

Zur Klassifikation von 8- und 16-dimensionalen lokalkompakten Translationsebenen nach ihren Kollineationsgruppen

Hermann Hahl

Mathematisches Institut der Universität Tübingen, Auf der Morgenstelle 10, D-7400 Tübingen 1,
Bundesrepublik Deutschland

§1. Überblick

1.1. Problemstellung. Eine projektive Ebene heißt topologisch, wenn der Punkt-
raum \mathbb{P} und der Geradenraum \mathcal{L} so mit Topologien versehen sind, daß Schneiden
und Verbinden stetige Operationen werden. In einer Theorie solcher Ebenen wird
man konkrete und umfassende Resultate nur unter topologischen Zusatzvoraus-
setzungen erwarten können. Ähnlich wie in der Theorie der topologischen
Gruppen hat sich die Forderung, daß die betrachteten Topologien lokalkompakt
und zusammenhängend sein sollen, als guter Ausgangspunkt erwiesen; sie rückt
die betrachteten Ebenen topologisch in die Nähe der klassischen Ebenen über den
Zahlbereichen \mathbb{R} , \mathbb{C} , \mathbb{H} (Quaternionen) und \mathbb{O} (Oktaven).

Wie in der Theorie der projektiven Ebenen allgemein bilden auch unter den
Ebenen dieser Art die *Translationsebenen* eine besonders wichtige Klasse. Sie sind
dadurch definiert, daß eine Gerade L_∞ existiert derart, daß die Gruppe der
Kollineationen, die genau die Punkte auf L_∞ festlassen, auf den übrigen Punkten
transitiv operiert. Man bezeichnet diese Gruppe als *Translationsgruppe* zur
Translationsachse L_∞ . Der Punkttraum einer lokalkompakten zusammenhängen-
den Translationsebene ist eine Mannigfaltigkeit, deren Dimension m aufgrund des
Satzes von Adams über die Hopf-Invariante nur die Werte $m = 2, 4, 8, 16$ annehmen
kann; die projektiven Geraden sind (als Punktmengen aufgefaßt) homöomorph zur
Sphäre der Dimension $n = m/2$ (s. [25, §7, insbesondere 7.23 ff.], [12, 3.1]). In der
Folge wird m als die Dimension der Ebene bezeichnet.

Auch die Klasse dieser Translationsebenen ist noch von chaotischer Vielfalt.
Für eine systematische Untersuchung wird man daher zusätzliche Kriterien
heranziehen, die die Nähe zu den klassischen Ebenen messen. Da Geometrie
insbesondere im Studium der Automorphismen von Inzidenzstrukturen besteht, ist
die Größe der Kollineationsgruppe ein wichtiges Kriterium. Im hier betrachteten
Kontext ist dafür die topologische Dimension der Gruppe der stetigen Kollineati-
onen ein geeignetes Maß; dabei wird naheliegenderweise die kompakt-offene
Topologie zugrundegelegt. Das damit abgesteckte Programm kann etwa lauten:
Man bestimme alle lokalkompakten Translationsebenen der Dimension m , bei

denen die Dimension der Gruppe der stetigen Kollineationen oberhalb einer gewissen Schranke liegt.

Bei 2-dimensionalen Ebenen ist die Antwort trivial, da die einzige 2-dimensionale lokalkompakte Translationsebene überhaupt die klassische Ebene über den reellen Zahlen ist ([25, 7.24]). Betten hat weiter in einer Reihe von Arbeiten (1972–1977) alle 4-dimensionalen lokalkompakten Translationsebenen bestimmt, deren Kollineationsgruppe mindestens 7-dimensional ist. Bei Ebenen höherer Dimensionen sind unter dem genannten Aspekt bisher nur spezielle Typen systematisch erforscht, nämlich die 8-dimensionalen lokalkompakten Ebenen vom Lenz-Typ V (Ebenen, die sich über vierdimensionalen reellen Divisionsalgebren koordinatisieren lassen, [13]). Nunmehr soll das aufgestellte Programm allgemein für 8- und 16-dimensionale lokalkompakte Translationsebenen in Angriff genommen werden. Die Resultate der vorliegenden Arbeit erlauben es, dieses Programm in eine Reihe von Einzelfällen aufzulösen, die dann in weiteren Arbeiten behandelt werden sollen.

1.2. Der Hauptsatz. Die Größe der Kollineationsgruppe läßt sich ablesen an der Zusammenhangskomponente Γ der Gruppe derjenigen stetigen Kollineationen, die die Translationsachse L_∞ invariant lassen. Nach [12, §4] hat man nun die Standgruppe von Γ auf zwei verschiedenen Punkten von L_∞ gut im Griff. Komplementär dazu benötigt man für die Abschätzung der Dimension von Γ Aussagen über die Dimensionen der Bahnen von Γ auf L_∞ . Das diesbezügliche Hauptergebnis der vorliegenden Arbeit ist der folgende

Hauptsatz. *Sei \mathcal{P} eine lokalkompakte Translationsebene der Dimension $2n$ mit $n=4$ oder $n=8$, und sei Γ die Zusammenhangskomponente der Gruppe der stetigen die Translationsachse L_∞ invariant lassenden Kollineationen. Hat dann jede Bahn von Γ in der n -Sphäre L_∞ Dimension n oder $n-1$, so ist \mathcal{P} isomorph zur klassischen Ebene über den Quaternionen bzw. den Oktaven.*

Angemerkt sei, daß eine analoge Aussage bei 4-dimensionalen Translationsebenen (also mit $n=2$) nicht gilt; gerade unter den nichtdesarguesschen 4-dimensionalen lokalkompakten Translationsebenen mit größtmöglicher Kollineationsgruppe finden sich solche, in denen Γ auf der 2-Sphäre L_∞ eine Kreislinie \mathfrak{S} als Bahn hat und transitiv auf den Komponenten von $L_\infty \setminus \mathfrak{S}$ operiert ([4, 5]).

Als konkretes Beispiel für die Anwendungsmöglichkeiten des Hauptsatzes wird das folgende Resultat bewiesen, das bei der Behandlung von achtdimensionalen kompakten topologischen projektiven Ebenen allgemein in [27] eine Rolle spielt:

1.3. Satz. *Die Gruppe der stetigen Kollineationen einer achtdimensionalen lokalkompakten Translationsebene, die nicht die klassische Quaternionenebene ist, hat Dimension höchstens 18.*

Die hierin angegebene Schranke ist scharf; [13] enthält Beispiele von Ebenen der genannten Art, deren Kollineationsgruppe Dimension 18 hat.

Über solche Abschätzungen hinaus sollen schließlich in der vorliegenden Arbeit als wichtigste Anwendung des Hauptsatzes Typeneinteilungen 8- und 16-dimensionaler lokalkompakter Translationsebenen mit großen Kollineationsgruppen hergeleitet werden, die der Ausgangspunkt für die angestrebte Klassifikation sind. Die Durchführung der Klassifikation auf der Basis dieser Typeneinteil-

lungen ist dann einer Reihe weiterer Arbeiten vorbehalten, in denen die einzelnen sich hier ergebenden Ebenentypen gesondert studiert werden.

Der Formulierung dieser Typeneinteilungen seien zunächst einige

1.4. Grundtatsachen und Konventionen vorausgeschickt (vgl. [12, §3]). Im folgenden sei \mathcal{P} stets eine lokalkompakte zusammenhängende Translationsebene mit (projektivem) Punktraum \mathbb{IP} und Geradenraum \mathcal{L} . Entfernt man die Punkte der Translationsachse L_∞ , so erhält man eine affine Ebene \mathcal{A} mit L_∞ als uneigentlicher Geraden und Punktmenge $\mathbb{A} = \mathbb{IP} \setminus L_\infty$. Sei \mathbb{G} die Gruppe der affinen (d.h. L_∞ invariant lassenden) Kollineationen und \mathbb{G}^c die Untergruppe der stetigen Kollineationen. Mit der kompakt-offenen Topologie bezüglich \mathbb{A} wird \mathbb{G}^c eine topologische Transformationsgruppe von \mathbb{A} , \mathbb{IP} und L_∞ ([12, 3.5]). Die Zusammenhangskomponente (der Identität) von \mathbb{G}^c wird mit Γ bezeichnet.

Die affine Punktmenge \mathbb{A} ist in natürlicher Weise ein topologischer Vektorraum gerader Dimension über dem Kern \mathbb{IK} eines koordinatisierenden lokalkompakten zusammenhängenden Quasikörpers; dabei ist \mathbb{IK} als topologischer Körper isomorph zu \mathbb{R} , \mathbb{C} oder \mathbb{IH} (vgl. [12, 3.1, 3.2, 2.4]). Die auf \mathbb{A} transitive Gruppe von Translationen zur Achse L_∞ besteht genau aus den Vektorraumtranslationen, und die Geraden durch den als *Ursprung* ausgezeichneten Nullvektor $o \in \mathbb{A}$ sind lineare Teilräume der halben Dimension. Durch die Ursprungsgeraden sind dann alle anderen Geraden bestimmt. \mathbb{G} , \mathbb{G}^c und Γ sind semidirekte Produkte der Translationsgruppe mit den Untergruppen \mathbb{G}_o , \mathbb{G}_o^c bzw. Γ_o der den Ursprung o festlassenden Kollineationen; insbesondere ist Γ_o die Zusammenhangskomponente von \mathbb{G}_o^c . Der Kern \mathbb{IK} läßt sich in der Kollineationsgruppe wiederfinden insofern, als der Normalteiler $\mathbb{G}_{[o, L_\infty]}$ derjenigen Kollineationen von \mathbb{G}_o , die alle Punkte von L_∞ (oder gleichbedeutend alle Ursprungsgeraden) festlassen, gerade aus den skalaren Streckungen des \mathbb{IK} -Vektorraums \mathbb{A} besteht. Folglich sind die Elemente von \mathbb{G}_o als Transformationen von \mathbb{A} semilinear über dem Kern \mathbb{IK} . Im Fall $\mathbb{IK} = \mathbb{R}$ sind also alle Kollineationen aus \mathbb{G}_o linear und insbesondere stetig; bei 16-dimensionalen lokalkompakten Translationsebenen ist dieser Fall stets gegeben ([10, Theorem 1]). Im allgemeinen sind die Kollineationen aus \mathbb{G}_o^c jedenfalls linear über dem zu \mathbb{R} isomorphen abgeschlossenen Unterkörper von \mathbb{IK} . Zur Vermeidung von Fallunterscheidungen wird im folgenden meist dieser Unterkörper als Grundkörper für die angegebenen linearen Strukturen gewählt. Man erhält so eine Identifikation von \mathbb{A} mit dem \mathbb{R} -Vektorraum \mathbb{R}^{2n} , die im folgenden stets zugrundegelegt sei. \mathbb{G}_o^c wird dann eine abgeschlossene Untergruppe der generellen linearen Gruppe $GL_{2n}(\mathbb{R})$ dieses Vektorraums. Wie schon eingangs erwähnt, gilt $n \in \{1, 2, 4, 8\}$ (vgl. [25, 7.12]).

Ist \mathcal{P} nicht die klassische Ebene $\mathcal{P}(\mathbb{IH})$ über dem Quaternionenkörper \mathbb{IH} selbst, so ist der Kern \mathbb{IK} isomorph zu \mathbb{R} oder \mathbb{C} ([10, Theorem 1]); die Gruppe der stetigen Automorphismen von \mathbb{IK} ist also diskret. Die Kollineationen aus der zusammenhängenden Gruppe Γ_o sind dann linear auch über \mathbb{IK} . Der Normalteiler

$$S\Gamma_o = \{\gamma \in \Gamma_o / \det_{\mathbb{K}} \gamma = 1\}$$

der Kollineationen aus Γ_o , die über \mathbb{IK} Determinante 1 haben, hat endlichen Schnitt mit der Gruppe $\mathbb{G}_{[o, L_\infty]}$ der skalaren Streckungen des \mathbb{IK} -Vektorraums \mathbb{A} , d.h. $S\Gamma_o$ wirkt fast effektiv auf L_∞ ; und Γ_o ist fastdirektes Produkt von $S\Gamma_o$ und der

Zusammenhangskomponente von $\mathbf{G}_{[o, L_\infty]}$, so daß die von Γ , Γ_o und $S\Gamma_o$ induzierten Gruppen von Homomorphismen von L_∞ gleich sind:

$$\Gamma|L_\infty = \Gamma_o|L_\infty = S\Gamma_o|L_\infty.$$

Nach [12, 3.8] ist $\Gamma_o|L_\infty$ (mit der kompakt-offenen Topologie bezüglich L_∞) Quotient von Γ_o und daher eine Liegruppe. Insbesondere ist die Einschränkungsbildung $S\Gamma_o \rightarrow S\Gamma_o|L_\infty$ eine (endlichblättrige) Überlagerung.

Im Fall der klassischen Ebene $\mathcal{P}(\mathbb{H})$ (mit $\mathbb{A} = \mathbb{H}^2$) erreicht man dasselbe durch die Setzung

$$S\Gamma_o = \text{SL}_2(\mathbb{H}).$$

Schließlich noch einige ständig verwendete

Bezeichnungen. Für eine Untergruppe Ω von \mathbf{G} , einen Punkt p und eine Gerade L sind

$$\Omega_p = \{\omega \in \Omega / \omega(p) = p\}, \quad \Omega_L = \{\omega \in \Omega / \omega(L) = L\}$$

die *Standgruppen* von Ω auf p bzw. L ,

$$\Omega_{[p, L]} = \bigcap_{x \in L} \bigcap_{M \in \mathcal{L}, p \in M} \Omega_{x, M}$$

die Gruppe der Kollineationen aus Ω mit *Zentrum* p und *Achse* L (die also alle Punkte von L fest und alle Geraden durch p invariant lassen) und

$$\Omega_{[L]} = \bigcap_{x \in L} \Omega_x$$

die Gruppe der *axialen* Kollineationen mit Achse L . Da jede axiale Kollineation ein Zentrum hat, ist

$$\Omega_{[L]} = \bigcup_{p \in \mathbb{P}} \Omega_{[p, L]}.$$

Die Bilder aller Punkte unter einer Kollineation aus $\mathbf{G}_{[p, L]}$ lassen sich ausgehend vom Bild eines einzigen nicht in $\{p\} \cup L$ gelegenen Punkts durch Schneiden und Verbinden konstruieren; folglich wirkt $\mathbf{G}_{[p, L]}$ frei auf $\mathbb{P} \setminus (\{p\} \cup L)$, ferner sind alle axialen Kollineationen stetig.

Für eine Untergruppe Ξ von \mathbf{G}^c bezeichne Ξ^1 die Zusammenhangskomponente von Ξ . Ist L eine unter Ξ invariante Gerade, so schreiben wir $\Xi|L$ für die (topologische) Gruppe $\{\xi|L / \xi \in \Xi\}$ der Homomorphismen $\xi|L$ von L (versehen mit der kompakt-offenen Topologie).

Die angekündigten Typeneinteilungen gehen aus von folgendem Ergebnis in [15], das auch technisch ständig benötigt werden wird:

1.5. Lemma über Achsenstandgruppen ([15, 2.1]). *Seien s und w zwei verschiedene Punkte aus L_∞ , und S und W die zugehörigen Ursprungsgeraden. Dann gilt:*

$\Gamma_{S, W}$ hat eine größte kompakte zusammenhängende Untergruppe C . Diese hat Kodimension höchstens 2, d.h. $\dim \Gamma_{S, W} \leq \dim C + 2$.

Auch für jede abgeschlossene Untergruppe Ξ von $S\Gamma_o$ hat $\Xi_{s, w} = \Xi_{S, W}|L$ eine größte kompakte zusammenhängende Untergruppe K ; für diese gilt $\dim \Xi_{s, w} \leq \dim K + 1$.

Die Standgruppe von $S\Gamma_o$ auf drei verschiedenen Punkten von L_∞ ist stets kompakt.

Die nun folgenden Typeneinteilungssätze besagen, daß bei großer Kollineationsgruppe insgesamt auch große kompakte Achsenstandgruppen vorgefunden werden, und machen Aussagen über deren Isomorphietyp und Wirkung:

1.6. Satz. *Sei \mathcal{P} eine achtdimensionale lokalkompakte Translationsebene mit $\dim \Gamma \geq 17$. Dann liegt eine der folgenden Situationen vor:*

- (i) \mathcal{P} ist die klassische Ebene über den Quaternionen.
- (ii) \mathcal{P} hat Lenz-Typ V.
- (iii) Γ_0 läßt genau zwei Ursprungsgeraden S und W invariant, und für die größte kompakte zusammenhängende Untergruppe K von $S\Gamma_{S,W}$ gilt $K|L_\infty \cong \text{SO}_4(\mathbb{R})$.
- (iv) Es existieren zwei verschiedene Ursprungsgeraden S und W , deren uneigentliche Punkte $s, w \in L_\infty$ den Bedingungen

$$\dim \Gamma(s) \leq 2, \\ w \in \Gamma(s) \text{ oder } \Gamma(s) = \{s\},$$

und $\dim \Gamma_s(w) \geq 1$

genügen und derart, daß bezüglich der größten kompakten zusammenhängenden Untergruppe K von $S\Gamma_{S,W}$ eine der beiden folgenden Alternativen zutrifft:

- (iv 1) $K|L_\infty \cong \text{SO}_3(\mathbb{R})$.
- (iv 2) K ist ein zweidimensionaler Torus, und der Kern von \mathcal{P} ist isomorph zu \mathbb{C} .

Wird sogar $\dim \Gamma \geq 18$ vorausgesetzt, so muß neben den Situationen (i) und (ii) nur noch Situation (iv 1) mit $\dim \Gamma(s) = 2 = \dim \Gamma_s(w)$ oder $\Gamma(s) = \{s\}$, $\Gamma(w) = L_\infty \setminus \{s\}$ in Betracht gezogen werden.

