7 IVORY, J., Some remarks on memoire by M. POISSON, read to the Academy of Sciences at Paris and inserted in the Conn. des Tems, Nov. 20, 1826; Philos. Mag. **1** (1827), 324—331.
8 SCHWARZ, H. A., Zur Integration der partiellen Differentialgleichung $(\partial^2 u/\partial x^2) + (\partial^2 u/\partial y^2) = 0$, J. reine angew. Math. **74** (1872), 218—253.
9 HEINE, E., Über trigonometrische Reihen, J. f. Math. **71** (1870), 351—365.
10 CHRISTOFFEL, E. B., Über die Integration von zwei partiellen Differentialgleichungen, Nachr. Königl. Ges. Wiss. Göttingen **18** (1871), 435—453.
11 NEUMANN, C., Untersuchungen über das logarithmische und Newton'sche Potential, Teubner Verlag 1877.
12 KORN, A., Lehrbuch der Potentialtheorie, Vol. 2, Dummler, Berlin 1901.
13 MUSKHELISHVILI, N. I., Singular integral equations, Noordhoff, Groningen, Holland 1953.
14 LEBÈSGUH, H., Sur des cas d'impossibilité du problème de Dirichlet ordinaire, C. R. Seances, Soc. Math. France **41** (1913), 17.
15 ZAREMBA, S., Sur le principe de Dirichlet, Acta Math. **34** (1911), 293—316.
16 LEKO, T., On torsion of prismatical beams with longitudinal cavities, ZAMM **62** (1982), T 134—T 135.
17 LEKO, T., Critical comments on two related ZAMM papers, Author's edition, Alexandria, VA 1984.
18 ZLATANOVSKI, T., Über die Torsion zylindrischer Stäbe mit mehrfach zusammenhängenden Querschnitten, ZAMM **66** (1986), T 190—T 192.
19 Math. Abstracts, Springer Verlag, VOL. 588—73098 (1986).

Address: TOMA D. LEKO, 3350 Martha Custis Drive, Alexandria, VA 22302, U.S.A.

ZAMM · Z. angew. Math. Mech. **68** (1988) 5, T 463 – T 465

LESKY, P. JUN.

Resonanzeffekte bei partiellen Differentialgleichungen höherer Ordnung in Wellenleitern

1. Problemstellung

Zur Motivation betrachten wir in einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ das Dirichletsche Rand- und Anfangswertproblem für die Wellengleichung:

Zu $f \in C_0^\infty(\Omega)$ und $\omega \geqq 0$ ist $u \in C^2(\overline{\Omega} \times [0, \infty))$ gesucht mit

$$\partial_t^2 u - \Delta u = f\,\mathrm{e}^{-i\omega t} \quad \text{in} \quad \Omega \times (0, \infty)\,, \qquad u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega\,, \tag{1), (2}$$

$$u(\boldsymbol{x}, 0) = \partial_t u(\boldsymbol{x}, 0) = 0 \quad \text{für} \quad \boldsymbol{x} \in \Omega\,. \tag{3}$$

Im folgenden sei Ω ein Gebiet der Form

$$\Omega = \mathbb{R}^k \times \Omega' \quad \text{mit beschränktem} \quad \Omega' \subset \mathbb{R}^{n-k}\,, \qquad 1 \leqq k \leqq n-1\,. \tag{4}$$

Die Fälle $k = 1$, $n = 1, 2, \ldots$, und $k = n - 1$, $n = 2, 3, \ldots$, sind bereits in [2] und [3] behandelt worden, und zwar ergibt sich für $k = 1$ eine Resonanz der Ordnung $t^{1/2}$ für diejenigen Frequenzen ω, für die ω^2 ein Eigenwert des homogenen Problems

$$\Delta U + \lambda U = 0 \quad \text{in } \Omega'\,, \qquad U = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega' \tag{5}$$

ist. Für alle übrigen Frequenzen gilt das Prinzip der Grenzamplitude

$$u(\boldsymbol{x}, t) = w(\boldsymbol{x})\,\mathrm{e}^{-i\omega t} + o(1) \quad \text{für} \quad t \to \infty \tag{6}$$

mit geeignetem $w \in C^2(\overline{\Omega})$. Für $k = 2$ ergeben sich an den gleichen Frequenzen Resonanzen der Ordnung $\ln t$. Für $k \geqq 3$ gilt immer das Prinzip der Grenzamplitude.

