HERMANN HÄHL

VIERDIMENSIONALE REELLE DIVISIONSALGEBREN MIT DREIDIMENSIONALER AUTOMORPHISMEN-GRUPPE

1. ERGEBNISSE

In der vorliegenden Arbeit werden alle vierdimensionalen reellen Divisionsalgebren klassifiziert, die ähnlich wie der Körper der Quaternionen eine dreidimensionale Automorphismengruppe besitzen.

Unter einer vierdimensionalen reellen Divisionsalgebra D sei dabei eine nicht notwendig assoziative Divisionsalgebra der Dimension 4 über dem Körper R der reellen Zahlen verstanden, die ein Einselement 1 besitzt. Dessen zu R isomorphes lineares Erzeugnis $\langle 1 \rangle$ ist gleich dem Zentrum von D, da es abgesehen vom Körper C der komplexen Zahlen selbst keine Divisionsalgebren endlicher Dimension über C gibt (vgl. etwa [10, Satz 1.4]). Gelegentlich sehen wir von der linearen Struktur über dem Grundkörper ab und sprechen dann von D als einem Divisionsring. Jeder Automorphismus von D als Divisionsring ist gleichwohl linear über R, also ein Algebra-Automorphismus im eigentlichen Sinn: er bildet nämlich das Zentrum $\langle 1 \rangle$ auf sich ab, und zwar identisch, da der Körper R keine nichtidentischen Automorphismen besitzt.

Mit der natürlichen Topologie eines lokalkompakten topologischen Vektorraums über R läßt sich D im allgemeineren Rahmen der lokalkompakten zusammenhängenden Quasikörper betrachten, deren Automorphismengruppe in [4, §2] studiert wurde. Jeder Automorphismus von D ist dann insbesondere stetig. Satz 2.6 von [4] besagt, daß die als (selbstverständlich abgeschlossene) Untergruppe von $GL(4, \mathsf{R})$ aufgefaßte Automorphismengruppe $\operatorname{Aut} D$ von D kompakt ist und daß infolgedessen ihre Zusammenhangskomponente $\operatorname{Aut}^1 D$ bezüglich einer geeigneten Basis und zugehöriger euklidischer Norm eine Untergruppe der Gruppe $SO(3)$ aller eigentlichen die 1 festlassenden Rotationen von $\mathsf{R}^4 = D$ wird. Die Automorphismengruppe ist also insbesondere höchstens dreidimensional; es liegt nahe, den Fall größtmöglicher Dimension näher zu untersuchen. Er läßt sich vollständig überblicken:

SATZ 1. *Die vierdimensionalen reellen Divisionsalgebren mit Einselement, die eine dreidimensionale Automorphismengruppe besitzen, sind bis auf Isomorphie genau die Algebren D_τ mit Einselement* 1, *Basis* $\{1, i, j, k\}$ *und*

Geometriae Dedicata **4** (1975) 323–331. *All Rights Reserved*

Multiplikationstabelle

$$i^2 = j^2 = k^2 = -\tau; \qquad ij = -ji = k;$$
$$ki = -ik = j; \qquad jk = -kj = i,$$

wobei $0 < \tau \in \mathsf{R}$.

Dieselbe Multiplikationstabelle läßt sich über einem beliebigen kommutativen Körper F statt R als Grundkörper betrachten. Wir werden sehen, daß dabei genau dann eine Divisionsalgebra entsteht, wenn F Stufe $\geqslant 4$ hat (d.h. wenn die Summe der Quadrate von vier nicht sämtlich verschwindenden Elementen $x_\nu \in F$ stets von 0 verschieden ist), wobei τ noch so gewählt sein muß, daß dann auch stets $x_1^2 + \tau(x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) \neq 0$ ist. Solche $\tau \in F$ mögen *positiv* heißen. Für $\tau = 1$ erhält man den Quaternionenkörper $\mathsf{H}(F)$ über F. Die Algebren dieses Typs sind wohlbekannt; bemerkenswert ist zum Beispiel, daß es sich über einem reell abgeschlossenen Körper F genau um die vierdimensionalen flexiblen Divisionsalgebren mit Eins handelt ([7, Satz 29]). Zur Stellung dieser Algebren im Rahmen der allgemeinen Theorie vergleiche man auch [12, S. 139].