1.7. Satz. *Sei \mathcal{P} eine sechzehndimensionale lokalkompakte Translationsebene mit $\dim \Gamma \geq 38$. Dann ist entweder \mathcal{P} die klassische Ebene über den Oktaven; oder aber es existieren zwei verschiedene Ursprungsgeraden S und W mit uneigentlichen Punkten $s, w \in L_\infty$ so, daß bezüglich der größten kompakten zusammenhängenden Untergruppe K von $\Gamma_{S,W}$ eine der folgenden Alternativen zutrifft:*

- (i) $K|S = \text{Spin}_7(\mathbb{R})$, $K|W = \text{SO}_7(\mathbb{R})$.
- (ii) K ist lokal isomorph zu $U_4(\mathbb{C})$ oder $SU_4(\mathbb{C})$.
- (iii) $K|S = G_2 = K|W$.
- (iv) K ist lokal isomorph zu $\text{SO}_5(\mathbb{R}) \times \text{SO}_3(\mathbb{R})$, $\text{SO}_5(\mathbb{R}) \times \text{SO}_2(\mathbb{R})$ oder $\text{SO}_5(\mathbb{R})$.
- (v) K ist lokal isomorph zu $\text{SO}_4(\mathbb{R}) \times \text{SO}_4(\mathbb{R})$ oder $\text{SO}_4(\mathbb{R}) \times U_2(\mathbb{C})$.
- (vi) K ist lokal isomorph zu $\text{SO}_2(\mathbb{R}) \times U_3(\mathbb{C})$.

Den Alternativen (iv) bis (vi) kann dabei noch die Bedingung

$$1 \leq \dim \Gamma(s) \leq 6, \quad w \in \Gamma(s), \quad 1 \leq \dim \Gamma_s(w) \leq 5$$

oder

$$\Gamma(s) = \{s\}, \quad \dim \Gamma_s(w) \geq 1$$

hinzugefügt werden.

Ausdrücklich angemerkt sei, daß die angegebenen Bedingungen nur notwendig, nicht aber hinreichend für $\dim \Gamma \geq 17$ bzw. $\dim \Gamma \geq 38$ sind. – Die in Satz 1.6(ii) erwähnten achtdimensionalen lokalkompakten Ebenen vom Lenz-Typ V mit mindestens 17-dimensionaler Kollineationsgruppe sind schon in [13] explizit bestimmt worden. Die übrigen Alternativen werden in weiteren Arbeiten einzeln untersucht. Fast jede dieser Ebenenklassen enthält interessante Beispiele. Insgesamt werden sich auf diesem Weg alle achtdimensionalen lokalkompakten Translationsebenen mit mindestens 17-dimensionaler Kollineationsgruppe und alle sechzehndimensionalen lokalkompakten Translationsebenen mit mindestens 38-dimensionaler Kollineationsgruppe bestimmen lassen. Ohne auf Einzelheiten einzugehen, kann man das Ergebnis dieser Klassifikation im Ausblick wie folgt umreißen.

Abgesehen von der klassischen Ebene über \mathbb{H} gibt es sieben Familien von achtdimensionalen lokalkompakten Translationsebenen mit mindestens 17-dimensionaler Kollineationsgruppe: drei einparametrische Familien von Lenz-Typ-V-Ebenen mit $\dim \Gamma = 18$ ([13]), zwei einparametrische Familien von Lenz-Typ-V-Ebenen mit $\dim \Gamma = 17$ ([13]), eine einparametrische Familie von Ebenen zur Alternative (iii) von 1.6 (nämlich die Ebenen über den Fastkörpern von Kalscheuer-Tits [18], [30], mit $\dim \Gamma = 17$), schließlich eine bisher noch nicht bekannte zweiparametrische Familie von Ebenen mit $\dim \Gamma = 17$, die unter die Alternative (iv 1) von 1.6 fallen.

Abgesehen von der klassischen Ebene über \mathbb{O} gibt es fünf Familien von sechzehndimensionalen lokalkompakten Translationsebenen mit mindestens 38-dimensionaler Kollineationsgruppe: eine einparametrische Familie von Lenz-Typ-V-Ebenen zur Alternative 1.7(iii) mit $\dim \Gamma = 40$ (nämlich die Ebenen über den Divisionsalgebren \mathbb{O}_c aus [14, 4.1]), eine einparametrische und eine zweiparametrische Schar von Ebenen mit $\dim \Gamma = 39$ zu den Alternativen 1.7(i) bzw. 1.7(iii), schließlich unter denselben Alternativen noch jeweils eine Ebenenfamilie mit $\dim \Gamma = 38$, die von einem nahezu beliebigen Homöomorphismus von \mathbb{R} parametrisiert wird.

Die erwähnten Ebenenscharen erscheinen dabei sämtlich als besonders homogener Kopf von größeren Familien von Ebenen mit im allgemeinen etwas kleinerer Kollineationsgruppe, die auch noch detailliert beschrieben und analysiert werden können.

Bei der Herleitung der damit vorgestellten Sätze wird so vorgegangen, daß zunächst in §2 die Typeneinteilungssätze 1.6 und 1.7 sowie Satz 1.3 mit Hilfe des Hauptsatzes gewonnen werden; der Beweis des Hauptsatzes wird solange zurückgestellt und erfolgt erst in §3. Diese Reihenfolge wurde gewählt, weil der Beweis der Typeneinteilungssätze Licht auf Situationen wirft, die auch beim Beweis des Hauptsatzes betrachtet werden müssen.

Hier noch zwei Ergebnisse aus [15], die im folgenden ständig benötigt werden:

1.8. Sphärenlemma ([15, 2.2]). *Sei Ξ eine abgeschlossene Untergruppe von $S\Gamma_o$, und sei \mathfrak{S} eine mindestens zweidimensionale Bahn von Ξ in L_∞ , die nicht homöomorph zu einer Sphäre ist. Dann ist für $s, w \in \mathfrak{S}$, $s \neq w$ die Standgruppe $\Xi_{s,w}$ kompakt.*

1.9. Sphärensatz ([15, 1.2]). *In einer lokalkompakten zusammenhängenden Translationsebene \mathcal{P} der Dimension $2n$ mit $n \in \{4, 8\}$, welche nicht isomorph zur klassischen Ebene über den Quaternionen oder Oktaven ist, habe eine Untergruppe von Γ eine zur*

(n - 1)-Sphäre homöomorphe Bahn in L_∞ . Dann besitzt Γ in L_∞ Fixpunkte (und zwar genau einen oder genau zwei, je nachdem, ob \mathcal{P} vom Lenz-Typ \tilde{V} ist oder nicht).

Der Verfasser dankt der Deutschen Forschungsgemeinschaft für das Forschungsstipendium, zu dessen Ergebnissen die vorliegende Arbeit gehört.

§2. Typeneinteilung, mögliche Kollineationsgruppen

In diesem Paragraphen werden Informationen bereitgestellt, die es einerseits erlauben, die Typeneinteilungssätze 1.6 und 1.7 sowie Satz 1.3 aus dem Hauptsatz abzuleiten, und die andererseits den Beweis des Hauptsatzes vorbereiten. Beim Beweis des Hauptsatzes wird sich nämlich immer wieder die Frage stellen, ob und wie unter seinen Voraussetzungen gewisse Gruppen als Kollineationsgruppen wirken können; hier werden diejenigen Fälle betrachtet, in denen sich diese Frage ganz allgemein beantworten läßt. 8- und 16-dimensionale Ebenen werden dabei getrennt behandelt, so daß der ausschließlich an einer bestimmten Dimension interessierte Leser sich auf den betreffenden Teil des Paragraphen beschränken kann. Wir beginnen mit 8-dimensionalen Ebenen (2.1 – 2.4); Abschnitte 2.5 – 2.13 befassen sich dann mit 16-dimensionalen Ebenen.

2.1. Lemma. *Seien S und W zwei verschiedene Ursprungsgeraden einer achtdimensionalen lokalkompakten Translationsebene, und sei K eine kompakte zusammenhängende Untergruppe von $S\Gamma_{S,W}$. Ist $\dim K \geq 3$, so wirkt K auf der zur 4-Sphäre homöomorphen Translationsachse L_∞ äquivalent zur Einpunktkompaktifizierung einer der folgenden klassischen linearen Wirkungen:*

- (1) $SO_4(\mathbb{R})$ auf \mathbb{R}^4 ,
- (2) $U_2(\mathbb{C})$ oder $SU_2(\mathbb{C})$ auf \mathbb{C}^2 ,
- (3) $SO_3(\mathbb{R})$ auf $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$.

Beweis. K hat mindestens zwei Fixpunkte in L_∞ (nämlich die uneigentlichen Punkte von S und W). Die Behauptung folgt nun nach [24], wo alle kompakten zusammenhängenden Liegruppen, die effektiv auf der 4-Sphäre wirken können, samt Wirkung bestimmt werden. \square

2.2. Beweis von Satz 1.3 und der Typeneinteilung 1.6 anhand des Hauptsatzes 1.2.

Sei \mathcal{P} eine achtdimensionale lokalkompakte Translationsebene, die nicht isomorph zur klassischen Ebene über \mathbb{H} ist. Dann läßt die Kollineationsgruppe von \mathcal{P} die Translationsachse L_∞ invariant (s. z.B. [12, 3.2]), ist also affin. Die Dimension der Gruppe der stetigen Kollineationen ist gleich der Dimension ihrer Zusammenhangskomponente Γ . Hat \mathcal{P} Lenz-Typ V , so folgt $\dim \Gamma \leq 18$ nach § 4 von [13].

Zum Beweis von 1.3 und 1.6 kann man also annehmen, daß \mathcal{P} nicht vom Lenz-Typ V ist und daß $\dim \Gamma \geq 17$. Man hat dann zu zeigen, daß eine der Alternativen (iii) oder (iv) von 1.6 zutrifft; ferner ist für 1.3 die Abschätzung $\dim \Gamma \leq 18$ zu beweisen, wobei für 1.6 der Grenzfall $\dim \Gamma = 18$ noch näher präzisiert werden muß.

Der Hauptsatz 1.2 besagt nun die Existenz eines Punktes $s \in L_\infty$ mit $\dim \Gamma(s) \leq 2$. Ist $\Gamma(s) = \{s\}$, so wählen wir einen weiteren uneigentlichen Punkt w beliebig aus

$L_\infty \setminus \{s\}$. Andernfalls sei $w \in \Gamma(s) \setminus \{s\}$ gewählt. Dann ist

$$\dim \Gamma(s) + \dim \Gamma_s(w) \leq 4. \quad (1)$$

Seien S und W die zu s und w gehörigen Ursprungsgeraden. In Anbetracht der affin transitiven Translationsgruppe ist $\dim \Gamma_{s,w} = \dim \Gamma_{S,W} + 8$. Nach Voraussetzung und mit der bekannten Dimensionsformel gilt also

$$17 \leq \dim \Gamma = \dim \Gamma(s) + \dim \Gamma_s(w) + \dim \Gamma_{S,W} + 8. \quad (2)$$

Nun ist

$$\Gamma_{S,W} = S\Gamma_{S,W} \cdot (\Gamma_{[0,L_\infty]})^4. \quad (3)$$

Da \mathcal{P} nicht die klassische Ebene über \mathbb{H} sein soll, ist $\Gamma_{[0,L_\infty]}$ isomorph zu \mathbb{R}^\times oder \mathbb{C}^\times , je nachdem, ob der Kern der Ebene isomorph zu \mathbb{R} oder \mathbb{C} ist. Jedenfalls gilt

$$\dim \Gamma_{[0,L_\infty]} \leq 2. \quad (4)$$

Sei nun K die größte kompakte zusammenhängende Untergruppe von $S\Gamma_{S,W}$. Nach (1)–(4) und mit dem Lemma 1.5 über Achsenstandgruppen erhält man

$$3 \leq \dim S\Gamma_{S,W} \leq \dim K + 1, \quad \text{also } \dim K \geq 2, \quad (5)$$

$$5 \leq \dim \Gamma_{S,W} \leq \dim K + 1 + 2 = \dim K + 3. \quad (6)$$

Man beachte dabei, daß wegen $K \subseteq S\Gamma_0$

$$\dim K = \dim K|L_\infty.$$

Zunächst betrachten wir nun die Situation, daß sogar $\dim K \geq 3$, aber $K|L_\infty$ nicht isomorph zu $SO_3(\mathbb{R})$ ist. Die Aufzählung 2.1 der für $K|L_\infty$ in Frage kommenden Möglichkeiten zeigt, daß dann K in L_∞ außer den Fixpunkten s und w lauter zur 3-Sphäre homöomorphe Bahnen hat. Nach dem Sphärensatz (vgl. 1.9) sind daher s und w Fixpunkte von ganz Γ . Wegen (2) und (6) muß dann

$$17 \leq \dim \Gamma_{S,W} + 8 \leq \dim K + 3 + 8$$

sein, was nach 2.1 nur mit $K|L_\infty \cong SO_4(\mathbb{R})$ und $\dim \Gamma = 17$ zu erfüllen ist. Diese Situation ist in Alternative (iii) von 1.6 beschrieben.

Es müssen jetzt noch die Fälle behandelt werden, in denen $K|L_\infty \cong SO_3(\mathbb{R})$ oder $\dim K = 2$ ist. Nach (2), (6) und (1) ist dann

$$17 \leq \dim \Gamma \leq \dim \Gamma(s) + \dim \Gamma_s(w) + \dim K + 3 + 8 \leq 18. \quad (7)$$

Der Grenzfall $\dim \Gamma = 18$ ist insbesondere nur mit $\dim K = 3$, also $K|L_\infty \cong SO_3(\mathbb{R})$, und $\dim \Gamma(s) + \dim \Gamma_s(w) = 4$ zu erreichen. Nach Wahl von s und w ist dabei entweder $\dim \Gamma_s(w) \leq \dim \Gamma(s) \leq 2$ und daher notwendig $\dim \Gamma_s(w) = 2 = \dim \Gamma(s)$; oder aber s ein Fixpunkt von Γ und dann notwendig $\dim \Gamma(w) = 4$, wobei w ein beliebiger Punkt von $L_\infty \setminus \{s\} = \mathbb{R}^4$ ist, so daß Γ auf $L_\infty \setminus \{s\}$ mit lauter offenen Bahnen, also transitiv operiert.

Allgemein folgt aus (7) wegen $\dim \Gamma(s) \leq 2$, daß $\dim \Gamma_s(w) \geq 1$; man erhält somit Alternative (iv) der Typeneinteilung 1.6, sobald gezeigt ist, daß im Fall $\dim K = 2$ der Kern der Ebene notwendig isomorph zu \mathbb{C} sein muß. Andernfalls wäre aber $\Gamma_{[0, L_\infty]} \cong \mathbb{R}^\times$, nach (3) und (5) also $\dim \Gamma_{s,w} \leq 4$, im Widerspruch zu (6). \square

Vorbereitend für den Beweis des Hauptsatzes in § 3 werden nun einige lineare Gruppen hinsichtlich möglicher Wirkungen als Kollineationsgruppen achtdimensionaler lokalkompakter Translationsebenen untersucht:

2.3. *In einer achtdimensionalen lokalkompakten Translationsebene kann $S\Gamma_o$ keine zu $SL_3(\mathbb{R})$ lokal isomorphe abgeschlossene zusammenhängende Untergruppe enthalten.*

Beweis. Angenommen, Δ sei eine solche Untergruppe. Eine maximale kompakte Untergruppe von Δ ist dann lokal isomorph zur maximalen kompakten Untergruppe $SO_3(\mathbb{R})$ von $SL_3(\mathbb{R})$ und wie diese sogar als Untergruppe schlechthin maximal ([9], [22]).

Δ kann nun nicht transitiv auf der 4-Sphäre L_∞ operieren, da sonst nach [21, 5.6] auch eine maximale kompakte Untergruppe dort transitiv operieren müßte, was schon aus Dimensionsgründen nicht angeht. Also existiert ein Punkt $s \in L_\infty$, dessen Bahn $\Delta(s)$ unter Δ höchstens dreidimensional ist.

Ist sogar $\dim \Delta(s) \leq 2$, so folgt für geeignetes $w \in L_\infty \setminus \{s\}$, daß $8 = \dim \Delta \leq 4 + \dim \Delta_{s,w}$, also $\dim \Delta_{s,w} \geq 4$. Nach dem Lemma 1.5 über Achsenstandgruppen enthält $\Delta_{s,w}$ eine zusammenhängende kompakte Untergruppe der Dimension mindestens 3, also eine maximale kompakte Untergruppe von Δ .

Ist $\dim \Delta(s) = 3$, so erhält man für $w \in \Delta(s) \setminus \{s\}$ die Abschätzung $8 = \dim \Delta \leq 3 + 3 + \dim \Delta_{s,w}$, also $\dim \Delta_{s,w} \geq 2$. Nach dem Sphärenlemma (vgl. 1.8) ist entweder $\Delta_{s,w}$ kompakt, oder aber $\Delta(s)$ ist homöomorph zur 3-Sphäre. Da eine maximale kompakte Untergruppe von Δ keine zweidimensionalen kompakten Untergruppen hat, ist im ersten Fall $\Delta_{s,w}$ selbst eine maximale kompakte Untergruppe. Im zweiten Fall ist nach [21, 5.6] eine maximale kompakte Untergruppe ebenfalls transitiv auf der 3-Sphäre $\Delta(s)$ und hat daher bekanntlich zwei Fixpunkte in der 4-Sphäre L_∞ (vgl. [15, 3.9]).

