

Wissenschaftlicher Bericht


Nr. 81/10 (HWV 028)

EXPERIMENTELLE BESTIMMUNG
DER TRANSVERSALEN DISPERSION
IN EINER SCHICHTENSTRÖMUNG

- Zwischenbericht zu Ko 528/9-2 -

Förderung: Deutsche Forschungsgemeinschaft
Vorhaben: DFG - Ko 528/9-2
"Ausbreitung von Schadstoffen hoher
Konzentration im Grundwasser"
Bewilligung: 30.1.1981
Berichts- 1.9.1980 - 30.9.1981
zeitraum:

Stuttgart, im September 1981



Dipl.-Ing. T. Söll



Prof. Dr. H. Kobus

VORWORT

Der vorliegende Fortschrittsbericht enthält die Ergebnisse des zweiten Jahres des auf drei Jahren angelegten Forschungsvorhabens "Ausbreitung von Schadstoffen hoher Konzentration im Grundwasser".

Im ersten Jahr stand die Konzeption und der Aufbau des Versuchsstandes im Vordergrund. Diese Arbeiten sind im folgenden Fortschrittsbericht beschrieben:

"Versuchsstand zur Untersuchung der transversalen Dispersion in porösen Medien"

Bericht Nr. 80/13 (HWV 022), September 1980
(Dipl.-Phys. B. Rinnert, Prof. Dr. H. Kobus)

Im zweiten Jahr lag der Schwerpunkt der Arbeit neben analytischen Ansätzen auf der Durchführung der Experimente, deren Ergebnisse im vorliegenden Bericht dargestellt sind. Während des Bearbeitungszeitraums ergaben sich folgende personelle Veränderungen:

- Herr Dipl.-Phys. B. Rinnert, wissenschaftlicher Mitarbeiter seit Beginn des Vorhabens, verließ das Institut zum 30. März 1981, um eine Ausbildung für den Diplomatischen Dienst im Auswärtigen Amt anzutreten. Als Nachfolger wurde Herr Dipl.-Ing. Thomas Söll eingestellt.

- Herr Dipl.-Ing. Sava Kupfer, der an den experimentellen Arbeiten mitwirkte, ist, der Auflage der DFG folgend, zum 30.9.1981 ausgeschieden und hat eine Arbeit an einer Fachhochschule aufgenommen. Die Technikerstelle bleibt vereinbarungsgemäß bis 31.1.1982 unbesetzt.

Durch diesen Personalwechsel bedingt ergaben sich einige Verschiebungen in der Abwicklung der Arbeiten: Herr Rinnert hat hauptsächlich die Ausarbeitung phänomenologischer Ansätze verfolgt und zunächst versucht, - vor Inangriffnahme numerischer Rechnungen - das Problem einer analytischen Lösung zuzuführen. Die von ihm erarbeiteten Ansätze sind diesem Fortschrittsbericht als Anhang beigelegt. Sie bedürfen der weiteren Entwicklung und Verifizierung; Herr Rinnert hat die Absicht, diese Ansätze in einer Dissertationsschrift weiter zu verfolgen.

Bei den experimentellen Arbeiten traten zunächst eine Reihe von Schwierigkeiten in der Versuchs- und Meßtechnik auf, die erst überwunden werden mußten. Herr Söll hat zusammen mit Herrn Kupfer diese Arbeiten vorangetrieben und die Ergebnisse im vorliegenden Bericht dargestellt.

Der Fortschritt der Arbeiten liegt trotz der genannten Veränderungen im wesentlichen im ursprünglich abgesteckten Zeitrahmen.

gez. H. Kobus

INHALTSVERZEICHNIS

Inhaltsverzeichnis

Verzeichnis der Bilder

1. Einleitung
2. Die Betriebsweise des Versuchsstandes
 - 2.1 Randbedingungen
 - 2.2 Strömungsfeld
3. Meßeinrichtung und Bestimmung von Strömungsparametern
 - 3.1 Abgeleitete Fluideigenschaften
 - 3.3 Die Durchlässigkeit des Sandkörpers
4. Meßprogramm zur Bestimmung der transversalen Dispersivität
 - 4.1 Eichung der Meßsonden
 - 4.2 Versuchsdurchführung
 - 4.3 Verfahren zur Versuchsauswertung
 - 4.4 Definition der effektiven Dispersivität
5. Dimensionsanalyse
6. Ergebnisse
7. Zusammenfassung und Ausblick

Literaturhinweise

Bilder

Anhang: Dipl.-Phys. B. Rinnert:

ANALYTISCHE LÖSUNG ZUR BESCHREIBUNG DER STATIONÄREN
SALZAUSBREITUNG IN EINER SALZ-/SÜSSWASSER-SCHICHTEN-
STRÖMUNG

VERZEICHNIS DER BILDER

- 1) Bedeutung der verwendeten Symbole
- 2) Schematischer Versuchsaufbau [5]
- 3) Strömungskonfiguration während der instationären Versuchsphase (ohne Quervermischung)
- 4) Elektronische Meßeinrichtung
- 5) Abhängigkeit des Leitfähigkeitskorrekturwertes $\lambda(c)$ von der Konzentration für Kochsalz
- 6) Abhängigkeit der Dichte ρ einer wässrigen Lösung von der Salzkonzentration [1]
- 7) Abhängigkeit der kinematischen Zähigkeit ν einer wässrigen Lösung von der Salzkonzentration [1]
- 8) Durchlässigkeit des Sandkörpers [1]
- 9) Randläufigkeit des Modells
- 10) Anordnung der Meßsonden im Versuchsstand
- 11) Eichkurven von vier ausgewählten Meßsonden
- 12) Konzentrationsabhängigkeit des Strömungsfeldes (schematisch)
- 13) Rechnerische Konzentrationsverteilung in der Meßebene (nach Rinnert)
- 14) Gemessene Konzentrationsverteilung bei einer Peclet-Zahl $Pe = 1\ 200$
- 15) Gemessene Konzentrationsverteilung bei einer Peclet-Zahl $Pe = 1\ 200$
- 16) Gemessene Konzentrationsverteilung bei einer Peclet-Zahl $Pe = 800$
- 17) Abhängigkeit der relativen Dispersivität von der Konzentration
- 18) Abhängigkeit des relativen Dispersionskoeffizienten von der Rayleigh-Zahl
- 19) Vergleich von gemessenen und errechneten Konzentrationsverteilungen

1. EINLEITUNG

Das Arbeitsprogramm des zweiten Jahres beinhaltet im wesentlichen die systematische Durchführung von Laborexperimenten mit Hilfe eines Versuchsstandes, mit dem der Zusammenhang zwischen transversaler Dispersion und dem konzentrationsabhängigen Dichteunterschied bestimmt werden kann. Daneben wurde der Versuch unternommen, die strömungsphysikalischen Phänomene und den Quervermischungsprozeß mit Hilfe von Näherungsansätzen analytisch zu beschreiben.

Der Entwurf und Aufbau des Versuchsstandes sowie der vorgesehenen Meßeinrichtungen wurde im Zwischenbericht HWV 022 ausführlich dargelegt.

Im Verlauf der ersten Dispersionsversuche im letzten Quartal 1980, die in [1] beschrieben sind, fiel eine große Anzahl der Leitfähigkeitsmeßsonden durch Kurzschlüsse im Koaxialkabel aus, so daß man im Frühjahr 1981 gezwungen war, den Versuchsbetrieb vorübergehend auszusetzen, um die erforderlichen umfangreichen Reparaturen durchführen zu können.

Seither ist der Versuchsstand in Betrieb, ohne daß technische Störungen aufgetreten sind, so daß ein Großteil der geplanten Meßreihen durchgeführt werden konnte.

Mit dem gewonnenen Zusammenhang zwischen dem Dichteunterschied und dem transversalen Dispersionskoeffizienten D_T , der die vertikale Durchmischung eines Schadstoffes beschreibt, erhält man eine erste Berechnungsgrundlage für die Ausbreitung eines mischbaren Wasserinhalstoffes beliebiger Konzentration bei (nahezu) eindimensionalen Strömungskonfigurationen.

2. DIE BETRIEBSWEISE DES VERSUCHSSTANDES

Die generelle Konzeption des Versuchsaufbaus zur Bestimmung des lateralen Dispersionskoeffizienten D_T wurde im Zwischenbericht HWV 022 umrissen.

Sämtliche Symbole und Zeichen zur Beschreibung des Strömungsfeldes und des Vermischungsprozesses sind in Bild 1 aufgeführt und erklärt. Der Index "o" steht für den Süßwasserbereich und "s" für den Salzwasserbereich.

2.1 Randbedingungen

Das Bild 2 zeigt schematisch die Randbedingungen des Versuchsstandes. Das Strömungsfeld ist zum einen geprägt durch die Standrohrspiegelhöhen der Vorratsbehälter am Ein- und Auslauf und zum anderen durch den in vertikaler Richtung ablaufenden Vermischungsprozeß infolge Querdispersion. Der Einfluß der longitudinalen Vermischung ist hier von untergeordneter Bedeutung und wird im weiteren vernachlässigt. Die Randbedingungen werden so gewählt, daß sich eine horizontale Schichtenströmung ausbilden könnte, wenn der Quervermischungseffekt nicht vorhanden wäre.

Zur Versuchsdurchführung müssen die Wasserspiegel in den Einlaufbehältern so eingestellt werden, daß keine Kurzschlußströmung auftreten kann. Dazu muß am Einlauf in Höhe des Trennbleches im Salz- und Süßwasserbereich der gleiche Druck herrschen, was zu der Beziehung

$$h_s = \frac{\rho_o}{\rho_s} h_o \quad (1)$$

für die Einlaufwasserspiegellagen führt. Die Einstellung der Auslaufwasserspiegelhöhen erfolgt prinzipiell nach einer analogen Druckbedingung. Jedoch sind hier die Verhältnisse komplizierter, weil längs der Fließstrecke durch laterale Dispersion ein Massenaustausch zwischen Salz- und Süßwasser stattfindet und eine unbekannt Konzentration- und Dichteverteilung über die Höhe des Versuchsstandes vorliegt. Während der instationären Phase zu Beginn jedes neuen Versuchs unterliegt die Dichte des austretenden Mischwassers im mittleren Auslauf großen zeitlichen Schwankungen. In erster Näherung wurde die Wasserspiegellage des mittleren Überlaufbehälters festgelegt auf

$$h_m = \frac{h_o + h_s}{2} \quad (2)$$

und vor den eigentlichen Messungen entsprechend der tatsächlichen Dichte im Auslauf korrigiert. Es hat sich gezeigt, daß schon geringe Einstellfehler drastische Änderungen des erwünschten eindimensionalen Strömungsfeldes bedingen.

Zu Beginn eines Versuchs ist die Durchlässigkeit K_f des Versuchsstandes eine Funktion der Zeit und des Ortes, weil das zugeführte Salzwasser andere Fluideigenschaften aufweist als das zu verdrängende Süßwasser

$$K_f = f(t, z) \quad (3)$$

Bei höheren Salzkonzentrationen wird der untere Teil des Modells nicht mehr in der Form einer Pfropfenströmung durchflossen, weil das Druckgleichgewicht an der senkrechten Trennfläche zwischen dem Salz- und dem Süßwasserbereich nicht erfüllt ist. Da der Versuchsstand außerdem an seinen Rändern eine erhöhte Permeabilität aufweist, wird der Effekt einer am Boden des Modells entlangkriechenden Salzwasserzunge noch verstärkt (Bild 3).

Durch ständige Kontrollen (Kapitel 4.2) können die erwähnten Anlaufschwierigkeiten überwunden werden.

2.2 Strömungsfeld

Für vorgegebene Piezometerhöhen, die am Ein- und Auslauf die Druckbedingung (1) erfüllen, wird das Modell im Tracerfall stationär mit Süß- und Salzwassermengen pro Zeiteinheit durchflossen, die sich aus dem Darcy-Gesetz für Filterströmungen und Kontinuitätsbetrachtungen zu

$$q_o = v_{fo} \cdot m_o = k_r \cdot \frac{\rho_o \cdot g}{\eta_o} \cdot \nabla h_o \cdot m_o \quad (4)$$

und

$$q_s = v_{fs} \cdot m_s = k_r \cdot \frac{\rho_s \cdot g}{\eta_s} \cdot \nabla h_s \cdot m_s \quad (5)$$

errechnen. Da der Druckgradient

$$\nabla p = \rho \cdot \nabla h \quad (6)$$

im Salz- und Süßwasserbereich an jeder Stelle gleich sein muß, erhält man für das Verhältnis der Durchflüsse mit $m_o = m_s$

$$\frac{q_o}{q_s} = \frac{\eta_s}{\eta_o} \quad (7)$$

Bei Salzkonzentrationen, die die Dichte und Zähigkeit verändern, ist es in diesem Fall nicht möglich, eine eindimensionale Strömung zu erzeugen, die sowohl im Salz- als auch im Süßwasserbereich die gleiche Geschwindigkeit aufweist.

Versucht man durch entsprechende Manipulationen der Wasserspiegellagen zu erreichen, daß die dem Versuchsstand zugeführten Salz- und Süßwasserdurchflüsse gleich sind, verschiebt sich die Lage der Trennlinie unkontrollierbar nach oben, da die Druckgleichung (1) nicht erfüllt ist.

Im entgegengesetzten Fall muß man verschiedene horizontale Geschwindigkeiten in beiden Bereichen in Kauf nehmen und berücksichtigen, daß auch Geschwindigkeitskomponenten in vertikaler Richtung auftreten, die ein geringes asymptotisches Absinken der 50%-Konzentrationslinie zwischen Salz- und Süßwasserbereich bewirken. Bei Vernachlässigung dieser sehr kleinen Geschwindigkeiten in z-Richtung, deren Ursache in Kapitel 4.4 detailliert dargestellt ist, verhalten sich die Durchflüsse und Geschwindigkeiten umgekehrt proportional zu den dynamischen Zähigkeiten der verwendeten Fluide

$$\frac{v_{fo}}{v_{fs}} = \frac{\eta_s}{\eta_o} \quad (8)$$

Bei Sättigungskonzentration erhält man für dieses Geschwindigkeitsverhältnis ($v_{fo}/v_{fs} = 1.9$).

3. MESSGERÄTE UND BESTIMMUNG VON STRÖMUNGSPARAMETERN

3.1 Meßgeräte

Zur Bestimmung und Kontrolle des NaCl-Gehaltes der Salzlösungen dient eine Waage mit Digitalanzeige bzw. eine Präzisionsdichtewaage, die den Auftrieb eines geeichten Senkkörpers in den Flüssigkeiten mißt. Der Meßbereich der Dichtewaage umfaßt den Bereich von $0,6200 \text{ g/cm}^3$ bis $1,8400 \text{ g/cm}^3$. Die Ablesegenauigkeit beträgt wegen der besonderen Skalenanordnung, die Parallaxfehler ausschließt, vier Stellen hinter dem Komma.

Die kinematische Zähigkeit ν der Fluide bestimmt man mit Hilfe eines Viskosimeters. Für das hier verwendete KPG-UBBELOHDE-Viskosimeter gilt die gerätespezifische Beziehung [7]

$$\nu = k \cdot (t_m - \lambda) \quad (9)$$

Es bedeuten:

- $\nu \text{ [mm}^2/\text{s]}$: kinematische Zähigkeit
- $k \text{ [mm}^2/\text{s}^2]$: 0,003225, Kapillarkonstante des Meßgerätes
- $t_m \text{ [s]}$: Mittelwert der Durchflußzeit
- $\lambda \text{ [s]}$: "Hagenbach"-Korrekturbeiwert in Abhängigkeit von der mittleren Durchflußzeit t_m

Die in Bild 4 dargestellte elektronische Meßeinrichtung wurde von Herrn Dipl.-Phys. B. Rinnert in Zusammenarbeit mit Herrn Dr.-Ing. Dipl.-Phys. B. Barczewski und Mitarbeitern der Elektro-

werkstatt des Instituts für Wasserbau an der Universität Stuttgart entwickelt. Die Leitfähigkeitsmeßanordnung wurde bereits im Zwischenbericht HWV O22 beschrieben. Der neu entwickelte Frequenzgenerator verfügt über eine automatische Anpassung des angelegten Konstantstroms an den jeweils erforderlichen Meßbereich. Das Digitalvoltmeter zeigt den Spannungsabfall einer Elektrode bei einer Stromstärke von 0,1 mA oder 1,0 mA an, woraus mit Hilfe des Ohmschen Gesetzes der Widerstand der verwendeten Salzlösung im Bereich von $0,0\Omega$ bis $19\text{ K}\Omega$ errechnet werden kann. Zur Dokumentation einer Meßreihe dient ein Digitaldrucker, der die Ausgangssignale des Leitfähigkeitsmeßgerätes aufschreibt.

Der Einfluß der Temperatur auf die Leitfähigkeit der Sonden muß nach der Gleichung [3]

$$G(20) = G(T) \cdot [1 + \lambda(c) \cdot (T_{20} - T)] \quad (10)$$

berücksichtigt werden.

Es bedeuten :

- T [$^{\circ}\text{C}$] : Temperatur im Versuchsstand
- $G(T)$ [$1/\text{K}\Omega$] : Leitfähigkeit der Meßsonden bei der Temperatur im Versuchsstand
- $\lambda(c)$ [$1/^{\circ}\text{C}$] : Korrekturbeiwert für die Leitfähigkeit in Abhängigkeit von der Konzentration
- $G(20)$ [$1/\text{K}\Omega$] : Leitfähigkeit der Meßsonden bei einer Temperatur von $T = 20^{\circ}\text{C}$

In Bild 5 ist die Konzentrationsabhängigkeit des Beiwertes $\lambda(c)$ für Kochsalz dargestellt.

Die im Frühjahr 1981 aufgetretenen Schäden an den Elektroden zur Messung der Leitfähigkeit waren größtenteils auf eine mangelhafte Abdichtung des Koaxialkabels vor der Lötstelle mit den Platinplättchen zurückzuführen. Durch feinste Schwindrisse des 2-Komponentenklebers drang Flüssigkeit in das Kabel, die die Kurzschlüsse an der Lötstelle bzw. die völlige Oxidation der Kupferleitungen bewirkte. Nach Verlängerung der Dichtstrecke und durch das sorgfältige Einbringen des Klebers in mehreren Arbeitsgängen trat dieser Schaden an den reparierten Sonden - außer bei Elektrode 9 - nicht mehr auf. Im Versuchsbetrieb haben sich die Platinmeßfühler hervorragend bewährt.

3.2 Abgeleitete Fluideigenschaften

In den Bildern 6 und 7 ist der aus Vorversuchen erhaltene Zusammenhang zwischen dem Salzgehalt einer wässrigen Lösung und ihrer Dichte, bzw. Viskosität dargestellt, den man zur Steuerung des Strömungsfeldes benötigt. Beide Kurven gelten für eine Wassertemperatur von $T = 20^{\circ} \text{C}$.

Geringe Abweichungen ($T \approx \pm 1,0^{\circ} \text{C}$) von dieser gewünschten Normtemperatur ließen sich wegen des langen Zeitraums, über den sich die eigentlichen Dispersionsversuche erstreckten, nicht vermeiden und wurden bei der Einstellung des Geschwindigkeitsfeldes nicht berücksichtigt, da dieses hauptsächlich vom Verhältnis der Zähigkeiten und erst in zweiter Linie von deren Absolutbeträgen abhängt.

Der Temperatureinfluß auf die Dichte ist hier mit sehr guter Näherung vernachlässigbar.

3.3 Die Durchlässigkeit des Sandkörpers

Schon die ersten Experimente zur Bestimmung des K_f -Wertes zeigten, daß der Versuchsstand keine über die Höhe konstante Durchlässigkeit aufweist (Bild 8). Trotz sorgfältiger Einstellung der Piezometerhöhen fördert der mittlere Auslauf weniger Wasser als der obere bzw. der untere, was auf eine erhöhte Permeabilität nahe den Plexiglasrändern schließen läßt. Bedingt durch die unter dem Deckel befindliche Schaumgummi-schicht, beobachtet man am oberen Auslauf den relativ größten Durchfluß. Die Farbbilder ⁹ dokumentieren die erhöhte Randläufigkeit des Modells.

4. MESSPROGRAMM ZUR BESTIMMUNG DER TRANSVERSALEN DISPERSIVITÄT

4.1 Eichung der Meßsonden

Alle verwendeten Leitfähigkeitselektroden, deren Anordnung aus Bild 10 ersichtlich ist, müssen im eingebauten Zustand einzeln geeicht werden, da keine Sonde der anderen gleicht. Die unterschiedlichen Leitwerte bei gleicher Salzkonzentration haben mehrere Gründe:

- der Abstand der Platinplättchen variiert,
- die Platinplättchen sind nicht genau parallel,
- die Oberfläche der Sonden weist Unterschiede auf durch das Verkleben mit dem Plexiglasröhrchen,
- die Lötstelle zwischen dem Koaxialkabel und den Plättchen weist Fertigungsunterschiede auf,
- die unterschiedliche Korneinlagerung zwischen den Platinelektroden beeinflusst die Leitwerte stark.