Nun stellt sich die Frage, ob derartige Resonanzphänomene auch bei partiellen Differentialgleichungen höherer Ordnung auftreten können. Wir betrachten das folgende Dirichletsche Rand- und Anfangswertproblem:

Zu $\omega \geqq 0$ und $f \in C_0^\infty(\Omega)$ ist $u \in C^{2m}(\overline{\Omega} \times [0, \infty))$ gesucht mit

$$\partial_t^2 u + [(-\Delta_x)^m + (-\Delta_y)^m]\, u = f\,\mathrm{e}^{-i\omega t} \quad \text{in} \quad \Omega \times (0, \infty)\,, \tag{7}$$

$$u = \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} = \ldots = \frac{\partial^{m-1} u}{\partial \boldsymbol{n}^{m-1}} = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega\,, \tag{8}$$

$$u(\boldsymbol{x}, 0) = \partial_t u(\boldsymbol{x}, 0) = 0 \quad \text{für} \quad \boldsymbol{x} \in \Omega; \tag{9}$$

hierbei setzen wir $\Delta_x := \partial_1^2 + \partial_2^2 + \ldots + \partial_k^2$, $\Delta_y := \partial_{k+1}^2 + \ldots + \partial_n^2$, und $\boldsymbol{n}$ bezeichnet den Normalenvektor auf $\partial\Omega$.

2. Konstruktion der Lösung

Um zur Konstruktion der Lösung Hilbertraummethoden verwenden zu können, definiert man eine geeignete selbstadjungierte Erweiterung A des Operators $[(-\Delta_x)^m + (-\Delta_y)^m]$. Ist $\{P_\lambda\}$ die Spektralschar von A, so gilt nach dem

Funktionalkalkül für unbeschränkte selbstadjungierte Operatoren

$$u(\boldsymbol{x}, t) = \int_0^\infty g(\lambda, t)\, \mathrm{d}(P_\lambda f)(\boldsymbol{x}) \tag{10}$$

mit

$$g(\lambda, t) := \begin{cases} \dfrac{1}{\lambda - \omega^2} \left(\mathrm{e}^{-i\omega t} - \cos\sqrt{\lambda}\, t + \dfrac{i\omega}{\sqrt{\lambda}} \sin\sqrt{\lambda} t\right) & \text{für} \quad \lambda \neq \omega^2\,, \\ \dfrac{i}{2\omega}\left(t\, \mathrm{e}^{-i\omega t} - \dfrac{1}{\omega} \sin \omega t\right) & \text{für} \quad \lambda = \omega^2\,. \end{cases} \tag{11}$$

Aus der Formel von Stone folgt

$$P_\lambda f(\boldsymbol{x}) = \lim_{\tau \downarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_0^\lambda [R_{\varrho + i\tau} f(\boldsymbol{x}) - R_{\varrho - i\tau} f(\boldsymbol{x})]\, \mathrm{d}\varrho\,, \tag{12}$$

wobei die Resolvente $R_z f$ für $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ die eindeutig bestimmte Lösung von

$$[(-\Delta_x)^m + (-\Delta_y)^m - z]\, R_z f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) \quad \text{für} \quad \boldsymbol{x} \in \Omega \tag{13}$$

ist, die die Randbedingung (8) erfüllt und im m-ten Sobolevraum $H_m(\Omega)$ liegt. Zur Berechnung von $R_z f$ führen wir für $\boldsymbol{x} \in \Omega$ die Bezeichnung $\boldsymbol{x} = (x, y)$ mit $x \in \mathbb{R}^k$, $y \in \Omega'$ ein. Für festes $x \in \mathbb{R}^k$ kann $R_z f(x, y)$ in $L_2(\Omega')$ in eine Fourierreihe entwickelt werden:

$$R_z f(x, y) = \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{s(r)} u_{rs}(x)\, v_{rs}(y) \quad \text{für} \quad y \in \Omega'\,; \tag{14}$$

hierbei sind $v_{rs} \in L_2(\Omega')$ orthonormierte Eigenfunktionen zu den Eigenwerten λ_r des homogenen Problems

$$[(-\Delta_y)^m - \lambda]\, U = 0 \quad \text{in } \Omega'\,, \qquad U = \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{n}'} = \ldots = \frac{\partial^{m-1} U}{\partial \boldsymbol{n}'^{m-1}} = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega' \tag{15}$$