In allen Fällen hat also eine maximale kompakte Untergruppe K von Δ zwei Fixpunkte $s, w \in L_\infty$. Wegen $\dim \Delta - \dim K = 5 > \dim L_\infty$ sind die Standgruppen Δ_s und Δ_w echt größer als K . Da K maximal in Δ ist, folgt $\Delta = \Delta_{s,w}$, was einen fulminanten Widerspruch gegen die Struktur von Achsenstandgruppen (vgl. 1.5) bedeutet. \square

2.4 *In einer achtdimensionalen lokalkompakten Translationsebene kann eine zu $SL_2(\mathbb{C})$ lokal isomorphe abgeschlossene zusammenhängende Untergruppe Δ von $S\Gamma_o$ nicht irreduzibel auf der affinen Ebene \mathbb{A} wirken.*

Beweis. Angenommen, die lineare Wirkung von Δ auf $\mathbb{A} = \mathbb{R}^8$ ist irreduzibel. Wie man sich anhand der Tabelle [32] leicht überlegt, verwirklicht dann Δ bis auf Äquivalenz über \mathbb{R} die komplex-lineare irreduzible Darstellung von $SL_2(\mathbb{C})$ in \mathbb{C}^4 . Deren Einschränkung auf die maximale kompakte Untergruppe $SU_2(\mathbb{C})$ von $SL_2(\mathbb{C})$ liefert eine Darstellung, die nicht vom reellen Typ, also ebenfalls irreduzibel auch über \mathbb{R} ist.

Eine beliebige maximale kompakte Untergruppe K von Δ läßt also insbesondere keine Ursprungsgerade invariant, d.h. hat keinen Fixpunkt in L_∞ . Nun hat K

$\cong \text{SU}_2(\mathbb{C})$ keine Untergruppen der Kodimension 1 und daher in L_∞ nur Bahnen der Dimension 2 oder 3.

Die Ergebnisse von Richardson über Wirkungen kompakter Liegruppen auf der 4-Sphäre (insbesondere §§ 4, 5 von [24]) zeigen, daß folglich $K|L_\infty$ äquivalent zur Darstellung von $\text{SO}_3(\mathbb{R})$ vom Gewicht 2 auf der Einheitskugel des \mathbb{R}^5 ist ([24, S. 479]); insbesondere hat K in L_∞ genau zwei 2-dimensionale Bahnen („Ausnahmebahnen“, [24, Theorem 1.1 und 1.2]), und keine der Bahnen von K in L_∞ ist homöomorph zu einer Sphäre ([24, § 5]).

Für einen beliebigen Punkt $s \in L_\infty$ ist $\dim \Delta(s) \geq \dim K(s) \geq 2$; und auch die Bahn $\Delta(s)$ ist nicht homöomorph zu einer Sphäre, da sonst nach [21, 5.6] auch eine maximale kompakte Untergruppe transitiv auf einer solchen Sphärenbahn operieren müßte. Für $w \in \Delta(s) \setminus \{s\}$ ist also $\Delta_{s,w}$ nach dem Sphärenlemma (siehe 1.8) kompakt. Außerdem ist Δ insbesondere nicht transitiv auf der 4-Sphäre L_∞ .

Wäre $\dim \Delta(s) = 2$, so wäre die kompakte Gruppe $\Delta_{s,w}$ mindestens 2-dimensional und folglich eine maximale kompakte Untergruppe von Δ (da eine solche keine 2-dimensionalen Untergruppen besitzt); maximale kompakte Untergruppen von Δ haben aber keine Fixpunkte in L_∞ .

Alle Bahnen von Δ in L_∞ müssen also mindestens 3-dimensional sein; und da Δ nicht transitiv auf L_∞ ist, existiert ein Punkt $s \in L_\infty$ mit $\dim \Delta(s) = 3$. Nach der Titsschen Klassifikation [29, S. 222ff.] aller zweifach transitiven Wirkungen von Liegruppen kann nun $\Delta \cong \text{SL}_2(\mathbb{C})$ nicht zweifach transitiv auf der dreidimensionalen Bahn $\Delta(s)$ operieren; folglich existiert ein Punkt $w \in \Delta(s) \setminus \{s\}$ mit $\dim \Delta_{s,w} \geq 1$. Ist K eine $(\Delta_{w,s})^1$ enthaltende maximale kompakte Untergruppe von Δ , so hat K in $\Delta(s)$ also eine zweidimensionale Bahn. Daneben kann K in $\Delta(s)$ keine dreidimensionale Bahn haben, denn diese wäre in der dreidimensionalen Mannigfaltigkeit $\Delta(s)$ (mit der von Δ/Δ_s induzierten Topologie) einerseits offen, andererseits abgeschlossen, da kompakt, und aus Zusammenhangsgründen also gleich $\Delta(s)$, im Widerspruch zur Existenz einer 2-dimensionalen K -Bahn in $\Delta(s)$. Also müßte die dreidimensionale Bahn $\Delta(s)$ in den beiden zweidimensionalen Bahnen von K in L_∞ enthalten sein, was aus Dimensionsgründen nicht angeht. \square

Die nun folgenden geometrischen Aussagen, die in lokalkompakten zusammenhängenden Translationsebenen beliebiger Dimension gelten, dienen der Vorbereitung der Diskussion sechzehndimensionaler Ebenen, die anschließend begonnen werden soll:

2.5. Sei S eine affine Gerade und Ξ eine kommutative Untergruppe von $\mathbf{G}_{[S]}$. Dann existiert ein $e \in L_\infty$ derart, daß $\Xi \subseteq \mathbf{G}_{[e,S]}$.

In der Tat: Da L_∞ eine Fixgerade von \mathbf{G} ist, und da jede von der Achse verschiedene Fixgerade einer nichtidentischen axialen Kollineation durch ihr Zentrum geht, ist $\mathbf{G}_{[S]} = \bigcup_{e \in L_\infty} \mathbf{G}_{[e,S]}$. Ist Ξ nicht in $\mathbf{G}_{[S \wedge L_\infty, L_\infty]}$ enthalten, d.h. existiert eine Kollineation $\xi \in \Xi \setminus \{\text{id}\}$, deren Zentrum $e \in L_\infty$ nicht der uneigentliche Punkt $S \wedge L_\infty$ von S ist, so bleibt e fest unter der kommutativen Gruppe Ξ , da für $\gamma \in \mathbf{G}_{[S]}$ das Zentrum von $\gamma \xi \gamma^{-1}$ der Punkt $\gamma(e)$ ist. Da nicht mit der Achse S inzident, ist dann der Fixpunkt e das Zentrum einer jeden Kollineation aus Ξ . \square

2.6. (Involutionen.) Sei $\iota \in \mathbf{G}_0^c$ eine stetige affine den Ursprung o festlassende Kollineation, welche involutorisch ist. Nach [2] besteht die folgende Alternative:

(i) Entweder ist ι eine axiale Kollineation
oder

(ii) ι ist eine Baer-Involution.

Da wir lokalkompakte zusammenhängende Translationsebenen betrachten, läßt sich dies folgendermaßen konkretisieren:

(i) ι sei axial. Ist die Achse von ι die Translationsachse L_∞ , so ist ι die Spiegelung am Ursprung. Andernfalls ist die Achse eine Ursprungsgerade, deren affine Punkte den Unterraum der Fixpunkte der Involution ι als \mathbb{R} -linearer Abbildung von $\mathbb{A} = \mathbb{R}^{2n}$ bilden. Daneben läßt dann ι genau eine weitere Ursprungsgerade invariant (bestehend aus den Eigenvektoren von ι zum Eigenwert -1), da einerseits jeder invariante eindimensionale \mathbb{R} -lineare Teilraum von \mathbb{A} in einer invarianten Ursprungsgeraden enthalten ist, und andererseits jede von der Achse verschiedene Fixgerade der axialen Kollineation ι durch das Zentrum von ι geht.

(ii) bedeutet, daß die unter ι invarianten Punkte und Geraden der projektiven Ebene eine Baer-Unterebene \mathcal{B} bilden, d.h. eine Unterebene, mit der jede projektive Gerade einen Punkt gemeinsam hat. Der \mathbb{R} -lineare Unterraum \mathbb{B} der Fixpunkte von ι in $\mathbb{A} = \mathbb{R}^{2n}$ besteht aus den affinen Punkten von \mathcal{B} . Daher ist \mathbb{B} ein Unterraum der halben Dimension n (für eine nicht zu \mathcal{B} gehörige Ursprungsgerade S vermittelt die Parallelprojektion in S -Richtung eine lineare Bijektion von \mathbb{B} auf jede von S verschiedene Ursprungsgerade).—

Der folgende Sachverhalt ist eine der Besonderheiten von sechzehndimensionalen Ebenen, die ihr Studium erleichtern. Man beachte, daß in sechzehndimensionalen lokalkompakten Translationsebenen (wie in 1.4 angedeutet) alle Kollineationen stetig sind, da der Kern einer solchen Ebene stets isomorph zu \mathbb{R} ist.

2.7. Lemma. *In einer 16-dimensionalen lokalkompakten Translationsebene sei C eine kompakte Untergruppe von \mathbb{G}_o . Dann gilt:*

(i) *Die Einschränkungabbildung $C \rightarrow C|L_\infty$ ist ein Isomorphismus oder eine zweiblättrige Überlagerung.*

(ii) *Läßt C eine Ursprungsgerade S invariant, so wirkt C fast effektiv auf S , d.h. die Einschränkungabbildung $C \rightarrow C|S$ ist ein Isomorphismus oder eine endlichblättrige Überlagerung.*

Beweis. Die Behauptung ist eine geometrische Übersetzung der Resultate aus [10].

(i) Nach [10, Theorem 1] ist der Kern einer 16-dimensionalen lokalkompakten Translationsebene stets isomorph zu \mathbb{R} . Die Streckungsgruppe $\mathbb{G}_{[o, L_\infty]}$ der Ebene ist also isomorph zur multiplikativen Gruppe \mathbb{R}^\times von \mathbb{R} . Der Kern der Einschränkungabbildung $C \rightarrow C|L_\infty$ ist eine kompakte Untergruppe dieser Gruppe, hat also höchstens zwei Elemente.

(ii) Man hat zu zeigen, daß der Kern $C_{[S]}$ der Einschränkungabbildung $C \rightarrow C|S$ endlich ist. Da $C_{[S]}$ eine kompakte \mathbb{R} -lineare Gruppe ist, genügt es zu verifizieren, daß die Zusammenhangskomponente $(C_{[S]})^1$ trivial ist.

Angenommen, dies wäre nicht der Fall. Dann enthielte $C_{[S]}$ eine eindimensionale Torusuntergruppe T . Nach 2.5 existiert ein Punkt $w \in L_\infty$ derart, daß $T \subseteq \mathbb{G}_{[w, S]}$.

Zunächst kann w nicht der zu S gehörige uneigentliche Punkt $s \in L_\infty$ sein. Die Scherungsgruppe $\mathbb{G}_{[s, S]}$ ist nämlich isomorph zu einer Untergruppe der additiven Gruppe Q^+ eines die Ebene koordinatisierenden Quasikörpers Q (vgl. [11, 3.1.30 S.

134]); und nach [25, § 7, insbesondere 7.23] ist Q^+ isomorph zur Vektorgruppe \mathbb{R}^8 , enthält also keine Torusuntergruppen.

Also müßte $w \in L_\infty \setminus \{s\}$ sein. Sei W die zu w gehörige Ursprungsgerade. Koordinatisiert man die affine Ebene mit W und S als erster und zweiter Koordinatenachse über einem 8-dimensionalen lokalkompakten Quasikörper Q , so ist $\mathbb{G}_{[w,S]}$ isomorph zur multiplikativen Gruppe des Mittelkerns von Q (vgl. [11, 3.1.28 S. 134]). Diese enthält aber nach [10, Theorem 2] ebenfalls keine Torusuntergruppen. Damit ist (ii) bewiesen. \square

Für die Klassifikation [24] von Richardson, die das Studium der Wirkung kompakter Kollineationsgruppen auf der Sphäre L_∞ bei 8-dimensionalen Ebenen so sehr erleichtert, steht in der Literatur kein höherdimensionales Analogon zur Verfügung. Ersatzweise kann man bei 16-dimensionalen Ebenen die lineare Wirkung kompakter Kollineationsgruppen auf etwa vorhandenen invarianten Ursprungsgeraden studieren. Hierzu dient die folgende Übersicht über die großen Untergruppen von $SO_8(\mathbb{R})$. Man erhält sie durch routinemäßige Anwendung bekannter Tatsachen über die Darstellungen der einfachen kompakten Liegruppen:

2.8. Hilfssatz. *Sei Ξ eine kompakte zusammenhängende Untergruppe von $GL_8(\mathbb{R})$ mit $\dim \Xi \geq 10$. Dann ist Ξ als \mathbb{R} -lineare Transformationsgruppe von \mathbb{R}^8 äquivalent zu einer der folgenden linearen Gruppen in der naheliegenden Wirkung:*

- (1) $SO_8(\mathbb{R})$ auf \mathbb{R}^8 ,
- (2) $SO_7(\mathbb{R})$ auf $\mathbb{R}^7 \times \mathbb{R}$,
- (3) $Spin_7(\mathbb{R})$ auf \mathbb{R}^8 (Spindarstellung zu $SO_7(\mathbb{R})$),
- (4) $U_4(\mathbb{C})$ auf \mathbb{C}^4 ,
- (5) $SO_6(\mathbb{R}) \times SO_2(\mathbb{R})$ auf $\mathbb{R}^6 \times \mathbb{R}^2$,
- (6) $SU_4(\mathbb{C})$ auf \mathbb{C}^4 ,
- (7) $SO_6(\mathbb{R})$ auf $\mathbb{R}^6 \times \mathbb{R}^2$,
- (8) G_2 auf $\mathbb{R}^7 \times \mathbb{R}$,
- (9) $SU_2(\mathbb{H}) \cdot \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} xa \\ ya \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{H}, |a|=1 \right\}$ auf dem \mathbb{H} -Rechtsvektorraum \mathbb{H}^2 ,
- (10) $SO_5(\mathbb{R}) \times SO_3(\mathbb{R})$ auf $\mathbb{R}^5 \times \mathbb{R}^3$,
- (11) $SO_4(\mathbb{R}) \times SO_4(\mathbb{R})$ auf $\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4$,
- (12) $SU_2(\mathbb{H}) \cdot \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} xc \\ yc \end{pmatrix} \mid c \in \mathbb{C} \subseteq \mathbb{H}, |c|=1 \right\}$ auf \mathbb{H}^2 ,
- (13) $SO_5(\mathbb{R}) \times SO_2(\mathbb{R})$ auf $\mathbb{R}^5 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$,
- (14) $SU_2(\mathbb{H})$ auf \mathbb{H}^2 ,
- (15) $SO_5(\mathbb{R})$ auf $\mathbb{R}^5 \times \mathbb{R}^3$,
- (16) $SO_4(\mathbb{R}) \times U_2(\mathbb{C})$ auf $\mathbb{R}^4 \times \mathbb{C}^2$,
- (17) $U_3(\mathbb{C}) \times SO_2(\mathbb{R})$ auf $\mathbb{C}^3 \times \mathbb{R}^2$.

Beweis. (a) Ξ ist fastdirektes Produkt eines kompakten zusammenhängenden halbeinfachen Normalteilers N und einer zentralen Torusgruppe T (vgl. z.B. [16, 12.14]). Man betrachte nun einen kompakten zusammenhängenden einfachen Normalteiler Σ maximaler Dimension von N . Dann ist Ξ fastdirektes Produkt von Σ mit der Zusammenhangskomponente Z des Zentralisators von Σ .

(b) Die Kenntnis der kompakten einfachen Liegruppen und ihrer Darstellungen (etwa nach der Tabelle [32]) lehrt folgende Alternative:

(b1) Entweder sind alle einfachen zusammenhängenden Normalteiler von N lokal isomorph zu $SU_2(\mathbb{C})$

oder aber

(b2) Σ als lineare Transformationsgruppe von \mathbb{R}^8 ist äquivalent zu einer der folgenden linearen Gruppen (in der naheliegenden Wirkung):

$PSU_3(\mathbb{C})$ in der adjungierten Darstellung; $SU_3(\mathbb{C})$ auf $\mathbb{C}^3 \times \mathbb{R}^2$;

$SO_5(\mathbb{R})$ auf $\mathbb{R}^5 \times \mathbb{R}^3$; $SU_2(\mathbb{H})$ auf \mathbb{H}^2 ;

G_2 auf $\mathbb{R}^7 \times \mathbb{R}$;

$SO_6(\mathbb{R})$ auf $\mathbb{R}^6 \times \mathbb{R}^2$; $SU_4(\mathbb{C})$ auf \mathbb{C}^4 ;

$Spin_7(\mathbb{R})$ auf \mathbb{R}^8 ;

$SO_7(\mathbb{R})$ auf $\mathbb{R}^7 \times \mathbb{R}$; $SO_8(\mathbb{R})$ auf \mathbb{R}^8 .