Im Zusammenhang mit geometrischen Fragen klassifiziert man Divisionsalgebren üblicherweise mit Hilfe des folgenden Begriffs: Zwei Divisionsalgebren D und D' heißen *isotop*, wenn es Isomorphismen P, B, C der additiven Gruppe von D auf die von D' gibt derart, daß $C(mx) = P(m) \cdot B(x)$ gilt für alle $m, x \in D$. Genau dann koordinatisieren D und D' isomorphe affine Ebenen ([6, Theorem 3.11]). Das Tripel (P, B, C) werde als *Isotopismus* bezeichnet.

Für den Fall des Grundkörpers R läßt sich nun mit Hilfsmitteln der topologischen Geometrie sehr bequem zeigen, daß die Algebren D_τ für verschiedene τ paarweise nichtisotop sind; man nützt dabei aus, daß man mit der dreidimensionalen Automorphismengruppe schon die Zusammenhangskomponente der Autotopismengruppe von D_τ im Griff hat (siehe [5, 4.2]). Da diese Methoden in [5] an anderen Algebren ausreichend demonstriert sind, wählen wir hier zur Lösung des Isotopieproblems einen rein algebraischen Ansatz, der den Vorzug hat, auch für die anderen genannten Körper zum Ziel zu führen. Als Ergebnis erhält man

SATZ 2. *Sei F ein mindestens vierstufiger kommutativer Körper. Dann sind die über F definierten Divisionsalgebren D_τ und D_σ (τ, σ positiv in F) genau dann isotop, wenn ein Körperautomorphismus von F existiert, der τ in σ überführt. Sie sind dann als Divisionsringe isomorph.*

Aus dem Beweis fällt noch die vollständige Bestimmung der Autotopismengruppe von D_τ mit ab. D_τ werde hierzu als Vektorraum über F anhand der Basis $\{1, i, j, k\}$ mit F^4 identifiziert und mit der positiv definiten quadratischen Form

$$N : D_\tau \longrightarrow F :$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_1 \cdot 1 + x_2 i + x_3 j + x_4 k \mapsto N(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$$

versehen. Mit Automorphismen sind wieder die Automorphismen von D_τ als Divisionsring gemeint:

KOROLLAR (Voraussetzungen wie in Satz 2). *Die Automorphismengruppe* $\mathrm{Aut}(D_\tau)$ *von* D_τ *ist semidirektes Produkt ihres Normalteilers*

$$SO(3, F) = \{\varphi \in SO(4, F) \mid \varphi(1) = 1\}$$

mit der Gruppe Ω *der Automorphismen der Gestalt*

$$D_\tau \to D_\tau : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \alpha(x_1) \\ \alpha(x_2) \\ \alpha(x_3) \\ \alpha(x_4) \end{pmatrix},$$

wo α *ein Automorphismus des Grundkörpers* F *mit* $\alpha(\tau) = \tau$ *ist. Für* $\tau \neq 1$ *sind die Autotopismen von* D_τ *genau die Tripel* (P, B, C) *der Form*

$$P : D_\tau \to D_\tau : x \mapsto r \cdot \psi(x)$$

$$B : D_\tau \to D_\tau : x \mapsto s \cdot \psi(x)$$

$$C : D_\tau \to D_\tau : x \mapsto rs \cdot \psi(x),$$

wo $0 \neq r, s \in F$ *und* $\psi \in \mathrm{Aut}(D_\tau)$. *Im Fall des Körpers* D_1 *erhält man bekanntlich alle Autotopismen, indem man in dieser Darstellung* r *und* s *ganz* $D_1 \backslash \{0\}$ *durchlaufen läßt.*

2. Beweis von Satz 1

Sei D eine vierdimensionale reelle Divisionsalgebra mit Einselement 1 und dreidimensionaler Automorphismengruppe. Entsprechend dem in der Einleitung Gesagten identifizieren wir D als Vektorraum so mit $\mathbf{R}^4$, daß

$$\mathrm{Aut}^1 D = SO(3) = \{\varphi \in SO(4) \mid \varphi(1) = 1\}.$$

Sei im folgenden

$$V = \langle 1 \rangle^{\perp}$$

der zu 1 orthogonale 3-dimensionale Unterraum von $D = \mathsf{R}^4$ und $\{x, y, z\}$ eine Orthogonalbasis von V mit

$$\|x\| = \|y\| = \|z\|.$$

In Anlehnung an die Quaternionen werden die Elemente von $\langle 1 \rangle$ *reell,* die von V *rein* genannt.