Für folgende Konzentrationen c_s wurden Eichversuche durchgeführt:

$$c_s [\%] : 0; 0.5; 2.0; 3.3; 5.0; 6.7; 8.0; 12.5; 23.5$$

Die genau abgewogene Salzmenge wird einem geeichten Süßwassertank über einen Vorbehälter in Teilmengen zugegeben. Dabei müssen die Schieber am Rohrleitungssystem so eingestellt sein, daß ein Umwälzeffekt auftritt. Das spezifisch schwerere Wasser aus dem Vorbehälter muß dem Vorratstank mit Hilfe eines in der Höhe verstellbaren Einlaufschlauches oben zufließen, so daß durch den Dichteeffekt ein zusätzlicher Ausgleich stattfinden kann. Anhand von Dichtemessungen an Wasserproben, möglichst aus unterschiedlichen Höhen und der Kurve $\rho = f(c)$, kann man entscheiden, ob die gewünschte Konzentration und gut durchgemischtes Salzwasser vorliegen. Das gesamte Modell wird anschließend mit der oben und unten eingeleiteten Salzlösung durchströmt. Aus dem Durchfluß q

am Auslauf und der Porosität $n_e = 0,39$ errechnet sich die Zeit, nach der frühestens mit Leitfähigkeitsmessungen begonnen werden kann, zu

$$t = \frac{L \cdot b \cdot d \cdot n_e}{q} \quad (11)$$

Bei einem Maximaldurchfluß von etwa 3,2 l/min, erhält man für $t \approx 90$ Minuten. Nach weiteren drei bis vier Stunden stellt sich frühestens eine stationäre Konzentrationsverteilung ein, so daß keine Änderungen der einzelnen Leitwerte mehr feststellbar sind. Für jede Sonde erhält man einen Wert $G(c)$; die Elektrode Nr. 9 fiel während der Eichung durch Kurzschluß aus. Das Ergebnis der Eichung, die etwa fünf Wochen in Anspruch nimmt, ist auszugsweise in Bild 11 dargestellt. Diese Eichkurven dienen als Grundlage zur Auswertung der anschließenden Dispersionsversuche.

4.2 Versuchsdurchführung

Salz- und Süßwassertank werden aus dem Vorratsbehälter mit gut abgestandenem Wasser gefüllt. Nach Zugabe der gewünschten Salzmenge legt man die Piezometerhöhen des Ein- und Auslaufes fest. Vor Beginn jedes neuen Versuchs muß die momentane Leistung der Doppelschlauchpumpe bekannt sein, die durch Schließen der Einlaufventile und mehrmaliges Auslitern der Überlaufmengen in einem geeichten Meßzylinder bestimmbar ist. Nach dem Öffnen des Einlaufs und nochmaligem Auslitern des Restüberlaufs kann man die Istdurchflüsse durch einfache Differenzbildung

$$q_{\text{Modell}} = q_{\text{Pumpe}} - q_{\text{Überlauf}} \quad (12)$$

getrennt für den Salz- und Süßwasserbereich errechnen und mit

den Solldurchflüssen vergleichen. Eine Überprüfung bzw. Korrektur der Wasserspiegellagen ist erst dann durchzuführen, wenn sichergestellt ist, daß die Dichte der Flüssigkeit in der Piezometerharfe derjenigen im Modell entspricht. Um in der kritischen instationären Phase zu Beginn eines Dispersionsversuchs die Lage der Trennschicht zwischen Salz- und Süßwasser erkennen zu können, muß einem Fluid ein Farbstoff (ohne Metallionen!) zugegeben werden. Nach Ablauf von frühestens etwa zwei bis drei Stunden stellt sich das gewünschte (fast) eindimensionale Strömungsfeld ein und bleibt stationär, wonach erste Konzentrationsmessungen sinnvoll sind. Nach weiteren drei bis vier Stunden ergibt sich eine stationäre Konzentrationsverteilung, aus der der transversale Dispersionskoeffizient D_T oder die transversale Dispersivität α_T errechenbar ist.

4.3 Verfahren zur Versuchsauswertung

Die Auswertung der Meßwerte basiert auf einem Verfahren, das bei Harlemann/Rumer (1963), bei List/Brooks (1967) und bei Rinnert/Kobus (1978) beschrieben ist.

Bei einem eindimensionalen Strömungsfeld und stationärer Konzentrationsverteilung kann man die Vermischung eines Tracers durch die Dispersionsgleichung

$$v_a \cdot \frac{\partial c}{\partial x} \cong D_T \cdot \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} \quad (13)$$

beschreiben.

Mit den Randbedingungen

$$\begin{aligned} c(0, z) &= c_s & \text{für} & & -B \leq z \leq 0 \\ c(0, z) &= 0 & \text{für} & & 0 \leq z \leq B \\ \frac{\partial c}{\partial z} &= 0 & \text{für} & & z = \pm B \end{aligned}$$

erhält man als Integral obiger Differentialgleichung näherungsweise die Lösung

$$\begin{aligned} \frac{c(x,z)}{c_s} &= \frac{1}{2} \cdot \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{z}{2 \cdot \sqrt{D_T \cdot \frac{x}{v_a}}} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left[\operatorname{erfc} \left(\frac{z}{2 \cdot \sqrt{D_T \cdot \frac{x}{v_a}}} \right) \right] \end{aligned} \quad (14)$$

Die Funktion $\operatorname{erf}(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$ (15)

bezeichnet das Gauß'sche Fehlerintegral und

$$\operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x) \quad (16)$$

das komplementäre Gauß'sche Fehlerintegral.

Für jede Meßstelle errechnet man sich die Größe

$$1 - \frac{2 \cdot c}{c_s}$$

und bestimmt dann mittels einer Tabelle des Gauß'schen Fehlerintegrals oder eines entsprechenden Rechenprogramms das Argument der Fehlerfunktion. Trägt man für jeden Meßpunkt $p(x,z)$

$$\frac{z}{2 \sqrt{D_T \cdot \frac{x}{v_a}}} \quad \text{über} \quad \frac{z}{2 \sqrt{\frac{x}{v_a}}}$$

auf, erhält man als Steigung der Ausgleichsgeraden

$$D_T = \frac{1}{s^2} \quad (17)$$

Eine zweite, sehr anschauliche Auswertungsmethode besteht darin, die Breite der Vermischungszone aus der Kurve der Konzentrationsverteilung zeichnerisch zu bestimmen.

Hierfür trägt man die gemessenen Konzentrationsverteilungen dimensionslos über der Meßhöhe auf und zeichnet die 16%- und die 84%-Fraktilwerte ein.

Definiert man als Breite:

$$b_v = b_v\left(\frac{c}{c_s}=0.16\right) - b_v\left(\frac{c}{c_s}=0.84\right) \quad (18)$$

erhält man mit

$$\frac{b_v}{2} = \sigma = \sqrt{2 \cdot \alpha_T \cdot x} \quad (19)$$

die Gleichung $\alpha = \frac{b_v^2}{8 \cdot x} \quad (20)$

für die gesuchte transversale Dispersivität α_T .

Beide Verfahren lassen sich nur dann exakt anwenden, wenn die gemessenen Konzentrationswerte sich tatsächlich entsprechend einer Wahrscheinlichkeitsfunktion mit Normalverteilung verhalten.

4.4 Definition einer effektiven Dispersivität

Bei höheren Salzkonzentrationen ist das Geschwindigkeitsfeld mit der vertikalen Konzentrationsverteilung gekoppelt. Durch transversale Dispersion findet ein Massenaustausch über die anfangs scharfe Trennlinie zwischen den beiden Fluiden statt,

der den im Einlaufbereich vorhandenen Konzentrationsprung abbaut. Wegen der Konzentrationsabhängigkeit der Durchlässigkeit wird dadurch auch das Geschwindigkeitsfeld verändert (Bild 12). Aus Kontinuitätsgründen bilden sich vertikalgerichtete Geschwindigkeitskomponenten aus, die bewirken, daß der 50%-Mittelwert der Konzentrationsverteilung asymptotisch nach unten sinkt und die Form der Durchbruchkurven nicht mehr symmetrisch zum Mittelpunkt der Meßebe-
ne ist (Bild 13).

Im Anhang wird von Dipl.-Phys. Bernd Rinnert ein analytisches Berechnungsverfahren vorgestellt, mit dessen Hilfe die Absenkung der Trennlinie und die Form der Konzentrationsverteilung unter gewissen vereinfachenden Annahmen näherungsweise berechnet werden kann. Inwieweit die dort getroffenen Annahmen zulässig und gerechtfertigt sind, muß der Vergleich mit den Messungen zeigen.

Es ist nicht möglich, den Meßergebnissen, die auszugsweise in den Bildern 14 bis 16 dokumentiert sind, die Absenkungsanteile zu entnehmen, die aus der Änderung der Geschwindigkeitsverteilung infolge Querdispersion rühren, da in den gemessenen Werten auch unbestimmte Beträge enthalten sein können, die aus einer fehlerhaften Einstellung des Strömungsfeldes resultieren.

Da die Durchbruchkurven nicht mehr symmetrisch zum Mittelpunkt der Meßebe-
ne sind, wird das in Kapitel 4.3 beschriebene Auswertungsverfahren wie folgt abgeändert:

Die z-Koordinate der gemessenen Konzentrationswerte c werden nach der Formel

$$\bar{z} = z - 25 - \Delta z \quad (21)$$

auf die Höhe \bar{z} bezogen, in der sich der 50%-Mittelwert eingestellt hat. Mit Hilfe eines Rechenprogramms, basierend auf der Methode der kleinsten Fehlerquadratsumme, wird iterativ die Errorfunction bestimmt, die die gemessenen Konzentrationswerte am besten approximiert:

$$\sum \left[\frac{2 \cdot c}{c_s} - \operatorname{erfc} \left(\frac{\bar{z}}{\sigma_{\text{eff}}} \right) \right]^2 = \min. \quad (22)$$

Aus der Definitionsgleichung

$$\sigma_{\text{eff}} = 2 \cdot \sqrt{D_{\text{Teff}} \cdot \frac{x}{v_a}} \quad (23)$$

kann ein effektiver transversaler Dispersionskoeffizient $D_{\text{Teff}}(c)$ errechnet werden, der für das in Kapitel 2.2 näher beschriebene (nahezu) eindimensionale Strömungsfeld die Vermischung eines Schadstoffes in Abhängigkeit von dessen Konzentration beschreibt.

Das Computerprogramm ist unter dem File-Namen SIGMA.TSK an der institutseigenen Rechananlage installiert.

5. DIMENSIONSANALYSE

Bezeichnet man mit dem Index "o" die Eigenschaften des Süßwassers und mit "s" die des Salzwassers, kann man die Horizontalkomponenten des Geschwindigkeitsfeldes anschreiben zu

$$v_s = f \left(\frac{k_o \cdot g}{\eta_o}, \frac{k_s \cdot g}{\eta_s}, \rho_o \cdot \nabla h_o, \rho_s \cdot \nabla h_s \right) \quad (24)$$

In dimensionsloser Form lautet Gleichung 24

$$\frac{v_s}{\frac{k_o \cdot g}{\eta_o} \rho_o \nabla h_o} = f \left(\frac{\eta_o}{\eta_s}, \frac{\rho_o \nabla h_o}{\rho_s \nabla h_s} \right) \quad (25)$$

oder

$$\frac{v_s}{v_o} = f \left(\frac{\eta_o}{\eta_s}, \frac{\nabla P_o}{\nabla P_s} \right) \quad (26)$$

Hierbei sind:

- $\frac{v_s}{v_o}$: relative Salzwassergeschwindigkeit
- $\frac{\eta_o}{\eta_s}$: relative dynamische Zähigkeit
- $\frac{\nabla P_o}{\nabla P_s}$: relativer Druckgradient

Die Randbedingungen des Versuchstandes werden so eingestellt, daß der relative Druckgradient an der Trennlinie zwischen dem Salz- und dem Süßwasserbereich gleich eins sind.

Für einen homogenen Sandkörper mit eindeutiger Kornform und bekanntem Ungleichförmigkeitsgrad kann man im Tracerfall den Dispersionskoeffizienten D_T als Funktion folgender Parameter anschreiben

$$D_T = f (D_m, v_a, d_m, \rho_o, \eta_o) \quad (27)$$

Aus Gleichung 27 folgt die bekannte dimensionslose Beziehung [6]

$$\frac{D_T}{v_a \cdot d_m} = f \left(\frac{D_m}{v_a \cdot d_m}, \frac{\rho_o \cdot v_a \cdot d_m}{\eta_o} \right) \quad (28)$$

mit den Größen:

- $\frac{D_T}{v_a \cdot d_m}$: inverse dynamische Peclet-Zahl
- $\frac{D_m}{v_a \cdot d_m}$: inverse molekulare Peclet-Zahl
- $\frac{\rho_o \cdot v_a \cdot d_m}{\eta_o}$: Reynoldszahl des Korns

Für den Fall, daß die Konzentration eines Wasserinhaltsstoffes ausreicht, um die Dichte und Zähigkeit des Trägerfluids merklich zu verändern, wird der laterale Dispersionskoeffizient $D_T(c)$ durch folgende Gleichung beschrieben:

$$D_T(c) = f (D_m, v_a, d_m, \rho_o, \eta_o, \Delta \rho \cdot g, \eta_s) \quad (29)$$

In dimensionsloser Form erhält man

$$\frac{D_T(c)}{v_a \cdot d_m} = f \left(Pe, Re, \frac{\Delta \rho \cdot g \cdot d_m^3}{\eta_o \cdot D_m}, \frac{\eta_o}{\eta_s} \right) \quad (30)$$

mit

$$Ra = \frac{\Delta \rho \cdot g \cdot d_m^3}{\eta_o \cdot D_m} \quad : \quad \text{(molekulare) Rayleigh-Zahl}$$
$$\frac{\eta_o}{\eta_s} \quad : \quad \text{relative dynamische Zähigkeit}$$

Mit der Definition eines effektiven transversalen Dispersionskoeffizienten $D_{Teff}(c)$ nach Kapitel 4.4 und dem Ansatz, daß dessen Abhängigkeit von der molekularen Diffusion bei jeder Salzkonzentration gleich ist, kann man für die hier ange-
stellten Unternehmungen schreiben

$$\frac{D_{Teff}(c)}{D_T(o)} = f \left(Ra, \frac{\eta_o}{\eta_s} \right) \quad (31)$$

Der Parameter $D_T(o)$ bezeichnet den gemessenen Querdispersionskoeffizienten bei vernachlässigbarem Dichteunterschied $\Delta \rho$.
Der Ausdruck

$$Ra \equiv \frac{\Delta \rho \cdot g \cdot d_m^3}{\eta_o \cdot D_T(o)} \quad (32)$$

definiert die Rayleigh-Zahl, in der die Stabilisierung einer Schichtung durch einen vertikalen Dichtegradienten gegenüber der Vermischung infolge Dispersion zum Ausdruck kommt.

Die Rayleigh-Zahl und die relative dynamische Zähigkeit sind hier über Zustandsgleichungen miteinander gekoppelt. Die Variation der Salzkonzentration führt zwangsläufig zur Veränderung von beiden Parametern.

6. ERGEBNISSE

Die Ergebnisse der Laborexperimente sind in den Bildern 14 bis 19 dokumentiert. Die erste Versuchsreihe wurde bei einer Süßwassergeschwindigkeit von $v_a = 2,1 \cdot 10^{-3}$ m/s durchgeführt, was einer molekularen Peclet-Zahl $Pe \approx 1\ 200$ entspricht. Die größte Breite der Vermischungszone ergibt sich aus dem Experiment mit einer Salzkonzentration von $c_s = 0,1\%$ zu $b_v = 13,01$ cm. Die zugehörige Dispersivität $\alpha_T(0) = 1,76 \cdot 10^{-4}$ m² wurde als Bezugsgröße für die dimensionslosen Darstellungen gewählt, womit man für den Dispersionskoeffizienten $D_T(0)$ einen Wert von $3,7 \cdot 10^{-7}$ m²/s erhält. In Bild 17 ist die effektive transversale Dispersivität $\alpha_{Teff}(c)$ bezogen auf die transversale Dispersivität bei vernachlässigbarem Dichtegradienten über der Salzkonzentration c aufgetragen.

Aus Bild 18 ist die Abnahme des effektiven Dispersionskoeffizienten $D_{Teff}(c)$ mit zunehmenden Rayleigh-Zahlen ersichtlich.

Der zweiten Versuchsreihe (Bild 16) liegt eine molekulare Peclet-Zahl $Pe = 800$ zugrunde. Für diesen Geschwindigkeitsbereich liegen bisher nur vier Modellversuche vor, deren Einzelergebnisse widersprüchlich sind, die aber der Vollständigkeit halber hier aufgeführt werden.

Die Konzentrationsverteilungen weisen im wesentlichen die Form Gaußscher Fehlerkurven auf, die jedoch bei der überwiegenden Mehrzahl der Laborexperimente nicht symmetrisch zum Mittelpunkt der Meßebene sind. Die Steilheit der Kurven nimmt mit zunehmenden Salzkonzentrationen ebenfalls zu. Die beobachteten Abweichungen Δz setzen sich aus einem konvektiven Absenkungsanteil und einem unbestimmten Betrag zusammen, der aus einer fehlerhaften Einstellung der Randbedingungen des Strö-

mungsfeldes resultieren kann. Mit Hilfe des in Kapitel 4.4 behandelten numerischen Auswertungsverfahrens kann die Standardabweichung der Meßwerte sehr genau bestimmt werden.

In den hier verwendeten effektiven transversalen Dispersionskoeffizienten $D_{Teff}(c)$ bzw. der effektiven transversalen Dispersivität $\alpha_{Teff}(c)$ drücken sich folgende Vermischungsanteile aus:

- Dispersion infolge eines Konzentrationsgradienten senkrecht zur Strömungsrichtung,
- zusätzliche unbestimmte Vermischung aus einem Schereffekt infolge unterschiedlicher Geschwindigkeiten im Salz- und Süßwasserbereich,
- Verminderung der transversalen Dispersion und Stabilisierung der Schichtung durch den Dichtegradienten senkrecht zur Strömungsrichtung.

Der Betrag der größten Dispersivität α_T im Tracerfall ist wesentlich kleiner (ca. 65%) als der Größtwert, der der ursprünglichen Bemessung des Versuchsstandes zugrundegelegt wurde. Vergleicht man die Dispersivitäten in longitudinaler und transversaler Richtung miteinander, dann erhält man für das Verhältnis von Längs- zu Querdispersivität einen Wert von $\alpha_L / \alpha_T \cong 30$. Die Modellhöhe war somit bei weitem ausreichend und Einflüsse der Strömungsberandungen können mit guter Näherung ausgeschlossen werden.

Die Quervermischung nimmt mit zunehmendem Salzgehalt drastisch ab. Der Stabilisierungseffekt kommt etwa ab einem Salzgehalt von 1,5% bis 2% zum Tragen, was einer Rayleigh-Zahl in der Größenordnung von $Ra = 0,05$ entspricht. Oberhalb dieser kritischen Grenze kann man eine weitere monotone Abnahme der

Querdispersion beobachten, die bei einer Sättigungskonzentration von $c_s = 27\%$ weniger als 15 % gegenüber dem Tracerfall beträgt.

Die mit steigender Salzkonzentrationen zunehmende Verschiebung der Konzentrationsverteilung nach unten ist ihrem Wesen nach auf konvektive Transportvorgänge zurückzuführen, da durch die Änderung des Geschwindigkeitsprofils kleine vertikale Strömungsgeschwindigkeiten bei dieser Konfiguration induziert werden. Die Kenntnis der Größe dieser Absenkung ist unter anderem für praktische Probleme wichtig; im Anhang ist von Dipl.-Phys. B. Rinnert dazu ein erster analytischer Ansatz verfaßt.

Legt man den in Kapitel 4.4 definierten effektiven Dispersionskoeffizienten $D_{Teff}(c)$ zugrunde und vergleicht die gemessenen Konzentrationsverteilungen mit den nach Rinnert errechneten, stellt man Unterschiede fest, wie in Bild 19 dokumentiert ist. Die unterschiedlichen Beträge der Absenkungsanteile Δz können in Einstellfehlern des Strömungsfeldes begründet sein; sie sind deshalb prinzipiell nicht miteinander vergleichbar. Im Tracerfall stimmt die gemessene Verteilung relativ gut mit der analytisch errechneten überein.

Die geringen Unterschiede sind dadurch zu erklären, daß Rinnert in seiner Lösung für die transversale Dispersivität einen Wert von $\alpha'_T = 2,0 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$ verwendet, während die Modellversuche den etwas geringeren Wert von $\alpha'_T(o) = 1,76 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$ ergaben. Bei größeren Salzkonzentrationen (Sättigung) erhält man aus der von Rinnert errechneten Konzentrationsverteilung für die effektive transversale Dispersivität noch einen Betrag von $\alpha'_{Teff}(c) = 1,44 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$. Dieser wird in den Experimenten bereits ab einer Salzkonzentration von etwa 1% unterschritten. Die Abweichungen zwischen der analytischen Lösung und den Meßergebnissen müssen weiter untersucht werden.

7. ZUSAMMENFASSUNG UND AUSBLICK

Die im Zwischenbericht HWV O22 ausführlich dargestellte Versuchsanordnung ist zur Bestimmung der Konzentrationsabhängigkeit der lateralen Dispersion geeignet und hat sich im Versuchsbetrieb bewährt.

Die bisherigen Experimente umfaßten den Bereich großer und mittlerer Fließgeschwindigkeiten ($800 \leq Pe \leq 1200$) und bestätigen den stabilisierenden Einfluß des Dichtegradienten in vertikaler Richtung auf eine Schichtenströmung.

Die laterale Dispersion wird ab einer Salzkonzentration von ca. 1% an drastisch vermindert und reduziert sich bei Sättigungskonzentration auf ca. 15 % gegenüber dem Tracerfall. Durch den Abbau des Konzentrationsgefälles durch Dispersion und Zähigkeitseinflüsse gleichen sich die Geschwindigkeiten im Salz- und Süßwasserbereich an. Dies führt hier zu einem konvektiven Salztransport und zu einer Verlagerung des gesamten Konzentrationsfeldes nach unten.

Den wenigen Versuchen bei mittleren Geschwindigkeiten, ist noch nicht zu entnehmen, ob neben zunehmenden Dichtegradienten auch abnehmende Abstandsgeschwindigkeiten eine stabile Schichtenströmung begünstigen. Weitere Versuche im Bereich mittlerer und kleiner Peclet-Zahlen sind deswegen zur Abrundung der bisherigen Ergebnisse erforderlich und geplant.