(c) Zunächst betrachten wir Alternative (b1). N wird in diesem Fall endlich überlagert von einem direkten Produkt $SU_2(\mathbb{C})^k$. Wäre $k \leq 2$, so wäre $\dim \Xi \leq 8$, da die Dimension des zentralen Torus T von $\Xi = N \cdot T$ begrenzt wird durch die Tatsache, daß die maximalen Tori von $GL_8(\mathbb{R})$ Dimension 4 haben. Ξ hat also einen zu $SU_2(\mathbb{C})^3$ lokal isomorphen kompakten Normalteiler Θ . Die nichttrivialen Darstellungen von $SU_2(\mathbb{C})^3$ sind nun mindestens dreidimensional (über \mathbb{R}), und der Kern der irreduziblen Darstellungen in den reellen Dimensionen 4, 6, 8 [bzw. 3, 5, 7] enthält mindestens einen [bzw. zwei] der Faktoren $SU_2(\mathbb{C})$, wie man der Tabelle [32] anhand der Weylschen Dimensionsformel ([32, 7.6 S. 9]) entnimmt. Daher sind die irreduziblen Komponenten der Wirkung von Θ in \mathbb{R}^8 4-dimensional, so daß Θ auf \mathbb{R}^8 wie eine Untergruppe von $SO_4(\mathbb{R}) \times SO_4(\mathbb{R})$ auf $\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4$ wirkt, wobei sowohl $\mathbb{R}^4 \times \{0\}$ als auch $\{0\} \times \mathbb{R}^4$ der Unterraum der Fixpunkte mindestens eines der einfachen Faktoren von Θ ist und daher unter ganz Ξ invariant bleibt. Folglich wirkt auch die kompakte zusammenhängende Gruppe Ξ auf \mathbb{R}^8 wie eine Untergruppe von $SO_4(\mathbb{R}) \times SO_4(\mathbb{R})$. Wegen $\dim \Xi \geq 10$ erhält man angesichts der Untergruppenstruktur von $SO_4(\mathbb{R})$ (s. z.B. [13, § 3]) einen der Fälle (11) oder (16) der Behauptung.

(d) Zur Behandlung der Alternative (b2) wird im folgenden Σ fallweise mit den genannten Gruppen identifiziert. Die Bestimmung möglicher Zentralisatoren wird erleichtert durch die folgende Bemerkung:

(Geometrisches Standardargument.) Der Zentralisator von $SO_k(\mathbb{R})$ bzw. $SU_k(\mathbb{C})$ ($k \geq 3$) in $GL_k(\mathbb{R})$ bzw. $GL_{2k}(\mathbb{R})$ besteht aus den skalaren Streckungen von \mathbb{R}^k bzw. $\mathbb{C}^k = \mathbb{R}^{2k}$.

Die angegebenen Gruppen haben nämlich auf verschiedenen eindimensionalen Teilräumen von \mathbb{R}^k bzw. \mathbb{C}^k verschiedene Standgruppen. Eine zentralisierende \mathbb{R} -lineare Transformation induziert daher den identischen Automorphismus auf den zugehörigen projektiven Räumen. Unter diesem Blickwinkel ist die Aussage ein wohlbekannter Sachverhalt der projektiven Geometrie (s. z.B. [3, III.1 S. 44]).

Die verschiedenen Möglichkeiten für Σ werden nun einzeln diskutiert.

(e) Wegen $\dim \Xi \geq 10$ kann Σ nicht die adjungierte Darstellung von $PSU_3(\mathbb{C})$ verwirklichen, da diese in $GL_8(\mathbb{R})$ nur von den reellen Streckungen zentralisiert

wird, was etwa folgendermaßen einzusehen ist: Der Zentralisator von $SU_2(\mathbb{C}) \times \{1\}$ in $SU_3(\mathbb{C})$ ist ein eindimensionaler Torus; in der adjungierten Darstellung läßt also $SU_2(\mathbb{C}) \subseteq PSU_3(\mathbb{C})$ genau einen eindimensionalen Teilraum punktweise fest. Dieser bleibt invariant unter jeder linearen Transformation ζ , die die adjungierte Darstellung zentralisiert; der Eigenraum V von ζ zu einem geeigneten Eigenwert ist also nicht $\{0\}$. Nun ist V invariant unter $PSU_3(\mathbb{C})$, und da die adjungierte Darstellung irreduzibel ist, ist V der ganze Raum und ζ die Streckung mit einem Skalar.

(f) Ist Σ die Gruppe $SU_3(\mathbb{C})$ in ihrer naheliegenden Wirkung auf $\mathbb{C}^3 \times \mathbb{R}^2$, so läßt der Zentralisator von Σ die beiden Unterräume $\mathbb{C}^3 \times \{0\}$ und $\{0\} \times \mathbb{R}^2$ invariant, da diese sich als Vereinigung von Eigenräumen zu den Eigenwerten -1 bzw. $+1$ gewisser Elemente von Σ beschreiben lassen. Da kompakt, induziert die Zusammenhangskomponente Z des Zentralisators von Σ in Ξ auf $\{0\} \times \mathbb{R}^2$ höchstens einen eindimensionalen Torus, auf $\mathbb{C}^3 \times \{0\}$ nach dem geometrischen Standardargument komplexe Streckungen vom Betrag 1. Wegen $\dim \Xi \geq 10$ erhält man notwendig Fall (17).

(g) Nach dem geometrischen Standardargument ist der Zentralisator der naheliegenden Wirkung von $SO_5(\mathbb{R})$ auf $\mathbb{R}^5 \times \mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^8$ in $GL_8(\mathbb{R})$ das direkte Produkt der Streckungsgruppe von \mathbb{R}^5 mit der generellen linearen Gruppe des Faktors \mathbb{R}^3 . Ist Σ gleich $SO_5(\mathbb{R})$, so wirkt also die zusammenhängende kompakte Gruppe Z auf $\mathbb{R}^5 \times \{0\}$ trivial und auf $\{0\} \times \mathbb{R}^3$ äquivalent zu einer Untergruppe der maximalen kompakten zusammenhängenden Untergruppe $SO_3(\mathbb{R})$ von $GL_3(\mathbb{R})$. Die nichttrivialen zusammenhängenden echten abgeschlossenen Untergruppen von $SO_3(\mathbb{R})$ sind nun genau die eindimensionalen Torusuntergruppen; sie sind paarweise konjugiert. Folglich erhält man einen der Fälle (10), (13), (15) der Behauptung.

(h) Der Zentralisator von $SU_2(\mathbb{H})$ in $GL_8(\mathbb{R})$ besteht aus den skalaren Streckungen des \mathbb{H} -Rechtsvektorraums \mathbb{H}^2 (man werte aus, daß er von den Matrizen $\begin{pmatrix} 1 & \\ & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & \\ & 1 \end{pmatrix} \in SU_2(\mathbb{H})$ mit $a \in \mathbb{H}, |a| = 1$ zentralisiert wird, also insbesondere aus \mathbb{H} -links-linearen Abbildungen von Diagonalgestalt besteht). Ist Σ gleich $SU_2(\mathbb{H})$, so ist Z folglich aus Kompaktheitsgründen eine Untergruppe der Gruppe $Spin_3(\mathbb{R})$ der Streckungen mit Quaternionen der Norm 1. Angesichts der Untergruppenstruktur von $Spin_3(\mathbb{R})$ erhält man einen der Fälle (9), (12), (14) der Behauptung.

(i) Der Zentralisator von G_2 in $GL_8(\mathbb{R})$ ist das direkte Produkt der Streckungsgruppen von \mathbb{R}^7 und \mathbb{R} , wie man mit einer Variante des geometrischen Standardarguments sieht (vgl. [14, S. 212–213]), enthält also keine nichttrivialen kompakten zusammenhängenden Untergruppen. Aus $\Sigma = G_2$ folgt also $Z = \{\text{id}\}$, d.h. $\Xi = G_2$. Dies ist Fall (8) der Behauptung.

(j) Der Fall $\Sigma = SO_6(\mathbb{R})$ wird behandelt wie in (g); er führt auf die Möglichkeiten (5) und (7). Eine unmittelbare Anwendung des geometrischen Standardarguments zeigt, daß sich unter der Annahme $\Sigma = SU_4(\mathbb{C})$ genau die Fälle (4) und (6) ergeben.

(k) $Spin_7(\mathbb{R})$ enthält eine zu $Spin_6(\mathbb{R}) = SU_4(\mathbb{C})$ isomorphe Untergruppe (vgl. etwa [15, 3.5(d)]). Der Zentralisator von $Spin_7(\mathbb{R})$ in $GL_8(\mathbb{R})$ ist also nach dem

geometrischen Standardargument in der Gruppe der komplexen Streckungen von $\mathbb{C}^4 = \mathbb{R}^8$ enthalten. Andererseits kann aus Dimensionsgründen $\text{Spin}_7(\mathbb{R})$ nicht in $\text{GL}_4(\mathbb{C})$ enthalten sein (sie wäre sonst konjugiert zu einer Untergruppe der maximalen kompakten Untergruppe $U_4(\mathbb{C})$ von $\text{GL}_4(\mathbb{C})$); daher ist eine kompakte zusammenhängende Untergruppe des Zentralisators von $\text{Spin}_7(\mathbb{R})$ trivial. Aus $\Sigma = \text{Spin}_7(\mathbb{R})$ folgt daher $\Xi = \text{Spin}_7(\mathbb{R})$ (Fall (3)).

(l) Nach dem geometrischen Standardargument ist der Zentralisator in $\text{GL}_8(\mathbb{R})$ der gewöhnlichen Wirkung von $\text{SO}_7(\mathbb{R})$ auf $\mathbb{R}^7 \times \mathbb{R}$ das direkte Produkt der Streckungsgruppen von \mathbb{R}^7 und \mathbb{R} . Aus $\Sigma = \text{SO}_7(\mathbb{R})$ folgt also $\Xi = \text{SO}_7(\mathbb{R})$. – Ist schließlich $\Sigma = \text{SO}_8(\mathbb{R})$, so folgt schon aus Dimensionsgründen $\Xi = \Sigma$, da Ξ als kompakte zusammenhängende Untergruppe von $\text{GL}_8(\mathbb{R})$ zu einer Untergruppe der maximalen kompakten Untergruppe $\text{SO}_8(\mathbb{R})$ von $\text{SL}_8(\mathbb{R})$ konjugiert ist. \square

Mit diesen Informationen läßt sich nun dem Beweis der Typeneinteilung 1.7 folgendermaßen vorarbeiten:

2.9. Hilfssatz. *Seien S und W verschiedene Ursprungsgeraden einer 16-dimensionalen lokalkompakten Translationsebene \mathcal{P} , und sei K eine kompakte zusammenhängende Untergruppe von $\Gamma_{S,W}$. Dann gilt:*

Ist \mathcal{P} nicht die klassische Ebene über \mathbb{O} , und ist $\dim K \geq 10$, so trifft bis auf Vertauschung von S und W eine der Alternativen (i)–(vi) der Typeneinteilung 1.7 zu.

Zum Beweis betrachte man die Einschränkungabbildung $K \rightarrow K|S$, die nach 2.7 ein lokaler Isomorphismus ist. Unter der Annahme $\dim K \geq 10$ sind die möglichen Alternativen für die lineare Gruppe $K|S$ nach 2.8 bekannt. Entsprechendes gilt natürlich für $K|W$.

Ist $K|S = \text{SO}_8(\mathbb{R})$, also K lokal isomorph zu $\text{SO}_8(\mathbb{R})$, so ist \mathcal{P} nach [15, 3.7] zur klassischen Ebene über \mathbb{O} isomorph.

Induziert K auf einer der Geraden S oder W die Gruppe $\text{SO}_7(\mathbb{R})$, so kann auf der andern Geraden nicht ebenfalls $\text{SO}_7(\mathbb{R})$ induziert werden: sonst würde nämlich K auf W und S einen von o verschiedenen Punkt und damit ein nicht ausgeartetes Viereck der affinen Ebene festlassen und könnte dann gedeutet werden als Automorphismengruppe eines koordinatisierenden Quasikörpers ([1, Satz 11 S. 135]); achtdimensionale lokalkompakte Quasikörper haben nach [14] aber nie eine zu $\text{SO}_7(\mathbb{R})$ lokal isomorphe Automorphismengruppe. Folglich muß die Alternative (i) von 1.7 vorliegen.

Wirkt K auf S und W als $\text{Spin}_7(\mathbb{R})$, so ist \mathcal{P} nach [15, 3.6] isomorph zur klassischen Ebene über \mathbb{O} .

Die übrigen Möglichkeiten, die nach 2.8 für $K|S$ bestehen, sind in den Alternativen (ii)–(vi) in Satz 1.7 bis auf lokale Isomorphie zusammengefaßt; man beachte, daß $\text{SU}_4(\mathbb{C})$ bzw. $\text{SU}_2(\mathbb{H})$ die universellen Überlagerungen von $\text{SO}_6(\mathbb{R})$ bzw. $\text{SO}_5(\mathbb{R})$ sind, und daß die multiplikative Gruppe der Quaternionen mit Norm 1 die universelle Überlagerungsgruppe $\text{Spin}_3(\mathbb{R})$ von $\text{SO}_3(\mathbb{R})$ ist. \square

2.10. Hilfssatz. *In einer sechzehndimensionalen lokalkompakten Translationsebene sei Σ eine zu G_2 lokal isomorphe, kompakte zusammenhängende Untergruppe von Γ_o . Dann läßt Σ zwei Ursprungsgeraden invariant.*

Beweis. Als halbeinfache lineare Gruppe von $\mathbb{A} = \mathbb{R}^{16}$ wirkt Σ vollständig reduzibel. Die Dimension einer \mathbb{R} -linearen irreduziblen Darstellung von G_2 ist 7,

14 oder größer als 16 (vgl. [32]); folglich hat Σ einen von o verschiedenen Fixpunkt in \mathbb{A} und läßt dann auch die durch diesen Punkt bestimmte Ursprungsgerade L invariant. Ist V ein zu L komplementärer Σ -invarianter 8-dimensionaler Teilraum von $\mathbb{A} = \mathbb{R}^{16}$, so ergibt sich wieder anhand der Dimensionen der irreduziblen Darstellungen von G_2 , daß Σ auch in $V \setminus \{o\}$ Fixpunkte hat und folglich eine weitere von L verschiedene Ursprungsgerade invariant läßt. \square

2.11. Hilfssatz. *In einer sechzehndimensionalen lokalkompakten Translationsebene habe eine zu $SU_4(\mathbb{C})$ lokal isomorphe, kompakte zusammenhängende Untergruppe Σ von Γ_o einen Fixpunkt s in L_∞ . Dann hat Σ weitere Fixpunkte in $L_\infty \setminus \{s\}$, und abgesehen von den Fixpunkten haben alle Bahnen von Σ in L_∞ die gleiche Dimension.*

Beweis. $L_\infty \setminus \{s\}$ ist homöomorph zu \mathbb{R}^8 . Hat Σ in L_∞ Bahnen der Dimension 7, so folgt die Behauptung unmittelbar aus der Theorie kompakter Transformationsgruppen von \mathbb{R}^n ([23, § 3]).

Im folgenden sei also vorausgesetzt, daß die Bahnen von Σ in L_∞ höchstens 6-dimensional sind. Nach der Übersicht 2.8 ist eine echte abgeschlossene zusammenhängende Untergruppe von Σ entweder zu $SU_2(\mathbb{H})$ lokal isomorph oder sie hat Kodimension ≥ 6 . Insbesondere sind die Bahnen von Σ in L_∞ unter unserer Voraussetzung 6- oder 5-dimensional oder Fixpunkte.

Zunächst mögen dabei 6-dimensionale Bahnen tatsächlich vorkommen; wir zeigen, daß dann keine 5-dimensionalen Bahnen auftreten. Angenommen nämlich, die Bahn von $w \in L_\infty$ unter Σ wäre 5-dimensional, also $(\Sigma_w)^1$ lokal isomorph zu $SU_2(\mathbb{H})$. Für alle e aus einer genügend kleinen Umgebung von w in L_∞ ist $(\Sigma_e)^1$ konjugiert zu einer Untergruppe von $(\Sigma_w)^1$ ([21, 5.3 S. 215ff.]). Nun ist nach [24, Theorem 1.2 und 1.3] die Vereinigung der 6-dimensionalen Bahnen von Σ dicht in L_∞ , also kann e aus einer 6-dimensionalen Bahn, d.h. mit $\dim(\Sigma_e)^1 = 9$ gewählt werden. Andererseits hat $(\Sigma_w)^1$ als zu $SU_2(\mathbb{H})$ und damit zu $SO_5(\mathbb{R})$ lokal isomorphe Gruppe keine abgeschlossene Untergruppe der Dimension 9 ([20, Lemma 4]). Dieser Widerspruch zeigt, daß Σ neben 6-dimensionalen Bahnen in $L_\infty \setminus \{s\}$ nur Fixpunkte haben kann; daß tatsächlich weitere Fixpunkte auftreten, folgt wieder nach [24, Theorem 1.2 und 1.3].

Es muß nun noch der Fall behandelt werden, daß Σ in L_∞ neben Fixpunkten nur 5-dimensionale Bahnen hat; zu zeigen ist, daß s nicht der einzige Fixpunkt ist. In dieser Situation bleibt jede Ursprungsgerade unter einer zu $SU_2(\mathbb{H})$ und damit zu $SO_5(\mathbb{R})$ lokal isomorphen zusammenhängenden abgeschlossenen Untergruppe von Σ invariant. Da $SU_4(\mathbb{C})$ lokal isomorph zu $SO_6(\mathbb{R})$ ist, sind nach [20, Lemma 7] alle solchen Untergruppen konjugiert. Sei S die zu s gehörige Ursprungsgerade, und sei V ein 8-dimensionaler zu S komplementärer Σ -invarianter Unterraum von $\mathbb{A} = \mathbb{R}^{16}$. Nach der Übersicht 2.8 wirkt Σ auf V wie $SU_4(\mathbb{C})$ auf \mathbb{C}^4 oder wie $SO_6(\mathbb{R})$ auf $\mathbb{R}^6 \times \mathbb{R}^2$. Im zweiten Fall hat Σ Fixpunkte in $V \setminus \{o\}$; diese bestimmen dann von S verschiedene Σ -invariante Ursprungsgeraden. Im ersten Fall ($\Sigma|_V = SU_4(\mathbb{C})$) betrachten wir eine beliebige Ursprungsgerade W mit $\dim W \cap V \geq 1$. Da eine W invariant lassende zu $SU_2(\mathbb{H})$ lokal isomorphe kompakte zusammenhängende Untergruppe von Σ dann auf V wie $SU_2(\mathbb{H})$ auf \mathbb{H}^2 , also insbesondere transitiv auf den eindimensionalen \mathbb{R} -linearen Teilräumen von V wirkt, folgt $W = V$. In jedem Fall existiert neben S also eine weitere Σ -invariante Ursprungsgerade, und damit ein Fixpunkt von Σ in $L_\infty \setminus \{s\}$. \square

Nunmehr kann schließlich der

2.12. *Beweis der Typeneinteilung 1.7 anhand des Hauptsatzes 1.2* geführt werden.

