

**Potential- und Stromverteilung beim
Quanten-Hall-Effekt
bestimmt mittels
Rasterkraftmikroskopie**

**Von der Fakultät Physik der Universität Stuttgart zur
Erlangung der Würde eines Doktors der Naturwissenschaften
(Dr. rer. nat.) genehmigte Abhandlung**

vorgelegt von

ERIK AHLSEWEDE

aus Rheinfelden, Deutschland

Hauptberichter: Prof. Dr. K. v. KLITZING

Mitberichter: Prof. Dr. T. PFAU

Tag der Einreichung: 22. Mai 2002

Tag der mündlichen Prüfung: 04. Juli 2002

**MAX-PLANCK-INSTITUT FÜR FESTKÖRPERFORSCHUNG
STUTTGART, 2002**

Inhaltsverzeichnis

Symbole und Abkürzungen	7
1 Einleitung	11
2 Grundlagen zum Quanten-Hall-Effekt	15
2.1 Zwei-dimensionale Elektronensysteme (2DES) an der Grenzfläche einer GaAs/Al _x Ga _{1-x} As-Heterostruktur	15
2.2 2DES im Magnetfeld	18
2.3 Klassischer Magnetotransport an 2DES	21
2.4 Ganzzahliger Quanten-Hall-Effekt	26
2.4.1 Phänomen ganzzahliger Quanten-Hall-Effekt	26
2.4.2 Grundlagen zum theoretischen Verständnis	27
3 Meßtechnik	31
3.1 Rasterkraftmikroskopie	31
3.2 Das Tieftemperatur-Rasterkraftmikroskop	35
3.3 Elektrostatische Kraftmessung	37
3.3.1 Messung der Hall-Potential-Verteilung	42
3.3.2 Messung des Abschirmverhaltens des 2DES	45
3.4 Zusammenfassung	47
4 Hall-Potentialprofile und Abschirmeigenschaften	49
4.1 Experimentell bestimmte Hall-Potentialprofile	49
4.2 Bedeutung des Probenrandes	55
4.2.1 Theorie kompressibler und inkompressible Randstreifen eines 2DES	55
4.2.2 Experimentelle Bekräftigung des Randstreifen-Modells	59
4.3 Abschirmverhalten des 2DES	61
4.4 Zusammenfassung	64

5	Rückschluß aus den Hall-Potentialprofilen auf die Stromverteilung	65
5.1	Dissipationsfreie Ströme	65
5.1.1	Elektrostatistischer Potentialgradient und Stromdichte	65
5.1.2	Konzentrationsgradient und Stromdichte	69
5.2	Ursachen und Folgen elektrostatischer Potentialgradienten	69
5.2.1	Störstellenpotential	70
5.2.2	Einschlußpotential am Rand der Probe	71
5.2.3	Hall-Spannung und Nichtgleichgewichtsströme	72
5.3	Dissipation durch Streuung an der Fermi-Energie	73
5.3.1	Kompressible Netzwerke an der Fermi-Energie um halbzahlige Füllfaktoren	74
5.3.2	Rückstreuung und Dissipation im Nichtgleichgewicht	74
5.4	Zusammenführung zu einem Gesamtmodell und Interpretation der gemessenen Hall-Potentialprofile	77
5.4.1	Potentialprofiltyp III knapp oberhalb ganzzahliger Füllfaktoren	78
5.4.2	Potentialprofiltyp I knapp unterhalb ganzzahliger Füllfaktoren	79
5.4.3	Potentialprofiltyp II bei ganzzahligen Füllfaktoren	80
5.4.4	Keine Substruktur der äußeren Streifen für Potentialprofiltyp III	83
5.4.5	Gesamtüberblick über die Füllfaktorentwicklung der Hall-Potentialprofile und der Stromverteilung	84
5.5	Zusammenfassung	84
6	Einfluß metallischer Kontakte	89
6.1	Hall-Potentiallandschaften entlang der Probe	89
6.2	Potentialprofile nahe eines Potentialkontakts	90
6.3	Hall-Potentialprofile nahe eines Stromkontakts	93
6.4	Zusammenfassung	96
7	Corbino-Proben	99
7.1	Experimentell gefundene Potentialprofile	99
7.2	Leitfähigkeitsmodelle	101
7.2.1	Homogenes, isotropes System	102
7.2.2	Leitfähigkeitsmodell mit lokal variierender Elektronendichte	104
7.3	Zusammenfassung	108
8	Verhalten bei hohen Strömen	109
8.1	Transportuntersuchungen zum Zusammenbruch des QHE	109
8.2	Potential- und Stromverteilung nahe dem Zusammenbruch des QHE	110

8.3	Korrelation mit Messungen des Abschirmverhaltens	112
8.4	Räumliche Entwicklung des Hall-Potentialprofils	114
8.5	Interpretation und Theorie	114
8.6	Zusammenfassung	119
9	Neubetrachtung früherer Experimente	121
9.1	Sublineare Skalierung des longitudinalen Widerstandes mit dem Abstand der spannungsmessenden Kontakte	121
9.2	Landauer-Büttiker-Formalismus	124
9.2.1	Büttikers Modell eindimensionaler Stromkanäle	124
9.2.2	Einführung des Landauer-Büttiker-Formalismus	126
9.2.3	Der Landauer-Büttiker-Formalismus in unserem Modell	127
9.3	Zusammenfassung	130
10	Zusammenfassung und Ausblick	131
11	English Summary	137
A	Überblick über andere Arbeiten	145
B	Ergänzende Meßkurven	155
	Literaturverzeichnis	165

Symbole und Abkürzungen

2DES	zwei-dimensionales Elektronensystem .
a_ν	Breite des inkompressiblen Streifens mit lokal ganzzahligem Füllfaktor ν .
A	Vektorpotential.
Abb.	Abbildung.
a.u.	beliebige Einheiten („arbitrary units“).
$\alpha = \mu_0 c e^2 / 2\hbar$	Feinstrukturkonstante.
B	Stärke des Magnetfeldes .
β	Öffnungswinkel.
c	Lichtgeschwindigkeit im Vakuum.
c_0	Federkonstante des Federarms.
c_{eff}	effektive Federkonstante des Federarms.
$\partial_d C(x, y), \partial_d^2 C(x, y)$	1. bzw. 2. Ableitung nach d der Kapazität C zwischen Spitze und Probe.
γ	Variable mit den Werten $\{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$.
d	Abstand zwischen Spitze und Probe.
d_s	„Spacer“-Dicke .
$D(\varepsilon)$	Zustandsdichte.
$D_0 = g_s m^* / 2\pi \hbar^2$	konstante Zustandsdichte eines 2DES.
$\Delta \hat{\omega}_r$	induzierte Resonanzfrequenzverschiebung.
$\Delta \mu_{t,s}^{\text{ch}}$	Unterschied in den Austrittsarbeiten zwischen Spitze und Probe.
e	Elementarladung.
E	Elektrischer Feldvektor in der 2DES-Ebene.
(E_x, E_y)	Komponenten des elektrischen Feldes im kartesischen Koordinatensystem $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$.
(E_r, E_ϕ)	Komponenten des elektrischen Feldes im Polarkoordinatensystem $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\phi)$.
$\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\phi$	Einheitsvektoren des Polarkoordinatensystems.
$\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$	Einheitsvektoren des kartesischen Koordinatensystems.
ε	Einteilchen-Energie.
ε_L	Energie der Leitungsbandkante.
$\varepsilon_n = \hbar \omega_c (n + \frac{1}{2})$	Zyklotronenergie zur Landau-Quantenzahl n .

ε_F	Fermi-Energie.
ε_V	Energie der Valenzbandkante.
ε_z^j	Einteilchen-Eigenenergien im z -Einschlußpotential.
ε_0	Dielektrizitätskonstante des Vakuums.
$\varepsilon_{\text{GaAs}}$	Dielektrizitätszahl für GaAs, $\varepsilon_{\text{GaAs}} = 13,4$.
ζ	Variable mit $0 \leq \zeta \leq 1$.
F	Kraft.
$\Phi = BL_xL_y$	Magnetischer Fluß.
$\Phi_0 = h/e$	magnetisches Flußquantum.
g^*	effektiver Landé-Faktor.
g_s	Spinentartungsfaktor, $g_s = 2$ bei Spinentartung, $g_s = 1$ bei aufgehobener Spinentartung.
h	Plancksche Konstante.
\hbar	$h/2\pi$.
$i = \{1, 2, 3, \dots\}$	natürliche Zahl, Index.
I	Strom.
$\mathbf{j} = (j_x, j_y) = (j_r, j_\phi)$	Stromdichte in der 2DES-Ebene.
k_B	Boltzmann-Konstante.
k_F	Fermi-Wellenvektor.
$\mathbf{k} = (k_x, k_y)$	Wellenvektor in der 2DES-Ebene.
κ	Kompressibilität.
$l_B = \sqrt{\hbar/eB}$	magnetische Länge.
l_m	mittlere freie Weglänge.
L	Abstand der Potentialabgriffe in x -Richtung.
L_x	Probenlänge in x -Richtung.
$L_y = W$	Probenbreite in y -Richtung.
MBE	Molekularstrahl-Epitaxie (engl. "Molecular Beam Epitaxy").
m^*	effektive Masse eines Leitungsbandelektrons ($0,066 m_e$ für GaAs).
m_e	freie Elektronenmasse.
$\mu = e\tau/m^*$	effektive Elektronen-Beweglichkeit.
μ_0	Permeabilität des Vakuums.
μ_{elch}	elektrochemisches Potential.
μ_{ch}	chemisches Potential.
μ_B	Bohrsches Magneton.
n	Landau-Quantenzahl.
$n_L = \hbar\omega_c D_0 = g_s eB/h$	Entartungsgrad.
n_s	Elektronenkonzentration.

$N = \text{int}(\nu)$	Anzahl der bei $T = 0$ ganz oder teilweise besetzten spin-aufgespaltenen Niveaus.
N_s	Gesamtelektronenanzahl in einer Fläche des homogenen 2DES.
$\nu = n_s/n_L$	Landau-Niveau-Füllfaktor.
ν_b	ganzzahliger Füllfaktor im freien Probengebiet ohne darüberliegende Elektrode.
ν_g	ganzzahliger Füllfaktor unterhalb einer darüberliegenden Steuer-Elektrode.
ν_{lokal}	lokaler Landau-Niveau-Füllfaktor.
\mathbf{p}	Impulsvektor.
P	Dissipierte Leistung.
ψ, φ, χ	Einteilchen-Wellenfunktionen.
ϕ	Winkelkoordinate.
QHE	Quanten-Hall-Effekt.
$\partial_d Q_t(x, y), \partial_d^2 Q_t(x, y)$	1. bzw. 2. Ableitung nach d des Betrags der Spiegelladungen Q_t , die auf der Spitze durch die geladene Donatorschicht induziert werden.
$\mathbf{r} = (x, y)$	Ortsvektor in der 2DES-Ebene im kartesischen Koordinatensystem.
r_a	äußerer Radius einer Corbino-Geometrie.
r_i	innerer Radius einer Corbino-Geometrie.
R_j^i	Wahrscheinlichkeit dafür, daß der i -te Randkanal, der Kontakt j verläßt, in denselben Kontakt j zurückgestreut wird.
$R_K = h/e^2$	von Klitzing-Konstante.
$R_n = l_B \sqrt{2n+1}$	Ausdehnung der Wellenfunktion, 'Zyklotronradius'.
R_{xx}	longitudinaler Widerstand.
R_{xy}	transversaler oder Hall-Widerstand.
$\tilde{\rho}$	spezifischer Widerstandstensor.
$\rho_0 = 1/\sigma_0$	klassischer spezifischer Drude-Widerstand bei $B = 0$ T.
ρ_{xx}	spezifischer longitudinaler Widerstand.
ρ_{xy}	spezifischer transversaler oder Hall-Widerstand.
$s = \pm 1/2$	Spinorientierungs-Quantenzahl.
SET	Einzel-Elektronen-Transistor („single electron transistor“)
$\tilde{\sigma}$	spezifischer Leitfähigkeitstensor.
$\sigma_0 = en_s \mu$	klassische Drude-Leitfähigkeit bei $B = 0$ T.
σ_{xx}	spezifische longitudinale Leitfähigkeit im kartesischen Koordinatensystem.
σ_{xy}	spezifische transversale oder Hall-Leitfähigkeit im kartesischen Koordinatensystem.

σ_{rr}	spezifische longitudinale Leitfähigkeit im Polarkoordinatensystem.
$\sigma_{r\phi}$	spezifische transversale oder Hall-Leitfähigkeit im Polarkoordinatensystem.
t	phänomenologische Entkopplungsstärke eines inkompr. Streifens
T	Temperatur.
$T_{k \rightarrow j}^j$	Wahrscheinlichkeit dafür, daß der i -te Randkanal aus Kontakt k in den j -ten Kontakt transmittiert wird.
τ	Streuzeit.
θ_{Hall}	Hall-Winkel.
V_{Hall}	Hall-Spannung.
$V_{\text{s,d}}$	angelegte Spannung zwischen „source“ und „drain“-Anschluß.
V_x	longitudinaler Spannungsabfall.
V_y	transversaler Spannungsabfall.
v_D	Driftgeschwindigkeit eines Elektrons.
v_F	Geschwindigkeit eines Elektrons bei der Fermi-Energie.
V	elektrostatistisches Potential.
V_{bg}	ortsabhängiges Hintergrundpotential oder “background”.
V_{con}	ortsabhängiges Einschlußpotential oder “confinement”.
V_g	Elektrodenpotential.
V_{Hartree}	ortsabhängiges Hartree-Potential.
$V_{\text{rück}}$	Rückseitenelektrodenpotential.
$V_{\text{rück}}^m$	moduliertes Rückseitenelektrodenpotential.
$V_{\text{stör}}$	ortsabhängiges Störstellenpotential.
$V_{\text{t,s}}$	angelegte Spannung zwischen Spitze und Probe.
$\hat{V}_{\text{t,s}}^m(x, y)$	Modulationsamplitude .
$\hat{V}_{\text{t,s}}^\square(x, y)$	Modulationsamplitude bei Rechteckanregung.
$W = L_y$	Probenbreite in y -Richtung.
x	Ortskoordinate entlang der Probe.
y	Ortskoordinate über die Breite der Probe.
y_ν	Position des inkompressiblen Streifens mit lokal ganzzahligem ν .
$Y = -l_B^2 k_x$	Zentrumskoordinate der Zyklotronbewegung.
ω_0	freie Resonanzfrequenz des Federarms.
ω_a	Frequenz der mechanischen Anregung des Federarms.
$\omega_c = eB/m^*$	Zyklotronfrequenz.
ω_m	Modulationsfrequenz eines aufgeprägten elektrischen Signals.
ω_r	Resonanzfrequenz des Federarms bei Wechselwirkung mit Probe.

Kapitel 1

Einleitung

Die Physik niederdimensionaler Elektronensysteme ist ein sehr reichhaltiges Forschungsgebiet der modernen Festkörperphysik. Insbesondere neuartige Effekte zwei-dimensionaler Elektronensysteme bei sehr tiefen Temperaturen und hohen Magnetfeldern sind in den letzten zwei Jahrzehnten intensiv untersucht worden und haben die Grundlage für viele weitergehende Forschungsaktivitäten gelegt. Die beiden wichtigsten Entdeckungen sind der so genannte ganzzahlige Quanten-Hall-Effekt und der gebrochenzahlige Quanten-Hall-Effekt, die jeweils mit dem Nobelpreis für Physik gewürdigt wurden¹ [5, 6, 7]. Diese Quanteneffekte manifestieren sich vor allem in elektrischen Transportexperimenten, bei denen ein Strom in die Probe eingepreßt und unter dem Einfluß eines senkrechten Magnetfeldes die resultierende Hall-Spannung gemessen wird. Der Hall-Widerstand – d.h. das Verhältnis zwischen Hall-Spannung und eingepreßtem Strom – nimmt über breite Magnetfeldbereiche sehr präzise Werte an, die ganz- bzw. gebrochenzahligen Bruchteilen der *von-Klitzing-Konstante* R_K entsprechen. Sie wird identifiziert mit $R_K = h/e^2$, wobei h die Plancksche Konstante und e die Elementarladung beschreibt und die Unsicherheit in der Übereinstimmung bei kleiner $2, 4 \times 10^{-8}$ [8] liegt. Unabhängig davon wird der Quanten-Hall-Effekt wegen seiner hohen Reproduzierbarkeit und Unabhängigkeit von der genauen Probengeometrie seit 1990 als internationaler Widerstandsstandard verwendet [9, 10] (Für Übersichtsartikel siehe [11, 12]). Wie in der Originalarbeit von 1980 beschrieben, ermöglicht er darüberhinaus einen experimentellen Weg zur Bestimmung der Feinstrukturkonstante α , die über die Permeabilität des Vakuums μ_0 und die Lichtgeschwindigkeit c direkt mit R_K zusammenhängt: $R_K = h/e^2 = \mu_0 c / (2\alpha)$. In SI-Einheiten sind μ_0 und c feste Größen, so daß sich die Genauigkeit, mit der R_K bestimmt werden kann, auch auf α überträgt. Der Quanten-Hall-Effekt erlaubt damit einen Vergleich mit Berechnungen von α durch die Quanten-Elektrodynamik.

¹Nobelpreis für Physik 1985 an K. v. Klitzing [1] „für die Entdeckung des quantisierten Hall-Effektes“; Nobelpreis für Physik 1998 an D.C. Tsui [2], H.L. Störmer [3] und R.B. Laughlin [4] „für ihre Entdeckung einer neuen Form von Quantenflüssigkeit mit gebrochenzahlig geladenen Anregungen“.

Interessanterweise ist es trotz seiner herausragenden experimentellen Reproduzierbarkeit bislang nicht gelungen, ein geschlossenes theoretisches Bild zur Erklärung des Quanten-Hall-Effekts zu entwickeln. Bestehende Modelle werden daher teilweise sehr kontrovers diskutiert. Auch von experimenteller Seite konnte bislang nicht eindeutig geklärt werden, wo mikroskopisch in der Probe der von außen aufgeprägte Strom fließt und welche Auswirkungen dies auf die Potentialverteilung hat. Erst seit einigen Jahren versucht man daher nicht nur unmittelbar aus elektrischen Transportuntersuchungen Rückschlüsse auf die dem Quanten-Hall-Effekt zugrunde liegende Physik zu ziehen, sondern auch durch Rastersondenmikroskopie ein orts aufgelöstes Bild der Potential- und Stromverteilung zu erhalten. In der vorliegenden Arbeit wird dieses Ziel mit Hilfe eines Rasterkraftmikroskopes verfolgt, das lokal die Änderungen des elektrostatischen Potentials bei aufgeprägtem Strom mit einer Auflösung von etwa $0,1 \mu\text{m}$ und einer Empfindlichkeit von ca. $0,5 \text{ mV}$ ausmessen kann.

Die Arbeit gliedert sich in eine kurze Einführung in zwei-dimensionale Elektronensysteme und grundlegende Aspekte des Quanten-Hall-Effekts (Kapitel 2) und der Meßtechnik (Kapitel 3). Daran schließt sich die Darstellung einiger grundlegender experimenteller Ergebnisse in Kapitel 4 und deren Interpretation für die Stromverteilung im Quanten-Hall-Regime in Kapitel 5 an. Weiterführende Experimente und deren Interpretation im Rahmen des hier gewonnenen mikroskopischen Bildes folgen in Kapitel 6 bis Kapitel 8. In Kapitel 9 wird anschließend die Gültigkeit des vorgestellten Modells im Zusammenhang mit bereits bestehenden Experimenten diskutiert. Es folgen die deutsche (Kapitel 10) und englische Zusammenfassung (Kapitel 11) der Arbeit und in Anhang A ein Überblick über einige wichtige Arbeiten zum QHE und schließlich in Anhang B weitere, ergänzende Meßdaten.

Veröffentlichungen

P. Weitz, E. Ahlswede, J. Weis, K. v. Klitzing, and K. Eberl,
A Low Temperature Scanning Force Microscope for Investigating Buried Two-Dimensional Electron Systems under Quantum Hall Conditions,
Applied Surface Science **157**, 349 (2000).

P. Weitz, E. Ahlswede, J. Weis, K. v. Klitzing, and K. Eberl,
Hall-Potential Investigations under Quantum Hall Conditions Using Scanning Force Microscopy,
Physica E **6**, 247 (2000).

E. Ahlswede, P. Weitz, J. Weis, K. v. Klitzing, and K. Eberl,
Hall Potential Profiles in the Quantum Hall Regime Measured by a Scanning Force Microscope,
Physica B **298**, 562 (2001).

E. Ahlswede, J. Weis, K. v. Klitzing, and K. Eberl,

Hall Potential Distribution in the Quantum Hall Regime in the Vicinity of a Potential Probe Contact,

Physica E **12**, 165 (2002).

Kapitel 2

Grundlagen zum Quanten-Hall-Effekt

Den Quanten-Hall-Effekt beobachtet man an zwei-dimensionalen Elektronensystemen (2DES) bei tiefen Temperaturen und hohen Magnetfeldern in elektrischen Transportexperimenten. Dieses Kapitel führt daher zunächst in die Grundlagen eines 2DES und die Landau-Quantisierung der elektrischen Zustände des 2DES im Magnetfeld ein. Es folgt eine kurze Beschreibung der klassischen Magnetotransport-Theorie und schließlich eine phänomenologische Beschreibung des ganzzahligen Quanten-Hall-Effekts und grundlegender Ansätze zu seiner Erklärung.

2.1 Zwei-dimensionale Elektronensysteme (2DES) an der Grenzfläche einer GaAs/Al_xGa_{1-x}As-Heterostruktur

Mit Hilfe moderner Molekularstrahl-Epitaxieverfahren (MBE) [13] gelingt es heute quasi atomlagen genau verschiedene Halbleitermaterialien aufeinander aufzuwachsen und damit neuartige Kristallstrukturen zu schaffen. Ein derartiges einkristallines Schichtsystem bezeichnet man auch als Heterostruktur. Besonders interessant sind Heterostrukturen aus den Halbleitermaterialien GaAs und Al_xGa_{1-x}As, die unterschiedliche Bandlückenenergien besitzen und gleichzeitig wegen fast identischer Gitterkonstanten gut aufeinander aufgewachsen werden können, ohne daß große Verspannungen des Kristallgitters an der Grenzfläche entstehen. Eine solche Heterostruktur ist in Abb. 2.1(a) gezeigt. Zunächst wird auf ein semi-isolierendes GaAs-Substrat eine Pufferschicht aufgewachsen, um eine glatte Oberfläche zu erzeugen. Nach einer dicken undotierten GaAs-Schicht folgt eine dünne undotierte Al_xGa_{1-x}As-Schicht¹ mit der Dicke d_s (die sogenannte „Spacerschicht“). Es folgt eine mit Si dotierte Al_xGa_{1-x}As-Schicht und eine weitere Schutzschicht aus GaAs, da Al_xGa_{1-x}As an der Oberfläche schnell oxidiert. An der Grenzfläche zwischen GaAs und Al_xGa_{1-x}As sammeln sich Leitungsbandelektronen, die aus der darüberliegenden Dotierschicht stammen. Der Grund hierfür ist, daß die Leitungsbandkanten-Energie

¹Der Al-Gehalt wird typischerweise auf $x = 0,33$ eingestellt.

ε_L von $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$ höher liegt als die von GaAs. Wegen der Dotierung liegt die *Fermi-Energie* ε_F in $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$ außerdem nur knapp unterhalb von ε_L . Um das elektrochemische Potential in der gesamten Heterostruktur auszugleichen, treten die von den Dotieratomen abgegebenen Elektronen zum GaAs mit dem niedrigeren Leitungsbandminimum über und sammeln sich dort. Die sich ausbildende Raumladung über die Grenzschicht sorgt schließlich für eine räumliche Verbiegung der Bandstruktur, wie in Abb. 2.1(b) dargestellt. Es kommt daher zur Ausbildung eines dreiecksförmigen Einschlußpotentials für die Leitungsbandelektronen an der GaAs/ $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$ -Grenzschicht (Abb. 2.1(c)), so daß die möglichen Energieeigenwerte für einzelne Elektronen in sogenannten Subbändern quantisiert sind. Die Gesamtenergie setzt sich daher aus der kinetischen Energie des Elektrons in der Ebene parallel zur Grenzschicht, d.h. in x - und y -Richtung und der *Subbandenergie* ε_z^j zusammen [14]

$$\varepsilon(j, k_x, k_y) = \frac{\hbar^2 k_x^2}{2m^*} + \frac{\hbar^2 k_y^2}{2m^*} + \varepsilon_z^j, \quad (2.1)$$

wobei m^* die *effektive Masse* der Leitungsbandelektronen beschreibt. Eine freie Elektronenbewegung kann also nur noch innerhalb der (x, y) -Ebene stattfinden. Für GaAs/ $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$ -Heterostrukturen ist m^* weitgehend durch die effektive Masse von GaAs ($m_{\text{GaAs}}^* \approx 0.066 m_0$) bestimmt, da die Wellenfunktionen des Elektronen hauptsächlich in der GaAs-Schicht lokalisiert sind. Diese zwei-dimensionalen Subbänder besitzen aufgrund der parabelförmigen Energiedispersion $\varepsilon(k_x, k_y)$ eine konstante *Zustandsdichte* [14]

$$D(\varepsilon) = D_0 = \frac{g_s m^*}{2\pi \hbar^2}. \quad (2.2)$$

Hierbei gibt g_s den *Spinentartungsgrad* $g_s = \{1, 2\}$ an. Die Gesamtzustandsdichte aller Subbänder zeigt also mit zunehmender Einteilchen-Energie ε einen treppenförmigen Verlauf. Von einem zwei-dimensionalen Elektronensystem (2DES) spricht man streng genommen nur, wenn – wie in den vorliegenden Proben der Fall – bei niedrigen Temperaturen nur das unterste Subband bevölkert ist, d.h. wenn die Energiekante ε_z^1 des zweiten Subbandes oberhalb der Fermi-Energie ε_F liegt. Wegen der konstanten Zustandsdichte (2.2) ist ε_F proportional zur Ladungsträgerdichte n_s innerhalb des 2DES:

$$\varepsilon_F = \frac{2\pi \hbar^2}{g_s m^*} n_s. \quad (2.3)$$

Hieraus ergibt sich die sogenannte *Fermi-Geschwindigkeit* der Elektronen in Zuständen direkt an der Fermi-Energie zu

$$v_F = \sqrt{\frac{2\varepsilon_F}{m^*}} = \frac{2\hbar}{m^*} \sqrt{\frac{\pi n_s}{g_s}}. \quad (2.4)$$

Die Fermi-Energie liegt dabei zwischen $\varepsilon_F = 3,6$ meV bei einer Elektronenkonzentration n_s von $1 \times 10^{15} \text{ m}^{-2}$ und $\varepsilon_F = 21,7$ meV bei $n_s = 6 \times 10^{15} \text{ m}^{-2}$.

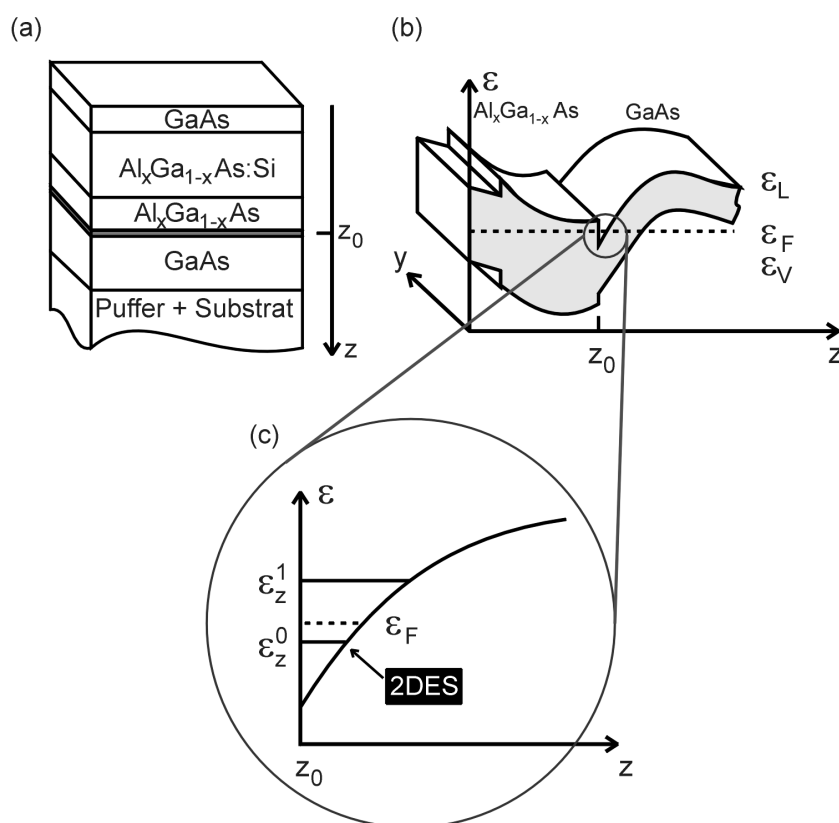


Abb. 2.1: (a) Typische Schichtfolge einer modulationsdotierten GaAs/ $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$ -Heterostruktur. Frei bewegliche Leitungsbandelektronen befinden sich bei z_0 an der Grenzfläche zwischen den undotierten GaAs- und $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$ -Schichten. (b) Schematischer Verlauf der Leitungs- (ε_L) und Valenzbandkante (ε_V) entlang der Wachstumsrichtung der Heterostruktur. An der Grenzfläche bildet sich ein dreieckförmiges Einschlußpotential im Leitungsband aus, in dem sich Elektronen ansammeln. In der Detailansicht (c) sind die Subbandenergien des Dreieckpotentials eingezeichnet. Typischerweise liegt die Fermi-Energie ε_F so, daß nur das unterste Subband mit der Subbandkante ε_z^0 mit Elektronen bevölkert ist. Dann liegt ein zwei-dimensionales Elektronensystem vor.

Der eben beschriebene Schichtaufbau erlaubt die Herstellung von Proben mit hohen Elektronenbeweglichkeiten, da die Donatoren von der Schicht der freien Leitungsbandelektronen durch die undotierte „Spacer“-Schicht getrennt sind [15]. Daher wird der Streueinfluß des langreichweitigen Coulomb-Potentials der Donatorrümpfe, die als positiv geladene Störstellen wirken, stark reduziert. Die Beweglichkeit als Maß dafür, wie leicht sich Elektronen im Einfluß eines elektrischen Feldes durch eine Probe bewegen, ist wegen der geringen effektiven Masse der Leitungsbandelektronen in GaAs generell bereits relativ hoch und kann heutzutage in solchen

sogenannten modulationsdotierten Heterostrukturen Werte von bis zu $\mu \approx 2800 \text{ m}^2/\text{Vs}$ erreichen [16]. Prinzipiell steigt dabei aber die notwendige Dicke der Spacer- und Dotierschicht mit der erwünschten Probengüte an. Allerdings ist, wie noch gezeigt werden wird, ein gewisses Maß an Potentialfluktuationen sogar eine notwendige Voraussetzung zur Beobachtbarkeit des ganzzahligen Quanten-Hall-Effektes. Wichtig für rasterkraftmikroskopische Untersuchungen ist zudem ein möglichst oberflächennahes Elektronensystem, um die Ortsauflösung zu erhöhen, so daß ein Kompromiss aus Probengüte und Tiefe des 2DES bei der Probenwahl am sinnvollsten ist. Bei den im folgenden untersuchten Proben liegt das Elektronensystem daher 40 nm bzw. 35 nm unterhalb der Oberfläche bei einer Beweglichkeit von bis zu $(50 \pm 1) \text{ m}^2/\text{Vs}$ (Ein Überblick über die Eigenschaften der verwendeten Heterostrukturen findet sich in Abb. B.1 des Anhangs B).

2.2 2DES im Magnetfeld

Befindet sich eine solche Probe in einem Magnetfeld, welches senkrecht zur Ebene des 2DES angelegt ist, so tritt zusätzlich zum Einschluß in z -Richtung ein Einschluß durch das Magnetfeld auf. Im Falle nicht-wechselwirkender Elektronen und unter Vernachlässigung des Spins wird die Energie eines Elektrons im senkrechten, homogenen Magnetfeld durch die magnetfeldabhängige Schrödinger-Gleichung

$$\left\{ \frac{1}{2m^*} (\hat{\mathbf{p}} + e\mathbf{A})^2 + eV(x, y) \right\} \psi(x, y) = \varepsilon \psi(x, y) \quad (2.5)$$

bestimmt. Wird dabei in kartesischen Koordinaten das homogene Magnetfeld $\mathbf{B} = (0, 0, B)$ senkrecht zur 2DES-Ebene durch das Vektorpotential $\mathbf{A} = (-By, 0, 0)$ beschrieben und das Potential $V(x, y)$ zunächst vernachlässigt, so ergibt sich das Eigenwertproblem [17]

$$\frac{1}{2m^*} \left\{ (\hat{p}_x - eBy)^2 + \hat{p}_y^2 \right\} \psi(x, y) = \varepsilon \psi(x, y) . \quad (2.6)$$

Da die Hamiltonfunktion auf der linken Seite nicht explizit von x abhängt, ist der Impulsoperator p_x eine Konstante der Bewegung und man kann die Wellenfunktion als Produkt einer ebenen Welle mit dem Wellenvektor k_x in x -Richtung und einem gebundenen Zustand $\varphi_n(y)$ ansetzen:

$$\psi(x, y) = \chi_k(x) \cdot \varphi_n(y) . \quad (2.7)$$

Die übliche periodische Randbedingung $\chi_k(x + L_x) = \chi_k(x)$ führt zu einer Quantisierung $k_x = \gamma 2\pi/L_x$ mit $\gamma = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$, wenn dabei L_x die Länge der Probe in x -Richtung bezeichnet. Die normierte ebene Welle wird daher beschrieben durch

$$\chi_k(x) = \frac{1}{\sqrt{L_x}} e^{ik_x x} . \quad (2.8)$$

Mit $\hat{p}_x = -i\hbar\partial/\partial x$ und $\hat{p}_y = -i\hbar\partial/\partial y$ folgt aus (2.6), (2.7) und (2.8) die Bestimmungsgleichung für $\varphi_n(y)$:

$$\frac{1}{2m^*} \left\{ (\hbar k_x - eBy)^2 - \hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right\} \varphi_n(y) = \varepsilon_n \varphi_n(y). \quad (2.9)$$

Die Gleichung beschreibt einen *harmonischen Oszillator* in y -Richtung. Dies wird ersichtlich durch Einführung der *Zentrumsordinate*

$$Y = -l_B^2 k_x \quad (2.10)$$

und der *Zyklotronfrequenz*

$$\omega_c = \frac{eB}{m^*}. \quad (2.11)$$

Hierbei wird

$$l_B = \sqrt{\frac{\hbar}{eB}} \quad (2.12)$$

als *magnetische Länge* bezeichnet, deren Bedeutung gleich erläutert wird ². Die Bestimmungsgleichung (2.9) lautet dann:

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m^*} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{2} m^* \omega_c^2 \cdot (y - Y)^2 \right\} \varphi_n(y - Y) = \varepsilon_n \varphi_n(y - Y). \quad (2.13)$$

Der gebundene Zustand in y -Richtung hängt also nur über die *Zentrumsordinate* (2.10) vom Wellenvektor k_x ab. Die äquidistanten Eigenwerte ε_n des harmonischen Oszillators, die man als *Landau-Niveaus (LL)* mit der *Landau-Quantenzahl* n bezeichnet, sind gegeben durch

$$\varepsilon_n = \hbar\omega_c \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad n = \{0, 1, 2, \dots\}. \quad (2.14)$$

Die *Zyklotronenergie* $\hbar\omega_c$ steigt nach (2.11) für GaAs mit etwa 1,75 meV/T an.

Die räumliche Ausdehnung R_n der Wellenfunktionen in y -Richtung wird durch die magnetische Länge l_B und die Landau-Quantenzahl n bestimmt:

$$R_n = l_B \sqrt{2n + 1}. \quad (2.15)$$

Dies entspricht dem klassischen Radius R_c der Zyklotronbewegung eines Elektrons im Magnetfeld mit einer kinetischen Energie ε_n . Hier deckt sich also das semiklassische Bild von Zyklotronbahnen im Magnetfeld mit der quantenmechanischen Beschreibung durch Wellenfunktionen.

²Typische Größen sind $l_B \approx 26$ nm für $B = 1$ T und $l_B \approx 8$ nm für $B = 10$ T.

Wir können festhalten:

Die Eigenzustände eines homogenen 2DES im senkrechten Magnetfeld sind als quasi-eindimensional interpretierbar, da sie in der beschriebenen Eichung ausgedehnten Zuständen in x -Richtung, aber auf die Größe R_n lokalisierten Zuständen in y -Richtung entsprechen.

Die Landau-Quantisierung im Magnetfeld hat zur Folge, daß die ursprünglich konstante Zustandsdichte D_0 (vgl. (2.2)) in eine Reihe von δ -funktionsartigen Spitzen aufspaltet, die auf der Einteilchenenergieachse gemäß (2.14) um $\hbar\omega_c$ voneinander entfernt sind:

$$D(\varepsilon) = n_L \sum_n \delta(\varepsilon - \varepsilon_n). \quad (2.16)$$

Es kann gezeigt werden [14], daß der *Entartungsgrad* n_L von der Aufspaltung der Landau-Niveaus und der Zustandsdichte bei $B = 0$ (2.2) abhängt über

$$n_L = \hbar\omega_c D_0 = g_s \frac{e}{h} B. \quad (2.17)$$

Das Verhältnis aus Elektronenkonzentration und Entartungsgrad wird (*Landau-Niveau*)-*Füllfaktor* ν genannt und gibt die Anzahl der besetzten Landau-Niveaus an:

$$\nu \equiv \frac{g_s n_s}{n_L} = \frac{h}{eB} n_s. \quad (2.18)$$

Der Füllfaktor kann für ein *homogenes* 2DES auch als das Verhältnis aus der Gesamtzahl der Elektronen N_s in der Probenfläche und der Gesamtzahl der Flußquanten, die diese Fläche durchdringen, angesehen werden. Denn mit den Kantenlängen L_x und L_y , dem *magnetischen Fluß* $\Phi = BL_x L_y$ durch die Probenfläche und dem *elementaren Flußquant* $\Phi_0 = h/e$ ist wiederum

$$\nu \equiv \frac{N_s}{\Phi/\Phi_0} = \frac{n_s L_x L_y}{BL_x L_y e/h} = \frac{h}{eB} n_s. \quad (2.19)$$

Berücksichtigt man zusätzlich noch die Wechselwirkung des Elektronenspins mit dem Magnetfeld, so setzt sich die Gesamtenergie zusammen aus dem Eigenwert des untersten gebundenen Zustandes in z -Richtung ε_z^0 , den Eigenwerten des harmonischen Oszillators ε_n und dem sogenannten *Zeeman-Term*:

$$\varepsilon_n^{\text{ges}} = \varepsilon_z^0 + \hbar\omega_c \left(n + \frac{1}{2} \right) + s g^* \mu_B B \quad n = \{0, 1, 2, \dots\}, \quad s = \left\{ +\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\}. \quad (2.20)$$

Hierbei ist $\mu_B = e\hbar/(2m_e)$ das *Bohrsche Magneton* und g^* der *effektive Landé-Faktor*, der magnetfeld- und füllfaktorabhängig ist und Austauschwechselwirkungen zwischen Elektronen berücksichtigt. Für ein 2DES in einer GaAs/Al_xGa_{1-x}As-Heterostruktur kann g^* unter Umständen im niedrigsten Landau-Niveau eine Größenordnung erhöht sein im Vergleich zum Volumenwert von GaAs ($g_{\text{GaAs}}^* = -0,44$) und Werte bis $g^* = -6$ erreichen [18, 19, 20]. Die Zeemann-Energie ist daher gewöhnlich bei festem Magnetfeld viel kleiner als die Zyklotronenergie. Das

Verhältnis beträgt $\hbar\omega_c/(g^*\mu_B B) = 2/(g^*m^*/m_e) \approx 15$, vor allem auch bedingt durch den kleinen Wert der effektiven Masse. Bei zusätzlicher Zeeman-Aufspaltung der Landau-Niveaus ist $g_s = 1$ und damit reduziert sich der Entartungsgrad (2.17) um den Faktor 2. Die Anzahl N der bei $T = 0$ ganz oder teilweise besetzten spin-aufgespaltenen Niveaus ergibt sich schließlich zu $N = \text{int}(\nu) = 2n + 1 + (1/2 - s)$.

Konsequenzen der Landau-Quantisierung

Der Abstand und damit auch der Entartungsgrad n_L der Landau-Niveaus wächst linear mit dem angelegten Magnetfeld an. Aus dem obersten Niveau werden nach und nach alle Zustände in die unteren Niveaus entleert, bis bei ganzzahligem Füllfaktor die Fermi-Energie ε_F bzw. das chemische Potential μ_{ch} in das jeweils tiefer liegende Niveau springt, wie in Abb. 2.2 verdeutlicht wird. Die Energielücke beträgt dabei $\hbar\omega_c - g^*\mu_B B$ für geradzahlige ν , aber nur $g^*\mu_B B$ für ungeradzahlige ν . Da das chemische Potential μ_{ch} im Magnetfeld demnach dem Verlauf des jeweils obersten Landau-Niveaus folgt, kommt es zu dem in Abb. 2.2 skizzierten typischen sägezahnähnlichen Verlauf bei der Entvölkerung der einzelnen Landau-Niveaus mit steigendem Magnetfeld. Das Wiederkehren ganzzahliger Füllfaktoren ist dabei periodisch in $1/B$ und folgt nach (2.18) der Beziehung:

$$\Delta\left(\frac{1}{B}\right) = \frac{e g_s}{h n_s}. \quad (2.21)$$

Diese Periodizität in $1/B$ ist gut bekannt von Untersuchungen zur Topologie der Fermi-Flächen mit Hilfe der magnetischen Suszeptibilität – dem sogenannten de Haas-van Alphen Effekt [21]. Die größte Bedeutung dieser Landau-Quantisierung und den damit verbundenen Oszillationen kommt ihnen aber vor allem in Transportexperimenten zu, wo sie zum sogenannten *Shubnikov-de Haas-Effekt* [22] und zum *Quanten-Hall-Effekt* führen. Mit Hilfe von Gleichung (2.21) kann aus der Oszillationsperiode des Shubnikov-de Haas-Effekts unmittelbar die Elektronenkonzentration des 2DES bestimmt werden.

2.3 Klassischer Magnetotransport an 2DES

Hall-Geometrie

Das Verhalten eines 2DES in hohen Magnetfeldern wird häufig in elektrischen Transportmessungen untersucht, bei denen in eine Probe mit typischer Hall-Geometrie – wie in Abb. 2.3 skizziert – über ohmsche Kontakte an den Probenenden ein konstanter Strom I eingeprägt wird. An seitlichen Potentialabgriffen wird dann sowohl der longitudinale Spannungsabfall V_x , als auch der transversale Spannungsabfall V_y in Abhängigkeit der Stärke des senkrechten Magnetfeldes gemessen. Daraus erhält man den *Längswiderstand* $R_{xx} = V_x/I$ und den *Hall-Widerstand* $R_{xy} = V_y/I$.

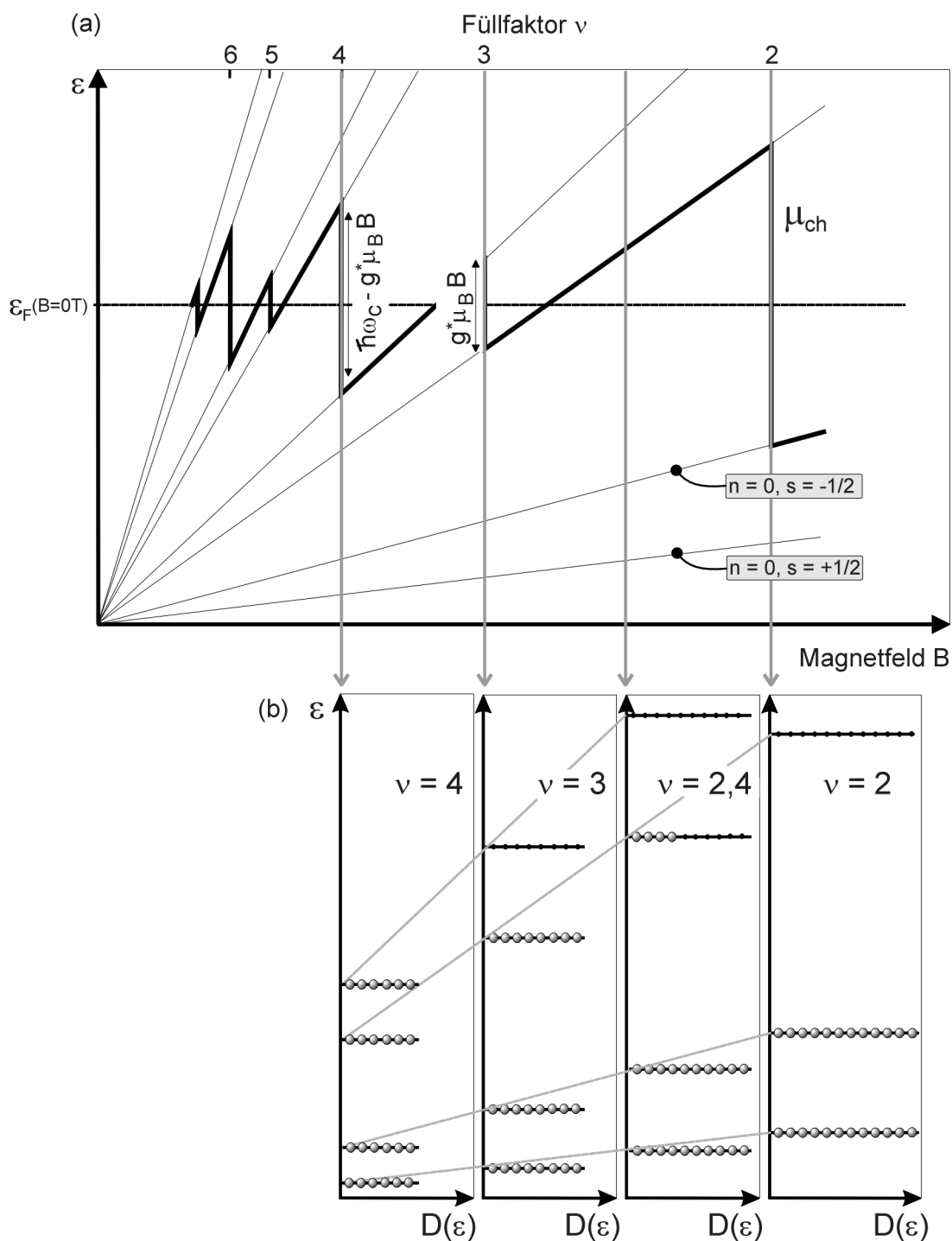


Abb. 2.2: (a) Verlauf der Landau-Niveaus mit Magnetfeld gemäß (2.20). Die dicke Linie zeigt den Verlauf des chemischen Potentials μ_{ch} in Abhängigkeit. Immer wenn gerade ein Niveau komplett entleert worden ist, kommt es zu einem Sprung in μ_{ch} , der bei ungeraden $\nu = \{1, 3, 5, \dots\}$ jeweils $g^*\mu_B B$ entspricht, bei geraden $\nu = \{2, 4, 6, \dots\}$ aber größer ist und $\hbar\omega_c - g^*\mu_B B$ beträgt. (b) Für vier verschiedene Werte des Füllfaktors ν ist die Entvölkerung der Landau-Niveaus bei gleichzeitiger Erhöhung des Entartungsgrades der noch gefüllten Niveaus verdeutlicht.

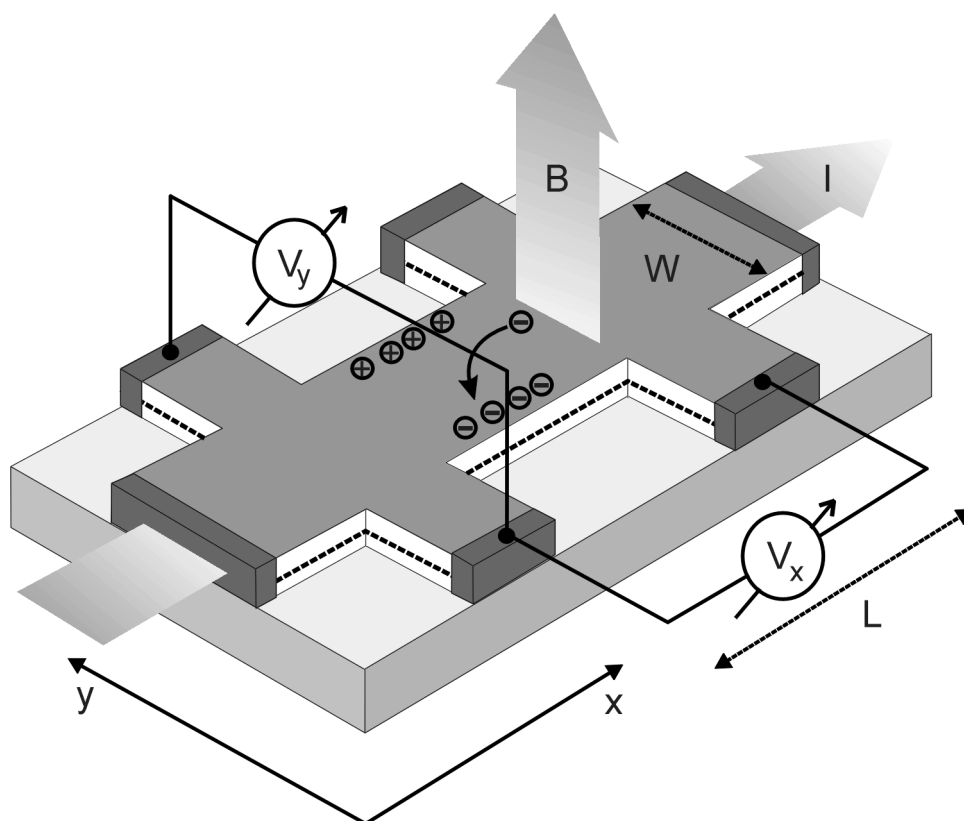


Abb. 2.3: Skizze einer geätzten Mesostruktur in typischer Hall-Geometrie. Ein Strom I wird zwischen den beiden großen Endkontakten in die Probe eingespeist und zwischen den seitlichen Potentialkontakten der longitudinale und transversale Spannungsabfall V_x bzw. V_y als Funktion des homogenen senkrechten Magnetfeldes B gemessen.

Die Probengeometrie realisiert man mit Hilfe photolithographischer Strukturierung und eines naßchemischen Ätzprozesses aus der Heterostruktur. Als Kontaktmetallisierung werden konventionell dünne Schichten aus Au, Ge und Ni im eutektischen Mischungsverhältnis aufgedampft und anschließend in das Material der Heterostruktur einlegiert. Damit können üblicherweise gute ohmsche Kontakte erreicht werden, wie zusammenfassend in [23] dargestellt wird.

Klassisches Drude-Modell

Die klassische Bewegung eines freien Elektrons in aufeinander senkrecht stehenden elektrischen (\mathbf{E}) und magnetischen Feldern (\mathbf{B}) ist die Überlagerung einer kreisförmigen Zyklotronbewegung mit Frequenz ω_c und einer gleichförmigen Driftbewegung senkrecht zu \mathbf{E} und \mathbf{B} mit der Driftgeschwindigkeit v_D . Für die Elektronen innerhalb des 2DES kann bei kleinen Magnetfeldern, bei denen noch keine Quantisierungseffekte in Erscheinung treten, der Elektronentrans-

port in der Form eines klassischen Drude-Modells behandelt werden, wenn der Einfluß des Kristallpotentials dabei durch die Einführung einer effektiven Masse m^* berücksichtigt wird. Dies setzt allerdings voraus, daß die Energiedispersion des Leitungsbandes in der (k_x, k_y) -Ebene isotrop und parabolisch verläuft. Die Bewegungsgleichung ist dann durch die Lorentz-Gleichung

$$m^* \frac{d\mathbf{v}_D}{dt} + \frac{m^*}{\tau} \mathbf{v}_D = -e [\mathbf{E} + (\mathbf{v}_D \times \mathbf{B})] \quad (2.22)$$

gegeben. In dieser Relaxationszeitnäherung werden die elastischen Streuprozesse der Elektronen durch eine einzelne makroskopische Streuzeit τ und den zugehörigen Stoßrelaxationsterm $m^*/\tau \mathbf{v}_D$ beschrieben. Im stationären Fall entfällt der erste Term in (2.22) und mit der Beziehung $\mathbf{j} = -e n_s \mathbf{v}_D$ für die Stromdichte \mathbf{j} und dem isotropen Leitfähigkeitstensor $\tilde{\sigma}$ folgt die Tensorbeziehung $\mathbf{j} = \tilde{\sigma} \mathbf{E}$ zwischen Stromdichte und elektrischem Feld. Für ein 2DES findet die Elektronenbewegung zudem immer innerhalb der Ebene statt. Für ein isotropes System gilt zusätzlich für die Tensorcomponenten $\sigma_{xx} = \sigma_{yy}$ und die Symmetrie $\sigma_{xy} = -\sigma_{yx}$ [24]. Führt man die *Beweglichkeit*

$$\mu \equiv e\tau/m^* \quad (2.23)$$

und die *Drude-Leitfähigkeit*

$$\sigma_0 \equiv e n_s \mu \quad (2.24)$$

ein, die die spezifische Leitfähigkeit bei $B = 0$ T beschreibt, so löst sich (2.22) zu

$$\begin{pmatrix} j_x \\ j_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ -\sigma_{xy} & \sigma_{xx} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \frac{\sigma_0}{1 + (\mu B)^2} \begin{pmatrix} 1 & -\mu B \\ \mu B & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}. \quad (2.25)$$

Daraus leitet sich mit dem spezifischen Widerstandstensor $\tilde{\rho}$ die reziproke Beziehung $\mathbf{E} = \tilde{\rho} \mathbf{j}$ ab. Dabei folgt $\tilde{\rho}$ aus der Tensorinversion von $\tilde{\sigma}$

$$\begin{pmatrix} \rho_{xx} & \rho_{xy} \\ -\rho_{xy} & \rho_{xx} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{xy}^2} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ -\sigma_{xy} & \sigma_{xx} \end{pmatrix}. \quad (2.26)$$

Die einzelnen Tensorcomponenten lauten daher

$$\rho_{xx} = \rho_0 = \frac{1}{\sigma_0} = \frac{1}{e n_s \mu}, \quad (2.27)$$

$$\rho_{xy} = \frac{B}{e n_s}. \quad (2.28)$$

In der Meßanordnung aus Abb. 2.3 werden zunächst Widerstandswerte und nicht die Leitfähigkeitskomponenten des 2DES bestimmt. Unter Annahme eines konstanten Feldes und einer homogenen Stromverteilung über die Probe lassen sich die homogenen Widerstandstensorcomponenten aus den gemessenen Größen R_{xx} , bzw. R_{xy} bestimmen. Voraussetzung hierfür ist, daß die transversale Hall-Spannung V_y stromlos gemessen wird. Wenn L den Abstand zwischen den

seitlichen Potentialabgriffen und W die Probenbreite bezeichnet, so sind die elektrischen Feldkomponenten gegeben durch

$$E_x = V_x/L, \quad E_y = V_y/W \quad (2.29)$$

und die Komponenten der Stromdichte durch

$$j_x = \frac{I}{W}, \quad j_y = 0. \quad (2.30)$$

Der Längs- bzw. Hall-Widerstand bestimmt sich aus der Messung zu

$$R_{xx} = V_x/I, \quad R_{xy} = V_y/I. \quad (2.31)$$

Die Tensorkomponenten lauten daher

$$\rho_{xx} = E_x/j_x = (V_x/L) \cdot (W/I) = (W/L) \cdot R_{xx} \quad (2.32)$$

und

$$\rho_{xy} = E_y/j_x = V_y/W \cdot W/I = R_{xy}. \quad (2.33)$$

Der Hall-Widerstand R_{xy} ist demnach identisch zur spezifischen Hall-Resistivität ρ_{xy} . Er steigt linear mit dem Magnetfeld an, während der longitudinale Widerstand unabhängig vom Magnetfeld ist. Allgemein nimmt das Verhältnis zwischen ρ_{xy} und ρ_{xx} und damit auch das Verhältnis der Feldkomponenten E_y und E_x stark zu mit steigendem Magnetfeld. Der sogenannte *Hall-Winkel* θ_{Hall} beschreibt dabei den Winkel zwischen den beiden Komponenten

$$\tan \theta_{\text{Hall}} = \frac{|E_y|}{|E_x|} = \frac{\rho_{xy}}{\rho_{xx}} = \mu B. \quad (2.34)$$

Bei hohen Magnetfeldern steht die elektrische Feldrichtung daher nahezu senkrecht auf der Stromrichtung. Anders ausgedrückt: Die Äquipotentiallinien bei hohen Magnetfeldern verlaufen nahezu parallel zur Probenkante und werden erst in der unmittelbaren Nähe des Stromkontaktes stark deformiert, um hier in eine Äquipotentiallinie entlang des Kontaktes überzugehen (s. spätere Abb. 6.4).

Der klassische Hall-Effekt kann über Gleichung (2.28) sehr einfach zur Bestimmung der Ladungsträgerkonzentration n_s des 2DES verwendet werden. Aus dem longitudinalen Widerstand bei verschwindendem Magnetfeld (2.27) kann zusätzlich auch direkt die Elektronenbeweglichkeit μ der Probe ermittelt werden. Sie ist ein Maß für die Qualität des 2DES und ist umso höher je weniger Streuung an Störstellen oder den Donatorpotentialen auftritt. Die *mittlere freie Weglänge* l_m , die ein Elektron zwischen zwei Stößen zurücklegt, kann über die Fermi-Geschwindigkeit (2.4) abgeschätzt werden zu³

$$l_m = v_F \tau = \frac{\hbar \sqrt{n_s}}{e \sqrt{2\pi}} \mu. \quad (2.35)$$

³Für unsere typischen Probandaten $n_s = (5,7 \pm 0,05) \times 10^{15} \text{ m}^{-2}$ und $\mu = (50 \pm 1) \text{ m}^2/\text{Vs}$ entspricht $l_m = (6,2 \pm 0,1) \mu\text{m}$.

2.4 Ganzzahliger Quanten-Hall-Effekt

Voraussetzung: Große Magnetfelder, kleine Temperaturen

Dieses klassische Verhalten ändert sich drastisch, wenn im experimentellen Aufbau aus Abb. 2.3 die in Abschnitt 2.2 besprochenen Quantisierungseffekte zum Tragen kommen. Grundvoraussetzung hierzu sind neben einer Probe, die ein zwei-dimensionales Elektronensystem beinhaltet, sehr hohe Magnetfelder und sehr tiefe Temperaturen. Die Notwendigkeit hoher Magnetfelder folgt zum einen aus Gl. (2.18), die besagt, daß ein Magnetfeld von $B = \hbar n_s / e$ benötigt wird, um in der Probe Füllfaktor $\nu = 1$ zu erreichen. Dieser Wert liegt typischerweise bei 10 T bis 20 T. Zum anderen muß die Landau- oder Spinaufspaltung der Zustandsdichte bzw. der Eigenenergien des 2DES (2.20) größer sein als die thermische Energie $k_B T$. Da gemäß (2.11) $\hbar\omega_c$ typischerweise 1 meV bis 17 meV beträgt, sind hierzu Temperaturen kleiner als ca. 10 K notwendig, um quantisierte Stufen noch auflösen zu können.

2.4.1 Phänomen ganzzahliger Quanten-Hall-Effekt

Der ganzzahlige Quanten-Hall-Effekt manifestiert sich bei der üblichen Meßanordnung aus Abb. 2.3 und den eben besprochenen experimentellen Voraussetzungen als eine Folge markanter Plateaus im Hall-Widerstand eines 2DES mit außerordentlich exakt quantisiertem Widerstandswert, der ein ganzzahliger Bruchteil der von Klitzing-Konstante $R_K = h/e^2$ ist (s. Abb. 2.4). Das Plateau erstreckt sich über einen Bereich der Ladungsträgerdichte in einem konstanten Magnetfeld (wie von Klitzing 1980 ursprünglich an Si-MOSFETs zeigte [5]) oder über einen Wertebereich des Magnetfeldes bei fester Elektronenkonzentration (wie heutzutage üblicherweise an GaAs/Al_xGa_{1-x}As-Heterostrukturen gemessen wird [25,26,1]). Gleichzeitig oszilliert der longitudinale Widerstand R_{xx} bei mittleren Magnetfeldern und verschwindet bei hohen Feldern jeweils in den Bereichen, in denen der Hall-Widerstand quantisiert ist (siehe Abb. 2.4)⁴. Die relative Abweichung eines Plateauwertes vom ganzzahligen Bruchteil von e^2/h liegt in der Größenordnung von 10^{-8} oder besser [8]. Zudem ist der ganzzahlige QHE geometrieunabhängig, d.h. der experimentell bestimmte Hall-Widerstand hängt nicht von Geometriefaktoren ab (vgl. (2.33)). Er ist ferner „universell“ in Hinblick auf das verwendete Probenmaterial, solange ein 2DES darin etabliert werden kann. So konnte der QHE mittlerweile auch in organischen Pentazen-Kristallen nachgewiesen werden [27]. Der ganzzahlige Quanten-Hall-Effekt wird daher seit 1990 als internationaler Widerstandsstandard als Basis für konstante Referenzwiderstände verwendet [9, 10] (Für Übersichtsartikel siehe [11, 12]).

⁴Es sei hier darauf hingewiesen, daß gemäß (2.26) aus $\rho_{xx} = 0$ auch $\sigma_{xx} = 0$ folgt.

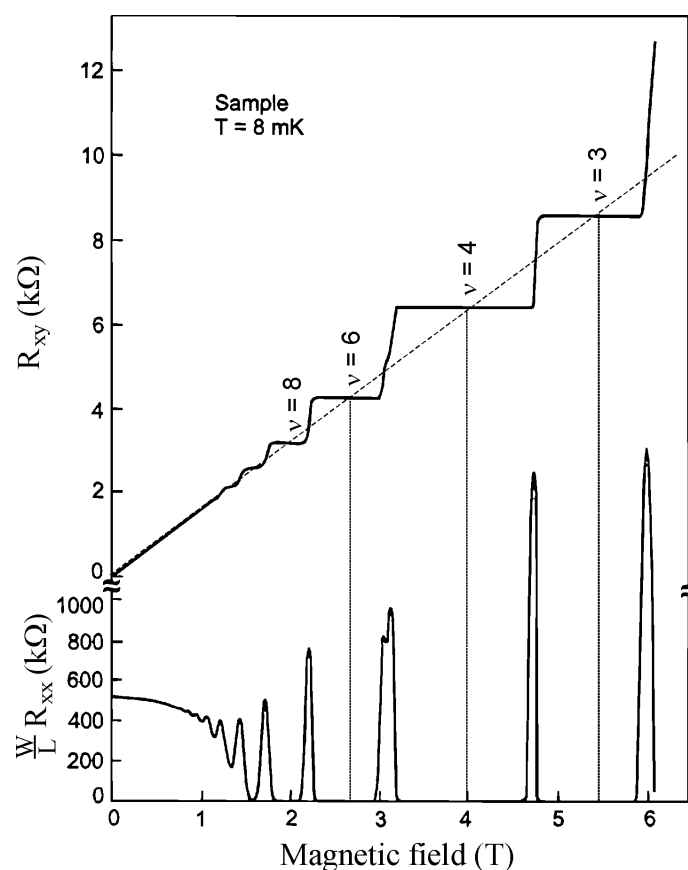


Abb. 2.4: Ganzzahliger Quanten-Hall-Effekt gemessen in einer GaAs/ $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$ -Heterostruktur bei 8 mK (übernommen aus [1]). Sichtbar sind die typischen quantisierten Stufen im Hall-Widerstand R_{xy} und der gleichzeitig verschwindende normierte Längswiderstand R_{xx} . Die Spinaufspaltung gemäß (2.20) und Abb. 2.2 ist nur bei großen $B > 3$ T beobachtbar. Zusätzlich skizziert ist der klassische lineare Verlauf des Hall-Widerstandes. Er schneidet die experimentelle Kurve jeweils bei ganzzahligen Füllfaktoren, d.j. etwa in der Plateaumitte.

2.4.2 Grundlagen zum theoretischen Verständnis

Konsequenzen der Landau-Quantisierung

Die offensichtliche $(1/B)$ -Periodizität des Widerstandsverhaltens folgt zunächst relativ unmittelbar aus der Quantisierung der Energieeigenwerte in Landau-Niveaus, beschrieben durch (2.14), bzw. (2.21). Für mittlere Magnetfeldstärken erklärt sich daraus das oszillatorische Verhalten des longitudinalen Widerstandes $R_{xx}(B)$, das auch als Shubnikov-de Haas-Effekt bezeichnet wird [22, 28]. Da die Elektronenkonzentration n_s einerseits mit dem Füllfaktor ν gemäß (2.18) und andererseits mit dem Hall-Widerstand (2.28) verknüpft ist, ergibt sich eine direkte Propor-

tionalität des Hall-Widerstandes zur von Klitzing-Konstante h/e^2 , wobei der Proportionalitätsfaktor durch ν (2.18) gegeben ist:

$$R_{xy} = \frac{B}{en_s} = \frac{1}{\nu} \frac{h}{e^2} . \quad (2.36)$$

Dies entspricht weiterhin einer klassischen Hall-Geraden, die nur exakt in e^2/h quantisierte Werte für die speziellen Magnetfeldwerte $B_\nu = (h/e) \cdot (n_s/\nu)$ bei exakt ganzzahligen Füllfaktoren $\nu = \{1, 2, 3, \dots\}$ annimmt. Diese Feldwerte B_ν liegen gewöhnlich in der Mitte der experimentell beobachteten Plateaus und in der Mitte der Minima der Shubnikov-de Haas-Oszillationen, wie schematisch in Abb. 2.4 skizziert. Die Plateaubildung selbst und das gleichzeitige Verschwinden des Magnetowiderstandes wird dadurch nicht beschrieben!