In der Endphase der ersten Versuchsreihe bildeten sich Hohlräume im Sandgefüge des oberen Einlaufbereichs, was dadurch zu erklären ist, daß sich der Sand trotz sorgfältiger Verfüllung durch Kornumlagerungen und die vorherrschende Grundströmung weiter konsolidiert hatte. Durch die notwendige

Ergänzung des Sandes und der dabei aufgetretenen Erschütterungen (Hammerschläge) wurden die Leitwerte $G(c)$ einzelner Sonden beeinflusst, so daß deren Eichkurven für die weiteren Messungen ungenau wurden. Jedem Dispersionsexperiment mit Salz- und Süßwasser wurde daraufhin eine entsprechende Kontrolleichung hinzugefügt und die Eichkurven falls erforderlich korrigiert. Frühere Messungen und Ergebnisse waren davon nicht beeinflusst. Dieses Zusammenführen von Messung und Eichung zu einem Block sollte für weitere Messungen beibehalten werden. Dem Nachteil der verlängerten Dauer eines gesamten Versuchs - mit der notwendigen Süßwasserspülung zwischen zwei Experimenten muß mit ca. 4 Tagen gerechnet werden - steht der große Vorteil einer hoher Meßpräzision gegenüber.

LITERATURHINWEISE

- [1] Halter, O.: "Experimentelle Bestimmung des transversalen Dispersionskoeffizienten", Diplomarbeit, Institut für Wasserbau, Universität Stuttgart, 1981
- [2] Harlemann, D.R.F., Rumer, R.R.: "Longitudinal and lateral dispersion in an isotropic porous medium", Fluid Mechanics 16, 1963
- [3] Nenitescu, Costin D.: "Manualul Inginerului Chemist", physiko-chemisches Tabellenbuch, Editura Tehnica, Rumänien, 1952
- [4] Rinnert, B., Kobus, H.: "Strömungstransport und Dispersion in Porengrundwasserleitern", Wissenschaftlicher Bericht HWV 007, Institut für Wasserbau, Universität Stuttgart, 1978
- [5] Rinnert, B., Kobus, H.: "Versuchsstand zur Untersuchung der transversalen Dispersion in porösen Medien", Wissenschaftlicher Bericht HWV 022, Institut für Wasserbau, Universität Stuttgart, 1980
- [6] Rinnert, B., Kobus H.: "Strömungstransport und Dispersion in Porengrundwasserleitern", Wissenschaftlicher Bericht HWV 007, Institut für Wasserbau, Universität Stuttgart, 1978
- [7] Schott Geräte: "Bedienungsanleitung für KPG-UBBELOHDE VISKOSIMETER", Ströhlein Labortechnik, Stuttgart

b [m]	:	Breite des Fließquerschnitts
c [%]	:	gemessene Salzkonzentration
c_s [%]	:	Salzkonzentration am Einlauf
d [m]	:	Höhe des Fließquerschnitts
d_m [m]	:	mittlerer Korndurchmesser
D_m [m ² /s]	:	molekularer Dispersionskoeffizient
$D_T(0)$ [m ² /s]	:	transversaler Dispersionskoeffizient bei vernachlässigbarem Dichteunterschied
g [m/s ²]	:	Erdbeschleunigung
G [1/kΩ]	:	Leitwert der Meßsonden
h [m]	:	Höhe der Wasserspiegellagen
k_o [m ²]	:	Permeabilität
k_f [m/s]	:	Durchlässigkeit
L [m]	:	Länge der Fließstrecke
m [m]	:	Mächtigkeit der Schichten
n_e [-]	:	effektive Porosität
∇P [kg/m ³]	:	Druckgradient
Pe [-]	:	molekulare Peclet-Zahl
q [m ³ /s]	:	Durchfluß
Ra [-]	:	Rayleigh-Zahl
v_a [m/s]	:	Abstandsgeschwindigkeit
v_f [m/s]	:	Filtergeschwindigkeit
Δz [m]	:	gemessene Absenkung der 50%-Trennlinie zwischen Salz- und Süßwasserbereich
$\alpha_T(0)$ [m]	:	transversale Dispersivität bei vernachlässigbarem Dichteunterschied
$\alpha_{Teff}(c)$ [m]	:	effektive transversale Dispersivität
ρ [kg/m ³]	:	Dichte
ν [mm ² /s]	:	kinematische Zähigkeit
η [kg/m·s]	:	dynamische Zähigkeit
σ [m]	:	Standardabweichung

Bild 1: Bedeutung der verwendeten Symbole

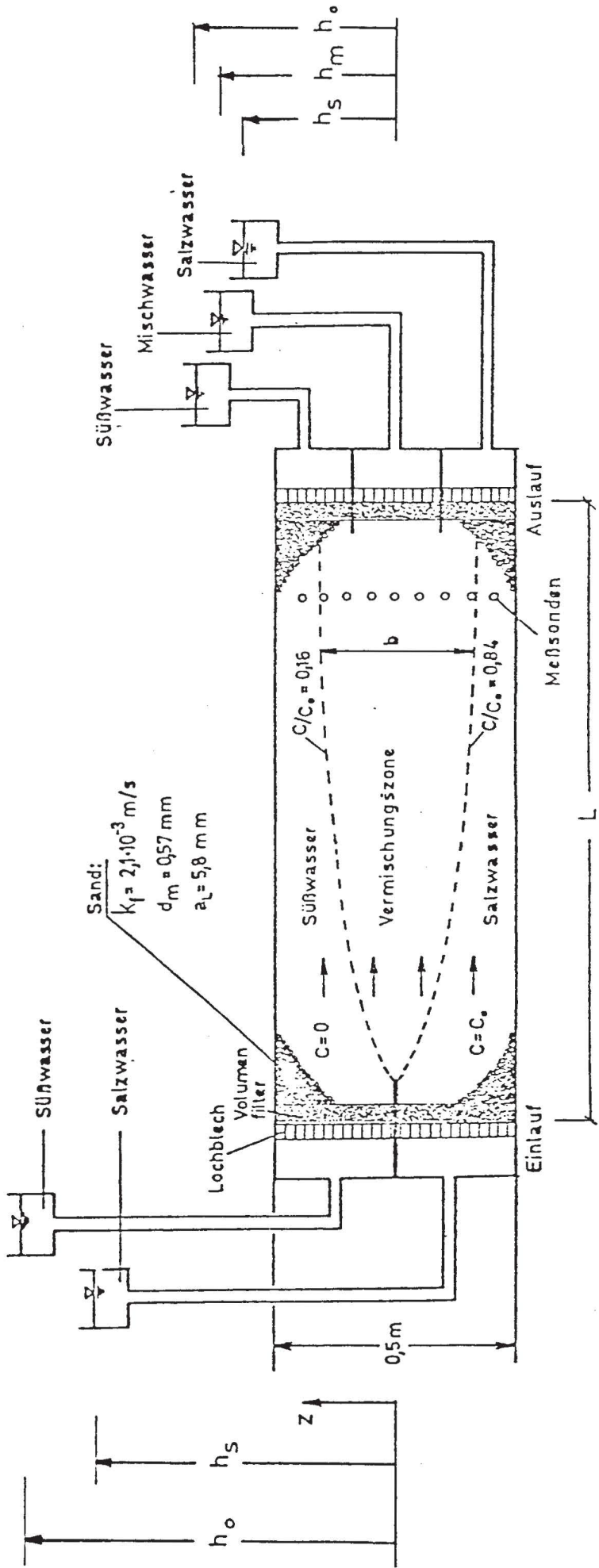


Bild 2: Schematischer Versuchsaufbau [5]

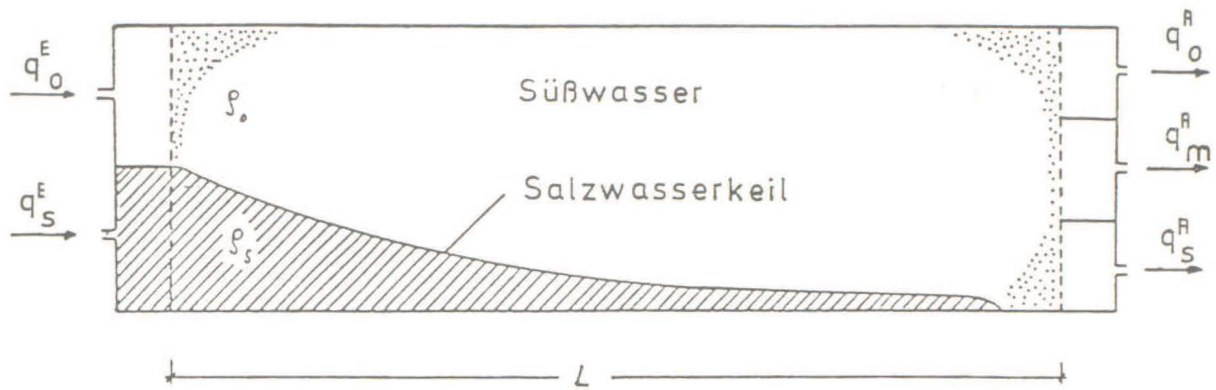


Bild 3: Strömungskonfiguration während der instationären Versuchphase (ohne Quervermischung)

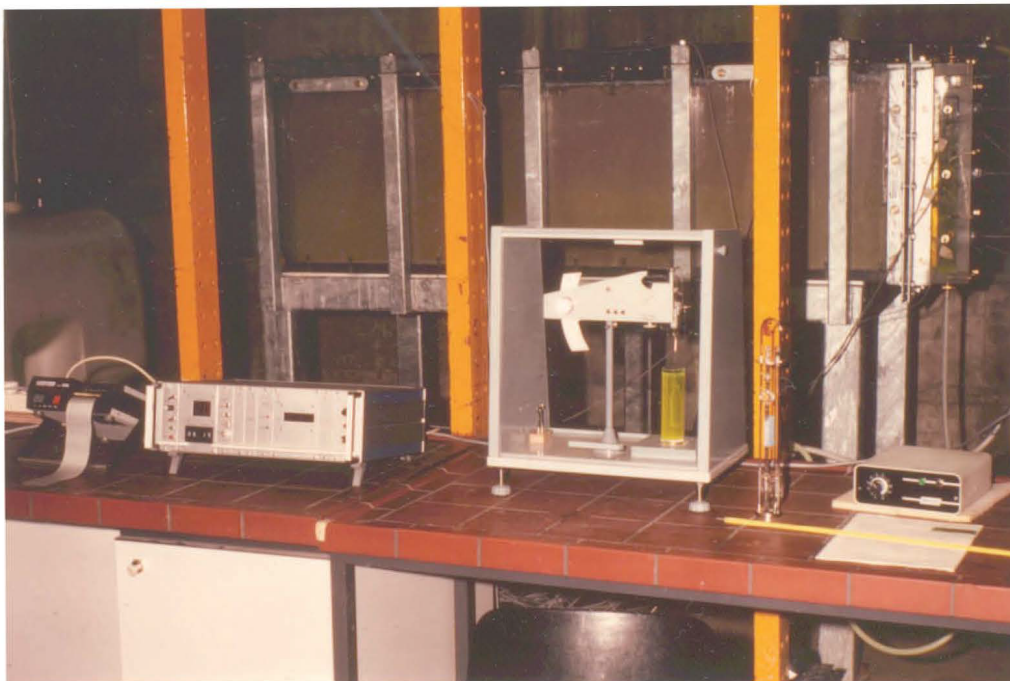


Bild 4: Elektronische Meßeinrichtung

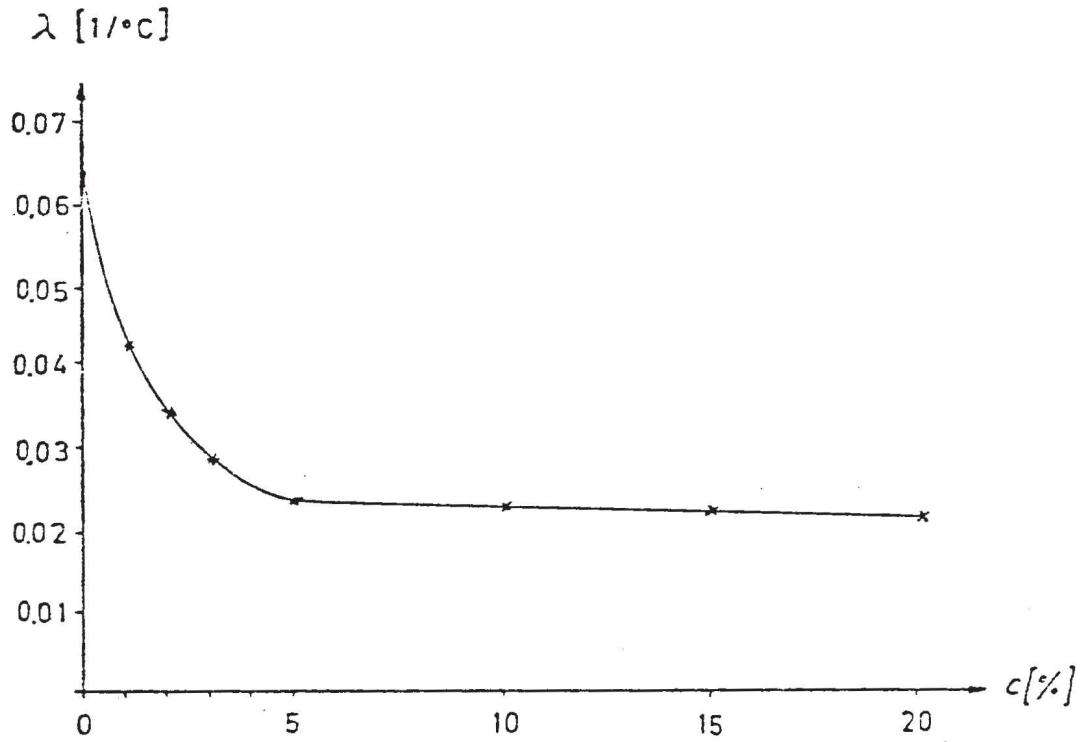


Bild 5: Abhängigkeit des Leitfähigkeitskorrekturwertes $\lambda(c)$ von der Salzkonzentration

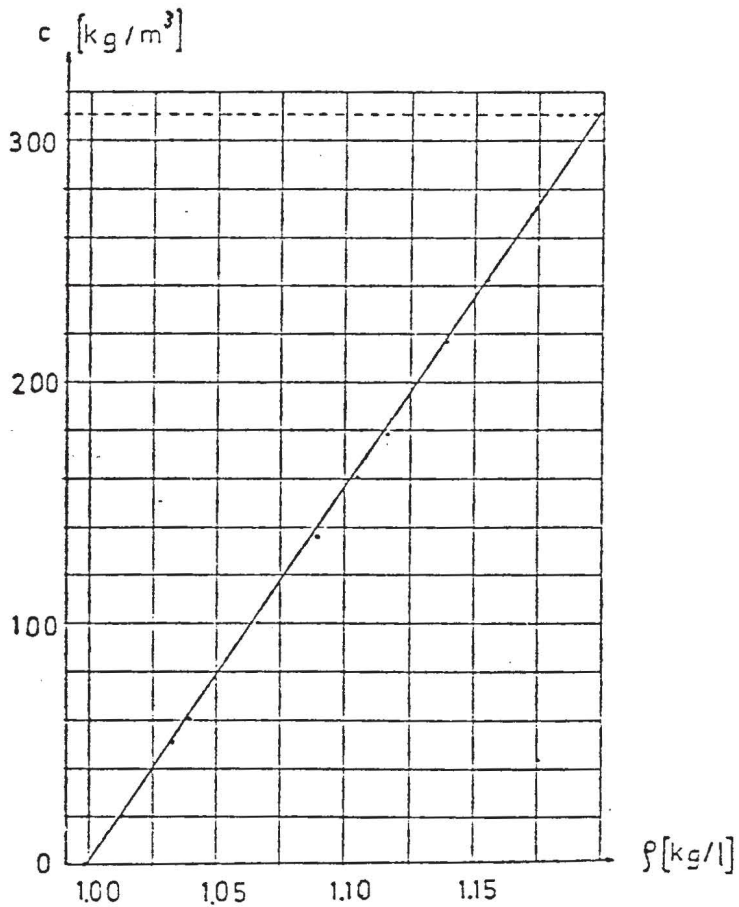


Bild 6: Abhängigkeit der Dichte ρ einer wässrigen Lösung von der Salzkonzentration [1]

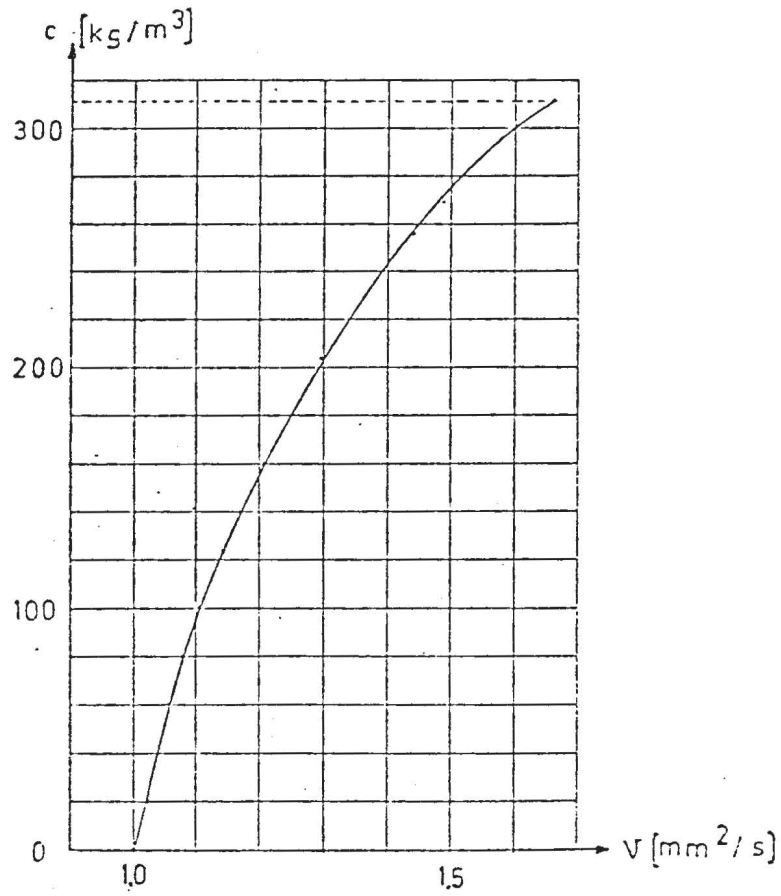


Bild 7: Abhängigkeit der kinematischen Zähigkeit ν einer wässrigen Lösung von der Salzkonzentration [1]

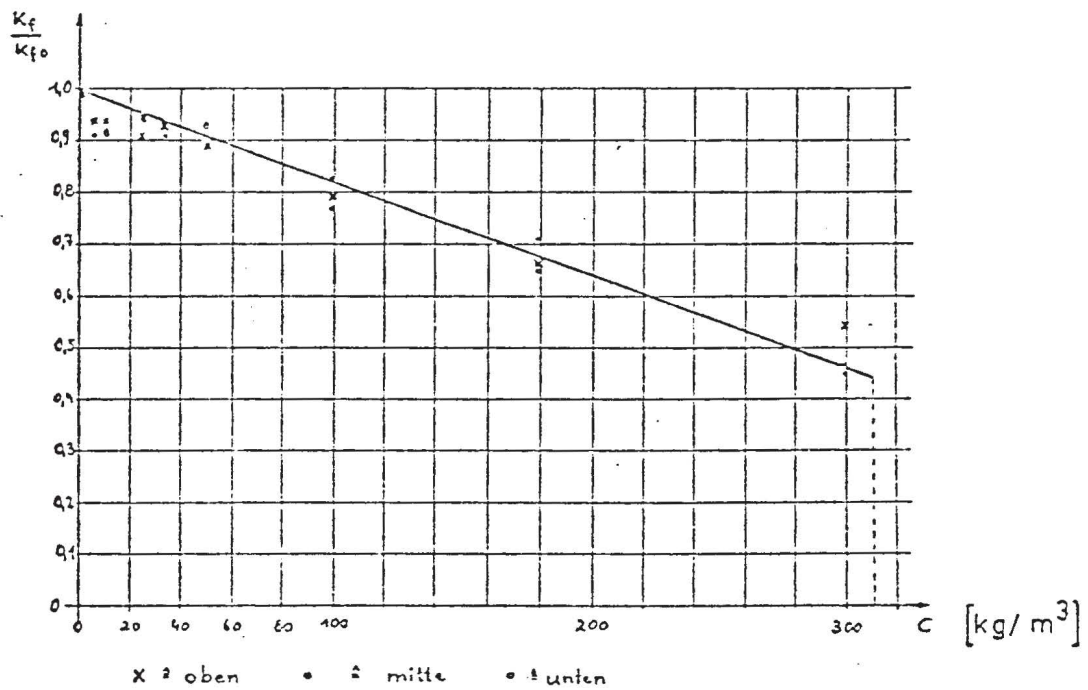
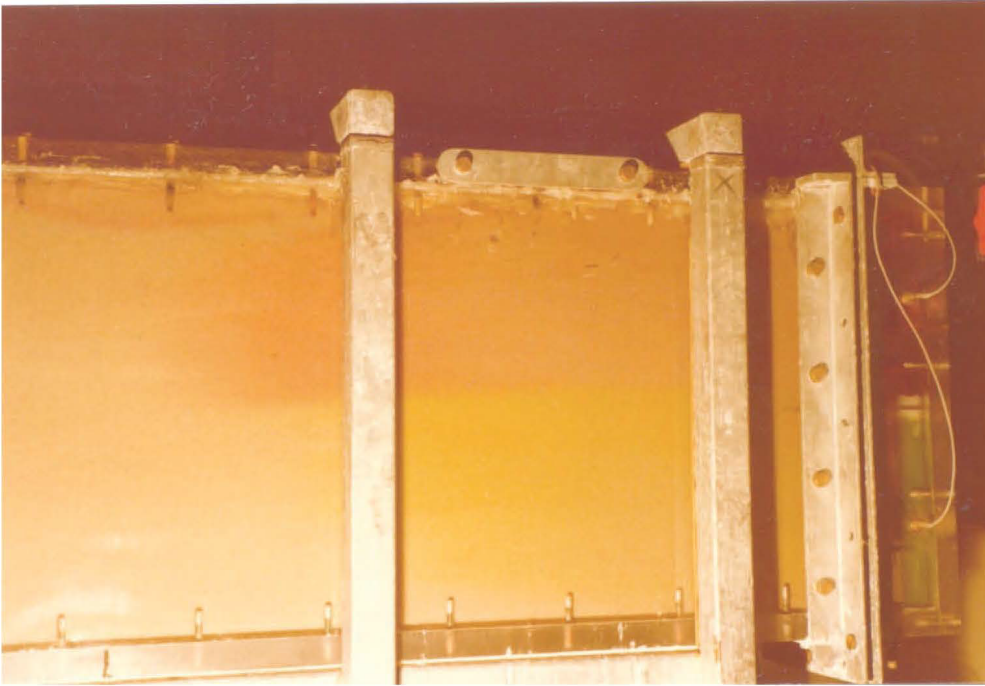
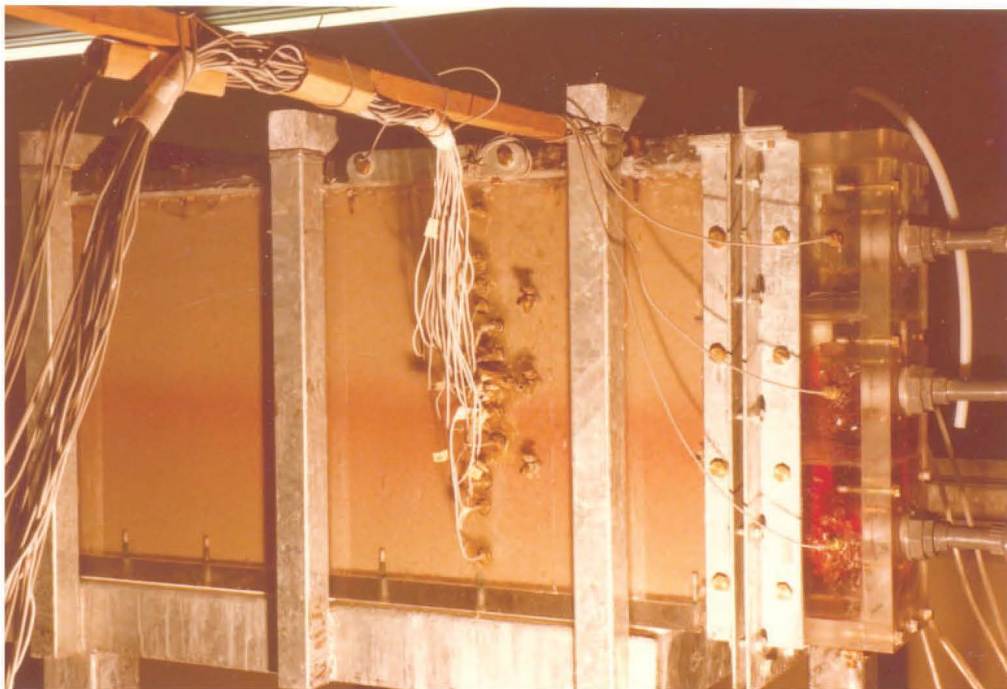