Sei \mathcal{P} eine sechzehndimensionale lokalkompakte Translationsebene mit

$$\dim \Gamma \geq 38,$$

die nicht isomorph zur klassischen Oktavenebene ist. Der Hauptsatz 1.2 besagt die Existenz eines Punktes $s \in L_\infty$ mit

$$\dim \Gamma(s) \leq 6. \tag{1}$$

Für einen zunächst beliebigen weiteren Punkt $w \in L_\infty \setminus \{s\}$ (über den im folgenden noch genauer verfügt werden wird) seien S und W die zu s und w gehörigen Ursprungsgeraden und K die größte kompakte zusammenhängende Untergruppe von $\Gamma_{S,W}$ gemäß 1.5. Da der Kern der Ebene stets isomorph zu \mathbb{R} ist ([10, Theorem 1]), folgt anhand der Kompaktheit von K unmittelbar aus der Definition von $S\Gamma_s$, daß K in $S\Gamma_{S,W}$ enthalten und daher die größte kompakte Untergruppe von $(S\Gamma_{S,W})^1$ ist. Nach dem Lemma über Achsenstandgruppen (1.5) ist entweder

$$(S\Gamma_{S,W})^1 \text{ kompakt, also } (S\Gamma_{S,W})^1 = K \tag{2a}$$

oder

$$\dim S\Gamma_{S,W} = \dim K + 1. \tag{2b}$$

Nach 1.4 ist

$$(\Gamma_{S,W})^1 = (S\Gamma_{S,W})^1 \cdot P, \tag{3}$$

(wo $P = (\Gamma_{[0, L_\infty]})^1$ die Gruppe der Streckungen der affinen Ebene mit positiven reellen Skalaren bedeutet) und folglich entweder

$$\dim \Gamma_{S,W} = \dim K + 1 \tag{4a}$$

oder

$$\dim \Gamma_{S,W} = \dim K + 2. \tag{4b}$$

Das Ziel ist, zu zeigen, daß s und w so gewählt werden können, daß K groß wird. Wir beachten, daß wegen der Transitivität der Translationsgruppe $\dim \Gamma_{s,w} = \dim \Gamma_{S,W} + 16$ und erhalten mit den bekannten Dimensionsformeln

$$38 \leq \dim \Gamma = \dim \Gamma(s) + \dim \Gamma_s(w) + \dim \Gamma_{S,W} + 16. \tag{5}$$

In (1) unterscheiden wir nun die folgenden drei Fälle (a)–(c).

(a) Ist s sogar ein Fixpunkt von Γ , so erhält man aus (4) und (5) stets $38 \leq 0 + \dim \Gamma_s(w) + \dim K + 2 + 16$, also $\dim K \geq 20 - \dim \Gamma_s(w) \geq 12$. Nach 2.9 liegt dann eine der Alternativen der Typeneinteilung 1.7 vor.

(b) Ist $1 \leq \dim \Gamma(s) \leq 5$, so wähle man $w \in \Gamma(s) \setminus \{s\}$. Aus (4) und (5) ergibt sich dann $38 \leq 5 + \dim \Gamma_s(w) + \dim K + 2 + 16$ und folglich $\dim K \geq 15 - \dim \Gamma_s(w) \geq 10$,

was wiederum nach 2.9 auf die Alternativen der zu beweisenden Typeneinteilung führt.

(c) Nun muß noch der Fall

$$\dim \Gamma(s) = 6$$

behandelt werden. Wir unterscheiden dabei drei Situationen (c1) – (c3):

(c1) Zunächst sei $\Gamma(s)$ nicht homöomorph zur 6-Sphäre, und Γ sei nicht zweifach transitiv auf $\Gamma(s)$. Die erste Annahme impliziert nach dem Sphärenlemma (vgl. 1.8), daß $S\Gamma_{S,W}$ kompakt ist, daß also in (2) und (4) jeweils die schärfere Abschätzung (2a) bzw. (4a) gilt. Nach der zweiten Annahme existiert ein Punkt $w \in \Gamma(s) \setminus \{s\}$ mit $\dim \Gamma_s(w) \leq 5$. Mit (5) folgt insgesamt $38 \leq 6 + \dim \Gamma_s(w) + \dim K + 1 + 16$ und damit $\dim K \geq 15 - \dim \Gamma_s(w) \geq 10$, was wiederum mit 2.9 auf die behauptete Typeneinteilung zu schließen gestattet.

(c2) Nun betrachten wir den Fall, daß $\Gamma(s)$ homöomorph zur 6-Sphäre ist. Nach [21, 5.6] und wegen $\Gamma|L_\infty = \Gamma_o|L_\infty$ ist dann eine maximale kompakte Untergruppe C von Γ_o ebenfalls transitiv auf $\Gamma(s)$. Sei Ξ der Ineffektivitätskern von C auf $\Gamma(s)$. Nach [6, Theorem III] und [23, §2] ist die auf der 6-Sphäre $\Gamma(s)$ effektiv und transitiv wirkende Gruppe C/Ξ isomorph zu $SO_7(\mathbb{R})$ oder G_2 . Die exakte Homotopiesequenz der Faserung $C \rightarrow C/\Xi$ zeigt, daß Ξ höchstens zwei Zusammenhangskomponenten hat; C/Ξ^1 überlagert also $SO_7(\mathbb{R})$ oder G_2 endlich. Nun existiert eine kompakte zusammenhängende Untergruppe Σ von C , die mit Ξ^1 endlichen Schnitt hat und $C = \Sigma \cdot \Xi^1$ erfüllt (vgl. z.B. [16, 12.17]). Σ ist dann lokal isomorph zu $SO_7(\mathbb{R})$ oder G_2 . Nach 2.10 und [15, 3.6] läßt Σ in beiden Fällen zwei Ursprungsgeraden S' und W' invariant. Mit S' und W' anstelle von S und W erhält man nach 2.9 einen der Fälle (i) oder (iii) der Typeneinteilung 1.7.

(c3) Alternativ zu (c1) und (c2) ist nun noch die Situation zu behandeln, daß Γ auf der 6-dimensionalen Bahn $\Gamma(s) = \Gamma_o(s)$ zweifach transitiv operiert, wobei $\Gamma(s)$ nicht homöomorph zur 6-Sphäre ist. Die für die Wirkung von Γ auf $\Gamma(s)$ bestehenden Möglichkeiten können nun der Titschen Klassifikation aller zweifach transitiven Liegruppen ([29, S. 222ff.]) entnommen werden: Nach dieser Klassifikation wäre $\Gamma(s)$, falls kompakt, homöomorph zum sechsdimensionalen reellen projektiven Raum $P_6(\mathbb{R})$ oder zum dreidimensionalen komplexen projektiven Raum $P_3(\mathbb{C})$, und die von Γ auf $\Gamma(s)$ induzierte Gruppe $\Gamma|_{\Gamma(s)}$ von Homöomorphismen enthielte eine abgeschlossene Untergruppe, die auf $\Gamma(s)$ die übliche Wirkung von $PSL_7(\mathbb{R})$ auf $P_6(\mathbb{R})$ bzw. von $PSL_4(\mathbb{C})$ auf $P_3(\mathbb{C})$ realisieren würde. Diese Situationen vertragen sich nicht mit der Tatsache, daß wegen $\Gamma|L_\infty = S\Gamma_o|L_\infty$ und nach dem Lemma über Achsenstandgruppen (1.5) die Standgruppe von $\Gamma|_{\Gamma(s)}$ auf drei verschiedenen Punkten von $\Gamma(s)$ kompakt sein muß. Alternativ verbleibt nach der Titschen Klassifikation nur noch die folgende Möglichkeit:

$\Gamma(s)$ (mit der von Γ/Γ_s induzierten Topologie) läßt sich so mit \mathbb{R}^6 identifizieren, daß Γ_s dort als Gruppe \mathbb{R} -linearer Abbildungen (und transitiv auf $\mathbb{R}^6 \setminus \{0\}$) operiert. Wegen $\Gamma|L_\infty = \Gamma_o|L_\infty$ wirkt insbesondere $\Gamma_{o,s}$ transitiv auf dem Raum \mathfrak{E} der orientierten eindimensionalen Teilräume von $\Gamma(s) = \mathbb{R}^6$. Da \mathfrak{E} homöomorph zur 5-Sphäre ist, gilt das gleiche für $(\Gamma_{o,s})^1$ und für jede maximale kompakte Untergruppe Θ von $(\Gamma_{o,s})^1$ ([21, 5.6]). Mit [20, Theorem I], [23, §2] und [7] erschließt man, daß folglich Θ auf $\Gamma(s) = \mathbb{R}^6$ operiert wie eine der Gruppen $SO_6(\mathbb{R})$,

$U_3(\mathbb{C})$ oder $SU_3(\mathbb{C})$ in ihrer üblichen Wirkung auf \mathbb{R}^6 bzw. \mathbb{C}^3 . Dies läßt sich auch der expliziten Beschreibung aller auf \mathbb{R}^6 zweifach transitiven Liegruppen bei [31, Théorème 4.1 (4a)–(4c)] entnehmen.

Die nach 2.7 zu Θ lokal isomorphe lineare Gruppe $\Theta|S$ muß also eine Faktorgruppe haben, die zu $SO_6(\mathbb{R})$, $U_3(\mathbb{C})$ oder $SU_3(\mathbb{C})$ lokal isomorph ist. Nach der Übersicht 2.8 über die großen kompakten zusammenhängenden Untergruppen von $GL_8(\mathbb{R})$ ist im Fall $\Theta|\Gamma(s) = SO_6(\mathbb{R})$ folglich $\Theta|S$ und damit Θ lokal isomorph zu $SO_6(\mathbb{R})$ oder $SO_6(\mathbb{R}) \times SO_2(\mathbb{R})$; in den beiden andern Fällen lehrt die Übersicht 2.8, daß dann notwendig $\dim \Theta = \dim \Theta|S \leq 10$. Die erstgenannte Situation führt auf Alternative (ii) der Typeneinteilung 1.7, da dann der zu $SO_6(\mathbb{R})$ und damit zu $SU_4(\mathbb{C})$ lokal isomorphe zusammenhängende abgeschlossene Normalteiler Σ von Θ nach 2.11 neben S eine weitere Ursprungsgerade invariant läßt.

Es verbleiben die Fälle mit $\dim \Theta \leq 10$; wir zeigen, daß sich dann notwendig $\dim \Gamma \leq 35$ ergibt, womit diese Fälle angesichts der Generalvoraussetzung $\dim \Gamma \geq 38$ ausscheiden. Wir wählen hierzu $w \in \Gamma(s) \setminus \{s\}$ beliebig und können dann mittels Konjugation in $(\Gamma_{o,s})^1$ annehmen, daß die maximale kompakte Untergruppe Θ von $(\Gamma_{o,s})^1$ die größte kompakte zusammenhängende Untergruppe K von $\Gamma_{s,w} \subseteq \Gamma_{o,s}$ enthält. Es ist dann $K = (\Theta_w)^1$, wegen $\dim \Theta(w) = 5$ daher $5 + \dim K = \dim \Theta$ und wegen $\dim \Theta \leq 10$ also $\dim K \leq 5$. Mit (5) und (4) folgt daraus $\dim \Gamma \leq 6 + 6 + 5 + 2 + 16 = 35$.

Damit ist die Typeneinteilung 1.7 bewiesen. \square

Als Analogon zu 2.3 beweisen wir noch:

2.13. *In einer sechzehndimensionalen lokalkompakten Translationsebene enthält Γ_o nie eine zu $SL_3(\mathbb{C})$ lokal isomorphe abgeschlossene Untergruppe.*

Beweis. Angenommen, Δ wäre eine zusammenhängende Untergruppe von Γ_o dieser Art. Die \mathbb{R} -linearen irreduziblen Darstellungen von $SL_3(\mathbb{C})$ haben Dimension 6, 9, 12, 16 oder größer als 16 (s. z.B. Tabelle [32]). Würde Δ reduzibel auf der affinen Ebene $\mathbb{A} = \mathbb{R}^{16}$ wirken, so hätte folglich Δ von o verschiedene Fixpunkte und ließe also eine Ursprungsgerade S invariant. Auf einem zu S komplementären Δ -invarianten Teilraum $V = \mathbb{R}^8$ von $\mathbb{A} = \mathbb{R}^{16}$ hätte Δ aus demselben Grund ebenfalls von o verschiedene Fixpunkte; neben S gäbe es also eine weitere unter Δ invariante Ursprungsgerade W . Dies wäre ein eklatanter Widerspruch gegen die allgemeine Struktur von Achsenstandgruppen (1.5), da $SL_3(\mathbb{C})$ keine kompakten Untergruppen der Kodimension höchstens 2 hat.

Es bleibt der Fall, daß Δ irreduzibel auf $\mathbb{A} = \mathbb{R}^{16}$ wirkt; die Wirkung ist dann äquivalent zur adjungierten Darstellung von $SL_3(\mathbb{C})$ auf der Liealgebra

$$A_2 = \{A \in \mathbb{C}(3) / \text{sp } A = 0\}$$

der komplexen 3×3 -Matrizen mit verschwindender Spur. Wir identifizieren \mathbb{A} entsprechend mit A_2 . Man betrachte nun die Involution ι von $\Delta = \text{PSL}_3(\mathbb{C})$, die der Matrix

$$\begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \in \text{SL}_3(\mathbb{C})$$

entspricht. Sie wird von der $SL_2(\mathbb{C}) \times \{1\} \subseteq SL_3(\mathbb{C})$ entsprechenden Untergruppe Σ von Δ zentralisiert. Wäre ι axial, so ließe ι gemäß 2.6 genau zwei Ursprungsgeraden fest, die dann auch invariant unter Σ wären; dies steht wiederum im Widerspruch zur Struktur von Achsenstandgruppen (1.5). Also muß ι gemäß 2.6 eine Baer-Involution sein. Der Raum der affinen Punkte der zugehörigen Baer-Unterebene \mathcal{B} ist der Unterraum

$$\mathbb{B} = \left\{ \begin{pmatrix} A & \\ & -\text{sp } A \end{pmatrix} \middle/ A \in \mathbb{C}(2) \right\}$$

der Fixpunkte von ι in $\mathbb{A} = \mathbb{A}_2$. Auf dem Σ -invarianten 6-dimensionalen Unterraum

$$\mathbb{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} A & \\ & 0 \end{pmatrix} \middle/ A \in \mathbb{C}(2), \text{sp } A = 0 \right\}$$

von \mathbb{B} wirkt Σ irreduzibel, da Σ dort die adjungierte Darstellung von $SL_2(\mathbb{C})$ induziert. Der dazu komplementäre 2-dimensionale Unterraum

$$\mathbb{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & & \\ & a & \\ & & -2a \end{pmatrix} \middle/ a \in \mathbb{C} \right\}$$

von \mathbb{B} bleibt punktweise fest unter Σ ; also müßte Σ in der Unterebene \mathcal{B} auch eine Ursprungsgerade, d.h. einen 4-dimensionalen \mathbb{R} -linearen Teilraum von \mathbb{B} invariant lassen, was der Irreduzibilität von Σ auf \mathbb{B}_1 widerspricht. \square

§3. Beweis des Hauptsatzes

3.1. Generalvoraussetzung, Grundannahmen. Sei \mathcal{P} eine lokalkompakte Translationsebene der Dimension $2n$ mit $n \in \{4, 8\}$, in der jede Bahn von Γ auf L_∞ Dimension n oder $n-1$ hat. Wir nehmen an, daß \mathcal{P} nicht isomorph zur klassischen Ebene über den Quaternionen oder den Oktaven ist; der Beweis des Hauptsatzes 1.2 besteht darin, diese Annahmen zum Widerspruch zu führen.

Die in 1.4 definierte zusammenhängende abgeschlossene Untergruppe

$$\Delta = S\Gamma_o$$

von Γ_o hat wegen $S\Gamma_o|L_\infty = \Gamma|L_\infty$ in L_∞ ebenfalls nur Bahnen der Dimension n oder $n-1$; es sei daran erinnert, daß Δ fast effektiv auf L_∞ wirkt. — Der

3.2. Gang des Beweises läßt sich folgendermaßen umreißen. Zunächst wird gezeigt, daß Δ halbeinfach sein muß, nicht kompakt sein darf und als Gruppe \mathbb{R} -linearer Transformationen der affinen Ebene $\mathbb{A} = \mathbb{R}^{2n}$ nur irreduzibel wirken kann. Da Δ noch gewissen Dimensionseinschränkungen unterliegt, ist die Liste der für Δ in Frage kommenden Gruppen und möglichen Darstellungen relativ klein und kann fallweise bearbeitet werden. Natürlich erhält man für $n=4$ und $n=8$ jeweils ganz verschiedene Listen. Eine wichtige Fallunterscheidung ergibt sich je nachdem, ob Δ

sogar (quasi-)einfach oder aber fastdirektes Produkt zweier echter halbeinfacher zusammenhängender abgeschlossener Normalteiler Δ_1 und Δ_2 ist. Im zweiten Fall hat man für die Wirkung von Δ auf $\mathbb{A} = \mathbb{R}^{2n}$ die folgende Alternative:

- Entweder ist die Wirkung von Δ zu beschreiben als die Reellifizierung einer komplex-linearen Darstellung von $\Delta = \Delta_1 \cdot \Delta_2$ auf $\mathbb{C}^n = \mathbb{C}^{n_1} \otimes \mathbb{C}^{n_2}$ mit $n_1 \cdot n_2 = n$, welche das Tensorprodukt von irreduziblen komplex-linearen Darstellungen der Faktoren Δ_i auf \mathbb{C}^{n_i} ($i = 1, 2$) ist,
- oder aber die Wirkung von Δ kann beschrieben werden als die reelle Form einer komplex-linearen Darstellung von $\Delta = \Delta_1 \cdot \Delta_2$ auf $\mathbb{C}^{2n} = \mathbb{C}^{n_1} \otimes \mathbb{C}^{n_2}$ mit $n_1 \cdot n_2 = 2n$, welche das Tensorprodukt von irreduziblen komplex-linearen Darstellungen der Faktoren Δ_i auf \mathbb{C}^{n_i} ist.

