein Maximum für die I. Schwingungsform und bei  $r = 1,3$  für die II. Schwingungsform.

Die Funktion  $F_1$  nimmt für die I. Schwingungsform im Intervall von  $r = 0,5 \div 1,3$  stark ab, für die II. Schwingungsform hat sie ein Maximum bei  $r=0,9$ .

Oben wurde die Stabilität der Schwingungsformen für jeden Radtyp hervorgehoben. Deshalb können die in Abb.4 angeführten Beziehungen auch für Räder verwendet werden, die verschiedene Scheibenstärken, unterschiedliche  $z_k$  und andere geometrische Charakteristika (außer  $\beta_2$ ) haben.

Die Erhöhung der Eigenfrequenzen begünstigt die Senkung der Schwingungsamplituden. Dabei wird dieser Effekt nicht nur wegen der Vergrößerung der Arbeit der Dämpfungskraft erreicht, sondern auch aufgrund der Erhöhung der Resonanzvielfachen und der Werte des Parameters  $r$ .

Bei der Wahl der Diffusorschaufelzahl ist zu beachten, daß im Betriebsdrehzahlbereich keine Grundresonanzen  $k = z_\partial$  auftreten. Weiterhin muß beachtet werden, daß die Erhöhung von  $z_\partial$  zur Erhöhung des Parameters  $r$  und zur Verringerung der Gesamtarbeit der Außenlast führt.

Für Räder, die in den Stufen mit diffusorloser Spirale arbeiten, ergibt die Erhöhung von  $z_k$  immer einen positiven Effekt, weil sich dabei die Eigenfrequenzen und die Größe der Vielfachen der erregten Resonanzen erhöhen. In Rädern mit vergleichsweise geringer Schaufelanzahl, die in den Stufen mit Schaufeldiffusoren arbeiten, werden gewöhnlich Resonanzen mit II. Eigenfrequenzen erregt. Die Erhöhung der Laufschaufelzahl kann für solche Räder dazu führen, daß im Betriebsdrehzahlbereich Resonanzen mit I. Eigenfrequenzen auftreten, d.h.  $nz_\partial = \omega_I$ . In diesem Fall wird die Erhöhung von  $z_k$  wenig effektiv sein.

Auf diese Art und Weise gibt uns die Näherungsmethode die Möglichkeit, den Einfluß der verschiedenen Faktoren (Radgeometrie, Belastungsform, usw.) auf die grundlegende dynamische Charakteristik und somit auf das Niveau der Wechselspannungen einzuschätzen. Die erhaltenen Daten können als Grundlage für den Aufbau eines Analogieverfahrens dienen.

Literaturverzeichnis

1. Раер Г.А.: Динамика и прочность центробежных компрессорных машин. Изд-во "Машиностроение", 1968.

Raer, G.A.: Dinamika i pročnost' centrobežnych kompressornych mašin. Moskva: Izd-vo Mašinostroenie, 1968.  
/Dynamik und Stabilität von Fliehkraftkompressoren; russ./

2. Пономарев С.Д. и др.: Расчеты на прочность в машиностроении Машгиз. Т. 3, 1959.

Ponomarev, S.D. u. a.: Raščety na pročnost' v mašinostroenii. Moskva: Mašgiz., T. 3, 1959.  
/Festigkeitsrechnung im Maschinenbau; russ./

3. Рис В.Ф.: Центробежные компрессорные машины. Изд-во "Машиностроение", 1964.

Ris, V.F.: Centrobežnye kompressornye mašiny. Moskva: Izd-vo Mašinostroenie, 1964.

Deutsch:

Ris, V.F.: Fliehkraftkompressoren. Berlin: Verlag Technik, 1953.

---

Stuttgart, den 6. Juli 1994

übersetzt von:

*Sören Ludwig*  
(Sören Ludwig)

Übersetzungsstelle  
der Universitätsbibliothek Stuttgart

*Ottmar Pertschi*  
(Ottmar Pertschi)  
Dipl.-Übersetzer