Bild 8: Durchlässigkeit des Sandkörpers [1]



Einlaufbereich :



Auslaufbereich :

Bild 9: Randläufigkeit des Modells

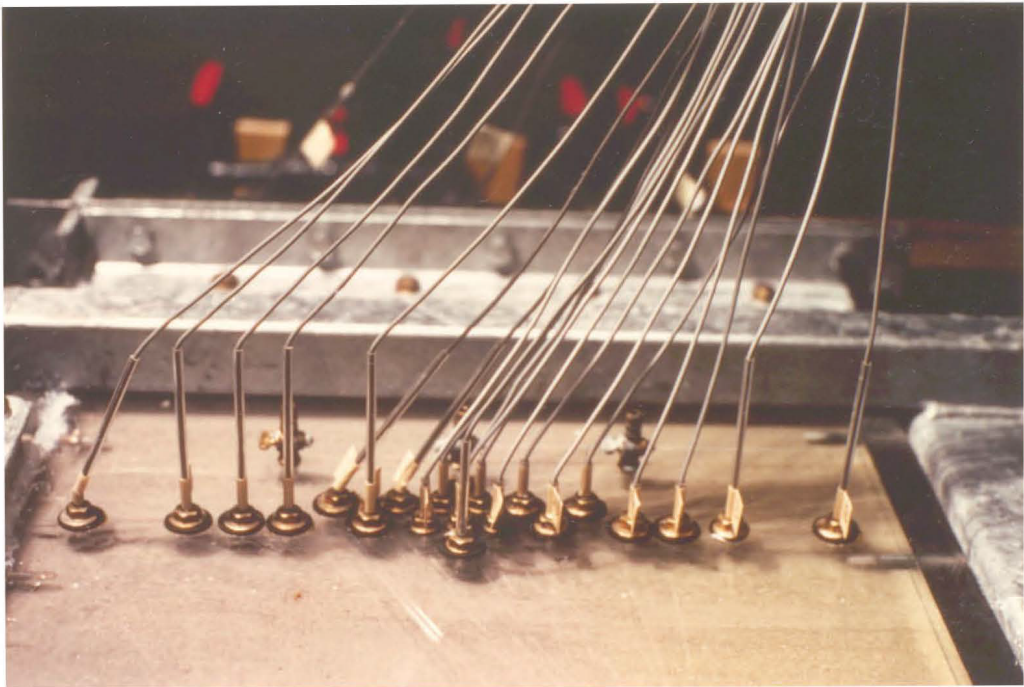
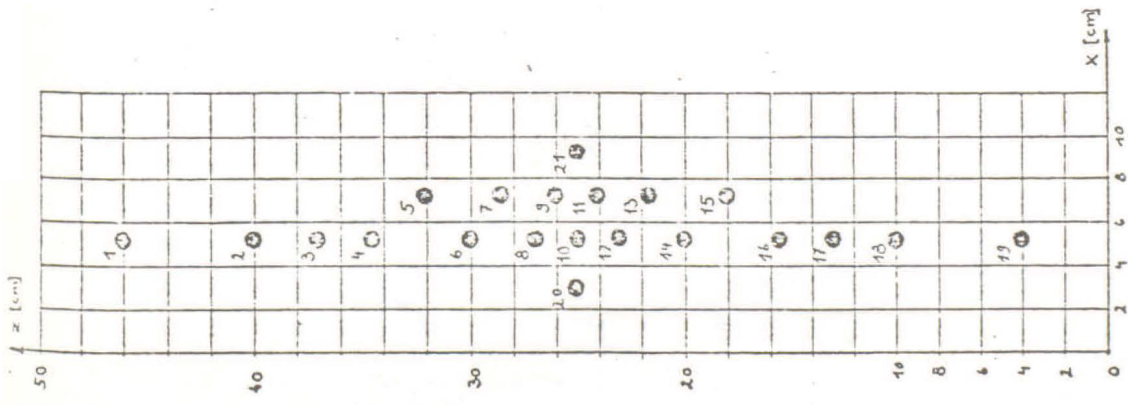
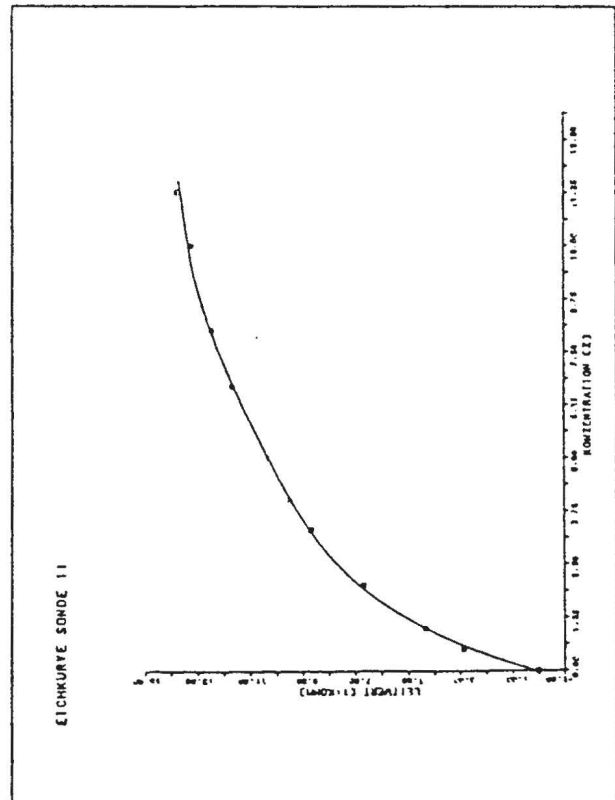
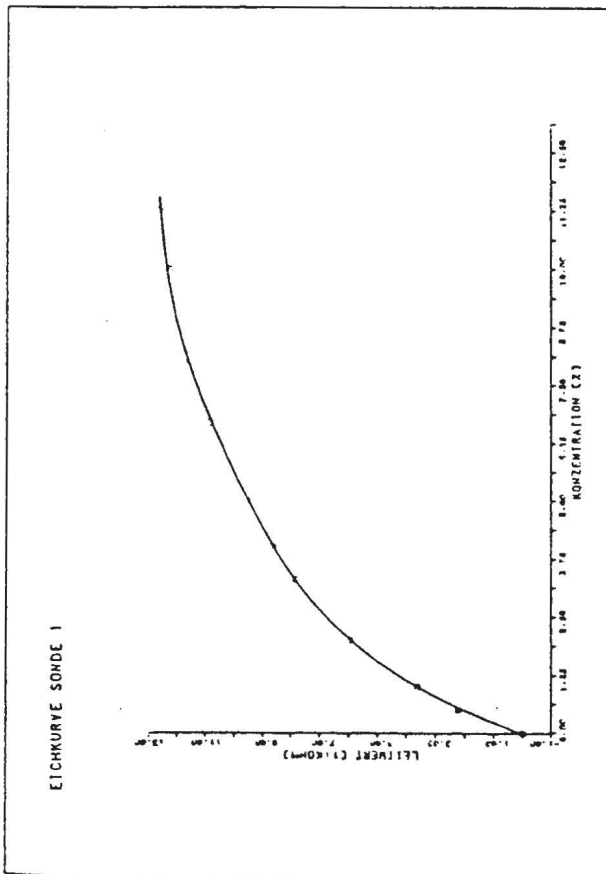
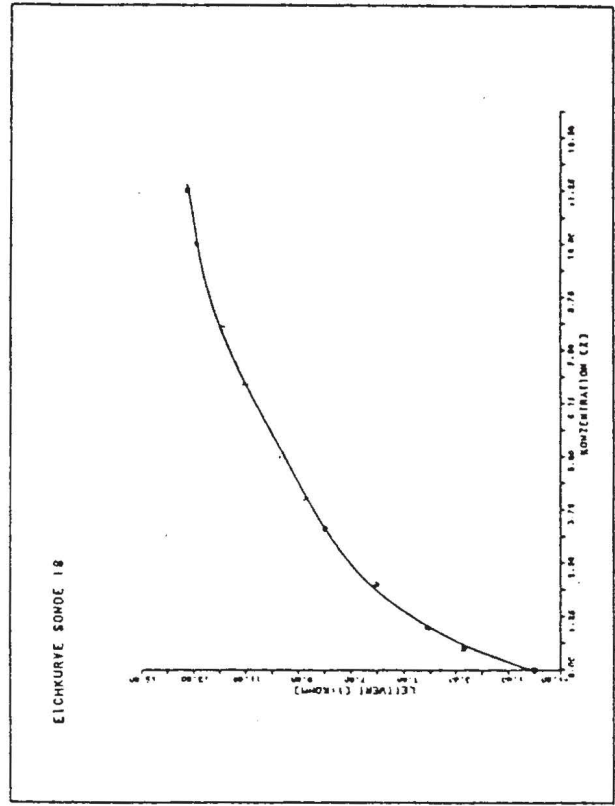
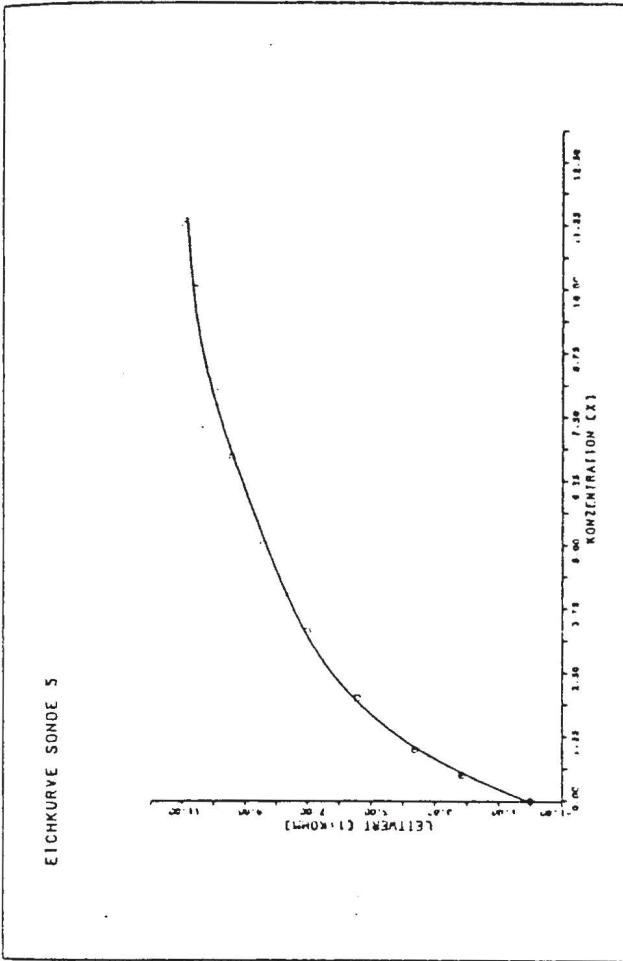


Bild 10: Anordnung der Messsonden im Versuchsstand



11: Eichkurven von vier ausgewählten Meßsonden

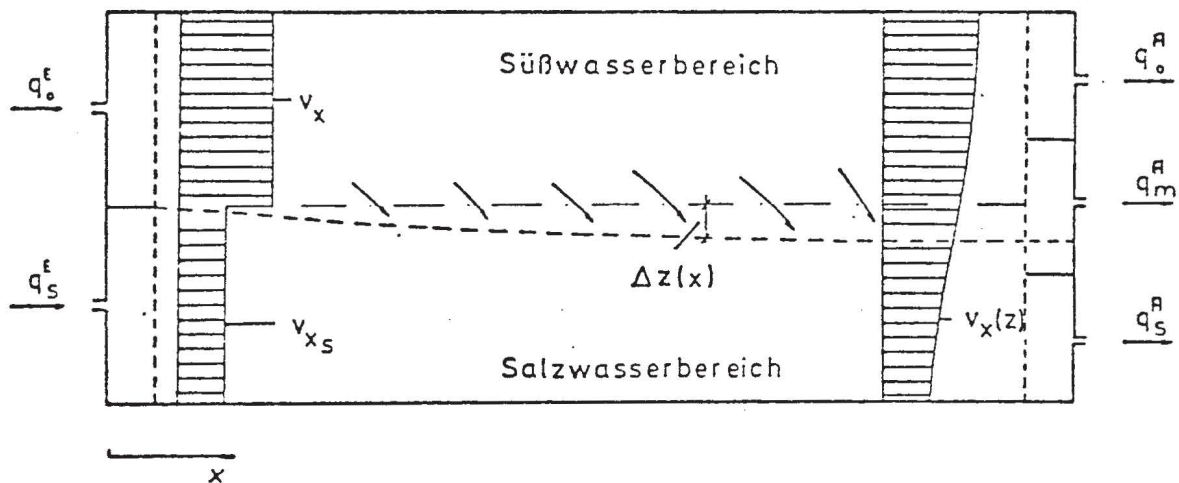


Bild 12: Konzentrationsabhängigkeit des Strömungsfeldes (schematisch)

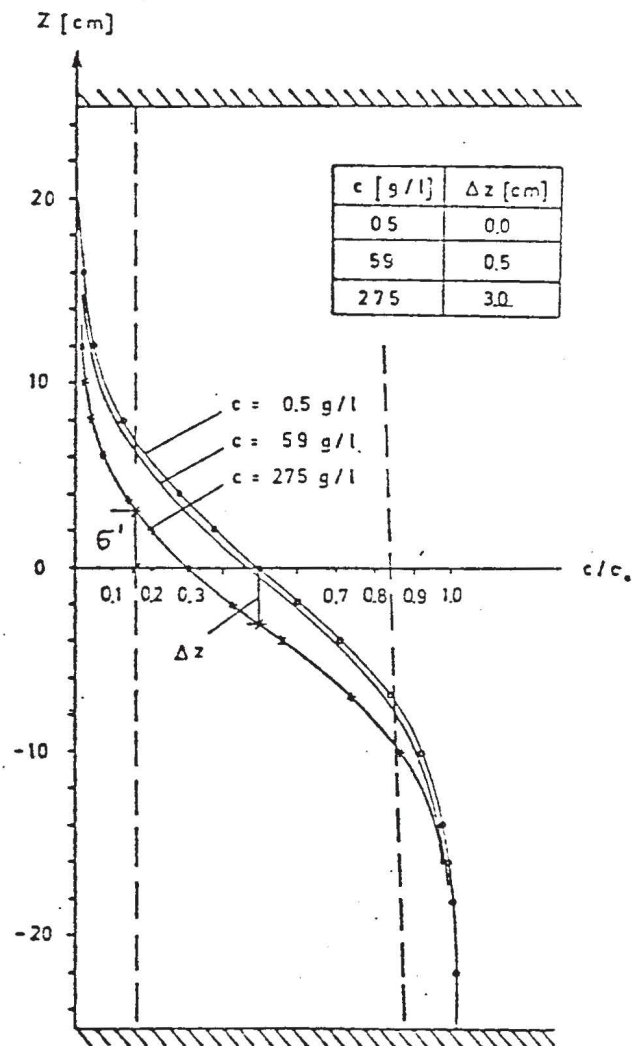


Bild 13: Rechnerische Konzentrationsverteilung in der Meßebene (nach Rinnert)

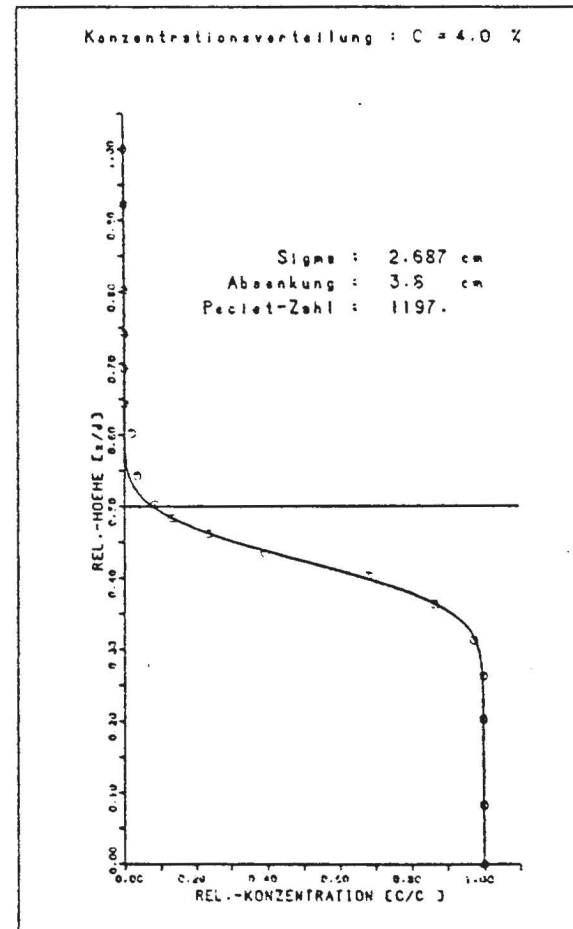
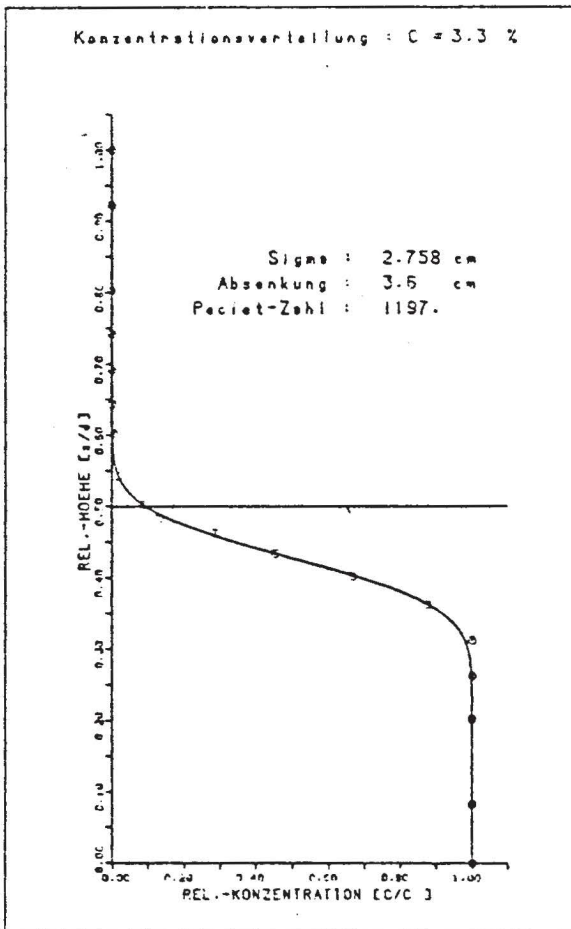
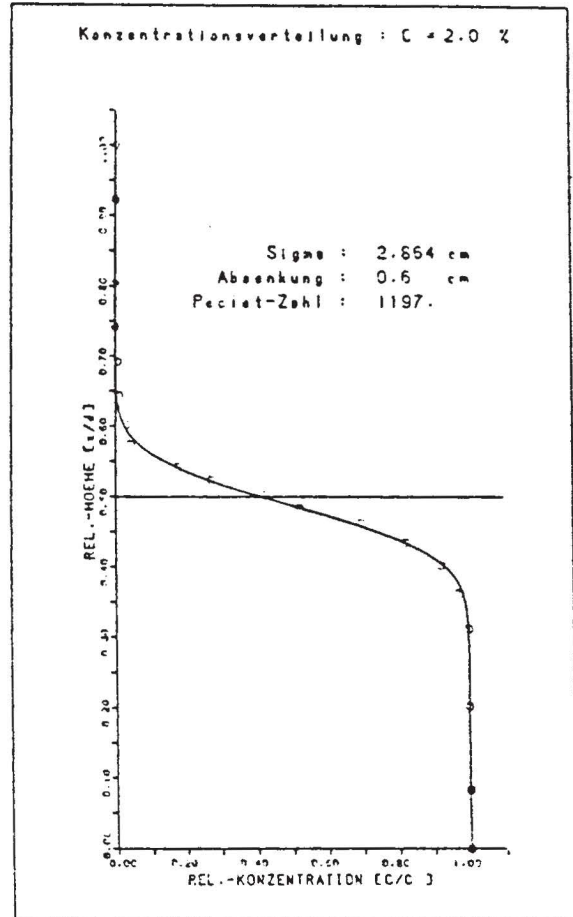
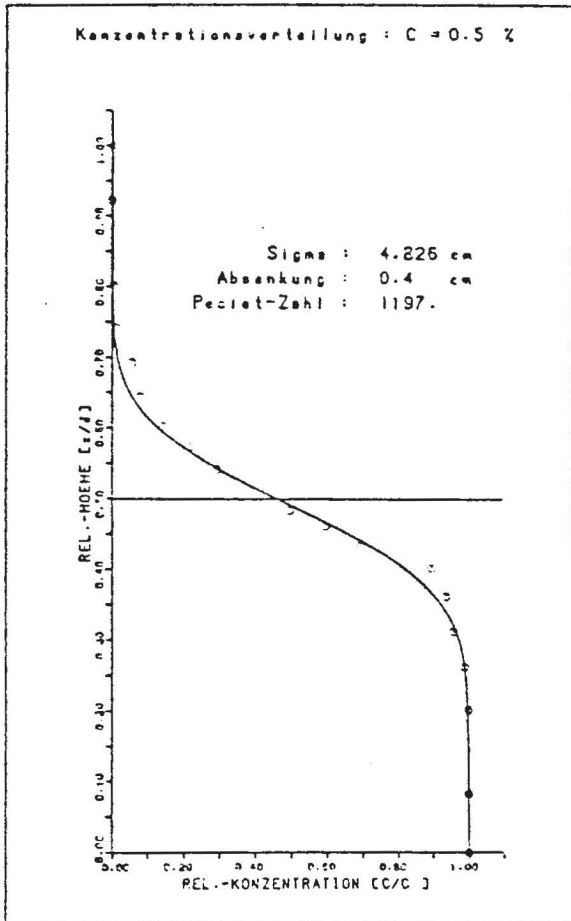