Da n gleich 4 oder 8 ist, ist entweder eines der n_i gleich 2 oder aber man hat $n_1 = n_2 = 4$. Daher spielen im Beweis Tensorfaktoren \mathbb{C}^2 und \mathbb{C}^4 und die auf ihnen möglichen Darstellungen von Faktoren von Δ in verschiedenen Situationen eine wichtige Rolle.

Für achtdimensionale Ebenen besteht der Beweis in den Abschnitten 3.1 – 3.12, wobei 3.1 – 3.9 auch dem Beweis für sechzehndimensionale Ebenen zugrundeliegen, während 3.10 – 3.12 ausschließlich den achtdimensionalen Fall behandeln.

3.3. Eine acht- oder sechzehndimensionale lokalkompakte Translationsebene, in der die affine Kollineationsgruppe transitiv auf L_∞ operiert, ist nach [26] die klassische Ebene über \mathbb{H} bzw. \mathbb{O} . Da entsprechend der Generalvoraussetzung die Ebene \mathcal{P} nicht klassisch sein soll, kommen also unter den Bahnen von Δ in L_∞ tatsächlich Bahnen der Dimension $n - 1$ vor.

Keine der Bahnen von Δ in L_∞ ist homöomorph zu einer Sphäre: eine zur n -Sphäre homöomorphe Bahn würde nämlich Transitivität auf L_∞ bedeuten, und eine zur $(n - 1)$ -Sphäre homöomorphe Bahn würde nach dem Sphärensatz (vgl. 1.9) die Existenz von Fixpunkten von Δ in L_∞ nach sich ziehen.

Das Lemma über Achsenstandgruppen (1.5) und das Sphärenlemma (1.8) besagen daher:

3.4. Für je zwei verschiedene Punkte $s, w \in L_\infty$ ist jede abgeschlossene Untergruppe von $\Delta_{s, w}$ entweder selbst kompakt, oder sie enthält eine kompakte Untergruppe der Kodimension 1. Liegt w in der Bahn $\Delta(s)$ von s , so ist $\Delta_{s, w}$ kompakt. \square

Eine unmittelbare, für die Anwendung sehr handliche Folgerung ist

3.5. Sei Ξ eine abgeschlossene Untergruppe von Δ , die keine kompakte Untergruppe der Kodimension höchstens 1 hat. Dann liegen alle unter Ξ invarianten eindimensionalen \mathbb{R} -linearen Teilräume von $\mathbb{A} = \mathbb{R}^{2n}$ in ein- und derselben Ursprungsgeraden. \square

Diese Informationen sind entscheidende Beweishilfsmittel. Sie werden immer wieder herangezogen, um bestimmte a priori denkbare Konstellationen für Δ auszuschließen. Die wichtigsten Folgerungen sind jedoch die nachstehenden Aussagen:

3.6. Die Liegruppe Δ ist halbeinfach und nicht kompakt.

Beweis. Zur Halbeinfachheit ist zu zeigen, daß Δ keinen nichttrivialen abgeschlossenen zusammenhängenden kommutativen Normalteiler enthält. Angenommen, Φ wäre ein solcher.

Zunächst muß Φ kompaktfrei sein: Sonst hätte nämlich Δ eine zentrale eindimensionale Torusuntergruppe T , und diese hätte nach [28, 4.7.12 S. 197] einen Fixpunkt s in L_∞ , da L_∞ als Sphäre gerader Dimension nicht verschwindende Eulercharakteristik hat. Wegen der Zentralität von T bestünde dann die ganze Bahn $\Delta(s)$ aus Fixpunkten von T . Da $\Delta(s)$ in L_∞ höchstens Kodimension 1 hat, und da nach [19] die Fixpunkt mengen nichttrivialer kompakter zusammenhängender und effektiver Transformationsgruppen mindestens Kodimension 2 haben, müßte also T identisch auf L_∞ wirken, im Widerspruch dazu, daß Δ fast effektiv auf L_∞ ist.

Da kompaktfrei, wäre Φ also eine Vektorgruppe. Eine Einparameteruntergruppe Φ_1 von Φ hätte nun wieder nach [28, 4.7.12 S. 197] einen Fixpunkt s in L_∞ , und wegen der Kommutativität von Φ bestünde die ganze Bahn $\Phi(s)$ aus Fixpunkten von Φ_1 . Enthielte $\Phi(s)$ außer s noch einen weiteren Punkt w , so wäre $\Phi_1 \cong \mathbb{R}$ eine abgeschlossene Untergruppe der nach 3.4 kompakten Standgruppe $\Delta_{s,w}$, ein Widerspruch. Folglich müßte s ein Fixpunkt von ganz Φ sein. Da Φ als Normalteiler von Δ vorausgesetzt ist, bestünde mithin die ganze Bahn $\Delta(s)$ aus Fixpunkten von Φ . Da $\Delta(s)$ nicht einpunktig ist, kann man daraus nach demselben Schluß wie eben die Kompaktheit von Φ folgern; dieser Widerspruch beweist die Halbeinfachheit von Δ .

Wäre Δ kompakt, so hätte Δ in der n -Sphäre L_∞ neben Bahnen der Dimension $n-1$ noch Ausnahmehbahnen kleinerer Dimension ([24, Theorem 1.1]). \square

3.7. Der \mathbb{R} -Vektorraum $\mathbb{A} = \mathbb{R}^{2^n}$ ist irreduzibel unter Δ .

Beweis. Da Δ halbeinfach ist, zerfällt \mathbb{A} als direkte Summe von unter Δ irreduziblen \mathbb{R} -linearen Teilräumen.

Sei W ein solcher. Wir betrachten Δ als Transformationsgruppe des projektiven Raums $P(W)$ der eindimensionalen Teilräume von W (mit der üblichen Topologie). Hätte Δ in $P(W)$ Bahnen der Dimension $\leq n-2$, so gäbe es eine Untergruppe der Kodimension höchstens $n-2$, die einen eindimensionalen Teilraum von W , und damit auch die durch diesen bestimmte Ursprungsgerade L von \mathcal{P} , invariant ließe. Die Bahn des uneigentlichen Punkts $L \wedge L_\infty$ von L unter Δ wäre dann ebenfalls höchstens $(n-2)$ -dimensional, im Gegensatz zu den Voraussetzungen. Also beträgt die Dimension jeder Bahn von Δ in $P(W)$ mindestens $n-1$.

Insbesondere ist jede irreduzible Komponente von \mathbb{A} mindestens n -dimensional. Wäre $\mathbb{A} = \mathbb{R}^{2^n}$ nicht selbst irreduzibel, so müßte folglich die Dimension jeder irreduziblen Komponente W genau gleich n sein, und Δ müßte auf der $(n-1)$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit $P(W)$ mit lauter $(n-1)$ -dimensionalen Bahnen, also transitiv wirken. Man betrachte nun die stetige Abbildung

$$\psi: P(W) \rightarrow L_\infty: [x] \mapsto x_\infty = (o \vee x) \wedge L_\infty,$$

die jedem eindimensionalen Teilraum von W den uneigentlichen Punkt x_∞ der durch ihn bestimmten Ursprungsgeraden zuordnet. Da der $(n-1)$ -dimensionale reelle projektive Raum nicht in die n -Sphäre einbettbar ist ([17]), ist ψ nicht injektiv; d.h. es existiert eine Ursprungsgerade L von \mathcal{P} mit $\dim W \cap L \geq 2$. Sei W_1 ein eindimensionaler Teilraum von $W \cap L$ und Δ_1 die Untergruppe der Elemente von Δ , die W_1 invariant lassen. Es gelten die Beziehungen

$$\Delta_1 \subseteq \Delta_L = \{\delta \in \Delta / \delta(W_1) \subseteq W \cap L\}.$$

Wegen der Transitivität von Δ auf $P(W)$ wären Δ/Δ_1 und Δ_L/Δ_1 homöomorph zu $P(W)$ bzw. $P(W \cap L)$, und wegen $\dim P(W \cap L) \geq 1$ hätte man folglich $\dim \Delta_L = \dim \Delta_1 + \dim \Delta_L/\Delta_1 > \dim \Delta_1 = \dim \Delta - \dim \Delta/\Delta_1 = \dim \Delta - (n - 1)$. Die Dimension $\dim \Delta - \dim \Delta_L$ der Bahn des uneigentlichen Punkts $L \wedge L_\infty$ von L wäre also kleiner als $n - 1$, im Gegensatz zur Generalvoraussetzung. Dieser Widerspruch zeigt, daß Δ auf \mathbb{A} irreduzibel wirken muß. \square

Im folgenden behandeln wir im voraus noch einige Situationen, die unter der Annahme, daß Δ nicht einfach ist, immer wieder auftauchen:

3.8. Angenommen, Δ ist fastdirektes Produkt zweier nichttrivialer abgeschlossener zusammenhängender halbeinfacher Normalteiler Δ_1 und Δ_2 . Bezüglich der Wirkung von Δ auf $\mathbb{A} = \mathbb{R}^{2n}$ betrachten wir die folgenden beiden Situationen:

(a) \mathbb{A} ist beschrieben als Tensorprodukt $\mathbb{R}^2 \otimes_{\mathbb{R}} V$ (V ein n -dimensionaler \mathbb{R} -Vektorraum), und die Wirkung von Δ ist das Tensorprodukt von \mathbb{R} -linearen Darstellungen von Δ_1 resp. Δ_2 auf \mathbb{R}^2 resp. V .

(b) \mathbb{A} ist beschrieben als der dem Tensorprodukt $\mathbb{C}^2 \otimes_{\mathbb{C}} V$ zugrundeliegende \mathbb{R} -Vektorraum (V ein \mathbb{C} -Vektorraum der Dimension $n/2$), und die Wirkung von Δ ist das Tensorprodukt von \mathbb{C} -linearen Darstellungen von Δ_1 resp. Δ_2 auf \mathbb{C}^2 resp. V .

Wir zeigen:

Die Situation (a) tritt nicht auf. In der Situation (b) ist Δ_1 isomorph zu $SU_2(\mathbb{C})$ und wirkt auf \mathbb{C}^2 klassisch.

Beweis. Wir behandeln die beiden Situationen simultan. \otimes steht wahlweise für Tensorierung über \mathbb{R} oder \mathbb{C} .

Da Δ irreduzibel auf \mathbb{A} wirkt, ist die Darstellung von Δ_1 auf \mathbb{R}^2 bzw. \mathbb{C}^2 irreduzibel. Nach der Tabelle [32] ist folglich Δ_1 eine der Gruppen $SL_2(\mathbb{R}), SL_2(\mathbb{C})$ oder $SU_2(\mathbb{C})$, und die Darstellung von Δ_1 ist die klassische Darstellung auf \mathbb{R}^2 bzw. \mathbb{C}^2 oder deren duale Darstellung.

Zur Behandlung der Fälle, in denen Δ_1 gleich $SL_2(\mathbb{R})$ oder $SL_2(\mathbb{C})$ ist, betrachte man die zweidimensionale kompaktfreie Untergruppe

$$\Xi = \left\{ \begin{pmatrix} r & b \\ & r^{-1} \end{pmatrix} \middle| 0 < r \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \right\}$$

von Δ_1 . Sie läßt für einen geeigneten Vektor $e \neq 0$ von \mathbb{R}^2 bzw. \mathbb{C}^2 und für alle $v \in V \setminus \{0\}$ die von $e \otimes v$ aufgespannten eindimensionalen \mathbb{R} -Untervektorräume einzeln invariant. Nach 3.5 und aus Dimensionsgründen muß dann $e \otimes V$ eine Ursprungsgerade von \mathscr{P} sein. Diese ist aber invariant unter der Untergruppe $\Xi \cdot \Delta_2$, und im Fall $\Delta_1 = SL_2(\mathbb{C})$ sogar unter der Untergruppe

$$\left\{ \begin{pmatrix} z & b \\ & z^{-1} \end{pmatrix} \middle| z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, b \in \mathbb{C} \right\} \cdot \Delta_2$$

von $\Delta = \Delta_1 \cdot \Delta_2$, d.h. unter einer Untergruppe der Kodimension höchstens 2. Die Bahn des zur Ursprungsgerade $e \otimes V$ gehörigen uneigentlichen Punkts unter Δ kann also höchstens 2-dimensional sein, im Gegensatz zur Generalvoraussetzung.

Damit verbleibt nur die Möglichkeit $\Delta_1 = SU_2(\mathbb{C})$. Da $SU_2(\mathbb{C})$ keine nichttriviale Darstellung in \mathbb{R}^2 hat, ist alles gezeigt. \square

3.9. *Angenommen, Δ ist fastdirektes Produkt zweier nichttrivialer abgeschlossener zusammenhängender halbeinfacher Normalteiler Δ_1 und Δ_2 . Ferner sei die irreduzible Wirkung von Δ auf $\mathbb{A} = \mathbb{R}^{2n}$ die reelle Form einer komplex-linearen irreduziblen Darstellung ρ von Δ in $\mathbb{C}^{2n} = \mathbb{C}^2 \otimes_{\mathbb{C}} V$, welche das Tensorprodukt einer komplex-linearen Darstellung ρ_1 von Δ_1 auf \mathbb{C}^2 und einer komplex-linearen Darstellung ρ_2 von Δ_2 auf dem n -dimensionalen \mathbb{C} -Vektorraum V ist.*

Dann ist ρ_1 die klassische Darstellung von $SU_2(\mathbb{C})$ auf \mathbb{C}^2 , und ρ_2 ist selbstkonjugiert, aber nicht vom reellen Typ. Insbesondere ist Δ_2 nicht lokal isomorph zu $SL_2(\mathbb{R})$.

Beweis. Mit ρ sind auch die Darstellungen ρ_1 und ρ_2 irreduzibel und selbstkonjugiert. Laut Tabelle [32] kommt daher für ρ_1 nur die klassische Darstellung einer der Gruppen $SU_2(\mathbb{C})$ oder $SL_2(\mathbb{R})$ auf \mathbb{C}^2 in Betracht.

Daß dabei der Fall $\Delta_1 = SL_2(\mathbb{R})$ nicht auftreten kann, sieht man folgendermaßen: In diesem Fall wäre ρ_1 vom reellen Typ; da nach Voraussetzung ρ vom reellen Typ ist, wäre also auch ρ_2 vom reellen Typ. Mit $V_{\mathbb{R}}$ sei der n -dimensionale \mathbb{R} -Untervektorraum der Fixpunkte einer ρ_2 -invarianten Antiinvolution erster Art von V bezeichnet. Die Wirkung von Δ auf \mathbb{A} als reelle Form von ρ könnte damit bei geeigneter Identifikation von \mathbb{A} mit $\mathbb{R}^2 \otimes_{\mathbb{R}} V_{\mathbb{R}}$ beschrieben werden als das Tensorprodukt über \mathbb{R} der Einschränkungen von ρ_1 auf \mathbb{R}^2 und von ρ_2 auf $V_{\mathbb{R}}$. Dies ist aber nach 3.8 ausgeschlossen.

ρ_1 muß also die klassische Darstellung von $SU_2(\mathbb{C})$ in \mathbb{C}^2 sein; diese ist nicht vom reellen Typ. Da ρ reell vorausgesetzt ist, kann daher auch ρ_2 nicht reellen Typ haben. Alle Darstellungen von $SL_2(\mathbb{R})$ sind reell; folglich ist Δ_2 sicher nicht lokal isomorph zu $SL_2(\mathbb{R})$. \square

Mit diesen Informationen kann nun der

Beweis des Hauptsatzes für 8-dimensionale Ebenen ($n=4$)

geführt werden.

3.10. *Im Fall $n=4$ ist $\dim \Delta \leq 9$.*

Beweis. Nach 3.3 existiert ein Punkt $s \in L_{\infty}$, dessen Bahn $\Delta(s)$ genau Dimension 3 hat. Für $w \in \Delta(s) \setminus \{s\}$ ist $\Delta_{s,w}$ nach 3.4 kompakt. Wäre $\dim \Delta_{s,w} \geq 4$, so hätte die kompakte zusammenhängende Achsenstandgruppe $(\Delta_{s,w})^1$ nach der Liste 2.1 in L_{∞} eine zur 3-Sphäre homöomorphe Bahn. Nach dem Sphärensatz (vgl. 1.9) hätte Δ folglich Fixpunkte in L_{∞} , im Gegensatz zur Generalvoraussetzung.