Eckpunkte zum theoretischen Verständnis

Ein ausführliches Modell zum Verständnis des Quanten-Hall-Effektes soll unter Einbeziehung der experimentell bestimmten Potentialverteilungen und bereits vorhandener theoretischer Beschreibungen und experimenteller Arbeiten erst im Laufe von Kapitel 5 entwickelt werden. Hier kann vorgreifend schon erwähnt werden, daß die beiden wichtigsten Gesichtspunkte dabei sind:

- **Lokalisierung von Zuständen als Ursache der Plateaus.** Nahezu alle Erklärungsversuche zur Ausbildung der quantisierten Plateaus stützen sich auf die Bedeutung von Potentialfluktuationen, verursacht durch das Coulomb-Potential der zufällig verteilten Donoratomene. Die Zustandsdichte (2.16) modifiziert sich daher zu einer kontinuierlichen Funktion der Energie mit Maxima um das Zentrum der Landau-Niveaus und Minima dazwischen. Nur noch für einen gewissen Anteil der Zustände können sich die Wellenfunktionen entlang der ganzen Probe ausdehnen, die restlichen Zustände sind lokal gebunden („lokalisiert“) und können daher nicht zum Stromtransport beitragen (Eine ausführliche Diskussion folgt in Abschnitt 5.2.1.). Nur in der Umgebung halbzahlgiger Füllfaktoren⁵ finden sich ausgedehnte Zustände an der Fermi-Energie im gesamten 2DES.

Zusammenfassend ist demnach das Vorhandensein einer sogenannten „Mobilitätslücke“ im Energiespektrum entscheidend für die Ausbildung von Plateaus. Unter der Voraussetzung, daß solche Energielücken vorhanden sind und gleichzeitig der longitudinale Widerstand verschwindet, wie experimentell belegt, konnten Laughlin [29], bzw. Halperin [30] mit einem allgemeinen Symmetrieprinzip, nämlich der Invarianz der Elektrodynamik gegenüber Eichtransformationen, zeigen, daß der Hall-Widerstand in der Tat in ganzzahligen Bruchteilen der von Klitzing-Konstante $R_K = h/e^2$ quantisiert ist.

⁵Der Füllfaktor ist vortan als ein gemittelter Wert zu verstehen, bestimmt durch die integralen Transportmessungen.

- **Einfluß des Einschlußpotentials und Ausbildung von Randstreifen.** Dem Rand einer endlichen Hall-Probe kommt eine besondere Bedeutung bei, wie durch die Experimente in Kapitel 4 bestätigt werden wird. Umstritten ist, ob er auch für den Transport des Hall-Stroms entlang von Randkanälen verantwortlich ist [30, 31, 32], oder aber nur untergeordnete Bedeutung für Strompfade hat, die anderen Modellen zufolge hauptsächlich entlang perkolierender Zustände im Probeninneren zu finden sind [33, 34, 35, 36]. Eine genauere theoretische Beschreibung folgt in Abschnitt 4.2.1. Trotz des scheinbaren Erfolgs des Modells der stromtragenden Randkanäle bei der Interpretation verschiedener experimenteller Ergebnisse [32], bleibt auch eine Vielzahl an Experimenten sehr kontrovers interpretierbar. Um dies näher zu untersuchen, sind daher seit einigen Jahren z.B. elektrooptische Experimente [37, 38] zur Bestimmung der lokalen Potentialverteilung mit mehr oder weniger hoher Ortsauflösung durchgeführt worden. Insbesondere die Annahme einer örtlichen lokalen Stromverteilung in schmalen Randkanälen widerspricht dabei Experimenten, die einen Stromfluß über breite Bereiche des Probeninneren nahelegen (z.B. [39, 40, 41, 42]). Es ist zudem unwahrscheinlich, daß Ströme von mehreren Mikroampere dissipationsfrei in schmalen Stromkanälen fließen können [43]. Erst seit kurzem stehen auch rastersondenmikroskopische Experimente zur Verfügung [44, 45, 46], die ebenfalls eher für Ströme im Probeninneren sprechen.

Es ist daher wünschenswert, zur Klärung dieser widersprüchlichen Aussagen und Modelle durch ortsaufgelöste Potentialverteilungsmessungen ein detaillierteres Bild des QHE zu bekommen. Die im folgenden beschriebenen Experimente geben Anlaß zu einer modifizierten Sichtweise und Auslegung der Strom- und Potentialverteilung. Unsere Interpretation wird eine selbstkonsistente Kombination aus dem Modell der Randzustände und dem Modell stromtragender Zustände im Probeninneren beinhalten. Ein wichtiges früheres Transportexperiment zur Untersuchung der Randzustände wird in diesem Kontext in Kapitel 9 neu diskutiert werden.

Kapitel 3

Meßtechnik

Nach einer kurzen Einführung in die Rasterkraftmikroskopie mit Schwerpunkt auf der elektrostatischen Kraftmessung wird die verwendete Meßmethodik zur Bestimmung der chemischen Potentialänderung mit dem Magnetfeld und des Hall-Potentialverlaufes, bzw. zur Bestimmung des Abschirmverhaltens des 2DES beschrieben.

3.1 Rasterkraftmikroskopie

Grundlage aller hier vorgestellten Experimente ist ein Rasterkraftmikroskop, das in einen ^4He -Kryostaten mit supraleitendem Magneten integriert ist und somit Untersuchungen unter Quanten-Hall-Bedingungen erlaubt [47]. Detektiert werden *elektrostatistische Kräfte* zwischen der Mikroskopspitze und dem zweidimensionalen Elektronensystem.

Die Rasterkraftmikroskopie hat sich seit der Vorstellung des ersten Mikroskops 1986 durch Binnig¹ *et al.* [48] rasant entwickelt und ist heutzutage in der Oberflächenanalytik ein unverzichtbares Instrument geworden. Gleichzeitig ist die Weiterentwicklung und Erschließung neuer Anwendungsgebiete ein eigenständiges Forschungsgebiet geworden².

Funktionsweise

Wesentlich für ein Rasterkraftmikroskop ist ein sehr empfindlicher und möglichst punktueller Kraftsensor und eine Vorrichtung zur Abrasterung der zu untersuchenden Probenoberfläche. Abb. 3.1 zeigt eine hierzu verwendete scharfe Meßspitze, die am Ende eines Federarmes befestigt ist. Erfährt die Spitze durch die Wechselwirkung mit der Probenoberfläche eine Kraftwirkung, so verbiegt sich der Federarm und liefert damit ein detektierbares Signal proportional

¹Hälfte des Nobelpreis für Physik 1986 an G. Binnig und H. Rohrer, für ihre Entwicklung des Rastertunnelmikroskops.

²Als Überblick s. [49].

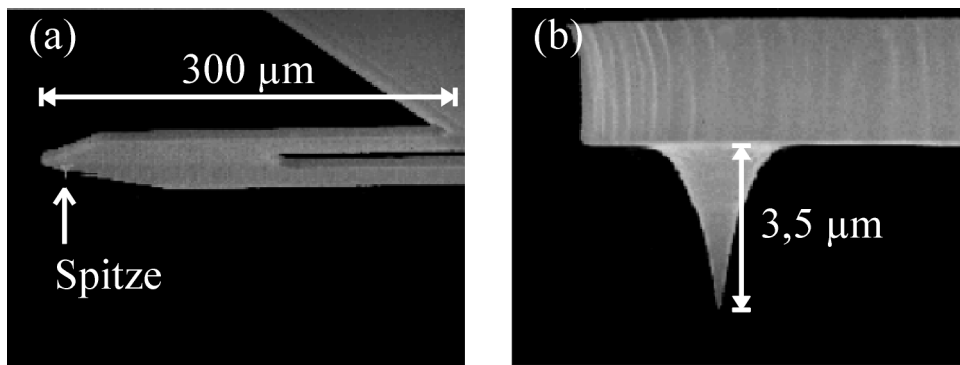


Abb. 3.1: (a) Rasterelektronenmikroskopische Aufnahme des piezoresistiven Federarms, wie er in dieser Arbeit verwendet wurde. Deutlich zu sehen sind die beiden Stege, zwischen denen je nach Verbiegung des Federarms ein unterschiedlicher Widerstand meßbar ist. (b) Vergrößerte Darstellung der eigentlichen Meßspitze. Der Spitzenradius beträgt typischerweise ca. 20 nm [50].

zur anliegenden Kraft. Zur Positionierung oberhalb der Probe ist der Federarm typischerweise an einem piezoelektrischen Keramikröhrchen (Abb.3.2) befestigt, das sich bei passender Spannungsansteuerung der Länge nach ausdehnen oder zusammenziehen oder aber krümmen und damit eine rasternde Bewegung ausführen kann.

Mehrere Kräfte tragen typischerweise zur Auslenkung des Federarms bei. Am bedeutendsten für die topographische Rasterkraftmikroskopie sind interatomare Kräfte, deren Abhängigkeit vom Abstand zwischen der Spitze und der Probenoberfläche in Abb. 3.3 dargestellt ist. Man unterscheidet zwei verschiedene Betriebsarten des Mikroskops, den sogenannten Kontaktmodus und den Nichtkontaktmodus, bei denen jeweils repulsive bzw. attraktive Kräfte vorherrschen.

- Im **Kontaktmodus** wird eine bestimmte erlaubte Verbiegung des Federarms und damit Kraftwirkung vorgegeben. Beim Rastern wird die Höhe der Spitze über der Probenoberfläche durch einen Regelkreis instantan nachgeregelt, so daß die Verbiegung konstant bleibt. Auf diese Weise spiegelt die Regelbewegung der Mikroskopspitze die Topographie der Probe wider. Der Abstand zur Probe beträgt hierbei nur wenige Ångström, die interatomare Kraft ist repulsiv.
- Im **Nichtkontaktmodus** wird dagegen die Meßspitze mehrere hundert Ångström oberhalb der Probe bewegt und die attraktive Kraftwechselwirkung ausgenutzt, die ein kontaktfreies Vermessen der Probe erlaubt. Da die Kraftwirkung dabei relativ gering ist, mißt man beim sogenannten *dynamischen Modus* nicht die statische Verbiegung des Federarms, sondern regt ihn mechanisch zu Schwingungen nahe seiner *Resonanzfrequenz* ω_r an und wertet dabei die Verschiebungen der Resonanzkurve mit Änderung der Position

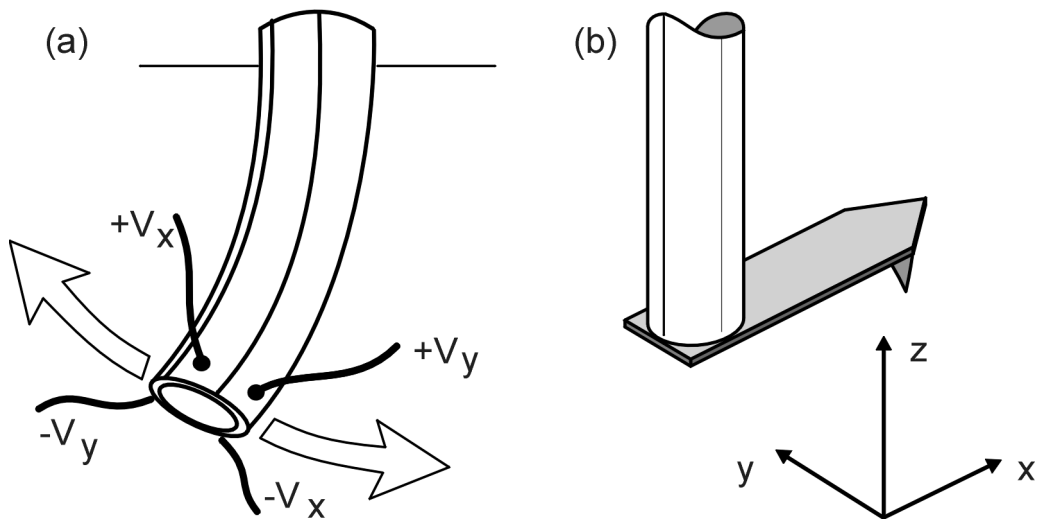


Abb. 3.2: (a) Schematische Zeichnung des piezoelektrischen Keramikröhrchens. Durch passende Ansteuerung der Außenelektrodenbereiche mit den Spannungen $+V_x$, $-V_x$, $+V_y$, $-V_y$ gegenüber der Innenseite des Röhrchens krümmt sich das Röhrchen und kann eine rasternde Bewegung in allen drei Raumrichtungen ausführen (b).

aus. Die Resonanzfrequenzverschiebung ist sensitiv auf Änderungen des *Kraftgradienten* $\partial F/\partial d$ im jeweiligen Abstand d und Ort (x, y) . Dies erklärt sich daraus, daß sich die *Feder-,konstante*“ (besser Rückstellfaktor) c_0 des Federarms bei Anwesenheit eines Kraftgradienten modifiziert zu einem Effektivwert $c_{\text{eff}} = c_0 - \partial F/\partial d$. Die Federschwingung des Federarms mit Masse m besitzt daher bei kleinen Schwingungsamplituden im Abstand d eine ebenfalls modifizierte *Resonanzfrequenz*³

$$\omega_r = \sqrt{\frac{c_{\text{eff}}}{m}} = \sqrt{1 - \frac{\partial F/\partial d}{c_0}} \cdot \omega_0 \approx \left(1 - \frac{\partial F/\partial d}{2c_0}\right) \cdot \omega_0. \quad (3.1)$$

Dabei beschreibt $\omega_0 = \sqrt{c_0/m}$ die Resonanzfrequenz des Federarms ohne Wechselwirkung mit der Probe. Mit (3.1) ergibt sich die Frequenzverschiebung durch die Einwirkung eines Kraftgradienten bei kleinen Schwingungsamplituden näherungsweise zu $\Delta\omega = \omega_r - \omega_0 \approx -(\omega_0/2c_0) \cdot \partial F/\partial d$. Eine attraktive Kraft mit $\partial F/\partial d > 0$ führt daher zu einer Erniedrigung der Resonanzfrequenz ω_r .

Da der Kraftgradient $\partial F/\partial d$ als Ableitung der Kurve aus Abb. 3.3(a) mit dem Abstand zwischen Spitze und Probe variiert, verbindet diese sehr empfindliche Meßmethode daher kleine Änderungen in der Resonanzfrequenz mit Schwankungen im mittleren Abstand

³Genauere Betrachtungen zur Federarmdynamik finden sich z.B. in [51, 52].

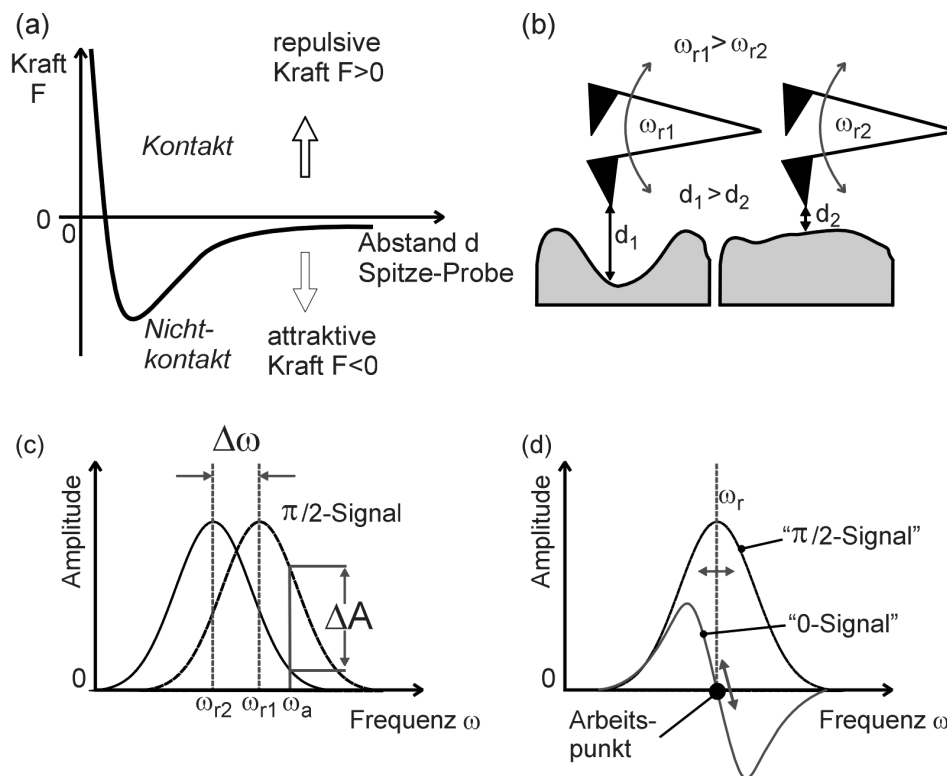


Abb. 3.3: (a) Interatomare Kräfte als Funktion des Abstandes d zwischen Spitze und Probenoberfläche. Man unterscheidet zwischen dem attraktiven ($F > 0$) und dem repulsiven ($F < 0$) Bereich. (b) Im dynamischen Meßmodus wird der Federarm mechanisch zu Schwingungen angeregt. Seine Resonanzfrequenz ω_r hängt von der Größe des vorherrschenden Kraftgradienten ab und erniedrigt sich bei kleineren d im attraktiven Kraftbereich. (c) Bei der „slope-detection“-Methode liegt die Anregungsfrequenz ω_a und Frequenz der Detektion leicht neben der Resonanz ω_r , so daß sich eine Frequenzverschiebung $\Delta\omega$ in der Detektion der Schwingungsamplitude in einer proportionalen Amplitudenänderung ΔA äußert. (d) Alternativ kann auch das gegenüber der Anregung unverschobene Verbiegungssignal verwendet werden, das eine steile Flanke symmetrisch um ω_r aufweist.

d zwischen Spitze und Probe (s. Abb. 3.3(b)) und kann daher ebenfalls Informationen über die Probentopographie liefern. Die Verschiebung der Resonanz wird üblicherweise direkt mit Hilfe einer Frequenz-Modulations-/Demodulations-Methode bestimmt [53], oder aber mit der sogenannten Flankenmethode („slope detection“, s. Abb. 3.3(c)): In der mechanischen Resonanz ist die Schwingung des Federarms um die Phase $\pi/2$ gegenüber dem periodischen Anregungssignal verschoben. Erfolgt die mechanische Anregung bei einer Frequenz ω_a etwas neben der Resonanz ω_r , so befindet man sich auf der steilen,

näherungsweise linearen Flanke der Resonanzkurve. Eine Verschiebung der Resonanzkurve resultiert so in einer näherungsweise proportionalen Änderung der Schwingungsamplitude des Federarms gemessen bei der Frequenz ω_a . Sie kann leicht mit Hilfe eines Lock-In-Verstärkers nachgewiesen werden [54]. Alternativ kann auch – wie im vorliegenden Fall – das in Bezug auf die Anregung nichtphasenverschobene Signal der Verbiegung verwendet werden, das eine steile Flanke symmetrisch um ω_r aufweist (s. Abb. 3.3(d)). Die Anregung erfolgt bei dieser Methode immer bei der Resonanzfrequenz $\omega_a = \omega_r$. Dieser Arbeitspunkt kann leicht gefunden werden, da das nichtphasenverschobene Schwingungssignal in der Resonanz gleich null sein sollte.

In der vorliegenden Arbeit dient die topographische Mikroskopie im wesentlichen nur der Orientierung auf der Probenoberfläche, die eigentliche Information erschließt sich aus der elektrostatischen Kraft zwischen der Meßspitze und der Probe.

3.2 Das Tieftemperatur-Rasterkraftmikroskop

Das verwendete Rasterkraftmikroskop wurde im Rahmen einer Doktorarbeit von Peter Weitz konstruiert und aufgebaut [47]. Es ist in einen ^4He -Kryostaten mit einem 13-T supraleitenden Magneten integriert und wird bei einer Arbeitstemperatur von $T=1,4$ K betrieben. Der Mikroskopkopf mit Meßspitze und Probe ist in Abb. 3.4 skizziert. Er besteht hauptsächlich aus einem unmagnetischen Glaskeramikwerkstoff (MACOR) mit geringer Wärmeleitfähigkeit und Wärmeausdehnung. Die Rasterröhre mit 76 mm Länge erlaubt einen Rasterbereich von $20 \mu\text{m} \times 20 \mu\text{m}$ bei $T = 1,4$ K. Eine grobe Justierung der Probe relativ zur Meßspitze erfolgt über einen Verschiebetisch in einem Bereich von $5 \text{ mm} \times 5 \text{ mm}$ bei einer Schrittweite von ca. 150 nm bei $T = 1,4$ K. Die Funktionsweise des Verschiebetisches beruht auf der sogenannten „slip-stick“-Methode, bei der Scherpiezos in einer abwechselnd langsamen und schnellen sägezahnartigen Pulsabfolge angesprochen werden [55]. Während der langsamen Scherbewegung wird der Tisch mitbewegt, bei der schnellen Scherbewegung zurück bleibt der Tisch aufgrund seiner trägen Masse an der aktuellen Position stehen. Der Mikroskopkopf ist in einem Vakuumgefäß integriert, welches mit einem Helium-Restdruck von $p = 2 \times 10^{-2}$ mbar gefüllt ist⁴, um zu gewährleisten, daß Probe und Rasterspitze die Temperatur der Umgebung annehmen. Zum Wechseln der Proben kann das gesamte Mikroskop aus dem Kryostaten herausgenommen werden. Die Dejustierung der Probe relativ zur Spitze beträgt nach dem Abkühlen typischerweise nur einige zehn Mikrometer.

Die Detektion der Federarmauslenkung erfolgt über einen AuPd-beschichteten piezoresistiven

⁴Gemessen am Ventil außerhalb des Kryostaten bei Raumtemperatur.

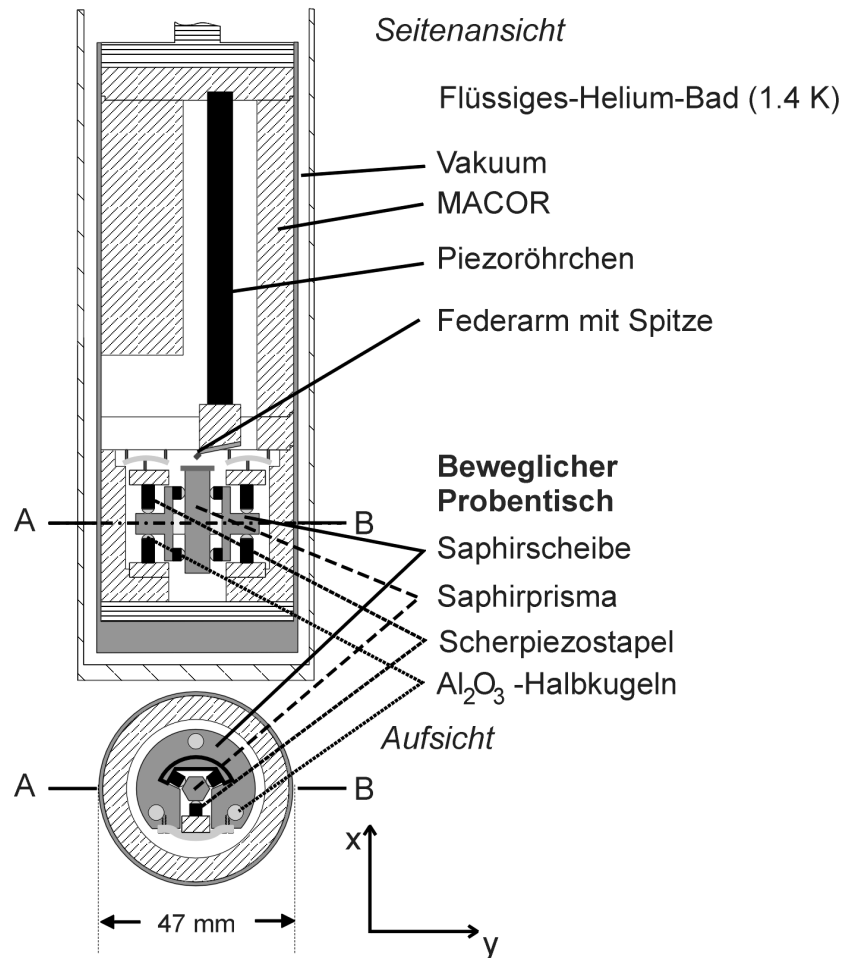


Abb. 3.4: Skizze des Mikroskopkopfes in Seiten- und Aufsicht nach Weitz [47]. Er besteht größtenteils aus dem Glaskeramikwerkstoff MACOR.

Si-Federarm [56], der bei mechanischer Verformung seinen Widerstand ändert ⁵. Dazu verfügt der Federarm über eine *Doppelsteg* (s. Abb. 3.1(a)) mit elektrischen Anschlüssen und kann damit in eine Wheatstone-Meßbrücke integriert werden. Der Vorteil im Vergleich zu sonst eher üblichen optischen Methoden liegt in der relativ einfachen Handhabbarkeit und der Vermeidung von unkontrolliertem Streulicht auf die photoaktive Halbleiterprobe.

Die Steuerung der Rasterspitze und die Datenerfassung wird durch eine kommerzielle Elektroeinheit der Firma Omicron ⁶ und deren zugehörige SCALA Software bewerkstelligt.

⁵Park Scientific Instruments, PLCT-SAMT. Eine Biegung des Federarms um einen Nanometer bewirkt eine relative Widerstandsänderung von $\Delta R/R = 1 \times 10^{-6}$. Der Widerstand liegt bei ca. 2,5 k Ω .

⁶<http://www.omicron.de/>

3.3 Elektrostatische Kraftmessung

Die elektrostatische Kraft $F(x, y)$ bei angelegter elektrischer Spannung zwischen Spitze und Probe verhält sich in erster Näherung wie die Kraft zwischen zwei Kondensatorplatten. Dabei entspricht die geerdete Spitze der oberen Platte und das lokale Probengebiet unterhalb der Spitze der unteren Platte, an die eine Spannung $V_{t,s}$ angelegt wird (Abb. 3.5(a)). Die Kraftwirkung ist hierbei proportional zum Quadrat der elektrostatischen Potentialdifferenz, die sich zusammensetzt aus der angelegten Kondensatorspannung $V_{t,s}$ plus dem Unterschied in den Austrittsarbeiten, d.h. dem *Kontaktpotential* $\Delta\mu_{t,s}^{\text{ch}}/e$ zwischen metallisierter Spitze und Probe,

$$F(x, y) \propto \partial_d C(x, y) \cdot \left[V_{t,s} + \Delta\mu_{t,s}^{\text{ch}}(x, y)/e \right]^2. \quad (3.2)$$

Die Proportionalität ist gegeben durch die Änderung der Kapazität $C(x, y)$ zwischen Spitze und Probengebiet mit der Distanz d . Diese Abhängigkeit (3.2) macht sich allgemein die sogenannte „Kelvin-Probe“-Kraftmikroskopie zunutze, die eine weitverbreitete Technik zur Untersuchung des lokalen Kontaktpotentials von Metallen und Halbleitern ist [57, 58, 59, 60]. Hierbei wird eine zusätzliche Wechselfspannung $\hat{V}_{t,s}^m \sin \omega_m t$ zwischen Spitze und Probe angelegt (Abb. 3.5(a)), so daß die Gleichspannung $V_{t,s}$ in (3.2) durch $V_{t,s}^m(t) = V_{t,s} + \hat{V}_{t,s}^m \sin \omega_m t$ ersetzt werden muß. Das mechanische Resonanzverhalten des Federarms sorgt für eine drastische Verstärkung der Schwingungsamplitude für Anregungen nahe der Resonanz, so daß typischerweise $\omega_m \approx \omega_r$ gewählt wird. Verwendet man einen Lock-In-Verstärker, der sensitiv auf Signale bei der Frequenz ω_m ist, so detektiert man nur noch die Kraftamplitude $\hat{F}_{\omega_m}(x, y)$ bei der Modulationsfrequenz ω_m , die proportional zur induzierten Oszillationsamplitude $\hat{V}_{t,s}^m$ ist:

$$\hat{F}_{\omega_m}(x, y) \propto \partial_d C(x, y) \cdot \left[V_{t,s} + \Delta\mu_{t,s}^{\text{ch}}(x, y)/e \right] \cdot \hat{V}_{t,s}^m. \quad (3.3)$$

Das Kontaktpotential $\Delta\mu_{t,s}^{\text{ch}}/e$ zwischen Spitze und Probe kann bestimmt werden, indem die Gleichspannung $V_{t,s}$ so nachgeregelt wird, daß die Kraftkomponente $\hat{F}_{\omega_m}(x, y)$ verschwindet, was gerade bei $V_{t,s} = -\Delta\mu_{t,s}^{\text{ch}}(x, y)/e$ der Fall ist. Die elektrostatische Potentialdifferenz ist null, es existiert unter diesen Bedingungen kein elektrisches Feld zwischen Spitze und Probe und damit keine Kraft.

Für eine typische Hall-Probe liegt das zu untersuchende zweidimensionale Elektronensystem allerdings unter einer Donatorschicht ca. 40 nm unterhalb der Oberfläche (Abb. 3.5(b)). Diese zusätzlichen festen Ladungen influenzieren Bildladungen auf der Meßspitze und führen zu zusätzlichen elektrischen Feldern. Diese sind schließlich Ursache für einen zusätzlich linearen, bzw. konstanten Kraftbeitrag, so daß (3.2) erweitert werden muß zu [47]

$$F(x, y) \propto \partial_d W_{\text{ion}} + \partial_d Q_t(x, y) \cdot \left[V_{t,s} + \Delta\mu_{t,s}^{\text{ch}}(x, y)/e \right] + \partial_d C(x, y) \cdot \left[V_{t,s} + \Delta\mu_{t,s}^{\text{ch}}(x, y)/e \right]^2. \quad (3.4)$$

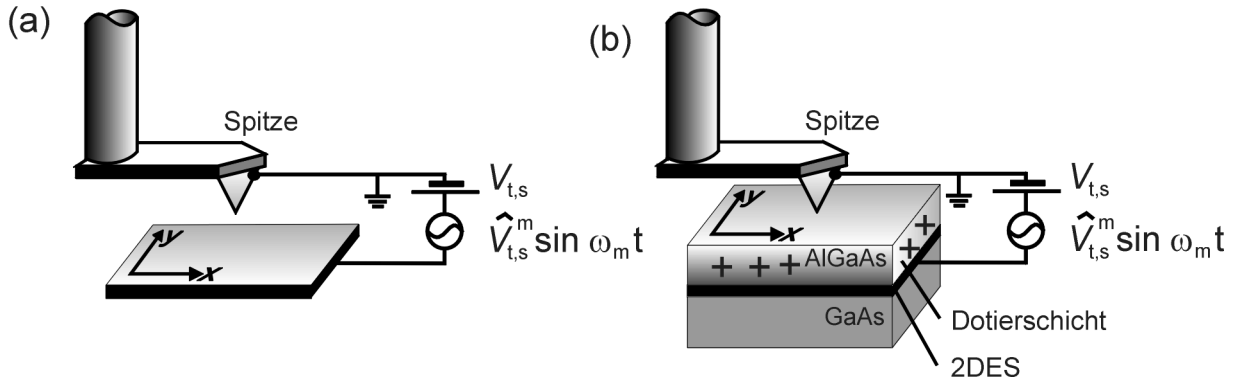


Abb. 3.5: (a) Skizze des experimentellen Aufbaus für „Kelvin-Probe“-Messungen. Eine Gleichspannung $V_{t,s}$ zwischen Spitze und Probe bewirkt eine elektrostatische Kraft $F(x, y)$. Durch die zusätzliche Modulation $\hat{V}_{t,s}^m \sin \omega_m t$ lässt sich mit Hilfe eines Lock-in-Detektors die Kraftamplitude $\hat{F}_{\omega_m}(x, y)$ bei der Modulationsfrequenz ω_m bestimmen. (b) Die Donatorschicht zwischen Spitze und 2DES sorgt für einen zusätzlichen Kraftbeitrag aufgrund zusätzlicher elektrischer Felder und influenzierter Spiegelladungen.

Hierbei beschreibt $\partial_d W_{\text{ion}}$ die Änderungen der Wechselwirkungsenergie zwischen ortsfesten elektrostatischen Ladungen aufgrund der Abstandsänderung der metallisierten Spitze. Ferner bezeichnet $\partial_d C(x, y)$ die 1. Ableitung der Kapazität zwischen Spitze und Probe nach der Distanz d zwischen Spitze und Probe und $\partial_d Q_t(x, y)$ ist die 1. Ableitung des Beitrags der Spiegelladungen, die auf der Spitze durch die geladene Donatorschicht und anderer fester Ladungen influenziert werden. Dadurch erweitert sich gemäß (3.3) auch die gemessene Kraftkomponente $\hat{F}_{\omega_m}(x, y)$ bei der Modulationsfrequenz ω_m zu

$$\hat{F}_{\omega_m}(x, y) \propto \partial_d Q_t(x, y) \cdot \hat{V}_{t,s}^m + \partial_d C(x, y) \cdot [V_{t,s} + \Delta\mu_{t,s}^{\text{ch}}(x, y)/e] \cdot \hat{V}_{t,s}^m. \quad (3.5)$$

Wegen des zusätzlichen ortsabhängigen Terms in (3.5) ist es nicht möglich, eindeutig den Unterschied der Austrittsarbeiten $\Delta\mu_{t,s}^{\text{ch}}(x, y)/e$ mit der üblichen „Kelvin-Probe“-Methode zu bestimmen. Für eine feste Position kann aber die Änderung in den Austrittsarbeiten und damit Änderungen im chemischen Potential des 2DES in Abhängigkeit des äußeren Magnetfeldes bestimmt werden [61].

Da sich aber der Quanten-Hall-Effekt insbesondere durch Bereiche mit sehr schlechter Leitfähigkeit innerhalb des 2DES für bestimmte Magnetfeldwerte auszeichnet, führen die relativ hohen Frequenzen, bedingt durch die Federarmeigenschaften, die bei der herkömmlichen „Kelvin-Probe“-Methode zur elektrischen Modulation verwendet werden (typischerweise ca. 27 kHz für die hier verwendeten Federarme), zu unerwünschten Ladungseffekten mit sehr hohen Zeitkonstanten. Das Meßsignal wird dadurch verfälscht und macht die Interpretation der

Daten schwierig. Die elektrische Modulation sollte daher möglichst niederfrequent erfolgen, d.h. bei Frequenzen weit unterhalb der Resonanzfrequenz. Einen Ausweg stellt der dynamische Kraftmodus dar, bei dem der Federarm mechanisch bei der Resonanzfrequenz des Federarms ω_r zu Schwingungen angeregt wird, die elektrische Wechselspannungsmodulation $\hat{V}_{t,s}^m \sin \omega_m t$, die an die Probe angelegt wird, aber bei kleinen Frequenzen erfolgen kann (wenige Hertz ⁷). Das elektrische Signal führt zu einer Modulation der mechanischen Resonanzfrequenz, wenn der mittlere Abstand der Spitze konstant gehalten wird (typischerweise ca. 30 nm oberhalb der Heterostrukturoberfläche). Die Frequenzverschiebung ist wie erwähnt ein Maß für die Kraftänderung mit der Distanz zwischen Spitze und Probe d und ist daher proportional zur Ableitung der Kraft (3.4) nach d . Die Modulationsamplitude der Frequenzverschiebung ist damit über (3.5) gegeben durch

$$\begin{aligned} \Delta\hat{\omega}_r(x, y) &\propto \partial_d \hat{F}_{\omega_m}(x, y) \\ &\propto \left\{ \partial_d^2 Q_t(x, y) + \partial_d^2 C(x, y) \left[V_{t,s} + \Delta\mu_{t,s}^{\text{ch}}(x, y)/e \right] \right\} \hat{V}_{t,s}^m. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Da (3.6) Terme zweiter Ableitung nach d enthält, gewinnen Beiträge von der direkten Wechselwirkung zwischen Spitze und Probe an Gewicht, kapazitive Hintergrundsbeiträge, gegeben z.B. durch Kapazitäten des Gesamtfederarms und der Probe, verlieren aber an Bedeutung, da sie mit dem Abstand schnell abfallen und daher in der Ableitung unterdrückt werden. Diese Meßmethode erlaubt daher auch eine höhere örtliche Auflösung von ca. 0,1 μm im Vergleich zur direkten Kraftmessung.

Der experimentelle Aufbau ist in Abb. 3.6 verdeutlicht. Der Federarm wird mechanisch über die Piezoröhrchen zu Schwingungen in der Resonanz angeregt. Eine Änderung der Auslenkung des Federarms führt zu einer Widerstandsänderung, die mit Hilfe der Wheatstone-Brücke in eine Spannungsänderung umgewandelt wird. Die Schwingungsamplitude des Federarms bei der Anregungsfrequenz $\omega_r \approx 2\pi \times 27 \text{ kHz}$ läßt sich daher mit Hilfe des Lock-In-Verstärkers 1 in Abb. 3.6 bestimmen. Mit Hilfe der Flankenmethode aus Abb. 3.3(d) wird über einen Regelkreis die Anregungsfrequenz nachjustiert, so daß eine gleichbleibende mechanische Anregung direkt bei der Resonanzfrequenz mit Hilfe des Piezoröhrchens gewährleistet ist. Das Ausgangssignal des Regelkreises ist demnach proportional zur Frequenzverschiebung, welche u.a. durch die niederfrequente Modulation induziert wird. Mit Hilfe des Lock-In-Verstärkers 2 wird es auf Signale bei der Modulationsfrequenz $\omega_m = 2\pi \times 3,4 \text{ Hz}$ analysiert, so daß dessen Ausgangssignal proportional zur lokal anliegenden Modulationsamplitude $\hat{V}_{t,s}^m$ bei ω_m ist.

Zu bemerken ist, daß der Spannungswert $V_{t,s}|_{F=\text{min}}$, der die Kraftkomponente (3.3) minimiert, im allgemeinen nicht identisch ist mit dem Spannungswert $V_{t,s}|_{\partial F=\text{min}}$, der den Vorfaktor der Modulationsamplitude in (3.6) minimiert. Dies ist deutlich aus den experimentellen Ergebnissen aus Abb. 3.7 zu sehen: Die Spitze wird an einer festen Position oberhalb der Probe gehalten und

⁷Es wird $\omega_m = 2\pi \times 3,4 \text{ Hz}$ verwendet

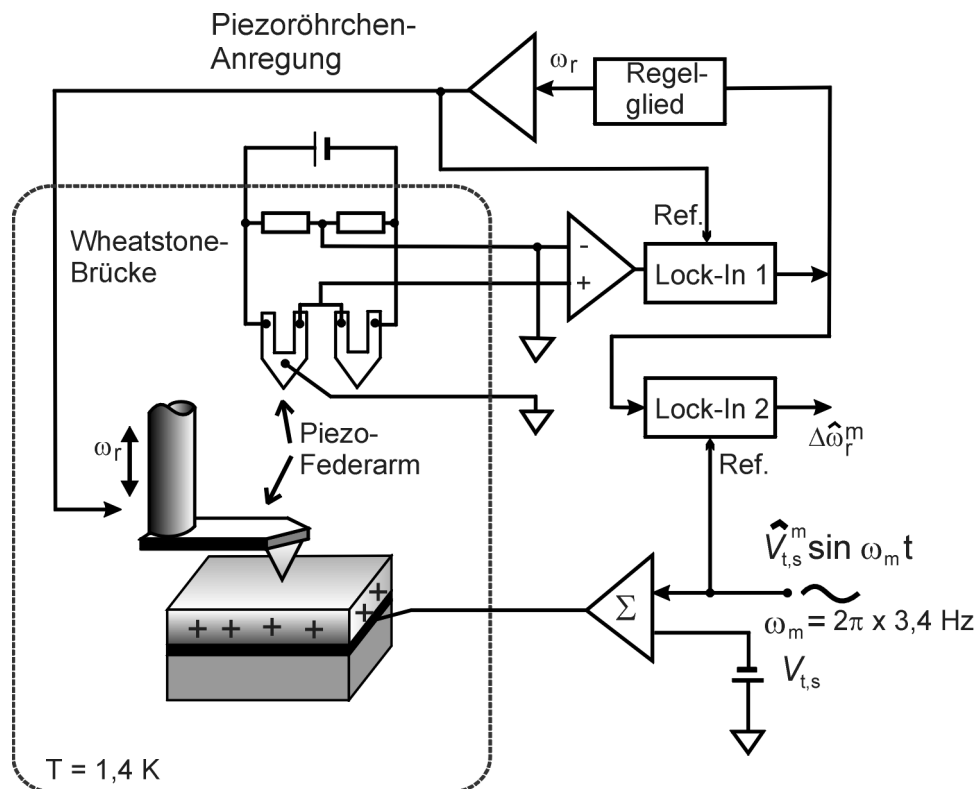


Abb. 3.6: Vollständiger Meßaufbau zur Bestimmung der induzierten Resonanzfrequenzverschiebung aufgrund der elektrischen Modulation $\hat{V}_{t,s}^m \sin \omega_m t$ der Spannung zwischen Spitze und Probe. Der Federarm wird zu mechanischen Schwingungen bei seiner Resonanzfrequenz ω_r angeregt. Die Schwingungsamplitude des Federarms wird mit Hilfe der Wheatstone-Brücke in ein Spannungssignal umgewandelt und mit Lock-In-Detektor 1 auf Signale bei der Anregungsfrequenz ω_r analysiert. Der zweite Piezoarm dient hierbei als Referenz in der Meßbrücke. Eine langsame Regelschleife führt die Anregungsfrequenz nach und sorgt für eine gleichbleibende Anregung direkt bei der Resonanzfrequenz ω_r des Federarms. Das Ausgangssignal des Regelkreises ist proportional zur Frequenzverschiebung und wird mit Hilfe von Lock-In-Detektor 2 auf Signale bei der Modulationsfrequenz ω_m untersucht. Sie sind proportional zur angelegten Modulationsamplitude $\hat{V}_{t,s}^m$.

eine Gleichspannung $V_{t,s}$ zusammen mit einer kleinen Wechselspannung zwischen Probe und Spitze angelegt. Resonanzkurven des Federarms werden als Funktion der Wechselspannungsfrequenz ω für verschiedene Gleichspannungswerte $V_{t,s}$ aufgezeichnet. Die Resonanzfrequenz ω_r zeigt eine quadratische Abhängigkeit von der angelegten Spannung $V_{t,s}$ mit einem Maximum bei $V_{t,s} = V_{t,s}|_{\partial F = \min} = -207 \text{ mV}$, während die Resonanzamplitude (und damit die Stär-

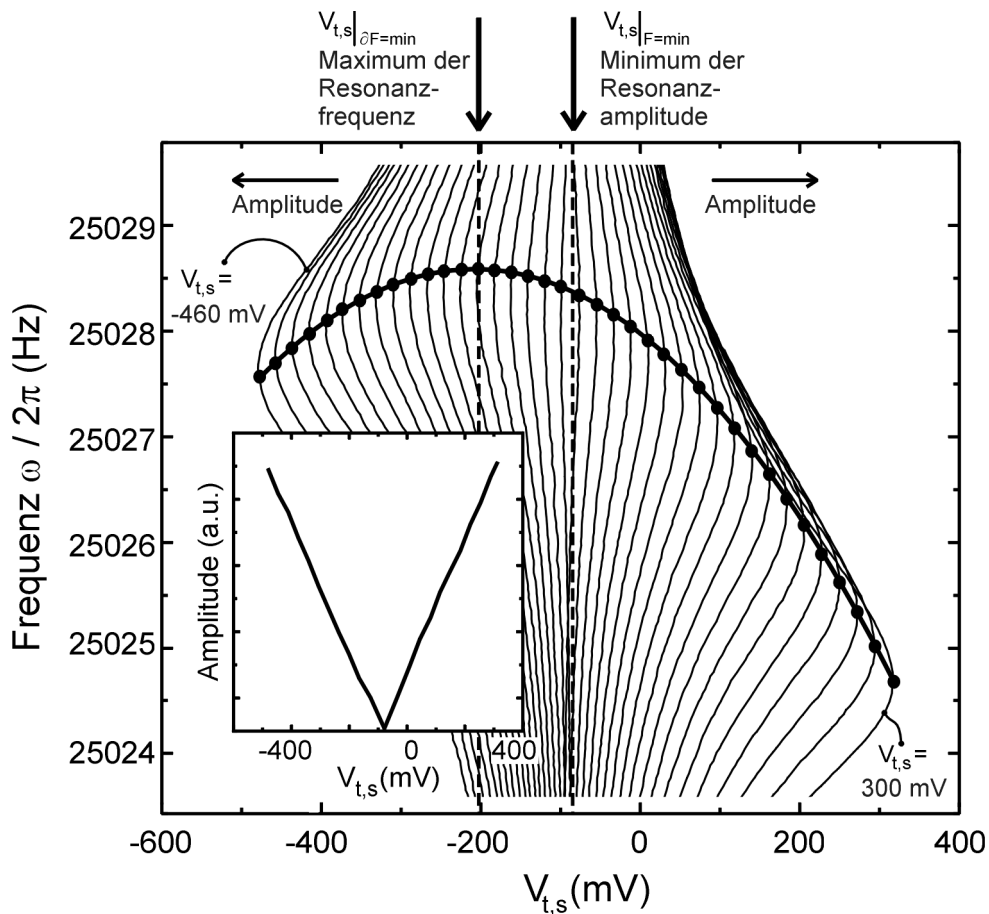


Abb. 3.7: Als dick durchgezogene Linie im Hauptbild ist die Abhängigkeit der Resonanzfrequenz von der angelegten Spannung $V_{t,s}$ zwischen Spitze und Probe für einen festen Ort gezeichnet. Entlang dieser Linie sind die Resonanzkurven des Federarms für unterschiedliche Spannungswerte mit ihrem jeweiligen Maxima an der entsprechenden Stelle $V_{t,s}$ angeheftet worden, um zu verdeutlichen, daß der maximale Resonanzfrequenzwert bei einer Spannung $V_{t,s}|_{\partial F=\min} = -207$ mV beobachtet wird, die minimale Resonanzamplitude aber bei einem unterschiedlichen Wert $V_{t,s}|_{F=\min} = -80$ mV auftritt. Das kleine Bild zeigt die Abhängigkeit der Schwingungsamplitude von der angelegten Spannung $V_{t,s}$ bei der jeweiligen Resonanzfrequenz.

ke der Krafteinwirkung auf den Federarm) linear ansteigt ausgehend von ihrem Minimalwert bei $V_{t,s}|_{F=\min} = -80$ mV, wie im kleinen Bild in Abb. 3.7 gezeigt. Der Unterschied zwischen $V_{t,s}|_{F=\min}$ und $V_{t,s}|_{\partial F=\min}$ ist sogar von Vorteil, da so prinzipiell eine Verringerung der elektrostatischen Potentialdifferenz und damit des Einflusses der Spitze auf das 2DES möglich ist, ohne gleichzeitig die induzierte Resonanzfrequenzverschiebung $\Delta\hat{\omega}_r$ als Meßsignal abzuschwächen. Das effektive elektrostatische Potential zwischen Spitze und Probe ($V_{t,s} + \Delta\mu_{t,s}^{\text{ch}}(x, y)/e$)

wurde üblicherweise auf einen Wert von ca. 0,1 V eingestellt, so daß ein hinreichend großes Meßsignal detektierbar war, aber gleichzeitig die Verarmungswirkung der Meßspitze auf das 2DES auf unter 2% abgeschätzt werden konnte.

3.3.1 Messung der Hall-Potential-Verteilung

Um mit Hilfe der Relation (3.6) trotz der Ortsabhängigkeit des Proportionalitätsfaktors zwischen induzierter Frequenzverschiebung $\Delta\hat{\omega}_r(x, y)$ und lokaler Modulationsamplitude $\hat{V}_{t,s}^m$ die lokale Potentialverteilung bestimmen zu können, muß für jede Position jeweils eine Kalibrierungsmessung durchgeführt werden. Bestimmt wird dann jeweils die relative Hall-Potential-Verteilung in Bezug auf die absolut angelegte Modulationsamplitude [47].

Sinusförmige Modulation

Der Meßaufbau ist in Abb. 3.8(a) gezeigt und stellt eine Erweiterung des Aufbaus aus Abb. 3.6 dar. Für eine sinusförmige Modulation der Spannung zwischen Spitze und Probe wird eine Wechselspannung $\hat{V}_{t,s}^m \sin \omega_m t$ mit $\hat{V}_{t,s}^m = 0,02 \times \sqrt{2}$ V als Amplitude und der Frequenz $\omega_m = 2\pi \times 3,4$ Hz an die Probe angelegt. In einer ersten Referenzmessung wird eine homogene Modulation an alle Probenkontakte gleichzeitig angelegt, so daß $\hat{V}_{t,s}^m(x, y) \equiv \hat{V}_{t,s}^m$ gilt und kein modulierter Strom durch die Probe fließt. Diese Modulation induziert gemäß (3.6) eine Verschiebung der Resonanzfrequenz $\Delta\hat{\omega}_r(x, y)$, die während einer einzelnen Rasterlinie über die Probe hinweg mit Hilfe des Lock-In-Detektors 2 aufgezeichnet wird. Dies entspricht der Kurve α in Abb. 3.8(b) und der Schalterstellung α in Abb. 3.8(a). Dadurch wird die Ortsabhängigkeit (x, y) von $\partial_d^2 Q_t$ und $\partial_d^2 C$ bestimmt, die gemäß (3.6) die Frequenzverschiebung $\Delta\hat{\omega}_r(x, y)$ beeinflusst, so daß sie sich aus der anschließenden Messung eliminieren läßt. Hierbei wird die Wechselspannung an einen Stromkontakt angelegt, während der zweite Kontakt geerdet ist, so daß sich eine lokale Hall-Potential-Modulation mit $0 \leq \hat{V}_{t,s}^m(x, y) \leq \hat{V}_{t,s}^m$ ausbildet und gleichzeitig ein modulierter Strom durch die Probe fließt. Ein Beispiel ist in Abb. 3.8(b), Kurve β dargestellt. Sie entspricht der Schalterstellung β in Abb. 3.8(a). Der ortsabhängige Proportionalitätsfaktor in (3.6) kürzt sich weg, wenn man Kurve β durch Kurve α dividiert. Man erhält damit die kalibrierte Potentialverteilung (vgl. Abb. 3.8(c)) [47]. Eine ähnliche Kalibrierung ist auch von McCormick *et al.* [45] verwendet worden. Wichtig zu betonen ist, daß die kalibrierten Hall-Potentialprofile damit *nicht* auf Eins normiert sind, sondern die Spanne zwischen linkem und rechtem Probenrand auch kleiner Eins sein kann, was einen Spannungsabfall längs der Probe andeutet.

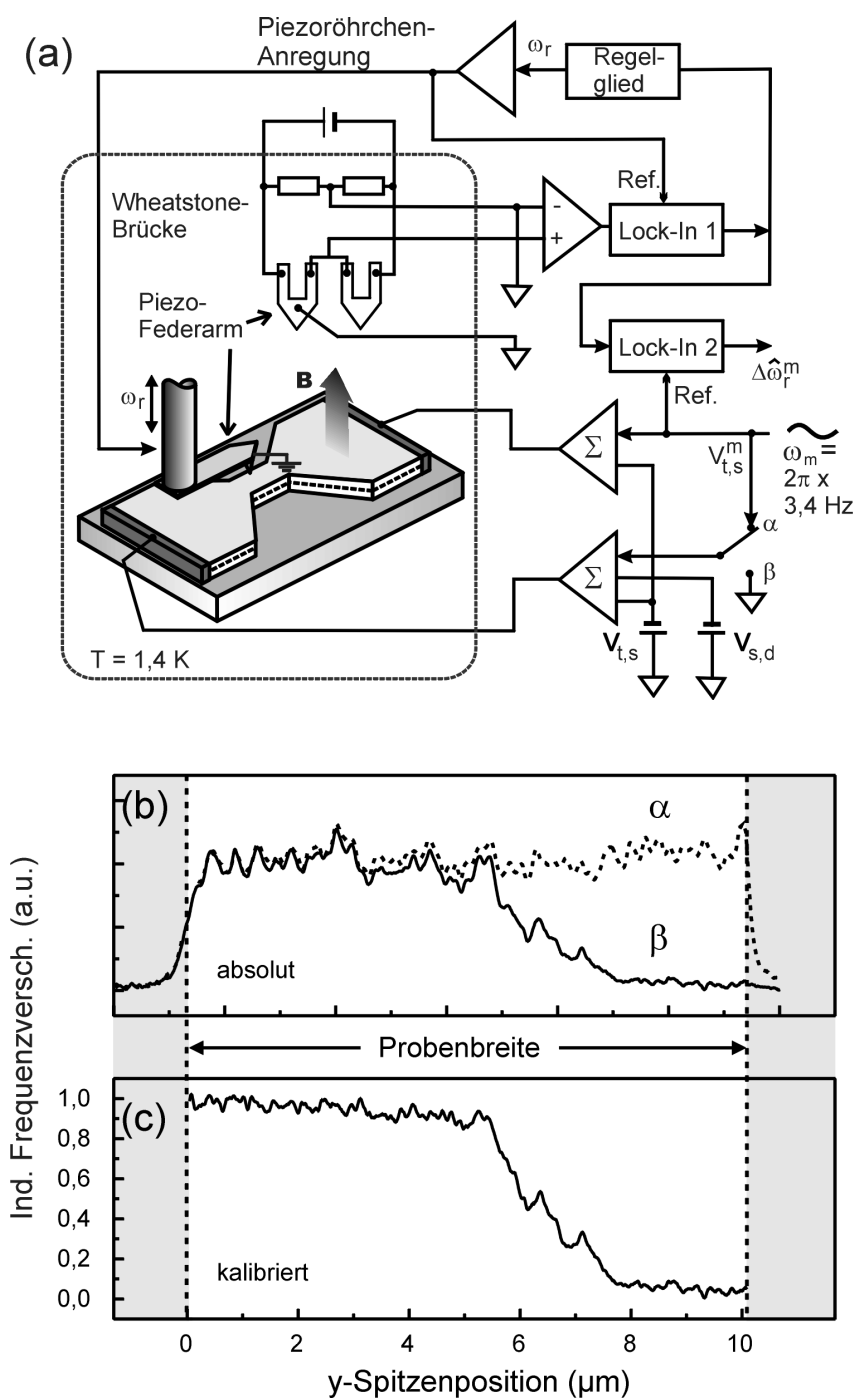


Abb. 3.8: (a) Skizze des experimentellen Aufbaus zur Messung des relativen Hall-Potential-Verlaufs. Er entspricht im wesentlichen dem Aufbau aus Abb. 3.6. Die Modulation $\hat{V}_{t,s}^m \sin \omega_m t$ wird nur an einem Kontakt (Schalterstellung β) oder an beiden Kontakten gleichzeitig (Schalterstellung α) angelegt. Die zusätzliche Probenspannung $V_{s,d}$ ist normalerweise null, falls nicht anders erwähnt. (b) Absolute induzierte Verschiebung der Resonanzfrequenz beim Abrastern der Probe in y -Richtung. Bei Kurve β ist die Modulation nur an einem Kontakt, bei der Kalibrierungskurve α an beiden Kontakten gleichzeitig angelegt, so daß ein modulierter Strom nur bei β fließt. (c) Relatives Verhältnis $\Delta\omega(\beta)/\Delta\omega(\alpha)$, das das kalibrierte Hall-Potentialprofil wiedergibt.

Rechteckförmige Modulation

Die eben beschriebene sinusförmige Modulation hat zum einen den Nachteil, daß in einer Periode immer beide Stromrichtungen des induzierten Probenstromes enthalten sind. Um dies zu vermeiden, wurde bei allen hier besprochenen Messungen (außer wenn explizit erwähnt) die halbe Wechselspannungsamplitude als Gleichspannungswert dazu addiert, so daß während der gesamten Periode nur Spannungswerte größer null auftreten und somit nur eine Stromrichtung in der Probe vorherrscht. Zum anderen stellt das gemessene Signal streng genommen jeweils einen zwischen null und maximaler Sinusamplitude gemittelten Wert dar. Will man große Amplituden verwenden, um auch die Potentialverteilung bei großen Strömen untersuchen zu können, kann dieser Mittelungseffekt zu einer Verfälschung der gemessenen Potentialverteilung führen. Insbesondere eine mögliche lokale nichtlineare Potentialskalierung mit der angelegten Spannung könnte dabei nicht richtig aufgelöst werden. Um einheitlich mit später beschriebenen Messungen bei sehr hohen Strömen zu sein, wurde daher das Sinus- durch ein Rechtecksignal mit der Amplitude $\hat{V}_{t,s}^\square = 15 \text{ mV}$ ersetzt, so daß die angelegte Modulationsspannung quasi als Gleichspannung periodisch ein- und ausgeschaltet wird. Die induzierte Resonanzfrequenzverschiebung stellt dabei ebenfalls ein Rechtecksignal dar, deren Amplitude gegeben ist durch

$$\begin{aligned} \Delta\hat{\omega}_r^\square &\propto \Delta\hat{\omega}_r(\hat{V}_{t,s}^\square) - \Delta\hat{\omega}_r(\hat{V}_{t,s}^\square = 0) \\ &= \left\{ \partial_d^2 Q_t(x, y) + 2\partial_d^2 C(x, y) \left[V_{t,s} + \Delta\mu_{t,s}^{\text{ch}}(x, y)/e \right] \right\} \hat{V}_{t,s}^\square + \partial_d^2 C(x, y) \hat{V}_{t,s}^{\square 2}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Dieses Rechtecksignal stellt sich als Fourier-Reihe einzelner Sinusfunktionen dar:

$$f_\square(t) = \begin{cases} \Delta\hat{\omega}_r^\square & \text{für } -\pi < \omega_m t < 0 \\ 0 & \text{für } 0 < \omega_m t < \pi \end{cases} = \frac{\Delta\hat{\omega}_r^\square}{2} - \frac{2\Delta\hat{\omega}_r^\square}{\pi} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2i+1} \sin((2i+1)\omega_m t). \quad (3.8)$$

Das Hall-Potential kann daher in gewohnter Weise mit Hilfe von Lock-In-Detektor 2 bestimmt werden, dessen Meßsignal weiterhin nur sensitiv auf die Signalkomponente bei ω_m ist und damit proportional zur lokalen Frequenzverschiebungsamplitude $\Delta\hat{\omega}_r^\square$ ist. Allerdings hat Weitz [47] darauf hingewiesen, daß das Ausgangssignal von Lock-In-Detektor 2 nun nicht mehr rein linear der lokalen Anregungsamplitude $\hat{V}_{t,s}^\square(x, y)$ folgt, sondern gemäß (3.7) nun auch ein weiterer quadratischer Term in der Anregungsamplitude auftritt. Wenn zur Bestimmung der relativen Hall-Spannung wiederum die Meßkurve mit lokal variierender Anregungsamplitude $\hat{V}_{t,s}^\square(x, y)$ durch die Kalibrierungskurve mit homogener fester Amplitude dividiert wird, so ergibt sich ein kleiner Fehler durch diesen zusätzlichen Term. Das kalibrierte Ergebnis ist nicht mehr 100%ig identisch zum kalibrierten wahren Hall-Potentialwert. Zur Abschätzung des Fehlers vergleicht man am besten Messungen, die mit den beiden verschiedenen Methoden erstellt wurden und achtet auf mögliche Abweichungen. Wie in Abb. 3.9 exemplarisch für verschiedene Modulationsamplituden dargestellt ist, ist die Abweichung zwischen einem Rechtecksignal (durchgezogene Linien) und einem Sinussignal (gestrichelte Linien) allerdings relativ gering. Das bedeutet,

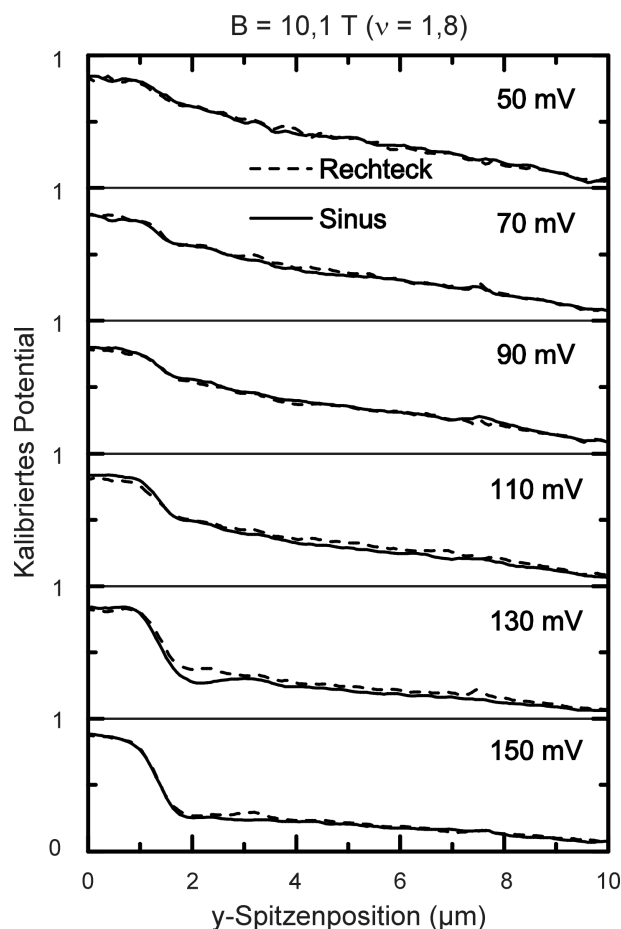


Abb. 3.9: Gezeigt ist das kalibrierte Hallpotentialprofil bei 10,1 T ($\nu = 1,8$) für verschiedene Modulationsamplituden, gemessen an Probe II aus Abb. B.1(b). Verglichen werden Messungen mit Sinus- und Rechteckanregung. Die Unterschiede in der Meßmethode sind nur gering.

daß sowohl der intrinsische Meßfehler des Rechtecksignals, als auch der Mittelungseffekt bei Sinusanregung relativ gering sind. Nichtsdestotrotz wurde eine Rechteckanregung beibehalten.

3.3.2 Messung des Abschirmverhaltens des 2DES

Zusätzliche Informationen über das Abschirmverhalten und damit über die Längsleitfähigkeit des 2DES (s. Kap. 4.3) kann aus dem in Abb. 3.10(a) skizzierten Meßaufbau gewonnen werden. Er entspricht im wesentlichen dem bereits in Abb. 3.6 vorgestellten Aufbau. Hier wird aber eine Wechselspannung mit der Modulationsamplitude $V_{\text{rück}}^m$ an die unterhalb des 2DES gelegene Rückseitelektrode angelegt. Sie befindet sich ca. $500 \mu\text{m}$ (d.h. die gesamte Substratdicke) entfernt vom 2DES und der Meßspitze. Die Modulationsamplitude wird auf ca. 1 V bis 2 V

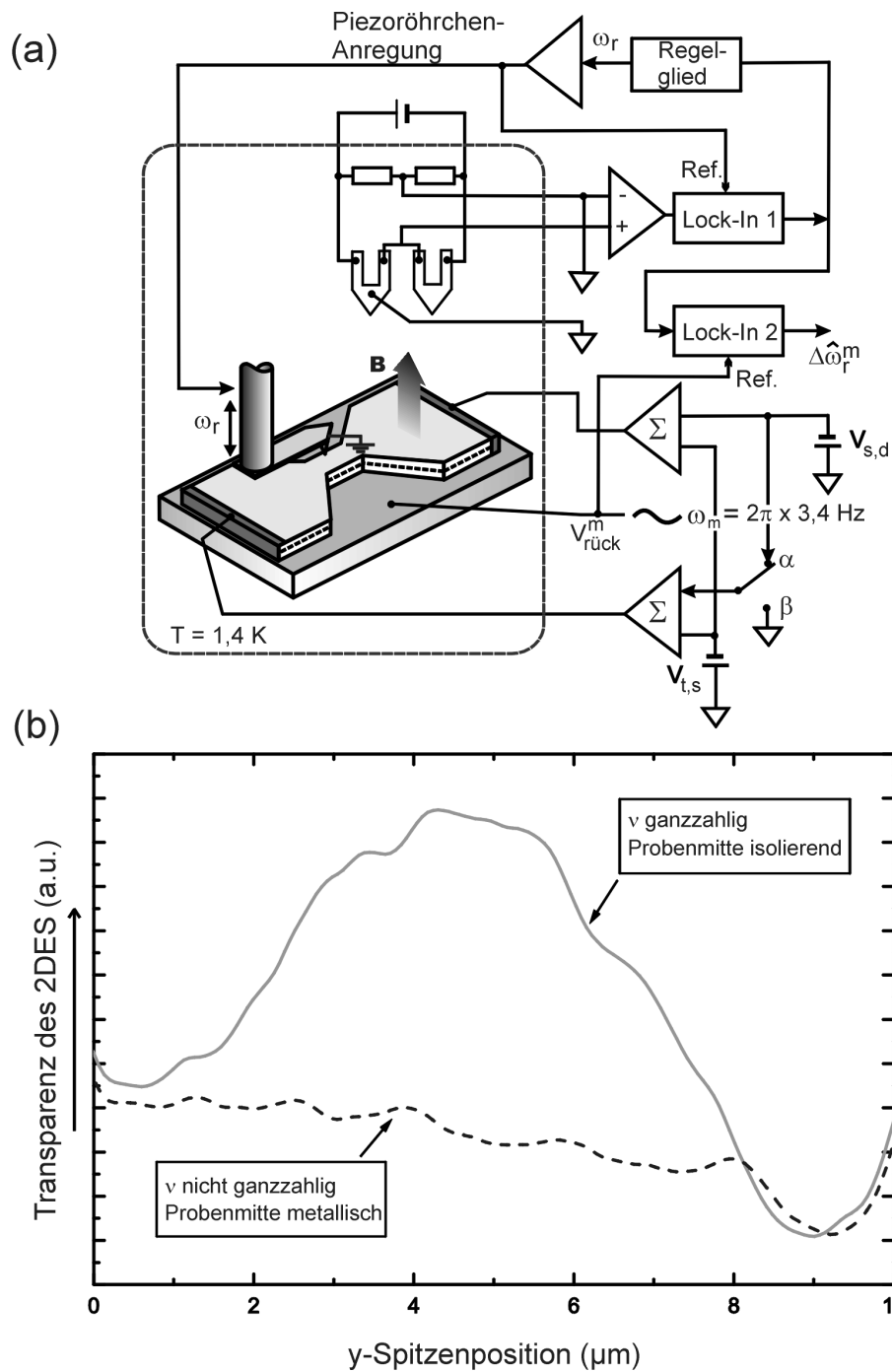


Abb. 3.10: (a) Meßaufbau zur Bestimmung des Abschirmverhaltens oder der elektrostatischen „Transparenz“ des 2DES. Eine Wechselspannung mit Modulationsamplitude $V_{\text{rück}}^m$ wird an die Rückseitenelektrode unterhalb des 2DES angelegt. (b) Transparenz des 2DES für unterschiedliche Füllfaktoren für $V_{s,d} = 0 \text{ V}$.

eingestellt, was einer geringfügigen Modulation der Elektronenkonzentration im 2DES von ca. 0,05 % bis 0,1 % entspricht⁸. Wie in Abb. 3.10(b) exemplarisch gezeigt, ändert sich das Abschirmverhalten des 2DES drastisch mit dem Füllfaktor ν der Probenmitte. Für ganzzahlige ν zeigt das 2DES nur sehr geringes Abschirmverhalten und wirkt isolierend, so daß das darunterliegende elektrostatische Modulationssignal nur wenig abgeschwächt wird. Im Zentrum der Probe ist das Signal daher maximal und fällt zu den Seiten hin ab. Für nichtganzzahlige ν dagegen kann das 2DES das Modulationssignal gut abschirmen und verhält sich damit quasi-metallisch – nur wenig Modulation ist oberhalb des 2DES nachweisbar. Diese Beobachtung wird genauer in Kap. 4.3 diskutiert werden. Das Abschirmverhalten bei Nichtgleichgewichtsbedingungen, d.h. bei vorhandener Hall-Spannung über die 2DES-Probenbreite, können durch das gleichzeitige Anlegen einer endlichen Spannung $V_{s,d} \neq 0$ untersucht werden (vgl. Kap. 8.3).