Bild 14: Gemessene Konzentrationsverteilung bei einer Peclet-Zahl $Pe = 1200$

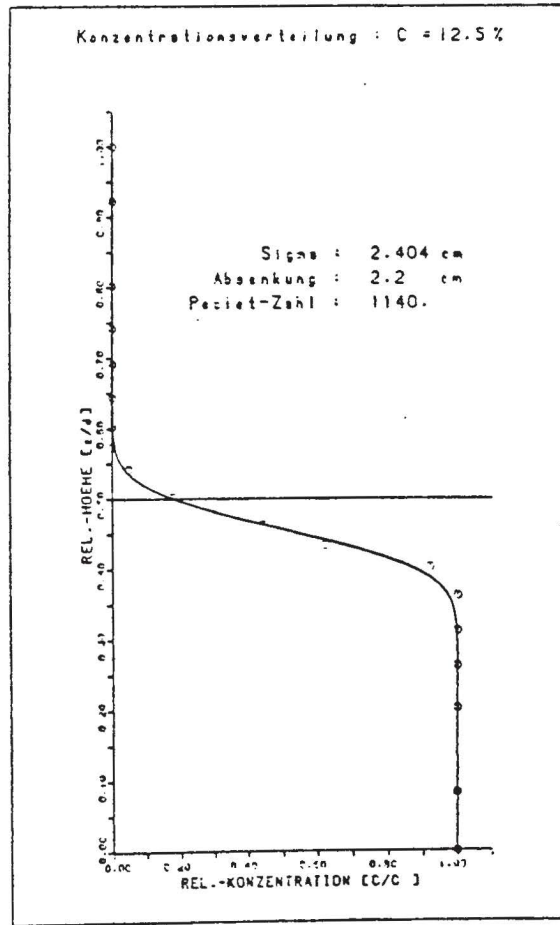
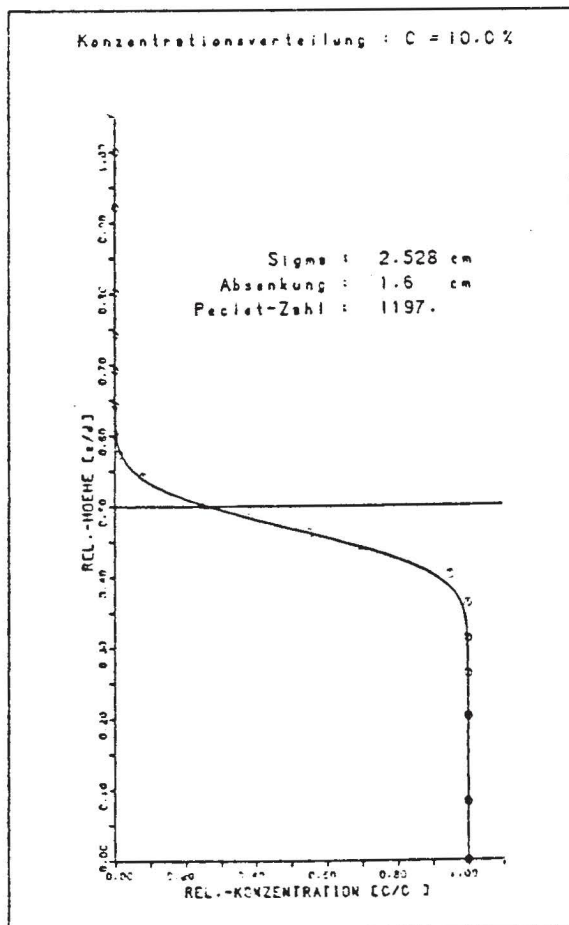
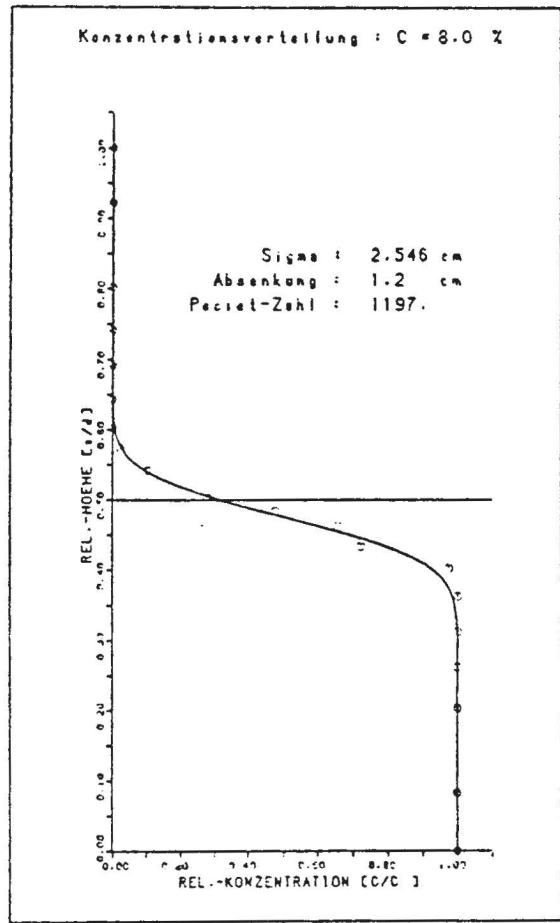
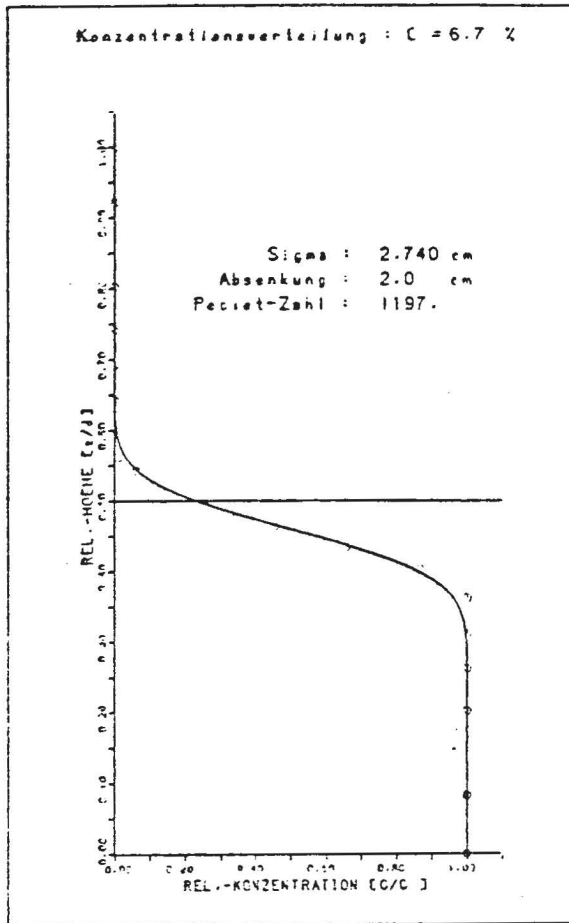


Bild 15: Gemessene Konzentrationsverteilung bei einer Peclet-Zahl $Pe = 1200$

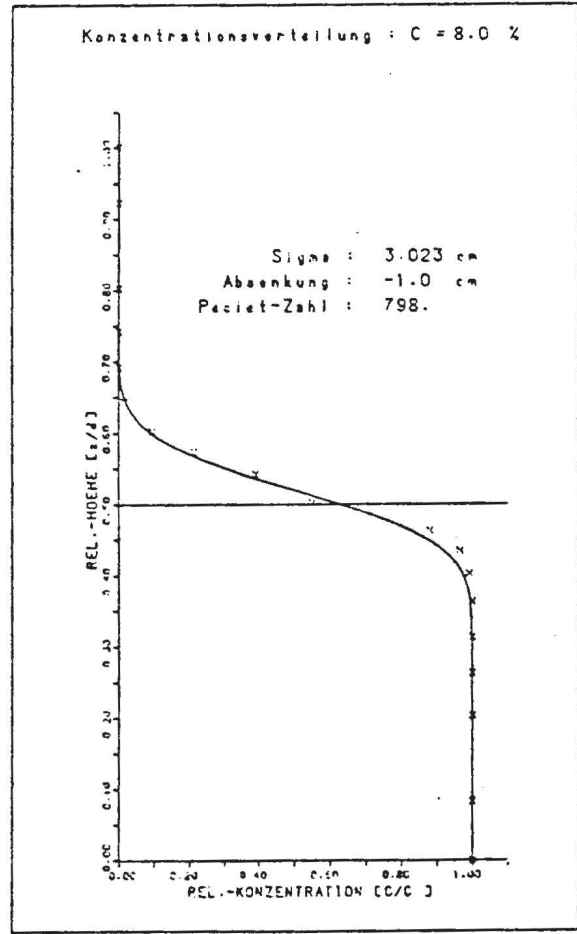
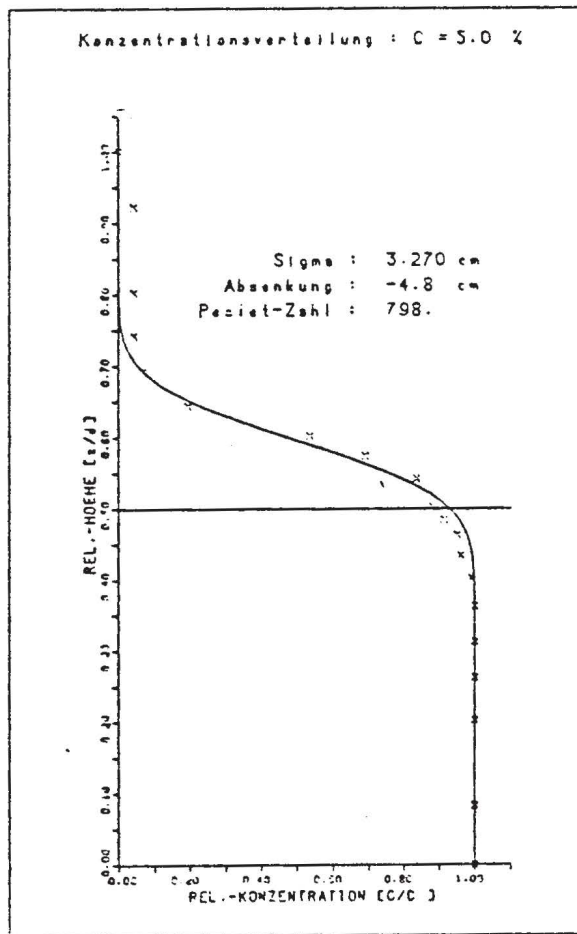
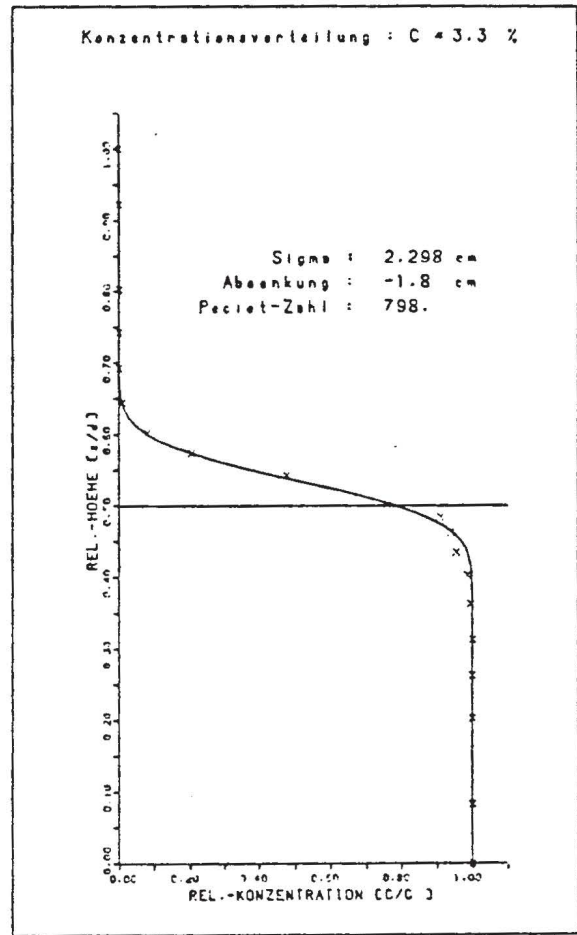
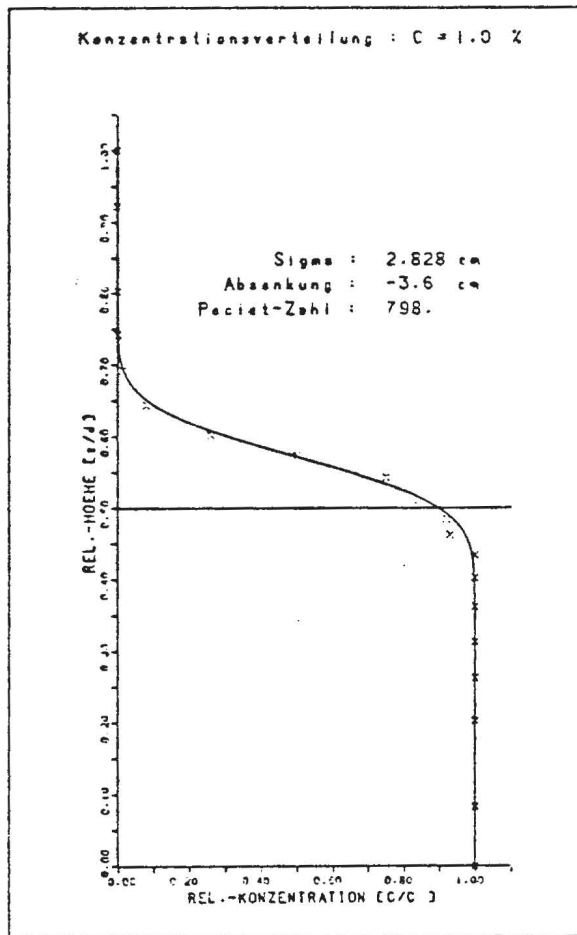


Bild 16: Gemessene Konzentrationsverteilung bei einer Peclet-Zahl $Pe = 800$

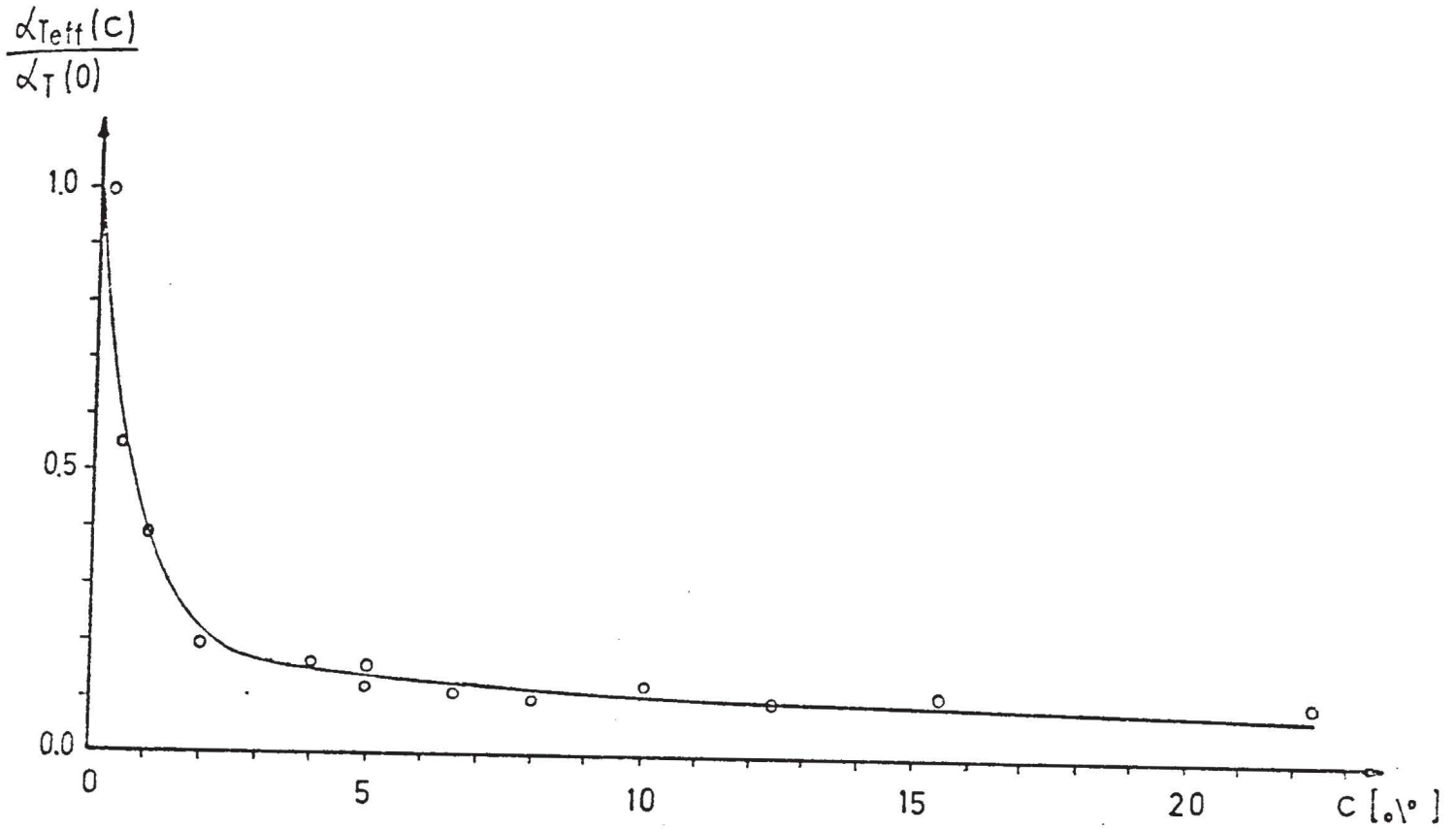


Bild 17: Abhängigkeit der relativen Dispersivität von der Salzkonzentration

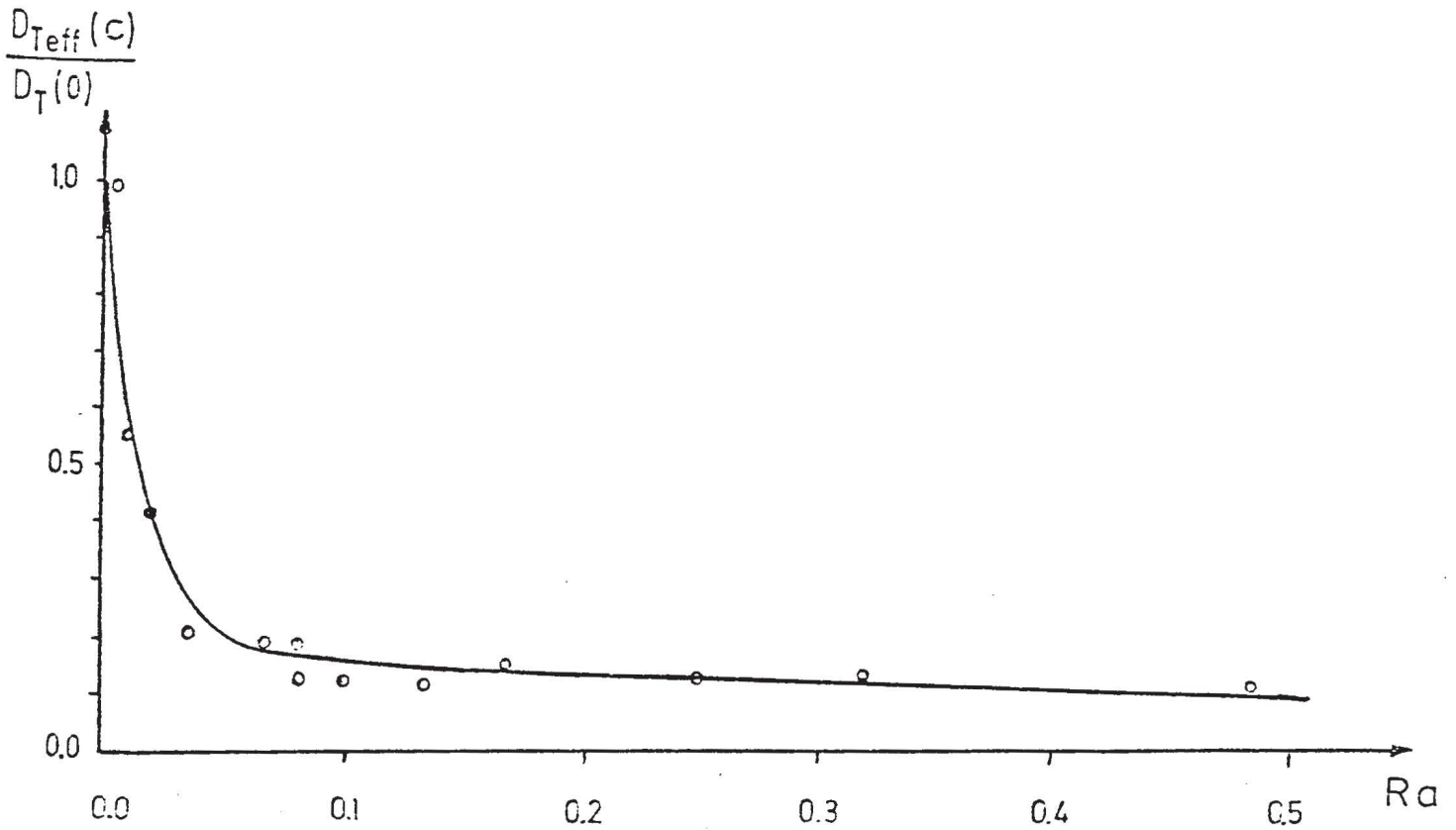


Bild 18: Abhängigkeit des relativen Dispersionskoeffizienten von der Rayleigh-Zahl