($\boldsymbol{n}' :=$ Normalenvektor auf $\partial\Omega'$). Ebenso kann $f(x, y)$ entwickelt werden. Es seien $f_{rs}(x)$ die Fourierkoeffizienten von $f(x, y)$. Zur Bestimmung der Fourierkoeffizienten von $R_z f(x, y)$ ergibt sich aus (13) die Differentialgleichung

$$[(-\Delta_x)^m + \lambda_r - z]\, u_{rs}(x; z) = f_{rs}(x) \quad \text{für} \quad x \in \mathbb{R}^k\,, \tag{16}$$

die sich elementar mit Hankelfunktionen lösen läßt. Man erhält hieraus Darstellungen für $R_z f(\boldsymbol{x})$ und $P_\lambda f(\boldsymbol{x})$. Insbesondere gilt:

(i) *$P_\lambda f(\boldsymbol{x})$ hängt stetig von λ ab. Der Operator A besitzt also keine Eigenwerte.*

(ii) $\varphi_x(\lambda) := \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}(P_\lambda f)(\boldsymbol{x})$ *ist für $\lambda \neq \lambda_r$ stetig in λ, und es gilt für $k < 2m$*

$$\varphi_x(\lambda) = \begin{cases} O\left(\dfrac{1}{|\lambda - \lambda_r|^{1 - k/2m}}\right) & \text{für} \quad \lambda \downarrow \lambda_r \\ O(1) & \text{für} \quad \lambda \uparrow \lambda_r\,. \end{cases}$$

Für $k = 2m$ besitzt $\varphi_x(\lambda)$ für jedes feste $\boldsymbol{x} \in \Omega$ an den Stellen $\lambda = \lambda_r$ endliche Sprünge. Für $k > 2m$ ist $\varphi_x(\lambda)$ stetig für $\lambda \in \mathbb{R}$.

3. Diskussion der Lösung

Mit (ii) folgt aus (10)

$$u(\boldsymbol{x}, t) = \int_0^\infty g(\lambda, t)\, \varphi_x(\lambda)\, \mathrm{d}\lambda\,. \tag{17}$$

Nach (11) ist $g(\lambda, t)$ in jedem Intervall, das ω^2 enthält, für $t \to \infty$ unbeschränkt. Resonanzen treten auf, wenn $\varphi_x(\lambda)$ in $\lambda = \omega^2$ unstetig ist. Durch genauere Abschätzung folgt

Satz: *Es sei $u(\boldsymbol{x}, t)$ die Lösung von (7)–(9). Gilt entweder $k > 2m$ oder $k \leqq 2m$ und $\omega^2 \neq \lambda_r$, $r = 1, 2, \ldots$, so genügt $u(\boldsymbol{x}, t)$ dem Prinzip der Grenzamplitude (6). Im Fall $k \leqq 2m$ und $\omega^2 = \lambda_j$ gilt*

$$u(\boldsymbol{x}, t) = \sum_{\nu=0}^{[m-(k+1)/2]} g_\nu(\boldsymbol{x})\, t^{1 - \frac{k+2\nu}{2m}}\, \mathrm{e}^{-i\omega t} + g_{m-k/2}(\boldsymbol{x}) \ln t\, \mathrm{e}^{-i\omega t} + w(\boldsymbol{x})\, \mathrm{e}^{-i\omega t} + o(1) \quad \textit{für} \quad t \to \infty \tag{18}$$

mit

$$g_\nu(\boldsymbol{x}) := \begin{cases} d_\nu \sum\limits_{s=1}^{s(j)} \int\limits_{\mathbb{R}^k} f_{js}(x')\, |x - x'|^{2\nu}\, \mathrm{d}x'\, v_{js}(y) & \textit{für} \quad \nu \in \mathbb{N} \\ 0 & \textit{für} \quad \nu \notin \mathbb{N} \end{cases} \tag{19}$$

($d_\nu \in \mathbb{R}$) und geeignetem $w \in C^{2m}(\bar{\Omega})$.

Daraus ergeben sich für das Verhalten der Lösung $u(x, t)$ für $t \to \infty$ die folgenden Möglichkeiten (PGA := Prinzip der Grenzamplitude):

$k = 1$: Resonanzen der Ordnung $t^{1-1/2m}, t^{1-3/2m}, \dots, t^{1/2m}$ oder PGA.
$k = 2$: Resonanzen der Ordnung $t^{1-1/m}, t^{1-2/m}, \dots, t^{1/m}$, $\ln t$ oder PGA.
$\vdots$
$k = 2m$: Resonanz der Ordnung $\ln t$ oder PGA.
$k \geqq 2m + 1$: PGA.

Neben den bereits bei der Lösung der Wellengleichung ($m = 1$) auftretenden Resonanzordnungen $t^{1/2}$ und $\ln t$ treten weitere Ordnungen t^α mit $0 < \alpha < 1$ auf. Außerdem erhöht sich gegenüber dem Fall $m = 1$ die Anzahl der unbeschränkten Dimensionen k, für die Resonanzen auftreten können.