3.4 Zusammenfassung

Mit Hilfe eines Tieftemperatur-Rasterkraftmikroskops läßt sich innerhalb einer Hall-Geometrie orts aufgelöst die elektrostatische Potentialänderung durch eine von außen an den Endkontakten vorgegebene Spannung mit einer Ortsauflösung von ca. 0,1 μm und einer Potentialauflösung von ca. 0,5 mV vermessen. Die hierzu an das 2DES angelegte Wechselspannung kann bei sehr niedrigen Frequenzen betrieben werden, so daß es auch bei im QHE vorliegenden nur schlecht leitenden Probenbereichen zu nur geringen kapazitiven Ladungseffekten kommt. Störende Einflüsse, die durch die Donatorschicht zwischen 2DES und Oberfläche hervorgerufen werden, können durch eine Kalibrierungsmessung eliminiert werden. Das Abschirmverhalten des 2DES kann zusätzlich durch die Bestimmung der Kraftwirkung verursacht durch ein homogenes Spannungsmodulationssignal untersucht werden, das an eine Elektrode unterhalb des 2DES angelegt wird.

⁸Das Anlegen einer Gleichspannung von ± 100 V bewirkt eine Erhöhung bzw. Erniedrigung der Elektronenkonzentration um 4,5 %, wie aus Transportmessungen bestimmt wurde.

Kapitel 4

Hall-Potentialprofile und Abschirmeigenschaften

Dieses Kapitel stellt die wichtigsten grundlegenden experimentellen Ergebnisse vor und zieht Vergleiche zur theoretischen Modellen, die die Ausbildung von Streifenstrukturen am Probenrand vorhersagen.

4.1 Experimentell bestimmte Hall-Potentialprofile

Die Änderung des Hall-Potentialprofils mit angelegtem Magnetfeld bzw. Füllfaktor ist in Abb. 4.1 für eine einzelne Rasterposition über die Hall-Probenbreite in der Mitte der Probe dargestellt. Die Geometrie der Probe und die Meßposition ist im kleinen Bild skizziert. Die Probe ist $50\ \mu\text{m}$ lang und $15\ \mu\text{m}$ breit und besitzt keine seitlichen Potentialkontakte¹. Die ungewöhnlich kleine Geometrie ist ein Zugeständnis an den begrenzten Rasterbereich des Mikroskops (s. Abschnitt 3.2). Das 2DES dieser Probe befindet sich ca. $40\ \text{nm}$ unter der Oberfläche und weist eine Elektronenkonzentration von $n_s = (5,7 \pm 0,05) \times 10^{15}\ \text{m}^{-2}$ bei einer Elektronenbeweglichkeit von $\mu = (50 \pm 1)\ \text{m}^2/\text{Vs}$ auf. Dies entspricht gemäß (2.35) einer mittleren freien Weglänge von $l_m = (6,2 \pm 0,1)\ \mu\text{m}$ bei $B = 0\ \text{T}$. Transportmessungen wurden dabei unabhängig von den Hall-Potentialmessungen als Zweipunktmessungen an derselben Struktur durchgeführt. *Es sei hier betont, daß generell Angaben zum mittleren Füllfaktor ν jeweils mit einem Fehler von ca. 4 % behaftet sind. Eine detailliertere Angabe dient hauptsächlich zur relativen Unterscheidung einzelner Meßkurven.*

Deutlich zu unterscheiden sind drei verschiedene Profiltypen beim Durchlaufen eines ganzzahligen Füllfaktors, entsprechend einem Plateaubereich in der Transportmessung. So fällt die Hall-Spannung für $\nu = 3,81$, wo der Hall-Widerstand noch oberhalb des Plateaus liegt, linear

¹Die Probe entspricht der Geometrie „D“ in Abb. B.1(a) und Probe „I“ in Abb. B.1(b).

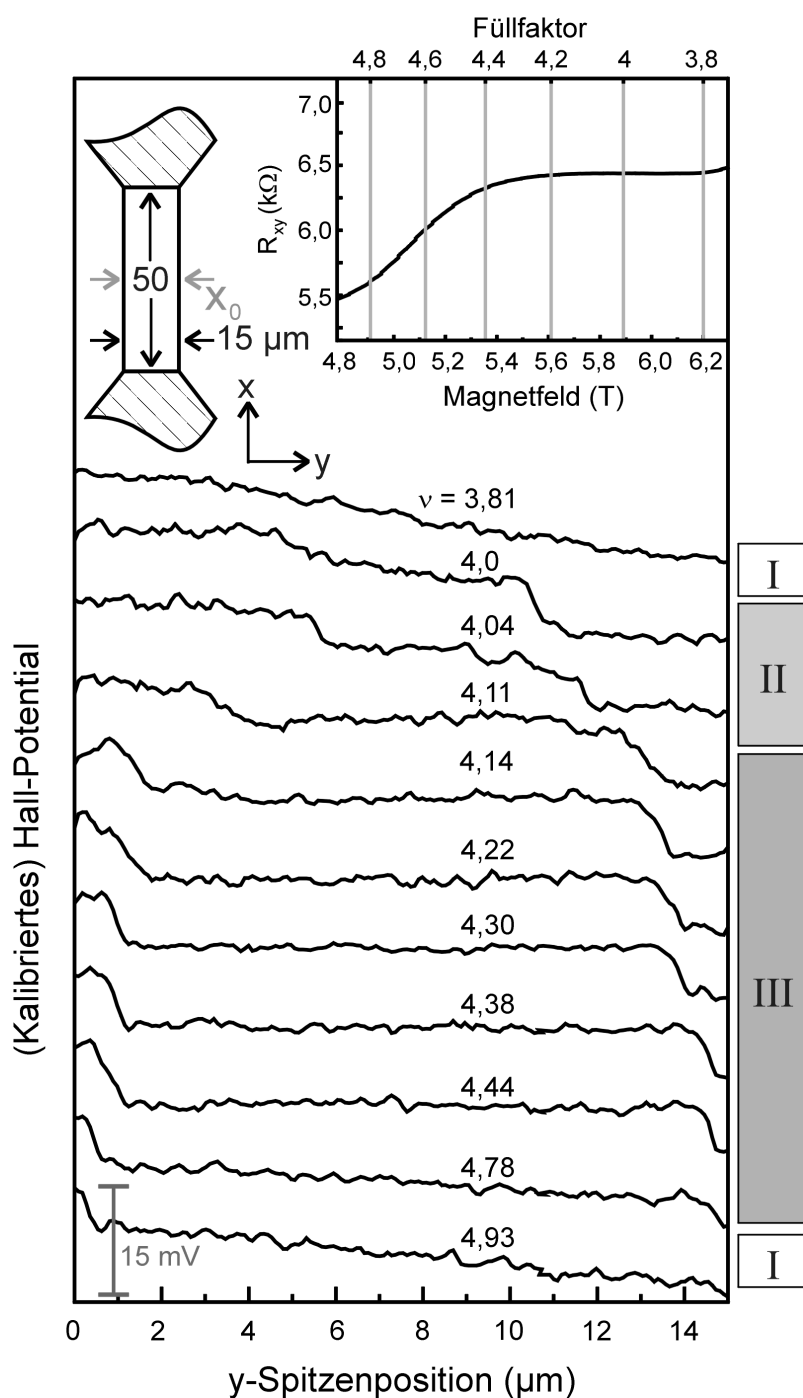


Abb. 4.1: Hall-Potentialprofile für Füllfaktoren um $\nu = 4$ herum, gemessen in der Mitte einer Hall-Probengeometrie wie im kleinen Bild skizziert. Zur besseren Unterscheidbarkeit ist den einzelnen Kurven ein konstanter Beitrag hinzu addiert worden. Die maximale Hall-Spannungsamplitude beträgt 15 mV. Das entspricht einem Gesamtstrom I von ca. $2,3 \mu\text{A}$ für $\nu = 4$. Es lassen sich grob drei verschiedene Potentialprofil-Typen unterscheiden, wie rechts markiert. Zusätzlich ist rechts oben der separat gemessene Hall-Widerstand im Bereich des betreffenden Plateaus gezeigt.

über die Probenbreite ab (Typ I). Auch ortsaufgelöste Hall-Potentialmessungen von Knott *et al.* [40, 38] kommen zu einem vergleichbaren Ergebnis für wesentlich größere Probengeometrien. Auch von Nachtwei *et al.* [62] wurde für diese Füllfaktoren als Konsequenz ihrer Transportuntersuchungen ebenfalls ein linearer Potentialabfall vorgeschlagen.

Nähert man sich dagegen dem ganzzahligen Füllfaktor $\nu = 4, 0$, d.h. der Mitte des Plateaus, so beobachtet man ein Abflachen des Hall-Potentialabfalls an den Rändern und einen nichtlinearen Abfall über die Probenmitte (Typ II). Für höhere Füllfaktoren flacht das Hall-Potentialprofil verhältnismäßig schnell in der Probenmitte (dem „*bulk*“) ab und zeigt Sprünge an den Rändern (Typ III). Dies tritt in etwa in dem Bereich auf, wo der Hall-Widerstand schwach vom quantisierten Wert abzuweichen beginnt. Dieses Verhalten verstärkt sich noch bis etwa $\nu = 4, 44$, wo der Hall-Widerstand bereits deutlich im Übergangsbereich zwischen zwei Plateaus liegt. Der „*Bulk*“-bereich ist innerhalb der Auflösung flach, die Potentialsprünge verteilen sich symmetrisch auf beide Ränder und wandern mit zunehmendem Füllfaktor zu den Rändern hin nach außen. Für noch höhere Füllfaktoren zum nächsten ganzzahligen Wert hin beginnt das Potential wieder linear über die Probenmitte abzufallen und die Sprünge an den Rändern verringern sich dementsprechend, bis wiederum die Ausgangsposition des Profiltyps I erreicht ist. Diese Entwicklung und ihre Regelmäßigkeit zeigt sich auch im Falschfarbenbild von Abb. 4.2 für alle Füllfaktoren im Bereich von $1 < \nu \leq 12$. Immer entwickelt sich für Füllfaktoren kurz oberhalb ganzzahliger Werte ein breiter Bereich im Probeninneren mit konstantem Hall-Potential, der in etwa symmetrisch zwischen beiden Werten der Ränder liegt. Dieses Verhalten ist für alle geradzahligen Füllfaktoren beobachtbar, aber bei den ungeradzahligen Füllfaktoren nur für $\nu = 3$ und weniger deutlich noch für $\nu = 5$. Um zu verdeutlichen, daß sich die Entwicklung aus Abb. 4.1 prinzipiell für höhere Füllfaktoren wiederholt, sind in Abb. 4.3 Hall-Potentialprofile für die gleichwertige Abweichung $\Delta\nu \equiv \nu - \text{int}(\nu)$ vom ganzzahligen Wert in einem Bild zusammengefaßt. Besonders deutlich sieht man, daß sich die Profile für Typ I und Typ II für jeweils gleichwertige Füllfaktoren nur wenig von einander unterscheiden, daß sich aber für Typ III die Positionen der Potentialsprünge an den Rändern bei höheren gleichwertigen Füllfaktoren $\nu = x, 25$ zur Mitte hin verschieben.

Ortsaufgelöste Potentialprofile mit einem ähnlichen Meßaufbau wie in unserem Falle wurden auch von McCormick *et al.* [45] gemessen. Dabei wurde direkt die elektrostatische Kraft - anstelle des Kraftgradienten, wie in unserem Fall - zwischen Probe und Spitze bei angelegter Probenspannung detektiert. Die verwendete Modulationsfrequenz liegt daher bei der Resonanzfrequenz des Federarms mit 120 kHz sehr hoch. Die beobachteten Potentialprofile entsprechen für die Profiltypen I und II in etwa unseren Messungen - d.h. knapp unterhalb ganzzahliger ν linearer Potentialabfall, bei ganzzahligen ν dagegen abgeflachtes Profil am Rand und nichtlinearer Verlauf in der Probenmitte. Der Profiltyp III tritt bei McCormick *et al.* allerdings weitaus weniger ausgeprägt auf.

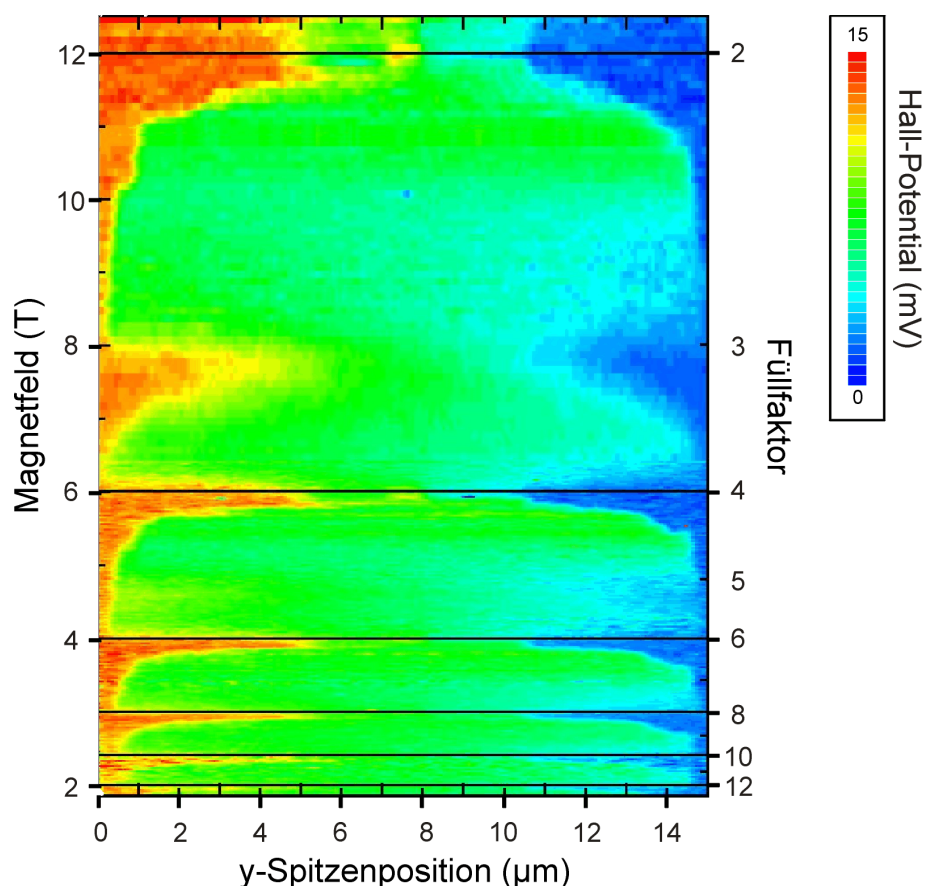


Abb. 4.2: Falschfarben-Darstellung der Hall-Potentialprofile aus Abb. 4.1 für Füllfaktoren mit $1 < \nu \leq 12$. Deutlich zu sehen ist das wiederkehrende Verhalten für alle geradzahligen Füllfaktoren mit einem großen Hall-Potentialunterschied zwischen Rand und „Bulk“ für mittlere nichtganzzahlige Füllfaktoren.

Experimenteller Hall-Potential-Verlauf für ganzzahlige Füllfaktoren

Wie sich bereits in Abb. 4.1 gezeigt hat, fällt das Potential für ganzzahlige Füllfaktoren nichtlinear über die Probe ab. Dies ist detaillierter in Abb. 4.4 verdeutlicht, wo im Rasterabstand von 200 nm in Längsrichtung der Probe Potentialprofile für drei nur leicht unterschiedliche Füllfaktoren um $\nu = 2$ herum aufgenommen worden sind. Offensichtlich kann sich der Potentialverlauf auf wenigen hundert Nanometer sehr stark ändern und gleichzeitig sehr empfindlich auf kleine Variationen im Füllfaktor reagieren. Die Potentiallandschaft erinnert an eine Potentialhalbinsel, deren Maximum an den höheren Potentialwert der rechten Seite ankoppelt, dabei aber zu $3/4$ von Gebieten mit niedrigem Potential umgeben ist. Ähnliche Strukturen wurden auch an anderen Positionen und in anderen Proben beobachtet.

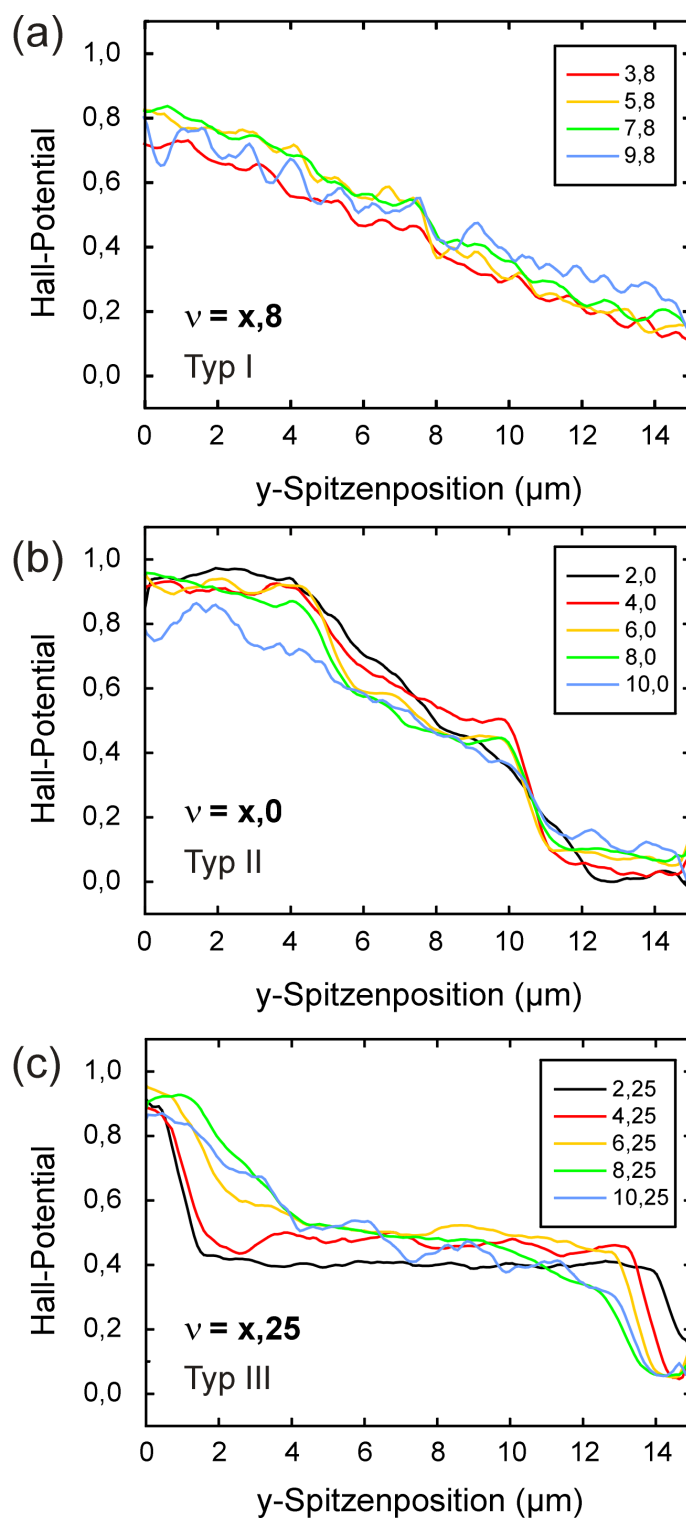


Abb. 4.3: Potentialprofile mit jeweils gleichwertiger Abweichung $\Delta\nu \equiv \nu - \text{int}(\nu)$ vom ganzzahligen Füllfaktorwert. Verglichen werden Hall-Potentialprofile, die dem (a) Typ I ($\nu = x,8$), (b) Typ II ($\nu = x,0$) und (c) Typ III ($\nu = x,25$) entsprechen.

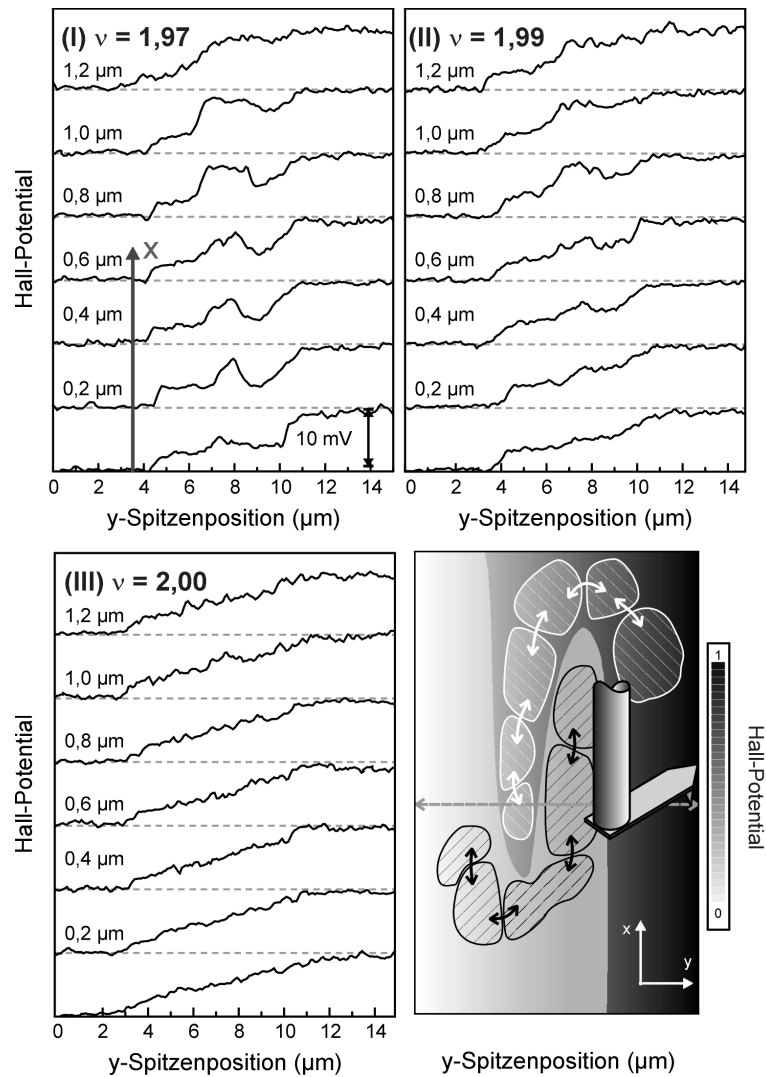


Abb. 4.4: Hall-Potentialprofile gemessen in der Probenmitte, d.h. nahe x_0 (s. Abb. 4.1) für leicht unterschiedliche x -Positionen und drei nahezu identische Füllfaktoren $\nu = 1,97$ (I), $\nu = 1,99$ (II) und $\nu = 2,00$ (III). An den entgegengesetzten Kontakt wie in Abb. 4.1 wurde eine Modulationsamplitude von 10 mV angelegt, was ca. $0,8 \mu\text{A}$ bei $\nu = 2$ entspricht. Deutlich sichtbar ist eine Potential-Halbinsel - wie in der Skizze verdeutlicht, die lokal auf wenige hundert Nanometer begrenzt ist und sehr empfindlich auf Füllfaktor-Änderungen reagiert.

Ein ähnlicher nichtlinearer Potentialabfall bei ganzzahligen ν wurde bereits von Knott *et al.* [40] aus elektro-optischen Experimenten berichtet. Für eine Probe mit $\mu = 50 \text{ m}^2/\text{Vs}$ und $n_s = 3,7 \times 10^{15} \text{ m}^{-2}$ verlief der Potentialabfall außerhalb der Plateaus linear, direkt bei ganzzahligen Füllfaktoren dagegen stark nichtlinear mit deutlichem Potentialabfall über einen kleinen Bereich innerhalb des Probeninneren. Bei diesen Messungen mußten allerdings relativ hohe

Ströme $> 10 \mu\text{A}$ angelegt werden. Die Beobachtungen sind ebenfalls konsistent mit denen von Yacoby *et al.* [44]. Sie deuten auf einen starken Einfluß von Inhomogenitäten durch elektrostatische Potentialfluktuationen hin. Wie in Abschnitt 5.4.3 näher erläutert werden wird, sorgt die lokale Kopplung zwischen Bereichen unterschiedlicher Elektronenkonzentrationen und damit unterschiedlicher Füllfaktoren innerhalb des Probeninneren zur Ausbildung solch einer Potentialhalbinsel, wie in Abb. 4.4 rechts unten skizziert.

4.2 Bedeutung des Probenrandes

Offensichtlich kommt dem Rand der Probe eine besondere Bedeutung bei der Interpretation der Meßdaten zu. Im folgenden soll daher zunächst auf die theoretische Beschreibung des Randes eingegangen werden.

4.2.1 Theorie kompressibler und inkompressibler Randstreifen eines 2DES

Man ist sich weitgehend einig, daß der Rand einer Hall-Probe einen wesentlichen Einfluß auf die Potential- und Stromverteilung im Bereich des Quanten-Hall-Effekts hat. Über die genauen Auswirkungen und ihre Wichtigkeit herrscht allerdings noch immer Uneinigkeit. Klar ist, daß für eine endliche Probe ein Einschlußpotential vorliegt und somit am Probenrand die Elektronenkonzentration n_s auf null abfallen muß. Im Magnetfeld biegen sich die Landau-Niveaus daher am Rand entsprechend nach oben und durchstoßen an bestimmten Punkten die Fermi-Energie. Jenseits davon sind die Landau-Niveaus entvölkert (siehe Abb. 4.5(a)). In diesem Bild sollte die Elektronenkonzentration daher unrealistisch stufenartig von einem zum nächsten Landau-Niveau ansteigen, wie in Abb. 4.5(b) verdeutlicht. Die Ausdehnung des Zustandes an der Fermi-Kante sollte in der Größenordnung der magnetischen Länge liegen und wesentlich kleiner als der Abstand zwischen den einzelnen Randzuständen sein.

Es ist allerdings energetisch günstiger, den stufenartigen Anstieg in der Elektronenkonzentration zu vermeiden und stattdessen zu einem graduellen Anstieg überzugehen. Dies läßt sich berechnen, indem die Coulomb-Wechselwirkung der Elektronen untereinander als selbstkonsistente Abschirmung mitberücksichtigt wird [64, 65, 66]². Eine besonders wichtige selbstkonsistente Rechnung wurde von Chklovskii *et al.* [63] durchgeführt. Hierbei wurde die Hall-Probe modellhaft in Querrichtung durch zwei semiinfiniten Elektroden definiert (s. Abb. 4.6(c)). Im Gleichgewicht ohne Stromfluß entlang der Probe wurde dabei innerhalb einer

²Weitergehende Effekte, die durch die Elektron-Elektron-Wechselwirkung zustande kommen, wie Lücken im Energiespektrum durch den gebrochenzahligen QHE, sind hier vernachlässigt.

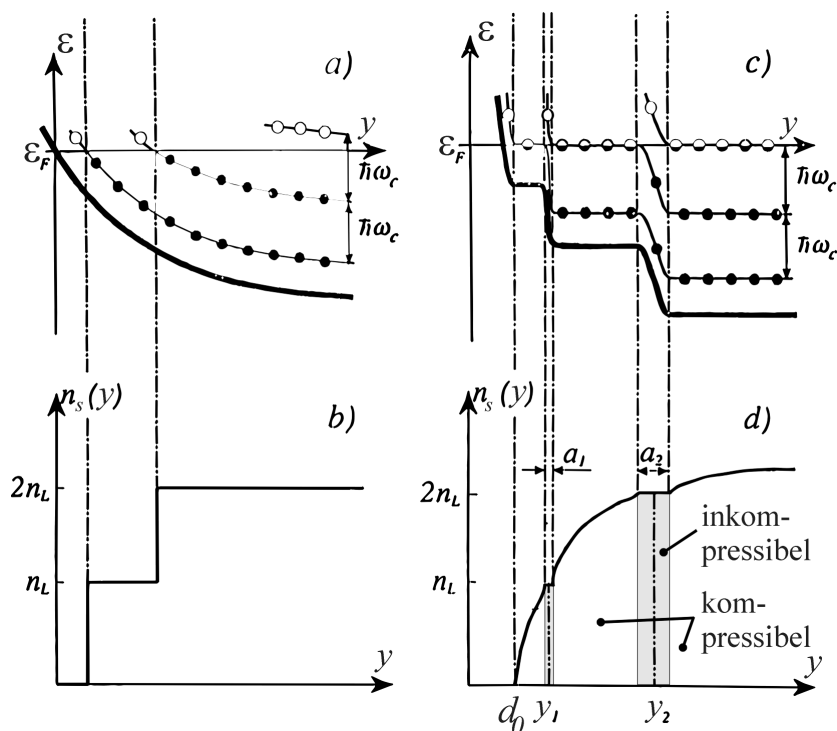


Abb. 4.5: Einschlußpotential, Landau-Niveaus und Elektronenkonzentration am Rande eines 2DES ohne Berücksichtigung der Spinaufspaltung: (a) Für ein parabolisches Einschlußpotential ohne Berücksichtigung von Abschirmung folgt eine stufenartige Konzentrationszunahme (b). (c) + (d) verdeutlicht jeweils den selbstkonsistent berechneten Einfluß der Coulomb-Wechselwirkung und der Abschirmeigenschaften des 2DES auf die Landau-Niveau-Vergiebung und die Elektronenkonzentration. Es kommt zur Ausbildung von kompressiblen und inkompressiblen Streifen an den Positionen y_i mit der Breite a_i (Abb. übernommen aus [63]).

Thomas-Fermi-Näherung³ zur Bestimmung des selbstkonsistenten Hartree-Potentials⁴ angenommen, daß das elektrochemische Potential μ_{elch} innerhalb des 2DES konstant ist und außerdem die lokale Elektronenkonzentration $n_s(\mathbf{r})$ durch die Poisson-Gleichung mit dem lokalen elektrostatischen Potential $V(\mathbf{r})$ verknüpft ist, wobei der Einfluß von Oberflächenladungen, Donatoren und Elektroden in den Randbedingungen berücksichtigt wird. In dieser Modellrechnung kommt es selbstkonsistent zur Ausbildung zweier alternierender unterschiedlicher Randstreifen (s. Abb. 4.5 (c) + (d)):

³Für ein sich auf der Größenordnung der magnetischen Länge in y -Richtung nur schwach änderndes Potential kann die räumliche Ausdehnung der Wellenfunktionen vernachlässigt, d. h. durch δ -Funktionen angenähert werden.

⁴Die Wechselwirkung mit den anderen Elektronen wird in ein effektives Ein-Teilchen-Potential gesteckt.

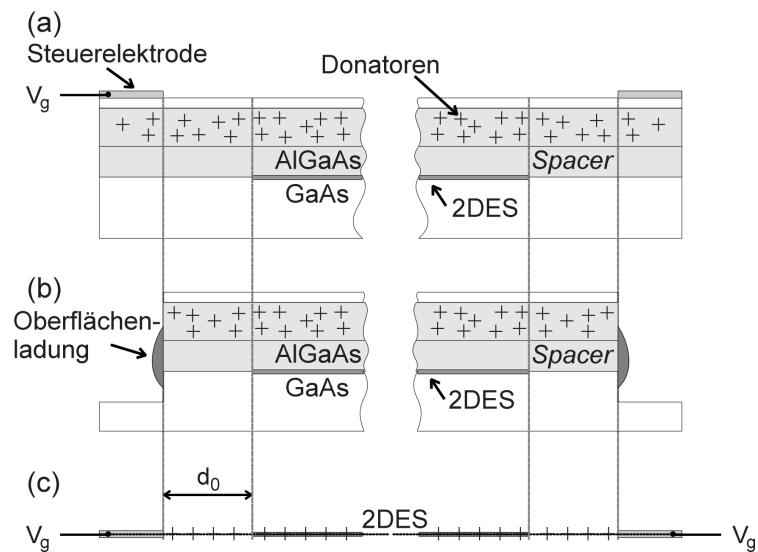


Abb. 4.6: Schematische Darstellung des physikalischen Randes des 2DES. Die Verarmung des 2DES innerhalb der Zonenbreite d_0 kann erfolgen: (a) mit Hilfe einer Oberflächenelektrode, oder (b) durch eine geätzte Mesastruktur, an deren Flanke Oberflächenladungen für eine Verarmung sorgen. (c) Im theoretischen Modell zur Beschreibung von (a) oder (b) befinden sich zur Vereinfachung Elektrode, Donatoren und 2DES in einer Ebene [63].

- In einer Streifensorte ist das jeweils oberste teilweise gefüllte Landau-Niveau an der Fermi-Energie "gepinnt", d.h. Elektronen zeigen gutes, metallisches Abschirmverhalten, denn sie können leicht ohne großen Energieaufwand in andere freie Zustände an der Fermi-Kante umverteilt werden, d.h. lokal verhält sich das 2DES hier **kompressibel**. Das elektrostatische Potential verläuft hier daher nahezu flach und die Elektronenkonzentration steigt monoton an in Richtung der Probenmitte.
- Im benachbarten Streifen befindet sich die Fermi-Energie dagegen in der Lücke zwischen zwei Landau-Niveaus, d.h. es gibt keine freien Zustände an der Fermi-Energie und das 2DES zeigt daher schlechtes Abschirmverhalten, wie ein Isolator. Es verhält sich hier lokal **inkompressibel**. Die Elektronenkonzentration ist daher in diesen Bereichen konstant, während das elektrostatische Potential große Änderungen in der Größenordnung der Zyklotronenergie aufweist. Lokal kann diesem inkompressiblen Bereich ein ganzzahliger Füllfaktor zugeordnet werden.

Präziser ist die *Kompressibilität* κ des 2DES definiert als [67]

$$\kappa^{-1} = n_s^2 \cdot \frac{\partial \mu_{\text{ch}}}{\partial n_s} . \quad (4.1)$$

Sie beschreibt, wie das chemische Potential μ_{ch} mit der Elektronenkonzentration n_s variiert. In „kompressiblen“ Gebieten ist die Kompressibilität demnach groß, denn hier können Elektronen hinzugefügt werden, ohne das chemische Potential oder die Größe des Gebietes zu ändern. In „inkompressiblen“ Gebieten gilt entsprechend das Gegenteil.

Chklovskii *et al.* [63] konnte analytische Formeln für die Position und Breite der Randstreifen angeben. Sie wurden von Lier *et al.* [68] etwas umformuliert und durch selbstkonsistente numerische Berechnungen als gute Approximation bestätigt. In deren Notation ist der Abstand des inkompressiblen Streifens mit dem lokalen geradzahigen Füllfaktor $\nu_{\text{lokal}} = \text{int}(\nu)$ vom 2DES-Rand bei einem im Probeninneren vorherrschenden Füllfaktor ν geben durch

$$y_\nu = \frac{d_0}{1 - \left(\frac{\text{int}(\nu)}{\nu}\right)^2}. \quad (4.2)$$

Dabei beschreibt

$$d_0 = \frac{4\epsilon_0\epsilon_{\text{GaAs}} V_g}{\pi e n_s} \quad (4.3)$$

die *Breite der Verarmungszone* jenseits der physikalischen Grenze der Metallelektrode. Sie hängt von der Elektronenkonzentration n_s und der angelegten elektrostatischen Potentialdifferenz V_g ab. Die Breite der geradzahigen inkompressiblen Streifen ist geben durch

$$a_\nu = \frac{4y_\nu}{\nu} \sqrt{\frac{\text{int}(\nu) a_B^*}{\pi d_0}}, \quad (4.4)$$

wobei mit $a_B^* = 4\pi\epsilon_0\epsilon_{\text{GaAs}}\hbar^2/e^2m^*$ der *effektive Bohr-Radius* in GaAs beschrieben wird. Sie wird für einen bestimmten inkompressiblen Streifen immer schmaler mit ansteigendem „Bulk“-Füllfaktor ν und liegt typischerweise in der Größenordnung von 100 nm bei Füllfaktoren knapp oberhalb ganzzahliger Werte.

Bei den hier vorgestellten Experimenten wurde allerdings eine geätzte Mesastruktur verwendet, die durch freie Flanken und nicht durch Elektroden definiert ist (s. Abb 4.6(b)). Hier sorgen unvollständige kovalente Bindungen („dangling bonds“) für Oberflächenzustände mit Elektronenenergien bei etwa der Mitte der Energielücke des Halbleitermaterials [69, 70]. Elektronen können diese besetzen, so daß das Fermi-Niveau bei dieser Energie „gepinnt“ wird. Es kommt daher zu einer natürlichen Verbiegung der Bandstruktur und damit zu einer Randverarmung des 2DES. Dieses Oberflächenpotential kann daher für GaAs durch ein effektives Elektrodenpotential eV_g mit der halben Energielückenenergie von GaAs (1.4 eV) approximiert werden.

Der Verlauf der inkompressiblen Streifen mit veränderlichem Magnetfeld ist in Abb. 4.7 für reale Parameter der vorgestellten Probe dargestellt. Für ganzzahlige Füllfaktoren überlappen die beiden innersten inkompressiblen Streifen der beiden gegenüberliegenden Ränder und bilden das inkompressible Probeninnere (Abb. 4.7(a)). Für etwas größere Füllfaktoren spaltet dieser Bereich auf und die Streifen werden schmaler und bewegen sich zum Rand hin. Die Probenmitte ist nun kompressibel geworden (Abb. 4.7(b)).

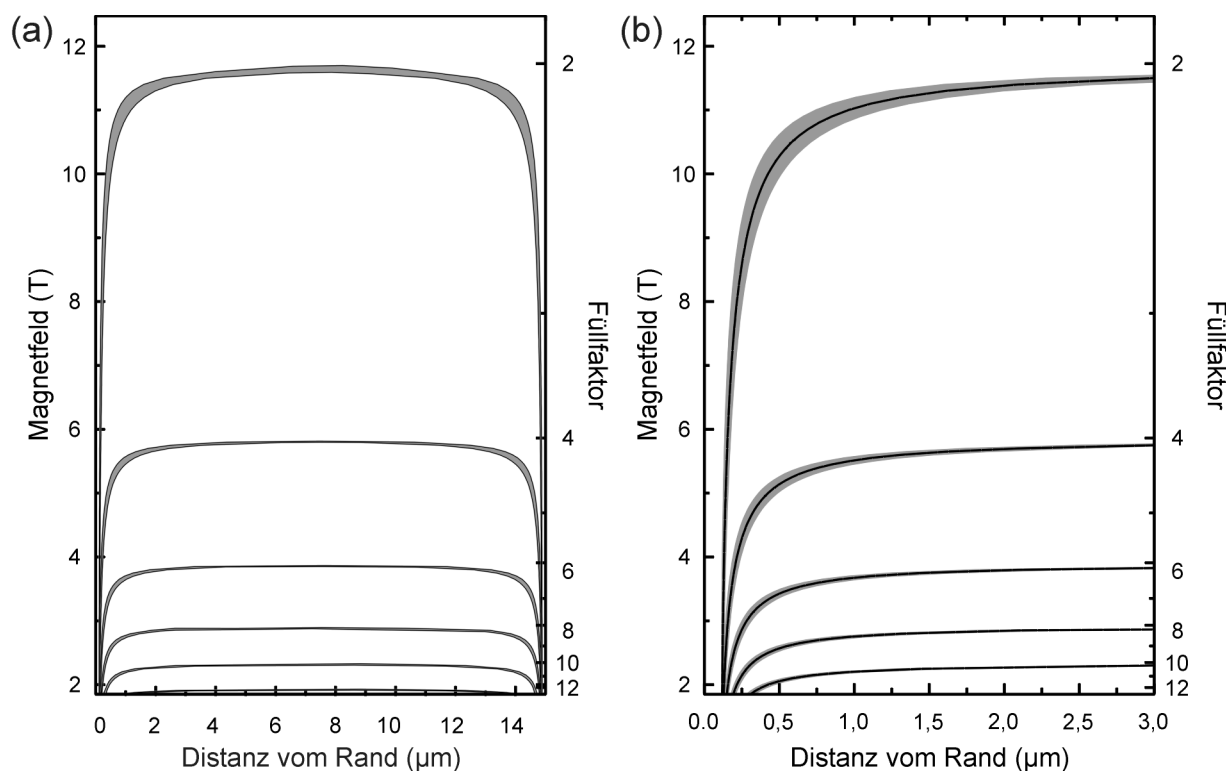


Abb. 4.7: Magnetfeldabhängigkeit der Position und Breite der inkompressiblen Streifen gemäß Gleichung (4.2) und (4.4) [68]. Dargestellt sind nur Streifen, die lokal geradzahligem ν entsprechen, die Spinaufspaltung wurde nicht berücksichtigt. (a) Überblick über die gesamte Probenbreite, (b) Ausschnitt des linken Randes. Verwendet wurden typische experimentelle Parameter mit $n_s = 5,7 \times 10^{15} \text{ m}^{-2}$ und $V_g = -0,7 \text{ V}$.

4.2.2 Experimentelle Bekräftigung des Randstreifen-Modells

Das theoretische Modell aus Kapitel 4.2.1 zur Vorhersage der Randstreifenstruktur wird in Abb. 4.8 mit den experimentellen Ergebnissen verglichen. Hier sind die Gleichgewichtspositionen der inkompressiblen Streifen ohne aufgeprägten Strom gemäß (4.2) in eine Vergrößerung des Falschfarbenplots aus Abb. 4.2 mit aufgenommen. In die Formel geht die gemessene Elektronenkonzentration, die Dielektrizitätskonstante $\epsilon_{\text{GaAs}} = 13,4$ und die in der Abbildung vermerkten drei verschiedenen Elektrodenspannungen V_g ein, von denen der Wert $V_g = -0,7 \text{ V}$ entsprechend der halben Energielückenenergie von GaAs am besten paßt. Ohne weitere Anpassung der Parameter stimmt der Verlauf der Position des steilen Potentialsprungs an den Rändern verblüffend gut mit der theoretisch für die Gleichgewichtssituation vorhergesagten Position des jeweils innersten inkompressiblen Streifens überein. Demnach kommen diesen Streifen in Einklang mit der Theorie elektrisch „isolierende“ Eigenschaften zu, so daß eine große elektro-

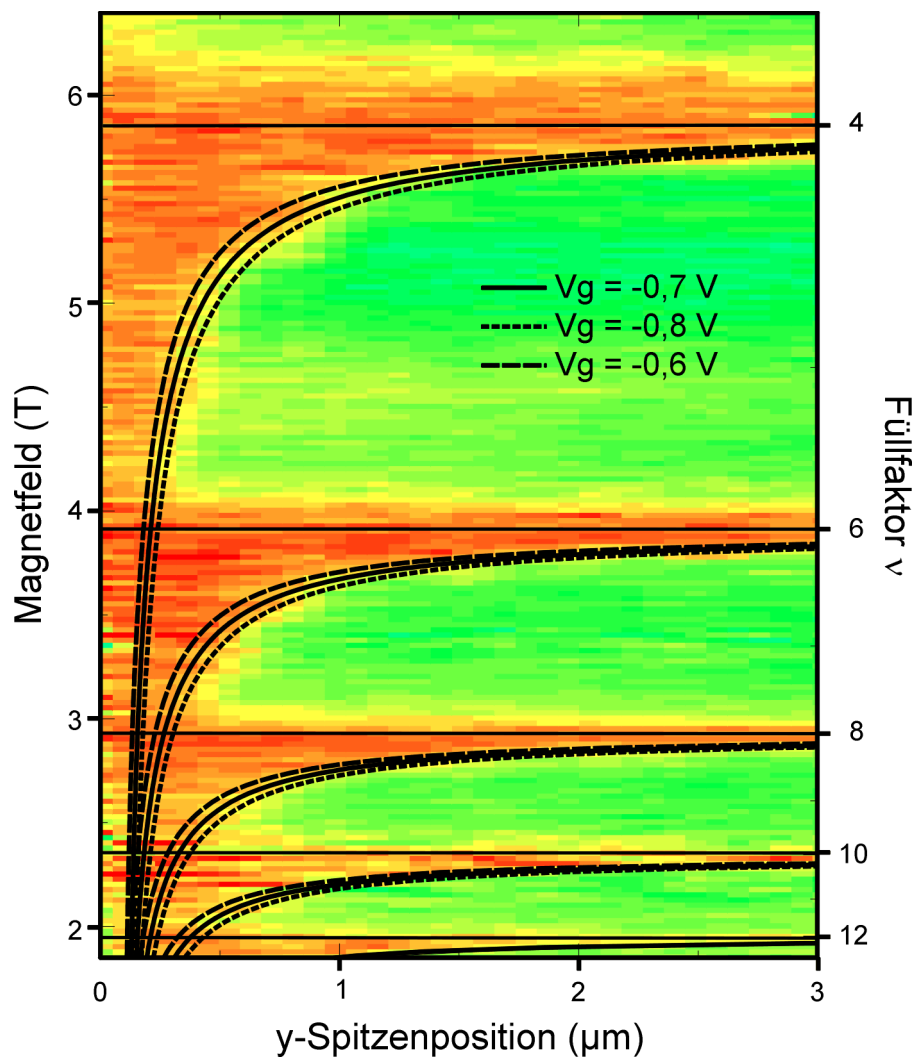


Abb. 4.8: Vergleich der experimentellen Potentialprofile mit der theoretischen Vorhersage des Randstreifenprofils nach [68]. Als schwarze Linien sind die theoretischen Positionen der inkompressiblen Streifen für drei unterschiedliche Elektrodenspannungen V_g dargestellt. Offensichtlich folgt der steile Hall-Potentialsprung jeweils der Position des *innersten* inkompressiblen Streifens.

chemische Hall-Potentialdifferenz zwischen Randbereich und Probeninneren über die Streifen abfallen kann. Die inkompressiblen Streifen können in diesem Sinne den Rand vom Probeninneren elektrochemisch entkoppeln. Für höhere Füllfaktoren fällt diese Potentialdifferenz geringer aus und ein kleiner Teil des Potentials fällt auch über die Probenmitte ab. Dieser Anteil nimmt immer mehr zu, bis für Typ I nahezu das gesamte Potential über den „bulk“-Bereich abfällt. Zusammenfassend ist die Ausbildung der drei verschiedenen Profiltypen innerhalb des Randstreifenmodells gut verständlich:

- Für mittlere Füllfaktoren ν etwas oberhalb ganzzahliger Werte (Profiltyp III) spaltet der inkompressible Bereich beidseitig in jeweils einen Randstreifen auf, der zunächst relativ breit ist, mit steigendem ν aber immer schmaler wird (vergleiche Abb. 4.7). Die Entkopplung, d.h. die elektrochemische Potentialdifferenz (= Hall-Spannungsabfall) zwischen Mitte und Randbereich ist daher anfänglich sehr groß, verringert sich aber mit abnehmender Streifenbreite und sorgt daher für einen verstärkten Hall-Potentialabfall über den Mittelbereich der Probe. Eine verminderte Breite der inkompressiblen Streifen tritt ebenfalls bei ungeradzahligen Füllfaktoren auf, da hier die Energielücke zwischen den Landau-Niveaus durch die Zeeman-Aufspaltung bestimmt wird, die wesentlich kleiner als die Landau-Aufspaltung ist. Dies erklärt die schwächer ausgeprägte Entkopplung bei $\nu = 3$ und $\nu = 5$ und das gänzliche Verschwinden bei höheren ungeradzahligen Werten. Gleichzeitig erklärt der Zuwachs an Randstreifen mit höheren Füllfaktoren auch das in Abb. 4.3 erkennbare Verschieben der Position des Potentialsprungs weiter zur Mitte hin: Der innerste inkompressible Streifen verläuft für größere gleichwertige Füllfaktoren weiter entfernt vom Rand.
- Für den Profiltyp I ist der Hall-Potentialunterschied zwischen Rand und „Bulk“ aufgrund der verstärkten Streuung über die nur noch schmalen inkompressiblen Streifen hinweg so schwach geworden, daß das Potential linear über die ganze Probenbreite abfällt.
- Für ganzzahlige Füllfaktoren (Profiltyp II) besteht die Probe aus einem inkompressiblen Probeninneren und einer Abfolge von kompressiblen und inkompressiblen Randstreifen. Durch die Potentialfluktuation im inkompressiblen Inneren kommt es zu einem nichtlinearen Potentialabfall über die Probenmitte. Die Randstreifen einer Seite besitzen dabei das gleiche elektrochemische Potential.

4.3 Abschirmverhalten des 2DES

Um die Existenz kompressibler und inkompressibler Bereiche innerhalb des 2DES zusätzlich zu untermauern, können indirekt die damit verknüpften entsprechend guten oder nur sehr schlechten Abschirmeigenschaften analysiert werden. Wie bereits in Abschnitt 3.3.2 beschrieben, kann hierzu das lokale Abschirmverhalten bzw. die Transparenz des 2DES gegenüber einer Modulation an einer darunterliegenden Rückseitenelektrode untersucht werden. Man beobachtet, wie in Abb. 4.9 gezeigt, eine sehr starke Füllfaktorabhängigkeit, d.h. nur scharf um ganzzahlige Füllfaktoren herum steigt die Transparenz zur Probenmitte hin stark an, da hier ein großer inkompressibler Bereich mit schlechten Abschirmeigenschaften vorliegt. Zu kleineren Magnetfeldern hin werden weitere, freilich nur sehr schwache Strukturen am Probenrand erkennbar, wie in Abb. 4.10 gezeigt. Ein lokaler Anstieg des Transparenzsignals ist in etwa wiederum bei der Po-

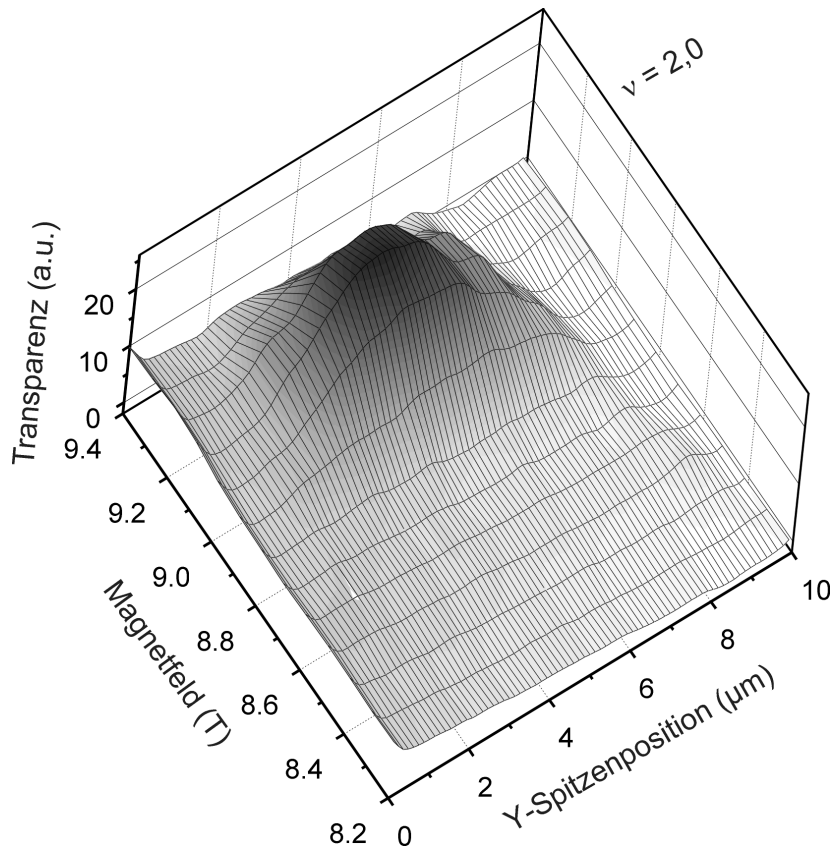


Abb. 4.9: Abschirmverhalten oder Transparenz des 2DES auf eine Rückelektrodenmodulation gemäß dem Meßaufbau aus Abschnitt 3.3.2. Nur für ganzzahligen Füllfaktor in der Probenmitte wirkt das 2DES isolierend und daher gut transparent. Das 2DES dieser Probe weist eine Elektronenkonzentration von $n_s = (4,3 \pm 0,05) \times 10^{15} \text{ m}^{-2}$ bei einer Elektronenbeweglichkeit von $\mu = (18 \pm 0,8) \text{ m}^2 / \text{Vs}$ auf.

sition der innersten inkompressiblen Streifen gemäß (4.2) beobachtbar. Dies kann als weiteres Indiz gewertet werden, daß tatsächlich der Potentialabfall über die inkompressiblen Bereiche stattfindet, bei denen schlechtes Abschirmverhalten und damit verstärkte Transparenz des 2DES vorliegt. Ähnliche Messungen wurden von Yacoby *et al.* [44] mit einer besseren Auflösung durchgeführt (die Rückseitenelektrode befand sich wesentlich dichter am 2DES). Sie konnten ebenfalls einzelne inkompressible Streifen nachweisen und ein Verschieben der Streifenposition mit veränderlichem Magnetfeld beobachten. Das Oberflächenpotential ihrer Probe, das in direkter Beziehung zum Potential des 2DES stehen sollte, zeigte ebenfalls einen Potentialgradienten an Positionen erhöhter Transmission, d.h. über inkompressiblen Bereichen. Eine direkte Verknüpfung des Experiments mit der theoretischen Positionsvorhersage der Streifen war allerdings in ihrer Arbeit nicht gegeben. Ihrer Meinung nach ist die Transparenz des 2DES umge-

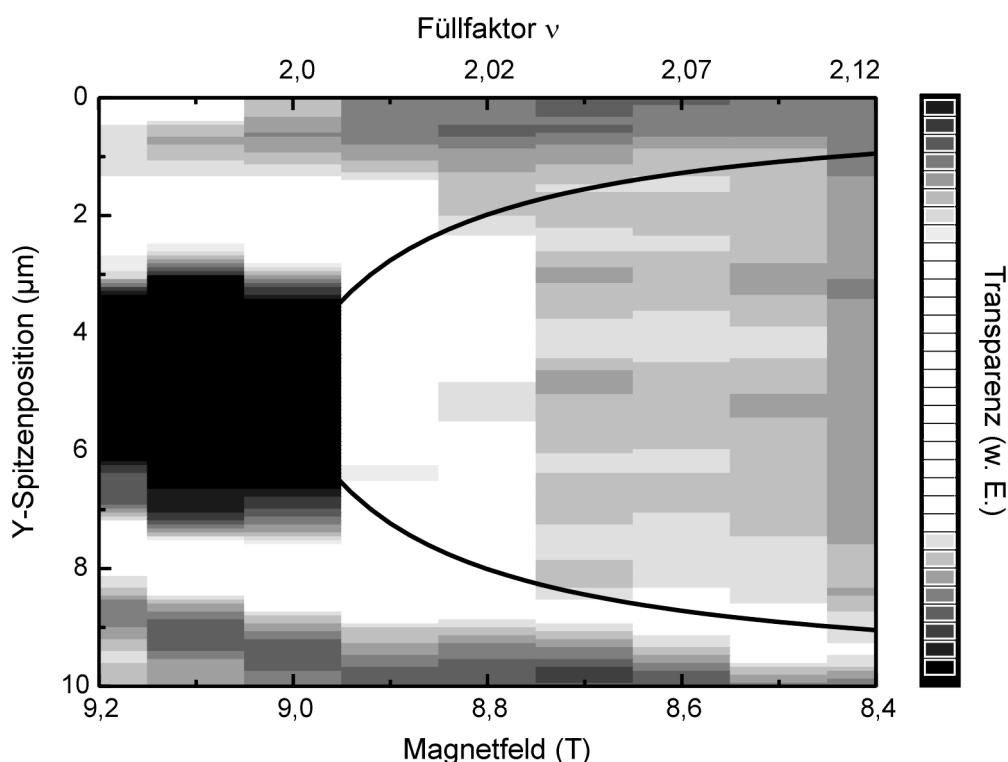


Abb. 4.10: Graustufendarstellung der Meßdaten aus Abb. 4.9. Es wurde zur besseren Sichtbarkeit der Entwicklung kleiner Strukturen jeweils das nahezu flach verlaufende Potentialprofil bei $B = 8,2$ T als Untergrund abgezogen. Neben dem großen Maximum bei ganzzahligem ν sind auch schwächere lokale Maxima am Rand bei größeren ν zu erkennen. Die Linien geben die theoretische Position der inkompressiblen Streifen gemäß (4.2) wieder - sie folgen in etwa den lokalen Maxima.

kehrt proportional zur Kompressibilität κ [67]. Eine direkte Analogie zwischen hoher Transparenz und lokal ausschließlich inkompressiblem 2DES ist aber mit Vorsicht zu betrachten. Wie in Abschnitt 5.2.1 besprochen wird, ist nahe ganzzahliger Füllfaktoren das hauptsächlich inkompressible Probeninnere immer auch von isolierten kompressiblen Gebieten mit Zuständen an der Fermi-Energie durchsetzt. Diese sind aber in Abb. 4.9 nicht zu erkennen. Wesentlich für die Transparenz ist das Abschirmverhalten durch Ladungsumverteilungen an der Fermi-Energie. Aber nur eine metallische, kompressible Fläche, die an ein Reservoir angeschlossen ist und daher genügend Ladungen verschieben kann, um jeweils gerade die Rückelektrodenmodulation auszugleichen, kann auch effektiv abschirmen. Ein kleines isoliertes metallisches Gebiet wirkt im Kondensatormodell lediglich wie eine Serienschaltung zweier Kondensatoren mit unveränderter Gesamtkapazität. Nur ein dreidimensionales metallisches Gebilde würde die Kapazität ändern, da nun der effektive Kondensatorplattenabstand reduziert werden würde.

4.4 Zusammenfassung

Das Potentialprofil eines 2DES in hohen Magnetfeldern läßt sich grob in drei Profiltypen einteilen: Einen nahezu linearen Potentialabfall über die gesamte Probenbreite bei Füllfaktoren knapp unterhalb ganzzahliger Werte, einen erkennbar nichtlinearen Abfall bei ganzzahligen ν und deutliche Potentialsprünge an den Rändern bei weitgehend flachem Probeninneren für ν knapp oberhalb ganzzahliger Werte. Dieses Verhalten wiederholt sich analog für alle geradzahli- gen ν im untersuchten Magnetfeldbereich. Ein Vergleich mit der Vorhersage selbstkonsistenter Randpotentialberechnungen deutet darauf hin, daß diese Potentialsprünge jeweils an der Posi- tion der innersten, quasi-isolierenden inkompressiblen Streifen auftreten. Dies wird auch durch Transparenzmessungen zum Abschirmverhalten des 2DES bestätigt.

Kapitel 5

Rückschluß aus den Hall-Potentialprofilen auf die Stromverteilung

Die vorgestellten Messungen geben zunächst nur die elektrostatische Potentialänderung zwischen angelegter und nicht angelegter Spannung an den Probenkontakten wieder. Der damit verbundene Stromfluß ist nicht unmittelbar bestimmbar, sondern muß aus den gemessenen Hall-Potentialprofilen erschlossen werden. In diesem Kapitel soll daher die Vorgehensweise bei der Interpretation der Messungen im Detail entwickelt werden.

5.1 Dissipationsfreie Ströme

5.1.1 Elektrostatischer Potentialgradient und Stromdichte

Im folgenden soll der Zusammenhang zwischen lokalem elektrostatischen Potentialgradienten und lokaler Stromdichte hergeleitet werden. Zunächst wird ein konstanter Potentialgradient, d.h. ein homogenes elektrisches Feld entlang des Probenquerschnitts und danach allgemeiner ein schwach veränderliches Potential betrachtet.

Homogenes elektrisches Feld

Berücksichtigt man in der Schrödinger-Gleichung (2.5) ein zusätzliches elektrostatisches Potential V , das nur von der y -Koordinate abhängt und ein homogenes elektrisches Feld $E = -e dV(y)/dy$ beschreibt, so liegt in x -Richtung weiterhin eine ebene Welle vor, die Schrödinger-Gleichung in y -Richtung modifiziert sich aber zu

$$\left\{ -\frac{1}{2m^*} \hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{2m^*} (\hbar k_x - eBy)^2 - e E y \right\} \varphi_n(y) = \varepsilon_n \varphi_n(y). \quad (5.1)$$

Durch quadratische Ergänzung kann dies wiederum in die Form einer harmonischen Oszillatorgleichung gebracht werden:

$$\left\{ -\frac{1}{2m^*} \hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{e^2 B^2}{2m^*} \left[y - \left(l_B^2 k_x + \frac{eE}{m^* \omega_c^2} \right) \right]^2 - \frac{m^* E^2}{2 B^2} - e \hbar k_x \frac{E}{B} \right\} \varphi_n(y) = \varepsilon_n \varphi_n(y). \quad (5.2)$$

Der Oszillator ist um die Mittelpunktskoordinate Y_E zentriert mit

$$Y_E = l_B^2 k_x + \frac{eE}{m^* \omega_c^2} = -Y + \frac{eE}{m^* \omega_c^2}. \quad (5.3)$$

Die zusätzlichen Terme in (5.2) addieren sich zu den Eigenwerten des harmonischen Oszillator (2.14) hinzu:

$$\varepsilon_{n,k_x} = \hbar \omega_c \left(n + \frac{1}{2} \right) - \frac{m^* E^2}{2 B^2} - \hbar k_x \frac{E}{B} = \hbar \omega_c \left(n + \frac{1}{2} \right) - \frac{m^* E^2}{2 B^2} + e Y \cdot E. \quad (5.4)$$

Ein nichtverschwindendes elektrisches Feld E bewirkt die Aufhebung der Entartung innerhalb eines Landau-Niveaus, indem es für eine Verkipfung der Landau-Niveaus sorgt (Abb. 5.1(b)). Zustände mit unterschiedlichem Y bzw. k_x sind in ihrer Energie proportional zu E verschoben, so daß in der Projektion auf die Einteilchenenergieachse ein quasi-kontinuierliches Energieband um ε_n herum entsteht.

Die Driftgeschwindigkeit eines Elektrons im Zustand $|n, k_x\rangle$ in x -Richtung läßt sich über den Impulsoperator bestimmen und ist in Operatorschreibweise gegeben durch

$$\hat{v}_D = \frac{1}{m^*} (-i\hbar \nabla + e\mathbf{A})_x = \frac{1}{m^*} \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} - e B y \right). \quad (5.5)$$

Mit (2.7) ist ihr quantenmechanischer Erwartungswert daher

$$v_D = \frac{1}{m^*} \left\langle n, k_x \left| -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} - e B y \right| n, k_x \right\rangle = -\frac{1}{B} \frac{\partial V(y)}{\partial y} = \frac{E}{B}, \quad (5.6)$$

wie aus dem sog. Feynman-Hellmann-Theorem folgt [71, 72]. Dies entspricht wie im klassischen Fall einer Driftbewegung der Elektronen senkrecht zum Magnetfeld und senkrecht zum elektrischen Feld. Alle Elektronen besitzen lokal die gleiche Driftgeschwindigkeit. Deshalb ist die lokale Stromdichte j_x mit der lokale Elektronendichte n_s verknüpft über

$$j_x = -e n_s v_D = -n_s \frac{e}{B} \frac{\partial V(y)}{\partial y} = -\nu \frac{e B}{h} \frac{e}{B} \frac{\partial V(y)}{\partial y} = -\nu \frac{e^2}{h} \frac{\partial V(y)}{\partial y} = \nu \frac{e^2}{h} E. \quad (5.7)$$

Als wichtiges Ergebnis verbindet also (5.7) die Stromdichte j_x in x -Richtung über den Füllfaktor und die inverse von-Klitzing-Konstante mit dem elektrischen Feld E in y -Richtung senkrecht dazu. Dies stimmt mit (2.36) für ein homogenes Elektronensystem überein und erklärt jeweils für exakt ganzzahlige Füllfaktoren den in ganzzahligen Vielfachen von e^2/h quantisierten Wert der Hall-Leitfähigkeit σ_{xy} . Die Beibehaltung dieses Wertes über einen ausgedehnten Plateaubereich ist damit nicht erklärt, denn j_x steigt bei gegebenem elektrischen Feld E nach (5.7) linear mit dem Füllfaktor ν an!