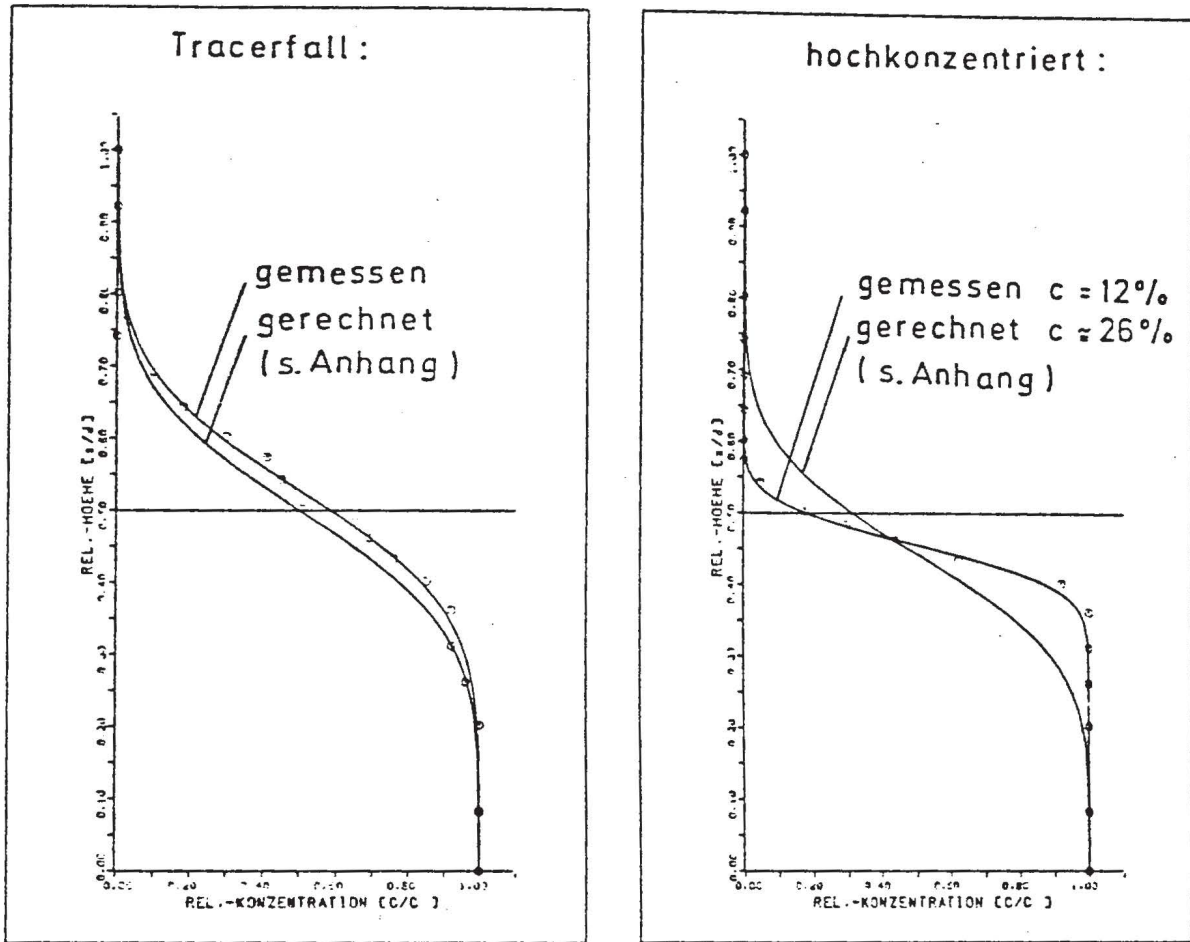


Bild 19: Vergleich von gemessenen und errechneten Konzentrationsverteilungen

A n h a n g

ANALYTISCHE LÖSUNG ZUR BESCHREIBUNG
DER STATIONÄREN SALZAUSBREITUNG IN EINER
SALZ-/SÜSSWASSERSCHICHTENSTRÖMUNG

v o n

Dipl.-Phys. Bernd Rinnert

ANALYTISCHE LÖSUNG ZUR BESCHREIBUNG
DER STATIONÄREN SALZAUSBREITUNG IN EINER
SALZ-/SÜSSWASSERSCHICHTENSTRÖMUNG

1 Problemstellung

In diesem Kapitel sollen stationäre Ausbreitungsvorgänge berechnet werden, wie sie sich in der in Bild .1 dargestellten Konfiguration ergeben. Ziel der Berechnungen ist es, die Konzentrationsverteilung besonders im Vermischungsbereich der Salz-/Süßwasser-Schichtenströmung zu ermitteln. Daraus kann man den Einfluß des Dichtenunterschieds $\Delta \rho$ zwischen Süß- und Salzwasser (im Einlaufquerschnitt) auf die vertikale Vermischung bestimmen und so Rückschlüsse auf die Wirksamkeit der lateralen Dispersion unter Dichteinfluß ziehen.

Den Berechnungen liegen solche Randbedingungen zugrunde, daß sich, gäbe es keine Dispersion, eine horizontale Schichtenströmung ausbilden würde. Unter Verwendung der in der Symbolliste (siehe Anhang) angegebenen Größen mit den Indices "1" für den Süßwasserbereich ($z \geq 0$) und "2" für den Salzwasserbereich ($z \leq 0$) lassen sich diese Randbedingungen wie folgt angeben:

$$C(x \leq 0, z > 0) = 0 \quad (.1)$$

$$C(x = 0, z = 0) = \frac{1}{2} C_S \quad (.2)$$

$$C(x \leq 0, z < 0) = C_S \quad (.3)$$

$$P_1(x = 0, z = 0) = P_0 = P_2(x = 0, z = 0) \quad (.4)$$

$$P_1(x > 0, z = 0) = P_2(x > 0, z = 0) \quad (.5)$$

Hinzu kommt als weitere frei wählbare Randbedingung die Piezometerhöhe im Süß- oder Salzwasserauslauf.

2 Bestimmungsgleichungen

2.1 Druckverteilung

2.1.1 Druckverteilung ohne Berücksichtigung der Dispersion

Vernachlässigt man vorerst den Einfluß der Querdispersion, so läßt sich unter den genannten Randbedingungen die Druckverteilung sowohl im Süßwasser- als auch im Salzwasserbereich bestimmen, da in beiden Bereichen eine eindimensionale Strömung herrscht. Im Süßwasserbereich erhält man

$$p_1(x, z) = p_0 - \gamma_0 \cdot I_0 \cdot x - \gamma_0 \cdot z \quad (.6)$$

und im Salzwasserbereich

$$p_2(x, z) = p_0 - \gamma_s \cdot I_s \cdot x - \gamma_s \cdot z \quad (.7)$$

Da gemäß den Randbedingungen

$$p_1(x > 0, z = 0) = p_2(x > 0, z = 0) \quad (.8)$$

sein muß, ergibt sich folgende Bedingung:

$$\gamma_0 I_0 = \gamma_s I_s \quad (.9)$$

Mit

$$U_0 = (k_f)_0 \cdot I_0 = K_0 \frac{\gamma_0}{\eta_0} I_0 \quad (.10)$$

kann man schreiben

$$j_0 I_0 = \frac{\eta_0}{K_0} U_0 \quad (.11)$$

Damit lassen sich die Druckverteilungen bei Vernachlässigung der Querdispersion wie folgt ausdrücken:

$$P_1(x, z) = P_0 - \frac{\eta_0}{K_0} U_0 x - j_0 z \quad (.12)$$

$$P_2(x, z) = P_0 - \frac{\eta_0}{K_0} U_0 x - j_0 z \quad (.13)$$

2.1.2 Druckverteilung unter Berücksichtigung der Dispersion

Unter dem Einfluß der Querdispersion kommt es zu einer Vermischung über die Trennfläche ($z=0$) hinweg, wodurch sich durch die nunmehr auch im Süßwasserbereich vorhandene Salzlösung die Druckverteilung ändert, sofern die Salzkonzentration im Einlauf so groß ist, daß keine Tracerausbreitung ($\Delta^0 \approx 0$) mehr vorliegt. Diese Druckänderung läßt sich durch einen zusätzlichen Term $p_1'(x, z)$ im Süßwasserbereich und $p_2'(x, z)$ im Bereich des Salzwassers berücksichtigen:

$$P_1(x, z) = P_0 - \frac{\eta_0}{K_0} U_0 x - j_0 z + p_1'(x, z) \quad (.14)$$

$$P_2(x, z) = P_0 - \frac{\eta_0}{K_0} U_0 x - j_0 z + p_2'(x, z) \quad (.15)$$

Diese Darstellung ist im Hinblick auf die später verwendeten Ansätze aus der Störungsrechnung sehr vorteilhaft, weil die Veränderungen in der Druckverteilung zufolge Dispersion das erste Glied einer Kausalkette bilden: Änderungen in der Druckverteilung

bewirken eine veränderte Geschwindigkeitsverteilung, daraus resultiert wiederum eine veränderte Konzentrationsverteilung und damit auch eine andere Druckverteilung. Da es sich hierbei um eine geschlossene Kausalkette handelt, könnte man auch von jeder anderen Größe (zum Beispiel Geschwindigkeit, Konzentration) ausgehen und ihre Veränderung infolge Dispersion betrachten. Jedoch hat der oben angedeutete Weg bei der formalen Lösung des Problems erhebliche Vorteile gegenüber den anderen Möglichkeiten.

2.2 Bewegungsgleichung

Die Filtergeschwindigkeit läßt sich folgendermaßen aus dem Darcy-Gesetz bestimmen:

$$\vec{V}_f(x, z) = -\frac{k_0}{\eta} (\text{grad } p - \rho \vec{g}) \quad (.16)$$

wobei \vec{g} zum Erdmittelpunkt gerichtet ist.

2.3 Kontinuitätsgleichung

Die Kontinuitätsgleichung lautet

$$\text{div}(\rho \cdot \vec{V}_f) = 0 \quad (.17)$$

2.4 Transportgleichung

Die Transportgleichung für das Salz lautet unter Verwendung des Dispersionstensors D und mit der in 2.5 angegebenen linearen Zustandsgleichung für die Dichte

$$\frac{\vec{v}_k}{n_e} \text{grad } c = \frac{D}{\rho_0} \text{div} [\rho D \text{grad}(\frac{c}{\rho})] \quad (.18)$$

2.5 Zustandsgleichungen

Die Dichte ρ und die dynamische Zähigkeit η können als Funktionen der örtlichen Salzkonzentration c angegeben werden. Dabei erhält man folgende Zustandsgleichungen:

$$\rho(c) = \rho_0 + \frac{\Delta \rho}{c_s} c \quad (.19)$$

$$\eta(c) = \eta_0 - \frac{\Delta \eta}{c_s} c \quad (.20)$$

Die hier vorausgesetzten linearen Abhängigkeiten treffen für das in den Versuchen im physikalischen Modell (siehe Kapitel 4) verwendete Kochsalz (NaCl) in sehr guter Näherung zu.

Damit stehen nun für den Süßwasserbereich sechs Gleichungen für die sechs Unbekannten $u_1(x_1z)$, $w_1(x_1z)$, $p_1(x_1z)$, $c_1(x_1z)$, $\eta_1(x_1z)$, $\rho_1(x_1z)$ zur Verfügung, entsprechend für den Salzwasserbereich sechs Gleichungen für die sechs unbekannt Funktionen $u_2(x_1z)$, $w_2(x_1z)$, $p_2(x_1z)$, $c_2(x_1z)$, $\eta_2(x_1z)$, $\rho_2(x_1z)$.

3 Vereinfachungen

Ein Teil der angegebenen Bestimmungsgleichungen lässt sich weiter vereinfachen, wenn man die Randbedingungen und die daraus resultierenden Besonderheiten des Ausbreitungsproblems berücksichtigt.

Die Filtergeschwindigkeit \vec{v}_f lässt sich in ihre x-Komponente u und ihre z-Komponente w zerlegen:

$$u = - \frac{k_0}{\eta} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (.21)$$

$$w = - \frac{k_2}{\eta} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial z} + \rho_0 g \right) \quad \text{mit } g = \left(\frac{\partial \sigma}{\partial z} \right) \quad (.22)$$

Einsetzen von p_1 und p_2 nach Gleichung (.14) und (.15) ergibt für den Süßwasserbereich mit

$$y_0 = \rho_0 g \quad \text{und} \quad y = \rho g \quad (.23)$$

$$u_1 = \frac{\eta_0}{\eta} u_0 - \frac{k_0}{\eta} \frac{\partial p_1'}{\partial x} \quad (.24)$$

$$w_1 = - \frac{k_2}{\eta} \left(y - y_0 + \frac{\partial p_1'}{\partial z} \right) \quad (.25)$$

Im Salzwasserbereich erhält man dagegen mit

$$y_s = \rho_s g \quad (.26)$$

$$u_2 = \frac{\eta_0}{\eta} u_0 - \frac{k_0}{\eta} \frac{\partial p_2'}{\partial x} \quad (.27)$$

$$w_2 = - \frac{k_2}{\eta} \left(y - y_s + \frac{\partial p_2'}{\partial z} \right) \quad (.28)$$

Die Kontinuitätsgleichung lautet ausgeschrieben

$$u \frac{\partial \rho}{\partial x} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0 \quad (.29)$$

Da der Druck p von seiner Entstehung her in die Gruppe der vertikalen Größen eingeordnet wird, wird auch die Druckstörung p' mit (a.L) dimensionslos gemacht:

$$p^* = \frac{p'/\gamma_0}{aL} = \frac{p'}{\gamma_0 aL} \quad (.40)$$

Die Konzentration der Salzlösung wird mit der Salzkonzentration im Einlauf dimensionslos gemacht:

$$c^* = \frac{c}{c_s} \quad (.41)$$

Mit den Größen

$$\delta = \frac{\rho_s - \rho_0}{\rho_0} = \frac{\Delta \rho}{\rho_0} \quad (.42)$$

$$\beta = \frac{\eta_s - \eta_0}{\eta_0} = \frac{\Delta \eta}{\eta_0} \quad (.43)$$

und $\varepsilon = \frac{\beta}{\delta} \quad (.44)$

lassen sich die beiden Zustandsgleichungen auf folgende Form bringen:

$$\frac{\rho(c)}{\rho_0} = 1 + \delta c^* \quad (.45)$$

$$\frac{\eta(c)}{\eta_0} = 1 + \varepsilon \delta c^* \quad (.46)$$

Im folgenden werden zuerst die Bestimmungsgleichungen für den Süßwasserbereich, anschließend die für den Salzwasserbereich in dimensionsloser Form überführt.

4.2 Dimensionslose Bestimmungsgleichungen im Süßwasserbereich

Mit den genannten Bezugsgrößen erhält man im Süßwasserbereich (Index "1") folgende dimensionslose Gleichungen:

Bis auf die Indices "1" und "2" hat sie in beiden Strömungsbereichen die gleiche Form. Bei näherer Betrachtung des Dispersionsmechanismus läßt sich die Transportgleichung weiter vereinfachen: Sobald sich ein stationärer Transportzustand eingestellt hat, ist die Längsdispersion gegenüber der Querdispersion vernachlässigbar. Geht man davon aus, daß die Querdispersion nahezu ausschließlich in z-Richtung wirkt, das heißt vernachlässigt man die wegen der geometrischen Randbedingungen sehr kleine Vertikalkomponente w der Filtergeschwindigkeit für Dispersionsbetrachtungen, so läßt sich der resultierende laterale Dispersionskoeffizient D_T wie folgt ansetzen:

$$D_T = \alpha_T \cdot \frac{|u|}{n_e} \quad (.30)$$

Dieser Ansatz ist für Pecletzahlen Pe bis etwa $Pe = 1000$ sinnvoll.

Unter den genannten Annahmen vereinfacht sich die Transportgleichung folgendermaßen:

$$\frac{u}{n_e} \cdot \frac{\partial c}{\partial x} + \frac{w}{n_e} \cdot \frac{\partial c}{\partial z} = \frac{\rho}{\rho_0} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left[\rho D_T \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{c}{\rho} \right) \right] \quad (.31)$$

und mit Gleichung (.30)

$$u \frac{\partial c}{\partial x} + w \frac{\partial c}{\partial z} = \alpha_T \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z} \left[\rho u \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{c}{\rho} \right) \right] \quad (.32)$$

4 Dimensionslose Darstellung der Bestimmungsgleichungen

4.1 Wahl dimensionsloser Größen

Die in .3 zusammengestellten Bestimmungsgleichungen werden zuerst in dimensionsloser Form überführt, damit die Lösungen in einer allgemein gültiger Form verfügbar sind.