Wie bereits vermerkt, besitzt der Operator A keine Eigenwerte. Es läßt sich jedoch zeigen, daß die oben definierten $g_\nu(x)$ verallgemeinerte Eigenfunktionen des Dirichletschen Problems für den Operator $[(-\Delta_x)^m + (-\Delta_y)^m]$ zum Eigenwert ω^2 sind. Demnach besteht hier ein gewisser Zusammenhang zwischen Resonanzen und Eigenfunktionen („stehenden Wellen").

Bemerkung: Dieser Vortrag enthält eine Zusammenfassung der Ergebnisse der Dissertation des Autors. Für Details s. [1].

Literatur

1 Lesky, P., Resonanzphänomene bei partiellen Differentialgleichungen höherer Ordnung, Dissertation an der Universität Stuttgart 1987.
2 Ramm, A. G.; Werner, P., On the limit amplitude principle for a layer, J. Reine Angew. Math. **360** (1985), 19–46.
3 Werner, P., Resonance phenomena in cylindrical waveguides, J. Math. Anal. Appl. **121** (1987), 173–214.

Anschrift: Dr. Peter Lesky, Mathematisches Institut A, Universität Stuttgart, Pfaffenwaldring 57, D-7000 Stuttgart 80, BRD

ZAMM · Z. angew. Math. Mech. 68 (1988) 5, T 465 – T 467

Mausbach, P.

Teilchentrajektorien mit fraktalen Dimensionen $d_f > 2$

Einführung

Das Konzept der fraktalen Dimension hat sich bei der Klassifizierung der Morphologie von statistischen Phänomenen mit selbstähnlichem Charakter für große Skalierungsbereiche bewährt. Ein Beispiel hierfür liefert die Analyse der Trajektorienlänge L von Brownschen Teilchen in einem Fluid. Bei Messungen von L erwarten wir, daß sich diese mittels einer Maßeinheit ε entsprechend

$$L(\varepsilon) = C\varepsilon^{-\alpha} \tag{1}$$

skaliert. Der *Richardson-Koeffizient* α ist eine positive endliche Zahl und bildet die Differenz von *fraktaler* (d_f) — und *topologischer* (d_t) *Dimension*: $\alpha = d_f - d_t$. Für Teilchenbahnen gilt $d_t = 1$ und somit für die fraktale Dimension $d_f = 1 + \alpha$. d_f bestimmt sich für ein Ensemble von N Fluidteilchen in einem Zeitintervall $[0, T]$ aus der Steigung von $L(\varepsilon)$ in doppeltlogarithmischer Auftragung

$$1 - d_f = \frac{\mathrm{d} \log [L(\varepsilon)]}{\mathrm{d} \log \varepsilon}. \tag{2}$$

Erste Analysen solcher Teilchenbahnen wurden von Powles und Quirke [1] durchgeführt. Statt der für Brownsche Systeme erwarteten fraktalen Dimension $d_f = 2$ [2] ergab sich für ein System bestehend aus 108 Lennard-Jones (LJ) Teilchen bei einer reduzierten Dichte und Temperatur von $\varrho^* = 0.63$ und $T^* = 0.93$ die fraktale Dimension $d_f = 1.65$. Auch spätere Rechnungen von Powles [3] zeigten diese — für LJ-Systeme typische — langsame Annäherung an den Wert $d_f = 2$. Dieser Sachverhalt löste eine intensive Diskussion aus [4]–[7] .Schließlich konnte Toxvaerd [8] diese Diskrepanz mit Hilfe der verallgemeinerten Langevin-Gleichung klären. Seine Ergebnisse zeigen, daß für Zeitbereiche, in denen die stochastischen Kräfte unkorreliert sind, die Markow-Trajektorien ein $d_f = 2$ erreichen. $d_f < 2$ ist demnach eine Konsequenz der dynamischen Natur von klassischen mechanischen Trajektorien: durch Langzeit-Gedächtniseffekte ist ihr Charakter nicht hinreichend stochastisch. In einer späteren Arbeit konnte Toxvaerd [9] eine exakte Korrektur für d_f bei endlichen Beobachtungszeiten angeben.

In der vorliegenden Untersuchung zeigen wir nun, daß für spezielle Trajektorien mit besserem Raumfüllungsvermögen auf Grund stärkerer Rückstreueffekte auch $d_f > 2$ zu erzielen ist. Auf ein Beispiel (das *wind tree-Modell*