(2.1). *Es ist $xy+yx=0$, $xy \in V$ und xy ist orthogonal zu x und y.* In der Tat: Bezeichnet $\varphi \in SO(3)$ den durch Drehung von V um die Achse z mit Winkel $\pi/2$, also durch $\varphi(z)=z$, $\varphi(x)=y$, $\varphi(y)=-x$ bestimmten Automorphismus von D, so hat man

$$\varphi(xy + yx) = -(xy + yx);$$

und da φ die reellen Anteile festläßt, muß zunächst der reelle Anteil von $xy+yx$ verschwinden, also $xy+yx \in V$ sein. In V läßt nun ferner φ nur einen einzigen eindimensionalen Teilraum invariant (nämlich den von z erzeugten) und diesen sogar punktweise fest; folglich ist sogar $xy+yx=0$.

Der durch Drehung von V an der Winkelhalbierenden von x und y um den Winkel π, also durch $x \mapsto y$; $y \mapsto x$; $z \mapsto -z$ bestimmte Automorphismus ψ von D erfüllt daher

$$\psi(xy) = yx = -xy$$

und wieder wegen Erhaltung der reellen Anteile muß folglich $xy \in V$ sein. Aus $\varphi(xy) = -yx = xy$ und der Fixkonfiguration von φ in V schließt man dann, daß $xy \in \langle z \rangle$, also xy orthogonal zu x und y ist.

(2.2). *D ist quadratisch, also monoassoziativ.*

Zum Beweis betrachte man die für gewisse reelle r, s, t, u bestehende Beziehung

$$x^2 = r + sx + ty + uz.$$

Unter den sämtlichen Rotationen der y-z-Ebene (1 und x werden dabei festgehalten), die ja nach Voraussetzung Algebra-Isomorphismen sind, bleiben die linke Seite und die ersten beiden Terme der rechten Seite fest. Dies ist nur möglich, wenn $t=u=0$. Die damit für x gewonnene quadratische Beziehung mit reellen Koeffizienten wird dann von allen reinen Elementen der Norm 1 erfüllt, da $\mathrm{Aut}^1 D$ auf diesen Elementen transitiv ist. Eine solche Beziehung besteht dann aber für alle Elemente von D, wie man sofort nachrechnet.

(2.3). Aus der Monoassoziativität folgt nun, daß die Elemente von D mit reellem nichtpositivem Quadrat einen dreidimensionalen Untervektorraum bilden ([3, Lemma 1]; [8, S. 102]; [11, 13.4.5]). Er ist invariant unter den Algebraautomorphismen von D, und da es in $D = \mathsf{R}^4$ nur einen einzigen unter $\mathrm{Aut}^1 D = SO(3)$ invarianten dreidimensionalen Teilraum gibt, nämlich V, ist also

$$V = \{d \in D \mid d^2 \text{ reell}, d^2 \leqslant 0\}.$$

Insbesondere ist wegen (2.1)

$$(xy)^2 = -1/\tau$$

für ein positives reelles τ. Da die Automorphismengruppe $SO(3)$ transitiv auf den Richtungen von V ist und reelle Anteile erhält, haben ferner die normgleichen Elemente x und y von V gleiches negatives Quadrat und wir können o.B.d.A. annehmen, daß

$$x^2 = y^2 = -1.$$

Aus demselben Grund ist dann, für

$$i = \sqrt{\tau} \cdot x; \qquad j = \sqrt{\tau} \cdot y; \qquad k = \tau \cdot (xy)$$

$\|i\| = \|j\| = \|k\|$, da

$$i^2 = j^2 = k^2 = -\tau.$$

Nach (2.1) ist schließlich $ij = -ji = \tau \cdot (xy) = k$; und da die zyklische Permutation des Orthonormalsystems $\{i, j, k\}$ durch Elemente von $SO(3)$, also Automorphismen der Algebra, realisiert werden kann, hat man für die Basis $1, i, j, k$ die Multiplikationstabelle der Algebra D_τ. Jede vierdimensionale reelle Divisionsalgebra mit dreidimensionaler Automorphismengruppe ist also zu einer der Algebren D_τ isomorph.