Dabei werden für x- und z-Richtung verschiedene Bezugslängen gewählt:

- Längen in x-Richtung werden dimensionslos gemacht mit der Bezugslänge L, wobei L der Abstand zwischen der Einlaufebene und der Meßebene im physikalischen Modell ist (siehe Kapitel 4).
- Größen in z-Richtung werden mit einer Bezugslänge a' dimensionslos gemacht, die bis auf den Faktor $\sqrt{2}$ gleich der Standardabweichung σ bei lateraler Ausbreitung eines Tracers ist.

$$\sigma = \sqrt{2 a_T L} \quad (.33)$$

$$a' = \sqrt{a_T L} \quad (.34)$$

Aus a' erhält man die dimensionslose Größe a

$$a = \frac{a'}{L} = \sqrt{\frac{a_T}{L}} \quad (.35)$$

Damit ergeben sich folgende dimensionslose Größen:

$$X^* = \frac{x}{L} \quad (.36)$$

$$Z^* = \frac{z}{aL} \quad (.37)$$

$$U^* = \frac{U}{U_0} \quad (.38)$$

$$W^* = \frac{W}{a \cdot U_0} \quad (.39)$$

- Dimensionslose Komponenten der Filtergeschwindigkeit

$$U_1^* = \frac{1}{1 + \varepsilon \delta c_1^*} \left(1 - \frac{\alpha k_0 \mu_0}{\eta_0 U_0} \frac{\partial p_1^*}{\partial x^*} \right) \quad (.47)$$

Mit $\frac{k_0 \mu_0}{\eta_0 U_0} = \frac{1}{I_0}$ (.48)

läßt sich Gleichung (.47) schreiben als

$$U_1^* = \frac{1}{1 + \varepsilon \delta c_1^*} \left(1 - \frac{\alpha}{I_0} \frac{\partial p_1^*}{\partial x^*} \right) \quad (.49)$$

$$W_1^* = - \frac{\frac{\partial p_1^*}{\partial z^*} + \delta c_1^*}{\alpha I_0 (1 + \varepsilon \delta c_1^*)} \quad (.50)$$

- Dimensionslose Kontinuitätsgleichung

$$\delta \left[U_1^* \frac{\partial c_1^*}{\partial x^*} + W_1^* \frac{\partial c_1^*}{\partial z^*} \right] + (1 + \delta c_1^*) \left(\frac{\partial U_1^*}{\partial x^*} + \frac{\partial W_1^*}{\partial z^*} \right) \quad (.51)$$

- Dimensionslose Transportgleichung

$$U_1^* \frac{\partial c_1^*}{\partial x^*} + W_1^* \frac{\partial c_1^*}{\partial z^*} = (1 + \delta c_1^*) \frac{\partial}{\partial z^*} \left[U_1^* (1 + \delta c_1^*) \frac{\partial}{\partial z^*} \left(\frac{c_1^*}{1 + \delta c_1^*} \right) \right] \quad (.52)$$

4.3 Dimensionslose Bestimmungsgleichungen im Salzwasserbereich

Im Salzwasserbereich (Index "2") ergeben sich folgende dimensionslose Gleichungen:

- Dimensionslose Komponenten der Filtergeschwindigkeit

$$U_2^* = \frac{1}{1 + \varepsilon \delta c_2^*} \left(1 - \frac{\alpha}{I_0} \frac{\partial p_2^*}{\partial x^*} \right) \quad (.53)$$

$$w_2^* = - \frac{\delta(c_2^* - 1) + \frac{\partial p_2^*}{\partial z^*}}{\alpha I_0 (1 + \varepsilon \delta c_2^*)} \quad (.54)$$

- Dimensionslose Kontinuitätsgleichung

$$\delta \left(u_2^* \frac{\partial c_2^*}{\partial x^*} + w_2^* \frac{\partial c_2^*}{\partial z^*} \right) + (1 + \delta c_2^*) \left[\frac{\partial u_2^*}{\partial x^*} + \frac{\partial w_2^*}{\partial z^*} \right] \quad (.55)$$

- Dimensionslose Transportgleichung

$$u_2^* \frac{\partial c_2^*}{\partial x^*} + w_2^* \frac{\partial c_2^*}{\partial z^*} = \quad (.56)$$

$$= (1 + \delta c_2^*) \frac{\partial}{\partial z^*} \left[u_2^* (1 + \delta c_2^*) \frac{\partial}{\partial z^*} \left(\frac{c_2^*}{1 + \delta c_2^*} \right) \right]$$

Damit stehen für jeden der beiden Störungsbereiche jeweils vier gekoppelte Differentialgleichungen für die je vier unbekannt Funktionen u_1 , w_1 , p_1 , c_1 beziehungsweise u_2 , w_2 , p_2 und c_2 zur Verfügung.

Diese beiden Gleichungssysteme sind mit analytischen Methoden nicht mehr lösbar. Um sie dennoch zu lösen, bleiben zwei Möglichkeiten: Entweder wendet man ein numerisches Verfahren

(zum Beispiel Differenzenverfahren oder Methode Finiter Elemente) zur näherungsweisen Lösung an oder man sucht einen analytischen Ansatz für eine Näherungslösung. In dieser Arbeit wurde der zweite Weg beschrrieben.

5 Lösungsansatz aus der Störungsrechnung

5.1 Grundlagen des Ansatzes

Mit einem Ansatz aus der Störungsrechnung, wie er zum Beispiel von Randkivi (1978) angedeutet wurde und unter anderem bei Schneider (2) beschrieben wird, können die Differentialgleichungssysteme näherungsweise gelöst werden.

Jeder der ortsabhängigen Funktion u^* usw. wird dabei mit dem Störparameter $\delta = \Delta \rho / \rho_0$ als Funktionenreihe dargestellt. Zur Verdeutlichung wird dies im folgenden am Beispiel der Funktion c gezeigt:

$$c^*(x^*, z^*) = \bar{c}(x^*, z^*) + \delta \tilde{c}_1(x^*, z^*) + \delta^2 \tilde{c}_2(x^*, z^*) + \dots \\ \dots \delta^n \tilde{c}_n(x^*, z^*) \quad (.55)$$

Hierbei ist $\bar{c}(x, z)$ die Konzentrationsverteilung, die sich für den Fall $\delta = 0$, das heißt bei der Ausbreitung eines idealen Tracers ergibt. Die Funktionen c_1, c_2, \dots, c_n sind die Störfunktionen, die zusammen mit dem jeweiligen Faktor $\delta, \delta^2, \dots, \delta^n$ die Änderung der Konzentrationsverteilung infolge des Dichteunterschieds angeben.

Die gesamte Näherung besteht darin, von allen Störungstermen jeweils nur den ersten zu berücksichtigen und die nachfolgenden zu vernachlässigen. Dadurch wird in aller Regel eine gute Näherung erzielt, weil zum Beispiel bei Kochsalzlösungen δ im Bereich

$$0 \leq \delta \leq 0,2 \quad (.58)$$

liegt und daher Terme mit höheren Potenzen von δ nur sehr kleine Beiträge liefern. Um die Schreibweise zu vereinfachen und Verwechslungen mit den Indices für die Strömungsbereiche zu vermeiden, wird der Index "1" für die erste Störfunktion weggelassen. Die Lösungsansätze lauten damit:

$$u^*(x^*, z^*) = \bar{u}(x^*, z^*) + \delta \tilde{u}(x^*, z^*) \quad (.59)$$

$$w^*(x^*, z^*) = \bar{w}(x^*, z^*) + \delta \tilde{w}(x^*, z^*) \quad (.60)$$

$$c^*(x^*, z^*) = \bar{c}(x^*, z^*) + \delta \tilde{c}(x^*, z^*) \quad (.61)$$

$$p^*(x^*, z^*) = \bar{p}(x^*, z^*) + \delta \tilde{p}(x^*, z^*) \quad (.62)$$

Dadurch wird jede Funktion zerlegt in eine Summe aus der entsprechenden Funktion für die Tracerausbreitung und einen Term, der den Dichteunterschied $\Delta \rho$ berücksichtigt. Für p^* ist $\bar{p} = 0$, weil definitionsgemäß (siehe .2.1.2) die Druckänderungen p' im Tracerfall gleich Null sind.

Mit diesen Lösungsansätzen ergeben sich sowohl für den Süß- als auch für den Salzwasserbereich statt der bisher je vier unbekannt Funktionen u , w , c und p nunmehr deren sieben. Durch die infolge der Aufspaltung erhöhte Zahl der Funktionen läßt sich jedoch das Gleichungssystem in jedem Bereich lösen.

Dazu werden die Lösungsansätze in die Bestimmungsgleichungen eingesetzt und jede daraus resultierende Gleichung nach solchen Termen geordnet, die unabhängig von δ sind und nach solchen, die proportional zu δ sind (ähnlich einem Koeffizientenvergleich). Terme mit höheren Potenzen von δ werden dabei vernachlässigt.

Danach ergeben sich für beide Strömungsbereiche je sieben Gleichungen für die sieben unbekannt Funktionen $\bar{u}_1, u_1, \bar{w}_1, w_1, \bar{c}_1, c_1, p_1$ beziehungsweise $\bar{u}_2, u_2, \bar{w}_2, w_2, \bar{c}_2, c_2, p_2$, die simultan gelöst werden müssen.

Im folgenden sollen zuerst die unbekannt Funktionen für den Süßwasserbereich, anschließend die entsprechenden Funktionen für den Salzwasserbereich ermittelt werden.

5.2 Bestimmungsgleichungen für den Süßwasserbereich

Um das beschriebene Lösungsverfahren zu verdeutlichen, wird der Weg zur Bestimmung der Gleichungen für $\bar{u}_1(x, z)$ und $u_1(x, z)$ ausführlich dargestellt: Im Süßwasserbereich ergibt sich aus Gleichung (.59) und (.61):

$$u_1^*(x_1^*, z^*) = \bar{u}_1(x_1^*, z^*) + \delta \tilde{u}_1(x_1^*, z^*) \quad (.63)$$

$$c_1^*(x_1^*, z^*) = \bar{c}_1(x_1^*, z^*) + \delta \tilde{c}_1(x_1^*, z^*) \quad (.64)$$

Einsetzen in Gleichung (.49) führt zu

$$\bar{u}_1 + \delta \tilde{u}_1 = \frac{1}{1 + \varepsilon \delta (\bar{c}_1 + \delta \tilde{c}_1)} \left(1 - \frac{\alpha \delta}{I_0} \frac{\partial \tilde{p}_1}{\partial x^*} \right) \quad (.65)$$

Daraus erhält man

$$\begin{aligned} \bar{u}_1 + \delta (\tilde{u}_1 + \varepsilon \bar{u}_1 \bar{c}_1) + \delta^2 \varepsilon (\tilde{u}_1 \bar{c}_1 + \tilde{c}_1 \bar{u}_1) + \delta^3 \varepsilon \tilde{u}_1 \tilde{c}_1 &= (.66) \\ &= 1 - \delta \frac{\alpha}{I_0} \frac{\partial \tilde{p}_1}{\partial x^*} \end{aligned}$$

Hieraus ergeben sich nach Vernachlässigung der Glieder mit δ^2 und δ^3 zwei Gleichungen:

$$\bar{u}_1 = 1 \quad (.67)$$

und damit

$$\tilde{u}_1 + \varepsilon \bar{c}_1 = - \frac{a}{I_0} \frac{\partial \tilde{p}_1}{\partial x^*} \quad (.68)$$

Gleichung (.67) bestätigt somit die schon zuvor bekannte Tatsache, daß die Filtergeschwindigkeit im Süßwasserbereich bei der Tracerausbreitung unabhängig vom Ort (x, z) den Wert u_0 aufweist.

Entsprechend ergibt sich für die Vertikalkomponente der Filtergeschwindigkeit

$$\bar{w}_1 = 0 \quad (.69)$$

und

$$- a I_0 w_1 = \left(\frac{\partial \tilde{p}_1}{\partial z^*} + \bar{c}_1 \right) \quad (.70)$$

An dieser Stelle lohnt es sich, die Terme

a/I_0 in Gleichung (.68) und $(a I_0)$ in Gleichung (.70) genauer zu betrachten.

I_0 ist etwa $\Delta h/L$, wobei Δh die Differenz der Piezometerhöhen zwischen Einlauf und Auslauf ist. Mit Gleichung (.35) ergibt sich hieraus für große L

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \left(\frac{a}{I_0} \right) \approx \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\frac{\alpha_T}{L}}}{\frac{\Delta h}{L}} = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\alpha_T}}{\Delta h} \cdot \sqrt{L} \quad (.71)$$

somit eine mit L wachsende Funktion.

Hingegen strebt $(a I_0)$ mit wachsender Fließlänge gegen Null:

$$\lim_{L \rightarrow \infty} (\alpha I_0) \approx \lim_{L \rightarrow \infty} \left(\sqrt{\frac{\alpha_T}{L}} \cdot \frac{\Delta h}{L} \right) = \sqrt{\alpha_T} \Delta h \lim_{L \rightarrow \infty} L^{-3/2} = 0 \quad (.72)$$

Aus dieser Überlegung heraus läßt sich Gleichung (.70) in genügendem Abstand vom Einlauf reduzieren auf

$$\frac{\partial \tilde{p}_1}{\partial z^*} + \bar{c}_1 = 0 \quad (.73)$$

Mit Gleichung (.67) und Gleichung (.69) ergibt sich aus der Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\partial \bar{c}_1}{\partial x^*} + \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x^*} + \frac{\partial \bar{w}_1}{\partial z^*} = 0 \quad (.74)$$

Die Transportgleichung liefert

$$\frac{\partial \bar{c}_1}{\partial x^*} = \frac{\partial^2 \bar{c}_1}{\partial z^{*2}} \quad (.75)$$

und damit

$$\frac{\partial^2 \tilde{c}_1}{\partial z^{*2}} - \frac{\partial \tilde{c}_1}{\partial x^*} = \frac{\partial \bar{c}_1}{\partial z^*} \left(\bar{w}_1 + \frac{\partial \bar{c}_1}{\partial z^*} - \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial z^*} \right) \quad (.76)$$

Berücksichtigt man, daß \bar{u}_1 und \bar{w}_1 bereits explizit bekannt sind, so bleiben noch fünf Gleichungen mit fünf unbekanntenen Funktionen zu lösen.

5.3 Bestimmungsgleichungen für den Salzwasserbereich

Die Bestimmungsgleichungen im Salzwasserbereich ergeben sich mit dem gleichen Verfahren wie im Bereich des Süßwassers.

Im einzelnen erhält man folgende Funktionen:

Für die Horizontalkomponente der Filtergeschwindigkeit

$$\bar{u}_2 = 1 \quad (.77)$$

$$\tilde{u}_2 + \varepsilon \bar{c}_2 = - \frac{a}{I_0} \frac{\partial \tilde{p}_2}{\partial x^*} \quad (.78)$$

Für die Vertikalkomponente der Filtergeschwindigkeit

$$\bar{w}_2 = 0 \quad (.79)$$

und mit analogen Grenzbetrachtungen wie in .5.2

$$\frac{\partial \tilde{p}_2}{\partial z^*} + \bar{c}_2 - 1 = 0 \quad (.80)$$

Aus der Kontinuitätsgleichung ergibt sich

$$\frac{\partial \bar{c}_2}{\partial x^*} + \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial x^*} + \frac{\partial \tilde{w}_2}{\partial z^*} = 0 \quad (.81)$$

Die Transportgleichung liefert

$$\frac{\partial \bar{c}_2}{\partial x^*} = \frac{\partial^2 \bar{c}_2}{\partial z^{*2}} \quad (.82)$$

und damit

$$\frac{\partial^2 \tilde{c}_2}{\partial z^{*2}} - \frac{\partial \tilde{c}_2}{\partial x^*} = \frac{\partial \tilde{c}_2}{\partial z^*} \left(\bar{w}_2 + \frac{\partial \bar{c}_2}{\partial z^*} - \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial z^*} \right) \quad (.83)$$

Auch im Salzwasserbereich bleiben somit fünf Gleichungen mit fünf unbekanntten Funktionen zu lösen.

5.4 Zusammenfassung der Bestimmungsgleichungen

Faßt man alle Bestimmungsgleichungen zusammen, so ergibt sich folgende Aufstellung. Um sie übersichtlich zu halten, werden, falls die Gleichungen für den Süß- und Salzwasserbereich identisch sind, die Indices weggelassen.

Süßwasserbereich ----- Salzwasserbereich

$$\bar{u} = 1 \quad (.84)$$

$$\bar{w} = 0 \quad (.85)$$

$$\bar{u} + \varepsilon \bar{c} = -\frac{a}{I_0} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x^*} \quad (.86)$$

$$\frac{\partial \tilde{p}_1}{\partial z^*} + c_1 = 0 \quad (.87)$$

$$\frac{\partial \tilde{p}_2}{\partial z^*} + \bar{c}_2 - 1 = 0 \quad (.88)$$

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial x^*} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x^*} + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z^*} = 0 \quad (.89)$$

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial x^*} = \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial z^{*2}} \quad (.90)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial z^{*2}} - \frac{\partial \bar{c}}{\partial x^*} = \frac{\partial \bar{c}}{\partial z^*} \left(\bar{w} + \frac{\partial \bar{c}}{\partial z^*} - \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z^*} \right) \quad (.91)$$

6 Lösung der Gleichungssysteme

6.1 Teillösungen für den Süßwasserbereich

Bestimmung von $\bar{c}_1(x, z)$

Die Lösung von Gleichung (.90) ist aus der Literatur bekannt.
Mit der Randbedingung

$$\bar{c}_1(z^* \rightarrow \infty) = 0 \quad (.92)$$

ergibt sich

$$\bar{c}_1(x^*, z^*) = \frac{1}{2} \left(1 - \operatorname{erf} \left(\frac{z^*}{2\sqrt{x^*}} \right) \right) \quad (.93)$$

Bestimmung von $p_1(x^*, z^*)$

Setzt man Gleichung (.93) in Gleichung (.97) ein, erhält man

$$\frac{\partial \tilde{p}_1}{\partial z^*} = -\frac{1}{2} \left(1 - \operatorname{erf} \left(\frac{z^*}{2\sqrt{x^*}} \right) \right) \quad (.94)$$

Zur Lösung dieser Differentialgleichung wurde folgender
Ansatz mit den unbekanntenen Funktionen f_1 , f_2 und f_3 verwendet:

$$\tilde{p}_1(x^*, z^*) = f_1(x^*, z^*) e^{-\frac{z^{*2}}{4x^*}} + f_2(x^*, z^*) \operatorname{erf} \frac{z^*}{2\sqrt{x^*}} + f_3(x^*, z^*) \quad (.95)$$

Mit der Randbedingung

$$\tilde{p}_1(z^* \rightarrow \infty) = 0 \quad (.96)$$

ergibt sich

$$f_1 = \sqrt{\frac{x^*}{\pi}} ; \quad f_2 = \frac{z^*}{2} ; \quad f_3 = -\frac{z^*}{2} \quad (.97)$$

und damit

$$\hat{p}_1(x^*, z^*) = \sqrt{\frac{x^*}{\pi}} e^{-\frac{z^{*2}}{4x^*}} - \frac{z^*}{2} \left(1 - \operatorname{erf}\left(\frac{z^*}{2\sqrt{x^*}}\right)\right) \quad (.98)$$

$$\hat{v}_1(x^*, z^*) = -\frac{\varepsilon}{2} \left(1 - \operatorname{erf}\left(\frac{z^*}{2\sqrt{x^*}}\right)\right) - \frac{a}{I_0} \frac{1}{2\sqrt{\pi x^*}} \cdot e^{-\frac{z^{*2}}{4x^*}} \quad (.99)$$

Bestimmung von $u_1(x, z)$

Aus Gleichung (.93) und (.99) kann man

$$\frac{\partial \bar{c}_1}{\partial x^*} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x^*} \quad \text{berechnen und in}$$

Gleichung (.89) einsetzen. Man erhält folgende Differentialgleichung:

$$\frac{\partial \tilde{w}_1}{\partial z^*} = \frac{e^{-\frac{z^{*2}}{4x^*}}}{4x^* \sqrt{\pi x^*}} \left[z^* (\varepsilon - 1) + \frac{a}{I_0} \left(\frac{z^{*2}}{2x^*} - 1 \right) \right] \quad (.100)$$

Folgender Lösungsansatz wurde verwendet:

$$\tilde{w}_1(x^*, z^*) = f_1(x^*) \cdot f_2(x^*, z^*) e^{-\frac{z^{*2}}{4x^*}} + f_3(x^*) \quad (.101)$$

Daraus ergibt sich nach einigen Zwischenschritten ein weiterer Ansatz:

$$f_2(x^*, z^*) = f_4(x^*) z^* + f_5(x^*) \quad (.102)$$

Für die unbekannt Funktionen f_1 bis f_5 liefert Gleichung (.100) nach einem Vergleich einander entsprechender Terme und mit der Randbedingung

$$\widetilde{w}_1 (z^* \rightarrow \infty) = 0 \quad (.103)$$

$$f_1(x^*) = \frac{1}{4x^* \sqrt{\pi} x^*} \quad (.104)$$

$$f_3(x^*) = 0 \quad (.105)$$

$$f_4(x^*) = -\frac{a}{I_0} \quad (.106)$$

$$f_5(x^*) = 2x^*(1-\varepsilon) \quad (.107)$$

somit läßt sich $\widetilde{w}_1(x^*, z^*)$ folgendermaßen darstellen:

$$\widetilde{w}_1(x^*, z^*) = \frac{e^{-\frac{z^{*2}}{4x^*}}}{4x^* \sqrt{\pi} x^*} \left(2x^*(1-\varepsilon) - \frac{a}{I_0} z^* \right) \quad (.108)$$

Bestimmung von $\widetilde{c}_1(x^*, z^*)$

Aus Gleichung (.93) beziehungsweise (.99) lassen sich $\frac{\partial \widetilde{c}_1}{\partial z^*}$ beziehungsweise $\frac{\partial \widetilde{c}_1}{\partial x^*}$ berechnen und zusammen mit Gleichung (.108) in Gleichung (.91) einsetzen mit dem Resultat:

$$\frac{\partial^2 \widetilde{c}_1}{\partial z^{*2}} - \frac{\partial \widetilde{c}_1}{\partial x^*} = \frac{e^{-\frac{z^{*2}}{2x^*}}}{4\pi x^*} \left[\frac{a}{I_0} \frac{z^*}{x^*} + 2\varepsilon \right] \quad (.109)$$

Folgender Lösungsansatz wurde verwendet:

$$\widetilde{c}_1(x^*, z^*) = f_1(x^*) \operatorname{erf} \left(\frac{z^*}{2\sqrt{x^*}} \right) e^{-\frac{z^{*2}}{4x^*}} + f_2(x^*, z^*) + f_3 \quad (.110)$$

Aus Gleichung (.109) ergibt sich damit

$$f_1(x^*) = \frac{-a}{4I_0 \sqrt{\pi} x^*} \quad (.111)$$

und

$$\frac{\partial^2 f_2}{\partial z^{*2}} - \frac{\partial f_2}{\partial x^*} = \frac{\varepsilon}{2\pi} \cdot \frac{e^{-\frac{z^{*2}}{2x^*}}}{x^*} \quad (.112)$$

Diese partielle Differentialgleichung lässt sich durch eine Transformation auf eine gewöhnliche Differentialgleichung reduzieren:

$$\text{Aus } T = \frac{z^*}{\sqrt{x^*}} \quad (.113)$$

erhält man

$$\partial_{x^*} = -\frac{z^*}{T} \partial T \quad (.114)$$

$$\partial_{z^*} = \sqrt{x^*} \partial T \quad (.115)$$

und damit die Differentialgleichung für $f_2(T)$:

$$\frac{d^2 f_2}{dT^2} + \frac{T}{2} \frac{df_2}{dT} = \frac{\varepsilon}{2\pi} e^{-\frac{T^2}{2}} \quad (.116)$$

Der Ansatz

$$f_2(T) = e_1 \operatorname{erf}\left(\frac{T}{2}\right) + e_2 \left[\operatorname{erf}\left(\frac{T}{2}\right)\right]^2 + e_3 e^{-\frac{T^2}{2}} + e_4 \quad (.117)$$

liefert nach Einsetzen in Gleichung (.116)

$$e_1 = e_3 = e_4 = 0 \quad (.118)$$

$$e_2 = \frac{\varepsilon}{4} \quad (.119)$$

lautet damit

$$f_2(x^*, z^*) = \frac{\varepsilon}{4} \left[\operatorname{erf}\left(\frac{z^*}{2\sqrt{x^*}}\right) \right]^2 \quad (.120)$$

Die $c_1(x, z)$ erhält man mit der Randbedingung

$$\tilde{c}_1(z^* \rightarrow \infty) = 0 \quad (.121)$$

$$c_1(x^*, z^*) = \operatorname{erf}\left(\frac{z^*}{2\sqrt{x^*}}\right) \left[\frac{\varepsilon}{4} \operatorname{erf}\left(\frac{z^*}{2\sqrt{x^*}}\right) - \frac{a}{I_0} \frac{1}{4\sqrt{\pi x^*}} e^{-\frac{z^{*2}}{4x^*}} - \frac{\varepsilon}{4} \right] \quad (.122)$$

Alle sind alle Teillösungen im Süßwasserbereich bestimmt.