Somit ist $\dim \Delta_{s,w} \leq 3$ und daher $\dim \Delta = \dim \Delta(s) + \dim \Delta_s(w) + \dim \Delta_{s,w} \leq 3 + 3 + 3 = 9$. \square

3.11. ($n=4$). Δ kann nicht einfach sein.

Beweis. Nach 3.6, 3.10 und 3.7 ist Δ nicht kompakt, $\dim \Delta \leq 9$, und Δ wirkt irreduzibel auf der affinen Ebene $\mathbb{A} = \mathbb{R}^8$. Die einzigen nichtkompakten einfachen Liegruppen der Dimension ≤ 9 , die eine treue irreduzible Darstellung in \mathbb{R}^8 besitzen, sind nun $SL_3(\mathbb{R})$, $PSU_3(\mathbb{C}, 1)$, $SL_2(\mathbb{C})$ und $SL_2(\mathbb{R})$, wie man etwa anhand der Tabelle [32] ermittelt. Nach 2.3 und 2.4 kann Δ nicht lokal isomorph zu $SL_3(\mathbb{R})$ oder $SL_2(\mathbb{C})$ sein. Ferner hat in einer achtdimensionalen lokalkompakten Translationsebene nach [15, 3.3] Γ_0 nie eine zu $PSU_3(\mathbb{C}, 1)$ lokal isomorphe Untergruppe.

Wäre schließlich $\Delta = \text{SL}_2(\mathbb{R})$, so hätte eine eindimensionale Torusuntergruppe T von Δ in L_∞ einen Fixpunkt, da die 4-Sphäre L_∞ nicht verschwindende Eulercharakteristik hat ([28, 4.7.12 S. 197]); dieser hätte dann unter Δ eine Bahn der Dimension höchstens 2, im Widerspruch zu den Generalvoraussetzungen. Also ist Δ nicht einfach. \square

3.12. ($n=4$). Folglich muß Δ fastdirektes Produkt zweier nichttrivialer abgeschlossener zusammenhängender halbeinfacher Normalteiler Δ_1 und Δ_2 sein. Die irreduzible Wirkung von Δ auf \mathbb{A} ist dann das Tensorprodukt von Darstellungen von Δ_1 und Δ_2 ; dabei liegt eine der folgenden beiden Situationen vor:

(a) Die Wirkung von Δ sei die Reellifizierung einer komplex-linearen Darstellung von Δ in \mathbb{C}^4 . Als \mathbb{R} -Vektorraum läßt sich dann \mathbb{A} so mit $\mathbb{C}^2 \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^2$ identifizieren, daß die Wirkung von Δ durch das Tensorprodukt von \mathbb{C} -linearen Darstellungen von Δ_1 bzw. Δ_2 auf den Faktoren \mathbb{C}^2 beschrieben ist. Nach 3.8 wären dann aber Δ_1 und Δ_2 beide gleich $\text{SU}_2(\mathbb{C})$, und Δ wäre kompakt, im Widerspruch zu 3.6.

(b) Alternativ zu (a) sei die Wirkung von Δ auf $\mathbb{A} = \mathbb{R}^8$ die reelle Form einer komplex-linearen irreduziblen Darstellung ρ von Δ in $\mathbb{C}^8 = \mathbb{C}^2 \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^4$, welche als Tensorprodukt komplex-linearer Darstellungen ρ_1 und ρ_2 von Δ_1 bzw. Δ_2 auf den Faktoren \mathbb{C}^2 bzw. \mathbb{C}^4 zu beschreiben ist. Nach 3.9 ist dann $\Delta_1 = \text{SU}_2(\mathbb{C})$.

Δ_2 ist einfach: sonst wäre Δ_2 nämlich fastdirektes Produkt zweier nichttrivialer zusammenhängender abgeschlossener halbeinfacher Normalteiler N_1 und N_2 , und die Darstellung ρ_2 könnte ihrerseits beschrieben werden als Tensorprodukt zweier komplex-linearer Darstellungen von N_1 bzw. N_2 in \mathbb{C}^2 . Nach 3.9 wäre dann $N_1 = \text{SU}_2(\mathbb{C})$, und Δ wäre kompakt, im Widerspruch zu 3.6.

Wegen $\dim \Delta \leq 9$ ist die einfache Gruppe Δ_2 lokal isomorph zu $\text{SL}_2(\mathbb{R})$, $\text{SL}_2(\mathbb{C})$ oder $\text{SU}_2(\mathbb{C})$, wobei $\text{SL}_2(\mathbb{R})$ nach 3.9 als Möglichkeit ausscheidet. Wäre Δ_2 lokal isomorph zu $\text{SU}_2(\mathbb{C})$, so wäre Δ kompakt, im Widerspruch zu 3.6.

Also muß Δ lokal isomorph zu $\text{SU}_2(\mathbb{C}) \times \text{SL}_2(\mathbb{C})$ sein. Eine maximale kompakte Untergruppe K von Δ ist dann lokal isomorph zu $\text{SO}_4(\mathbb{R})$ und kann daher auf der 4-Sphäre L_∞ nur mit genau zwei Fixpunkten und sonst lauter zur 3-Sphäre homöomorphen Bahnen wirken ([24]). Nach dem Sphärensatz (siehe 1.9) hat dann aber Δ selbst einen universellen Fixpunkt in L_∞ , womit ein Widerspruch gegen die Generalvoraussetzung erreicht ist.

Damit hat man für achtdimensionale Ebenen jeden denkbaren Fall diskutiert, die Annahmen von 3.1 zum Widerspruch geführt, und somit den Hauptsatz 1.2 bewiesen. \square

Beweis des Hauptsatzes für 16-dimensionale Ebenen ($n=8$)

Zunächst wird gezeigt, daß gewisse Gruppen nicht als Untergruppen von Δ in Frage kommen. Der folgende Fall ist besonders wichtig, aber auch entsprechend aufwendig, was den Einsatz geometrischer Argumente anbetrifft:

3.13. ($n=8$) Δ enthält keine zu $\text{SO}_7(\mathbb{R}, i)$ ($i \in \{1, 2\}$) lokal isomorphe abgeschlossene Untergruppe.

Beweis. (a) Angenommen, Ξ sei eine zusammenhängende Untergruppe dieser Art. Da $\text{SO}_7(\mathbb{R}, i)$ zentrumsfrei ist, wird dann $\text{SO}_7(\mathbb{R}, i)^1$ von Ξ überlagert. Sei Σ

diejenige kompakte zusammenhängende Untergruppe von Ξ , die unter dieser Überlagerung auf die Untergruppe $SO_5(\mathbb{R}) \times (1)^2$ von $SO_7(\mathbb{R}, i)$ abgebildet wird.

Die universelle Überlagerungsgruppe von Σ ist $SU_2(\mathbb{H})$. Die Dimensionen der irreduziblen \mathbb{R} -linearen Darstellungen von $SU_2(\mathbb{H})$ sind 5, 8, 10, 14 oder größer als 16. Die einzige irreduzible Darstellung der Dimension 5 bzw. 8 ist die gewöhnliche Wirkung als $SO_5(\mathbb{R})$ bzw. $SU_2(\mathbb{H})$ auf \mathbb{R}^5 bzw. \mathbb{H}^2 ([32]). Entweder hat also Σ auf der affinen Ebene $\mathbb{A} = \mathbb{R}^{16}$ von o verschiedene Fixpunkte, oder aber \mathbb{A} läßt sich als \mathbb{R} -Vektorraum so mit $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{C}^2$ identifizieren, daß Σ auf jedem der Faktoren klassisch als $SU_2(\mathbb{H})$ wirkt. Zunächst soll die erste Alternative ausgeschlossen werden:

Hat Σ einen Fixpunkt in $\mathbb{A} \setminus \{o\}$, so läßt Σ die durch diesen Punkt gehende Ursprungsgerade W invariant, und wirkt auf $W = \mathbb{R}^8$ (da nach 2.7 fast effektiv) wie $SO_5(\mathbb{R}) \times (1)^3$ auf $\mathbb{R}^5 \times \mathbb{R}^3$. Sei S ein zu W komplementärer Σ -invarianter Unterraum von $\mathbb{A} = \mathbb{R}^{16}$. In $S \setminus \{o\}$ darf Σ keine Fixpunkte haben: sonst ließe Σ ein nicht ausgeartetes Viereck der affinen Ebene fest und könnte nach [1, Satz 11 S. 135] gedeutet werden als Automorphismengruppe eines koordinatisierenden Quasikörpers; achtdimensionale lokalkompakte Quasikörper haben aber nach [14] nie eine 10-dimensionale Automorphismengruppe. Also wirkt Σ auf $S = \mathbb{R}^8 = \mathbb{H}^2$ gewöhnlich als $SU_2(\mathbb{H})$. Da $SU_2(\mathbb{H})$ einfach zusammenhängend ist, ist die Überlagerung $\Sigma \rightarrow \Sigma/S$ ein Isomorphismus. Die zentrale Involution von Σ wirkt trivial auf W , ist also eine axiale Involution, und bewirkt auf S die Spiegelung am Ursprung. Nach 2.6 ist also auch S eine Ursprungsgerade. An der Wirkung von Σ auf einer zu S parallelen Geraden durch einen Fixpunkt von Σ in $W \setminus \{o\}$ liest man nun vermöge Zentralprojektion vom Ursprung auf L_∞ ab, daß Σ dann in L_∞ zur 7-Sphäre homöomorphe Bahnen hat. Nach dem Sphärensatz (s. 1.9) muß dann aber Δ Fixpunkte in L_∞ haben, im Widerspruch zur Generalvoraussetzung.

Alternativ hat man die Situation zu behandeln, daß Σ isomorph zu $SU_2(\mathbb{H})$ ist und bei geeigneter Identifikation von \mathbb{A} mit $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$ gewöhnlich auf jedem der beiden Faktoren operiert. Wir betrachten die Involution

$$\iota = \begin{pmatrix} -1 & \\ & 1 \end{pmatrix} \in SU_2(\mathbb{H}) = \Sigma.$$

Ihr Zentralisator in $\Sigma = SU_2(\mathbb{H})$ ist

$$Z = \left\{ \begin{pmatrix} a & \\ & b \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{H}; |a| = |b| = 1 \right\} \cong Spin_3(\mathbb{R})^2.$$

Unter der Überlagerungsabbildung $\pi: SU_2(\mathbb{H}) \rightarrow PSU_2(\mathbb{H}) \cong SO_5(\mathbb{R})$ geht ι über in eine Involution, die in $SO_5(\mathbb{R})$ einen 6-dimensionalen Zentralisator hat; bis auf Konjugation ist also

$$\pi(\iota) = (-1)^4 \times (1) \in SO_5(\mathbb{R}),$$

und die Überlagerung $\Xi \rightarrow SO_7(\mathbb{R}, i)^1$ bildet Z auf die Untergruppe $SO_4(\mathbb{R}) \times (1)^3$ von $SO_7(\mathbb{R}, i)$ ab. Ihr Zentralisator in $SO_7(\mathbb{R}, i)$ enthält die zu $SL_2(\mathbb{R})$ lokal isomorphe Gruppe $(1)^4 \times SO_3(\mathbb{R}, i)$. Insgesamt existiert also eine zu $SL_2(\mathbb{R})$ lokal isomorphe abgeschlossene zusammenhängende Untergruppe Λ von Ξ , die Z und damit auch $\iota \in Z$ zentralisiert. Bezüglich Bahnen von Λ in L_∞ hat man:

(b) Λ läßt keine aus mehreren Punkten bestehende, aber höchstens eindimensionale Teilmenge von L_∞ invariant.

Da $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$ keine kompakte Untergruppe der Kodimension höchstens 1 hat, und folglich Λ nach 3.4 nicht mehrere Fixpunkte in L_∞ haben kann, hätte sonst nämlich Λ dort eine eindimensionale Bahn $\mathfrak{S} = \Lambda(s)$ ($s \in L_\infty$). Mit der von Λ/Λ_s induzierten Topologie wäre \mathfrak{S} eine eindimensionale Mannigfaltigkeit. Nach dem Satz von Brouwer über transitive Wirkungen lokalkompakter Gruppen auf eindimensionalen Mannigfaltigkeiten (vgl. [25, 3.18]) wäre die effektive Wirkung der zu $\text{SL}_2(\mathbb{R})$ lokal isomorphen Gruppe Λ auf \mathfrak{S} äquivalent zur klassischen Wirkung von $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$ auf der reellen projektiven Geraden oder zu einer Überlagerung dieser Wirkung. Bei diesen Wirkungen ist aber die Standgruppe auf zwei Punkten nicht kompakt, während nach 3.4 für $s \neq w \in \Lambda(s)$ die Standgruppe $\Lambda_{s,w}$ kompakt sein soll. Dieser Widerspruch beweist (b).

(c) Die Involution ι kann folglich nicht axial sein (sonst wären gemäß 2.6 das Zentrum und der uneigentliche Punkt der Achse von ι zwei verschiedene in L_∞ liegende Fixpunkte von Λ , da ι von Λ zentralisiert wird). Also ist ι eine Baer-Involution. Sei \mathbb{B} die affine Punktmenge der zugehörigen Baer-Unterebene \mathcal{B} , d.h. der Unterraum der Fixpunkte von ι in \mathbb{A} . An der Beschreibung der Wirkung von Σ auf \mathbb{A} liest man unmittelbar ab, daß der Normalteiler

$$Z_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \\ & b \end{pmatrix} / b \in \mathbb{H}, |b| = 1 \right\} \cong \text{Spin}_3(\mathbb{R})$$

von Z effektiv auf \mathbb{B} wirkt. Da ι von Λ zentralisiert wird, ist \mathbb{B} auch unter Λ invariant. Λ kann nicht trivial auf \mathbb{B} wirken (sonst ließe Λ entgegen (b) auch zwei Punkte von L_∞ fest). Wir studieren nun Bahnen von Λ und Z_2 in der zur 4-Sphäre homöomorphen uneigentlichen Geraden $L_\infty^\mathcal{B}$ von \mathcal{B} (der Spur von L_∞ in der Unterebene \mathcal{B}):

(d) Die (quasi-)einfache Gruppe $Z_2 \cong \text{Spin}_3(\mathbb{R})$ wirkt auf $L_\infty^\mathcal{B}$ entweder trivial oder fast effektiv. Angenommen zunächst, sie würde dort trivial wirken. Dann wäre Z_2 isomorph zu einer Untergruppe der multiplikativen Gruppe des Kerns der Translationsebene \mathcal{B} (1.4). Unter den für den Kern in Frage kommenden Körpern $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ hat hierfür nur \mathbb{H} ausreichende Dimension. Also wäre die achtdimensionale Translationsebene \mathcal{B} die klassische Ebene über dem Quaternionenkörper \mathbb{H} , und Z_2 wäre die Gruppe der Streckungen des \mathbb{H} -Vektorraums $\mathbb{B} = \mathbb{H}^2$ mit Quaternionen der Norm 1. Weil Λ von Z_2 zentralisiert wird, wäre $\Lambda|_{\mathbb{B}}$ eine \mathbb{H} -lineare Gruppe von affinen Kollineationen von \mathcal{B} , also in $\text{SL}_2(\mathbb{H})$ enthalten. Da Λ zu $\text{SL}_2(\mathbb{R})$ lokal isomorph ist, und da $\text{SL}_2(\mathbb{R})$ bis auf Äquivalenz nur eine quaternale Darstellung der Dimension 2 besitzt ([32]), wäre bezüglich geeigneter Koordinaten $\Lambda|_{\mathbb{B}}$ die Untergruppe $\text{SL}_2(\mathbb{R})$ von $\text{SL}_2(\mathbb{H})$, die man durch Beschränkung auf reelle Matrixkoeffizienten erhält. Λ würde dann aber in der Quaternionenebene \mathcal{B} das System der Ursprungsgeraden mit reellen Steigungen permutieren, also eine eindimensionale Teilmenge von $L_\infty^\mathcal{B}$ invariant lassen, im Widerspruch zur Aussage (b).

Somit bleibt nur die Möglichkeit, daß $Z_2 \cong \text{Spin}_3(\mathbb{R})$ auf der 4-Sphäre $L_\infty^\mathcal{B}$ fast effektiv operiert. Nach Richardson [24] bestehen dann die folgenden Alternativen (d1)–(d3):

(d1) $Z_2|L_\infty^{\mathcal{B}} \cong \text{Spin}_3(\mathbb{R})$ hat in $L_\infty^{\mathcal{B}}$ genau zwei Fixpunkte. Diese müßten dann unter der Z_2 zentralisierenden zusammenhängenden Gruppe Λ festbleiben, was (b) widerspricht.

(d2) $Z_2|L_\infty^{\mathcal{B}} \cong \text{SO}_3(\mathbb{R})$, und die Fixpunkte von Z_2 in $L_\infty^{\mathcal{B}}$ bilden eine Kreislinie. Diese wäre dann invariant unter der Z_2 zentralisierenden Gruppe Λ , im Widerspruch zur Aussage von (b).

(d3) $Z_2|L_\infty^{\mathcal{B}} \cong \text{SO}_3(\mathbb{R})$ wirkt auf der 4-Sphäre $L_\infty^{\mathcal{B}}$ wie die Einschränkung der orthogonalen irreduziblen Darstellung von $\text{SO}_3(\mathbb{R})$ in \mathbb{R}^5 auf die Einheitskugel. Der Beschreibung dieser Wirkung bei Richardson [24, S. 479 und §5] entnimmt man, daß dann Z_2 genau zwei 2-dimensionale Bahnen in $L_\infty^{\mathcal{B}}$ hat; diese sind homöomorph zur reellen projektiven Ebene $P_2(\mathbb{R})$. Unter der Z_2 zentralisierenden zusammenhängenden Gruppe Λ sind sie dann invariant. Λ kann nun nicht transitiv auf $P_2(\mathbb{R})$ operieren: da $P_2(\mathbb{R})$ von der 2-Sphäre überlagert wird, müßte sonst nach [21, 5.6] auch eine maximale kompakte Untergruppe von Λ dort transitiv wirken; eine solche ist aber ein eindimensionaler Torus. Nach (b) kann Λ auf den genannten Z_2 -Bahnen auch keine eindimensionalen Bahnen haben. Also müßte Λ diese Z_2 -Bahnen punktweise festlassen, was im Gegensatz zu (b) steht.