(2.4). Wir stellen nun fest, wann umgekehrt D_τ eine Divisionsalgebra ist und verwenden dabei gleich einen beliebigen kommutativen Körper F als Grundkörper. Die Determinanten der Links- bzw. Rechtsmultiplikation mit $x = x_1 \cdot 1 + x_2 i + x_3 j + x_4 k$ $(x_\nu \in F)$, d.h. die Determinanten der linearen Abbildungen

$$\lambda_x : D_\tau \to D_\tau : z \mapsto x \cdot z$$

$$\varrho_x : D_\tau \to D_\tau : z \mapsto z \cdot x$$

ergeben sich zu

$$\det \lambda_x = \det \varrho_x = N(x) \cdot N_\tau(x), \tag{1}$$

wo

$$N_\tau(x) = x_1^2 + \tau\,(x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)$$

und

$$N(x) = N_1(x).$$

D_τ ist genau dann eine Divisionsalgebra, wenn für alle $x \neq 0$ die Abbildungen λ_x und ϱ_x bijektiv, also $N(x)$ und $N_\tau(x)$ von 0 verschieden sind. Dies besagt gerade, daß F mindestens Stufe 4 hat und τ positiv in F ist.

(2.5). Daß schließlich die Gruppe $SO(3, F)$ der bezüglich der quadratischen Form N orthogonalen, 1 festlassenden Vektorraumautomorphismen mit Determinante 1 eine Gruppe von Algebra-Automorphismen von D_τ ist, läßt sich unmittelbar nachrechnen oder per Analogie mit dem Quaternionenkörper $D_1 = \mathsf{H}(F)$ nachweisen. Im Fall $F = \mathsf{R}$ hat also jede der Algebren D_τ dreidimensionale Automorphismengruppe.

3. Beweis von Satz 2

Wegen $i^2 j = -\tau j$; $i(ij) = ik = -j$ ist zunächst D_τ genau dann assoziativ, d.h. ein Körper, wenn $\tau = 1$. Da Isotopie nach [9, 2.2] die Assoziativität erhält, können wir aus der weiteren Isotopieklassifikation diesen Fall ausschließen.

Für einen Automorphismus α von F ist

$$\Phi_\alpha : D_\tau \to D_{\alpha(\tau)} : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \alpha(x_1) \\ \alpha(x_2) \\ \alpha(x_3) \\ \alpha(x_4) \end{pmatrix} \tag{2}$$

ein Isomorphismus von Divisionsringen und $(\Phi_\alpha, \Phi_\alpha, \Phi_\alpha)$ ein Isotopismus. Wir bemerken, daß Φ_α semilinear über F mit Begleitautomorphismus α ist.

Seien nun umgekehrt von 1 verschiedene positive Elemente τ, σ von F und eine Isotopie (P, B, C) von D_τ auf D_σ gegeben. Der einzige Unterkörper von D_τ, der das Zentrum $F \cdot 1$ enthält und invariant unter der Automorphismengruppe $SO(3)$ von D_τ ist, ist $F \cdot 1$ selbst; insbesondere sind alle Nuklei von D_τ gleich $F \cdot 1$. Nach [6, Lemma 8.13] sind infolgedessen P, B, C semilinear über F, und zwar mit demselben Begleitautomorphismus α. Mit Φ_α aus (2) ist dann $(P \circ \Phi_\alpha^{-1}, B \circ \Phi_\alpha^{-1}, C \circ \Phi_\alpha^{-1})$ ein über F linearer Isotopismus von $D_{\alpha(\tau)}$ auf D_σ. Zum Beweis von Satz 2 genügt es daher, den Fall zu betrachten, wo P, B, C linear über F sind und für diesen Fall $\tau = \sigma$ nachzuweisen.

(3.1). Die Darstellung der Elemente von D_τ und D_σ als Koordinatentupel bezüglich der jeweiligen Basis $\{1, i, j, k\}$ gestattet es, P, B und C als lineare Automorphismen von F^4 aufzufassen. Wegen

$$C(z \underset{\tau}{;} x) = P(z) \underset{\sigma}{;} B(x) \tag{3}$$

folgt aus (1) für alle $x \in D_\tau$

$$\begin{aligned} N(x) \cdot N_\tau(x) &= \det(z \mapsto z \underset{\tau}{;} x) \\ &= \det(z \mapsto C^{-1}(P(z) \underset{\sigma}{;} B(x))) \\ &= \det C^{-1} \cdot \det(z \mapsto P(z) \mapsto P(z) \underset{\sigma}{;} B(x)) \\ &= \det C^{-1} \cdot \det P \cdot \det(y \mapsto y \underset{\sigma}{;} B(x)) \\ &= \det C^{-1} \cdot \det P \cdot N(Bx) \cdot N_\sigma(Bx). \end{aligned} \tag{4}$$