6.2 Teillösungen für den Salzwasserbereich

Die meisten Differentialgleichungen für den Salzwasserbereich unterscheiden sich von denen des Süßwasserbereichs gar nicht oder nur im Vorzeichen einzelner Terme. Daher können zumeist die in .6.1 genannten Ansätze verwendet werden. Im folgenden wird aus diesem Grund auf die Aufzeichnung von Zwischenschritten verzichtet.

Bestimmung von $\bar{c}_2(x^*, z^*)$

Die Lösung von Gleichung (.90) mit der Randbedingung

$$\bar{c}_2(z^* \rightarrow -\infty) = 1 \quad (.123)$$

ist

$$\bar{c}_2(x^*, z^*) = \frac{1}{2} \left(1 - \operatorname{erf} \left(\frac{z^*}{2\sqrt{x^*}} \right) \right) \quad (.124)$$

Bestimmung von $\tilde{p}_2(x^*, z^*)$

Setzt man Gleichung (.124) in Gleichung (.86) ein, erhält man

$$\frac{\partial \tilde{p}_2}{\partial z^*} = \frac{1}{2} \left(1 + \operatorname{erf} \left(\frac{z^*}{2\sqrt{x^*}} \right) \right) \quad (.125)$$

Mit der Randbedingung

$$\tilde{p}_2(z^* \rightarrow -\infty) = 0 \quad (.126)$$

und dem gleichen Ansatz wie im Süßwasserbereich ergibt sich

$$\tilde{p}_2(x^*, z^*) = \gamma \frac{\sqrt{x^*}}{\pi} e^{-\frac{z^{*2}}{4x^*}} + \frac{z^*}{2} \left(1 + \operatorname{erf} \left(\frac{z^*}{2\sqrt{x^*}} \right) \right) \quad (.127)$$

Bestimmung von $\tilde{u}_2(x^*, z^*)$

\tilde{u}_2 wird auf dem gleichen Weg wie \tilde{u}_1 bestimmt.

$$\tilde{u}_2(x^*, z^*) = -\frac{\varepsilon}{2} \left(1 - \operatorname{erf}\left(\frac{z^*}{2\sqrt{x^*}}\right)\right) - \frac{a}{I_0} \frac{1}{2\sqrt{\pi x^*}} e^{-\frac{z^{*2}}{4x^*}} + \text{const} \quad (.128)$$

Bestimmung von $\tilde{w}_2(x^*, z^*)$

Mit dem gleichen Ansatz wie für \tilde{w}_1 ergibt sich

$$\tilde{w}_2(x^*, z^*) = \frac{e^{-\frac{z^{*2}}{4x^*}}}{4x^* \sqrt{\pi x^*}} \left(2x^*(1-\varepsilon) - \frac{a}{I_0} z^*\right) + \text{const} \quad (.129)$$

Bestimmung von $\tilde{c}_2(x^*, z^*)$

Nach dem gleichen Verfahren, mit dem \tilde{c}_1 bestimmt wurde, erhält man für $\tilde{c}_2(x^*, z^*)$ mit der Randbedingung

$$\tilde{c}_2(z^* \rightarrow -\infty) = 0 \quad (.130)$$

folgendes Ergebnis:

$$\tilde{c}_2(x^*, z^*) = \operatorname{erf}\left(\frac{z^*}{2\sqrt{x^*}}\right) \left[\frac{\varepsilon}{4} \operatorname{erf}\left(\frac{z^*}{2\sqrt{x^*}} - \frac{a}{I_0} \frac{1}{4\sqrt{\pi x^*}}\right) e^{-\frac{z^{*2}}{4x^*}} \right] - \frac{\varepsilon}{4} \quad (.131)$$

Damit sind auch für den Salzwasserbereich alle Teillösungen bekannt.

6.3 Gesamtlösungen

Aus den Teillösungen für den Süß- und Salzwasserbereich lassen sich die bisher noch nicht bestimmten Konstanten und daraus die Gesamtlösungen durch stetigen Anschluß bei $z^* = 0$ ermitteln. Dabei werden wiederum bei solchen Lösungen, die im Salz- und im Süßwasserbereich formal identisch sind, die Indices in der Gesamtlösung weggelassen.

x-Komponente der Filtergeschwindigkeit

Aus Gleichung (.99) beziehungsweise (.128) erhielt man für \tilde{u}_1 beziehungsweise \tilde{u}_2

$$\tilde{u}_1(x^*, z^*) = -\frac{\varepsilon}{2} \left(1 - \operatorname{erf}\left(\frac{z^*}{2\sqrt{x^*}}\right)\right) - \frac{a}{I_0} \frac{1}{2\sqrt{\pi x^*}} e^{-\frac{z^{*2}}{4x^*}} \quad (.99)$$

$$\tilde{u}_2(x^*, z^*) = -\frac{\varepsilon}{2} \left(1 - \operatorname{erf}\left(\frac{z^*}{2\sqrt{x^*}}\right)\right) - \frac{a}{I_0} \frac{1}{2\sqrt{\pi x^*}} e^{-\frac{z^{*2}}{4x^*}} + \text{const} \quad (.128)$$

Die Anschlußbedingung bei $z^* = 0$ lautet:

$$\tilde{u}_1(x^*, z^*=0) = \tilde{u}_2(x^*, z^*=0) \quad (.132)$$

Daraus ergibt sich

$$\text{const} = 0 \quad (.133)$$

Da

$$\bar{u}_1(x^*, z^*) = \bar{u}_2(x^*, z^*) = 1 \quad (.134)$$

ist, erhält man als Gesamtlösung mit

$$\sigma = \frac{\Delta p}{p_0} \quad (.42)$$

$$u^*(x^*, z^*) = 1 - \frac{\Delta p}{p_0} \left[\frac{\varepsilon}{2} \left(1 - \operatorname{erf}\left(\frac{z^*}{2\sqrt{x^*}}\right)\right) + \frac{a}{I_0} \frac{1}{2\sqrt{\pi x^*}} e^{-\frac{z^{*2}}{4x^*}} \right] \quad 135$$

z-Komponente der Filtergeschwindigkeit

Gleichung (.108) und (.129) lauteten

$$\tilde{w}_1(x^*, z^*) = \frac{e^{-\frac{z^{*2}}{4x^*}}}{4x^* \sqrt{\pi x^*}} \left(2x^* (1-\varepsilon) - \frac{a}{I_0} z^* \right) \quad (.108)$$

$$\tilde{w}_2(x^*, z^*) = \frac{e^{-\frac{z^{*2}}{4x^*}}}{4x^* \sqrt{\pi x^*}} \left(2x^* (1-\varepsilon) - \frac{a}{I_0} z^* \right) \quad (.129)$$

Aus der Anschlußbedingung

$$\tilde{w}_1(x^*, z^*=0) = \tilde{w}_2(x^*, z^*=0) \quad (.136)$$

ergibt sich

$$\text{const} = 0 \quad (.137)$$

und mit

$$\bar{w}_1(x^*, z^*) = \bar{w}_2(x^*, z^*) = 0 \quad (.138)$$

folgende Gesamtlösung

$$w^*(x^*, z^*) = \frac{\Delta p}{\rho_0} \left(2x^* (1-\varepsilon) - \frac{a}{I_0} z^* \right) \frac{e^{-\frac{z^{*2}}{4x^*}}}{4x^* \sqrt{\pi x^*}} \quad (.139)$$

Druckstörungen

Gleichung (.98) und (.127) lauteten

$$\tilde{p}_1(x^*, z^*) = \sqrt{\frac{x^*}{\pi}} e^{-\frac{z^{*2}}{4x^*}} - \frac{z^*}{2} \left(1 - \text{erf} \left(\frac{z^*}{2\sqrt{x^*}} \right) \right) \quad (.98)$$

$$\tilde{p}_2(x^*, z^*) = \sqrt{\frac{x^*}{\pi}} e^{-\frac{z^{*2}}{4x^*}} + \frac{z^*}{2} \left(1 + \text{erf} \left(\frac{z^*}{2\sqrt{x^*}} \right) \right) \quad (.127)$$

Auch diese beiden Gleichungen lassen sich trotz der Terme mit unterschiedlichem Vorzeichen zu einer Gesamtgleichung zusammenfassen, wenn man berücksichtigt, daß in Gleichung (.127) (Salzwasserbereich mit $z^* \leq 0$)

$$z^* = -|z^*| \quad (.140)$$

gilt damit

$$\operatorname{erf}\left(\frac{-|z^*|}{2\sqrt{x^*}}\right) = -\operatorname{erf}\left(\frac{|z^*|}{2\sqrt{x^*}}\right) \quad (.141)$$

Die Gleichung für die Druckstörung p^* lautet dann unter Berücksichtigung von Gleichung (.62)

$$p^*(x^*, z^*) = \frac{\Delta p}{\rho_0} \left[\sqrt{\frac{x^*}{\pi}} e^{-\frac{z^{*2}}{4x^*}} - \frac{|z^*|}{2} \left(1 - \operatorname{erf}\left(\frac{|z^*|}{2\sqrt{x^*}}\right) \right) \right] \quad (.142)$$

Konzentrationen

Die Konzentrationen \bar{c}_1 und \bar{c}_2 ergaben sich aus Gleichung (.93) und (.124)

$$\bar{c}_1(x^*, z^*) = \frac{1}{2} \left(1 - \operatorname{erf}\left(\frac{z^*}{2\sqrt{x^*}}\right) \right) = \bar{c}_2(x^*, z^*) \quad (.93) / (.124)$$

und können somit dargestellt werden als

$$\bar{c}(x^*, z^*) = \frac{1}{2} \left(1 - \operatorname{erf}\left(\frac{z^*}{2\sqrt{x^*}}\right) \right) \quad (.143)$$

Für \tilde{c}_1 und \tilde{c}_2 erhielt man aus Gleichung (.122) und (.131)

$$\begin{aligned} \tilde{c}_1(x^*, z^*) &= \operatorname{erf}\left(\frac{z^*}{2\sqrt{x^*}}\right) \left[\frac{\epsilon}{4} \operatorname{erf}\left(\frac{z^*}{2\sqrt{x^*}}\right) - \frac{a}{I_0} \frac{1}{4\pi x^*} e^{-\frac{z^{*2}}{4x^*}} \right] - \frac{\epsilon}{4} = (.122) / (.131) \\ &= J_2(x^*, z^*) \end{aligned}$$

Dadurch ergibt sich folgende Gesamtlösung für die Konzentrationsverteilung

$$c^*(x^*, z^*) = \frac{1}{2} \left(1 - \operatorname{erf} \left(\frac{z^*}{2\sqrt{\lambda x^*}} \right) \right) + \frac{\Delta \rho}{\rho_0} \left\{ \operatorname{erf} \left(\frac{z^*}{2\sqrt{\lambda x^*}} \right) \left[\frac{\varepsilon}{4} \operatorname{erf} \left(\frac{z^*}{2\sqrt{\lambda x^*}} \right) - \frac{a}{I_c} \frac{1}{4\sqrt{\pi \lambda x^*}} e^{-\frac{z^{*2}}{4x^*}} \right] - \frac{\varepsilon}{4} \right\} \quad (.144)$$

Damit ist das gesamte Gleichungssystem gelöst. Mit den vorhandenen Lösungen, insbesondere mit Gleichung (.144) kann unter einfachen Randbedingungen die stationäre laterale Ausbreitung konservativer Schadstoffe im gesamten Bereich zwischen sehr geringen Konzentrationen (Tracer, $\frac{\Delta \rho}{\rho} \approx 0$) und hohen Konzentrationen berechnet werden. Für beliebige Strömungsquerschnitte der Schichtenströmung kann die vertikale Konzentrationsverteilung bestimmt und daraus der Einfluß des Dichteunterschieds $\Delta \rho$ auf den Ausbreitungsvorgang ermittelt werden.

7 Anwendungsbeispiel

Gleichung (.144) wurde verwendet, um die Konzentrationsverteilung in einer horizontalen Schichtenströmung zwischen Süßwasser und Salzwasser (Kochsalz, NaCl) zu bestimmen.

Tabelle .1 gibt einen Überblick über die verwendeten Parameter. Die Zahlenwerte für das Gefälle I_0 , den Durchlässigkeitsbeiwert $(K_f)_0$ und die transversale Dispersivität α_T entsprechen in etwa den Werten, wie sie in ersten Versuchen im physikalischen Modell (s. Kapitel) verwendet wurden. Die Konzentrationsverteilung wurde stets im Querschnitt $x^* = 1$ ermittelt.

c_s [g/l]	ρ_s [g/l]	η_s [cP]	I_0	σ' [cm]	α_T [m]
0,5	998,5	1,001	0,375	6,8	$1,93 \cdot 10^{-4}$
59	1039	1,096	0,322	6,4	$1,71 \cdot 10^{-4}$
275	1175	1,77	0,37	3,0	$3,75 \cdot 10^{-5}$

Tabelle .1 : Parameter zur Berechnung der Konzentrationsverteilung

Daneben wurde verwendet :

$$(K_f)_0 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ m/s} ; \alpha_T = 2 \cdot 10^{-4} \text{ m} \quad (.145)$$

Bild .2 zeigt die resultierende Konzentrationsverteilung, wobei die Konzentration c^* über der z -Koordinate aufgetragen ist. Zusätzlich sind die obere und untere Berandung des physikalischen Modells eingezeichnet. Die Konzentrationsverteilung weist im wesentlichen die Form Gaußscher Fehlerkurven auf.

Besonders zu beachten ist, daß der Wendepunkt der Kurven mit zunehmender Salzkonzentration c_g weiter nach unten wandert. Durch diese Verschiebung läßt sich die Standardabweichung σ , die sich aus dem Abstand der Punkte mit $c^* = 0,16$ beziehungsweise $c^* = 0,84$ von $z = 0$ ergibt, nicht mehr sinnvoll als Maß für die Dispersivität α_T verwenden. Man kann sich jedoch mit einer äquivalenten Dispersivität α_T' behelfen. Da auch für praktische Probleme vor allem die Frage interessiert, in welcher Tiefe die Salzkonzentration im Süßwasserbereich ein bestimmtes Maß übersteigt, die genaue Konzentrationsverteilung im Salzwasserbereich aber in der Regel weniger interessant ist, genügt es für eine erste Abschätzung, σ' aus dem Abstand des Punktes mit $c^* = 0,16$ von $z^* = 0$ zu bestimmen. Daraus erhält man α_T'

$$\alpha_T' = \frac{\sigma'^2}{2L} \quad (.146)$$

Die Werte von α_T' für die drei verschiedenen Konzentrationen sind bereits in Tabelle .1 eingetragen. Sie lassen mit steigender Konzentration des Salzwassers eine deutliche Abnahme erkennen.

k_0	=	Permeabilität	
g	=	Erdbeschleunigung	
k_f	=	Durchlässigkeitsbeiwert	
I	=	Gradient der Piezometerhöhen (Betrag)	
h	=	Piezometerhöhe	
L	=	Fließlänge bis Meßquerschnitt (L=12m)	
n_e	=	effektive Porosität	
x, z	=	horizontale bzw. vertikale Ortskoordinate	
p_0	=	Druck bei $x=0, z=0$	
p	=	Druck	
v_f	=	Filtergeschwindigkeit	
u	=	x-Komponente der Filtergeschwindigkeit	
w	=	z-Komponente der Filtergeschwindigkeit	
u_0	=	Filtergeschwindigkeit im Süßwassereinlauf	
ρ_0	=	Dichte	} des Süßwassers
η_0	=	dynamische Viskosität	
c_s	=	Konzentration des Salzwassers bei $x=0$	
c	=	Konzentration	} der Lösung bei $x \neq 0, z \neq 0$
ρ	=	Dichte	
η	=	dynamische Viskosität	
ρ_s	=	Dichte des Salzwassers im Einlauf	
η_s	=	spez. Gewicht des Salzwassers im Einlauf	
γ_s	=	dyn. Zähigkeit des Salzwassers im Einlauf	
$\Delta \rho$	=	Dichte-	} unterschied zwischen Süß- u. Salzwassereinlauf
$\Delta \eta$	=	Viskositäts-	
α_T	=	transversale Dispersivität	
D_T	=	$\alpha_T \cdot \frac{ \vec{v}_f }{n_e}$ transversaler Dispersionskoeffizient	
σ	=	$\sqrt{2\alpha_T \cdot L}$ Standardabweichung	
a	=	$\sqrt{\frac{\alpha_T}{L}}$	
δ	=	$\frac{\Delta \rho}{\rho_0}$	} dimensionslose Größen
β	=	$\frac{\Delta \eta}{\eta_0} = \epsilon \cdot \delta$	

zusätzlich: $c^*, x^*, z^*, u^*, w^*, p^*, \bar{u}, \bar{w}, \bar{c}, u_1, w_1, c_1, p_1$ = dimensionslose Größen, die in der analytischen Lösung benötigt werden.

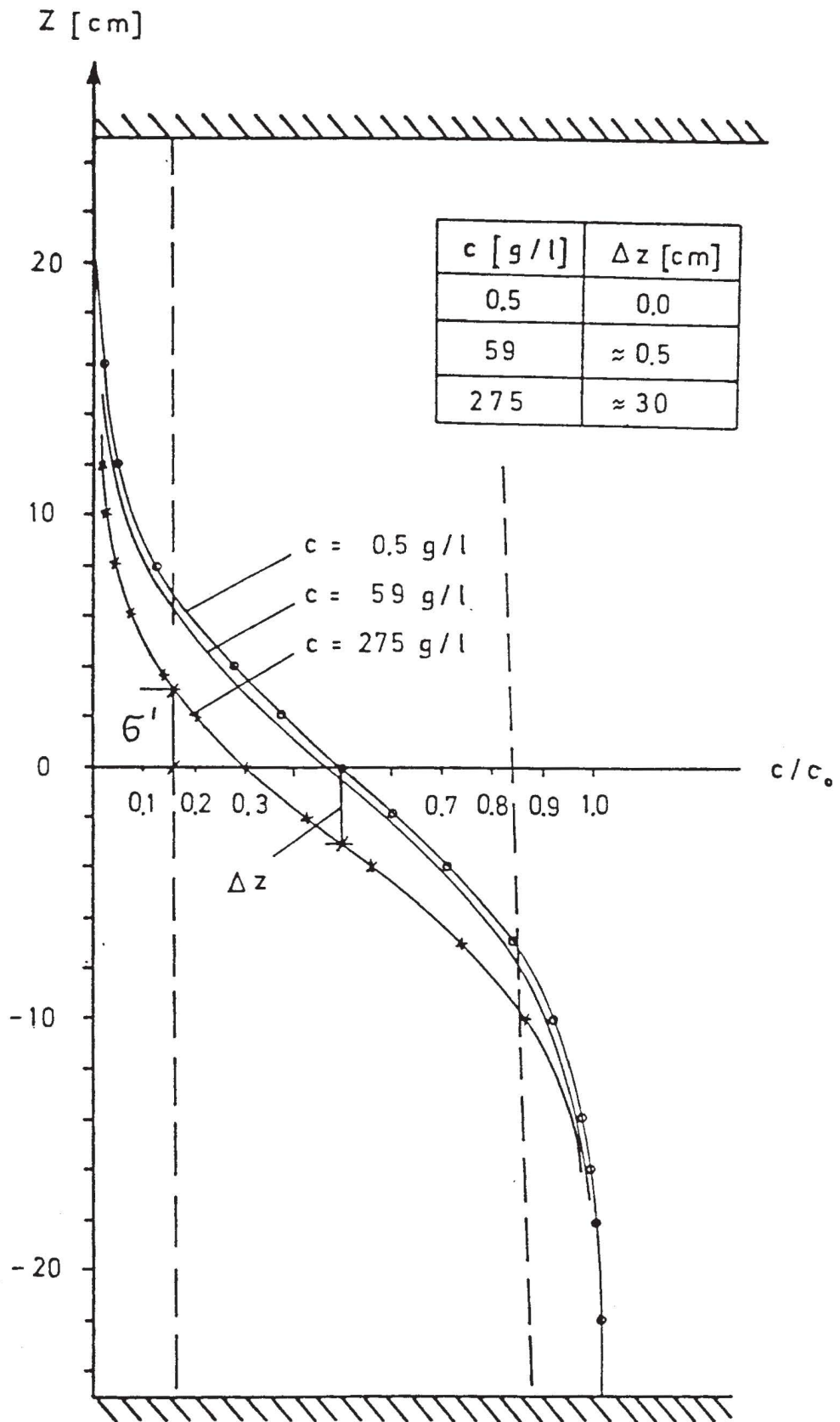


Bild .2)

Rechnerische Konzentrationsverteilung bei verschiedenen Salzgehalten

Literatur:

- (1) Randkivi, A.J.: "Geschichtete Grundwasserströmungen",
Bericht SFB 80/T/114, Universität Karlsruhe, 1975
- (2) Schneider, : "Mathematische Methoden der Strömungslehre",