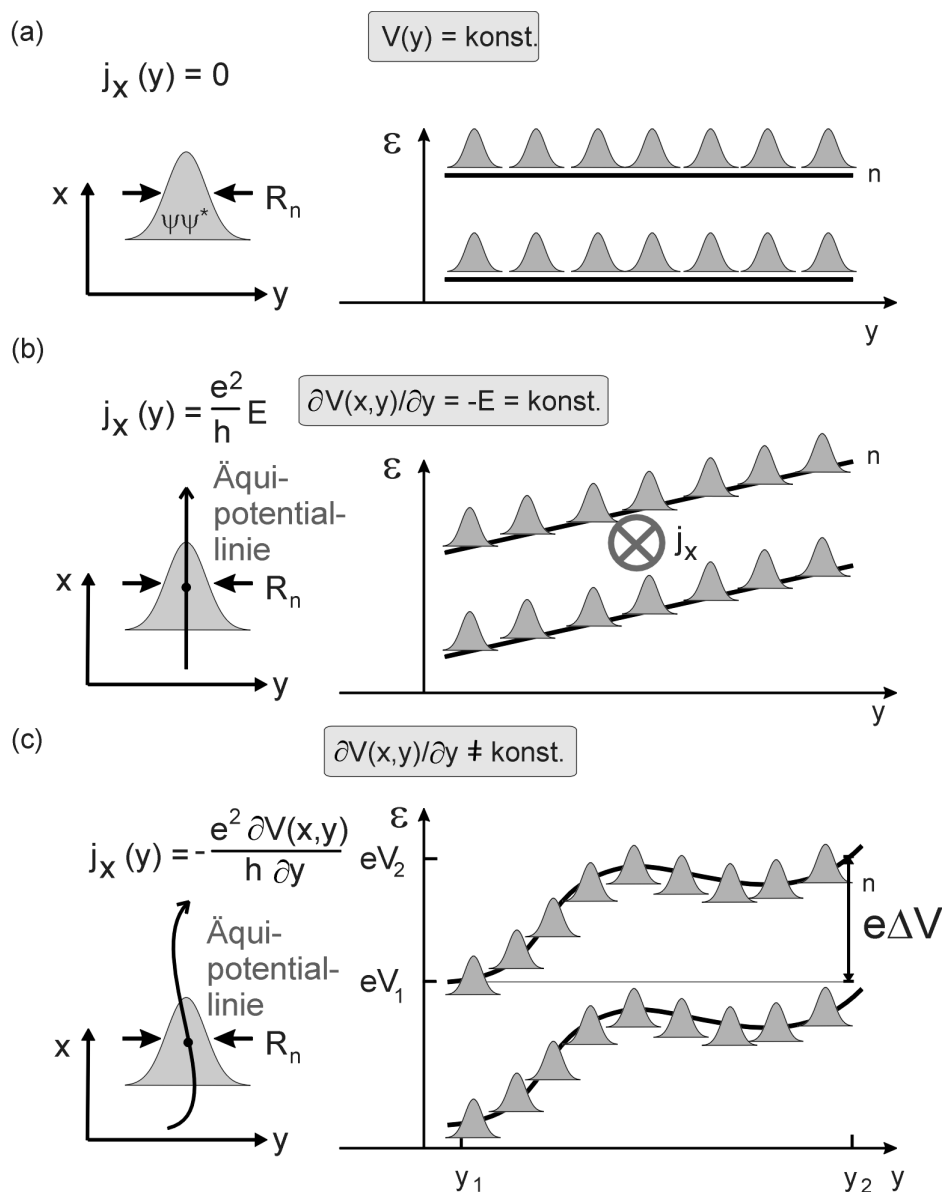


Abb. 5.1: (a) Im Magnetfeld bilden sich quasi-1D Zustände aus, die in y -Richtung auf die Größe von R_n lokalisiert sind. Für $V(y) = \text{konst.}$ sind alle Zustände eines Landau-Niveaus entartet und es fließt kein Strom. (b) Für $dV(y)/dy = -E$ wird eine Stromdichte j_x entlang von parallelen Äquipotentiallinien erzeugt. Das konstante elektrische Feld E führt zu einer Verkippung der Landau-Niveaus, die Entartung ist aufgehoben. Alle Zustände in n Landau-Niveaus unterhalb von ϵ_F tragen zu einer Stromdichte $j_x = n e^2/h \cdot E$ senkrecht zur Zeichenebene bei. (c) Für $E(x, y) = -\partial V(x, y)/\partial y$ folgt die Äquipotentiallinie $V(x, y) = \text{konst.}$ i. a. einem gekrümmten Verlauf und wird abhängig von x . Alle Zustände mit nicht-verschwindendem elektrostatischen Potentialgradienten in y -Richtung tragen zur Stromdichte senkrecht dazu in x -Richtung bei. Der Gesamtstrom aller dieser Zustände eines Landau-Niveaus hängt über die inverse von-Klitzing-Konstante nur von der elektrostatischen Potentialdifferenz zwischen den Gebietsgrenzen y_1 und y_2 ab.

Schwach veränderliches Potential

Allgemeiner liegt für ein sich verglichen zur magnetischen Länge (2.12) nur langsam änderndes Potential $V(x, y)$, das sich in einer Taylorentwicklung linearisieren läßt zu $eV(x, y + dy) \approx eV(x, y) + dy e \partial V(x, y)/\partial y$, weiterhin die harmonische Oszillorgleichung (5.1) vor. Hinzu kommt lediglich ein konstanter Term $eV(x, y)$ und ein ortsabhängiges lokales elektrisches Feld $E(x, y) = -\partial V(x, y)/\partial y$. Die Elektronenbewegung innerhalb der Potentiallandschaft kann stets in einem lokal angepaßten Koordinatensystem beschrieben werden, die Äquipotentiallinien senkrecht zum Gradienten entsprechen nun aber in der (x, y) -Ebene gewundenen Pfaden (Abb. 5.1(c)). Lokal ist die Stromdichte daher allgemeiner durch die folgende Beziehung bestimmt¹:

$$j_x(y) = -\nu_{\text{lokal}} \frac{e^2}{h} \frac{\partial V(x, y)}{\partial y}. \quad (5.8)$$

Wir halten fest:

Jedes *vollständig* besetzte Landau-Niveau trägt einen festen Beitrag $-e^2/h \cdot \partial V(x, y)/\partial y$ zur lokalen Stromdichte $j_x(y)$ bei (Abb. 5.1(c)). Diese Stromdichte $j_x(y)$ in x -Richtung fließt senkrecht zum elektrischen Feld $E = -\partial V(x, y)/\partial y$ in y -Richtung und erzeugt damit **keine Dissipation** – für die *dissipierte Leistung* gilt $P = \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} = \begin{pmatrix} j_x \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ E \end{pmatrix} = 0$.

Integraler Strom

Für ein gegebenes Probengebiet mit Begrenzungspunkten y_1 und y_2 sowie nichtverschwindendem Potentialgradienten ergibt sich für den von allen Zuständen in allen vollständig oder teilweise besetzten Landau-Niveaus getragenen Strom mit (5.8) (vgl. Abb. 5.1(c))

$$I_x(\Delta V) = \int_{y_1}^{y_2} j_x(y) dy = -\nu \frac{e^2}{h} \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial V(x, y)}{\partial y} dy = -\nu \frac{e^2}{h} \int_{V_1}^{V_2} dV = -\nu \frac{e^2}{h} \Delta V. \quad (5.9)$$

Somit gilt:

Für einen 2DES-Bereich *gleichen Füllfaktors* hängt die integrale Stromstärke in x -Richtung zwischen y_1 und y_2 nur vom absoluten Spannungsabfall ΔV zwischen y_1 und y_2 ab. Nur bei ganzzahligem Füllfaktor, d.h. solange es nur besetzte Zustände unterhalb der Fermi-Energie gibt, nimmt der Proportionalitätsfaktor einen in e^2/h exakt quantisierten Wert an.

¹Dieser Zusammenhang wurde erstmals von MacDonald *et al.* [73] beschrieben.

5.1.2 Konzentrationsgradient und Stromdichte

Geller *et al.* [74, 75] konnten das selbstkonsistente Modell für den Probenrand [63] erweitern und zusätzlich die Stromverteilung im Gleichgewicht bestimmen. Bei diesem Ansatz kam die sogenannte „current-density functional theory“ zum Einsatz, die es ermöglicht, alle Wechselwirkungseinflüsse durch eine effektive Ein-Teilchen-Schrödinger-Gleichung zu behandeln. Es kommen dabei zu Gl. (5.1) noch weitere Austauschwechselwirkungsterme hinzu, und die lokale Stromdichte ist gegeben durch [74, 75]

$$j_x(y) = -\nu_{\text{lokal}} \frac{e^2}{h} \frac{\partial V(x, y)}{\partial y} + \frac{\hbar}{2m} \left((2\nu_{\text{lokal}} + 1) + \frac{1}{\mu_B} \frac{\partial \mu_{\text{ch}}}{\partial B} \right) \frac{\partial n_s(x, y)}{\partial y}. \quad (5.10)$$

Der erste Summand in (5.10) entspricht Gl. (5.8), der zweite Summand behandelt zusätzlich den Einfluß von Konzentrationsgradienten, wie sie durch Potentialfluktuationen verursacht durch die Dotierschicht oder am Rand der Probe auftreten. Integriert man den zweiten Term in (5.10) über die gesamte Probenbreite, so sollten sich auch im Nichtgleichgewichtsfall alle Beiträge zu null kompensieren. Dieser Beitrag sollte also keinen Nettostrom in der Gesamtbreite der Probe tragen.

5.2 Ursachen und Folgen elektrostatischer Potentialgradienten

Gleichung (5.8) beschreibt eine lokale Stromdichte $j_x(y)$ in x -Richtung innerhalb des 2DES, wann immer ein (schwach veränderlicher) Gradient $\partial V(x, y)/\partial y$ vorliegt. Ein elektrostatischer Potentialgradient kann dabei in realen Proben verschiedene Ursachen haben, wie in den folgenden Unterabschnitten erläutert wird:

- Inhomogenitäten in der Dotierung verursachen Potentialfluktuationen für das 2DES. Die dabei auftretenden Potentialgradienten treiben Elektronen entlang von Äquipotentiallinien innerhalb der Potentiallandschaft und verursachen damit intrinsische dissipationsfreie Ströme (s. Abschnitt 5.2.1).
- Potentialgradienten an den Rändern der Probe führen zu gegenläufigen Strömen entlang gegenüberliegender Ränder (s. Abschnitt 5.2.2).
- Eine extern angelegte Spannung führt zu einer elektrochemischen und damit einer elektrostatischen Potentialdifferenz zwischen den gegenüberliegenden Probenrändern, die die intrinsische Potentiallandschaft und damit die Stromverteilung so verändert, daß integral ein von extern meßbarer Nettostrom in eine Richtung entsteht (s. Abschnitt 5.2.3).

In einer realen Probe unter Quanten-Hall-Bedingungen werden alle drei Beiträge zur Potentiallandschaft gleichzeitig vorhanden sein und daher zu einem selbstkonsistenten elektrostatischen Gesamtpotential $V(x, y)$ in der Einteilchen-Schrödingergleichung (2.5) führen. Die einzelnen Komponenten werden im folgenden genauer besprochen werden.

5.2.1 Störstellenpotential

In einer realen Probe ist immer ein Zufalls- oder Störstellenpotential, wie in Abb. 5.2(a) skizziert, vorhanden. Es wird neben Kristalldefekten an der Grenzschicht durch den Einfluß des Coulomb-Potentials der Donatorschicht oberhalb des 2DES verursacht. Die Glattheit bzw. die Längenskala dieses Zufallspotentials liegt natürlicherweise in der Größenordnung der „Spacer“-Schicht d_s zwischen Donatoratomen und 2DES. Durch das gute Abschirmverhalten des bei verschwindendem Magnetfeld quasi-metallischen 2DES wird ein langreichweitiges Potential in eine Inhomogenität der Elektronendichte resultieren. Während die mittlere Elektronen- und damit auch Donatoranzahl in einem Bereich mit Kantenlänge d_s gleich $n_s d_s^2$ ist, kann die typische Inhomogenität in der Anzahl der Donatoratome durch $\delta n_s = \sqrt{n_s/8\pi}/d_s$ beschrieben werden [76]. Für typische Probenparameter $n_s = 5,7 \times 10^{15} \text{ m}^{-2}$ und $d_s = 40 \text{ nm}$ bedeutet dies eine Fluktuation von ca. 7% um die Fermi-Energie bei verschwindendem Magnetfeld.

Diese Potentialfluktuationen im Ortsraum haben zwei wichtige Konsequenzen: Zum einen führen sie zu einer energetischen Verbreiterung der Landau-Niveaus und zum anderen zur Ausbildung von lokalisierten und delokalisierten Zuständen.

Verbreiterte Landau-Niveaus und lokalisierte Zustände

Durch die Potentialfluktuationen wird die Entartung der einzelnen Landau-Niveaus aufgehoben und es bilden sich Energiebänder aus, wie die Projektion der Potentiallandschaft auf die Einteilchenenergieachse in Abb. 5.2(b) andeutet. Diese so erhaltene Zustandsdichte wird oft durch eine Gauß-Kurve (s. Abb. 5.2(c)) beschrieben. Innerhalb der Potentiallandschaft verläuft gemäß (5.8) die Elektronenbewegung senkrecht zum Potentialgradienten entlang von Äquipotentiallinien. Diese können dabei für verschiedene Energien geschlossene oder offene Bahnen über einen betrachteten Probenausschnitt hinweg ergeben, analog zu einem Perkolationsproblem einer klassischen Trajektorie. Einem Zustand in den Flanken eines Landau-Niveaus, dem eine geschlossene Bahn um einen Talkessel oder eine Bergkuppe innerhalb der Potentiallandschaft zugeordnet ist, entspricht dabei ein *lokalisierter* Zustand. Offene Bahnen, die von einer Begrenzungslinie zur gegenüberliegenden führen, entsprechen dagegen *ausgedehnten* Zuständen und sind energetisch im Zentrum der Landau-Niveaus zu finden, wie in Abb. 5.2(a) verdeutlicht. Je größer der gewählte Probenausschnitt, desto weniger Äquipotentiallinien wird es geben, die gegenüberliegende Begrenzungslinien verbinden. Näheres findet sich z. B. in [77].

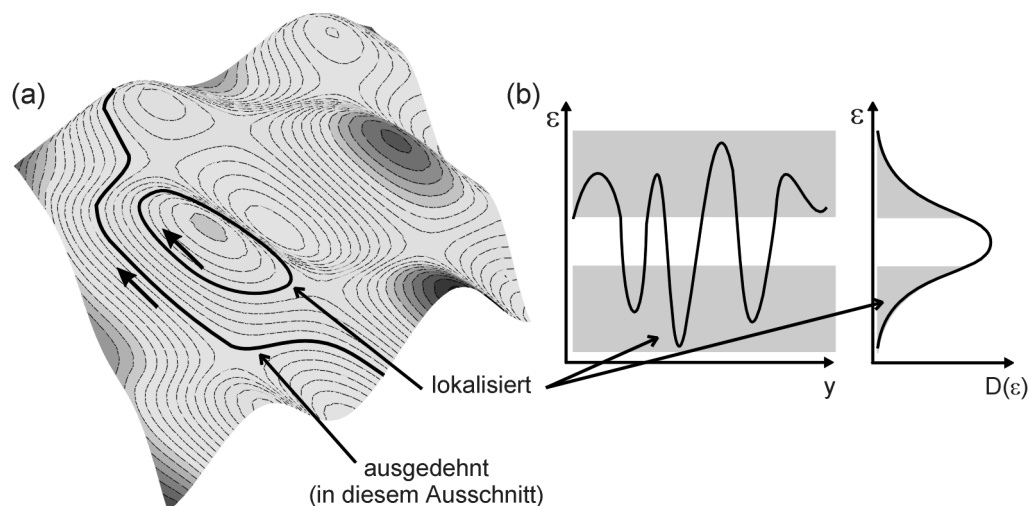


Abb. 5.2: (a) Willkürliche Potentiallandschaft zur Verdeutlichung des Einflusses eines Störstellenpotentials auf die Zustände eines Landau-Niveaus. Die Elektronenbewegung folgt senkrecht zum Potentialgradienten entlang Äquipotentiallinien. Dabei kommt es zu lokalisierten, geschlossenen Pfaden und ausgedehnten Pfaden über den Probenausschnitt hinweg. (b) Die Potentialfluktuation im Ortsraum führen im Energieschema zu einer energetischen Verbreiterung der Landau-Niveaus, wobei die Flanken lokalisierten Zuständen zugeordnet werden können.

5.2.2 Einschlußpotential am Rand der Probe

Wie bereits in Abschnitt 4.2 besprochen, liegt am Rand der Hall-Probe ein Einschlußpotential vor, das über die lokalen Potentialfluktuation im Randbereich dominiert. Durch die auftretenden Potentialgradienten sind daher bereits im Gleichgewicht stets Stromdichten entlang der Ränder zu finden,

- sei es im einfachsten Modell, wo die Landau-Niveaus am Rand als nach oben gebogen angesehen werden (s. Abb. 5.3),
- oder sei es im selbstkonsistenten elektrostatischen Bild, wie es in Abschnitt 5.1.2 beschrieben und in Abb. 5.4 dargestellt ist.

Man kann also festhalten:

Potentialgradienten an den Rändern der Probe, verursacht durch das Einschlußpotential des Randes, führen bereits im Gleichgewicht zu gegenläufigen Strömen entlang gegenüberliegender Ränder, die sich in der Nettobilanz gegenseitig aufheben.

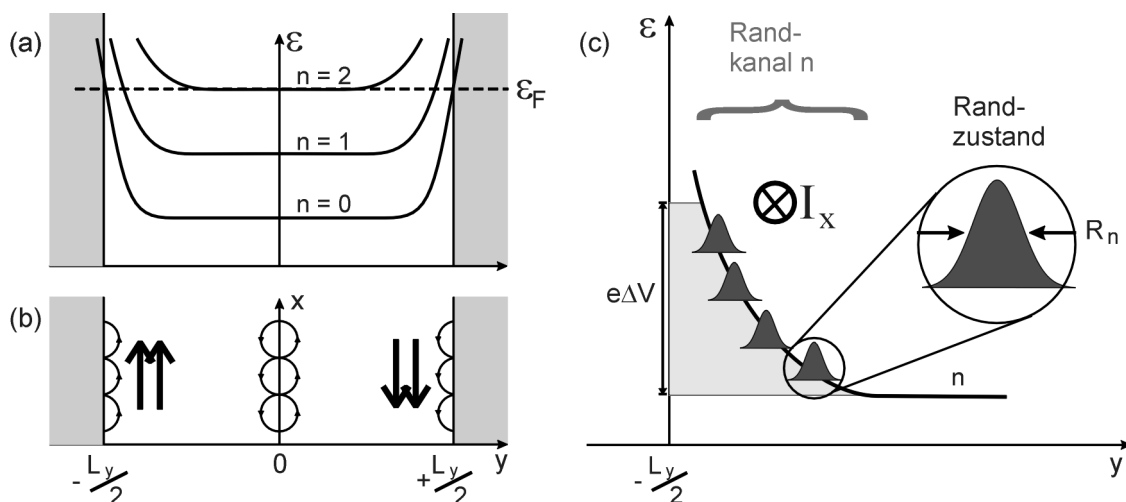


Abb. 5.3: (a) Angenommene Verbiegung der Landau-Niveaus an den Rändern eines 2DES durch das dortige Einschlußpotential. (b) Potentialgradienten sorgen für gegenläufige Stromdichten entlang gegenüberliegender Probenränder. Im klassischen Bild entspricht dies am Rand entlang reflektierten Elektronenbahnen („skipping orbits“). (c) Ein einzelner Randzustand ist auf eine Breite R_n gemäß (2.15) lokalisiert und daher quasi-eindimensional. Die Gesamtheit aller Randzustände eines Landau-Niveaus bilden den zugehörigen sogenannten Randkanal, der einen Strom I_x trägt, der nur von der Potentialspanne ΔV über $I_x = e^2/h\Delta V$ abhängt.

5.2.3 Hall-Spannung und Nichtgleichgewichtsströme

Im *Gleichgewicht* hat man es also mit lokalen Stromdichten zu tun, die sich integriert über die Probenbreite gegenseitig aufheben. Sie bilden daher unter Berücksichtigung der zweiten räumlichen Dimension in sich geschlossene Ströme. In Messungen zum elektrischen Transport wird eine elektrochemische Potentialdifferenz zwischen den Endkontakten vorgegeben. Experimentell findet man, daß dabei ein Nettostrom in der Probe fließt und eine Hall-Spannung zwischen den Rändern meßbar ist, sich das 2DES also im *Nichtgleichgewicht* befindet. Die intrinsische Potentiallandschaft muß sich dabei aufgrund der neuen Randbedingungen verändert haben. Gemäß Abschnitt 5.1 wird an Positionen mit Änderungen des Potentialgradienten auch ein Stromfluß erwartet. Da prinzipiell die Hall-Spannung – wenn vielleicht auch nicht monoton – über den Probenquerschnitt abfällt, ist damit immer ein gerichteter Gesamtstromfluß in eine Richtung verbunden. Zusammenfassend gilt daher:

Im Nichtgleichgewichtsfall einer zwischen den Endkontakten vorgegebenen elektrochemischen Potentialdifferenz kann aus der lokalen elektrostatischen Potentialänderung im Rahmen des beschriebenen Modells auf die lokal gegenüber dem Gleichgewicht geänderten Stromdichte geschlossen werden. Über den Probenquer-

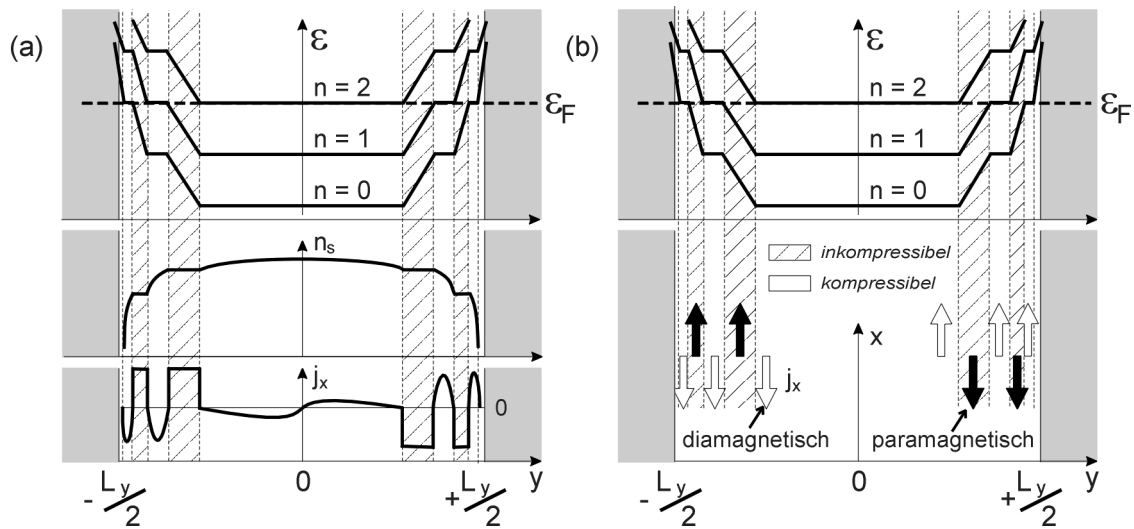


Abb. 5.4: (a) Randmodell im Gleichgewicht nach Geller und Vignale [75] in Erweiterung von Abb. 4.5. Die Spinaufspaltung ist nicht berücksichtigt, inkompressible Bereiche sind grau hinterlegt. Gezeigt sind die Verläufe des selbstkonsistenten elektrostatischen Potentials und der Elektronenkonzentration. Zusätzlich aufgeführt ist auch die lokale Stromdichte, die sich lokal in den einzelnen Streifen paramagnetisch ($\propto dV(y)/dy$) oder diamagnetischen ($\propto dn_s(y)/dy$) bei entgegengesetztem Vorzeichen verhält, wie in (b) nochmals deutlicher gekennzeichnet.

schnitt integriert ergibt sie einen Nettostrom.

Das Ergebnis erlaubt, die Stromverteilung aus den gemessenen Hall-Potentialprofilen abzuleiten und wird in Abschnitt 5.4 besprochen.

5.3 Dissipation durch Streuung an der Fermi-Energie

Wie mit Abschnitt 5.1 hergeleitet, kann ein aufgrund von elektrostatischen Potentialgradienten – verursacht durch Inhomogenitäten oder Probenränder – dissipationsfreier Strom im 2DES lokal fließen, sei es durch die Zustände unterhalb der Fermi-Energie oder durch besetzte Zustände an der Fermi-Energie.

Dies muß etwas korrigiert werden: Durch zusätzliche Einflüsse auf das System, etwa durch thermische Fluktuationen, durch Elektron-Elektron-Wechselwirkungen oder durch kurzreichweitige elektrostatische Streuzentren kommt es zu einer Streuung einzelner Elektronen, wenn diese dabei in unbesetzte Zustände übergehen können. Nach dem Ausschlußprinzip ist Streuung in vollständig besetzte Zustände *unterhalb* der Fermi-Energie nicht möglich, sondern nur in freie Zustände *an* oder *oberhalb* der Fermi-Energie. Elektronen an der Fermi-Energie, wo ener-

getisch dicht beieinander besetzte und unbesetzte Zustände vorliegen, werden also aufgrund zusätzlicher Einflüsse in ihrer Driftbewegung gestört. Wie verhält sich nun die Situation der Zustände an der Fermi-Energie bei veränderlichem Magnetfeld bzw. Füllfaktor?

5.3.1 Kompressible Netzwerke an der Fermi-Energie um halbzahlige Füllfaktoren

Anschaulich kann man sich das Auffüllen des obersten Landau-Niveaus, d.h. das Durchfahren der Fermi-Energie durch alle Zustände in der Potentiallandschaft, als Auffüllen einer realen Berg- und Tallandschaft mit einer Flüssigkeit vorstellen, wie in Abb. 5.5 für einen Ausschnitt aus dem Probeninneren veranschaulicht wird. Zusätzlich führt der selbstkonsistente Abschirm-einfluß der Elektronen untereinander in direkter Analogie zu Abschnitt 4.2.1 zu verbreiterten kompressiblen Streifen oder Gebieten an der Fermi-Energie ε_F , wann immer lokal das fluktuierende Potential der Landau-Niveaus die Fermi-Energie schneidet. Nur um das Zentrum eines Landau-Niveaus, d.h. bei halbzahligen Füllfaktoren existiert ein „perkolierendes“ kompressibles Netzwerk aus ausgedehnten Zuständen an der Fermi-Energie (Abb. 5.5(b)), das von einer Begrenzungslinie zur gegenüberliegenden Begrenzungslinie führt. Bei höherem oder niedrigerem Füllstand, d.h. mit der Fermi-Energie in den Flanken der verbreiterten Landau-Niveaus, sind dagegen die kompressiblen Gebiete lokal beschränkt (Abb. 5.5(a),(c)). Die Zwischengebiete weisen jeweils inkompressible Eigenschaften auf und entsprechen lokal ganzzahligen Füllfaktoren, während das elektrostatische Potential innerhalb dieser Gebiete entsprechend den Schwankungen im Störstellenpotential fluktuiert. Der bisher verwendete Füllfaktor des Probeninneren entspricht demnach strenggenommen nur einem gemittelten Wert der lokalen Füllfaktoren. Wie erwähnt kann eine Streuung nur von einem besetzten in einen unbesetzten Zustand erfolgen, d.h. also nur zwischen Zuständen des kompressiblen 2DES-Anteils an der Fermi-Energie, wo besetzte und unbesetzte Zustände energetisch dicht beieinander liegen.

Ein Streuprozeß über die ganze Probendimension, d.h. also auch von einem Kontakt zum anderen oder von einer Probenseite zur anderen, kann darüberhinaus nur bei Vorhandensein eines ausgedehnten verästelten Netzwerks kompressibler Gebiete an der Fermi-Energie bei halbzahligen Füllfaktoren (Abb. 5.5(b)) möglich werden.

Die Möglichkeit der Streuung hat eine wichtige Konsequenz – es ist ein elektrischer Widerstand damit verbunden, wie im folgenden erläutert.

5.3.2 Rückstreuung und Dissipation im Nichtgleichgewicht

Im Nichtgleichgewichtsfall für einen von außen durch die vorhandene Hall-Spannung aufgeprägten Potentialgradienten ist ein mit Streuung verbundener Stromtransport im Probeninneren

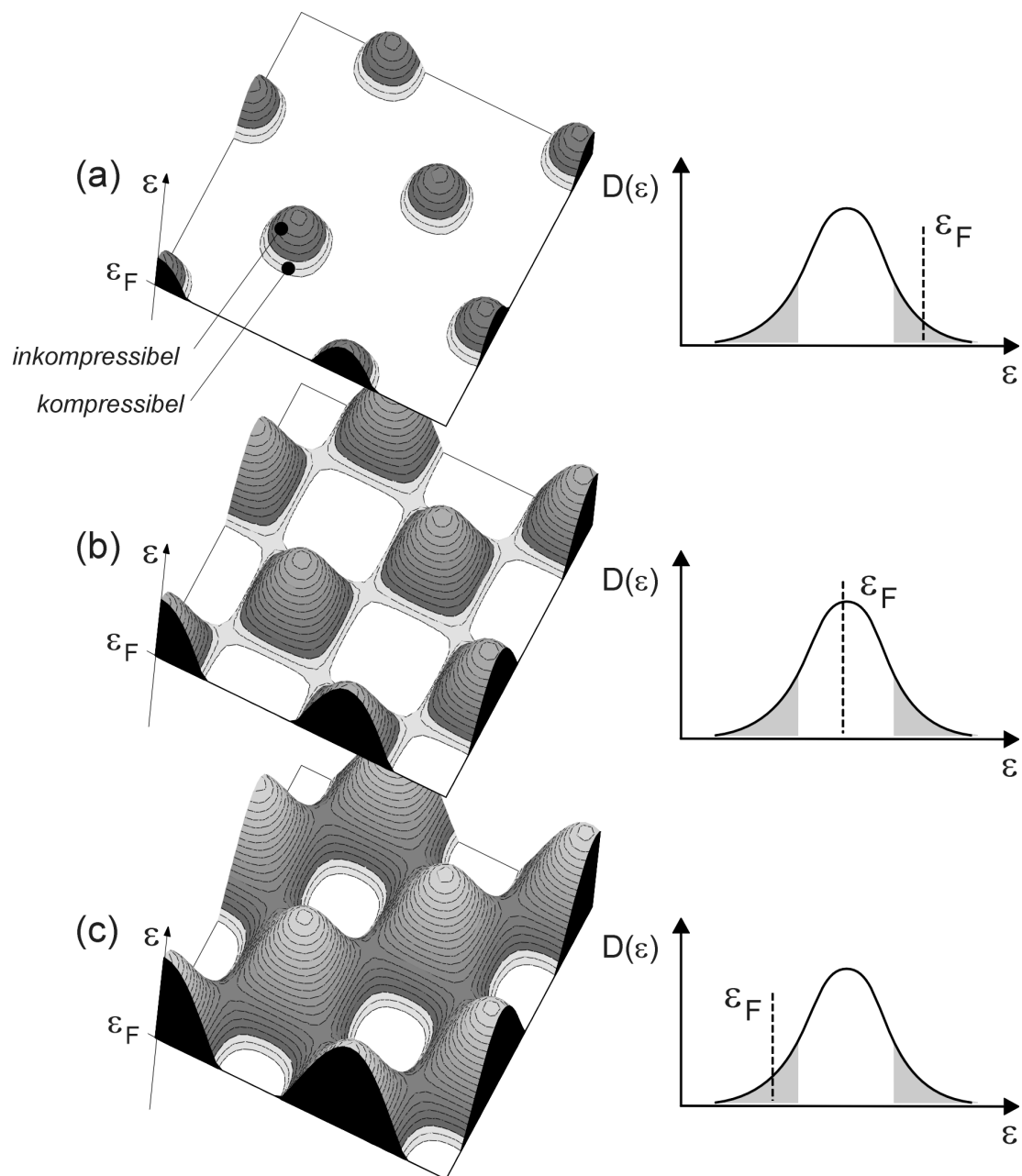


Abb. 5.5: Schematische Potentialfluktuationen im obersten Landau-Niveau in einem Ausschnitt des Probeninneren ohne Berücksichtigung von Randeffekten. Einfachheitshalber wurde eine regelmäßige Potentiallandschaft gewählt. Dargestellt sind drei verschiedene Füllfaktoren ν die unterschiedlichen Fermi-Energien ϵ_F entsprechen und als Füllstand der Potentiallandschaft dargestellt sind. Es kommt selbstkonsistent zur Ausbildung kompressibler und inkompressibler Bereiche im 2DES. (a) Durchschnittlicher Füllfaktor ν knapp unterhalb ganzzahliger Werte: Kompressible Bereiche existieren um einzelne Potentialkuppen. Sie sind gegeneinander isoliert. (b) Durchschnittlich halbzahliger Füllfaktor: Ausgedehntes kompressible Netzwerk ist vorhanden. (c) Durchschnittlicher Füllfaktor knapp oberhalb ganzzahliger Werte: Kompressible Bereiche existieren isoliert um Potentialtäler.

in einem solchen Netzwerkmodell kompressibler Strompfade z.B. von Chalker und Coddington [78], Chklovskii *et al.* [76], Fogler *et al.* [79], und Oswald [80] beschrieben worden. Dabei kann an jedem Knotenpunkt des Netzwerks eine füllfaktorabhängige Transmissionswahrscheinlichkeit angenommen werden. Wie in Abb. 5.6 verdeutlicht wird, kann es dabei passieren, daß ein Elektron, das vom stromeinspeisenden Kontakt in die Probe injiziert wurde und dem kompressiblen Netzwerk folgt, wieder in den Ausgangskontakt *zurückgestreut* wird. Dieses Elektron ist daher für den extrinsischen Stromtransport „verloren“ gegangen. Nach dem Landauer-Büttiker-Formalismus [31] (s. Abschnitt 9.2.2) muß einem solchen System mit Rückstreuung ein elektrischer Widerstand zugeordnet werden, so daß der Stromtransport widerstandbehaftet und damit *dissipativ* geworden ist ². Sind insbesondere die gegenüberliegenden Randbereiche der Probe, die den Elektronen entgegengesetzte Driftbewegung aufprägen, durch ein Netzwerk an ausgedehnten Zuständen an der Fermi-Energie verbunden, so findet aufgrund der gegenläufigen Potentialgradienten an gegenüberliegenden Rändern sicherlich Rückstreuung statt.

Zusammenfassung: dissipative und dissipationfreie Ströme im Probeninneren

In Abb. 5.7 ist die Entwicklung dissipativer und dissipationsloser Stromanteile bei Auffüllen des obersten Landau-Niveaus und gleichzeitig bereits vollständig besetztem unteren Niveau im Probeninneren verdeutlicht. Dabei soll eine extern vorgegebene Hall-Spannung ΔV über das skizzierte Gebiet abfallen. Unabhängig von den Details der sich selbstkonsistent ausbildenden kompressiblen Gebiete beim Durchschieben der Fermi-Energie liegen im vollständig besetzten Landau-Niveau immer ausgedehnte Zustände unterhalb von ε_F vor, die gemäß (5.9) einen festen, dissipationslosen Beitrag zum Hall-Strom liefern. Im obersten Niveau ist zunächst keinerlei Stromfluß möglich (Abb. 5.7(a)), da Zustände unterhalb und direkt bei ε_F lokalisiert sind. Erst bei im Durchschnitt halbzahligen Füllfaktoren (Abb. 5.7(b)) kommt es zu einem kompressiblen Netzwerk und damit zu Rückstreuung. Bei noch höherem ν sind die kompressiblen Zustände bei ε_F wieder lokalisiert (Abb. 5.7(c)), die nun bereits besetzten ausgedehnten Zustände unterhalb von ε_F können nun aber ebenfalls einen dissipationsfreien Beitrag zum Strom leisten, so daß sich der Hall-Strom gemäß (5.9) nun um $e^2/h \cdot \Delta V$ erhöht hat. Durch weitere Erhöhung des Füllfaktors werden wiederum nur lokalisierte Zustände besetzt, so daß der Gesamt-Hall-Strom unverändert bleibt. Es kommt daher über einen ausgedehnten Magnetfeldbereich zu einem gleichbleibenden Hall-Strom. Das Störstellenpotential ist demnach essentiell zur Erklärung der Quanten-Hall-Plateaus!

²Das Verhalten des Probeninneren kann anhand lokaler Leitfähigkeitsmodelle beschrieben werden, bei denen eine lokale Verknüpfung der Stromdichte mit dem lokalen elektrischen Feld über einen lokalen Leitfähigkeitstensor angenommen wird. Durch Rückstreuung kommt es daher zu einem Anstieg des lokalen Magnetowiderstandes ρ_{xx} . Im allgemeinen muß aber nicht diese lokale Verknüpfung zwischen \mathbf{j} und \mathbf{E} vorliegen!

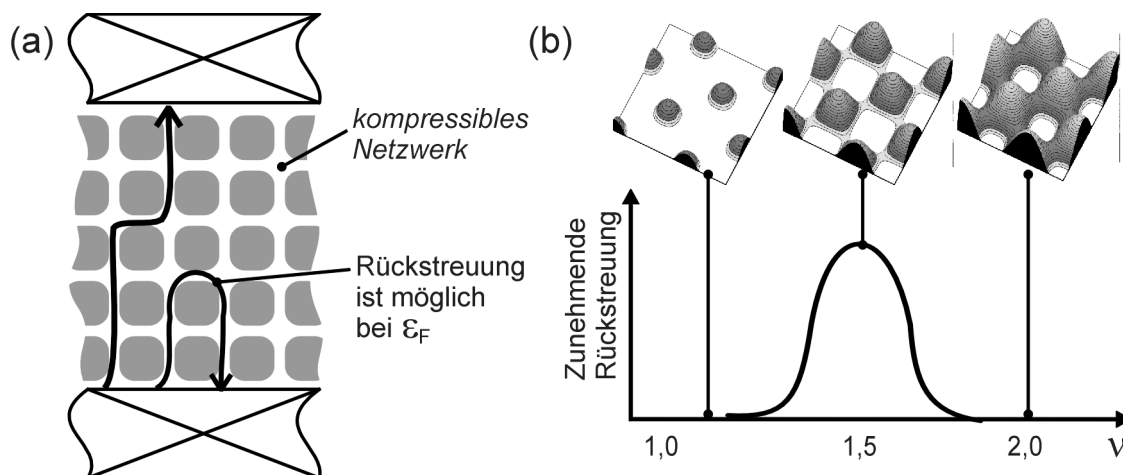


Abb. 5.6: Verdeutlichung von Rückstreuung an der Fermi-Energie im obersten Landau-Niveau. (a) Nur um durchschnittlich halbzahlige Füllfaktoren herum kann es zu Rückstreuung entlang des ausgedehnten kompressiblen Netzwerkes kommen, d.h. zu einer Elektronenbewegung zurück zum injizierenden Kontakt. Nach dem Landauer-Büttiker-Formalismus [31] muß einem solchen System mit Rückstreuung ein elektrischer Widerstand zugeordnet werden. (b) Ein geschlossenes Netzwerk ausgedehnter Zustände an der Fermi-Energie ist symmetrisch um halbzahlige Füllfaktoren zu finden, so daß es in diesem Bereich zu erhöhter Rückstreuung kommt. Weiter weg vom halbzahligen Füllfaktor ist das Netzwerk aufgebrochen und Rückstreuung nicht mehr möglich. Dies ist besonders ausgeprägt um ganzzahlige Füllfaktoren.

5.4 Zusammenführung zu einem Gesamtmodell und Interpretation der gemessenen Hall-Potentialprofile

Wir haben nun die Grundlagen, um die gemessenen Hall-Potentialprofile zu interpretieren. Das im folgenden beschriebene Modell muß einerseits die kompressiblen und inkompressiblen Randstreifen, andererseits auch die Potentialfluktuationen im Inneren des 2DES berücksichtigen. Es wird sich zeigen, daß es dabei in Abhängigkeit des Füllfaktors zu reinen Rand- oder „bulk“-Strömen oder auch kombinierten Stromverteilungen kommen kann. Aus der Interpretation der Meßdaten schließen wir, daß sowohl die ausgedehnten Zustände an der Fermi-Energie entlang der Ränder, als auch perkolierender Strompfade im Inneren der Probe essentiell sind.

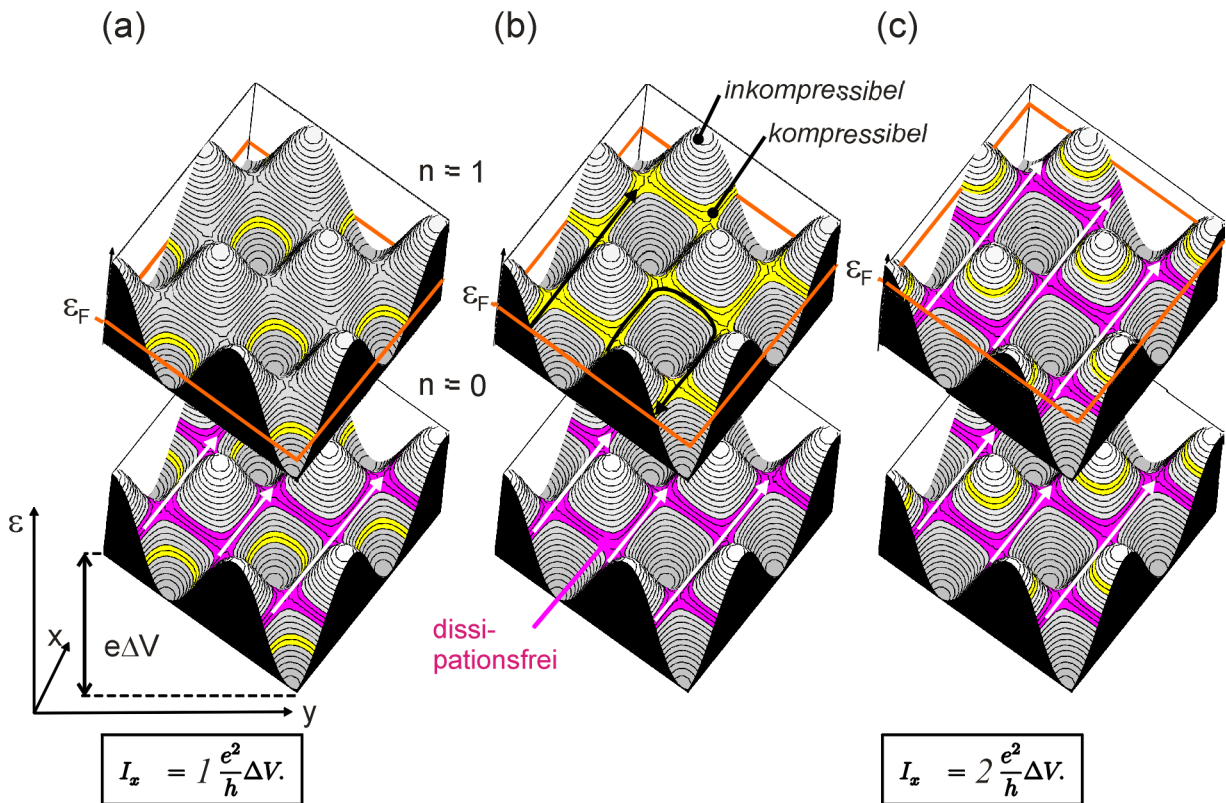


Abb. 5.7: Schematische Betrachtung eines vollständig und eines teilweise gefüllten Landau-Niveaus bei vorhandenem Störstellenpotential im Probeninneren und extern vorgegebener Hall-Spannung. Mit Änderung von ε_F ändern sich selbstkonsistent die kompressiblen Gebiete innerhalb beider Landau-Niveaus. Unabhängig davon kommt es im vollständig besetzten Niveau in den ausgedehnten Gebieten zu einem dissipationsfreien Stromfluß, gegeben durch $I_x = e^2/h \cdot \Delta V$. Mögliche Driftpfade sind durch Pfeile angedeutet. Im obersten Niveau ist (a) zunächst keinerlei Stromfluß möglich, da Zustände unter und direkt bei ε_F lokalisiert sind. (b) Erst im Landau-Niveauzentrum kommt es innerhalb des gebildeten kompressiblen Netzwerks zu Rückstreuung und damit zu einem dissipativen Stromfluß. (c) Bei noch höherem ν sind die kompressiblen Zustände bei ε_F wieder lokalisiert, die nun bereits besetzten ausgedehnten Zustände unterhalb von ε_F können nun aber ebenfalls einen dissipationsfreien Beitrag zum Strom leisten.

5.4.1 Potentialprofiltyp III knapp oberhalb ganzzahliger Füllfaktoren

In Abb. 5.8 wird das experimentell bestimmte Potentialprofil vom Typ III knapp oberhalb ganzzahliger Füllfaktoren der Verbiegung der Landau-Niveaus und dem selbstkonsistenten Verlauf des elektrochemischen Potentials und der Stromdichte gegenüber gestellt. Lokal betrachtet entspricht der Verlauf der Landau-Niveaus in Gegenwart des Störstellenpotentials dem in Abb.

5.2 dargestellten Bild. Ein über viele Probenpositionen gemittelter Effekt läßt sich am besten darstellen als im Probenzentrum verbreiterte Landau-Niveaus mit ausgedehnten Zuständen im Zentrum und lokalisierten Zuständen in den Flanken (dunkelgrau markiert). Das in seiner Position ebenfalls fluktuierende Randpotential ist in dieser Darstellung allerdings weiterhin lokal scharf gezeichnet. Unabhängig vom Störstellenpotential werden entlang des Randes immer ausgedehnte kompressible Streifen an der Fermi-Energie ε_F existieren. Das Störstellenpotential sorgt aber dafür, daß ε_F im Probeninneren nicht mehr an einer festen Energie „gepinnt“ ist, sondern die gesamte Breite des verbreiterten Landau-Niveaus durchlaufen kann.

Für Profiltyp III wird ein großer Potentialabfall nur über die Bereiche der inkompressiblen Streifen bei flach verlaufender Probenmitte beobachtet (s. Abb. 5.8(a)). Dies bedeutet, daß eine Modifikation des elektrostatischen Potentials nur im Bereich der Ränder auftritt, der Potentialverlauf des Probeninneren aber durch die Hall-Spannung nicht geändert wird. Da die Änderung des chemischen Potentials durch die Hall-Spannung nur gering ist, wird sich die Änderung des elektrostatischen Potentials auch deutlich im elektrochemischen Potential widerspiegeln, wie in Abb. 5.8(b) verdeutlicht. Was bedeutet dies nun für die Stromverteilung? Obwohl in der Probenmitte ein kompressibles Netzwerk an der Fermi-Energie vorhanden ist (vgl. Abb. 5.7(b)), ist der Potentialabfall über diesen Bereich fast null – es scheint nahezu kein Strom entlang des Probeninneren zu fließen. Vielmehr wird dank der starken Entkopplung zwischen Rand und Probenmitte ein dissipativer Stromfluß im Probeninneren vermieden und stattdessen fließt der eingepreßte Strom bevorzugt dissipationfrei in den inkompressiblen Randstreifen über die ausgedehnten Zustände der vollständig besetzten Landau-Niveaus unterhalb der Fermi-Energie (s. Abb. 5.8 (c)). Er ist dabei gleichmäßig auf beide Probenränder verteilt. Das widerstandsbehafete Probeninnere ist über die Randbereiche kurzgeschlossen.

5.4.2 Potentialprofiltyp I knapp unterhalb ganzzahliger Füllfaktoren

Mit steigendem Füllfaktor verschieben sich die inkompressiblen Streifen näher zum Rand und werden schmaler. Die elektrochemische Entkopplung zwischen Rand und Probenmitte sinkt, so daß verstärkt Streuung zwischen Rand und Probenmitte stattfinden kann, d.h. die Wahrscheinlichkeit dafür steigt, daß ein Elektron vom Rand aus in freie Zustände innerhalb des kompressiblen Netzwerkes (s. Abb. 5.7(b)) im Probeninneren gelangen kann. Von hier aus kann es leicht zum injizierenden Stromkontakt zurückgestreut werden, so daß der damit verbundene Stromfluß zunehmend dissipativ wird. Der Strom verschiebt sich dabei anteilig immer mehr vom reinen dissipationfreien Randstrom zum dissipativen „Bulk“-strom, bis es schließlich mit ansteigender Rückstreuwahrscheinlichkeit sinnvoll wird, den Strom über die gesamte Probenmitte entlang des kompressiblen Netzwerkes zu transportieren, um den Gesamtwiderstand zu minimieren. Dadurch kommt es schließlich zu einem linearen Potentialabfall über die gesamte Probenbreite. Der Randeinfluß spielt in diesem Bereich nur noch eine geringe Rolle und der

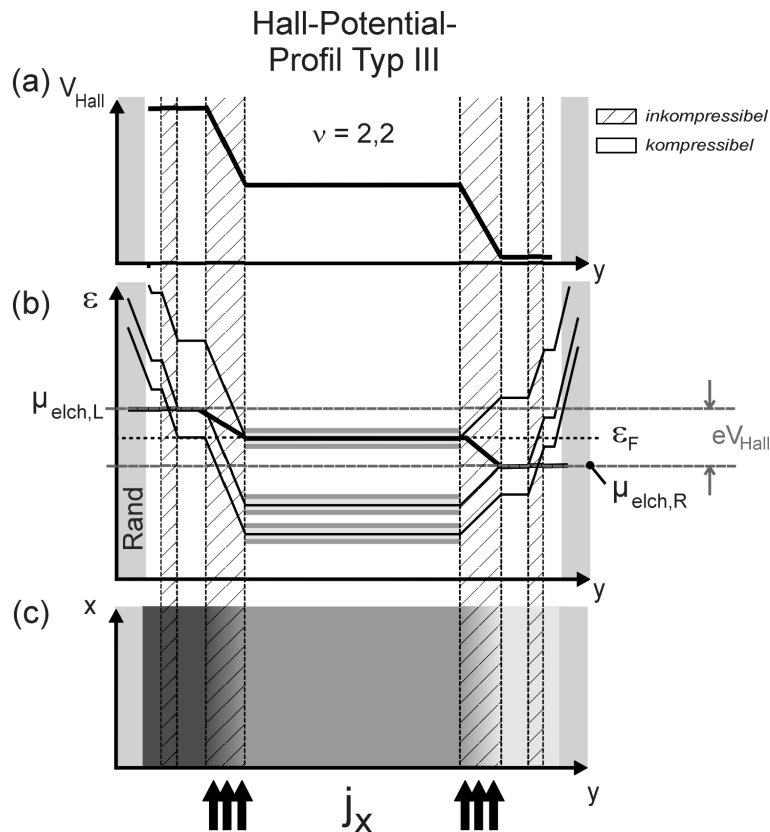


Abb. 5.8: Hall-Potentialprofiltyp III. Die Positionen kompressibler und inkompressibler Bereiche sind durchgehend markiert. (a) Schematisch der experimentell bestimmte Hall-Potentialverlauf für $\nu = 2,2$. (b) Schematisch die Verbiegung der Landau-Niveaus durch die Hall-Spannung. Die Verbreiterung der Niveaus im Probeninneren ist durch graue Bereiche angedeutet. Die dicke schwarze Linie markiert den Verlauf des elektrochemischen Potentials, wie es als Hall-Potentialprofil gemessen wurde. (c) Aufsicht auf einen Probenabschnitt: Das Potentialprofil ist als Graustufenskala dargestellt. Der Strom fließt dissipationfrei in den innersten inkompressiblen Streifen (schwarze Pfeile).

Stromfluß wird allein durch die Gesetzmäßigkeit des kompressiblen Netzwerks im Probeninneren bestimmt.

5.4.3 Potentialprofiltyp II bei ganzzahligen Füllfaktoren

Bei weiterer Erhöhung des Füllfaktors zu ganzzahligen Werten hin fällt die Hall-Spannung nichtlinear über den mittleren Probenbereich ab, während das Profil am Rand nun flach verläuft (s. Abb. 5.10(a)). Das elektrostatische Potential ist gegenüber dem Gleichgewicht über das gesamte Probeninnere modifiziert (5.10(b)), so daß ein Nettostrom im Probeninnern getrieben

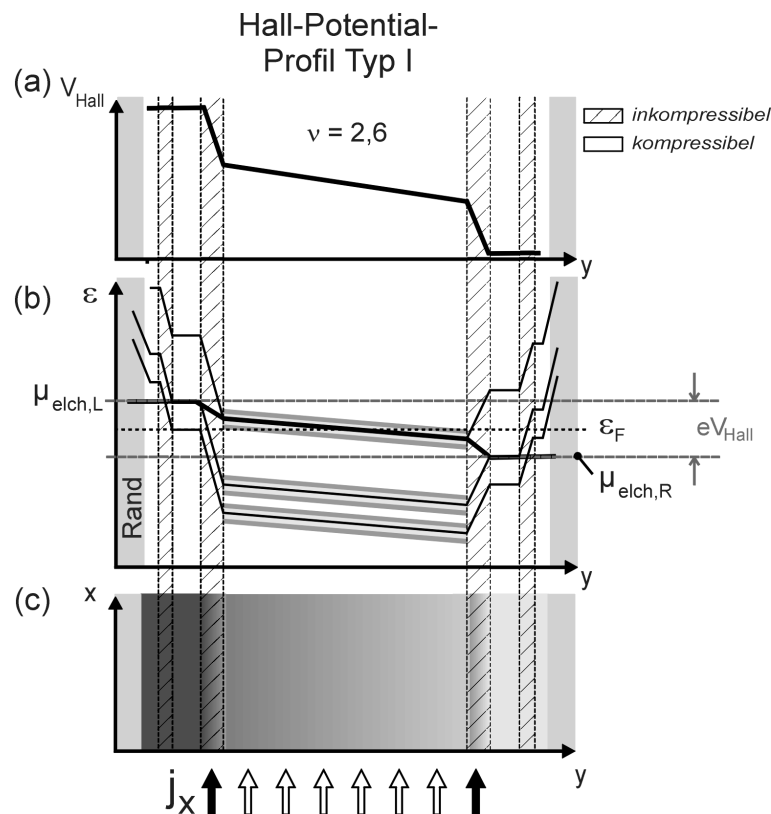


Abb. 5.9: Hall-Potentialprofiltyp I. Die Positionen kompressibler und inkompressibler Bereiche sind durchgehend markiert. (a) Schematisch der experimentell bestimmte Hall-Potentialverlauf für $\nu = 2,6$. (b) Schematisch die Verbiegung der (verbreiterten) Landau-Niveaus durch die Hall-Spannung. Die dicke schwarze Linie markiert den Verlauf des elektrochemischen Potentials, wie es als Hall-Potentialprofil gemessen wurde. Die Entkopplung zwischen Rand und Probeninneren ist reduziert und ein zunehmender Anteil des Potentials fällt über das Probeninnere ab. (c) Aufsicht auf einen Probenabschnitt: Das Potentialprofil ist als Graustufenskala dargestellt. Der Strom fließt zunehmend dissipativ entlang des kompressiblen Netzwerkes im Probeninneren (weiße Pfeile).

wird. Allerdings ist bei diesen Füllfaktoren bereits kein kompressibles Netzwerk mehr bei ϵ_F im Probeninnern vorhanden, und es liegt ein rein dissipationsfreier „Bulk“-Strom in ausgedehnten Zuständen unterhalb von ϵ_F vor, wie in Abb. 5.7(c) verdeutlicht ist.

Zum Verständnis der Potentialprofile sind zwei Dinge wesentlich: Die Rolle der kompressiblen Randstreifen und der Einfluß des Störstellenpotentials. Die kompressiblen Randstreifen tragen die elektrochemischen Potentiale $\mu_{\text{elch,L}}$ und $\mu_{\text{elch,R}}$ der stromeinspeisenden Kontakte durch die Chiralität der Zyklotronbewegung entlang der Probenränder in das Innere der Probe (s. Abb. 5.10(d)). Dadurch wird erst die Hall-Spannung als Unterschied in den elektrochemischen Po-

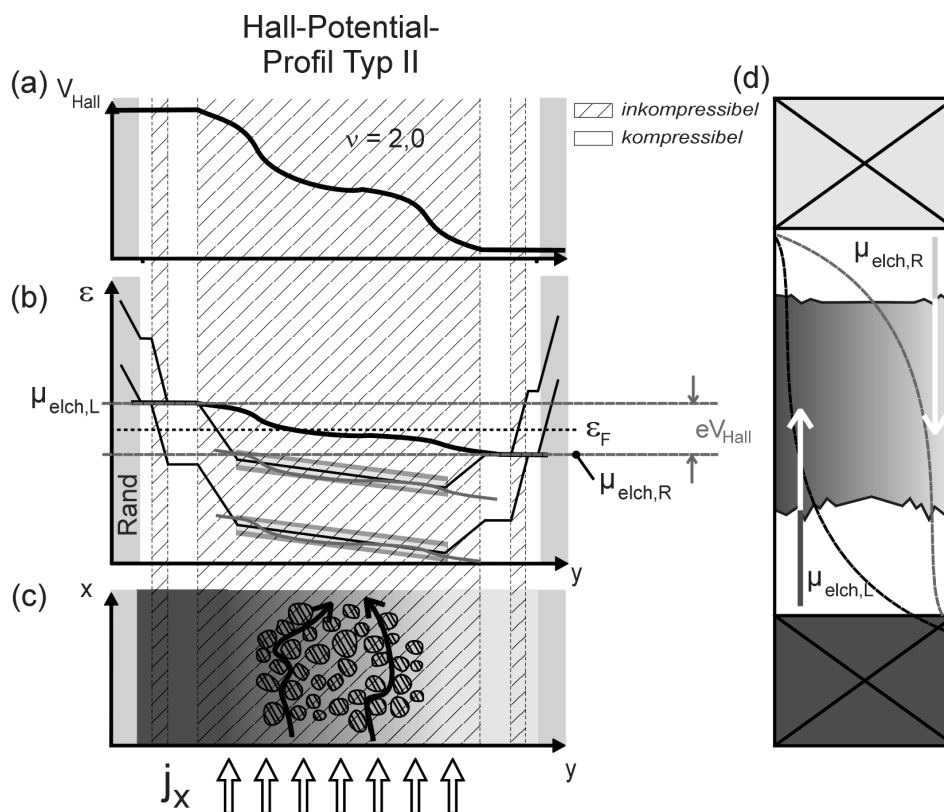


Abb. 5.10: Hall-Potentialprofiltyp II. Die Positionen kompressibler und inkompressibler Bereiche sind durchgehend markiert. (a) Schematische der experimentell bestimmter Hall-Potentialverlauf für $\nu = 2,0$. (b) Schematisch die Verbiegung der (verbreiterten) Landau-Niveaus durch die Hall-Spannung. Die dicke schwarze Linie markiert den Verlauf des elektrochemischen Potentials, wie es als Hall-Potentialprofil gemessen wurde. Dünne graue Linien skizzieren den Einfluß von Potentialfluktuationen (c) Aufsicht auf einen Probenabschnitt: Das Potentialprofil ist als Graustufenskala dargestellt. Der Strom fließt dissipationsfrei in der Probenmitte in den inkompressiblen Zuständen, getrieben von den lokal durch die Hall-Spannung geänderten Potentialgradienten zwischen den kompressiblen Potentialpfützen. (d) Dabei kommt den kompressiblen Randstreifen die Aufgabe zu, die i.a. unterschiedlichen elektrochemische Potentiale der Kontakte in die Probe hinein zu tragen.

tentialen zwischen den Probenrändern in y -Richtung definiert, so daß sich ein Potentialgradient über die Probenbreite ausbilden kann. Der schlechtleitende, hauptsächlich inkompressible Mittelbereich der Probe ist durch den Einfluß des fluktuierenden Störstellenpotentials von kompressiblen, metallischen Bereichen mit freien Zuständen an der Fermi-Energie durchsetzt (vgl. Abschnitt 5.3.1). Elektronische „hopping“-Prozesse zwischen den kompressiblen Rand-

streifen und diesen kompressiblen Bereichen oder Deformationen der kompressiblen Bereiche führen zur Ausbildung eines stark positionsabhängigen elektrochemischen Potentialgradienten über die gesamte Probenbreite mit entsprechenden Änderungen im elektrostatischen Potentialverlauf. Das Potentialprofil verläuft konstant innerhalb eines kompressiblen Bereiches, steigt oder fällt dazwischen aber in Abhängigkeit der relativen Potentialdifferenzen zum benachbarten kompressiblen Bereich. Der Strom wird lokal in solchen Bereichen durch nichtverschwindende transversale Potentialgradienten längs der Probe in den Zuständen unterhalb der Fermi-Energie getrieben und folgt dabei teilweise stark gekrümmten Pfaden innerhalb des Probeninneren (s. Abb. 5.10 (c)). Betrachtet man unter diesem Gesichtspunkt nochmals Abb. 4.4, so wird deutlich, daß es hier zufällig zu einer Kopplung einzelner kompressibler Bereiche untereinander und zum Potential der Ränder in Form einer Potentialhalbinsel gekommen ist. Dabei kann es lokal auch zu einer Umkehr der Stromrichtung kommen, so daß der Strom lokal die Potentialhalbinsel umfließt.

Dieser dissipationsfreie Stromfluß bleibt bei weiterer Füllfaktorhöhung zunächst erhalten, solange im nächsthöheren Landau-Niveau nur lokalisierte kompressible Bereiche bei ε_F vorliegen (vgl. Abb. 5.7(a)). Diese Abfolge wiederholt sich schließlich beim Auffüllen weiterer Landau-Niveaus.

5.4.4 Keine Substruktur der äußeren Streifen für Potentialprofiltyp III

Betrachtet man die Potentialprofile aus Abb. 4.3 nochmals genauer, so fällt auf, daß innerhalb der Auflösung für den Potentialprofiltyp III keine klar erkennbaren Potentialstufen an den Positionen der äußeren inkompressiblen Streifen auftreten. Warum ist das zu erwarten?

- Für ganzzahlige Füllfaktoren liegt in allen kompressiblen Randstreifen das elektrochemische Potential des einspeisenden Kontaktes vor - unabhängig davon, ob sie untereinander entkoppelt sind oder nicht. Alle Randstreifen bilden daher ein Äquipotentialgebiet.
- Erst für nichtganzzahlige Füllfaktoren kommt es zu einer Kopplung zwischen Rand und Probeninnerem, damit zu Rückstreuung und damit zu einem Abfall des elektrochemischen Potentials entlang des Probenrandes. Die Entkopplung zwischen zwei benachbarten kompressiblen Streifen nimmt dabei von innen nach außen mit abnehmender Streifenbreite ab. Etwaige transversale Potentialstufen sollten daher für den äußersten inkompressiblen Rand sehr klein sein und maximal werden über den innersten inkompressiblen Streifen.

Das experimentelle Ergebnis legt nahe, daß die Entkopplung durch diese innersten Streifen so sehr überwiegt, daß etwaige Potentialstufen über äußere Streifenbereiche unterhalb einer sicheren Nachweisgrenze liegen, oder daß alle äußeren Streifen untereinander im Gleichgewicht sind und identisches Potential tragen.

5.4.5 Gesamtüberblick über die Füllfaktorentwicklung der Hall-Potentialprofile und der Stromverteilung

Die selbstkonsistente Entwicklung des Hall-Potentialabfalls und damit der Verbiegung der Landau-Niveaus mit ansteigendem Füllfaktor ist in Abb. 5.11 zusammengefaßt. Zusätzlich ist auch das Zerfallen der Potentiallandschaft in kompressible und inkompressible Bereiche verdeutlicht und durch einzelne Pfeile exemplarisch möglich Driftpfade an der Fermi-Energie innerhalb des kompressiblen Netzwerkes dargestellt. Rückstreuprozesse sind gestrichelt angedeutet. Sie führen zu einem widerstandbehafteten Probeninneren. Die lokale externe Stromdichte ist in der jeweils untersten Zeile durch schwarze Pfeile für Randströme und weiße Pfeile für „Bulk“-Ströme verdeutlicht. Dicht gezeichnete Pfeile markieren große Stromdichten. Es kommt dabei zu der dargestellten zyklischen Abfolge der lokalen Potentialabfalländerung bei gleichzeitiger Erhöhung der Anzahl der Landau-Niveaus und damit der kompressiblen und inkompressiblen Randstreifen. Der Strom verändert sich dabei allmählich von nahezu reinem Randstrom (Abb. 5.11(a)) innerhalb der inkompressiblen Streifen über zusätzliche dissipative Stromanteile im Probeninneren bei kleinerer Streifenbreite und damit erhöhter Streuung (s. Abb. 5.11(b)) zu reinem dissipativen „Bulk“-Strom innerhalb des kompressiblen Netzwerkes (Abb. 5.11(c)). Nur um ganzzahlige Füllfaktoren innerhalb eines Quanten-Hall-Plateaus findet der Transport ausschließlich in vollständig besetzten Niveaus innerhalb des inkompressiblen Probeninneren statt (s. Abb. 5.11(d)). Bei höheren Füllfaktorwerten kommen weitere Randstreifen dazu und das prinzipielle Verhalten wiederholt sich bis zum Erreichen des nächsten Plateaus (s. Abb. 5.11(e) und (f)).

Die experimentellen Ergebnissen zur Hall-Potentialverteilung und den Transportgrößen R_{xy} und R_{xx} sind in Abb. 5.12 zusammen mit der Interpretation der Stromverteilung zusammenfassend dargestellt. Markiert sind nochmals die drei verschiedenen Potentialprofilbereiche I bis III. Die damit verbundenen lokale Stromdichten sind schematisch als Pfeile markiert. Die Pfeildichte soll wiederum die Größe der Stromdichte verdeutlichen.