Mit N_σ ist auch $x \mapsto N_\sigma(Bx)$ eine quadratische Form. Um Rückschlüsse über B zu erhalten, wollen wir aus (4) folgern, daß diese bis auf eine Konstante mit N oder N_τ übereinstimmt. Da der Polynomring $F[x_1, x_2, x_3, x_4]$ eindeutige Primzerlegung gestattet ([13, §26]) und da die quadratischen Formen als Elemente dieses Rings betrachtet werden können, ist hierzu nur zu bedenken, daß $x_1^2 + \tau(x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)$ dort prim ist: zwei nichttriviale Faktoren müßten Grad 1 haben (Betrachtung der homogenen Teile) und hätten dann jeweils ganze Hyperebenen als Nullstellengebilde, während N_τ nur den Ursprung als Nullstelle hat.

Es liegt also einer der beiden folgenden Fälle vor:

$$\text{FALL 1.} \quad N(Bx) = c_1 \cdot N(x) \quad \text{und} \quad N_\sigma(Bx) = c_2 \cdot N_\tau(x) \tag{5}$$

$$\text{FALL 2.} \quad N(Bx) = c_1 \cdot N_\tau(x) \quad \text{und} \quad N_\sigma(Bx) = c_2 \cdot N(x) \tag{6}$$

für alle $x \in D_\tau$ und gewisse Konstanten $c_1, c_2 \in F$. Nun gilt

(3.2). *Ein dreidimensionaler Untervektorraum W von D_σ mit $N_\sigma(y) = c \cdot N(y)$ für alle $y \in W$ (c konstant) ist identisch mit dem linearen Erzeugnis V von $\{i, j, k\}$.*

Für ein Element y aus dem mindestens zweidimensionalen Unterraum $W \cap V$ gilt nämlich $c \cdot N(y) = N_\sigma(y) = \sigma \cdot N(y)$, woraus $c = \sigma$ folgt. Für $y \in W$ hat man also $\sigma y_1^2 + \sigma(y_2^2 + y_3^2 + y_4^2) = y_1^2 + \sigma(y_2^2 + y_3^2 + y_4^2)$ und wegen $\sigma \neq 1$ folgt $y_1 = 0$, also $W = V$.

(3.3). Für alle $y \in V$ ist nun im Fall 1 $N_\sigma(By) = c_2 \cdot N_\tau(y) = c_2 \tau \cdot N(y) = c_2\tau / c_1 \cdot N(By)$ und im Fall 2 entsprechend $N_\sigma(By) = c_2/(c_1\tau) \cdot N(By)$, woraus mit (3.2) in beiden Fällen $B(V)=V$ folgt. Im Fall 1 sind mit x und y auch Bx und By orthogonal bezüglich der quadratischen Form N; im Fall 2 folgt aus der Orthogonalität von x und y bezüglich N_τ die Orthogonalität von Bx und By bezüglich N. Infolgedessen ist in beiden Fällen $B(1)$ orthogonal zu V, also in $F\cdot 1$. Da gleichzeitige Streckung von B und C mit demselben Element aus F wieder zu einem Isotopismus führt, wie man an (3) abliest, kann o.B.d.A. $B(1)=1$ angenommen werden. Völlig parallele Argumente für P statt B (wobei statt der Determinante der Rechtsmultiplikation die der Linksmultiplikation verwendet wird) zeigen, daß modulo einer Streckung auch $P(1)=1$ zu erreichen ist. Beziehung (3) einmal mit $z=1$, zum andern mit $x=1$ zeigt, daß dann $C=P=B$ und B ein Algebra-Isomorphismus von D_τ auf D_σ ist. Wegen $B(1)=1$ ist dann ferner in (5) bzw. (6) in beiden Fällen $c_1=1=c_2$.

(3.4). Wir zeigen nun, daß der Fall 2 für $1\neq\sigma,\tau$ ausgeschlossen ist. Wegen $B(V)=V$ wäre nach (6) für alle $y\in V$

$$N(y) = N_\sigma(By) = \sigma\cdot N(By) = \sigma\cdot N_\tau(y) = \sigma\tau\cdot N(y);$$

also $\sigma=1/\tau$ und B würde in V Orthogonalität erhalten. Durch Vorschalten eines geeigneten Automorphismus von D_τ aus $SO(3,F)$ würde aus B ein Isomorphismus B' von D_τ auf D_σ mit Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \pm\gamma & & \\ & & \pm\gamma & \\ & & & \pm\gamma \end{pmatrix}$$

entstehen; entsprechend (6) wäre $N(B'x)=N_\tau(x)$ und also $\gamma^2=\tau$. Insbesondere ergäbe sich $-\tau=B'(i\underset{\tau}{\cdot}i)=B'i\underset{\sigma}{\cdot}B'i=-\sigma\gamma^2=-\sigma\tau$ und daraus $\sigma=\tau=1$ im Widerspruch zu den Voraussetzungen.

(3.5). Im verbleibenden Fall 1 folgt nun aus (5) für alle $y\in V$

$$\sigma\cdot N(By) = N_\sigma(By) = N_\tau(y) = \tau\cdot N(y) = \tau\cdot N(By)$$

und also $\sigma=\tau$, wie gezeigt werden sollte. Ferner ist B orthogonal. Infolgedessen muß der Automorphismus B in der nach (2.5) bereits bekannten Automorphismengruppe $SO(3,F)$ der 1 festlassenden eigentlichen Drehungen liegen: sonst wäre nämlich auch die typische uneigentliche Drehung $1\mapsto 1$; $i\mapsto -i$; $j\mapsto -j$; $k\mapsto -k$ ein Automorphismus von D_τ, und wegen $ij=k$ ist das nicht der Fall. Insgesamt zeigt unser Argument im Spezialfall $\sigma=\tau\neq 1$, daß sich ein beliebiger Autotopismus durch Streckungen aus dem Grundkörper und mit Automorphismen der Gestalt (2) zu einem Automorphismus aus $SO(3)$ modifizieren läßt, womit auch das Korollar für $\tau \neq 1$ bewiesen ist. Im Fall des Körpers D_1 ist die Aussage des Korollars bekannt (vgl. [2, Satz 9 und 12]); sie läßt sich mit den hier verwendeten Methoden herleiten, indem man benützt, daß dann jeder Autotopismus semilinear sogar über ganz D_1 ist.

BIBLIOGRAPHIE

1. Albert, A. A., 'Finite Division Algebras and Finite Planes', *Proc. Symp. Appl. Math.* **10** (1958), 53–70.
2. André, J., 'Projektive Ebenen über Fastkörpern', *Math. Z.* **62** (1955), 137–160.
3. Dickson, L. E., 'Linear Algebras with Associativity not Assumed', *Duke Math. J.* **1** (1935), 113–125.
4. Hähl, H., 'Automorphismengruppen von lokalkompakten zusammenhängenden Quasikörpern und Translationsebenen', *Geometriae Dedicata* **4** (1975) 305–321.
5. Hähl, H., 'Geometrisch homogene vierdimensionale reelle Divisionsalgebren', *Geometriae Dedicata* **4** (1975) 333–361.
6. Hughes, D. R. and Piper, F. C., *Projective planes*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1973.
7. Lex, W., 'Zur Theorie der Divisionsalgebren', *Mitteilungen Math. Sem. Gießen*, Nr. 103 (1973).
8. Osborn, J. M., 'Quadratic Division Algebras', *Trans. Am. Math. Soc.* **105** (1962), 202–221.
9. Pickert, G., *Projektive Ebenen*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1955.
10. Plaumann, P. und Strambach, K., 'Zur Existenz von Quasikörpern', erscheint demnächst in *J. Algebra*.
11. Salzmann, H. und Löwen, R., *Zahlbereiche Teil I*, Vorlesung Tübingen, Sommersemester 1971.
12. Schafer, R. D., *An Introduction to Nonassociative Algebras*, Academic Press, New York, London, 1966.
13. Van der Waerden, B. L., *Algebra I*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 6. Auflage, 1964.

Anschrift des Verfassers

Hermann Hähl,
Mathematisches Institut der Universität Tübingen,
74 Tübingen 1,
Auf der Morgenstelle 10,
Germany

(Eingegangen am 7.11.1974)