5.5 Zusammenfassung

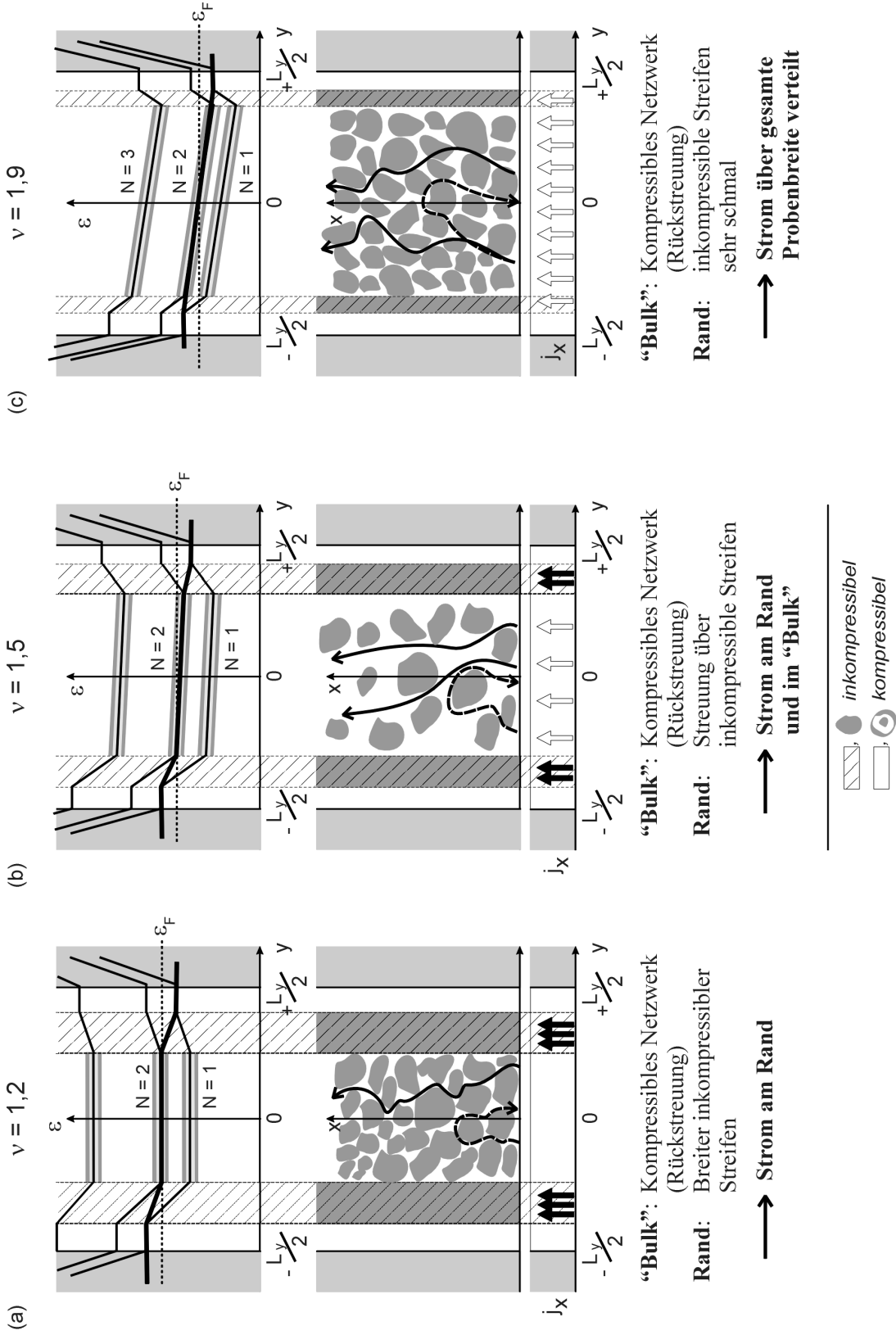
Zur Interpretation der Stromverteilung ist von zentraler Bedeutung, daß der quantenmechanische Erwartungswert der Stromdichte in x -Richtung direkt proportional ist zum elektrostatischen Potentialgradienten in y -Richtung. Die Elektronenbewegung entspricht der klassischen Erwartung in gekreuzten Feldern und folgt jeweils entlang von Äquipotentiallinien. Der Proportionalitätsfaktor setzt sich zusammen aus dem lokalen Füllfaktor ν_{lokal} und dem Fundamentalwert e^2/h . Der Gesamtstrom durch einen Querschnitt des 2DES hängt dabei nur von der elektrostatischen Potentialdifferenz in y -Richtung ab. Vollständig besetzte Landau-Niveaus un-

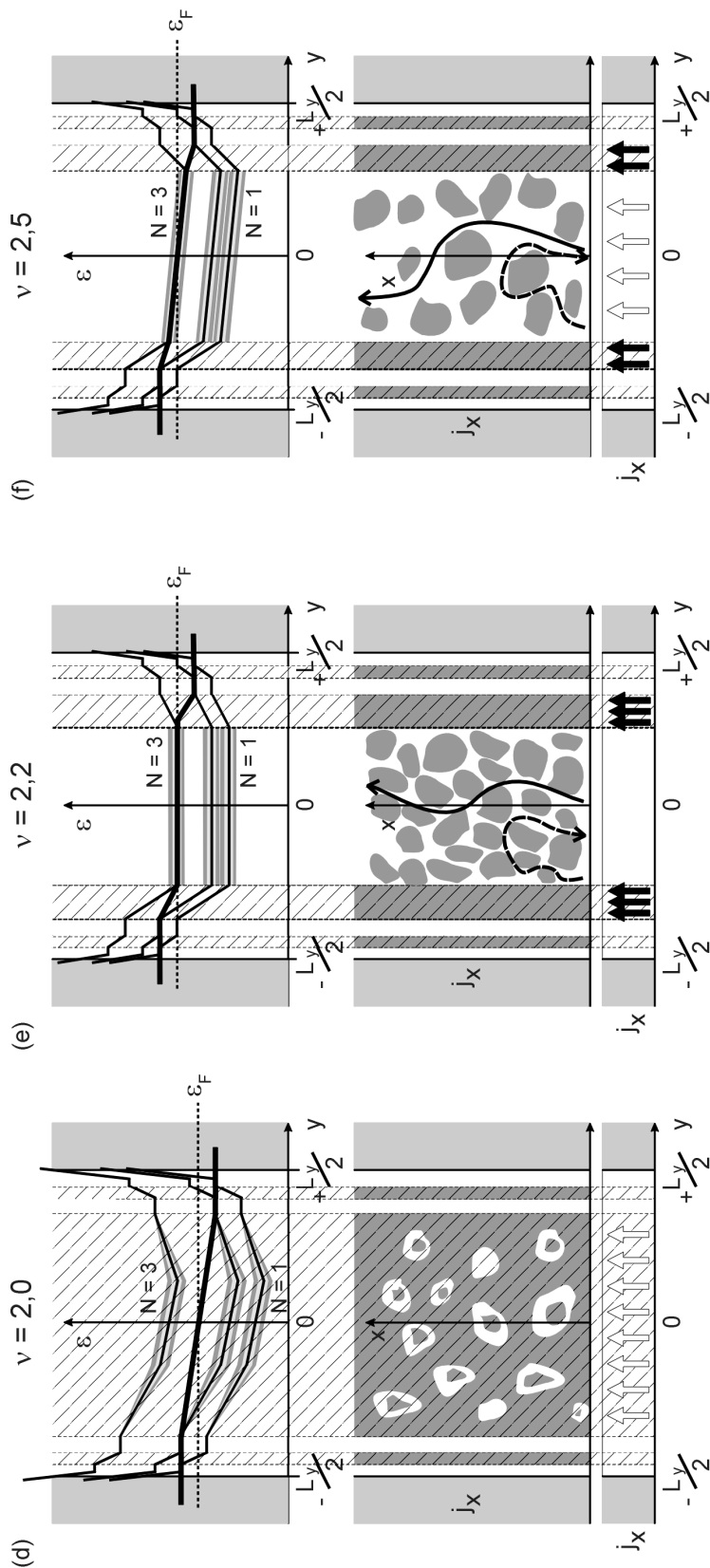
terhalb der Fermi-Energie können daher einen exakt in e^2/h quantisierten Strombeitrag tragen. Potentialgradienten können intrinsischer Natur sein und im Falle der immer vorhandenen Potentialfluktuationen zu lokal begrenzten Strömen oder aber ausgedehnten Strömen innerhalb des Probeninneren führen. Ebenso resultiert das Randpotential der Probe bereits im Gleichgewichtsfall an gegenüberliegenden Rändern zu jeweils gegenläufigen intrinsischen Randströmen. Selbstkonsistent betrachtet zerfällt das 2DES jeweils in inkompressible Bereiche mit ganzzahligem ν und Zuständen unterhalb von ε_F und kompressiblen Zwischengebieten mit zusätzlichen Zuständen an ε_F . Die Eigenschaften des „Bulk“, und die Breite der innersten inkompressiblen Streifen bestimmen das Füllfaktorverhalten des Hall-Spannungabfalls und damit der lokalen Stromdichte.

Zusammenfassend gilt also für den **Nettostrom** entlang der Probe:

- Für *ganzzahlige* ν liegt ein dissipationsloser Strom **im Inneren** der Probe vor. Er wird von ausgedehnten Zuständen unterhalb der Fermi-Energie in inkompressiblen Bereichen getragen.
- Für ν *knapp oberhalb ganzzahliger Werte* liegt großenteils ein dissipationsfreier **Randstrom** innerhalb der innersten inkompressiblen Streifen vor.
- Für ν *knapp unterhalb ganzzahliger Werte* liegt ein dissipativer Strom über die **ganze Probenbreite** vor. Er wird nur vom obersten Landau-Niveau mit Zuständen an der Fermi-Energie getragen. Alle vollbesetzten Niveaus darunter tragen weiterhin einen dissipationsfreien Strom.

Abb. 5.11: (Folgende Doppelseite) Selbstkonsistente Füllfaktorentwicklung der Landau-Niveaus, der Potentiallandschaft und der Stromverteilung. Jeweils oberer Teil: Dargestellt ist die durch die Hall-Spannung modifizierte Landau-Niveauverbiegung, deren Verbreiterung im Probeninneren durch graue Bereiche angedeutet wird. Die dicke schwarze Linie gibt den Verlauf des elektrochemischen Potentials wieder. Unterer Teil: Dargestellt ist die Potentiallandschaft bestehend aus kompressiblen und inkompressiblen Bereichen und mögliche Driftpfade im Probeninneren an der Fermi-Energie. Die lokale externe Stromdichte ist in der jeweils untersten Grafik verdeutlicht (näheres siehe Text).





(f)

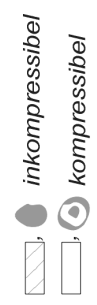
(e)

(d)

“Bulk”: Kompressibles Netzwerk (Rückstreuung)
Rand: Streuung über inkompressible Streifen
 → **Strom am Rand und im “Bulk”**.
 Verhalten wie in (b)

“Bulk”: Kompressibles Netzwerk (Rückstreuung)
Rand: Stark entkoppelt durch neuen inkompressiblen Streifen
 → **Strom am Rand, Verhalten wie in (a)**

“Bulk”: weitgehend inkompressibel
 → **Strom dissipationsfrei durch lokale Potentialgradienten zwischen kompressiblen Bereichen getrieben.**



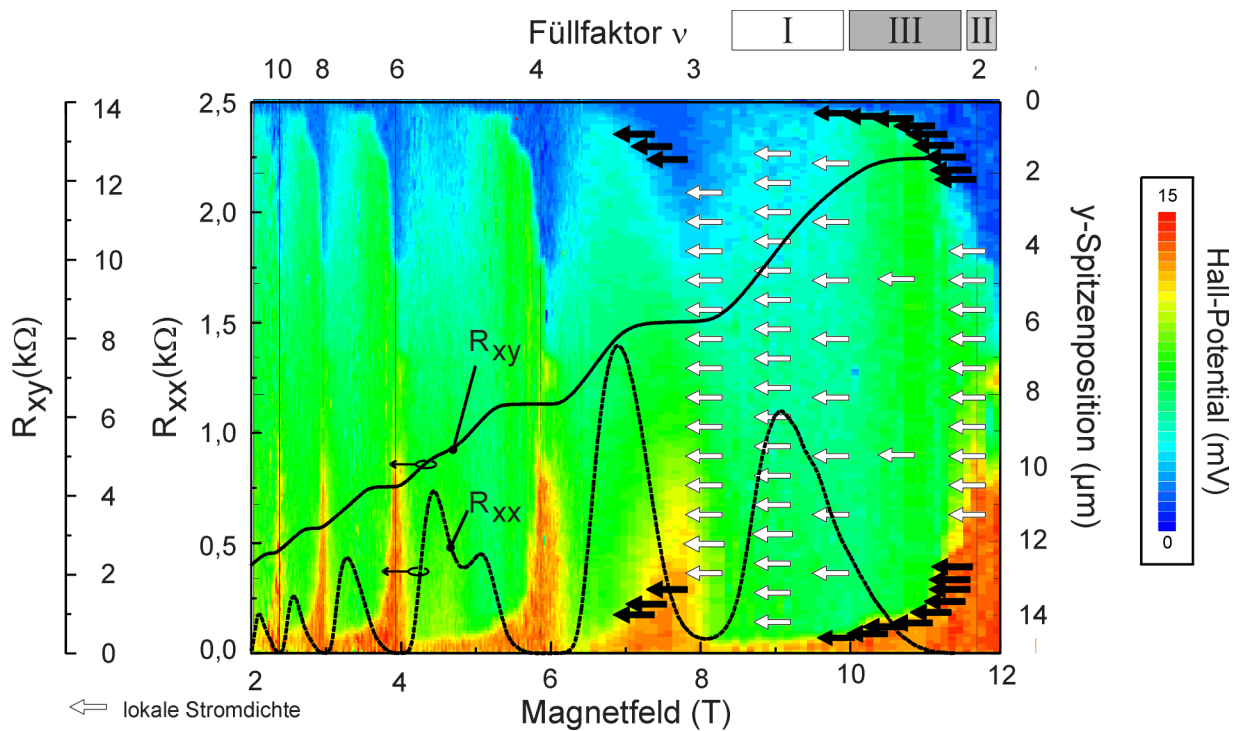


Abb. 5.12: Falschfarben-Darstellung der gemessenen Hall-Potentialprofile aus Abb. 4.2 für verschiedene Magnetfelder. Im selben Bild sind auch der Hall-Widerstand R_{xy} und der longitudinale Widerstand R_{xx} dargestellt. Zusätzlich markieren Pfeile schematisch die lokale Stromdichte im Probeninneren (weiß) bzw. am Probenrand innerhalb der inkompressiblen Streifen (schwarz).

Kapitel 6

Einfluß metallischer Kontakte

In diesem Kapitel werden weitere Ergebnisse zum Verlauf der Hall-Potentialprofile entlang der Probe und zum Einfluß potentialabgreifender Kontakte und der stromeinspeisenden Kontakten auf die Potential- und Stromverteilung vorgestellt.

6.1 Hall-Potentiallandschaften entlang der Probe

Die bislang vorgestellten Messungen wurden alle an einer festen x -Position in der Probenmitte gemessen. Die zweite Dimension, d.h. die Änderung des Hall-Potentialprofils entlang der Probe soll im folgenden genauer beschrieben werden. In Abb. 6.1 ist exemplarisch über einen großen Bereich die Hall-Potentiallandschaft einer Probe mit einer Elektronenkonzentration von $n_s = (4,2 \pm 0,05) \times 10^{15} \text{ m}^{-2}$, einer Beweglichkeit von $\mu = (50 \pm 1) \text{ m}^2/\text{Vs}$ und einer Breite von $10 \text{ }\mu\text{m}$ und einseitigen Potentialkontakten zur Bestimmung von R_{xx} für $\nu = 2,0$ (Abb. 6.1(a)) und $\nu = 2,11$ (Abb. 6.1(b)) dargestellt¹. Die stromeinspeisenden Kontakte befinden sich weit weg vom untersuchten Probengebiet. Wie bereits in Abschnitt 5.4.3 festgestellt wurde, fällt die Hall-Spannung bei ganzzahligen ν jeweils nichtlinear über die Probenmitte ab, der genaue Verlauf ist dabei auf der gesamten untersuchten Länge von $60 \text{ }\mu\text{m}$ stark positionsabhängig. Dementsprechend variiert die Position des Strompfades und es kommt zu einer Verästelung des Strompfades innerhalb des Probeninneren.

Für ν knapp oberhalb des ganzzahligen Wertes (Abb. 6.1(b)) erstreckt sich der Potentialprofiltyp III über das ganze Probengebiet und es kommt entlang der Mesakanten zu Potentialstufen und damit zu vom Probeninneren entkoppelten Randpotentialen. Im Probeninneren selbst verläuft das Hall-Potentialprofil weitgehend flach. Wie in Abschnitt 5.1 diskutiert, fließt der Strom großteils dissipationsfrei in den dazwischen liegenden inkompressiblen Streifen. Die Potential- und Stromverteilung im Bereich der ohmschen Kontakte ist hierbei besonders interessant.

¹Die Probe entspricht der Geometrie „A“ in Abb. B.1(a) und Probe „I“ in Abb. B.1(b).

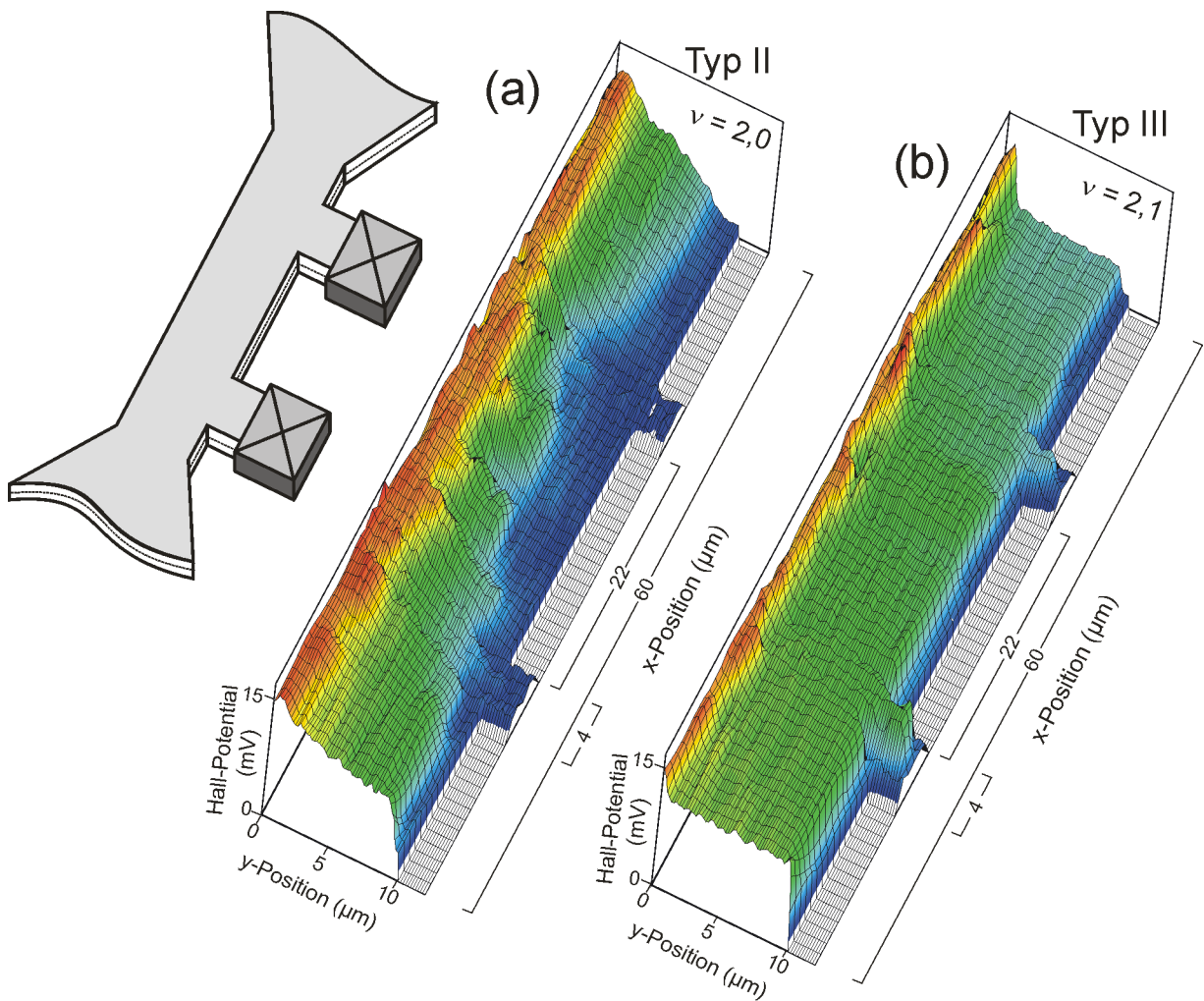


Abb. 6.1: Zwei-dimensionale Hall-Potentiallandschaft einer Probe mit seitlichen Potentialkontakten (s. kleines Bild) (a) für $\nu = 2,0$ und (b) für $\nu = 2,11$. Die Hall-Spannungsamplitude beträgt 15 mV, was einem Gesamtstrom von etwa $1,2 \mu\text{A}$ bei $\nu = 2,0$ entspricht.

6.2 Potentialprofile nahe eines Potentialkontakts

Vorbemerkung

Den Potentialkontakten wurde in einigen Modellen eine besondere Bedeutung zugewiesen. So wurde davon ausgegangen, daß Kontakte als mehr oder weniger ideale Elektronenreservoir fungieren, die sehr effektiv den Rand und das Probeninnere äquilibrieren können. Für den Fall ganzzahliger Füllfaktoren nimmt Büttiker sogar an, daß die in seinem Modell (s. Abschnitt 9.2.1) [31] ein-dimensionalen stromtragenden Randkanäle ideal in den Kontakt transmittiert werden und alle mit identischem elektrochemischen Potential wieder austreten. Dies steht aber

in Widerspruch zur Tatsache, daß der experimentell bestimmte Widerstand R_{xx} unter Quanten-Hall-Bedingungen unter $10^{-10} \Omega$ bei 0,4 K liegt [81]. Dies entspräche einem dreidimensionalen spezifischen Widerstand von weniger als $10^{-16} \Omega\text{cm}$, was viel geringer ist als der intrinsische Widerstand eines metallischen Kontaktes. Cage [81] hat deshalb darauf hingewiesen, daß der von außen aufgeprägte Strom nicht durch die Potentialkontakte fließen sollte.

Experimentelle Indizien

Was ergibt sich nun aus dem Experiment? In Abb. 6.2(a) ist ein Ausschnitt aus der Hall-Potentialverteilung in Abb. 6.1 für Füllfaktoren bei $\nu = 2$ und etwas oberhalb in der Nähe eines Potentialkontakts gezeigt. Der Kontaktwiderstand ohne Magnetfeld skaliert umgekehrt proportional zur Kontaktlänge und beträgt etwa 10Ω auf $100 \mu\text{m}$. Für ganzzahliges ν fällt das Potential in gewohnter Weise überall nichtlinear über die Probenbreite ab. Der Seitenarm vor dem ohmschen Kontakt ist auf einem durchgehenden Potential nahe null. Für etwas höhere Füllfaktoren kommt es wieder zum ausgeprägten Potentialsprung über die innersten inkompressiblen Streifen hinweg zwischen Randbereich und Probenmitte entlang der Mesakanten. Dies setzt sich auch in den Seitenarm hinein fort. Interessanterweise fällt das Potential vom Probeninneren aus auch zum Kontakt hin ab – in ganz ähnlicher Weise wie zu den Mesakanten hin. *Offensichtlich durchmischen Probeninneres und Rand nicht wie erwartet in ihrem elektrochemischen Potential.* Dies deutet daraufhin, daß aufgrund der unterschiedlichen Austrittsarbeiten der Kontaktmetallisierung und des 2DES zum Kontakt hin die Elektronenkonzentration reduziert ist und es daher zu einer ähnlichen Streifenstruktur kommen kann wie innerhalb der Verarmungszone entlang einer Mesakante. Je nach Kontaktspannung ist es auch möglich, daß eine Anreicherung der Elektronenkonzentration zum Kontakt hin auftritt, die ebenfalls zu einer Streifenstruktur führt. Aus dem Verlauf der Streifenposition unter Magnetfeldänderung ergibt sich aber ein direkter Hinweis auf eine Randverarmung statt -anreicherung². Analog kann auch hier der entsprechende innerste inkompressible Streifen das „Bulk“-potential vom Potential des äußeren Randbereichs entkoppeln (Abb. 6.2(c)). Der Stromfluß erfolgt daher innerhalb dieses Streifen, wo der größte Potentialabfall auftritt, ohne den Kontakt zu durchqueren. Bemerkenswert ist hierbei wiederum die örtliche Trennung des stromtragenden Gebietes (dem innersten inkompressiblen Streifen) von dem das elektrochemische Potential definierenden Gebietes (dem benachbarten kompressiblen Streifen) (Abb. 6.2(d)).

Wir können daher festhalten:

Die experimentellen Ergebnisse legen nahe, daß bei Füllfaktoren knapp oberhalb ganzzahliger ν der Strom quasi-dissipationsfrei lediglich *entlang* der Potentialkontakte fließt, aber nicht notwendigerweise in sie eindringt (s. Abb. 6.2(d)). Da die

²Dies wird im Zusammenhang mit Corbino-Geometrien explizit in Kapitel 7 gezeigt werden

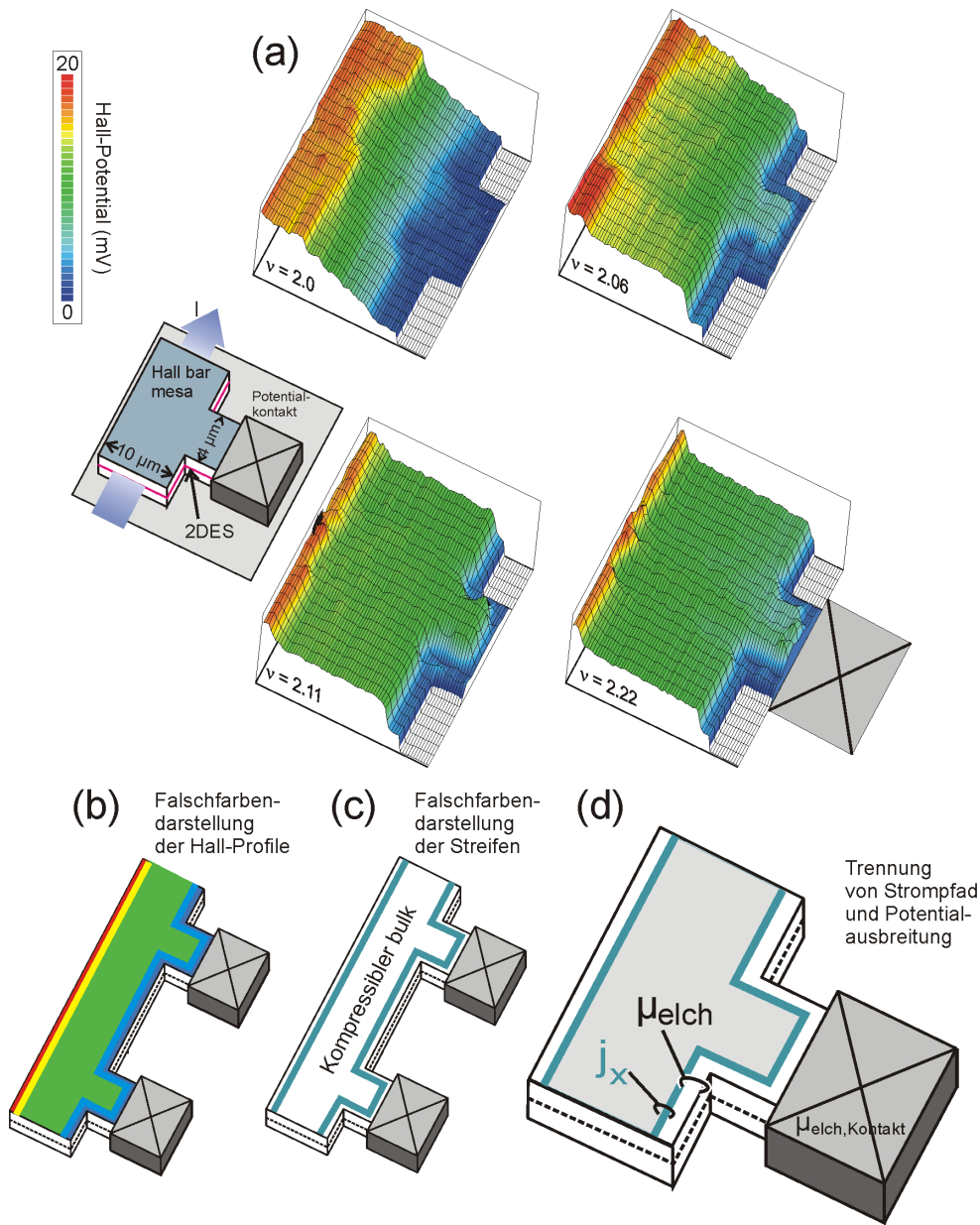


Abb. 6.2: (a) Hall-Potentialverteilung für Füllfaktoren um $\nu = 2$ herum, gemessen im Bereich eines seitlichen Potentialkontaktes, wie im kleinen Bild links skizziert. Die maximale Hall-Amplitude entspricht 20 mV. Deutlich zu sehen ist für $\nu = 2,11$ und $\nu = 2,22$ das typische Abflachen des Hall-Potentials im „Bulk“ mit den steilen Potentialsprüngen vor den Mesakanten. Interessanterweise tritt dasselbe Verhalten auch an der Grenzfläche zum metallischen Kontakt auf, wie in (b) verdeutlicht. (c) Es liegt ein inkompressibler Randstreifen entlang der gesamten Probenkante, inkl. der Kontaktkante, vor. (d) Der Strompfad von j_x und der Ausbreitungspfad von μ_{elch} sind räumlich getrennt, der Strom fließt nicht in den Kontakt.

kompressiblen Streifen das elektrochemische Potential von einem Kontakt zum nächsten tragen, aber nicht primär den externen Strom, kommt es auch nicht zur Dissipation innerhalb der Potentialkontakte. Dies deckt sich mit unserer Modellvorstellung für ganzzahlige ν , bei denen der Strom im Probeninneren fließt ohne die Kontakte zu berühren.

6.3 Hall-Potentialprofile nahe eines Stromkontakts

Wie verhält sich nun die Hall-Potentialverteilung im Gesamtüberblick über eine Hall-Geometrie inklusive stromeinspeisender Kontakte? Hierzu sind in Abb. 6.3 Potentialprofile entlang der ursprünglichen, in Kapitel 4 vorgestellten Probe für verschiedene Füllfaktoren gezeigt.³ Für $\nu = 3,78$ ergibt sich ein linearer Potentialabfall des Profiltyps I entlang der gesamten Probenlänge mit Ausnahme der direkten Kontaktumgebung, wo ein Abflachen des Potentialprofils zu erkennen ist. Diese Abflachen in Kontaktnähe ist ebenso für alle anderen Füllfaktoren beobachtbar. Für ganzzahligen Füllfaktor $\nu = 4,04$ ergibt sich im übrigen Probengebiet ein ortsabhängiger, jeweils nichtlinearer Potentialabfall des Profiltyps II. Für $\nu = 4,34$ verläuft das Potentialprofil überall in der Probe ähnlich wie in der Mitte und zeigt die charakteristische symmetrische Entkopplung zwischen Rand und Probeninneren (Typ III), nur direkt im Vorfeld der Kontakte ist das Hall-Potentialprofil stark verändert.

Bereits das klassische Bild der Hall-Potentialverteilung des 2DES sagt für hohe Magnetfelder gemäß (2.34) einen Hall-Winkel von fast 90° weit entfernt von den Kontakten voraus, d.h. elektrisches Feld und Stromrichtung stehen senkrecht aufeinander. Da die metallischen Kontakte dagegen ein durchgehend konstantes Potential besitzen, kann dies im Bereich der Kontakte nicht eingehalten werden. Die Potentiallinien verlaufen im Probeninneren parallel zur Längsrichtung der Probe, direkt vor dem Kontakt aber parallel zur Kontaktkante (vgl. Abb. 6.4). Die Stellen an jeweils gegenüberliegenden Kontaktecken, wo die Potentiallinien entspringen, werden „*hot spots*“ genannt, da hier die Stromdichte nicht mehr senkrecht zum elektrischen Feld verläuft und es daher zu Dissipation kommt. Sie wurden bereits in früheren Experimenten zur Untersuchung der lokalen Wärmeentwicklung bei ganzzahligen Füllfaktoren nachgewiesen [82, 83]. Abb. 6.5(a) zeigt die Potentialentwicklung direkt vor dem unteren Kontakt der Probe für $\nu = 4,19$ und $\nu = 4,04$. Direkt am Kontakt ist das Potential in der Tat zu etwa 80% der Probenbreite vom Potential des Kontaktes vorgeben und steigt an der rechten Ecke relativ steil an. Nach einem Übergangsbereich ist bereits in einer Distanz von ca. $6 \mu\text{m}$ wieder das charakteristische Hall-Potentialprofil wie in der Probenmitte zu beobachten. Dagegen zeigen die Hall-Potentialprofile innerhalb eines Abstands von 0 bis $2 \mu\text{m}$ vom Kontakt nur sehr schwache Magnetfeldabhängigkeit. Wie in Unterkapitel 6.2 dargelegt wurde, kann es auch ent-

³Die Probe entspricht der Geometrie „D“ in Abb. B.1(a) und Probe „I“ in Abb. B.1(b).

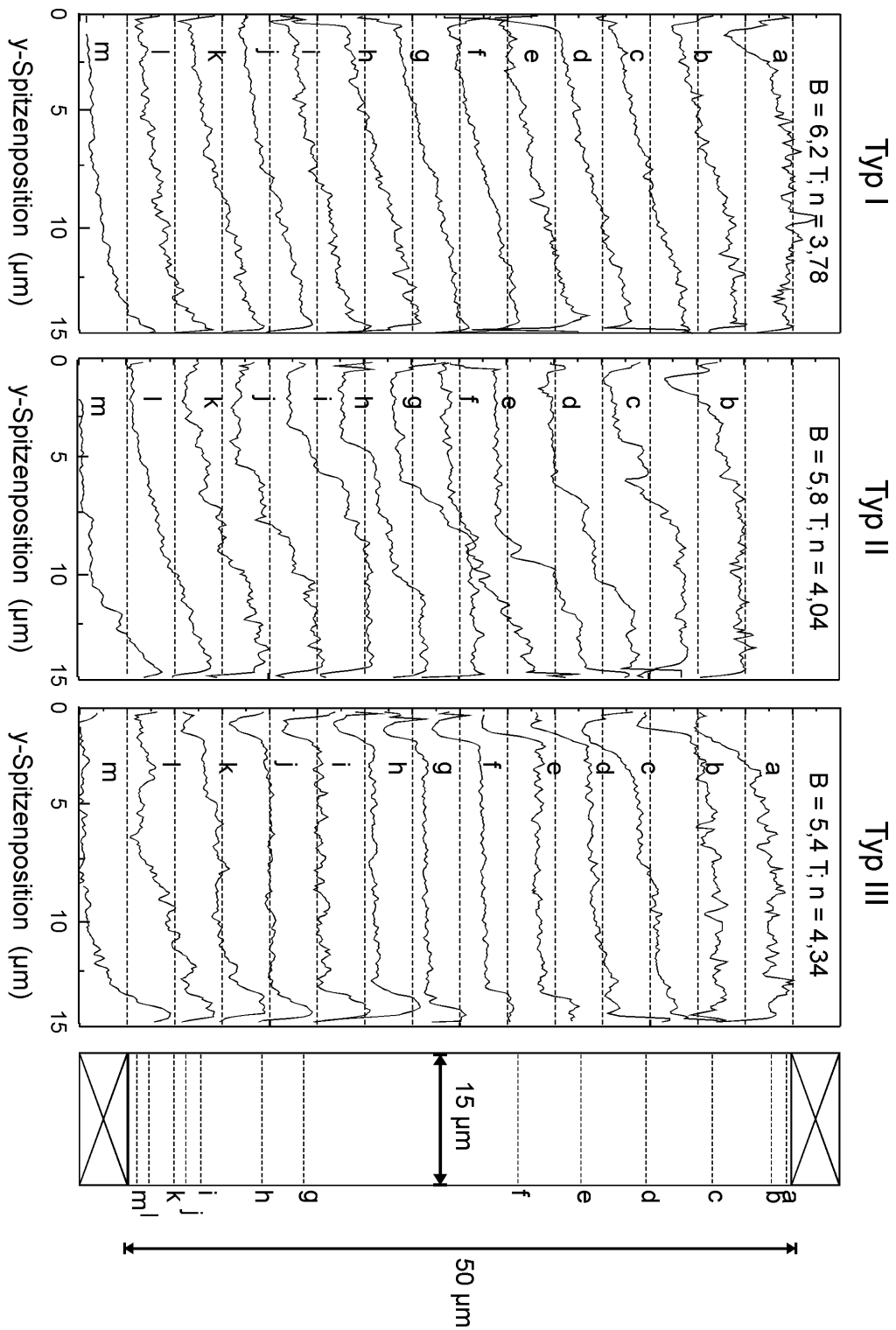


Abb. 6.3: Hall-Potentialprofile an verschiedenen Positionen x über die ganze Probenlänge hinweg, wie in der Skizze rechts markiert. Gezeigt sind verschiedene Füllfaktoren.

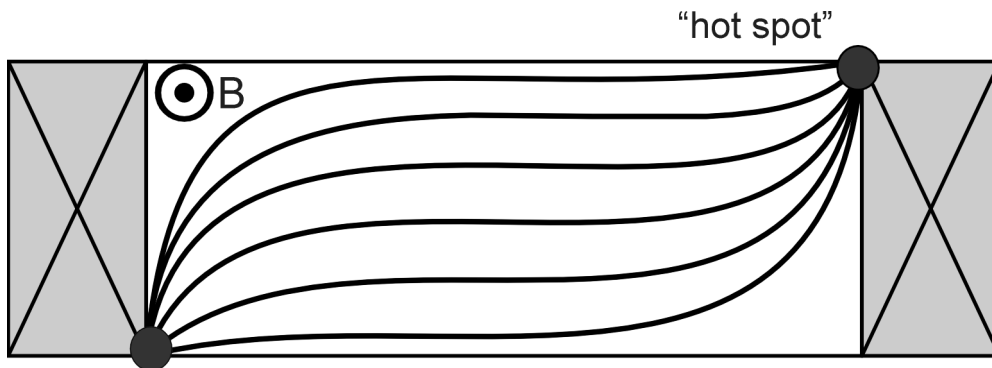


Abb. 6.4: Klassische Potentialverteilung bei hohen Feldern und einem Hallwinkel von $\theta_{\text{Hall}} \approx 90^\circ$ für ein homogenes System gemäß (2.25). Die Potentiallinien drängen sich vor den stromeinspeisenden Kontakten und es kommt in jeweils einer Ecke zu verstärkter Dissipation („hot spot“).

lang ohmscher Potentialkontakte zu einer Ausbildung von inkompressiblen Streifen kommen, die den Randbereich vom Probeninneren entkoppeln können. Dasselbe sollte ebenso für den stromeinspeisenden Kontakt gelten. Der aus den Meßdaten vermutete Verlauf der innersten inkompressiblen Streifen bei der Position des prägnanten Potentialanstiegs bei $\nu = 4,19$ ist in Abb. 6.5(b) skizziert. Bis auf den unmittelbaren Bereich vor dem „hot spot“ kommt es zu einer mehr oder weniger deutlichen Entkopplung zwischen dem Potential des Probeninneren, das weitgehend flach verläuft, und dem äußeren Bereich entlang der Mesakanten, bzw. entlang des Kontaktes. Erst ab einem Abstand von ca. $2,5 \mu\text{m}$ kommt es zu einem abrupten Anstieg des Potentials beim Übergang vom Rand zum Probeninneren. Dies entspricht in etwa der in Abb. 6.2 beobachteten Position des inkompressiblen Streifens entlang des Potentialkontaktes. Analog kann hier dieser inkompressible Streifen weitgehend den Kontakt vom Probeninneren entkoppeln, so daß es zur in Abb. 6.5(c) deutlicher hervorgehobenen Potentialverteilung kommt. Erst beim Passieren dieses Streifens in x -Richtung erscheint daher die übliche Potentialstufe wie bei Positionen weit weg vom Kontakt. Im Randstreifenbild wird also das elektrochemische Potential des oberen Kontaktes entlang der kompressiblen Randstreifen in die Probe hineingetragen, bis es am Übergang zum unteren Kontakt zu einem Potentialsprung um die angelegte Potentialdifferenz kommt. Es kommt dabei bei ganzzahligen ν ausschließlich an diesem „hot spot“ zur Energiedissipation in der Probe, während der Transport weit weg vom Kontakt – abhängig vom Füllfaktor – gänzlich dissipationsfrei sein kann. In unmittelbarer Nachbarschaft zum Kontakt kommt es durch die Streifenbildung zur Unterdrückung individueller Potentialprofile für unterschiedliche Füllfaktoren.

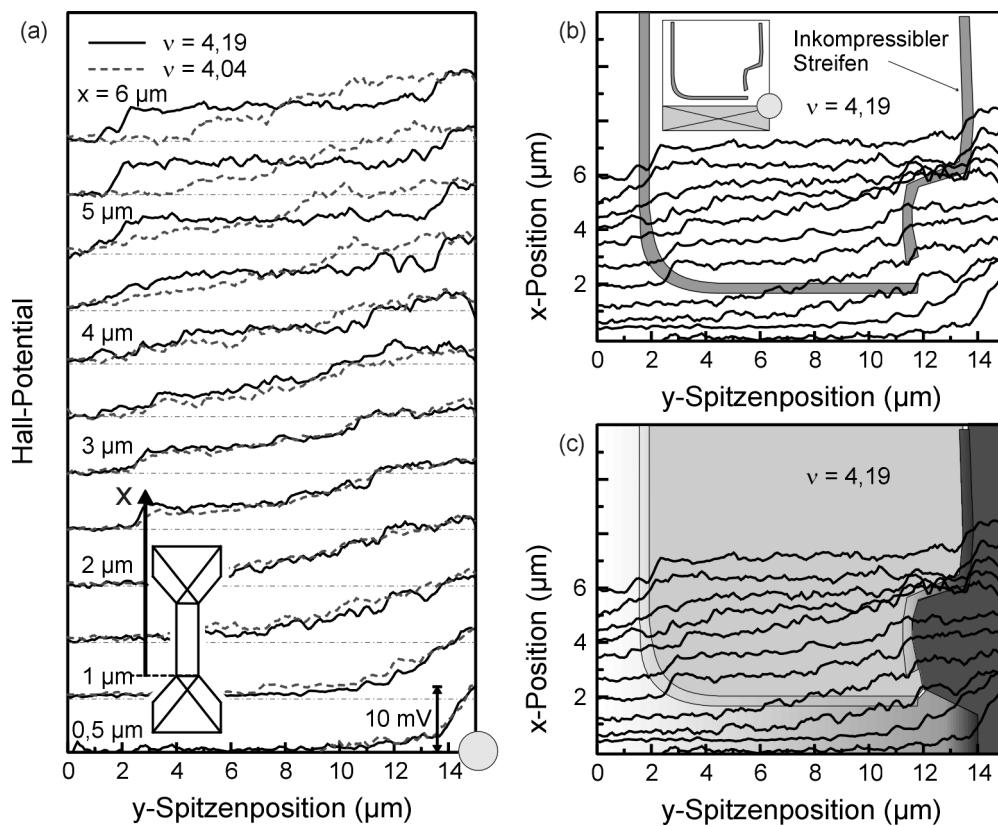


Abb. 6.5: Detailansicht aus Abb. 6.3 vor dem stromeinspeisenden Kontakt. (a) Angegeben sind hier die absoluten Abstände x der Meßposition vom unteren Kontakt, wie im kleinen Bild angedeutet. Bereits in einer Distanz von ca. 6 μm hat sich wieder das charakteristische Profil vom Typ III ausgebildet. (b) Verdeutlichung des Verlaufs der innersten inkompressiblen Streifen, die auch entlang des Kontaktes existieren (vgl. Abb. 6.2) und jeweils der Position des größten Potentialabfalls in den Meßkurven folgen. Die Potentialprofile aus (a) für $\nu = 4,19$ sind zur Verdeutlichung links bei niedrigem Potential an die entsprechende Position angeheftet. (c) Grauskaladarstellung von (b). Die inkompressiblen Streifen isolieren den Rand, bzw. den Kontakt vom Probeninneren. Nur im Bereich des „hot spot“ ist eine solche Streifenstruktur nicht zu erkennen.

6.4 Zusammenfassung

In weiterführenden Messungen wurde die Hall-Potentialverteilung auch entlang der Hall-Struktur untersucht. Das qualitative Verhalten ist dabei weitgehend unabhängig von der Probengeometrie oder Position. Besonders wichtig ist dabei aber der Einfluß von metallischen Kontakten. Es zeigt sich, daß es auch an der Grenzlinie zwischen 2DES und Kontakt aufgrund der unterschiedlichen Austrittsarbeiten zu einer Teilverarmung und damit wie bei der Mesakante zur

Ausbildung von inkompressiblen Randstreifen entlang des Kontaktes kommen kann. Demnach wird das elektrochemische Potential des Kontaktes vom kompressiblen Randstreifen bestimmt, das Probeninnere kann ein anderes Potential besitzen. Deshalb kann der Strom örtlich davon getrennt innerhalb der inkompressiblen Bereiche den Kontakt sogar umgehen. Im Falle eines stromeinspeisenden Kontakts tritt zusätzliche eine Verzerrung der Potentialprofile in der Umgebung des „hot spot“ auf - in Übereinstimmung mit der klassischen Erwartung.

Kapitel 7

Corbino-Proben

Der Einfluß metallischer Kontakte sollte besonders groß sein für Corbino-Geometrien, bei denen das 2DES als ein Kreisring zwischen einem äußeren und inneren Kontakt definiert ist, also überall durch einen metallischen Kontakt begrenzt wird, wie in Abb. 7.1(b) links oben dargestellt. Solchen Strukturen werden gerne alternativ zu sonst üblichen Hall-Geometrien wie in Abb. 2.3 verwendet, da man hier für ein homogenes isotropes System durch Transportmessungen direkten Zugang zur Leitfähigkeitskomponente σ_{xx} hat, ohne den Umweg über die Widerstandstensoranteile gemäß (2.26) machen zu müssen. Im folgenden werden Potentialprofile an solchen Corbino-Proben und ein simples Modell zu ihrer Erklärung diskutiert werden.

7.1 Experimentell gefundene Potentialprofile

Die hier im folgenden vorgestellten Messungen wurden an einer Probe mit einer Elektronenkonzentration von $n_s = (4,4 \pm 0,05) \times 10^{15} \text{ m}^{-2}$ und einer Beweglichkeit von $\mu = (50 \pm 1) \text{ m}^2/\text{Vs}$ durchgeführt. Die Probe besitzt eine ringförmige Struktur mit einem Innenkontaktradius von $50 \text{ }\mu\text{m}$ und einem Außenkontaktradius von $60 \text{ }\mu\text{m}$, wie in Abb. 7.1 skizziert. Transportmessungen an solchen Geometrien sind immer 2-Punktmessungen, d.h. in radialer Richtung fällt zwischen den beiden Kontakten immer die gesamte angelegte Spannung ab. Es gibt keinen longitudinalen Spannungsabfall wie in Hall-Geometrien. Abb. 7.1(a) zeigt die mittels des Rasterkraftmikroskops aufgenommenen Potentialprofile für den Füllfaktor $\nu = 2,2$. Der Potentialabfall in radialer Richtung zeigt hierbei Potentialsprünge nahe den beiden Rändern und einen weitgehend flachen Verlauf in der 2DES-Kanalmitte (Abb. 7.1(a)). Offensichtlich hat der radiale Strom an den Rändern Streifen mit hohem Widerstand auf dem Weg vom inneren zum äußeren Kontakt zu überwinden, da hier ein großer Spannungsabfall auftritt. Schaut man sich die Magnetfeldabhängigkeit dieser Streifen an (Abb. 7.1(b)), so stellt man fest, daß sich ihrer Position mit steigendem Magnetfeld nach außen verschiebt. Vergleicht man dies mit der theoretischen Vorhersage aus Gleichung (4.2) für die Position der inkompressiblen Streifen in der

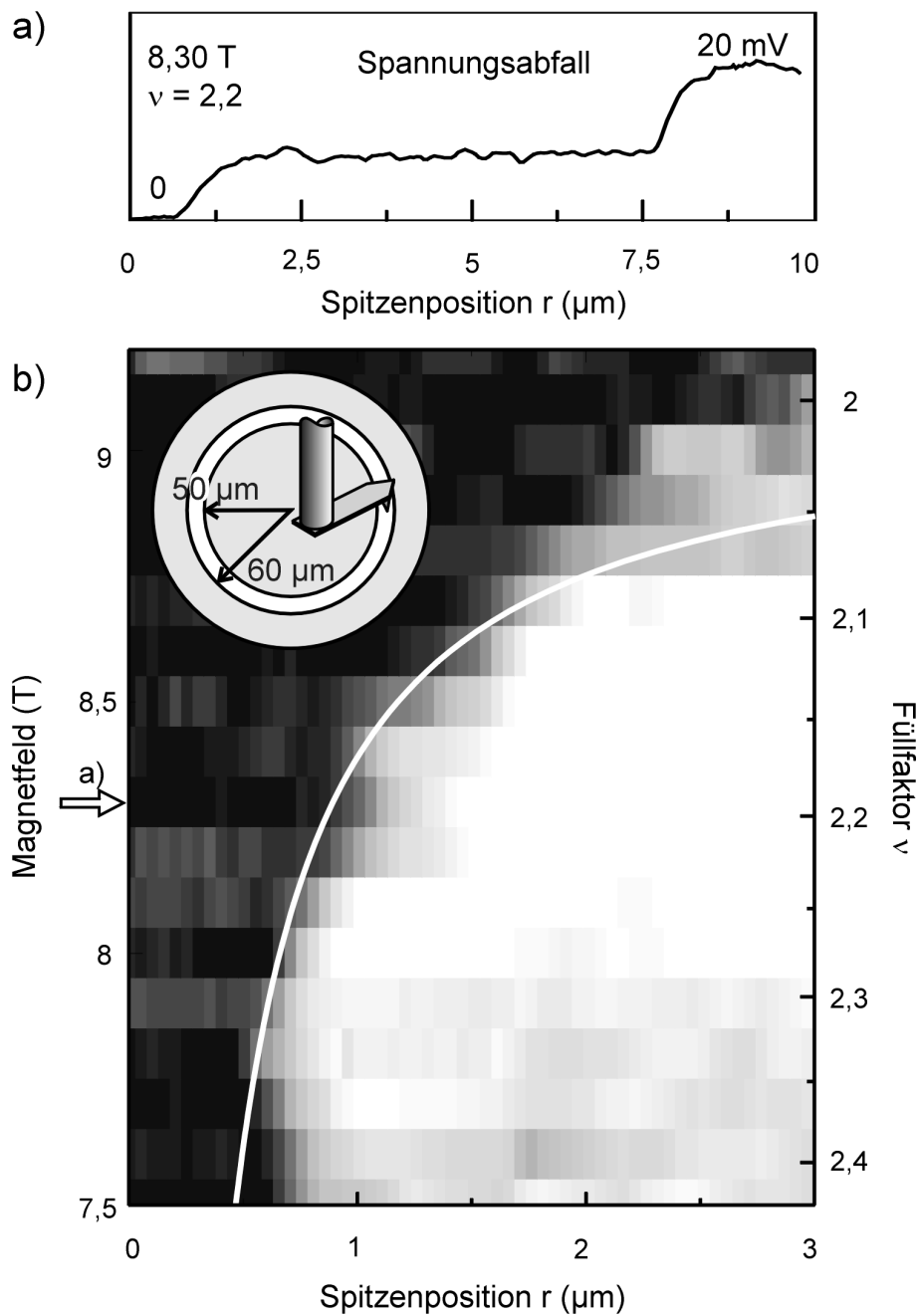


Abb. 7.1: (a) Radialer Spannungsabfall für $\nu = 2,2$ an einer ringförmigen Corbino-Geometrie mit innerem und äußerem Metallkontakt, wie im kleinen Bild skizziert. Die Potentialsprünge an den Rändern bedeuten Streifen hohen Widerstandes für die radiale Stromdichte. (b) Die Position dieser Potentialsprünge verschiebt sich im Magnetfeld in charakteristischer Weise wie durch Formel (4.2) für die Verarmungszone eines 2DES mit Seitenelektrode und angelegter Spannung $V_g = -0,7$ V beschrieben (weiße Linie). Es liegt also eine Ausbildung inkompressibler Streifen entlang der Metallkontakte vor.

Verarmungszone eines 2DES mit Seitenelektrode, so sieht man, daß der Verlauf der Streifenposition sehr gut durch dieses Modell beschrieben wird, wenn man eine Elektrodenspannung von $V_g = -(0,7 \pm 0,05)$ V gegenüber dem Potential des 2DES annimmt. Demnach liegt hier ebenfalls eine zumindest partielle Verarmung des 2DES entlang der Kontaktkanten vor, die wiederum zur Ausbildung der typischen Streifenstruktur am Rande des 2DES führt. Messungen an Pseudo-Corbinostrukturen, bei denen lokal eine freier Mesakanal ohne Kontakte vorhanden ist (s. kleines Bild in Abb. 7.2(a)), zeigen sehr ähnliche Potentialverteilungen. Dies legt nahe, daß sich auch die eigentliche Corbino-Geometrie lokal als Pseudo-Corbino verhalten kann. Ein Vergleich zwischen nominell echter Corbino und Pseudo-Corbino ist in Abb. 7.2 zu sehen. Sowohl im Mesabereich, als auch im Kontaktbereich der Pseudo-Corbinogeometrie sind sehr ähnliche Potentialverläufe beobachtbar. Beim Übergang zwischen Kontakt und freier Mesakante tritt nur eine sehr geringe Änderung des Potentialverlaufes auf.

Einfluß des lokalen ohmschen Kontaktes

In Abb. 7.3 wird die räumliche Potentialverteilung über ein 60° -Segment der Ringstruktur für den Füllfaktor $\nu = 2,17$ näher untersucht. Hierzu sind Potentialprofile bei den dargestellten Winkeln jeweils in radialer Richtung aufgenommen worden. Die typischen Potentialsprünge an den Kontaktträgern sind zwar in allen gezeigten Meßlinie vorhanden, variieren aber lokal in der Position und Breite relativ stark. Wir können hier vermuten, daß die partielle Schottky-Verarmung des 2DES lokal schwankt aufgrund von Fluktuationen in den Austrittsarbeiten in der metallischen Kontaktlegierung, die lokal viele verschiedene Grenzflächenphasen ausbilden kann [84]¹. Dadurch schwankt auch lokal die Position und Breite der inkompressiblen Streifen, die den Potentialabfall hauptsächlich bestimmen. Der Strom wird vermutlich diese schlecht leitenden Streifen jeweils an den dünnsten Stellen überwinden. Auch Transportmessungen von Sachrajda *et al.* [86] an Corbino-Geometrien mit zusätzlicher Steuerelektrode können durch das Vorhandensein von isolierenden Streifen interpretiert werden.

7.2 Leitfähigkeitsmodelle

Das Auftreten der lokal stark unterschiedlichen Potentialabfälle an den Rändern der Probe verdeutlicht, daß die Stromverteilung innerhalb des 2DES inhomogen ist. Da unterschiedliche Elektronendichten im 2DES auftreten, kann man zur Modellierung lokale Leitfähigkeiten annehmen, die von der lokalen Elektronendichte abhängen.

¹Es hat sich gezeigt [85], daß die Kristallorientierung der Heterostruktur einen Einfluß auf die Kontaktbildung haben kann. Der Mechanismus ist im Detail nicht verstanden, sollte aber in Zusammenhang mit solchen Fluktuationen der Kontaktspannung stehen.

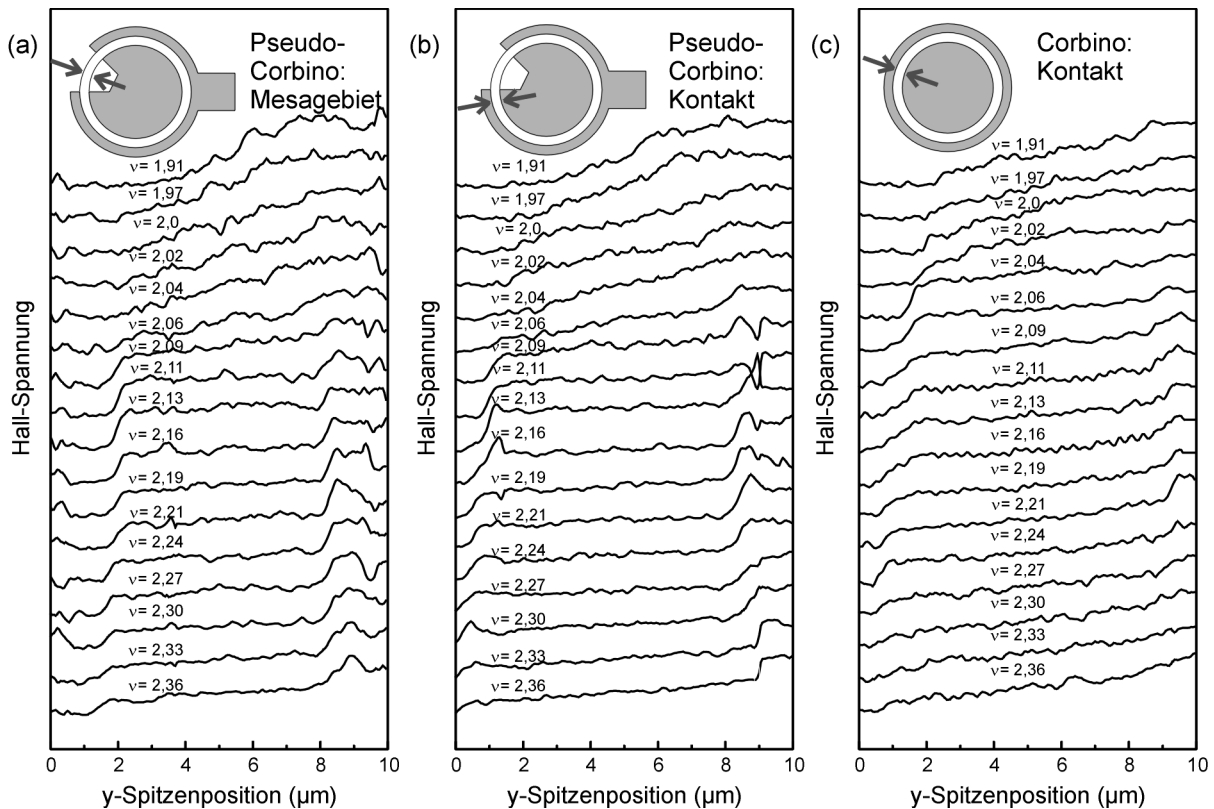


Abb. 7.2: Vergleich der Potentialprofile für (a) eine Pseudo-Corbino im Mesabereich mit freien Probenkanten, bzw. (b) im Bereich der Kontakte und (c) einer üblichen Corbinogeometrie für unterschiedliche Füllfaktoren. Die Rasterposition ist jeweils im kleinen Bild angedeutet. Der Unterschied zwischen Bereichen mit Mesa- oder Kontaktkante ist nur gering.

7.2.1 Homogenes, isotropes System

Beginnen wir mit dem homogenen isotropen System, in dem in der gesamten Probe gleiche Leitfähigkeitskomponenten vorliegen. Während in einer Hall-Geometrie kein transversaler Stromfluß stattfinden kann, d.h. $j_y = 0$ ist trotz beider nichtverschwindender Feldkomponenten E_x und E_y , liegt bei einer Corbino-Geometrie eine unterschiedliche Situation vor. Wegen ihrer Kreisform und der angenommenen Homogenität kann sich in einer Corbino-Probe keine Hall-Spannung und damit kein elektrisches Feld E_ϕ in Richtung der Winkelkoordinate ϕ aufbauen, es wird quasi von den Kontakten kurzgeschlossen. Daher werden gewöhnlich im klassischen Transportbereich Corbino-Geometrien verwendet, um direkt aus einer 2-Punktmessung die Leitfähigkeit $\sigma_{rr} \equiv \sigma_{xx}$ eines homogenen 2DES zu bestimmen. Für die

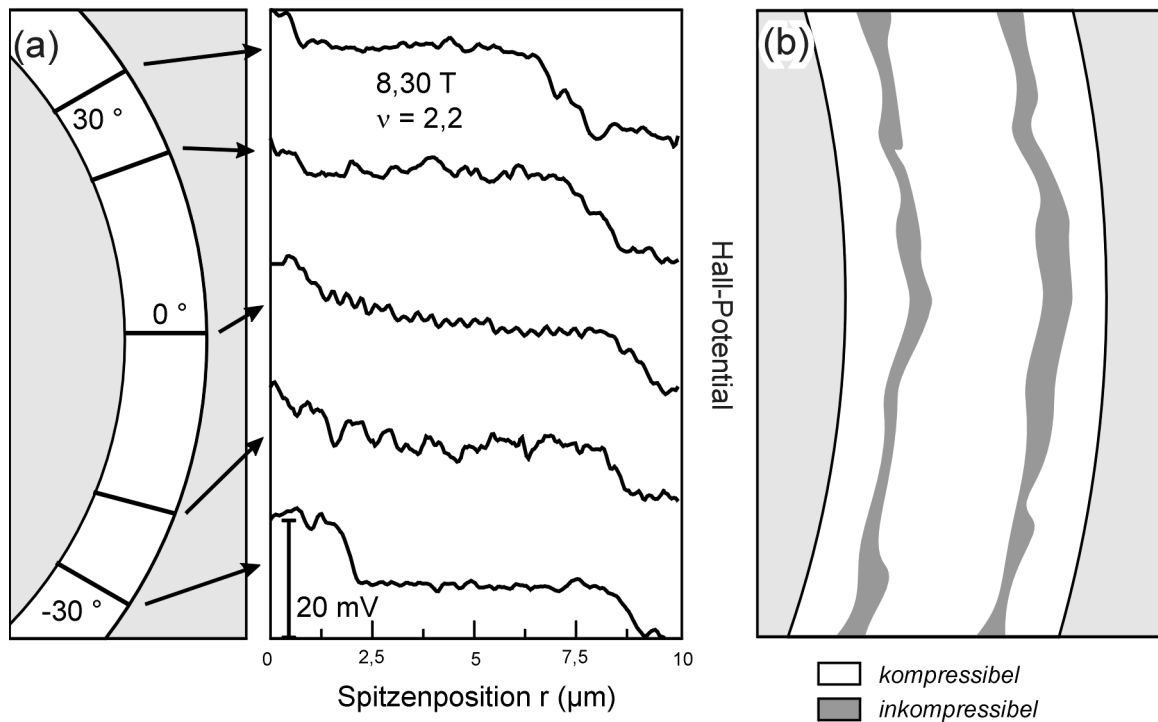


Abb. 7.3: (a) Räumliche Potentialverteilung über ein 60° -Segment der Ringstruktur für Füllfaktor $\nu = 2,2$. Die Ausbildung der Potentialsprünge an den Kontaktändern bei gleichzeitig flachem „Bulk“-Potential ist zwar überall vorhanden, variiert aber lokal relativ stark. Grund hierfür sind vermutlich lokale Fluktuationen in den Austrittsarbeiten, die zu unterschiedlich großen Verarmungszonen und damit Streifenbreiten führen. (b) Schematische Skizze der lokal fluktuierenden inkompressiblen Streifenverläufe.

Stromdichte $\mathbf{j} = (j_r, j_\phi)$ gilt dabei in Kreiskoordinaten (r, ϕ)

$$\begin{pmatrix} j_r \\ j_\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{rr} & \sigma_{r\phi} \\ -\sigma_{r\phi} & \sigma_{rr} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_r \\ E_\phi = 0 \end{pmatrix}, \text{ d.h. } j_r = \sigma_{rr} E_r, \quad j_\phi = -\sigma_{r\phi} E_r. \quad (7.1)$$

Gleichzeitig gilt unter Annahme eines homogenen, isotropen Systems $j_r = I_r / (2\pi r)$ in Bezug auf den Gesamtstrom I_r und damit folgt für die radiale Feldstärke E_r am Radius r , bzw. die Spannung $V_{s,d}$ zwischen den Kontakten

$$E_r = \frac{1}{2\pi\sigma_{rr}} \frac{I_r}{r}, \quad (7.2)$$

$$V_{s,d} = \int_{r_i}^{r_a} E_r dr = \frac{\ln(r_a/r_i)}{2\pi} \frac{I_r}{\sigma_{rr}}. \quad (7.3)$$

Dabei bezeichnen r_i und r_a den Innen-, bzw. Außenradius der Probe. Es läßt sich also bei gegebener Probenspannung $V_{s,d}$ und experimentell bestimmtem Probenstrom I_r bei Berücksich-

tigung des geometrieabhängigen Proportionalitätsfaktors die homogene Leitfähigkeitskomponente σ_{rr} bestimmen, die mit σ_{xx} übereinstimmt. Für die azimutale Stromkomponente folgt

$$j_\phi = -\frac{\sigma_{r\phi}}{\sigma_{rr}} j_r \quad \Rightarrow \quad j_\phi = -\frac{\sigma_{r\phi}}{\ln(r_a/r_i)} \frac{V_{s,d}}{r} \quad \Rightarrow \quad I_\phi = \int_{r_i}^{r_a} j_\phi dr = -\sigma_{r\phi} V_{s,d}. \quad (7.4)$$

Es zirkuliert also ein Strom in azimutaler Stromrichtung, der durch die Spannung $V_{s,d}$ getrieben wird. Dieser Strom ist durch Transportmessungen nicht zugänglich, sondern nur durch Magnetisierungsmessungen.

7.2.2 Leitfähigkeitsmodell mit lokal variierender Elektronendichte

Das Vorhandensein isolierender inkompressibler Randstreifen und ihre Auswirkungen sowohl auf die Potentialverteilung, als auch auf Transportmessungen kann in einem einfachen Leitfähigkeitsmodell mit inhomogenem σ_{rr} untersucht werden. Dazu wird die Position und Breite der Randstreifen gemäß (4.2) berechnet. Für kompressible Bereiche wird ein füllfaktorabhängiges $\sigma_{rr}^{\text{bulk}}$ angenommen und für inkompressible Ringe eine durch einen Parameter t beschriebene Entkopplungsstärke relativ zur „Bulk“-Leitfähigkeit eingeführt. Der Parameter t soll den Wert eins annehmen, wenn die inkompressiblen Streifenbreite schmal wird und gegen null streben, wenn die Breite groß wird. Die in Abb. 7.4(a) skizzierte einfache Streifenstruktur eines Systems, bei der nur der innerste inkompressible Streifen berücksichtigt wird, stellt sich wie eine Serienschaltung einzelner Kreisringe dar, deren Gesamtstrom $I_{s,d}$ zwischen innerem und äußerem Kontakt sich mit Gleichung (7.3) ergibt zu

$$I_{s,d} = -2\pi V_{s,d} \left\{ \frac{1}{\sigma_{xx}^{\text{bulk}}} \ln \left(\frac{r_1 r_3 r_5}{r_0 r_2 r_4} \right) + \frac{1}{t \cdot \sigma_{xx}^{\text{bulk}}} \ln \left(\frac{r_2 r_4}{r_1 r_3} \right) \right\}^{-1}. \quad (7.5)$$

Für die folgende Modellierung wird für $t(\nu)$ angenommen

$$t(\nu) = \begin{cases} \exp[-q \cdot \{a_\nu(\nu) - a_\nu(\nu = x.8)\}], & \text{für } x, 0 < \nu \leq x, 8 \\ 1, & \text{für } x, 8 < \nu < (x + 1), 0 \end{cases}. \quad (7.6)$$

Hierbei ist q ein phänomenologischer Parameter. Bei großen Streifenbreiten ist die Entkopplung groß und daher t nahezu null. Bei sinkender Streifenbreite steigt die Streuung über den Streifen hinweg an und t sollte ansteigen, wie in Abb. 7.4(b) skizziert. Da für die Durchlässigkeit vermutlich Tunnelprozesse verantwortlich sind, sollte $t(\nu)$ exponentiell mit abnehmender Streifenbreite zunehmen, bis der Wert eins erreicht ist. Dies wurde, wie mit (7.6) beschrieben, in der Simulation für Füllfaktoren $\nu > x, 8$ angenommen. Aus (7.5) läßt sich schließlich die lokale Spannung als eine stückweise definierte Funktion $V(r)$ bestimmen.

Die Hall-Potentialverteilung, bzw. der Stromtransport stellt sich damit wie folgt dar: Das in Abschnitt 5.3 beschriebene Zerfallen des 2DES in kompressible und inkompressible Bereiche, die nur für bestimmte Füllfaktorbereiche ausgedehnte kompressible Netzwerke zulassen, führt

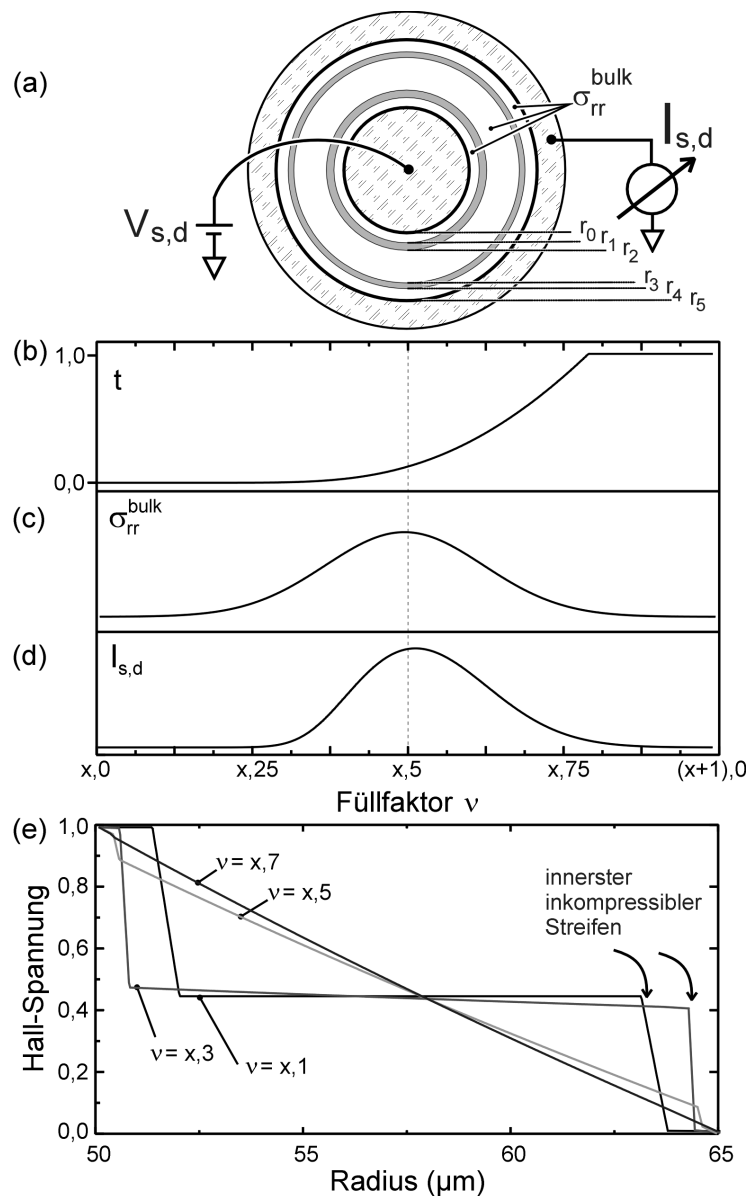


Abb. 7.4: Lokales Leitfähigkeitsmodell. (a) Die Probe wird als Abfolge konzentrischer Ringe mit der Leitfähigkeit σ_{rr}^{bulk} aufgefaßt, die durch entkoppelnde inkompressible Ringe getrennt sind. (b) Mit ansteigendem ν werden die inkompressiblen Ringe bei abnehmender Breite durchlässiger, was durch den Parameter t mit der gezeigten Abhängigkeit simuliert wird. (c) Für σ_{rr}^{bulk} im Probeninneren wird dabei eine Gaußverteilung um das Landau-Niveauzentrum angenommen. (d) Der Gesamtstrom $I_{s,d}$ gemäß (7.5) wird hauptsächlich durch die Eigenschaften des Probeninneren bestimmt. (e) Dennoch ist die berechnete Potentialverteilung asymmetrisch für verschiedene Füllfaktoren und spiegelt den experimentellen Verlauf, insbesondere den erhöhten Potentialabfall über die anfänglich breiten inkompressiblen Streifen wider.

auch für Corbino-Geometrien bei vorgegebener Probenspannung $V_{s,d}$ zu einer mit dem Füllfaktor oszillierenden Stromstärke, wie in Abb. 7.5(a) gezeigt. Für ganzzahlige Füllfaktoren (Abb. 7.5(b)) ist der Mittelbereich des 2DES hauptsächlich inkompressibel und nur verschwindend wenig Elektronen können diesen Bereich durchqueren - es fließt praktisch kein Strom zwischen innerem und äußerem Kontakt parallel zum elektrischen Feld in radialer Richtung, wenn man eine feste Spannung zwischen beiden Kontakten anlegt. Anders ausgedrückt ist der Leitwert null, da in Analogie zu Abschnitt 5.3 keine Streuprozesse zwischen vereinzelt kompressiblen Bereichen einen Ladungsträgertransport in radialer Richtung verursachen können. Gleichzeitig führt aber der *radiale* Potentialabfall gemäß (5.8) zu einem dissipationsfreien Ringstrom entlang vollständig besetzter ausgedehnter Zustände senkrecht zum Gradienten, d.h. in *azimutaler* Richtung, wie in Abb. 7.5(b) verdeutlicht. In Transportmessungen ist aber nur der radiale Stromanteil zugänglich.

Für etwas höhere Füllfaktoren wird das Transportverhalten sowohl vom Probeninneren durch die Ausbildung ausgedehnter Netzwerke, als auch durch die Entstehung inkompressibler Randstreifen bestimmt, die zunächst relativ breit sind und nur wenig Stromfluß zulassen.

Erst mit steigendem Füllfaktor und sinkender Streifenbreite steigt die Tunnel- oder Streuwahrscheinlichkeit an und es fließt ein größerer Strom (Abb. 7.5(c)), der nun von den „Bulk“-Eigenschaften bestimmt wird. Sie bewirken ein um den halbzahligen Füllfaktor herum symmetrisches Leitwertverhalten durch das in Hinblick auf die Füllfaktoren um halbzahlige Werte symmetrische Perkolationsverhalten der kompressiblen Zustände (vgl. Abb. 5.5). Für $\sigma_{xx}^{\text{bulk}}$ im Probeninneren wurde daher ein in Abb. 7.4(c) skizzierter gauß-förmiger Verlauf angenommen. Damit läßt sich mit Hilfe von (7.5) der Probenstrom bestimmen, dessen Füllfaktorabhängigkeit, wie in Abb. 7.4(d) skizziert, weitestgehend vom Transportverhalten des Probeninneren dominiert wird. Die Kurve ist leicht verschoben und einseitig etwas verzerrt im Vergleich zur Kurve in Abb. 7.4(c), die die Leitfähigkeit des Probeninneren beschreibt, gibt aber qualitativ den experimentell beobachteten Stromverlauf weitgehend korrekt wieder. Dennoch kommt es in dieser Modellrechnung bei kleinen ν zu deutlichen Potentialabfällen jeweils über die weniger leitfähigen inkompressiblen Randstreifen, wie in Abb. 7.4(e) dargestellt. Der Anteil in der Probenmitte – sichtbar im Potentialgradienten – steigt aber zunehmend an mit ansteigendem Füllfaktor und schmaler werdenden Randstreifen, so daß für hohe Füllfaktoren ein homogener linearer Potentialabfall über die Probe stattfindet ².

Demnach demonstriert dieses simple Modell, daß reale Corbino-Proben, in denen inkompressible Streifen entlang der Kontaktränder vorhanden sind, durch eine Kombination aus üblichen „Bulk“-Eigenschaften und Randstreifen beschrieben werden können. Dabei ist sowohl die experimentell beobachtete Asymmetrie in der

²Der scheinbar lineare Potentialabfall liegt an der im Verhältnis zu r_0 kleinen Kanalbreite $W = r_5 - r_0$. Bei größeren Breiten wäre ein deutlich logarithmischer Abfall erkennbar.

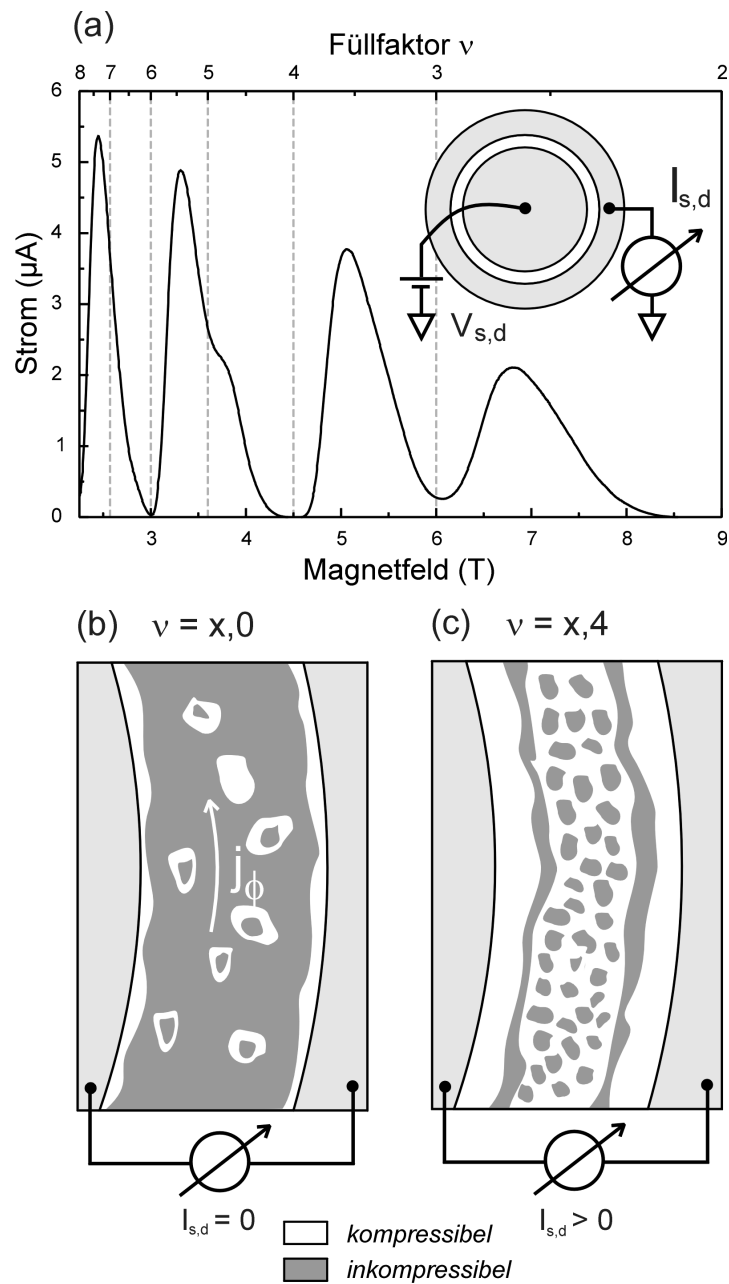


Abb. 7.5: (a) Transportverhalten einer Corbino-Probe. Zwischen innerem und äußerem Kontakt wird eine konstante Spannung $V_{s,d}$ (1 mV) angelegt und die Stromstärke in Abhängigkeit des Magnetfeldes gemessen. (b) Für ganzzahlige ν ist die Probenmitte hauptsächlich inkompressibel. Senkrecht zum Potentialgradienten fließt ein azimuthaler Ringstrom um den inneren Kontakt herum, aber praktisch kein Strom $I_{s,d}$ in radialer Richtung. (c) Für höhere Füllfaktoren müssen Elektronen zunächst die inkompressiblen Randstreifen überwinden, die mit höheren ν immer schmaler werden. Jetzt wird der makroskopische Strom zusätzlich durch das Leitfähigkeitsverhalten des kompressiblen Probeninneren bestimmt.

Potentialverteilung in Hinblick auf den Füllfaktor, als auch das Transportverhalten, bei dem sich $R_{xx}(\nu)$ weitgehend symmetrisch um $\nu = x, 5$ verhält, verständlich.

7.3 Zusammenfassung

Spannungsabfallmessungen an Corbino-Geometrien verdeutlichen wie schon im Falle einzelner Kontakte an Hall-Strukturen, daß es auch entlang von Kontaktgrenzen im Nichtgleichgewicht zu elektrochemischen Potentialsprüngen kommen kann. Grund hierfür ist eine partielle Verarmung des 2DES aufgrund von unterschiedlichen Austrittsarbeiten zwischen Kontaktmaterial und 2DES, die wiederum zur Ausbildung isolierender, inkompressibler Streifen sorgt, über die schließlich die Hall-Spannung abfällt. Ein inhomogenes lokales Leitfähigkeitsmodell basierend auf konzentrischen Ringen unterschiedlicher Leitfähigkeit bei Berücksichtigung des üblichen Netzwerkmodells ausgedehnter Strompfade im Probeninneren kann gleichzeitig erklären, warum sich die Potentialprofile nicht symmetrisch beim Ändern des Füllfaktors um halbzahlige Werte herum verhalten, gleichzeitig sich aber der von außen meßbare Stromfluß weitgehend symmetrisch verhält. Dies verdeutlicht, daß aus Transportmessungen nicht eine homogene, isotrope Leitfähigkeitskomponente abgeleitet werden kann.

Kapitel 8

Verhalten bei hohen Strömen

Im folgenden Abschnitt soll diskutiert werden, wie sich die Potentialverteilung bei sehr hohen Strömen, insbesondere bei Annäherung an den Zusammenbruch des QHE verhält.

8.1 Transportuntersuchungen zum Zusammenbruch des QHE

Der Quanten-Hall-Effekt wird von theoretischer Seite vorzugsweise bei verschwindender oder zumindest infinitesimal kleiner Temperatur beschrieben. Mit ansteigender Temperatur werden Abweichungen sowohl von Plateauwert in R_{xy} , als auch vom verschwindenden Wert in R_{xx} beobachtet. Darüberhinaus gibt es aber auch einen sehr abrupten Anstieg in R_{xx} um mehrere Größenordnungen, wenn eine kritische Stromstärke innerhalb der Probe überschritten wird [87,88]. Der dissipationsfreie Stromtransport innerhalb des 2DES bricht daher schlagartig zusammen und dissipativer Transport setzt ein oberhalb dieser kritischen Stromdichte, die von intrinsischen Probeneigenschaften und der Probengeometrie beeinflusst wird ¹.

Bevor auf die eigentlichen Hall-Potentialprofile nahe des Zusammenbruchs des QHE eingegangen wird, sollen zunächst die gewöhnlichen Transportdaten unserer Proben präsentiert werden. Transportmessungen wurden sowohl an den Originalproben, die auch zur Potentialverteilungsmessung verwendet wurden, als auch an einer 100 μm breiten Standard-Hall-Geometrie durchgeführt. Sie sind in Abb. 8.1 dargestellt. Die in diesem Abschnitt besprochene Probe ² besitzt eine Elektronenkonzentration von $n_s = (4,4 \pm 0,05) \times 10^{15} \text{ m}^{-2}$ und eine relativ geringe Beweglichkeit von $\mu = (18 \pm 0,8) \text{ m}^2/\text{Vs}$. Qualitativ ähnliche Ergebnisse wurden aber auch an der höherbeweglichen Probe aus Kapitel 4 beobachtet. Wie erwartet, steigt der longitudinale Widerstand R_{xx} oberhalb und unterhalb ganzzahliger Füllfaktoren bei Erreichen hoher Stromstärken schlagartig an. Der Füllfaktorbereich für verschwindenden Widerstand R_{xx} nimmt mit zunehmender Stromstärke bzw. angelegter Probenspannung immer weiter ab, bis bei genügend ho-

¹Eine gute Übersicht bietet [43]

²Die Probe entspricht der Geometrie „C“, bzw. „B“ in Abb. B.1(a) und Probe „II“ in Abb. B.1(b).

hem Strom der Längswiderstand R_{xx} auch direkt bei ganzzahligem Füllfaktor endlich wird. Wie in Abb. 8.1 gezeigt, beobachtet man für die vorliegende Probe zusätzlich unabhängig von der Probenbreite ein Abknicken der Transportkurven $R_{xx}(B)$ für höhere Magnetfelder jenseits des ganzzahligen Füllfaktors. Mißt man für ein festes Magnetfeld den longitudinalen Widerstand in Abhängigkeit der angelegten Probenspannung, d.h. $R_{xx}(V_{s,d}) = V_{s,d}/I_{s,d}$, so wird der negative differentielle Widerstand $dR_{xx}/dV_{s,d}$ für Magnetfelder, die Füllfaktoren unterhalb ganzzahliger Werte entsprechen, noch deutlicher, wie in Abb. 8.2 gezeigt. Der Bereich des negativen differentiellen Widerstandes zeigt teilweise hysteretisches Verhalten mit der Änderungsrichtung der Feldstärke (nicht gezeigt).

8.2 Potential- und Stromverteilung nahe dem Zusammenbruch des QHE

Experimente im Zusammenbruchsregime des QHE beschränken sich weitgehend immer auf Transportuntersuchungen mit indirekten Interpretationsansätzen zur Bestimmung der Potential- und Stromverteilung nahe des Zusammenbruchs. Umso interessanter ist es, direkt experimentell ein ortsaufgelöstes Bild der Potentialverteilung zu bekommen. Hierzu wurde die in Abschnitt 3.3.1 beschriebene Rechteckanregung bei sehr hohen Amplituden verwendet und wiederum mit einer Eichmessung kalibriert. Abb. 8.3 verdeutlicht die Strom- bzw. Amplitudenabhängigkeit der Potentialprofile für die drei beschriebenen Profilverlaufstypen oberhalb, direkt bei und unterhalb ganzzahliger Füllfaktorwerte:

- So ändert sich für Werte jeweils leicht oberhalb ganzzahliger Füllfaktoren das zunächst über die Probenbreite lineare Potentialprofil des Typ I ab einer kritischen Spannung plötzlich sprunghaft, so daß ein Großteil der Hall-Spannung nun über einen schmalen Bereich in y -Richtung abfällt. Diese kritische Spannung liegt in dem Bereich, in dem im Transportexperiment der Widerstand in Abhängigkeit der angelegten Spannung seine Steigung zu negativen Werten hin ändert (s. Abb. 8.2).
- Für ganzzahlige ν bleibt der Profiltyp II mit einem relativ nichtlinearem, positionsabhängigen Verlauf auch bei hohen Amplituden qualitativ erhalten. Zum Vergleich ist im kleinen Bild in Abb. 8.3 eine identische Messung an der höherbeweglichen Probe ³ gezeigt. Wie hier deutlicher sichtbar ist, werden teilweise Potentialstufen bei mittleren Amplitudenwerten geglättet, treten aber bei hohen Amplituden wieder auf. Allerdings ist direkt bei ganzzahligem Füllfaktor der QHE bei der größten Amplitude in Abb. 8.3 der Zusammenbruch in der Transportmessung noch nicht erreicht (s. Abb. 8.1), eine definitive Aussage ist daher nicht möglich.

³Probe 1 in Abb. B.1(b)

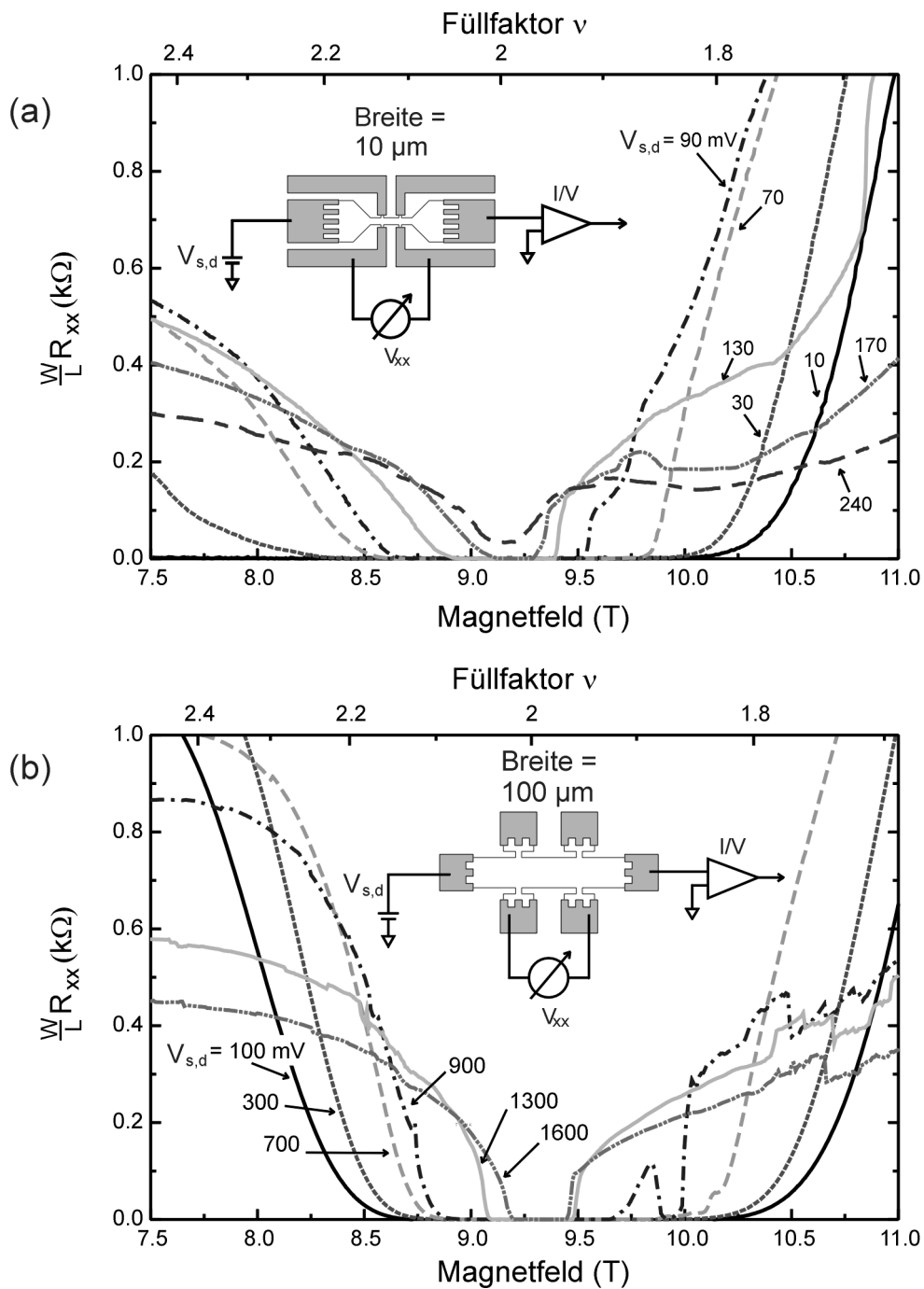


Abb. 8.1: Normierter Längswiderstand $R_{xx} \cdot W/L$ nahe $\nu = 2$ für große Ströme nahe dem Zusammenbruch des QHE. (a) Originalgeometrie der Rastersondenexperimente. (b) Gewöhnliche Hall-Geometrie mit einer Probenbreite von $100 \mu\text{m}$. Für beide Geometrien ist übereinstimmend neben dem üblichen sprunghaften Widerstandsanstieg nahe ganzzahligem Füllfaktor ein relativ abrupter Wechsel im Widerstandsverlauf ab einer bestimmten Probenspannung $V_{s,d}$ zu erkennen. So steigt in (b) R_{xx} für z.B. $B = 8,5 \text{ T}$ bis $V_{s,d} = 900 \text{ mV}$ an, sinkt bei höheren Werten aber wieder ab.

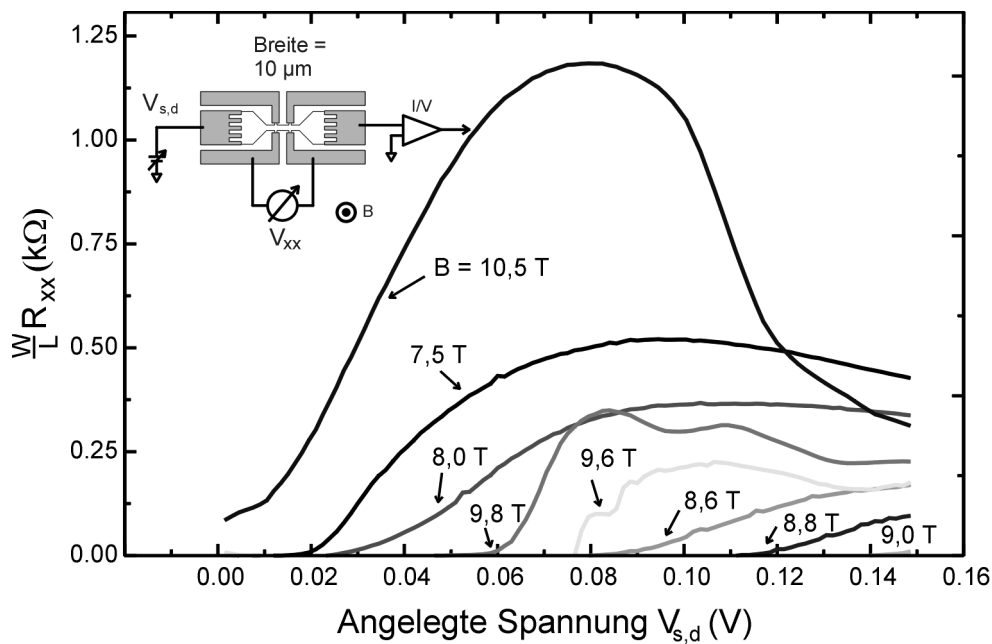


Abb. 8.2: Normierter Längswiderstand $R_{xx} \cdot W/L$ nahe $\nu = 2$ in Abhängigkeit der angelegten Probenspannung für verschiedene Magnetfelder, gemessen an der Originalgeometrie der Rastersondenexperimente aus Abb. 8.1(a). Ab einer bestimmten Spannung ist ein negativer differentieller Widerstandsverlauf zu beobachten.

- Das Potentialprofil III mit den charakteristischen Hall-Potentialstufen an den Probenrändern bleibt im wesentlichen ebenfalls erhalten. Deutlich nimmt aber der Potentialabfall innerhalb des Probeninneren zu und gleichzeitig verschiebt sich auch das mittlere Potential des Probeninneren zum Potentialwert einer Probenseite. Das bedeutet auch, daß der Potentialsprung auf einer Seite geringer und auf der anderen Seite größer wird.

Eine detailliertere Magnetfeldabhängigkeit der Potentialprofile bei hohen Strömen ist in Abb. 8.4(a) dargestellt. Nur um ganzzahlige ν herum fällt das Potential weitgehend gleichmäßig über die Probe ab. Für alle anderen gezeigten ν herrscht jeweils eine herausgehobene Position in y -Richtung vor, an der ein Großteil des Hall-Potentials abfällt. Sie verschiebt sich innerhalb der Probe, wie die Messungen um den ganzzahligen Füllfaktor $\nu = 2$ in Abb. 8.4(a) zeigen.

8.3 Korrelation mit Messungen des Abschirmverhaltens

Man kann die Magnetfeldabhängigkeit des Hall-Potentialprofils bei hohen Anregungsamplituden mit der des Abschirmverhaltens bei angelegter identischer Probenspannung gegenüber Spannungsmodulation angelegt an eine unter dem 2DES liegenden Rückelektrode (vgl. Ab-

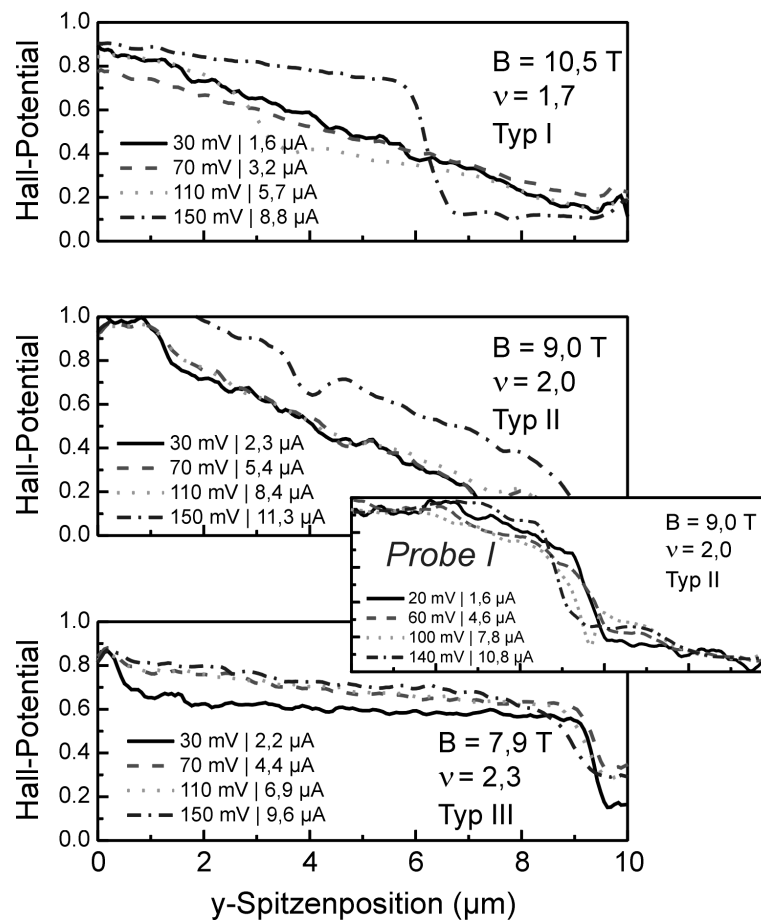


Abb. 8.3: Potentialprofilentwicklung mit angelegter Spannungsamplitude für die drei verschiedenen Profiltypen I - III. Angegeben ist jeweils die angelegte Spannung $V_{s,d}$ und der resultierende Strom. Der größte Effekt ist für Typ I zu erkennen, wo der lineare Verlauf ab einer kritischen Spannung in einen stufenartigen Verlauf übergeht. Im kleinen Bild ist zusätzlich die stark ortsabhängige Potentialentwicklung für Typ II für die höherbewegliche Probe I (s. Abb. B.1(b)) gezeigt.

schnitt 4.3) vergleichen. Dabei ist ein Zusammenhang zwischen der Position des Potentialsprungs und der Region der größten Transparenz des 2DES erkennbar (siehe Abb. 8.4). Dies läßt vermuten, daß sich das 2DES jeweils in der Region des größten Hall-Potentialgradienten inkompressibel verhält und damit elektrisch leicht durchlässig für das Rückelektrodensignal wird. Unklar ist momentan, warum das Transparenzsignal teilweise am Rand auch jenseits der Position des Potentialanstiegs erhöht bleibt. Man kann aber spekulieren, daß demnach ab einer kritischen Hall-Spannung die Landschaft aus kompressiblen und inkompressiblen Bereichen modifiziert wird und sich ein inkompressibler Pfad durch die Probe Bahn schlägt, entlang dem ein Großteil des Stromes bei wesentlich geringerer Dissipation fließen kann. Als Folge zeigt

das 2DES entlang dieser Zone ein vermindertes Abschirmverhalten. Außerdem wird dadurch die Verringerung des longitudinalen Widerstandes für hohe Anregungsamplituden, d.h. der negative differentielle Widerstand in Abb. 8.2 erklärt: Es fließt nun weniger Strom durch den dissipativen kompressiblen Bereich des Probeninneren, dafür aber ein großer Stromanteil entlang des dissipationfreien inkompressiblen Pfades, der sich bei diesen hohen Hall-Spannungen durch selbstkonsistente Elektronenumverteilungen gebildet hat.

8.4 Räumliche Entwicklung des Hall-Potentialprofils

Die räumliche Entwicklung des Hall-Potentialprofils mit ansteigender Anregungsamplitude zeigt wenig Änderung mit der longitudinalen Meßposition für Potentialprofile der Typen II und III. Das „Bulk“-potential in der Probenmitte steigt entlang der Probe wie gewohnt durch den Einfluß des endlichen longitudinalen Widerstandes für den Potentialtyp III leicht an. Interessanter ist dagegen wiederum das Verhalten des stufenartigen Abfalls für Füllfaktoren leicht unterhalb ganzzahliger Werte (Typ I). Wie in Abb. 8.5 gezeigt, tritt der Potentialsprung überall entlang der Probe in ähnlicher Form bei identischen Amplitudenwerten auf. Allerdings verschiebt sich die transversale Position der Potentialstufe deutlich entlang der Probe von einer Seite zur anderen, und zwar jeweils in etwa von der Position der dissipativen Ecke am einen Stromkontakt diagonal über die Probe zur zweiten Ecke des anderen Kontakts hin. Der Strom scheint daher an einer dissipativen Ecke in das 2DES einzutreten und hauptsächlich dieser diagonalen Linie zu folgen, bevor er in etwa an der zweiten dissipativen Ecke wieder austritt. Dies wurde an mehreren Probengeometrien beobachtet.

8.5 Interpretation und Theorie

Die gängige Modellvorstellung des Zusammenbruchs des Quanten-Hall-Effekts nimmt an, daß es bei hohen Strömen durch die damit verbundenen hohen elektrischen Felder zu einer starken Verkipfung der Landau-Niveaus kommt, so daß quasi-elastische Streuprozesse zu Übergängen zwischen zwei Landau-Niveaus führen können [89]. Da solche Anregungsprozesse einer Anregung über die Zyklotron-, bzw. Zeeman-Energie hinweg entsprechen und zu einer nicht-thermischen Besetzungsverteilung führen, werden die Elektronen in angeregten Zuständen im oberen Niveau auch „hot electrons“ genannt. Dieser Anregungsprozeß wird durch Potentialfluktuationen durch die Anwesenheit geladener Störstellen verstärkt [90] (vgl. Abschnitt 5.2.1), die zu Lokalisierungszentren für Elektronen und Löcher in den Landau-Niveaus und damit lokal verstärkten elektrischen Feldern führen. Da angeregte Elektronen im oberen Landau-Niveau sich wegen des Vorhandenseins unbesetzter Zustände quasi-kompressibel verhalten können, kann es zu Änderungen der Potentiallandschaft und zur Ausbildung eines kompressiblen Netz-

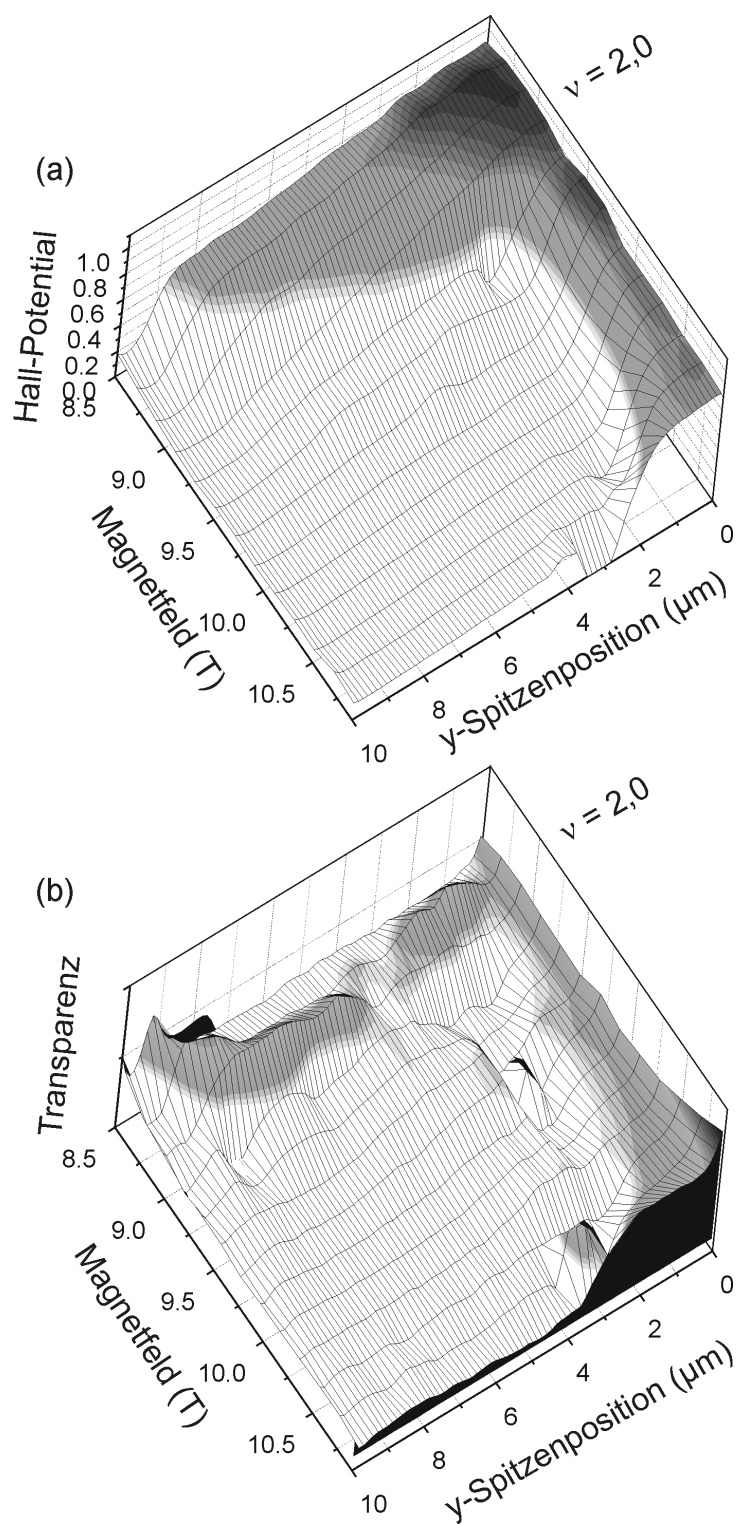


Abb. 8.4: Vergleich der Magnetfeldabhängigkeit bei hohen Strömen für (a) die Potentialverteilung und (b) die Transparenzeigenschaften des 2DES. Beide Male ist eine Probenspannung von 160 mV zwischen den Stromkontakten angelegt. Der Verlauf der der Position des Potentialsprungs stimmt in etwa mit der Region verstärkter Transparenz des 2DES überein.

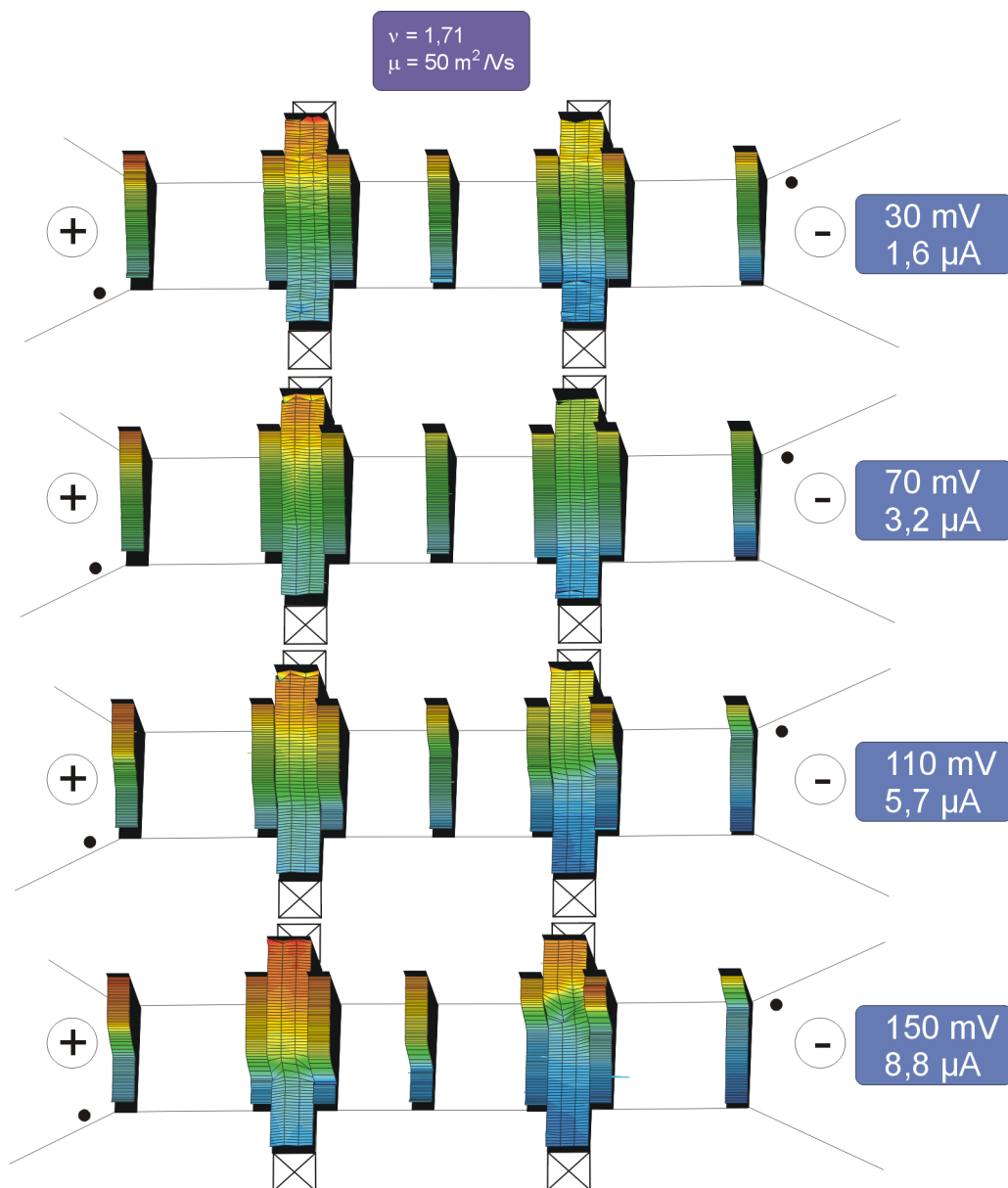


Abb. 8.5: Flächige Potentialentwicklung mit anwachsender Anregungsamplitude (a) - (d) für Füllfaktor $\nu = 1,71$ für Geometrie „B“ in Abb. B.1(a) und Probe „II“ in Abb. B.1(b). Für große Spannungs- bzw. Stromwerte ist ein stufenartiger Potentialabfall sichtbar, dessen Position sich in etwa diagonal entlang einer Verbindungslinie zwischen den zwei dissipativen Ecken (schwarze Punkte als Markierung) verschiebt.

werkes und damit zu Rückstreuung kommen. In allgemeinerer Vorstellung [91] kann der Zusammenbruch durch eine feldinduzierte Ausbildung von kompressiblen Inseln innerhalb der inkompressiblen Umgebung verstanden werden (Abb. 8.6 oben). Mit ansteigender Hall-Spannung

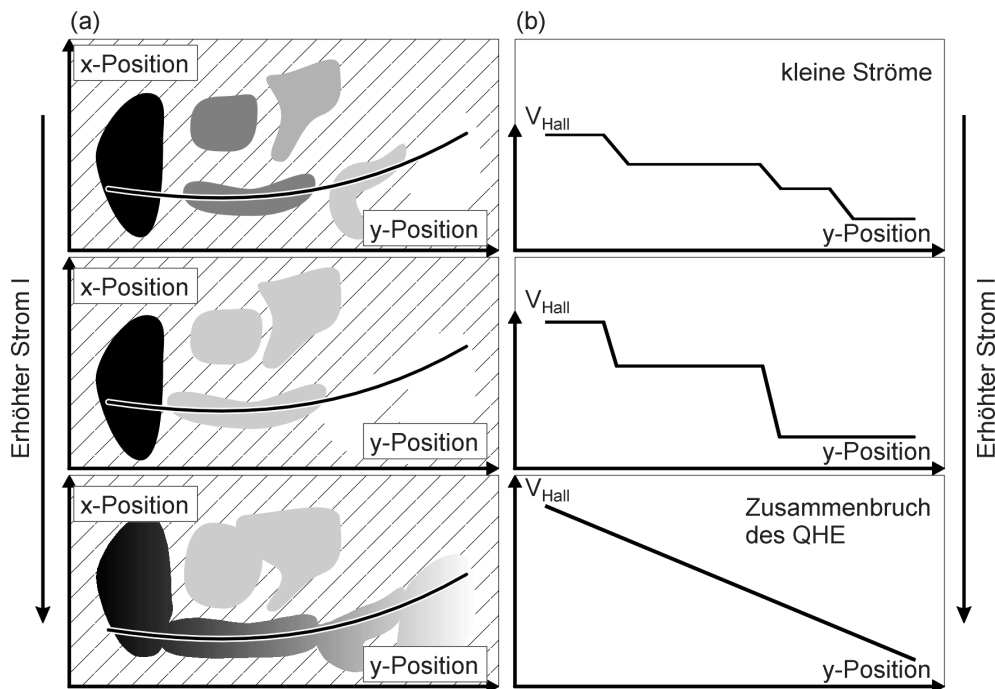


Abb. 8.6: Zusammenbruch des Quanten-Hall-Effekt bei ganzzahligen ν . (a) Ausbildung kompressibler Pfützen mit konstantem Potential innerhalb der inkompressiblen Probe. Mit steigender Stromstärke steigt die Feldstärke zwischen den Bereichen an und die Distanz verringert sich. Dadurch steigt die Feldstärke weiter an, bis sich beim Zusammenbruch ein durchgehender kompressibler Bereich bildet. (b) Die Hall-Spannung fällt entlang der jeweils in (a) markierten Linie zunächst nur zwischen den kompressiblen Bereichen über die trennenden inkompressiblen Bereiche ab, bis es bei hohen Strömen zum Zusammenbruch kommt und die Spannung über das gesamte vergrößerte kompressible Gebilde abfällt. Der Strom fließt ab dem Moment dissipativ über die ganze kompressible Probenbreite [91].

bricht die isolierende inkompressible Trennschicht zwischen zwei eng benachbarten kompressiblen Bereichen wegen der hohen lokalen elektrischen Feldstärke zusammen. Die kompressiblen Inseln können sich daher zu makroskopischen Gebieten erweitern (Abb. 8.6 Mitte) und schließlich die Probenränder miteinander verknüpfen (Abb. 8.6 unten). Bei anwachsender elektrischer Feldstärke und kleiner werdendem Abstand zwischen den kompressiblen Bereichen, wird dieser Prozeß kaskadenartig in einem Lawindurchbruch ablaufen und so zu einem durchgehenden metallischen Bereich mit dann dissipativem Stromtransport führen (Abb. 8.6 unten).

Da bei ganzzahligen Werten bis zu den untersuchten Probenspannungen noch kein Zusammenbruch beobachtbar war, ist ein direkter Vergleich zu den geschilderten Modellen nicht möglich. Sie scheinen aber nicht offensichtlich im Widerspruch zu unseren Experimenten zu stehen. Da-

gegen ist für Füllfaktoren knapp unterhalb ganzzahliger Werte der vermutliche Verlauf des elektrochemischen Potentials über den Probenquerschnitt in Abb. 8.7 für eine jeweils unterkritische (a), bzw. überkritische Stromstärke (b) dargestellt. Demnach tritt ab dem kritischen Wert wegen der starken Verkipfung der Landau-Niveaus örtlich ein Durchbruch ins jeweils höhere Landau-Niveau auf, so daß es im Übergangsbereich zu einem inkompressiblen Streifen mit lokal ganzzahligem ν_{lokal} kommt. Inter-Landau-Niveau-Übergänge sollten demnach auch bei nichtganzzahligen Füllfaktoren möglich sein. Der unerwartete Unterschied zum Zusammenbruchmodell für ganzzahlige Werte ist aber, daß es hierbei von einer dissipativen unterkritischen Ausgangssituation zu einem Übergang zu einer ebenfalls dissipativen überkritischen Endsituation kommt, bei der nun aber durch die Ausbildung inkompressibler Zustände ein Teilstrom auch dissipationsfrei getragen werden kann.

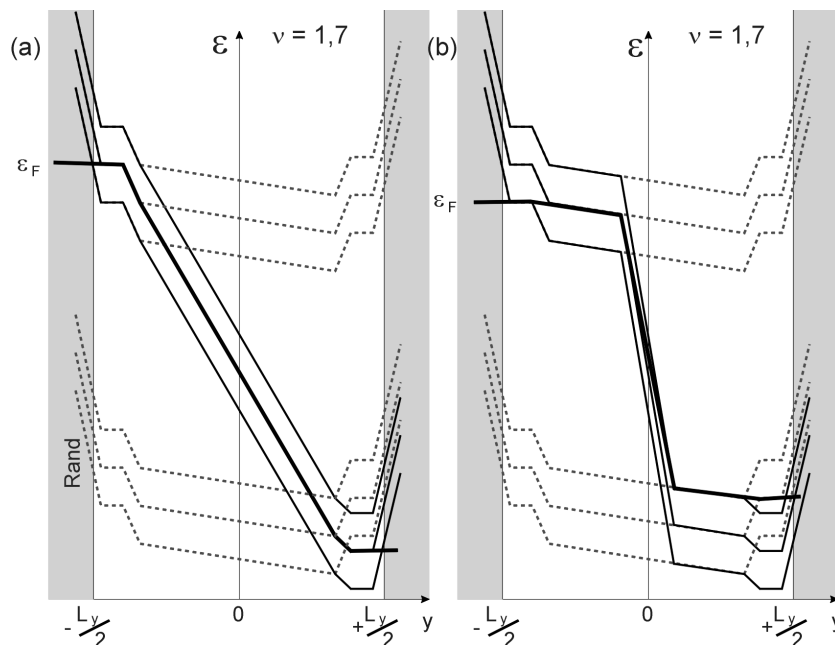


Abb. 8.7: (a) Schematischer „elektrochemischer“ Potentialverlauf für $\nu \approx 1,7$ bei unterkritischer Stromstärke und (b) bei überkritischer Stromstärke. Es kommt vermutlich einseitig zur Besetzung eines höheren Landau-Niveaus und damit zur Ausbildung eines inkompressiblen Streifens in der Probe aufgrund der großen Hall-Spannung. Wahrscheinlich liegt lokal eine Nichtgleichgewichtsverteilung vor, so daß eigentlich nicht von einem lokalen elektrochemischen Potential gesprochen werden kann!

8.6 Zusammenfassung

Bei einer Erhöhung des von extern aufgeprägten Stromes kommt es in Transportmessungen zum Zusammenbruch des Quanten-Hall-Effektes, d.h. der Stromtransport wird ab einer kritischen Stromstärke dissipativ. Hall-Potentialverteilungen konnten in diesem Regime untersucht werden – für exakt ganzzahlige Füllfaktoren war im Experiment allerdings der Zusammenbruch noch nicht erreicht, dieser Bereich sollten in zukünftigen Experimenten noch genauer untersucht werden. Besonders interessant ist hierbei die Entwicklung des Potentialprofiltyps I bei Füllfaktoren knapp oberhalb ganzzahliger Werte. Der ehemals lineare Potentialabfall verläuft ab einer kritischen Stromstärke stufenartig. Die Position des Potentialsprungs konnte anhand von Transparenzmessungen mit inkompressiblen Bereichen in Verbindung gebracht werden. Der Strom scheint daher vorzugsweise nicht mehr über einen breiten Bereich zu fließen, sondern stattdessen einem inkompressiblen Pfad unter Verminderung der Dissipation zu folgen. Dies entspricht einem in Transportmessungen beobachteten Rückgang des Längswiderstandes bei Erhöhung der Probenspannung über einen kritischen Wert. Dieser Strompfad windet sich in etwa diagonal von einer Probenecke zur gegenüberliegenden entlang der Probe.

Kapitel 9

Neubetrachtung früherer Experimente

Im folgenden sollen einige Aspekte des beschriebenen Modells im Rahmen eigener weiterführender Messungen, aber auch in Hinblick auf andere Arbeiten, insbesondere im Zusammenhang mit dem vielzitierten Landauer-Büttiker-Formalismus diskutiert werden.

9.1 Sublineare Skalierung des longitudinalen Widerstandes mit dem Abstand der spannungsmessenden Kontakte

Wie in Abschnitt 5.4.1 beschrieben wurde, ist davon auszugehen, daß für Füllfaktoren knapp oberhalb ganzzahliger Werte ein dissipationsfreier Stromtransport innerhalb der inkompressiblen Randstreifen vorliegt. Ein widerstandsbehafteter Stromfluß im Probeninneren wird dabei weitgehend vermieden. Solange ein derartiger Paralleltransport über größere Distanzen aufrecht erhalten bleibt, ist daher zu erwarten, daß ein zwischen seitlichen Potentialkontakten gemessener longitudinaler Widerstand $R_{xx}(L)$ sublinear mit dem Abstand L zwischen den Kontakten skaliert.

In der Tat sind verschiedene Transportexperimente anderer Gruppen bereits durch einen Stromtransport in Randstreifen interpretiert worden [92, 93, 94, 95]. So beobachteten Dorozhkin *et al.* [95], daß die longitudinalen Widerstände der Shubnikov-de Haas-Maxima nicht proportional mit dem Abstand der Potentialabgriffe skalieren. Dies deutete daraufhin, daß ein Großteil der längeren Probe durch einen dissipationsfreien Kanal kurzgeschlossen ist. Es wurde daher argumentiert [93, 96], daß in diesen Systemen die Bestimmung der Widerstandskomponenten nicht möglich ist. Stattdessen haben McEuen *et al.* [94] in einem Modell vorgeschlagen, die möglichen Strompfade im „Bulk“-bereich und an den Rändern als eine Parallelschaltung mit unterschiedlichen Widerständen zu behandeln.

Maßgeblich für diesen Paralleltransport innerhalb dissipationsfreier Randstreifen ist das Streuverhalten zwischen Rand und Probeninneren, das sowohl von der Temperatur [97] und vom

Verlauf des Einschlußpotentials [98], als auch von lokalen Störstellen [99, 100] entlang des Probenrandes abhängt. Prinzipiell sollte ein Streuung zwischen dem kompressiblen Randstreifen und dem Probeninneren und damit die Tendenz des Systems, lokal ein Gleichgewicht zwischen dem mittleren elektrochemischen Potential der Randkanäle und dem Potential des mittleren Probenbereichs zu erreichen, von der Häufigkeit einzelner lokaler Streuzentren entlang einer Probendistanz abhängen. Für kleine Distanzen ist dies zunächst ein statistischer Effekt – Streuung hängt davon ab, ob zufällig im betrachteten Probenbereich Streuzentren vorhanden sind oder nicht. Erst bei größeren Distanzen steigt die Strehäufigkeit an, so daß sich ab einer effektiven mittleren Äquilibrierungslänge im Mittel die Potentiale angeglichen haben [101]¹. Erst ab solchen Distanzen zwischen den Potentialkontakten sollte daher mit einer gewöhnlichen linearen Skalierung von $R_{xx}(L)$ zu rechnen sein.

Um dieses Transportverhalten an den vorliegenden Proben zu überprüfen, wurde eine Hall-Geometrie mit verschiedenen Abständen zwischen den einzelnen Potentialabgriffen prozessiert. Hierbei sind, wie in Abb. 9.1(a) dargestellt, die gemäß Gleichung (2.32) normierten Meßkurven des Magnetowiderstandes für kleine Magnetfelder deckungsgleich, d. h. sie skalieren linear mit dem Kontaktabstand. Deutliche Abweichungen gibt es aber für das Maximum um $\nu = 2,5$ des longitudinalen Widerstandes. In Abb. 9.1(b) ist der absolute Widerstand R_{xx} als Funktion des Kontaktabstandes L für verschiedene Füllfaktoren oberhalb $\nu = 2$ gezeigt. Für kleine ν zeigt R_{xx} nur eine sehr geringe Abhängigkeit von L , erst für $\nu = 2,6$ ist ein deutlicher Anstieg zu sehen. Die beobachtete Fluktuation ist vermutlich auf die beschriebene statistische Verteilung von Streuzentren zurückzuführen. Für Füllfaktoren oberhalb $\nu = 6$ ist prinzipiell eine viel ausgeprägtere Proportionalität zu L zu beobachten (Abb. 9.1(c)).

Dies läßt sich im Modell des quasidissipationslosen Stromes am Rand der Probe erklären, der die leitende, aber widerstandsbehaftete Probenmitte kurzschließt und daher für Füllfaktoren knapp oberhalb $\nu = 2$ einen nennenswerten Stromfluß im Probeninneren verhindert. Erst in Bereichen, wo die Entkopplung zwischen Probenrand und Probeninneren gering geworden ist und ein Anteil des Stroms dissipativ über die ganze „Bulk“-breite fließt, sollte man eine lineare Abhängigkeit in $R_{xx}(L)$ von L beobachten. Dies trifft auf die experimentelle Beobachtung für höhere Füllfaktoren mit $\nu = 6, x$, bzw. kleine Magnetfelder zu.

Die in Abb. 9.1(a) bei großen Abständen der Potentialabgriffe sichtbare stärkere Unterdrückung des Shubnikov-de Haas-Maximums um $\nu = 2,5$ im Vergleich zum Maximum um $\nu = 3,5$ ist durch die Breite bzw. Entkopplungseigenschaft der jeweils innersten inkompressiblen Streifen erklärbar. Die Streifenbreite hängt von der Energielücke zwischen den Landau-Niveaus ab und ist für „spin up“ Zustände durch die größere Energielücke $\hbar\omega_c - g^*\mu_B B$ (vgl. Abb. 2.2) im Vergleich zu „spin down“ Zuständen mit der kleineren Energielücke $g^*\mu_B B$, gegeben. In der

¹Unter bestimmten Umständen konnte in Transportmessungen nachgewiesen werden, daß eine elektrochemische Potentialdifferenz zwischen Rand und Probeninneren über eine Distanz von mehr als 0,1 mm aufrecht erhalten bleiben kann [102].

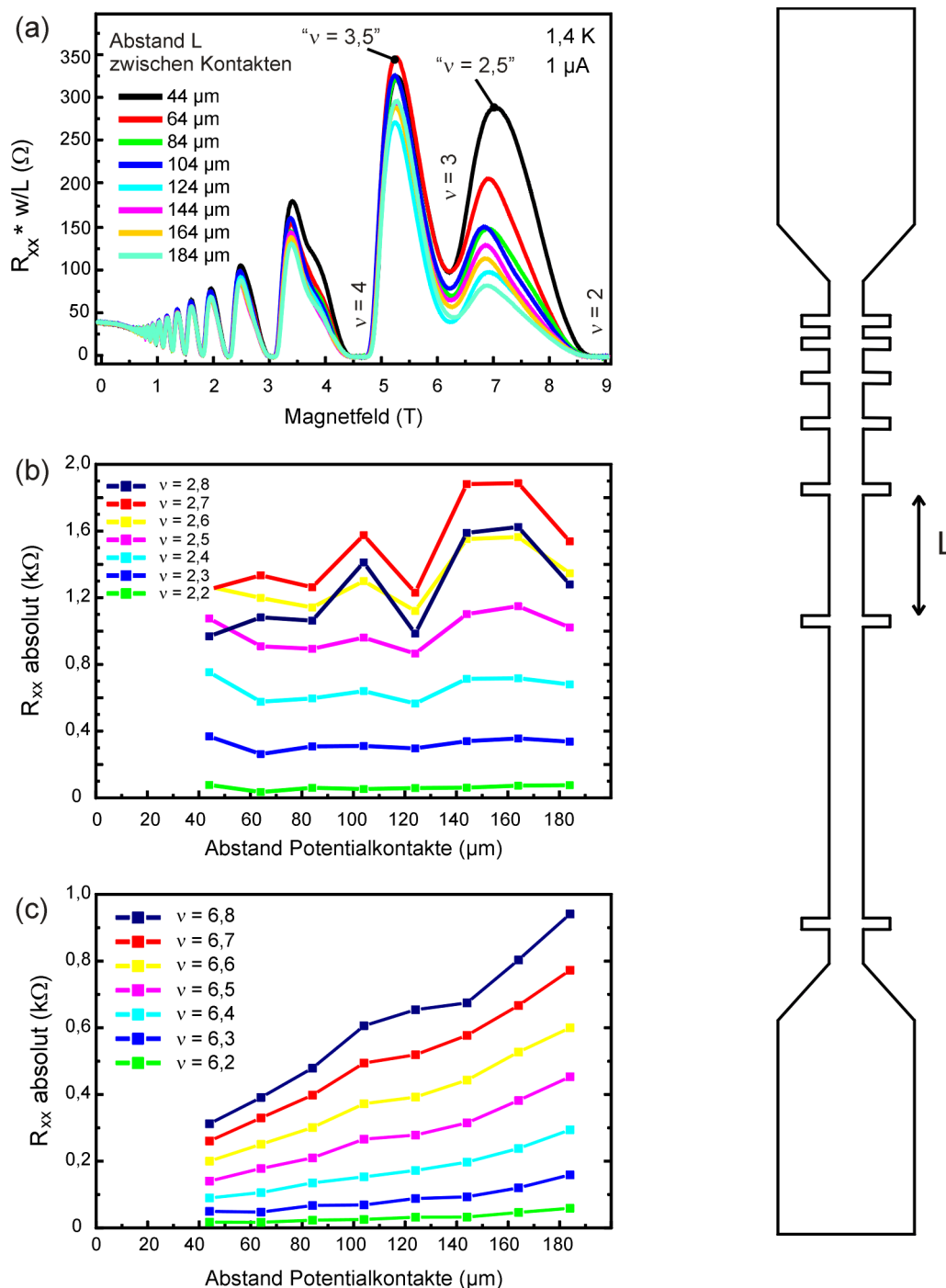


Abb. 9.1: (a) Gemäß Gleichung (2.32) normierter longitudinaler Widerstand für verschiedene Kontaktabstände L . Die Probenbreite beträgt 10 μ m. Offensichtlich macht die Normierung keinen Sinn für das Widerstandsmaximum um $\nu = 2, 5$. (b) Absoluter Widerstand R_{xx} als Funktion des Kontaktabstandes für verschiedene Füllfaktoren oberhalb $\nu = 2$. Die Skalierung mit dem Abstand ist nur sehr gering. (c) Dasselbe für verschiedene Füllfaktoren oberhalb $\nu = 6$. Hier ist die Skalierung wesentlich größer.

Nähe von $\nu = 2,5$ ist die Streuung zwischen Rand und Probeninneren daher effektiver unterdrückt, so daß ein geringerer Stromanteil dissipativ im Probeninneren fließt als bei mittleren Füllfaktoren um $\nu = 3,5$ herum. Nachtwei [62] hatte diese Beobachtung allgemeiner durch aufgrund der unterschiedlich großen Energielücken verschieden großer Äquilibrierungslängen erklärt. Die vorliegenden experimentellen Ergebnisse verknüpfen Nachtwei's phänomenologisches Modell der Äquilibrierungslänge demnach mit der Breite bzw. Entkopplungseigenschaft der inkompressiblen Streifen.

9.2 Landauer-Büttiker-Formalismus

Der Stromtransport im ganzzahligen Quanten-Hall-Effekt wird häufig, insbesondere auch in Lehrbüchern (z.B. [14]), anhand ein-dimensionaler stromtragender Randkanäle beschrieben, wie sie ursprünglich von Büttiker [31] vorgeschlagen wurden. In Folge dessen hat sich der sogenannte Landauer-Büttiker-Formalismus etabliert, der die elektrochemischen Potentiale der Kontakte mit den Strömen in oder aus den Kontakten verknüpft durch die Transporteigenschaften der Randkanäle. Dieser Formalismus hat sich in vielen Interpretationen experimenteller Ergebnisse als sehr erfolgreich erwiesen. Insbesondere bei Transportexperimenten mit lokaler Verarmung des 2DES von Rand zu Rand durch Metallelektroden ließen sich die als Funktion der Verarmung auftretenden Hall-Plateaus bei nicht-ganzzahligen Werten gut in diesem Formalismus beschreiben [103, 104] (einen Überblick liefert [32]). Er ist daher sicherlich ein nützliches Hilfsmittel zur Beschreibung mancher experimenteller Gegebenheiten - die explizite Verknüpfung des Ortes des Stromflusses mit der Position der ausgedehnten Zustände an der Fermi-Kante ist dabei aber irreführend und im Bild der selbstkonsistenten Potentialverteilungsrechnungen nicht zwangsläufig gegeben. Bevor unsere modifizierte Vorstellung detailliert dargestellt wird, soll zuerst Büttikers Modell und anschließend der Landauer-Büttiker-Formalismus genauer beschrieben werden.

9.2.1 Büttikers Modell eindimensionaler Stromkanäle

Büttiker [31] schlug vor, daß sich eine von außen vorgegebene Änderung des elektrochemischen Potentials nur auf die Randzustände nahe der Fermi-Energie auswirkt². Eine Hall-Spannung V_{Hall} erniedrigt daher in diesem Bild symmetrisch auf einer Seite der Probe das elektrochemische Potential $\mu_{\text{elch,L}}$ bis zu dem die Randkanäle besetzt sind und erhöht es auf der anderen Seite auf $\mu_{\text{elch,R}}$ (vgl. Abb. 9.2(a)), so daß gilt $eV_{\text{Hall}} = \mu_{\text{elch,L}} - \mu_{\text{elch,R}}$. Da sich alle Strombeiträge von vollständig besetzten Zuständen unterhalb $\mu_{\text{elch,R}}$ durch die gegenläufigen Beiträge links und rechts wegheben, wird der Nettostrom nur von Zuständen mit $\mu_{\text{elch,R}} \leq \varepsilon \leq \mu_{\text{elch,L}}$ nahe der

²Eine gute Darstellung findet sich in [105, 106, 107]

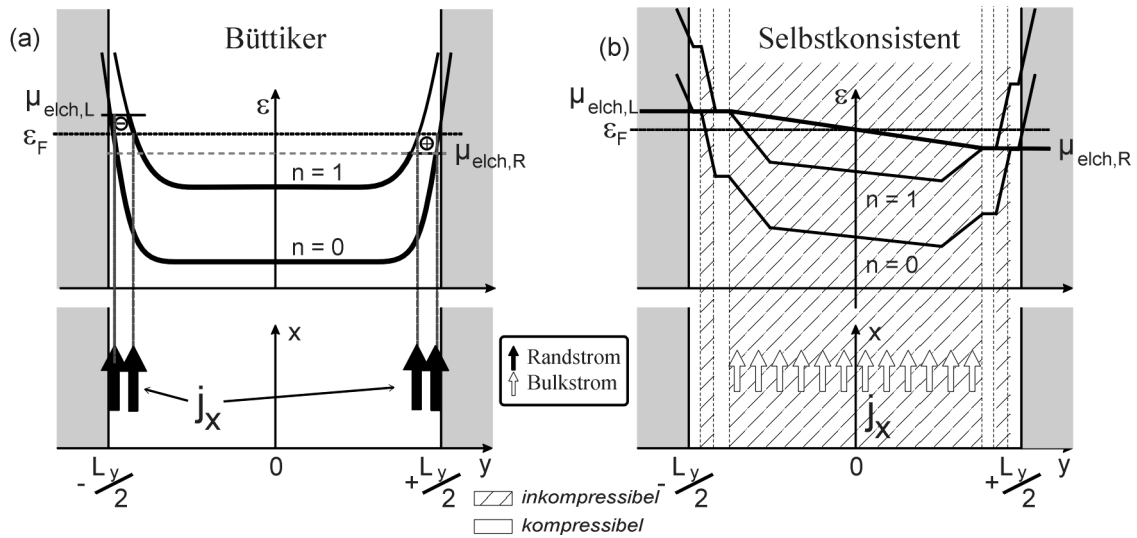


Abb. 9.2: Verbiegung der Landau-Niveaus und Stromverteilung bei ganzzahligem ν im Probenquerschnitt, (a) im simplen Einteilchen-Modell nach Büttiker [108]: Die Randzustände werden gemäß der Differenz im elektrochemischen Potential zwischen den Rändern unterschiedlich mit Elektronen besetzt. Nur die Zustände mit Energien nahe der Fermi-Energie tragen daher zum Nettostrom durch Elektronen oder Löcher bei. Tieferliegende Zustände löschen sich in ihren Strombeiträgen auf der linken und rechten Seite aus. (b) Im selbstkonsistenten Gesamtmodell aus Abschnitt 5.4 wird das elektrochemische Potential entlang der kompressiblen Randstreifen getragen, der Potentialabfall und der Stromfluß finden aber im inkompressiblen Probeninneren statt.

Fermi-Energie getragen. Genauer gesagt wird der linksseitige Strom $I_L = -e/h \cdot (\mu_{\text{elch,L}} - \varepsilon_F)$ von Elektronen mit einer Energie $\varepsilon_F \leq \varepsilon \leq \mu_{\text{elch,L}}$ getragen, der rechtsseitige Strom $I_R = -e/h \cdot (\varepsilon_F - \mu_{\text{elch,R}})$ aber von Löchern mit Energien $\mu_{\text{elch,R}} \leq \varepsilon \leq \varepsilon_F$. Dieser Strom kann daher als Fermi-Kanten-Randstrom angesehen werden. Der Nettostrom-Kanal ist dabei auf einen sehr schmalen Bereich mit einer Breite von der Größenordnung der magnetischen Länge begrenzt. Oft wird nur dieser Kanal als Randkanal oder Randzustand bezeichnet, im Gegensatz zum Gleichgewichtsfall, wo sich der Kanal über die ganze Breite des nicht-verschwindenden Gradienten erstreckt (s. Abschnitt 5.2.2). Die endliche Breite der Hall-Plateaus kann auch in diesem Modell erst durch das Vorhandensein von lokalisierten Zuständen im Inneren der Probe verstanden werden, die keine Streuung zwischen den Rändern zulassen, aber bei Füllfaktoränderung die Zahl der Randkanäle stabilisieren (vgl. Abschnitt 5.3.2).

Unzulänglichkeiten des Büttiker-Modells

Dieses Modell ist zwar verlockend intuitiv, aber nach den in Abschnitt 5.4 dargestellten Überlegungen in einem selbstkonsistenten Bild allzusehr vereinfacht. Wie in Abb. 9.2 vergleichend gegenübergestellt, sollte es am Probenrand nach Chklovskii [63] zur Ausbildung einer selbstkonsistenten Streifenstruktur kommen (s. Abschnitt 4.2.1). Das elektrochemische Potential wird dabei entlang der kompressiblen Randstreifen getragen, der Potentialgradient und damit der Stromfluß treten aber innerhalb des inkompressiblen Probeninneren auf!

Fälschlicherweise wird oft Büttikers Einteilchenbild auf das selbstkonsistente Randstreifenmodell adaptiert, indem die kompressiblen Streifen direkt mit Büttikers ein-dimensionalen Kanälen gleichgesetzt werden. Zustände an der Fermi-Kante sind aber räumlich getrennt von Zuständen mit nichtverschwindendem Potentialgradienten, d.h. dort liegt keine Elektronendrift durch das elektrische Feld vor.

9.2.2 Einführung des Landauer-Büttiker-Formalismus

Vorbemerkung

Der Landauer-Büttiker-Formalismus ist unabhängig vom lokalen Ort des Stromflusses, solange das elektrochemische Potential mit Hilfe der kompressiblen Randstreifen zwischen den Probenkontakten transportiert werden kann. So wies Beenakker [105] darauf hin, daß die Tatsache, daß der Hall-Widerstand durch Transmissionswahrscheinlichkeiten der Randzustände an der Fermi-Energie ausgedrückt werden kann, nicht impliziert, daß diese Zustände einen makroskopischen Strom tragen. Hierzu müssen alle Zustände unterhalb der Fermi-Energie berücksichtigt werden. Nach seinem Argument bestimmen Randkanäle nur dann den Ort des Stromflusses, wenn die Differenz im elektrochemischen Potential nur durch einen Konzentrationsunterschied gegeben ist, also einen Diffusionsstrom erzeugt. Bei einem Unterschied im elektrostatischen Potential sagen Randkanäle nichts darüber aus, wo der elektrische Strom fließt. Büttikers Formalismus bezieht sich demnach in seiner Aussage auf den Gesamtstrom, nicht aber auf die lokale Stromdichte. Auch Thouless [109] betonte, daß dieser Formalismus nicht in Frage gestellt ist, obwohl seine Rechnungen ergaben, daß ein beträchtlicher Anteil des externen Stromes nicht am Randstreifen fließt, sondern aber im Probeninneren durch das elektrische Feld der angehäuften Randladung induziert wird. Eine genauere Diskussion dieses Formalismus in unserer Interpretation der Stromverteilung wird in Abschnitt 9.2.3 geführt werden. Die Methodik an sich soll im folgenden vorgestellt werden.

Formalismus

Für den eindimensionalen Transport entlang von Randkanälen in einer Multiterminal-Probe unter Quanten-Hall-Bedingungen erweiterte Büttiker einen früheren Ansatz von Landauer [110] zum oft zitierten Landauer-Büttiker-Formalismus [31, 108]. Hierbei wird davon ausgegangen, daß jeder der im Einteilchen-Modell aus Abschnitt 5.2.3 beschriebenen 1D-Stromkanäle gemäß (5.9) einen Leitwert von e^2/h besitzt und sämtliche Kontakte mit charakteristischen Reflektions- bzw. Transmissionskoeffizienten durchläuft. Dabei werden nur elastische Streuprozesse berücksichtigt, so daß alle Dissipation in den Kontakten stattfindet. Der Gesamtstrom muß dabei erhalten bleiben, so daß sich ein Gleichungssystem zur Lösung der einzelnen Teilströme zwischen den Kontakten ergibt. Damit läßt sich auch für eine Hall-Struktur mit Strom- und Potentialkontakten der Vierpunkt-Widerstand berechnen. Der Teilstrom für Kontakt j ist dabei gegeben durch:

$$I_j = -\frac{e}{h} \sum_{i=1}^{\nu} \left[(1 - R_j^i) \cdot \mu_{\text{elch},j} - \sum_{k \neq j} T_{k \rightarrow j}^j \cdot \mu_{\text{elch},k} \right] \quad (9.1)$$

Hierbei ist $0 \leq R_j^i \leq 1$ die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der i -te Randkanal, der Kontakt j verläßt, in denselben Kontakt j zurückgestreut wird. Der erste Term in Gl. (9.1) beschreibt daher den Teilstrom, der von Kontakt j in das 2DES fließt. Dagegen bezeichnet $0 \leq T_{k \rightarrow j}^j \leq 1$ die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der i -te Randkanal aus Kontakt k in den j -ten Kontakt transmittiert wird. Der zweite Term behandelt demnach den Strom, der von den anderen Kontakten in den Kontakt j gelangt. Randkanäle tragen dabei stets das elektrochemische Potential des injizierenden Kontaktes. Diese Formeln für die einzelnen Teilströme sind besonders einfach für den Fall verschwindender Reflektion, bzw. idealer Transmission der Randkanäle. Dies wird für den Fall ganzzahliger Füllfaktoren im Quanten-Hall-Effekt vorausgesetzt. Dann ergibt sich die exakte Quantisierung der Plateau-Werte als Folge der absoluten Unterdrückung von Rückstreuung von einem Randkanal zum gegenlaufenden Randkanal an der anderen Probenseite. Für eine einfache Kreuzgeometrie mit stromeinspeisenden Kontakten 1 und 3 (s. Abb. 9.3(a)) folgt für den Hall-Widerstand, der senkrecht zum Stromfluß zwischen Kontakt 2 und 4 gemessen wird, mit Gl. (9.1) und vorgegebenem Strom $I_1 = -I_3 = I$:

$$R_{\text{Hall}} = \frac{\mu_{\text{elch},2} - \mu_{\text{elch},4}}{(-e)I} = \frac{h}{e^2} \frac{1}{\nu} \quad (9.2)$$

9.2.3 Der Landauer-Büttiker-Formalismus in unserem Modell

Transportmessungen an lokal verarmten Hall-Strukturen werden oft im Rahmen des Landauer-Büttiker-Formalismus interpretiert. Deshalb sollen hier als Beispiel die Ergebnisse von Haug *et al.* [103] im Rahmen unseres Modell genauer diskutiert werden. Hierbei wird der longitudinale Widerstand an einer Hall-Geometrie wie in Abb. 9.3 gemessen, die in der Mitte über die gesamte Breite mit einer Steuerelektrode bedeckt ist. Bei entsprechendem Magnetfeld läßt sich damit

für den Hauptbereich der Probe ein ganzzahliger Füllfaktor ν_b einstellen und gleichzeitig durch eine Reduktion der Elektronenkonzentration unter der Elektrode ein ganzzahliger Füllfaktor $\nu_g < \nu_b$ erreichen. Aus dem Experiment ergibt sich ein quantisierter 2-Punkt-Widerstand, der nur durch den ganzzahligen Füllfaktor ν_g des Bereichs unter der Steuerelektrode bestimmt ist. Der Landauer-Büttiker-Formalismus sagt dies voraus, indem davon ausgegangen wird, daß die inneren Randkanäle an der Steuerelektrode reflektiert werden und nur exakt ν_g äußere Kanäle entlang des Randes transmittiert werden. Für den skizzierten Fall ist dies $\nu_g = 1$ und damit $R_{xy} = h/e^2$.

Das simple Büttikerbild der Randkanäle (Abb. 9.3(b)) erweitert sich im Randstreifenbild zu den in (c) skizzierten kompressiblen und inkompressiblen Bereichen. Das elektrochemische Potential der Kontakte wird in den äußersten kompressiblen Streifen ungehindert entlang der gesamten Probenlänge transportiert (d) und sorgt in gewohnter Form zur Ausbildung eines Potentialgradienten über den Bereich unterhalb der Steuerelektrode (II). Der innere kompressible Streifen trägt ebenfalls das elektrochemische Potential des injizierenden Kontaktes, wird aber entlang der Elektrode reflektiert und auf der anderen Probenseite zum Kontakt zurückgeleitet. Demnach befindet sich das gesamte umfaßte Gebiet vor dem Kontakt auf identischem Potential (d). Die Hall-Spannung fällt daher nur über den schmalen Bereich des inkompressiblen Streifens ab - diesseits der Steuerelektrode über den linken Streifen, jenseits davon über den rechten Streifen (I) und (III). Ein solcher Potentialabfall wurde experimentell von Woodside *et al.* [111] mit deren vergleichbaren Rasterkraftmessung beobachtet.

Die kompressiblen Randstreifen übernehmen demnach die Rolle der Büttiker-Randkanäle, die das elektrochemische Potential tragen und selektiv reflektiert werden können. Der damit verknüpfte quantisierte Strom kann dabei aber ganz anderen Wegen entlang ausgedehnter Zustände unterhalb der Fermi-Energie folgen. Die Quantisierung kommt durch eben diese vollständige Besetzung von Zuständen einzelner Landau-Niveaus zustande. Im vorliegenden Fall fließt der Strom in den Gebieten außerhalb der Steuerelektrode in dem schmalen Bereich des größten Potentialgradienten, d.h. im Bereich des inkompressiblen Randstreifens in den Zuständen der beiden besetzten Landau-Niveaus. Dagegen kann der Strom im Bereich der Steuerelektrode wie gewohnt in den vollständig besetzten ausgedehnten Zuständen des untersten Landau-Niveaus durch das ganze Probeninnere senkrecht zum lokalen Potentialgradienten fließen. Der Strom wechselt daher zwischen den drei in Abb. 9.3 skizzierten Schnitten (I-III) seine Position von einer Probenseite zur anderen.

Zusammenfassend lässt sich für diesen Abschnitt sagen, daß typische, wie in [103] beschriebene Transportexperimente mit lokaler Verarmung des 2DES gut im vorgestellten Modell verstanden werden können. Die kompressiblen Streifen tragen die Information über die elektrochemischen Potentiale der beteiligten Kontakte. Die dazwischenliegenden inkompressiblen Bereiche führen aufgrund des durch den elektrochemischen Potentialgradienten lokal veränderten trans-

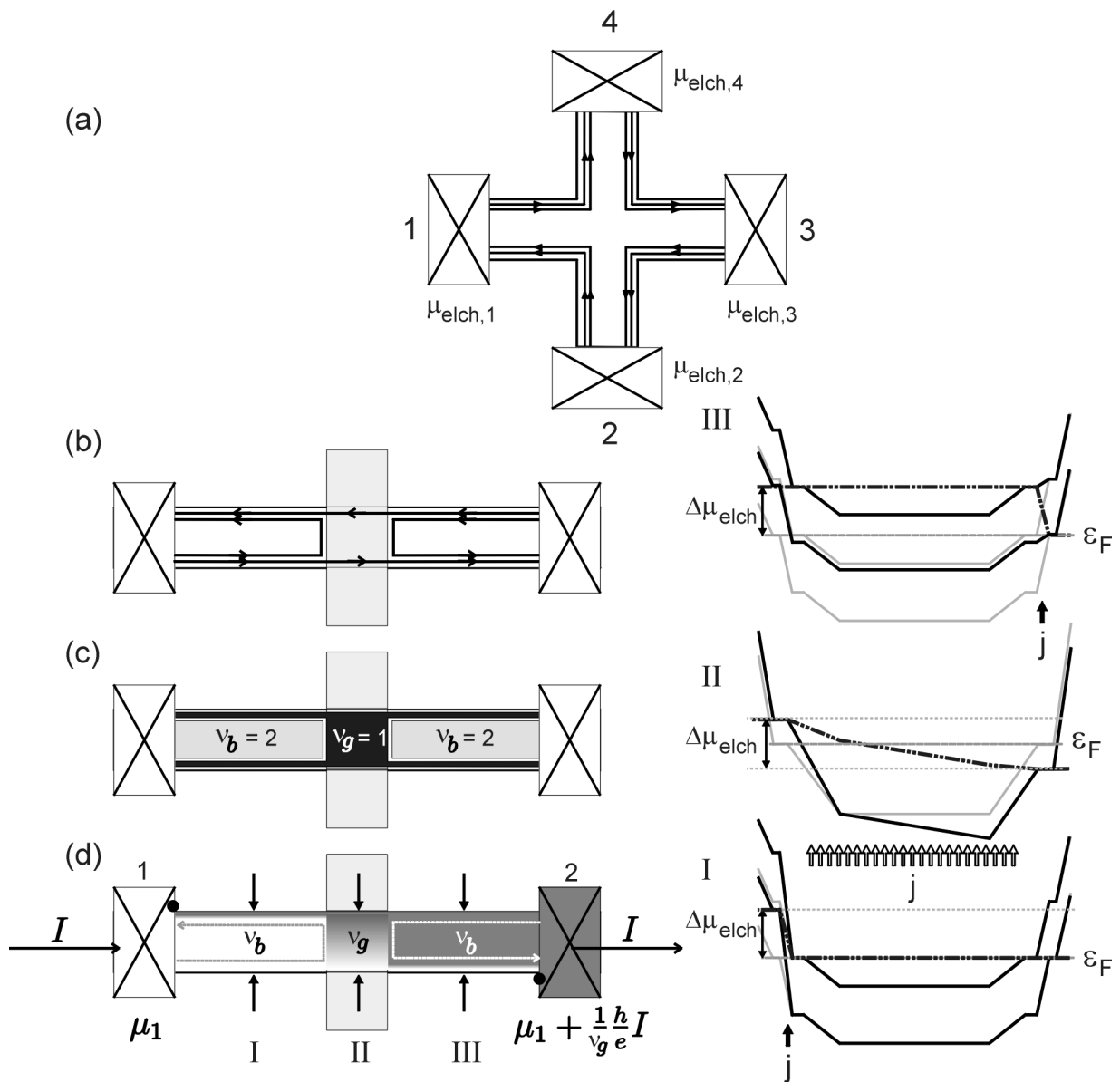


Abb. 9.3: Landauer-Büttiker-Formalismus und selbstkonsistente Potential- und Stromverteilung. (a) Einfache Kreuzgeometrie mit Büttikers simplen Randkanälen. (b)-(d) Betrachtet wird eine Hall-Geometrie mit Steuerelektrode im Mittenbereich und lokalem $\nu_g = 1$, der Rest der Probe soll bei $\nu_b = 2$ liegen. (b) Simples Büttikerbild der Randkanäle. (c) Schema der kompressiblen (weiß) und inkompressiblen (dunkel) Bereiche. Die kompressiblen Randstreifen tragen das elektrochemische Potential der Kontakte in die Probe hinein. (d) Potentialverteilung als Grauskala. Einzelne Schnitte sind in (I) - (III) dargestellt. Dünne graue Linien geben die Verbiegung der Landau-Niveaus im Gleichgewicht wieder, dicke schwarze Linien den Nichtgleichgewichtszustand. Die dicke gestrichpunktete Linie stellt den modifizierten Verlauf des elektrochemischen Potentials dar. Zusätzlich ist jeweils die örtliche Position nichtverschwindender Stromdichte markiert.

versalen elektrostatischen Potentialgradienten einen longitudinalen Strom. Die Verknüpfung zwischen elektrochemischem Potential und Strom ist weiterhin durch den Landauer-Büttiker-Formalismus gegeben.

9.3 Zusammenfassung

Unser vorgestelltes Modell aus kombinierten Rand- und „Bulk“-Strömen läßt sich auch gut auf andere experimentelle Ergebnisse übertragen. So kann ein sublineares Skalieren des longitudinalen Widerstandes mit dem Potentialkontaktabstand L für Füllfaktoren knapp oberhalb ganzzahliger Werte durch ein Kurzschließen des Probeninneren durch die inkompressiblen Streifen verstanden werden, die einen weitgehend dissipationsfreien Strom tragen können. Darüberhinaus behält der oft zitierte Landauer-Büttiker-Formalismus für ganzzahlige Füllfaktoren seine Gültigkeit in seiner Kernaussage. Allerdings findet der Stromfluß örtlich getrennt von den potentialdefinierenden kompressiblen Randstreifen statt und kann sich – in Abhängigkeit vom örtlichen mittleren Füllfaktor und der räumlichen Anordnung der Potentialkontakte – über das ganze inkompressible Probeninnere oder aber nur über einen engen inkompressiblen Randbereich erstrecken.

Kapitel 10

Zusammenfassung und Ausblick

Obwohl der Quanten-Hall-Effekt seit seiner Entdeckung vor mehr als 20 Jahren in einer Vielzahl von Forschungsprojekten untersucht worden ist, konnte in den vergangenen Jahren weder experimentell noch theoretisch eindeutig geklärt werden, wo mikroskopisch in der Probe der Hall-Strom fließt und welche Auswirkung dies auf die mikroskopische Potentialverteilung hat. Einerseits werden Theorien, die einen Stromtransport entlang von Randkanälen voraussagen, scheinbar durch Experimente bestätigt, andererseits gibt es ebenso Modelle, die von einem Strom im Inneren der Probe ausgehen und ebenfalls Bestätigung in anderen experimentellen Beobachtungen finden. Um hier zur Klärung beizutragen, wurden in der vorliegenden Arbeit mit Hilfe eines Rasterkraftmikroskops orts aufgelöste Hall-Potentialverteilungen unter Quanten-Hall-Bedingungen gemessen. Dabei konnten die ersten vorläufigen Beobachtungen der Vorgängerarbeit [47] bestätigt und wesentlich ausführlicher und genauer analysiert werden. So wurde eine Allgemeingültigkeit der beobachteten charakteristischen Potentialprofile durch zahlreiche Messungen an verschiedenen Probengeometrien und Heterostrukturen gezeigt. Darüberhinaus konnten das Abschirmverhalten des 2DES, Einflüsse metallischer Kontakte auf die Potentialverteilung und die Änderung der Potentiallandschaft bei hohen Strömen untersucht werden.

Es können grob drei verschiedene Hall-Potentialprofile in Abhängigkeit des Füllfaktors ν unterschieden werden, die zu folgender Modellvorstellung führen: Es kommt innerhalb einer Hall-Struktur zur selbstkonsistenten Ausbildung von *kompressiblen* und *inkompressiblen* Streifen bzw. Bereichen mit Zuständen an bzw. unterhalb der Fermi-Energie. Diese sind im Probeninneren durch Potentialfluktuationen aufgrund zufällig verteilter Donatoratome gegeben, bzw. am Rand aufgrund des Einschlußpotentials. Prinzipiell bewirkt ein transversaler elektrostatischer Potentialgradient eine longitudinale Stromdichte. Sie kann in inkompressiblen Bereichen, wo keine freien Zustände an der Fermi-Energie vorhanden sind, dissipationsfrei sein. In kompressiblen, ausgedehnten Netzwerken kann es dagegen zu *Rückstreuprozessen* an der Fermi-Energie und damit zu *Dissipation* kommen.

- Für **ganzzahlige Füllfaktoren**, also etwa in der Mitte von Quanten-Hall-Plateaus, fällt das Hall-Potential relativ nichtlinear über die Probenmitte ab. Hier liegt ein hauptsächlich inkompressibles 2DES im Probeninnern vor, das aufgrund immer vorhandener Potentialfluktuationen von kompressiblen Bereichen durchsetzt ist. Die elektrochemische Potentialdifferenz der stromeinspeisenden Kontakte wird entlang der kompressiblen Randstreifen als Hall-Spannung in das Probeninnere getragen. Hier kommt es selbstkonsistent zu einer Umverteilung und Verschiebung der einzelnen kompressiblen Bereiche und zu „hopping“-Prozessen untereinander als Reaktion auf die geänderten Randpotentiale. Der sich ausbildende Potentialgradient über die inkompressiblen Zwischenbereiche treibt schließlich den Hall-Strom entlang ggf. mäandernder Strompfade dissipationfrei durch das Probeninnere. Das an seitlichen Potentialkontakten gemessene elektrochemische Potential wird dabei durch die kompressiblen Randstreifen bestimmt, die räumlich getrennt sind vom eigentlichen Stromfluß im Probeninneren. Der oft zitierte Landauer-Büttiker-Formalismus, der den Stromtransport im Quanten-Hall-Regime mit eindimensionalen Kanälen in Verbindung bringt, ist in seiner Aussage daher weiterhin korrekt. Die von Büttiker angenommene örtliche Identität der strom- und potentialtragenden Randkanäle ist aber nach unserer Interpretation nicht richtig.
- Für etwas höhere ν **knapp oberhalb ganzzahliger Werte** kommt es zu einer starken Entkopplung zwischen dem kompressiblen Innen- und Außenbereich, d.h. das Hall-Potential verläuft über den Innen- und die Randbereiche transversal jeweils nahezu flach und fällt erst über den jeweils innersten inkompressiblen Randstreifen ab. Zusätzliche Messungen zum lokalen Abschirmverhalten des 2DES bestätigen, daß sich das 2DES in den Bereichen des erhöhten Potentialabfalls inkompressibel verhält. Demnach fließt in dem Fall nahezu kein Strom im Probeninneren, sondern vorzugsweise dissipationfrei innerhalb dieser inkompressiblen Streifen. Dieses Kurzschließen des kompressiblen Probeninneren über die inkompressiblen Randstreifen führt auch zu der schon in früheren Arbeiten beobachteten sublinearen Skalierung des longitudinalen Widerstandes mit dem Abstand der seitlichen Potentialkontakte.
- Mit zunehmendem Füllfaktor sinkt die Breite der inkompressiblen Streifen und damit auch die Entkopplung zwischen Rand und Probeninneren und es kommt bei **Füllfaktoren knapp unterhalb ganzzahliger Werte** zu einem verstärkt dissipativem Stromfluß über die gesamte Probenbreite, die nun aus einem kompressiblen Netzwerk – durchsetzt von inkompressiblen Bereichen – besteht.

Ein wichtiges Ergebnis dieser Arbeit ist, daß dieser stufenartige Potentialunterschied zwischen Probeninneren und Randbereich bei Füllfaktoren knapp oberhalb ganzzahlige Werte ebenso in der direkten Umgebung entlang von **metallischen Kontakten** beobachtet wird. Dies ist auf eine

partielle Verarmung des 2DES aufgrund von Unterschieden in den Austrittsarbeiten von 2DES und Kontaktmaterial zurückzuführen und damit auf eine analoge Ausbildung von inkompressiblen Streifen entlang der Kontaktgrenze. Demnach fließt der Strom für Füllfaktoren knapp oberhalb ganzzahliger Werte nicht durch einen seitlichen Potentialkontakt, sondern innerhalb des inkompressiblen Streifens am Kontakt vorbei. Es kommt daher - wie im ganzzahligen Fall - zu keiner Dissipation innerhalb des metallischen Kontaktes.

Auch an **Corbino-Geometrien**, wo das 2DES in einer Ringstruktur mit innerem und äußerem Kontakt definiert ist, kommt es zu einem Potentialsprung über den inkompressiblen Streifen, der sich mit steigendem Füllfaktor nach außen verschiebt. Der Strom hat dabei in radialer Richtung diese inkompressiblen Streifen zu überwinden. Ein lokales Leitfähigkeitsmodell basierend auf konzentrischen Ringen unterschiedlicher Leitfähigkeit kann sowohl den beobachteten Potentialprofilverlauf beim Ändern des Füllfaktors, als auch qualitativ die gemessene Stromentwicklung erklären. Die beobachtete Inhomogenität der Potentialprofile zeigt auf, daß man Transportmessungen an Corbino-Geometrien nicht – wie häufig der Fall – anhand eines homogenen Leitfähigkeitsmodells interpretieren oder auswerten sollte.

Von weiterführendem Interesse ist auch die Beeinflussung der geschilderten Potentialprofile bei einer Erhöhung des von extern aufgeprägten Stromes in den Bereich, bei dem es in Transportmessungen zum **Zusammenbruch des QHE** kommt. Für Füllfaktoren knapp unterhalb ganzzahliger Werte verläuft der zunächst lineare Potentialabfall ab einer kritischen Stromstärke interessanterweise stufenartig. Die Position des Potentialsprungs konnte anhand von Transparenzmessungen erneut mit inkompressiblen Bereichen in Verbindung gebracht werden. Der Strom scheint daher vorzugsweise nicht mehr über einen breiten Bereich bei hoher Dissipation zu fließen, sondern stattdessen einem inkompressiblen Pfad unter Verminderung der Dissipation zu folgen. Dies entspricht einem in Transportmessungen beobachteten Rückgang des makroskopischen Widerstandes. Dieser Strompfad windet sich entlang der Probe diagonal von einer zur gegenüberliegenden Ecke. Bei den beiden anderen Potentialprofiltypen ändert sich nur wenig. Allerdings ist der eigentliche Durchbruch bei ganzzahligen Füllfaktoren bei den Potentialuntersuchungen nicht vollständig erreicht worden.

Zusammenfassend sind innerhalb der vorliegende Arbeit detaillierte Bilder der Potentialverteilung innerhalb des Quanten-Hall-Regimes entstanden und ein selbstkonsistentes Modell der zugrunde liegenden Stromverteilung vorgestellt worden. Es kann nicht nur auf die weiterführenden eigenen Meßergebnisse, sondern auch auf schon vorliegende Experimente angewandt werden.

Ausblick

Eine Vertiefung und Erweiterung der vorgestellten Experimente ist in verschiedener Hinsicht denkbar:

- So sollten die in Anhang B nur kurz vorgestellten Untersuchungen an Proben mit unterschiedlicher Beweglichkeit noch erweitert werden zu einerseits hochbeweglichen Elektronensystemen mit nur sehr schmalen Hall-Plateaus, aber auch zu nur sehr schlecht beweglichen 2DES mit sehr ausgeprägter Plateau-Bildung. Es wäre sehr interessant, hier Unterschiede in der Potentialprofilentwicklung bei Änderung des Magnetfeldes zu beobachten. Trotz des unterschiedlichen Transportverhaltens sollte die Ausbildung der Randstreifenstruktur unabhängig von der Probenqualität sein. Besonders interessant wäre in diesem Zusammenhang der Einfluß der Randentkopplung bei Füllfaktoren knapp oberhalb ganzzahliger Werte, wo das Probeninneren durch inkompressible Randstreifen elektrisch für Hall-Ströme kurzgeschlossen wird.
- Desweiteren könnten Potentialprofilmessungen an Hall-Strukturen mit zusätzlichen Oberflächelektroden zur lokalen Verarmung des 2DES das Verhalten der Randstreifenstruktur besser erklären. Insbesondere könnte damit überprüft werden, ob der in Abb. 9.3 schematisch gezeigte, an verschiedenen Positionen unterschiedliche Verlauf des elektrochemischen Potentials experimentell bestätigt werden kann.
- Generell ist eine Erweiterung der Messungen in den Bereich fraktionaler Quantisierung wünschenswert. Dazu werden nicht nur tiefere Temperaturen und höhere Magnetfelder gebraucht, die demnächst für ein neues Rasterkraftmikroskop innerhalb eines Entmischungskryostaten am MPI zur Verfügung stehen werden, sondern auch hochbewegliche Proben mit möglichst oberflächennahem 2DES. Eine interessante Alternative zu den üblicherweise verwendeten modulationsdotierten Heterostrukturen könnten dabei undotierte Strukturen bieten, deren 2DES-Schicht nur durch eine elektrostatische Anreicherung mittels einer Rückseitelektrode bevölkert werden [112]. Somit kann der Störeinfluß der Dotierschicht vermieden und gleichzeitig die Elektronenkonzentration des 2DES kontrolliert werden. In solchen Strukturen sind bereits 2DES-Tiefen von 70 nm und Beweglichkeiten von $\mu = 600 \text{ m}^2/\text{Vs}$ realisiert worden [113]. Zur Erhöhung der Ortsauflösung bei den in Abschnitt 4.3 vorgestellten Untersuchungen zum Abschirmverhalten des 2DES sind prinzipiell geeignete Probenstrukturen mit überwachsener Rückseitelektrode interessant.
- Auch kombinierte Messungen zusammen mit einem ortsfesten Einzel-Elektronen-Transistor (SET) als sehr empfindlichem Elektrometer sind denkbar zur Ausmessung einzelner isolierter kompressibler Bereiche innerhalb des 2DES. Die frei positionierbare Meß-

spitze wäre dabei als Anregungsquelle einer elektrostatischen Potentialmodulation einsetzbar, die vom SET in Abhängigkeit der Spitzenposition detektiert werden kann und Rückschlüsse auf die lokale Potentiallandschaft und ihr Zerfallen in kompressible und inkompressible Bereiche zulassen würde.

Kapitel 11

English Summary

In this work Hall potential profiles have been studied with the help of a scanning force microscope in order to clarify the microscopic picture of the potential and current distribution in the quantum Hall effect.

Introduction

Although the quantum Hall effect [5] has stimulated a tremendous amount of research activities within the last two decades since its discovery in 1980 and has been used as a resistance standard since 1990, it has not been clarified up to now where microscopically the externally biased current is flowing through the two-dimensional electron system (2DES). Under quantum Hall conditions, the existence of so-called compressible and incompressible strips within the depletion region of the edge of the 2DES has been predicted [63, 68] which behave either metal- or insulator-like. Several authors have emphasized the important role of the edge in understanding current transport in the quantum Hall regime [30, 31, 32], but others pointed out that mainly the bulk of the 2DES is carrying the current in x direction which is driven by the electrostatic potential gradient in y direction [34, 35, 109, 36]. In order to address this issue in more detail, highly spatially resolved investigations of the Hall potential distribution were carried out by using e.g. electro-optical effects [37, 38] or more recently by using scanning probe methods [44, 45]. In the middle of quantum Hall plateaus rather nonlinear Hall-potential profiles were observed with the major potential drop located in the inner part of the sample, while the reported results are not so clear for the transition region between quantum Hall plateaus. In this work results on the Hall potential distribution measured on Hall bar and Corbino geometries by a low-temperature scanning force microscope are presented.

Two-dimensional electron systems

Nowadays it is possible to grow high quality crystals of compound semiconductors by gradually depositing single atomic layers with the help of the so-called molecular beam epitaxy. The materials of choice for growing heterostructures like the one sketched in fig. 2.1 are GaAs and $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$. The two compounds have different energy gaps and a nearly perfect lattice matching during crystal growth. Due to the discontinuity in the energy gap a triangular potential well is formed in the conduction band at the interface between GaAs and $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$. The kinetic energy in growth direction is quantized and subbands are formed. As long as the electrons that gather in this potential well populate only the lowest subband, they form a so-called *two-dimensional electron system (2DES)* since they are confined to the plane of the interface. In a magnetic field B applied perpendicular to 2DES plane, the constant density of states of an idealized 2DES at $B = 0$ splits into so-called δ -like Landau levels which are separated by the cyclotron energy $\hbar\omega_c$ or the Zeeman energy. The degeneracy of each Landau level and the distance between the Landau levels increase with the magnetic field. Therefore increasing the magnetic field leads to a sawtooth-like oscillation of the Fermi energy or the chemical potential, respectively (fig. 2.2). This has important consequences especially for transport experiments and leads e.g. to the Shubnikov-de Haas effect [22]. The Landau level filling factor denotes how far Landau levels are populated. At integer filling factors, the Fermi level is located between two Landau levels.

The quantum Hall effect

The quantum Hall effect is observed in transport measurements of a 2DES in a Hall bar geometry as sketched in fig. 2.3 where a current is biased to the sample in the presence of a strong perpendicular magnetic field of several Tesla and temperatures below 10 K. The transverse Hall voltage and the longitudinal voltage drop can be determined, which both show strong deviations from the classical expectation: A series of very flat plateaus appears in the Hall resistance for a certain range of magnetic field values which are very precisely quantized in integer fractions of the so-called von Klitzing constant $R_K = h/e^2$ (fig. 2.4). At the same time the longitudinal resistance seems to vanish completely within the plateau regions.

The Landau quantization can explain the quantized values only for certain magnetic field values, usually in the middle of a plateau, where the Fermi energy lies just in between two LLs. The formation of extended plateaus is believed to be related to potential fluctuations within the 2DES which cause a localization of electronic states. This will be discussed later on together with the second important ingredient for understanding the QHE, that is the influence of the finite size of the sample and special properties of the edge regions.

Experimental setup used in this thesis

Several Hall-bar and Corbino geometries have been studied, which are based on a modulation-doped GaAs/Al_{0.33}Ga_{0.67}As heterostructure grown by molecular beam epitaxy with the 2DES obtained at the heterojunction 40 nm or 35 nm below the surface¹. Mesa structures have been formed by wet-etching into the heterostructure and Au/Ge/Ni pads have been alloyed in order to contact the 2DES. All measurements were performed at $T = 1.4$ K in a 13 T superconducting magnet. Hall potential profiles have been measured with the help of a home-made scanning force microscope (SFM) [47] sensitive to electrostatic forces that has been designed for a 3-inch piezoelectric tube, allowing a scan range of about $20 \mu\text{m} \times 20 \mu\text{m}$ at $T = 1.4$ K, while coarse positioning of the sample is managed by means of a moving stage driven by slip-stick technique. A rough sketch of the instrument is given in fig. 3.4. Scanning and data acquisition is accomplished by a commercial Omicron SCALA system. As force sensitive probes we used AuPd-coated piezoresistive Si-cantilevers [56].

The **measurement technique** is as follows [61]: The SFM is used in dynamic force mode at a constant height typically 30 nm above the surface. The cantilever is mechanically driven at its resonance frequency, which is continuously adjusted by a slow feedback loop. A uniform *dc* bias voltage is applied between sample and tip in order to diminish the electrostatic potential difference between tip and sample. An *ac* current modulation through the 2DES, driven by an additional small *ac* voltage modulation applied at one contact while the other is grounded, builds up the Hall-voltage, which in turn induces a shift of the resonance frequency of the cantilever proportional to the modulation of the local potential. Serving as the measured signal, this frequency shift is recorded during single-line scans in the Hall-bar center by means of lock-in technique (an example is shown in fig. 3.8(b), curve β , corresponding to switch position β in 3.8(a)). We account for additional contributions in the cantilever response due to the donor layer in between the tip and the 2DES by calibrating the signal with reference data obtained by applying a uniform voltage modulation to all sample contacts simultaneously (curve α in fig. 3.8(b)), corresponding to switch position α in fig. 3.8(a). Since we are measuring the induced frequency shift caused by the *change* of the force on the cantilever with distance, the contribution from the tip-sample interaction is enhanced but capacitive background signals are reduced so that a high spatial resolution of about $0.1 \mu\text{m}$ is achieved. Furthermore this technique allows the investigation of poorly conducting areas such as those present under QH conditions in the bulk region of the 2DES, since only *ac* voltage modulations of a few Hertz are required and hence retarded charging effects of the 2DES eventually occurring at higher frequencies are avoided.

¹The different sample geometries and sample data are shown in fig. B.1.

The evolution of the Hall potential profile with magnetic field

Fig. 4.1 shows the calibrated Hall potential profile for different magnetic field values B around Landau level filling factor $\nu = 4$ for sample I, measured on the structure type "D" of fig. B.1. The smallest width of the mesa is $w = 15 \mu\text{m}$ on a length of $50 \mu\text{m}$. The data are taken as y scans at x_0 in the middle of the mesa. In the inset of fig. 4.1, the quantum Hall curve around $\nu = 4$ is plotted as the reference. Basically three different types of Hall potential profiles can be identified: Coming from high magnetic field values towards the quantum Hall plateau of $\nu = 4$, i.e. approaching the integer filling factor from lower values, the Hall potential drops linearly across the whole sample (Hall profile type I). At about $\nu = 4.04$, the profile flattens at the edges and drops rather arbitrarily in the inner region (type II). This is observed until $\nu = 4.14$ is reached: The Hall potential drop occurs at pronounced positions at the edge of the Hall bar and the profile is now flat in the inner region of the sample (type III). At filling factor $\nu = 4.78$ the Hall potential starts to drop considerably linearly over the inner region although still a significant drop occurs at the edges. Before entering the Hall plateau regime of $\nu = 5$, the pronounced potential drops at the edges have disappeared and the drop is linear over the whole sample (type I) again. In fig. 4.2 the same data is given in colorscale over a larger magnetic field regime. The characteristic evolution of the Hall potential profile is clearly repeated at each even integer filling factor $\nu > 2$, but is only observable in outlines around filling factor $\nu = 3$.

It can nicely be related to the existence of so-called compressible and incompressible strips at the edges of the 2DES as have been predicted from self-consistent calculations of the edge potential [63]: At integer filling factor, the bulk behaves mostly incompressible, i.e. it shows only poor screening behavior. However with decreasing magnetic field it becomes compressible, hence showing good screening properties like a metallic state. At the same time the incompressible region is shifted outwards to the edges, eventually forming the innermost incompressible strip at the edges, as described in fig. 4.7. In fig. 4.8 the measured potential profiles at the edge of the mesa for bulk filling factors $\nu > 3$ are presented on larger scale. In addition, the *expected* [68] equilibrium center positions y of the incompressible strips, i.e. the positions (4.2) of local filling factor $\nu_1 = \text{int}(\nu)$, are plotted as well. The agreement between the expected positions of the incompressible strips and the Hall potential drop is amazingly good. It could be additionally confirmed by investigations on the transparency of the 2DES with respect to an *ac* voltage modulation applied to a gate electrode underneath the 2DES and detecting the strength of the electric field penetrating the 2DES. Only at incompressible regions which show poor screening behavior a significant transparency signal was detectable, again in accordance with the theoretical predicted strip position (see fig. 4.9 and fig. 4.10).

Interpretation of the measured Hall potential profiles

However since the described experiments are "only" resolving changes in the electrostatic potential due to the externally applied bias but not the current itself, the current distribution within the sample is left for interpretation from the Hall potential distribution.

The key for understanding the current flow in crossed magnetic and electric fields is (5.8) as calculated from the Schrödinger equation (2.5), which describes that the local current density in x -direction is directly proportional to the local gradient of the electrostatic potential in y -direction via the filling factor and the fundamental constants e^2/h . This is in agreement with the classical picture of a drift velocity perpendicular to the applied fields along equipotential lines, implying a *dissipationless* current flow. In a homogeneous system the current carried by each fully occupied LL below the Fermi energy is only determined by the overall potential drop in between the two sample edges and is quantized in e^2/h . Such potential gradients can have mainly three different origins: Potential fluctuations due to the donor layer, gradients at the sample edges due to the confining potential and finally a nonequilibrium gradient built up by the externally induced Hall potential.

- The **potential fluctuations** lift the degeneracy of the LLs so that they are energetically broadened. For a certain energy the related equipotential line within the potential landscape can be closed around a hill or a valley (see fig. 5.2) corresponding to a *localized* state in the flanks of the broadened LL. There can also be an open equipotential line from one borderline of the sample region to the other, corresponding to an *extended* state in the center of the LL. With increasing the filling factor, the self-consistent electrostatic picture [63] is also applicable here and leads to broadened strips of compressible states wherever the LLs intersect the Fermi energy. The 2DES does hence actually split into incompressible regions with locally integer FFs surrounded by compressible areas (see fig. 5.5). At integer filling factor values most of the sample is incompressible, interspersed by compressible droplets, whereas away from the integer values these droplets form an extended compressible network along the sample. However the disorder potential will not only result in potential fluctuations but also in local scattering centers which give rise to scattering events into unoccupied states at the Fermi energy. Since along extended paths backscattering becomes possible in the uppermost LL, the current transport becomes resistive and therefore dissipative in the transition region around half integer filling factors.
- At the sample edges the potential fluctuations are dominated by the **confining potential** which gives rise to counter propagating currents along opposite sample edges – even in equilibrium, as sketched in fig. 5.3 and fig. 5.4. All these equilibrium currents cancel each other and do not lead to an integral net current!

- However in the **non-equilibrium** case where a difference in the electrochemical potentials is applied between the end contacts of the sample, the externally biased current will flow along regions where the electrostatic potential is *changed* due to the Hall voltage.
 - For bulk filling factors slightly above integer values, there is a significant change in the potential only at positions of the innermost incompressible strips on both 2DES edges. Due to the lack of a significant Hall voltage drop in the bulk, we conclude that a current flow within the compressible bulk is largely avoided. It can flow without dissipation in the innermost incompressible strips along both edges. This is possible since the innermost incompressible strip suppresses scattering between the edge and the bulk, and therefore a large Hall voltage drop can occur over these incompressible strips (see fig. 5.8).
 - With decreasing the magnetic field, the inner incompressible strip moves closer to the edge and becomes narrower. Since electrons can scatter more easily between edge and bulk, edge to edge scattering across the compressible bulk network and hence also backscattering becomes possible (see fig. 5.9) for electrons propagating along the edge. The current flow becomes more and more resistive and it is finally favorable that all current spreads across the compressible network within the bulk in order to minimize the overall resistance. Hence the Hall potential drops almost linearly over the sample, i.e. the Hall potential profile described as type I is obtained, as it was found in other experiments [38, 45], too. Since the decoupling of edge and bulk is expected to depend on the width of the incompressible strip which changes with the quantization energy $\hbar\omega_c$ or the Zeeman energy, the behavior is not that pronounced for odd integer filling factors and also for higher even integer filling factors.
 - As visible in fig. 4.1, the Hall potential drop at integer filling factor is non-linear within the bulk region (type II), consistent with former work [38, 45]. Already little changes in x position or magnetic field can strongly modify the Hall potential profiles, as demonstrated in fig. 4.4, where the potential profile across a locally confined inhomogeneity for three slightly different filling factors are shown. This can be interpreted in terms of isolated compressible droplets within the incompressible bulk: Since the electrochemical potential of the current carrying contacts is carried into the sample along the compressible edge strips and do hence define the overall Hall potential drop, hopping processes between these droplets or a rearrangement of the electrons at the Fermi energy can lead to a strongly position dependent modification of the electrochemical potential and hence the electrostatic potential gradient across the incompressible transition regions between the two edges. The current is finally carried dissipationless within these incompressible regions below the Fermi energy,

following various current paths (see fig. 5.10). The current can actually locally also change its direction as presented in fig. 4.4.

Hall potential profile close to a contact

In addition, it is demonstrated in this work and shown in fig. 6.2 that for filling factors slightly above integer values the pronounced Hall potential drop present in the depletion region along the mesa edge is also maintained along the borderline between the 2DES and ohmic contacts acting as potential probes. It is also observed in Corbino devices where the 2DES edge is everywhere defined by an interface to a metal contact. The movement of the potential drop position is reminiscent of the development of an incompressible strip with magnetic field observed at mesa edges. We relate this to a partial depletion of the electron concentration along the borderline between 2DES and metal contact due to the workfunction difference between the alloyed metal and the 2DES, again resulting in an incompressible strip formation.

What is the consequence of this depletion? In **Hall bar devices**, at bulk filling factors slightly above an integer value, a well developed incompressible strip is present along the mesa edge, but also along the metal contact. It encloses the whole bulk region of the 2DES and therefore decouples the compressible bulk from the compressible edge region. Only electron scattering via this incompressible strip couples both compressible regions of the 2DES. Contacts along the Hall bar probe the electrochemical potential of the local edge region of the 2DES. Perfect equilibration of the electrochemical potentials of the compressible edge and the compressible bulk by the contacts does not happen. With a current applied at the ends of the Hall bar, a Hall potential drop is observed over the innermost incompressible strip - also in front of the potential probing contact (see fig. 6.2). Obviously, at least some part of the biased current flows without dissipation along this incompressible strip – passing in front of the metal contact without getting into it and causing dissipation within the contact. This is consistent with the situation for integer bulk filling factors, where a bulk current is driven within the 2DES without traversing the potential contacts.

For the case of a **Corbino device**, the conductance is usually measured by a two-terminal measurement. But due to the presence of incompressible strips in the 2DES in front of the metal contacts for bulk filling factors slightly above integer values (see fig. 7.1), the conductance in the device might be limited by the scattering over these incompressible strips. Values for the local conductivity component σ_{xx} , calculated from such conductance measurements on small Corbino devices under the assumption of a *homogeneous* 2DES, have to be doubted.

Behavior at high currents

Finally Hall potential profiles at high current and hence high Hall voltage values have been investigated. It showed out that the rather nonlinear Hall potential drop near integer filling factor

values is only slightly changed up to rather high currents (still below breakdown, see fig. 8.3). For the profile type II slightly above integer values the Hall potential drop across the bulk increases only slightly, but is shifted in its absolute value towards to the potential value at one side of the sample. However the strongest change with increased current is visible for profile type III where the linear potential drop after a certain current strength is modified to a rather step-like potential profile. Comparison with transparency measurements reveal a correspondence to incompressible regions where locally these strong Hall potential steps occur. They move approximately diagonally across the sample width from one side to the other for different positions along the sample (see fig 8.5). Hence it seems to be favorable for the current not to flow across the whole sample width within the resistive extended compressible network, but to follow again to some extent a dissipationless path along incompressible regions which seem to form self-consistently under such high Hall voltages. This also leads to the observed reduction in the longitudinal resistance.

Summary

This work reports about the Hall potential distribution of a two-dimensional electron system under quantum Hall condition, probed with a scanning force microscope. As a function of magnetic field, i.e. bulk Landau level filling factor, different Hall potential profiles have been identified. At integer filling factors, the Hall potential drops non-linearly over the mesa width and depends strongly on the position along the mesa. This suggests that the Hall potential drop at integer filling factors is dominated by the intrinsic inhomogeneities of the sample. Slightly above an integer filling factor, when the bulk has become compressible, the Hall potential drop occurs at pronounced positions at the edges which we identified with the position of the innermost incompressible strip which has just appeared with decreasing magnetic field. The compressible bulk region is within our resolution at equal potential suggesting that there is no current flow along the Hall bar. We interpret this by the electrical decoupling of the edge from the bulk by this incompressible strip: due to no backscattering in the edge strips, the current flow along the edge is the least resistive way. With decreasing the width of the incompressible strip by decreasing the magnetic field, i.e. increasing the edge/bulk scattering, the relative Hall potential drop within the bulk increases: a significant amount of current flows through the bulk. Our interpretation of the current distribution combines edge and bulk properties: The compressible edge strips carry the electrochemical potential of the current contacts along the respective edge inside the sample and govern the externally measurable Hall potential differences. The nonequilibrium current however can locally be separated from this region and follows the strongest changes in the electrostatic potential. For an integer filling factor, i.e. in the middle of a quantum Hall plateau this region is present in the bulk of the sample.

Anhang A

Überblick über andere Arbeiten

Im folgenden soll ein Überblick über die Vielzahl von hauptsächlich experimentellen Arbeiten zum Quanten-Hall-Effekt und ihren Bezug zu den hier bestimmten Potentialverteilungen und Interpretationen gegeben werden. Neben Transportmessungen sind in den letzten Jahren auch viele Experimente zur Untersuchung elektrochemischer oder elektrostatischer Potentialprofile oder aber direkt der Stromverteilung in 2DES gemacht worden.

Experimentelle Arbeiten

- Schon relativ früh wurde versucht mit Hilfe **interner Kontakte** innerhalb einer üblichen Hall-Struktur den Hall-Potentialabfall räumlich aufzulösen [39, 114, 115]. Für nicht-ganzzahlige Füllfaktoren wurde eine weitgehend homogene Potential- und damit Stromverteilung beobachtet. Innerhalb des Plateaus nahe ganzzahliger ν änderte sich die Potentialverteilung dagegen drastisch mit dem Magnetfeld. Ein scharfer Spannungsabfall wurde beobachtet, der sich mit steigendem Füllfaktor von einer Probenseite zur anderen verschiebt. Unklar bei Messungen mit internen Kontakten ist aber der Einfluß der Entkopplung des internen Kontaktes vom umgebenden Potential aufgrund des Corbino-Effektes. Außerdem ist nicht geklärt, inwieweit der Kontakt selbst bzw. die endliche Impedanz des Elektrometers das Potential des Kontaktes und damit die Potentialumgebung beeinflusst. In der Tat sind entsprechende eigene Messungen im Zentrum der Hall-Plateaus nicht eindeutig zu interpretieren, wie in Abb. A.1 gezeigt. Es ergibt sich aber in Übereinstimmung eine weitgehend homogene Potentialaufteilung für nichtganzzahlige ν , für ganzzahlige ν aber scheint das Potential tatsächlich vorzugsweise auf einer Probenseite abzufallen. Dies war in den rasterkraftmikroskopischen Messungen in dieser Form an wesentlich kleineren Strukturen nicht zu erkennen.
- Klass *et al.* [83] verwendeten einen Film von superfluidem Helium auf der Probenoberfläche und nutzten den Fontänen effekt des superfluiden Heliums, um Regionen großer

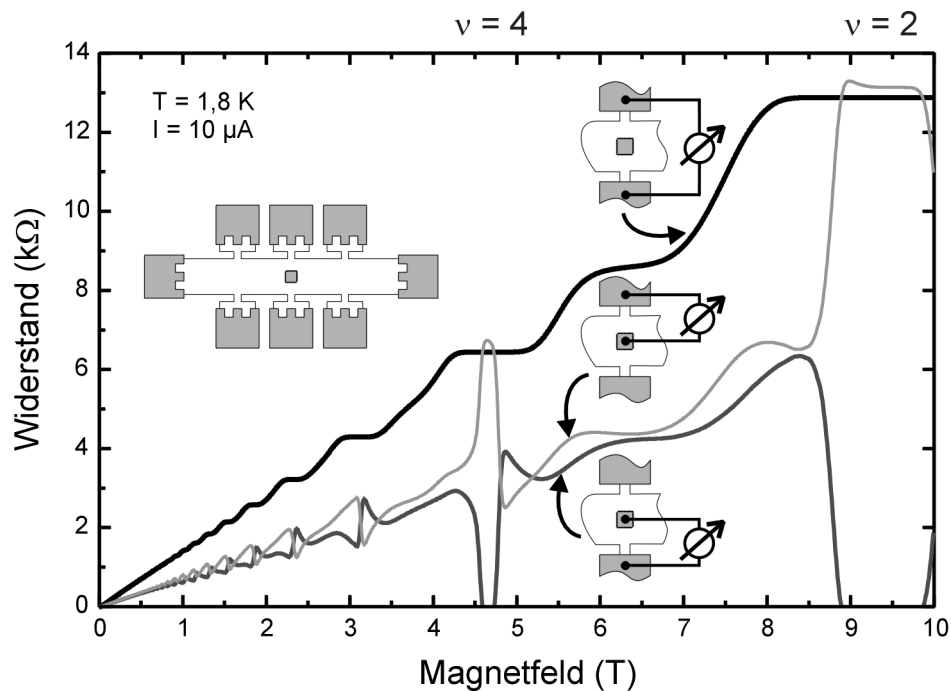


Abb. A.1: Widerstandsverteilung bei einer Hall-Probe mit innerem Kontakt (Probenbreite $W = 300 \mu\text{m}$). Bei nichtganzzahligen ν liegt der Meßwert des Innenkontaktes in etwa bei der Hälfte des Hall-Widerstandes, bei ganzzahligen ν scheint der Potentialabfall an einer Probenseite stattzufinden. Die Probenparameter sind $n_s = (4,4 \pm 0,05) \times 10^{15} \text{ m}^{-2}$ und $\mu = (18 \pm 0,8) \text{ m}^2/\text{Vs}$ bei $T = 1,8 \text{ K}$.

Dissipation sichtbar zu machen. Im Quanten-Hall-Regime war nur an den sogenannten „hot spots“, d.h. an den Kontaktecken, wo unterschiedliche elektrochemische Potentiale aufeinander stoßen, eine deutliche Dissipation nachweisbar. Dies wird durch unserer Experimente bestätigt (s. Abschnitt 6.3).

- Eine grobe ortsabhängige Information über die Potentialverteilung konnte mit Hilfe des **elektro-optischen Pockels-Effekts** [37, 116, 40, 38] ermittelt werden. Durch den Einfluß von elektrischen Feldern auf die doppelbrechenden Eigenschaften von GaAs ändert sich die Polarisationsrichtung von Licht in Abhängigkeit des lokalen Potentials beim Durchdringen des 2DES an der GaAs/AlGaAs-Grenzfläche.
 - In den früheren Arbeiten von Fontein [37, 116] wurde festgestellt, daß für ganzzahlige ν und niedrige Ströme von $5 \mu\text{A}$ die Hall-Spannung zu ca. 80% innerhalb von ca. $200 \mu\text{m}$ breiten Streifen symmetrisch an den *Rändern* der Probe abfiel, d.h. der Strom also weitgehend am Rand der Probe zu fließen schien – bei einer Probenbreite von 2 mm , einer räumliche Auflösung von $70 \mu\text{m}$ und den Probenparametern

$n_s = 5 \times 10^{15} \text{m}^{-2}$ und $\mu = 20 \text{m}^2/\text{Vs}$ bei $T = 1,5 \text{ K}$. Theoretische Arbeiten von Beenakker *et al.* [105] und Cage [81] kommen für große Probengeometrien zu vergleichbaren Ergebnissen für den elektrostatischen Potentialverlauf bei ganzzahligen Füllfaktoren. Hierbei werden allerdings nur die Elektrostatik von durch das Hall-Feld angereicherten Randladungen, aber keine selbstkonsistenten Randzustände berücksichtigt (s.u.). Dies entspricht nicht unseren Beobachtungen an viel kleineren Proben.

- Die späteren Untersuchungen von Knott [40, 38] an kleineren Strukturen ($< 0,5 \text{ mm}$) zeigten bei einer verbesserten Auflösung von $10 \mu\text{m}$ für eine schlechtbewegliche Proben ($\mu = 0,15 \text{ m}^2/\text{Vs}$) allerdings einen linearen Hall-Potentialabfall innerhalb und außerhalb des Plateaubereiches. Für höhere Beweglichkeiten ($\mu = 50 \text{m}^2/\text{Vs}$, $n_s = 3,7 \times 10^{15} \text{m}^{-2}$) war der Potentialabfall im Gegensatz zu Fontein's Ergebnissen außerhalb der Plateaus linear, aber direkt bei ganzzahligen Füllfaktoren dagegen sehr nichtlinear mit deutlichem Potentialabfall über einen kleinen Bereich innerhalb des Probeninneren. Dies sprach für einen Stromfluß in einem kleinen Querschnitt des *Probeninneren*, bestimmt von den lokalen Inhomogenitäten der Probe, in guter Übereinstimmung mit den vorliegenden Ergebnissen.
- Seitdem die Ausbildung von **kompessiblen und inkompressiblen Streifen** am Rand der Probe theoretisch vorhergesagt wurde [63] sind auch etliche Experimente gezielt zur ortsaufgelösten Untersuchung dieser Streifenstrukturen durchgeführt worden.
 - Hierzu vergrößerten van Haren *et al.* [117, 118] künstlich die Breite dieser Streifenstrukturen durch die Verwendung einer Probe mit intrinsischem Gradienten in der Elektronenkonzentration. Dies wurde durch einen Potentialabfall in einer Steuerelektrode erreicht. Ein positionierbarer Laserstrahl (Punktweite $15 \mu\text{m}$) erzeugte lokal Ladungsträger, die sich durch die induzierte Photospannung (**lateraler photoelektrischer Effekt**) an verschiedenen Kontakten in Abhängigkeit der Position des Laserstrahls nachweisen ließen. Lokales Abschirmverhalten und damit kompressible oder inkompressible Eigenschaften sollten durch die Art und Weise, wie das System auf injizierte Ladungsträger reagiert, gut untersuchbar sein. Die Ergebnisse sprachen wie erwartet für relativ breite kompressible und schmalere inkompressible Streifen innerhalb der Probe. Eine vergleichbare Meßtechnik mit verbesserter Auflösung (ca. $5 \mu\text{m}$) wurde auch von Shashkin *et al.* [119] an gewöhnlichen Heterostrukturen verwendet. Für ganzzahlige ν war die Hall-Photospannung am größten im Bereich der Ränder, dagegen relativ gering in der Probenmitte. Eine neuere Messung [120] kam zu einem ähnlichen Ergebnis für die Potentialprofile bei ganzzahligem ν . Sie ist nur schlecht mit unseren Potentialmessungen vergleichbar.

- Durch Experimente an 2DES-Proben mit elektrostatisch steuerbarer **Verengung** kamen Hwang *et al.* [121] zu dem Schluß, daß die große Rückstreuung von einem Randkanal zum gegenüberliegenden - sichtbar in einem endlichen longitudinalen Widerstand - nicht durch das einfache Bild wie von Büttiker gemäß Abb. 9.2(a) suggeriert wird zu verstehen ist. Bei einer Kanalbreite von der Ausdehnung der Wellenfunktion R_n , gegeben durch den Zustand, wo ein Landau-Niveau die Fermi-Energie durchstößt, wäre die Tunnelkopplung viel zu gering für den beobachteten Widerstand. Vielmehr müssen in dem engen Kanal kompressible und inkompressible Streifen vorliegen. Es kommt zur Rückstreuung, wenn sich die beiden kompressiblen Bereiche der beiden Ränder berühren. Die Streifenbreite liegt dabei im $1 \mu\text{m}$ -Bereich – in guter Übereinstimmung mit [63].
- Die Eigenschaften der kompressiblen bzw. inkompressiblen Streifen wurden auch durch Magnetokapazitätsmessungen untersucht [122, 123]. Aus der Kapazität zwischen 2DES und Steuerelektrode konnte durch den Vergleich verschiedener Geometrien auf die Größe der inkompressiblen Flächen, bzw. auf die Weite der kompressiblen Streifen geschlossen werden. Letztere lag bei ca. $1 \mu\text{m}$ für $\nu = 2$ bei $B \approx 5 \text{ T}$ und zeigte nur einen geringen Anstieg bei einer Temperaturerhöhung von $T = 0,4 \text{ K}$ auf $T = 10 \text{ K}$. Dies stimmt gut mit unseren Ergebnissen und mit der theoretischen Vorhersage [63] überein.
- Das Propagationsverhalten von **Rand-Magnetoplasmonen** entlang dem Rand der Probe gab ebenfalls Aufschluß über die Streifenstruktur des 2DES [124, 125, 126]. Die Meßtechnik beruhte auf dem physikalischen Prinzip, daß erzeugte Plasmonen dynamisch an die Probenränder transportiert werden und daher sensitiv auf etwaige Randstrukturen sein sollten. Die Geschwindigkeit der Plasmonen hängt außerdem von der Breite der Randstreifen ab [127]. Aus den Verzögerungszeiten von Spannungspulsen ließ sich die Weite der kompressiblen Streifen bestimmen. Sie lag bei $1,3 \mu\text{m}$ für $\nu = 2,5$ [124] und stimmt damit ebenfalls gut mit unseren Ergebnissen überein.
- Ein Nachweis der Streifenstruktur wurde auch durch die Nutzung eines **Einzel-Elektronen-Transistors (SET)** auf der Oberfläche einer Heterostruktur als sehr empfindliches Elektrometer möglich [128]. Je nach dem ob sich das 2DES unterhalb des SETs kompressibel oder inkompressibel verhält, ändert sich der Strom durch den SET. Mit Hilfe einer seitlichen Steuerelektrode konnte die Randverarmungswerte vergrößert und damit die Position der Randstreifen unter dem SET hindurch geschoben werden. Das Resultat war eine deutliche Auflösung der alternierenden Streifenstruktur.

- An Ansätzen, um sensitiv auf den **Hall-Strom** zu sein, seien hier zwei indirekt orts aufgelöste Methoden genannt:
 - Yahel *et al.* [41, 129] verwendeten eine „**pick-up**“-Spule, um den Strom durch sein magnetisches Streufeld zu detektieren. Ein wesentlicher Anteil des Stromes sollte demnach in der *Probenmitte* fließen – in Übereinstimmung mit unserer Beobachtung. Die Position des Strompfades hing dabei aber sehr stark von der elektrostatischen Umgebung, insbesondere dem Einfluß einer nahen Steuerelektrode ab.
 - Ein Experiment von Wiegers *et al.* [42] versuchte, aus dem stromabhängigen **Drehmoment** in einer Corbino-Probe Rückschlüsse auf die stromtragende Fläche zu ziehen und kam ebenfalls zu dem Ergebnis, daß für ganzzahlige ν ein Großteil des Hall-Stromes im *Probeninneren* fließen muß. Die Stromverteilung war außerdem sehr empfindlich auf Inhomogenitäten in der Probe.
- **Rastersondenmethoden** im eigentlichen Sinne werden erst seit einigen Jahren im Bereich des QHE verwendet.
 - Tessmer *et al.* [46, 130] untersuchten lokale Eigenschaften eines 2DES mit einem **Kapazitätsmikroskop**. Hierbei ließen sich lokale Ladungs- und Entladungsvorgänge innerhalb der Potentiallandschaft visualisieren. Insbesondere das elektrostatische Verhalten einer Elektronenblase unterhalb der Spitze - induziert durch eine angelegte Spannung - konnte hierbei untersucht werden [131].
 - Ein positionierbarer SET auf einer Spitze wurde von Yoo [132] und Hess [133] verwendet, um elektrostatische Potentialverteilungen im 2DES zu untersuchen. Yacoby *et al.* [44] benutzten dasselbe Gerät, um das Abschirmverhalten des 2DES in Bezug auf eine unterliegende Steuerelektrode zu vermessen. Damit konnte die lokale **Kompressibilität** bzw. Kontouren konstanter Elektronenkonzentration vermessen werden. Die Streifenbreite der inkompressiblen Bereiche deckt sich gut mit der theoretischen Vorhersage [63]. Diese Ergebnisse stimmen prinzipiell mit unseren Messungen überein. Allerdings wurde in [44] eine sehr ungewöhnliche Probengeometrie verwendet – Aussagen für typische Hall-Geometrien sind daher schwierig. Das Verhalten eines begrenzten 2DES-Bereiches unter Magnetfeldänderungen wurde ebenfalls durch solche Kompressibilitätsmessungen analysiert [134].
 - Direkte elektrostatische Untersuchungen an einer typischen Hall-Geometrie wurde – unseres Wissens nach – mit einem ähnlichen Meßaufbau wie in unserem Falle nur von McCormick *et al.* [45] durchgeführt, wie bereits in Abschnitt 4 erwähnt. Die beobachteten Potentialprofile entsprechen für die Profiltypen I und II in etwa unseren Messungen, der Profiltyp III ist aber in McCormick's Messungen viel schwächer erkennbar.

- Eine steuerbare Spitze kann man sich auch als frei **positionierbares Streuzentrum** zu Nutze machen, dessen Einfluß in elektrischen Transporteigenschaften nachweisbar ist. Woodside *et al.* [135] untersuchten so den Unterschied im longitudinalen Widerstand in Abhängigkeit der Position der Spitze, die als Streuzentrum eine lokale Äquilibration zwischen den Randstreifen und dem Probeninneren induzierte. Das Streuverhalten in strukturierten 2DES mit Quantenpunktkontakten als Stromein- und -auslaß wurde in ähnlicher Weise von Crook *et al.* [136] und von Topinka *et al.* [137, 138] bei verschwindendem bzw. sehr kleinem Magnetfeld aber Flüssig-Helium-Temperaturen visualisiert.

Theoretische Arbeiten

Diese Vielzahl an experimentellen Ergebnissen ist offensichtlich kontrovers interpretierbar und hat neben dem *Randkanalbild* auch dem „*Bulk*“-*strombild perkolierender Strompfade* scheinbar Bestätigung gegeben. Die theoretische Beschreibung des QHE hat sich ebenso wie die Meßtechnik stets weiterentwickelt. So ist klar, daß einige Ansätze zu simpel waren und erweitert werden mußten, weil z.B. der selbstkonsistente Einfluß der Randstruktur nicht enthalten war. Im folgenden sollen verschiedene Ansätze und auch deren Entwicklung dargestellt werden, bevor zusammenfassend wünschenswerte Anforderungen an eine realistische Simulation gestellt werden.

Modelle, die einen Stromfluß im Probeninneren favorisieren

- Besonders in der Frühzeit sind von Luryi, Kazarinov und Trugman [139, 33, 34] die Bedeutung ausgedehnter Zustände innerhalb einer Potentiallandschaft im Probeninneren für **perkolierenden**, quantisierten Stromtransport diskutiert worden. Den Randzuständen kam dabei nur eine untergeordnete Bedeutung zu. Für ein System mit Störstellenpotential gibt es laut Luryi *et al.* [33, 140] im Gleichgewicht keine ausgedehnten Äquipotentiallinien, erst ein kritisches externes Potential bewirkt ihr Auftreten. Der Anteil der ausgedehnten Zustände nimmt dabei mit der angelegten Spannung zu [34]. Da die Hall-Spannung auch jeweils über die vorhandenen ausgedehnten Fasern abfällt, bleibt der Gesamtstrom konsistent erhalten - die Breite des Perkolationsbandes paßt sich quasi der Hall-Spannung an. Alle ausgedehnten Zustände, die zu demselben Landau-Niveaus gehören, sind auch jeweils gleich besetzt. Wie bereits in Abschnitt 5.3 diskutiert wurde, kommt es dabei nur entlang ausgedehnter Zustände unterhalb der Fermi-Energie zu einem dissipationsfreien Stromtransport, lokalisierte Zustände können nicht zum Transport beitragen und es kommt daher für bestimmte Magnetfeldbereiche zur Ausbildung der Hall-Plateaus. Der Einfluß verschiedener Störstellenmodelle auf perkolierende Bulkströme wurde in jüngerer Zeit z.B. auch von Kramer [141] oder Shizuya [142] behandelt.

- In einem inhomogenen Ansatz von Woltjer [35, 143] wird eine *lokale* Beziehung zwischen elektrischen Feld und Stromdichte mit ortsabhängigen Tensorkomponenten $\rho(x, y) = \rho(\nu(x, y))$ angenommen. Der lokale Füllfaktor $\nu(x, y)$ am Ort (x, y) hängt dabei von der inhomogenen Ladungsträgerkonzentration $n_s(x, y) = \nu(x, y)eB/h$ ab. Die gemessene Größe eines Transportexperiments ist hierbei das Integral über die lokalen Größen über die Probendimension integriert. Der transversale Widerstand R_{xy} hängt demnach von den lokalen Tensorkomponenten ab gemäß

$$R_{xy} = \frac{V_{\text{Hall}}}{I_x} = \frac{\int_0^W E_y(x, y) dy}{\int_0^W j_x(x, y) dy} \quad (\text{A.1})$$

mit dem lokalen elektrischen Feld $E_y(x, y) = -\rho_{x,y}(x, y)j_x(x, y) + \rho_{x,x}(x, y)j_y(x, y)$. Die lokale Variation der Fermi-Energie liegt dabei in der Größenordnung von $\hbar\omega_c$ und führt zu einer lokalen Elektronenumverteilung, so daß sich ein Strompfad dort ausbildet, wo lokal die Dissipation verschwindet, d.h. wo $\rho_{xx}(x, y) = 0$ gilt und lokal ein ganzzahliger Füllfaktor $\nu(x, y) = i$ mit $i = 1, 2, 3, \dots$ vorliegt. Wegen der Inhomogenität der Probe gibt es einen bestimmten Magnetfeldbereich, für den diese Bedingung entlang eines Strompfades erfüllt werden kann. Die Position des Pfades kann sich dabei mit dem Magnetfeld ändern, wird aber immer dem Weg des geringsten Widerstandes folgen. Dies führt daher zur Ausbildung der konstanten Plateauwerte. Im Bereich hoher Ströme wurden i. a. eher homogene Potential- und Stromverteilungen angenommen, so daß dies in diesem Bild einem sehr dichten Netzwerk von Strompfaden entsprechen würde [43]. Beide Ansätze kommen im Endeffekt zu vergleichbaren Ergebnissen: Im Probeninneren gibt es perkolierende Strompfade, die einen dissipationsfreien Strom tragen können.

- In späteren Modellen wurde der Rand der Probe und insbesondere der Einfluß von durch das Hall-Feld angereicherten Randladungen auf die Potential- und Stromverteilung von Thouless und Wexler [109, 144] untersucht. Sie kommen zu dem Schluß, daß ein beträchtlicher Teil des externen Stromes in der Probenmitte fließt. Entscheidend ist nicht so sehr der Stromfluß, der direkt durch die Anhäufung von Randladung zustande kommt, sondern vielmehr derjenige, der durch das elektrische Feld dieser Randladungen induziert wird.

Modelle, die einen Stromfluß am Probenrand favorisieren

- Mit einem ganz ähnlichen Ansatz zur Berücksichtigung der Randladung kamen Beenaker *et al.* [105] und Cage [81] zu einer entgegengesetzten Interpretation: Durch die Umverteilung von Randladungen kommt es zu einem logarithmischen Abfall des Potentials vom Rand der Probe Richtung Probenzentrum. Der größte Anteil der Spannung fällt daher am Rand ab, der Verlauf in der Probenmitte ist dagegen fast linear. Bereits MacDonald [73] hatte darauf hingewiesen, daß eine Randladung $\delta(x - W/2)$ ein Potential zur

Folge hat, das proportional zu $\ln|x - W/2|$ ist und daher am Rand besonders ins Gewicht fällt. Diese Modelle konnten zwar scheinbar die erwähnten Experimente von Fontein [37] an sehr großen Proben gut beschreiben, gehen aber von unzureichenden Voraussetzungen oder Annahmen aus, da der laut unseren Meßergebnissen offensichtlich wichtige Einfluß der selbstkonsistenten Randstreifen nicht berücksichtigt wurde.

- Büttikers [31] oft verwendete Modell der ein-dimensionalen Randstreifen ist bereits im Abschnitt 9.2.1 besprochen worden.

Alle geschilderten Modelle konnten immer nur Teilaspekte erklären und vereinfachen all zu sehr reale Probenbedingungen, insbesondere den Einfluß der Randstreifen. Der ganze Füllfaktorbereich kann zudem jeweils gar nicht, oder nur unbefriedigend erklärt werden [145]. Eine **Kombination aus Rand- und „Bulk“-Effekten** zur Simulation der Potentialverteilung im QHE wird z.B. in Knotenmodellen von Oswald [80] verwendet. Dabei können über entsprechende Transmissionskoeffizienten in den einzelnen Knoten auch nichtganzzahlige ν beschrieben werden. Trotzdem ersetzen solche Modelle keine selbstkonsistente Rechnung der Potential- und Stromverteilung, die Eigenschaften des Probenrandes und des Probeninneren kombinieren muß.

Selbstkonsistente Modelle

- Eine ähnliche Argumentation wie in Abschnitt 5.4 findet man bei Tsemekhman *et al.* [36, 145]: Das Chklovskii-Bild der Randstreifen bei externer Hall-Spannung bewirkt nur eine Verschiebung der Landau-Niveaueverläufe und gleichzeitig eine Verschmälerung, bzw. Verbreiterung der Streifen. Externer Strom kann im wesentlichen nur in den inkompressiblen Bereichen fließen, der Randstreifenstrom in den kompressiblen Bereichen ist dagegen unverändert, sorgt aber für einen Hall-Potentialabfall ausschließlich über die Probenmitte. Daher muß der externe Strom im Probeninneren in den besetzten Landau-Niveaus unterhalb von ε_F fließen, dort wo das Potential abfällt. Die einzige Anforderung an einen besetzten ausgedehnten Zustand um Hall-Strom zu tragen ist eine nichtverschwindende Wellenfunktion im Bereich eines nichtverschwindenden Potentialgradienten.
- Ein ähnlicher Modellansatz wurde parallel zur vorliegenden Arbeit von Güven und Gerhardt [146] untersucht. Er erweitert die selbstkonsistente Berechnung zum Gleichgewichtsfall von Chklovskii [63] und Lier [68] zum Nichtgleichgewichtsfall unter Einfluß dissipativer Ströme. Vorausgesetzt wird weiterhin eine Thomas-Fermi-Näherung zur Bestimmung des selbstkonsistenten Hartree-Potentials (vgl. Abschnitt 4.2.1). Ferner wurde eine lokale Beziehung zwischen dem lokalen elektrischen Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ und der lokalen Stromdichte $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ über ein lokales ohmsches Gesetz $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \tilde{\rho}(\mathbf{r})\mathbf{j}(\mathbf{r})$ angenommen, so daß Dissipation bei nichtganzzahligen Füllfaktoren mitenthalten ist. Das elektrische Feld

wird dabei als durch den Gradienten des elektrochemischen Potentials gegeben angenommen $\mathbf{E} = \nabla \mu_{\text{elch}}/e$. Im stationären Fall gilt die Kontinuitätsgleichung $\nabla j = 0$, d.h. $\partial_x j_x = -\partial_y j_y = 0$. Die Stromdichte quer zur Probe soll dabei verschwinden $j_y = 0$. Ferner gilt $(\nabla \times E)_z = 0$, d.h. $\partial_x E_y = \partial_y E_x = 0$. Demnach ist $E_x(y) = E_x^0 = \text{konstant}$ entlang der Probenlänge aufgrund der Translationsinvarianz. Es gilt daher $j_x(y) = 1/\rho_{xy}(y) \cdot E_y(y) = 1/\rho_{xx}(y) \cdot E_x^0$. So ergeben sich drei Gleichungen, die selbstkonsistent zu lösen sind:

$$E_y(y) = \frac{\rho_{xy}(y)}{\rho_{xx}(y)} E_x^0 = \frac{\sigma_{xy}(y)}{\sigma_{xx}(y)} E_x^0, \quad (\text{A.2})$$

$$\mu_{\text{elch}}(y) - \mu_{\text{elch}}(0) = eE_x^0 \int_0^y dy' \frac{\sigma_{xy}(y')}{\sigma_{xx}(y')}, \quad (\text{A.3})$$

$$\nu(y) = \frac{h}{eB} \int [D(\varepsilon) f(\varepsilon + eV(y) - \mu_{\text{elch}}(y))] d\varepsilon, \quad (\text{A.4})$$

wobei $f(\varepsilon)$ die Fermi-Funktion beschreibt. Dabei wird das elektrostatische Potential $V(y) = V_{\text{bg}}(y) + V_{\text{Hartree}}(y)$ in einer inneren Selbstkonsistenzschleife aus dem Hintergrundpotential $V_{\text{bg}}(y)$ und dem Hartree-Potential $V_{\text{Hartree}}(y)$ mit Hilfe der Thomas-Fermi-Näherung über die Poisson-Gleichung berechnet. Hiermit kann in der äußeren Selbstkonsistenzschleife die ortsabhängigen Leitfähigkeitskomponenten $\sigma_{xy}(\nu(y, B))$ und $\sigma_{xx}(\nu(y, B))$ berechnet werden. Die Zustandsdichte $D(\varepsilon)$ ist dabei die Summe der verbreiterten Landau-Niveaus (vgl. Gl. (2.16)) und enthält die Magnetfeldabhängigkeit. In Abhängigkeit des lokalen Füllfaktors wird die lokale Leitfähigkeit über ein simples Modell verknüpft. Dabei gilt $\sigma_{xy}(y) = e^2/h \cdot \nu(y)$, während für die longitudinale Leitfähigkeitskomponente σ_{xx} eine Polynomnäherung mit Nullstellen bei ganzzahligen Füllfaktoren verwendet wird. Das elektrochemische Potential stellt über die Probe jeweils lokal die Summe aus dem chemischen und elektrostatischen Potential dar. Das chemische Potential verhält sich daher gegenläufig zum elektrostatischen Potential und ist jeweils gegeben durch $\mu_{\text{ch}}(y) = \mu_{\text{elch}}(y) - eV(y)$.

Diese Modellrechnungen stimmen qualitativ gut mit unseren experimentellen Ergebnissen überein und führen z.B. zu verstärkten Potentialabfällen über die Position der inkompressiblen Streifen.

Ausblick

Für Füllfaktoren knapp unterhalb ganzzahliger Werte, wo die inkompressiblen Streifen bereits sehr schmal geworden sind, sollte aber die Entkopplung exponentiell durch Tunnelprozesse unterdrückt sein, d.h. das eben beschriebene Modell spiegelt eine zu große Entkopplung vor bei Füllfaktoren knapp unterhalb ganzzahliger Werte. Zudem wird der kompressible Randbereich gleichwertig behandelt wie das Probeninnere, was impliziert,

daß unrealistischerweise auch entlang eines Probenrandes Rückstreuung möglich ist. Eine möglichst realistische theoretische Simulation sollte daher selbstkonsistent folgendes beinhalten:

- den Randeinfluß,
- mögliche Rückstreuung und Dissipation an der Fermi-Energie,
- Potentialfluktuationen durch ein zufälliges Störstellenpotential,
- Tunnel- und „hopping“-Prozesse zwischen kompressiblen Bereichen,
- idealerweise auch Inter-Landau-Niveau-Streuung bei hohen Stromstärken zur Annäherung an den Zusammenbruch des QHE.

Anhang B

Ergänzende Meßkurven

In diesem Anhang werden überblicksartig weitergehende Meßergebnisse zusammengestellt, für die eine umfassende Auswertung im Rahmen dieser Arbeit nicht mehr möglich war. Die wichtigsten Daten der verwendeten Proben und Hall-Strukturen sind in Abb. B.1 zusammengefaßt. Die wichtigsten untersuchten Parameter sind im folgenden aufgelistet.

Meßparameter:

Temperaturabhängigkeit: Das Verhalten der Potentialprofile bei höheren Temperaturen ist in Abb. B.2 dargestellt. Die Strukturen verwaschen wie erwartet mit steigender Temperatur.

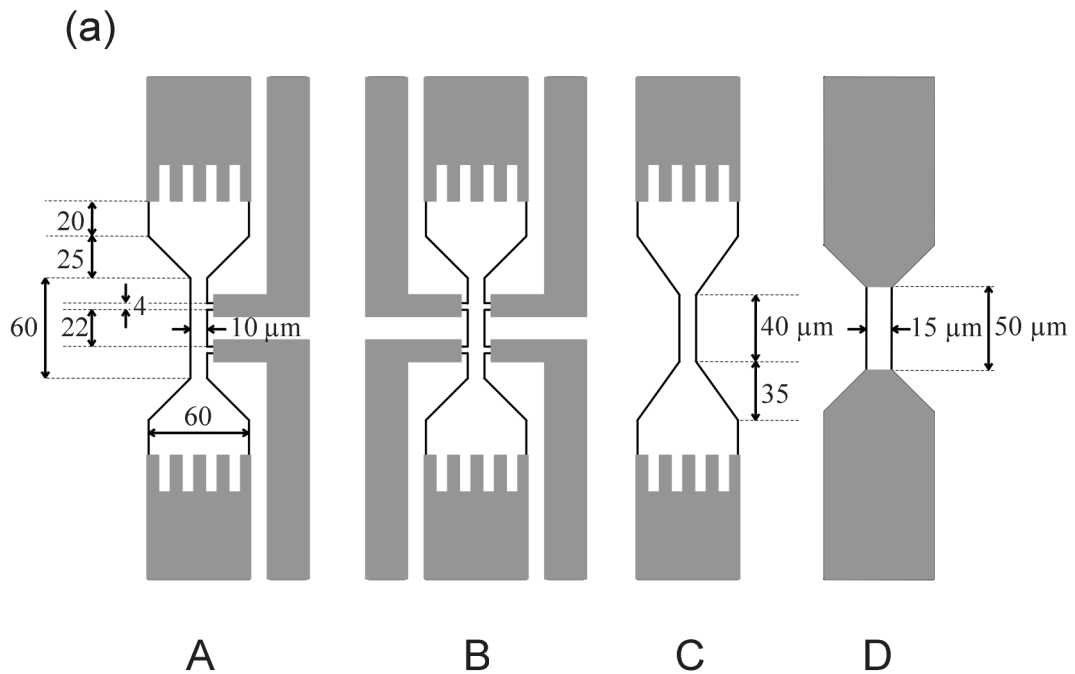
Magnetfeldabhängigkeit: Die Magnetfeldabhängigkeit ist ergänzend zu Abb. 6.1 auch für eine Hall-Struktur mit beidseitigen Kontaktpaaren in Abb. B.3 dargestellt. Ebenso wird in Abb. B.4 die Magnetfeldabhängigkeit für eine Probe mit nur geringer Beweglichkeit ($\mu = (18 \pm 0,8) \text{ m}^2/\text{Vs}$) und einer Hall-Struktur mit nur einseitigen Potentialkontakten gezeigt.

Probengeometrie: Untersucht wurden jeweils drei verschiedene Hall-Strukturen ohne seitliche Potentialkontakte, mit nur einem einseitigen Kontaktpaar und eine symmetrische Probe mit beidseitigen Kontaktpaaren, wie in Abb. B.1 skizziert. Die wichtigsten Ergebnisse sind in Abb. B.5 für die höherbewegliche Probe und in Abb. B.6 für die niederbewegliche Probe aufgeführt.

Probenqualität: Es wurden zwei unterschiedliche Heterostrukturen mit einer mittleren Beweglichkeit von $\mu = (50 \pm 1) \text{ m}^2/\text{Vs}$ und einer relativ geringen Beweglichkeit von $\mu = (18 \pm 0,8) \text{ m}^2/\text{Vs}$ vermessen. Sie können anhand von Abb. B.6 und Abb. B.6 verglichen werden.

Strompolarität: Wie in Abschnitt 3.3.1 beschrieben, wurde die Meßtechnik so gewählt, daß jeweils nur eine Stromrichtung in der Probe vorherrscht. Die beiden Strompolaritäten konnten daher stets einzeln untersucht werden.

Magnetfeldpolarität: Auch der Einfluß der Magnetfeldpolarität ist in Einzelfällen bestimmt worden. Wie erwartet, verhalten sich die Proben beim Umpolen des Feldes weitgehend symmetrisch, wie aus Abb. B.7 ersichtlich.



(b)

Probe	I	II
Nummer	8978	8816
2DES-Tiefe (nm)	~40	~35
n_s (m^{-2})	bis $5,7 \times 10^{15}$	$(4,4 \pm 0,05) \times 10^{15}$
μ (m^2/Vs)	50 ± 1	$18 \pm 0,8$

Abb. B.1: (a) Skizzen der vier verschiedenen untersuchten Hall-Strukturen mit Größenangaben jeweils in Mikrometern. Kontakte sind grau unterlegt. (b) Liste der wichtigsten Probandaten für die beiden untersuchten Heterostrukturen. Das Probenmaterial stammt vom Max-Planck-Institut Stuttgart (K. Eberl).

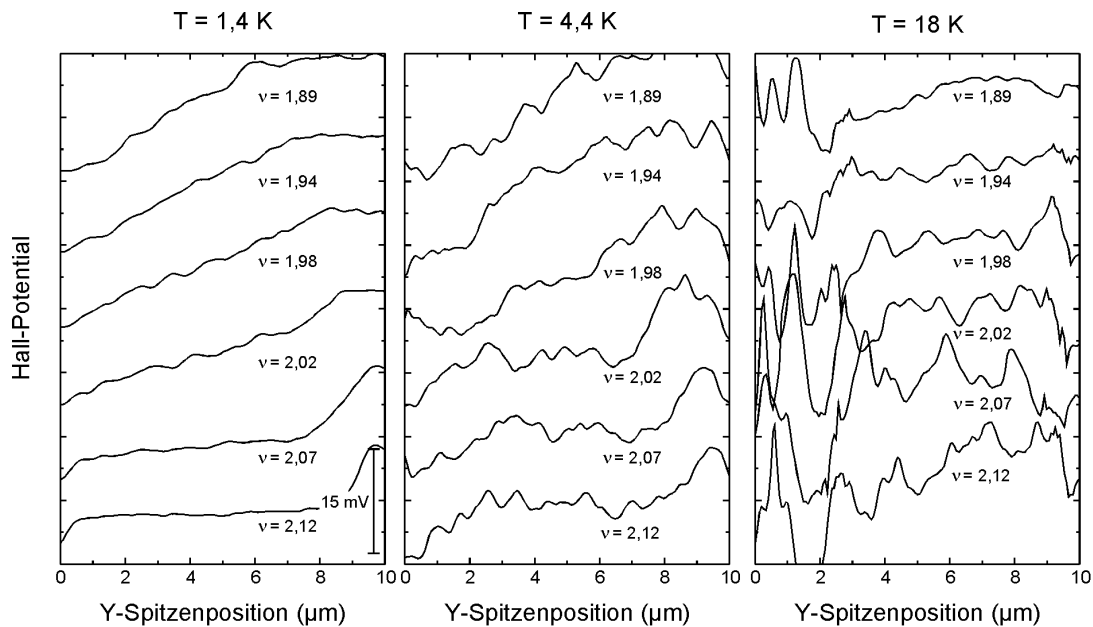


Abb. B.2: Temperaturabhängigkeit der Potentialverteilung für Füllfaktoren nahe $\nu = 2$, gemessen an der niederbeweglichen Probe mit $\mu = 18 \text{ m}^2/\text{Vs}$. Wie erwartet sind die Potentialprofile am klarsten ausgeprägt für die niedrigste Arbeitstemperatur von $T = 1,4 \text{ K}$. Bei $T = 4,4 \text{ K}$ wird die Struktur bereits verwuschener. Allerdings ist hier die Abflachung des „Bulk“-Potentials schon bei kleineren Füllfaktoren zu beobachten. Bei noch höheren Temperaturen ($T = 18 \text{ K}$), wo kein Quanten-Hall-Effekt mehr zu erwarten ist, ist leider das Meßsignal so stark veräuscht, daß keine verläßliche Tendenz über die Änderung der Potentiallandschaft ausgemacht werden kann. Die Ursache für das große Hintergrundrauschen liegt an der starken Temperaturabhängigkeit des Resonanzverhaltens des Federarms, denn die Resonanzamplitude und die Resonanzgüte nimmt mit steigender Temperatur stark ab. Mit kleinerer Güte, d.h. mit größerer Breite der Resonanzkurve sinkt aber die Empfindlichkeit der Detektionsmethode.

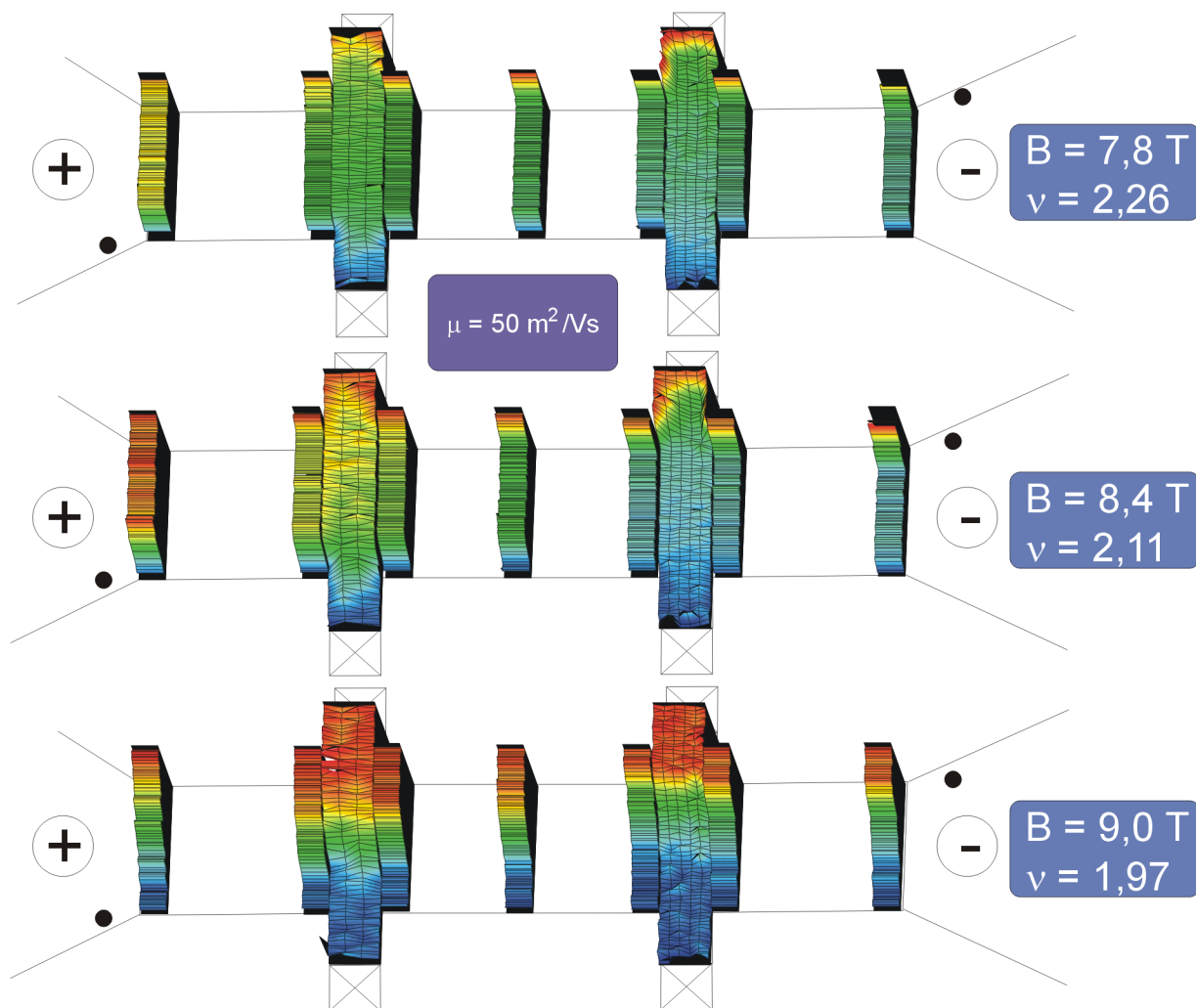


Abb. B.3: Magnetfeldabhängigkeit der Hall-Potentialprofile für eine Hall-Struktur mit symmetrischen Seitenkontakten. Die Probe hat eine Beweglichkeit von $\mu = (50 \pm 1) \text{ m}^2/\text{Vs}$. Die Hall-Spannungsamplitude beträgt 15 mV , was einem Gesamtstrom von etwa $1,2 \mu\text{A}$ bei $\nu = 2,0$ entspricht. Die prinzipielle Hall-Potentialprofilentwicklung, insbesondere auch im Bereich der Potentialkontakte, ist vergleichbar mit der Struktur aus Abb. 6.1 und 6.2 mit nur einem einseitigen Kontaktpaar.

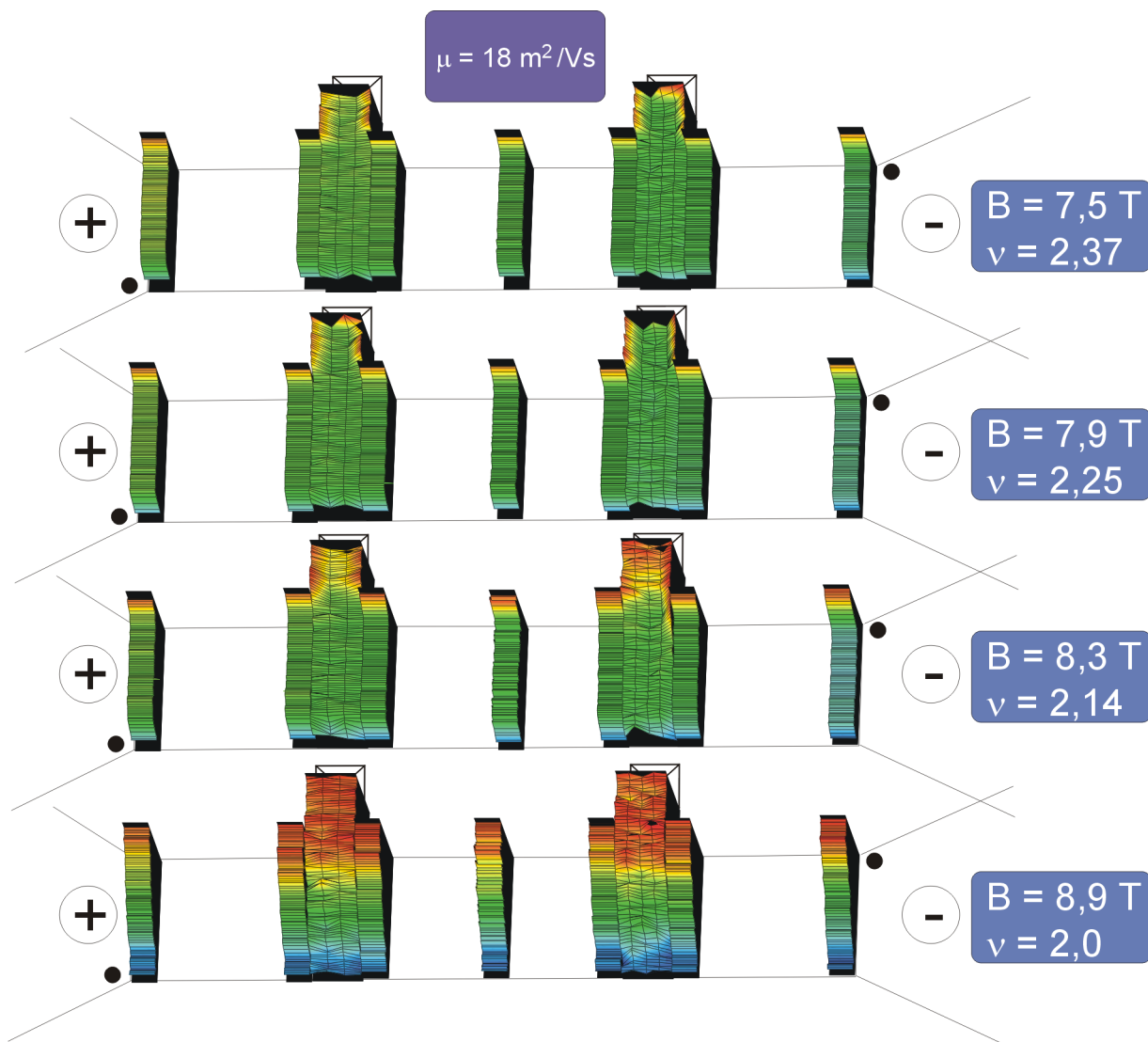


Abb. B.4: Magnetfeldabhängigkeit der Hall-Potentialprofile für eine Hall-Struktur mit einseitigem Kontaktpaar. Die Probe hat eine Beweglichkeit von $\mu = (18 \pm 0,8) \text{ m}^2/\text{Vs}$. Die Hall-Spannungsamplitude beträgt 15 mV, was einem Gesamtstrom von etwa $1,2 \mu\text{A}$ bei $\nu = 2,0$ entspricht. Der prinzipielle Hall-Potentialprofilentwicklung ist vergleichbar mit der der höherbeweglichen Probe aus Abb. 6.1 und 6.2.

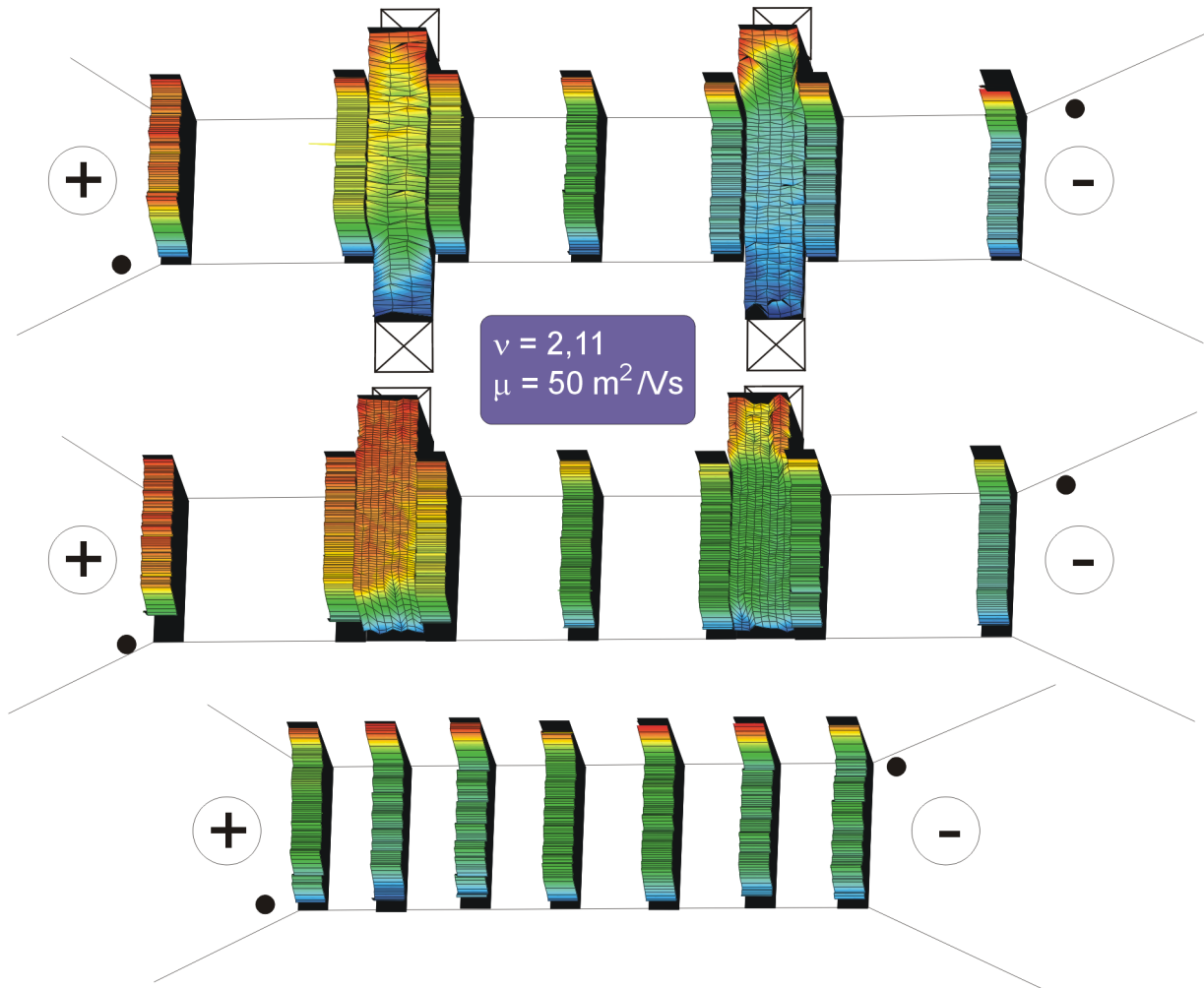


Abb. B.5: Vergleich der drei Hall-Strukturen mit verschiedener Anzahl an Potentialkontakten für die höherbewegliche Probe mit $\mu = (50 \pm 1) \text{ m}^2/\text{Vs}$. Die Hall-Spannungsamplitude beträgt 15 mV , was einem Gesamtstrom von etwa $1,2 \text{ }\mu\text{A}$ bei $\nu = 2,0$ entspricht. Im Detail ist ein deutlicher Einfluß der Potentialkontakte auf die Entwicklung des Potentialprofils entlang der Probe zu sehen. Bei der Probe ohne Seitenkontakte ist der longitudinale Anstieg des Potentials des Probeninneren nur gering, bei der symmetrischen Probe ist er ausgeprägter, aber gleichmäßig entlang der Probe. Für die Probe mit nur einseitigen Potentialkontakten ist der Potentialanstieg dagegen inhomogen und unsymmetrisch.

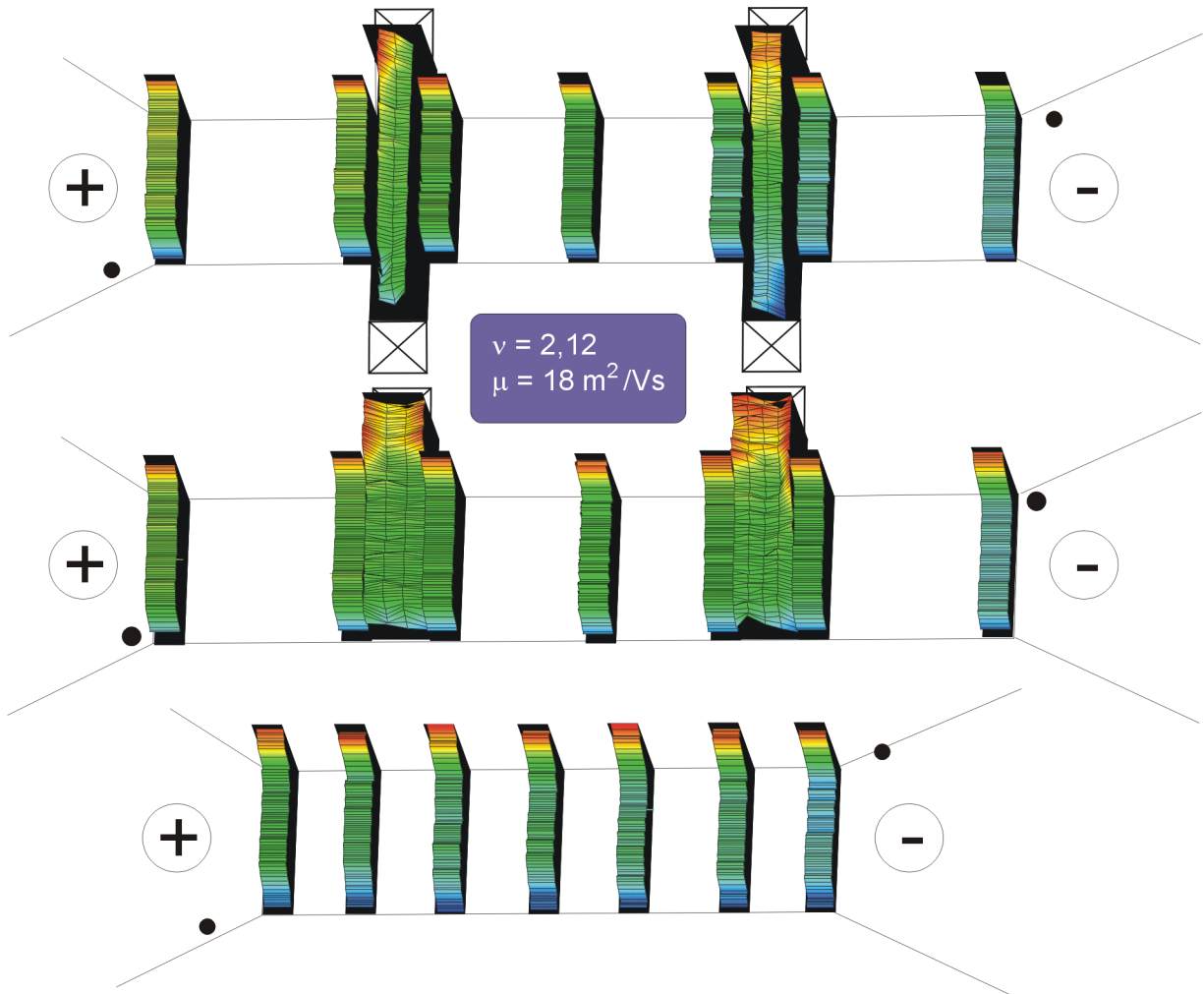


Abb. B.6: Vergleich der drei Hall-Strukturen mit verschiedener Anzahl an Potentialkontakten für die geringbewegliche Probe mit $\mu = (18 \pm 0,8) \text{ m}^2/\text{Vs}$. Die Hall-Spannungsamplitude beträgt 15 mV, was einem Gesamtstrom von etwa $1,2 \mu\text{A}$ bei $\nu = 2,0$ entspricht. Der longitudinale Potentialanstieg ist für alle drei Geometrien wesentlich symmetrischer als im Falle der höherbeweglichen Probe aus Abb. B.5.

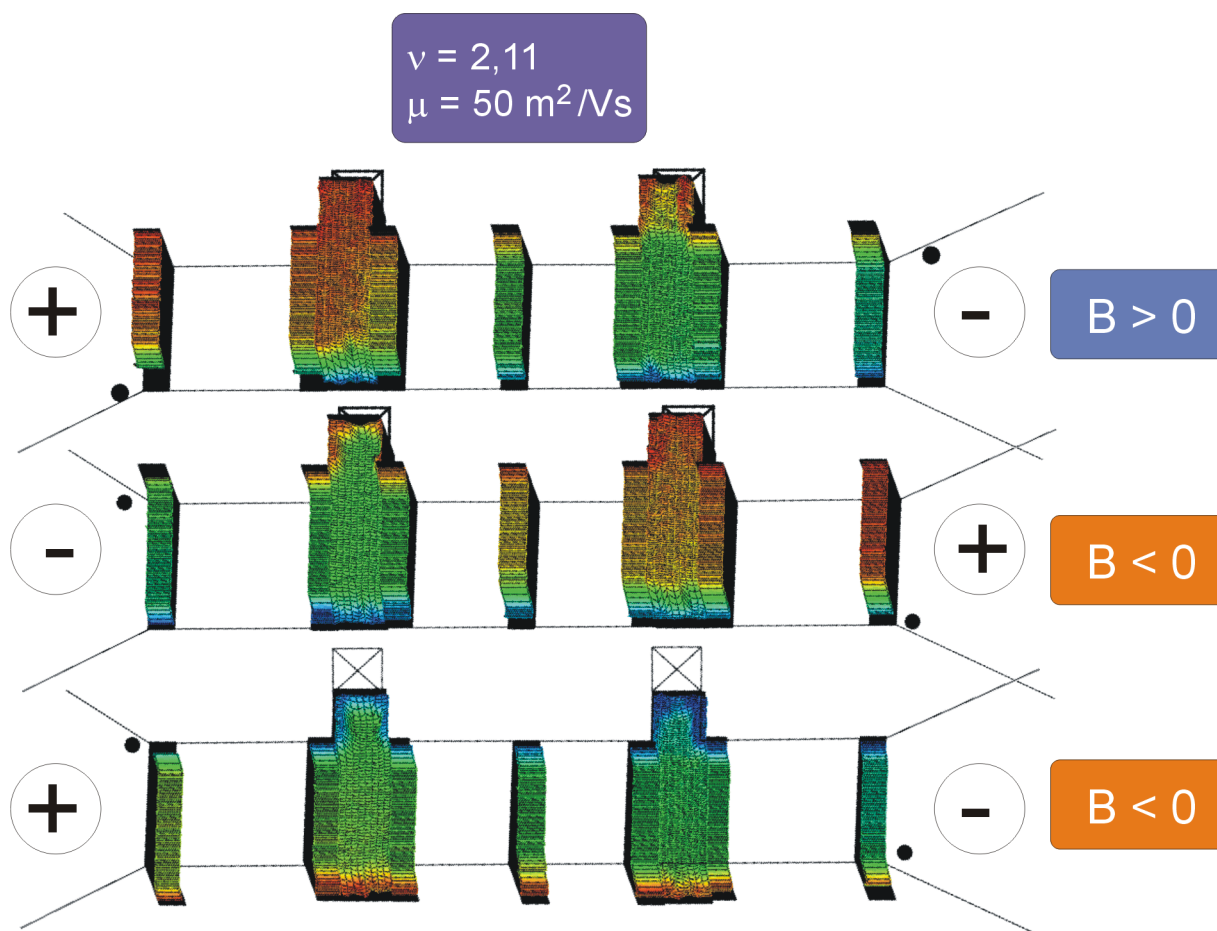


Abb. B.7: Einfluß der Magnetfeld- und Strompolarität, gemessen an der Probe mit $\mu = (50 \pm 1) \text{ m}^2/\text{Vs}$. Die Hall-Spannungsamplitude beträgt 15 mV, was einem Gesamtstrom von etwa $1,2 \mu\text{A}$ bei $\nu = 2,0$ entspricht. Das oberste Bild entspricht der Messung aus Abb. B.5 bei $B > 0$ und der vermerkten Strompolarität. Um ein spiegelsymmetrisches Bild mit der Spiegelachse in der Probenmitte zu erhalten, muß sowohl die Feld-, als auch die Stromrichtung umgepolt werden. Wegen der Feldumpolung wechselt die dissipative Ecke ihre Position. Bei gleichbleibender Strompolung (unteres Bild) propagiert der kompressible Streifen mit dem höheren elektrochemischen Potential μ_{elch} (+) entlang der den Kontakten gegenüberliegenden Kante. Erst bei zusätzlicher Umpolung von μ_{elch} propagiert dieser Kanal wieder an den Kontakten vorbei. Diese Symmetrie demonstriert, daß die vorliegende Potentialverteilung nicht von lokalen Probeneigenschaften abhängt, sondern eine generellere Eigenschaft des 2DES ist.

Literaturverzeichnis

- [1] K. v. Klitzing, Rev. Mod. Phys. **58**, 519 (1986).
- [2] D. C. Tsui, Rev. Mod. Phys. **71**, 891 (1999).
- [3] H. L. Störmer, Rev. Mod. Phys. **71**, 875 (1999).
- [4] R. B. Laughlin, Rev. Mod. Phys. **71**, 863 (1999).
- [5] K. v. Klitzing, G. Dorda und M. Pepper, Phys. Rev. Lett. **45**, 494 (1980).
- [6] D. C. Tsui, H. L. Störmer und A. C. Gossard, Phys. Rev. Lett. **48**, 1559 (1982).
- [7] R. B. Laughlin, Phys. Rev. Lett. **50**, 1395 (1983).
- [8] A. Jeffrey, R. E. Elmquist, J. Q. Shields, L. H. Lee, M. E. Cage, S. H. Shields und R. F. Dziuba, Metrologia **35**, 83 (1998).
- [9] Proc. Verb. Com. Int. Poids et Mesures **56**, 20 (1988).
- [10] B. N. Taylor, IEEE Trans. Instrum. Meas. **38**, 164 (1989).
- [11] T. J. Witt, Rev. Sci. Instrum. **69**, 2823 (1998).
- [12] B. Jeckelmann und B. Jeanneret, Rep. Prog. Phys. **64**, 1603 (2001).
- [13] M. A. Herman und H. Sitter, *Molecular beam epitaxy, Springer series in Material science* 7,(Springer, Berlin, 1996).
- [14] H. Ibach und H. Lüth, *Festkörperphysik*, 3. Auflage, S. 454 (Springer, Heidelberg, 1999).
- [15] H. L. Störmer, Surf. Science **132**, 519 (1983).
- [16] R. L. Willett, K. W. West und L. N. Pfeiffer, Phys. Rev. Lett. **88**, 066801 (2002).
- [17] M. Janßen und O. Viehweger und U. Fastenrath und J. Hajdu, *Introduction to the Theory of the Integer Quantum Hall Effect*, Hrsg. J. Hajdu (VCH, Weinheim Heidelberg, 1994).

- [18] F. F. Fang und P. J. Stiles, Phys. Rev. **174**, 823 (1968).
- [19] T. Englert, D. C. Tsui, A. C. Gossard und C. Uihlein, Surf. Science **113**, 295 (1982).
- [20] R. J. Nicholas, R. J. Haug, K. v. Klitzing und G. Weimann, Phys. Rev. B **37**, 1294 (1988).
- [21] W. J. de Haas und P. M. van Alphen, Leiden Comm. **208d,212a**, (1930).
- [22] L. Shubnikov und W. J. de Haas, Leiden Comm. **207a,210a**, (1930).
- [23] M. Murakami, Sc. Tech. Adv. Mat. **3**, 1 (2002).
- [24] R. Kubo, J. Phys. Soc. Jpn. **12**, 570 (1957).
- [25] D. C. Tsui und A. C. Gossard, Appl. Phys. Lett. **38**, 550 (1981).
- [26] M. A. Paalanen, D. C. Tsui und A. C. Gossard, Phys. Rev. B **25**, 5566 (1982).
- [27] J. H. Schön, C. Kloc und B. Batlogg, Science **288**, 2338 (2000).
- [28] T. Ando, A. B. Fowler und F. Stern, Rev. Mod. Phys. **54**, 437 (1982).
- [29] R. B. Laughlin, Phys. Rev. B **23**, 5632 (1981).
- [30] B. I. Halperin, Phys. Rev. B **25**, 2185 (1982).
- [31] M. Büttiker, Phys. Rev. Lett. **57**, 1761 (1986).
- [32] R. J. Haug, Semicond. Sci. Technol. **8**, 131 (1993).
- [33] S. Luryi und R. F. Kazarinov, Phys. Rev. B **27**, 1386 (1983).
- [34] S. A. Trugman, Phys. Rev. B **27**, 7539 (1983).
- [35] R. Woltjer, R. Eppenga, J. Mooren und C. E. Timmering, Europhys. Lett. **2**, 149 (1986).
- [36] V. Tsemekhman, K. Tsemekhman, C. Wexler und D. J. Thouless, Solid State Comm. **101**, 549 (1997).
- [37] P. F. Fontein, J. A. Kleinen, P. Hendriks, F. A. P. Blom, J. H. Wolter, H. G. M. Lochs, F. A. J. M. Driessen, L. J. Giling und C. W. J. Beenakker, Phys. Rev. B **43**, 12090 (1991).
- [38] R. Knott, W. Dietsche, K. v. Klitzing und K. Ploog, Semicond. Sci. Technol. **10**, 117 (1995).
- [39] G. Ebert, K. v. Klitzing und G. Weimann, J. Phys. C **18**, L257 (1985).

- [40] R. Knott, W. Dietsche, K. v. Klitzing, K. Eberl und K. Ploog, *Solid State Electr.* **37**, 689 (1994).
- [41] E. Yahel, D. Organd, A. Palevski und H. Shtrikman, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 2149 (1996).
- [42] S. A. J. Wieggers, J. G. S. Lok, M. Jeuken, U. Zeitler, J. C. Maan und M. Henini, *Phys. Rev. B* **59**, 7323 (1999).
- [43] G. Nachtwei, *Physica E* **4**, 79 (1999).
- [44] A. Yacoby, H. F. Hess, T. A. Fulton, L. N. Pfeiffer und K. W. West, *Solid State Comm.* **111**, 1 (1999).
- [45] K. L. McCormick, M. T. Woodside, M. Huang, M. Wu, P. L. McEuen, C. Duruoiz und J. S. Harris, *Phys. Rev. B* **59**, 4654 (1999).
- [46] S. Tessmer, P. I. Glicofridis, R. C. Ashoori, L. S. Levitov und M. R. Melloch, *Nature* **392**, 51 (1998).
- [47] P. Weitz, Dissertation Universität Hamburg, (Max-Planck-Institut Stuttgart, 1999).
- [48] G. Binning, C. F. Quate und C. Gerber, *Phys. Rev. Lett.* **56**, 930 (1986).
- [49] R. Wiesendanger, *Scanning probe microscopy*, (Springer, Berlin, 1998).
- [50] Datenblatt von *TM Microscopes*, <http://www.park.com/>.
- [51] F. J. Giessibl, *Phys. Rev. B* **56**, 16010 (1997).
- [52] D. Krüger, B. Anczykowski und H. Fuchs, *Ann. Physik* **6**, 341 (1997).
- [53] T. R. Albrecht, P. Grütter, D. Horne und D. Rugar, *J. Appl. Phys.* **69**, 668 (1991).
- [54] Y. Martin, C. C. Williams und H. K. Wickramasinghe, *J. Appl. Phys.* **61**, 4723 (1987).
- [55] D. W. Pohl, *Rev. Sci. Instrum.* **58**, 54 (1987).
- [56] M. Tortonese, R. C. Barret und C. F. Quate, *Appl. Phys. Lett.* **62**, 834 (1993).
- [57] Y. Martin, D. W. Abraham und H. K. Wickramasinghe, *Appl. Phys. Lett.* **52**, 2921 (1988).
- [58] J. M. R. Weaver und D. W. Abraham, *J. Vac. Sci. Technol. B* **9**, 1559 (1991).
- [59] M. Nonnenmacher, M. P. O'Boyle und H. K. Wickramasinghe, *Appl. Phys. Lett.* **58**, 2921 (1991).

- [60] H. O. Jacobs, H. F. Knapp, S. Müller und A. Stemmer, *Ultramicroscopy* **69**, 39 (1997).
- [61] P. Weitz, E. Ahlswede, J. Weis, K. v. Klitzing und K. Eberl, *Appl. Surf. Sci.* **157**, 349 (2000).
- [62] G. Nachtwei, S. Heide, C. Breitlow, P. Svoboda und M. Cukr, *Phys. Rev. B* **50**, 8488 (1994).
- [63] D. B. Chklovskii, B. I. Shklovskii und L. I. Glazman, *Phys. Rev. B* **46**, 4026 (1992).
- [64] A. L. Efros, *Solid State Commun.* **67**, 1019 (1988).
- [65] A. M. Chang, *Solid State Commun.* **74**, 871 (1990).
- [66] C. W. J. Beenakker, *Phys. Rev. Lett.* **64**, 216 (1990).
- [67] J. P. Eisenstein, L. N. Pfeiffer und K. W. West, *Phys. Rev. B* **50**, 1760 (1994).
- [68] K. Lier und R. R. Gerhardt, *Phys. Rev. B* **50**, 7757 (1994).
- [69] S. P. Svensson, J. Kanski, T. G. Andersson und P.-O. Nilsson, *J. Vac. Sci. Technol. B* **2**, 235 (1984).
- [70] W. Chen, M. Dumas, D. Mao und A. Kahn, *J. Vac. Sci. Technol. B* **10**, 1886 (1992).
- [71] Hrsg. D. K. Ferry und C. Jacoboni, *Quantum Transport in Semiconductors*, S. 73 (Plenum Press, New York, 1992).
- [72] K. I. Wysokiński, *Eur. J. Phys.* **21**, 535 (2000).
- [73] A. H. MacDonald, T. M. Rice und W. F. Brinkman, *Phys. Rev. B* **28**, 3648 (1983).
- [74] M. R. Geller und G. Vignale, *Phys. Rev. B* **50**, 11714 (1994).
- [75] M. R. Geller und G. Vignale, *Physica B* **212**, 283 (1995).
- [76] D. B. Chklovskii und P. A. Lee, *Phys. Rev. B* **48**, 18060 (1993).
- [77] Hrsg. R. E. Prange und S. M. Girvin, *The Quantum Hall Effect*, (Springer, New York, 1987).
- [78] J. T. Chalker und P. Coddington, *J. Phys. C* **21**, 2665 (1988).
- [79] M. M. Fogler und B. I. Shklovskii, *Phys. Rev. B* **52**, 17366 (1995).
- [80] J. Oswald, *Physica E* **3**, 30 (1998).

- [81] M. E. Cage, J. Res. Natl. Inst. Stand. Technol. **102**, 677 (1997).
- [82] U. Klass, W. Dietsche, K. v. Klitzing und K. Ploog, Physica B **169**, 363 (1991).
- [83] U. Klass, W. Dietsche, K. v. Klitzing und K. Ploog, Surf. Sci. **263**, 97 (1992).
- [84] J. M. Woodall und J. L. Freeouf, J. Vac. Sci. Technol. **19**, 794 (1981).
- [85] U. Graumann, *Praktikumsbericht*, Max-Planck-Institut für Festkörperforschung, 1999.
- [86] A. S. Sachrajda, Y. Feng, R. P. Taylor, R. Newbury, P. T. Coleridge und J. P. McCaffrey, Superlattices and Microstr. **20**, 651 (1996).
- [87] K. Yoshihiro, J. Kinoshita, K. Inagaki, C. Yamanouchi, J. Moriyama und S. Kawaji, Surf. Sci. **113**, 16 (1982).
- [88] G. Ebert, K. v. Klitzing, K. Ploog und G. Weimann, J. Phys. C **16**, 5441 (1983).
- [89] L. Eaves und F. W. Sheard, Semicond. Sci. Technol. **1**, 346 (1986).
- [90] Y. Kawaguchi, F. Hayashi, S. Komiyama, T. Osada, Y. Shiraki und R. Itoh, Jpn. J. Appl. Phys. **34**, 4309 (1995).
- [91] V. Tsemekhman, K. Tsemekhman, C. Wexler, J. H. Han und D. J. Thouless, Phys. Rev. B **55**, R10201 (1997).
- [92] B. E. Kane, D. C. Tsui und G. Weimann, Phys. Rev. Lett. **59**, 1353 (1987).
- [93] R. J. Haug und K. v. Klitzing, Europhys. Lett. **10**, 489 (1989).
- [94] P. L. McEuen, A. Szafer, C. A. Richter, B. W. Alphenarr, J. Jain, A. Stone, R. Wheeler und R. Sacks, Phys. Rev. Lett. **64**, 2062 (1990).
- [95] S. I. Dorozhkin, S. Koch, K. v. Klitzing und G. Dorda, JETP Lett. **52**, 652 (1990).
- [96] B. J. van Wees, E. M. M. Willems, L. P. Kouwenhoven, C. Harmans, J. Williamson, C. Foxon und J. Harris, Phys. Rev. B **39**, 8066 (1989).
- [97] G. Nachtwei, C. Breitlow, A. Jaeger, P. Svoboda, , P. S. M. Cukr, L. Blied, F. J. Ahlers und H. Schlegel, Semicond. Sci. Technol. **8**, 25 (1993).
- [98] G. Müller, D. Weiss, K. v. Klitzing, K. Ploog, H. Nickel, W. Schlapp und R. Lösche, Phys. Rev. B **46**, 4336 (1992).
- [99] B. W. Alphenaar, P. L. McEuen und R. G. Wheeler, Physica B **175**, 235 (1991).

- [100] R. J. Haug, A. D. Wieck, K. v. Klitzing und K. Ploog, *Physica B* **184**, 192 (1993).
- [101] P. Svoboda, P. Štěda, G. Nachtwei, A. Jaeger, M. Cukr und M. Láznička, *Phys. Rev. B* **45**, 8763 (1992).
- [102] B. W. Alphenaar, P. L. McEuen, R. G. Wheeler und R. N. Sacks, *Phys. Rev. Lett.* **64**, 677 (1990).
- [103] R. J. Haug, A. H. MacDonald, P. Štěda und K. v. Klitzing, *Phys. Rev. Lett.* **61**, 2797 (1988).
- [104] S. Washburn, A. B. Fowler, H. Schmid und D. Kern, *Phys. Rev. Lett.* **61**, 2801 (1988).
- [105] C. W. J. Beenakker und H. van Houten, in *Solid State Physics, Advances in Research and Applications*, Hrsg. H. Ehrenreich und D. Turnbull, S. 44 (Academic Press, Boston, 1991).
- [106] S. Komiyama und H. Hirai, *Phys. Rev. B* **54**, 2067 (1996).
- [107] T. Ando, *Mesoscopic Physics and Electronics*, S. 120 (Springer, Heidelberg, 1998).
- [108] M. Büttiker, *Semiconductors and Semimetals* **35**, S. 191 (Academic Press, Orlando, 1992).
- [109] D. J. Thouless, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 1879 (1993).
- [110] R. Landauer, *Z. Phys. B* **21**, 247 (1975).
- [111] M. T. Woodside, C. Vale, K. L. McCormick, P. L. McEuen, C. Kadow, K. D. Maranowski und A. C. Gossard, *Physica E* **6**, 238 (2000).
- [112] Y. Hirayama, K. Muraki und T. Saku, *Appl. Phys. Lett.* **72**, 1745 (1998).
- [113] Y. Hirayama, K. Muraki, A. Kawaharazuka, K. Hashimoto und T. Saku, *Physica E* **11**, 155 (2001).
- [114] H. Z. Zheng, D. C. Tsui und A. M. Chang, *Phys. Rev. B* **32**, 5506 (1985).
- [115] E. K. Sichel, H. H. Sample und J. P. Salerno, *Phys. Rev. B* **32**, 6975 (1985).
- [116] P. F. Fontein, P. Hendriks, F. A. P. Blom, J. H. Wolter, L. J. Giling und C. W. J. Beenakker, *Surface Sc.* **263**, 91 (1992).
- [117] R. J. F. van Haren, W. de Lange, F. A. P. Blom und J. H. Wolter, *Phys. Rev. B* **52**, 5760 (1995).

- [118] R. J. F. van Haren, F. A. P. Blom und J. H. Wolter, Phys. Rev. Lett. **74**, 1198 (1995).
- [119] A. A. Shashkin, A. J. Kent, J. R. Owers-Bradley, A. J. Cross, P. Hawker und M. Henini, Phys. Rev. Lett. **79**, 5114 (1997).
- [120] H. van Zalinge, B. Özyilmaz, A. Böhm, R. W. van der Heijden, J. H. Wolter und P. Wyder, Phys. Rev. B **64**, 235303 (2001).
- [121] S. W. Hwang, D. C. Tsui und M. Shayegan, Phys. Rev. B **48**, 8161 (1993).
- [122] S. Takaoka, K. Oto, K. Murase, K. Gamo und S. Nishi, Phys. Rev. Lett. **72**, 3080 (1994).
- [123] S. Takaoka, K. Oto und K. Murase, Int. J. Mod. Phys. B **11**, 2593 (1997).
- [124] N. B. Zhitenev, R. J. Haug, K. v. Klitzing und K. Eberl, Phys. Rev. Lett. **71**, 2292 (1993).
- [125] N. B. Zhitenev, R. J. Haug, K. v. Klitzing und K. Eberl, Phys. Rev. B **49**, 7809 (1994).
- [126] G. Ernst, N. B. Zhitenev, R. J. Haug, K. v. Klitzing und K. Eberl, Phys. Rev. Lett. **79**, 3748 (1997).
- [127] V. A. Volkov und S. A. Mikhailov, Sov. Phys. JETP **67**, 1639 (1988).
- [128] Y. Y. Wei, J. Weis, K. v. Klitzing und K. Eberl, Phys. Rev. Lett. **81**, 1674 (1998).
- [129] E. Yahel, A. Tsukernik, A. Palevski und H. Shtrikman, Phys. Rev. Lett. **81**, 5201 (1998).
- [130] G. Finkelstein, P. I. Glicofridis, S. H. Tessmer, R. C. Ashoori und M. R. Melloch, Phys. Rev. B **61**, R16323 (2000).
- [131] G. Finkelstein, P. I. Glicofridis, R. C. Ashoori und M. Shayegan, Science **289**, 90 (2000).
- [132] M. J. Yoo, T. A. Fulton, H. F. Hess, R. L. Willett, L. N. Dunkleberger, R. J. Chichester, L. N. Pfeiffer und K. W. West, Science **276**, 579 (1997).
- [133] H. F. Hess, T. A. Fulton, M. J. Yoo und A. Yacoby, Solid State Comm. **107**, 657 (1998).
- [134] N. B. Zhitenev, T. A. Fulton, A. Yacoby, H. F. Hess, L. N. Pfeiffer und K. W. West, Nature **404**, 473 (2000).
- [135] M. T. Woodside, C. Vale, P. L. McEuen, C. Kadow, K. D. Maranowski und A. C. Gossard, Phys. Rev. B **64**, 041310 (2001).
- [136] R. Crook, C. G. Smith, M. Y. Simmons und D. A. Ritchie, Phys. Rev. B **62**, 5174 (2000).

- [137] M. A. Topinka, B. J. LeRoy, S. E. J. Shaw, E. J. Heller, R. M. Westervelt, K. D. Maranowski und A. C. Gossard, *Science* **289**, 2323 (2000).
- [138] M. A. Topinka, B. J. LeRoy, R. M. Westervelt, S. E. J. Shaw, R. Fleischmann, E. J. Heller, K. D. Maranowski und A. C. Gossard, *Nature* **410**, 183 (2001).
- [139] R. F. Kazarinov und S. Luryi, *Phys. Rev. B* **25**, 7626 (1982).
- [140] S. Luryi, in *High Magnetic Fields in Semiconductor Physics, Springer Series in Solid State Sciences 71*, S. 16 (Springer, Heidelberg, 1987).
- [141] B. Kramer, in *Quantum Transport and Dissipation*, S. 79 (Wiley-VCH, Weinheim, 1998).
- [142] K. Shizuya, *Phys. Rev. B* **59**, 2142 (1999).
- [143] R. Woltjer, *Surf. Sc.* **196**, 188 (1988).
- [144] C. Wexler und D. J. Thouless, *Phys. Rev. B* **49**, 4815 (1994).
- [145] K. Tsemekhman und V. Tsemekhman, cond-mat/9812111 (1998).
- [146] K. Güven und R. R. Gerhardts, *Proceedings of the 15th International Conference on High Magnetic Fields in Semiconductor Physics (SemiMag)*, Oxford (2002).

Danksagung

Ich möchte mich an dieser Stelle bei allen bedanken, die zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben. Mein besonderer Dank gilt dabei:

- Prof. Dr. K. von Klitzing für die Aufnahme in seine Arbeitsgruppe, seine Betreuung und Unterstützung dieser Arbeit und sein stetiges Interesse an Neuigkeiten zu „seinem“ Quanten-Hall-Effekt. Seiner ideellen und finanziellen Unterstützung verdanke ich zudem sehr interessante Konferenz- und Seminarreisen, die mich sogar nach Japan führten und einige nette Bekanntschaften zu anderen Physikern aus der „community“ ermöglichten. Für das hierbei entgegengebrachte Vertrauen möchte ich mich ganz besonders bedanken.
- Prof. Dr. T. Pfau für die Übernahme des Mitberichts und sein Interesse an der Arbeit.
- Dr. J. Weis für seine engagierte Betreuung und Hilfe bei dieser Arbeit, insbesondere für sein intensives Korrekturlesen des Manuskripts.
- Dr. P. Weitz für die vorzüglich geleistete Vorarbeit beim Aufbau des Mikroskops und die intensive Einarbeitung, insbesondere in technische Fragen aller Art. Seine zupackende Art und sein Engagement ermutigten bei Durststrecken stets dazu, die Frustrationsgrenze ständig neu abzustecken und auch um Mitternacht noch keine „Ermüdungserscheinungen“ zu bekommen.
- dem Reinraumteam M. Riek, T. Reindl, U. Waizmann und G. Wilk für ihr Engagement bei der Betreuung des Reinraums, insbesondere M. Riek für ihre tatkräftige Unterstützung bei der Probenprozessierung und T. Reindl und U. Waizmann für viele REM-Aufnahmen.
- M. Schmid für seine hilfsbereite Unterstützung in allen technischen Belangen, insbesondere auch beim Doktorhutbasteln und Fahrradreparieren.
- Prof. R. R. Gerhardts, Prof. G. Nachtwei, Dr. K. Güven, Dr. T. Ihn und Dr. M. Morgenstern für viele interessante Diskussionen.
- Prof. D. Pfannkuche, Dr. J. Groß und J. Muster für die hilfsbereite Unterstützung in allen Computerfragen. Es war mir eine Ehre, gegen Ende der Arbeit selbst zusammen mit

Stefan Kraus als „root“ in die großen Fußstapfen von Daniela und Johannes treten zu dürfen!

- M. Hauser für das Wachsen der verwendeten Heterostrukturen und die Erlaubnis, in seinem reichhaltigen Probenfundus stöbern zu dürfen.
- B. E. Sagol und D. Rohe für das Korrekturlesen des Manuskripts.
- dem Tieftemperatur-Service des MPI für die unermüdliche Bereitstellung von Flüssig-Helium für einen ihrer „besten Kunden“.
- meinen Bürokollegen G. Rössner, M. Geisler, B. E. Sagol und A. Welker für das nette und nahrhafte Arbeitsklima – danke Martin für die permanente Aldi-Versorgung!
- M. Griebel, der zeitgleich seine Doktorarbeit zu Papier gebracht hat, für die moralische und organisatorische Unterstützung in allen doktorarbeitsrelevanten Fragen.
- allen Mitgliedern der Abteilung von Klitzing für viele interessante Diskussionen und die nette Arbeitsatmosphäre.

Lebenslauf

Name	Erik Ahlswede
Geburtstag	26.05.1972
Geburtsort	Rheinfeldern
1978-1982	Grundschule Kandern
1982-1991	Hebel-Gymnasium Lörrach
1991-1992	Zivildienst Naturschutzbund Deutschland und Mörike-Pflegeheim Stuttgart
10/92-01/98	Diplomstudiengang Physik, Universität Freiburg
07/94	Vordiplom
09/94-04/95	Auslandsstudium, University College London
04/95-10/96	Hauptstudium
11/96-10/97	Diplomarbeit bei Prof. Wagner, Fraunhofer Institut für Angewandte Festkörperforschung (IAF) Freiburg „Magnetotransport und -optik an kurzperiodischen InAs/(GaIn)Sb-Übergitterstrukturen“
01/98	Diplom in Physik
seit 03/98	Anfertigung der vorliegenden Dissertation bei Prof. v. Klitzing, Max-Planck-Institut für Festkörperforschung Stuttgart