Damit ist in allen Fällen ein Widerspruch erreicht, und 3.13 ist bewiesen. \square

Ebenfalls mit Argumenten über Baer-Unterebenen zeigen wir:

3.14. ($n=8$) Δ ist nicht lokal isomorph zu $\text{SU}_2(\mathbb{C}) \times \text{SU}_2(\mathbb{H}, 1)$.

Beweis. Angenommen, dies wäre der Fall. Dann würde Δ von der einfach zusammenhängenden Gruppe $\text{SU}_2(\mathbb{C}) \times \text{SU}_2(\mathbb{H}, 1)$ überlagert. Die Involution

$$\begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} \in \text{SU}_2(\mathbb{H}, 1)$$

ist nicht zentral und entspräche daher einer nicht zentralen Involution $\iota \in \Delta$. Da $\text{SU}_2(\mathbb{C}) \cong \text{Spin}_3(\mathbb{R})$, enthielte der Zentralisator von ι in Δ eine kompakte zusammenhängende Gruppe Σ , die von $\text{Spin}_3(\mathbb{R})^3$ überlagert wird. Nach 2.6 wäre ι entweder axial mit einer Ursprungsgeraden S als Achse, oder aber eine Baer-Involution.

Wäre ι axial, so bliebe der uneigentliche Punkt $s \in L_\infty$ der Achse S invariant unter Σ , und folglich wäre $\dim \Delta(s) \leq \dim \Delta - \dim \Sigma = 13 - 9 = 4 < n - 1$, im Widerspruch zur Generalvoraussetzung.

Wäre ι eine Baer-Involution, so bliebe die zugehörige Baer-Unterebene \mathcal{B} unter der ι zentralisierenden Gruppe Σ invariant. Man betrachte nun die Wirkung von Σ auf der uneigentlichen Geraden $L_\infty^{\mathcal{B}}$ von \mathcal{B} . Da von $\text{Spin}_3(\mathbb{R})^3$ überlagert, kann Σ nicht transitiv auf der 4-Sphäre $L_\infty^{\mathcal{B}}$ wirken ([6]). Als kompakte zusammenhängende halbeinfache Gruppe hätte daher Σ in der 4-Sphäre $L_\infty^{\mathcal{B}}$ Bahnen der Kodimension mindestens 2 ([24, Theorem 1.1]). Für einen Punkt s aus einer solchen Bahn hätte man $\dim \Delta_s \geq \dim \Sigma_s \geq 7$, also $\dim \Delta(s) = \dim \Delta - \dim \Delta_s \leq 13 - 7 = 6 < n - 1$, im Widerspruch zur Generalvoraussetzung. \square

3.15. ($n=8$) Δ hat keinen zu $\text{SL}_2(\mathbb{H})$ lokal isomorphen zusammenhängenden abgeschlossenen Normalteiler.

Beweis. Angenommen, N wäre ein solcher. Dann ist Δ fastdirektes Produkt von N mit einem zusammenhängenden abgeschlossenen Normalteiler Z .

Zunächst kann N keine Fixpunkte in L_∞ haben: Da N keine kompakte Untergruppe der Kodimension höchstens 1 besitzt, gäbe es sonst nämlich nach den Informationen aus 3.4 genau einen solchen Fixpunkt, und dieser bliebe unter ganz Δ fest (da N ein Normalteiler von Δ ist), im Widerspruch zur Generalvoraussetzung.

Insbesondere kann N in der affinen Ebene $\mathbb{A} = \mathbb{R}^{16}$ keinen eindimensionalen \mathbb{R} -linearen Teilraum invariant lassen. Die Dimensionen der reellen irreduziblen Darstellungen von $SL_2(\mathbb{H})$ sind nun 6, 8, 10, 15 oder größer als 16 ([32]). Folglich zerfällt $\mathbb{A} = \mathbb{R}^{16}$ in zwei unter N irreduzible komplementäre Teilräume V_1 und V_2 , wobei entweder $\dim V_1 = 6$, $\dim V_2 = 10$ oder $\dim V_1 = \dim V_2 = 8$. Im ersten Fall wäre V_1 der einzige 6-dimensionale N -invariante Unterraum und daher invariant unter ganz Δ (da N ein Normalteiler von Δ ist), im Widerspruch zur Irreduzibilität von \mathbb{A} unter Δ (3.7). Also bleibt nur die Möglichkeit $\dim V_1 = \dim V_2 = 8$.

Die reell 8-dimensionalen irreduziblen Darstellungen von $SL_2(\mathbb{H})$ sind nun die gewöhnliche Darstellung in \mathbb{H}^2 und deren Kontragrediente. $\mathbb{A} = \mathbb{R}^{16}$ kann also als \mathbb{R} -Vektorraum so mit $\mathbb{H}^2 \oplus \mathbb{H}^2$ identifiziert werden, daß $N = SL_2(\mathbb{H})$ auf jedem der beiden Summanden auf eine der beiden genannten Arten operiert. Die zur Vektorgruppe \mathbb{R}^4 isomorphe Untergruppe

$$\Phi = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ & 1 \end{pmatrix} \middle| b \in \mathbb{H} \right\} \subseteq SL_2(\mathbb{H}) = N$$

läßt dann den Unterraum $S = (\mathbb{H} \times \{0\}) \oplus (\mathbb{H} \times \{0\})$ punktweise fest; nach 3.5 müßte S daher eine Ursprungsgerade sein. Als Unterraum der Fixpunkte von Φ wäre S aber invariant unter dem N zentralisierenden komplementären Normalteiler Z von Δ . Der uneigentliche Punkt $s \in L_\infty$ von S bliebe daher unter einer Untergruppe der Kodimension $\dim N - \dim \Phi = 6$ von Δ fest und hätte somit höchstens 6-dimensionale Bahn unter Δ , im Widerspruch zur Generalvoraussetzung. \square

Die folgenden Aussagen knüpfen an 3.8 und 3.9 an:

3.16. ($n=8$) Angenommen, Δ ist fastdirektes Produkt zweier nichttrivialer abgeschlossener zusammenhängender halbeinfacher Normalteiler Δ_1 und Δ_2 . Bezüglich der Wirkung von Δ auf $\mathbb{A} = \mathbb{R}^{16}$ betrachten wir die folgenden beiden Situationen:

(a) \mathbb{A} ist beschrieben als Tensorprodukt $\mathbb{R}^4 \otimes_{\mathbb{R}} V$ (V ein 4-dimensionaler \mathbb{R} -Vektorraum), und die Wirkung von Δ ist das Tensorprodukt von \mathbb{R} -linearen Darstellungen von Δ_1 bzw. Δ_2 auf \mathbb{R}^4 bzw. V .

(b) \mathbb{A} ist beschrieben als der dem Tensorprodukt $\mathbb{C}^2 \otimes_{\mathbb{C}} V$ zugrundeliegende \mathbb{R} -Vektorraum (V ein 4-dimensionaler \mathbb{C} -Vektorraum), und die Wirkung von Δ ist das Tensorprodukt von \mathbb{C} -linearen Darstellungen von Δ_1 resp. Δ_2 auf \mathbb{C}^2 resp. V .

Dann gilt:

Δ_1 kann nicht lokal isomorph zu $SL_2(\mathbb{R})$ oder $SL_2(\mathbb{C})$ sein. Δ_2 kann nicht lokal isomorph zu $Sp_4(\mathbb{R})$, $SL_4(\mathbb{R})$, $Sp_4(\mathbb{C})$, $SL_4(\mathbb{C})$ oder $SL_2(\mathbb{C})$ sein. Die Situation (a) tritt folglich nicht auf.

Beweis. Da Δ irreduzibel auf \mathbb{A} wirkt (3.7), sind die Darstellungen der Faktoren Δ_i auf den Faktoren der Tensorprodukte irreduzibel.

Zunächst zur Aussage über Δ_1 : Daß in Situation (b) Δ_1 nicht lokal isomorph zu $SL_2(\mathbb{R})$ oder $SL_2(\mathbb{C})$ sein kann, wurde schon in 3.8 gezeigt.

Angenommen, in Situation (a) wäre Δ_1 lokal isomorph zu $SL_2(\mathbb{C})$. Die irreduzible Darstellung von Δ_1 auf \mathbb{R}^4 wäre dann die gewöhnliche Wirkung als $SO_4(\mathbb{R}, 1)^1$. Eine zu $SO_3(\mathbb{R}, 1)^1$ isomorphe Untergruppe Λ von Δ_1 ließe einen eindimensionalen Teilraum U_1 von \mathbb{R}^4 und damit als Untergruppe von Δ alle eindimensionalen Teilräume von $U_1 \otimes_{\mathbb{R}} V \subseteq \mathbb{R}^4 \otimes_{\mathbb{R}} V = \mathbb{A}$ invariant. Da $SO_3(\mathbb{R}, 1)$ keine kompakte Untergruppe der Kodimension 1 hat, wäre nach 3.5 folglich $U_1 \otimes V$ in einer Ursprungsgeraden S der Ebene enthalten. $U_1 \otimes V$ ist invariant unter der Gruppe $\Lambda \cdot \Delta_2$, die dann auch S invariant ließe. Die Dimension der Δ -Bahn des uneigentlichen Punkts von S wäre also höchstens $\dim \Delta - \dim \Lambda \cdot \Delta_2 = \dim \Delta_1 - \dim \Lambda = 6 - 3 = 3 < n - 1$, im Widerspruch zur Generalvoraussetzung.

Angenommen weiter, in Situation (a) wäre Δ_1 lokal isomorph zu $SL_2(\mathbb{R})$. Die irreduzible Darstellung von Δ_1 auf \mathbb{R}^4 wäre dann die Darstellung von $SL_2(\mathbb{R})$ vom Gewicht 3; diese läßt sich folgendermaßen beschreiben ([33, §39 S. 101ff.]): Man identifiziert \mathbb{R}^4 als \mathbb{R} -Vektorraum mit dem Raum \mathcal{P}_3 aller Polynome vom Grad höchstens 3 mit reellen Koeffizienten in einer Variablen X , und ordnet der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{R})$$

die Transformation

$$\mathcal{P}_3 \rightarrow \mathcal{P}_3: f \mapsto A(f)$$

mit

$$A(f)(X) = (bX + d)^3 f\left(\frac{aX + c}{bX + d}\right)$$

zu. Die Untergruppe

$$\Xi = \left\{ \begin{pmatrix} r & b \\ & r^{-1} \end{pmatrix} \mid r > 0, b \in \mathbb{R} \right\}$$

von $\Delta_1 = SL_2(\mathbb{R})$ läßt in dieser Darstellung einen eindimensionalen Teilraum U_1 von \mathbb{R}^4 invariant (welcher dem von X^3 aufgespannten Teilraum von \mathcal{P}_3 entspricht). Wie eben schließt man wieder nach 3.5, daß $U_1 \otimes V$ in einer Ursprungsgeraden enthalten sein müßte, die unter $\Xi \cdot \Delta_2$ invariant bliebe. Die Dimension der Δ -Bahn des zugehörigen uneigentlichen Punkts wäre also höchstens $\dim \Delta - \dim \Xi \cdot \Delta_2 = \dim \Delta_1 - \dim \Xi = 1 < n - 1$, im Widerspruch zur Generalvoraussetzung.

Mit einem völlig parallelen Argument über dem Grundkörper \mathbb{C} statt \mathbb{R} ergibt sich, daß in Situation (b) Δ_2 nicht lokal isomorph zu $SL_2(\mathbb{C})$ sein kann. In Situation (a) ist dies mit der entsprechenden Aussage über Δ_1 bereits gezeigt.

Nun zu den übrigen Aussagen über Δ_2 . Situation (a) und (b) werden dabei parallel behandelt, indem man \otimes je nach Fall als Tensorprodukt über \mathbb{R} oder \mathbb{C} deutet. Wäre Δ_2 lokal isomorph zu $Sp_4(\mathbb{R})$, $SL_4(\mathbb{R})$, $Sp_4(\mathbb{C})$ oder $SL_4(\mathbb{C})$, so wäre die

irreduzible Darstellung von Δ_2 auf dem 4-dimensionalen Vektorraum V die gewöhnliche Wirkung auf \mathbb{R}^4 bzw. \mathbb{C}^4 oder deren Kontragrediente. In jedem Fall enthielte Δ_2 eine abgeschlossene Untergruppe $\Theta \cong \mathbb{R}^2$, deren Wirkung auf V bezüglich einer geeigneten Basis (e_1, \dots, e_4) durch die Matrizen

$$\left\{ \begin{pmatrix} r & & & \\ & 1/r & & \\ & & t & \\ & & & 1/t \end{pmatrix} \middle/ 0 < r \in \mathbb{R}, 0 < t \in \mathbb{R} \right\}$$

beschrieben wäre. Die eindimensionalen Unterräume der Unterräume $\mathbb{R}^4 \otimes e_i$ bzw. $\mathbb{C}^2 \otimes e_i$ von \mathbb{A} sind dann sämtlich invariant unter $\Theta \cong \mathbb{R}^2$ und müßten daher nach 3.5 alle in ein und derselben Ursprungsgeraden liegen; andererseits spannen sie ganz \mathbb{A} auf. Dieser Widerspruch zeigt, daß für Δ_2 keine der genannten Gruppen in Frage kommt.

Schließlich soll Situation (a), d.h. die Annahme, daß die Wirkung von Δ auf $\mathbb{A} = \mathbb{R}^4 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^4$ das Tensorprodukt reell – irreduzibler Darstellungen ρ_i der Faktoren Δ_i ($i = 1, 2$) auf \mathbb{R}^4 sei, insgesamt zum Widerspruch geführt werden. Angenommen also, diese Situation läge vor. Da dann Δ_1 und Δ_2 völlig gleichwertige Rollen spielen, und da Δ nach 3.6 nicht kompakt ist, wäre o.B.d.A. Δ_2 nicht kompakt. Δ_2 kann dann nicht einfach sein, da die nicht kompakten einfachen Liegruppen, die eine reell irreduzible Darstellung in \mathbb{R}^4 besitzen, zufolge Tabelle [32] lokal isomorph zu einer der Gruppen $SL_2(\mathbb{R})$, $SL_2(\mathbb{C})$, $Sp_4(\mathbb{R})$ oder $SL_4(\mathbb{R})$ sind; wie schon gezeigt, darf aber Δ_2 zu keiner dieser Gruppen lokal isomorph sein.

Also wäre Δ_2 seinerseits fastdirektes Produkt zweier echter abgeschlossener zusammenhängender halbeinfacher Normalteiler Δ_{21} und Δ_{22} , und die Darstellung ρ_2 wäre eine reelle Form des Tensorprodukts von komplex-linearen irreduziblen Darstellungen ρ_{2i} der Faktoren Δ_{2i} ($i = 1, 2$) auf \mathbb{C}^2 . Wieder könnte o.B.d.A. Δ_{22} als nicht kompakt angenommen werden, und wäre dann insbesondere nicht isomorph zu $SU_2(\mathbb{C})$. Eine solche Situation ist nun aber nach 3.9 ausgeschlossen, da die Wirkung von Δ auf \mathbb{A} aufgefaßt werden könnte als reelle Form des Tensorprodukts der Darstellung ρ_{22} von Δ_{22} in \mathbb{C}^2 mit einer Darstellung von $\Delta_1 \cdot \Delta_{21}$ in \mathbb{C}^8 . \square

Nach diesen Vorbereitungen kann nun die systematische fallweise Diskussion der aufgrund der Darstellungstheorie für Δ bestehenden Möglichkeiten aufgenommen werden. Diese werden eingeschränkt durch die folgende Dimensionsaussage:

3.17. ($n = 8$) $7 \leq \dim \Delta \leq 30$.

Beweis. Nach 3.3 existiert ein Punkt $s \in L_\infty$ mit $\dim \Delta(s) = 7$. Daß $\dim \Delta \geq 7$, ist dann trivial. Wählt man $w \in \Delta(s)$, so hat man

$$\dim \Delta = \dim \Delta(s) + \dim \Delta_s(w) + \dim \Delta_{s,w} \leq 14 + \dim \Delta_{s,w}; \tag{1}$$

nach 3.4 ist ferner $K = (\Delta_{s,w})^1$ kompakt. Zur Abschätzung der Dimension von K betrachten wir die zu s und w gehörigen Ursprungsgeraden S und W . Wie die in § 2 hergeleitete Übersicht über große kompakte Achsenstandgruppen (2.8 in Verbindung mit 2.9) zeigt, ist entweder $\dim K \leq 16$ (und dann nach (1) $\dim \Delta \leq 30$ wie behauptet) oder aber o.B.d.A. $K|S = Spin_7(\mathbb{R})$, $K|W = SO_7(\mathbb{R})$. Im zweiten Fall

hätte aber K in L_∞ zur 7-Sphäre homöomorphe Bahnen, wie man an Bahnen von K auf einer zu S parallelen Geraden durch einen Fixpunkt von K in $W \setminus \{o\}$ vermöge Zentralprojektion von o aus auf L_∞ abliest. Nach dem Sphärensatz (vgl. 1.9) hätte dann Δ einen Fixpunkt in L_∞ , im Widerspruch zur Generalvoraussetzung. \square

3.18. ($n=8$) Δ kann nicht einfach sein.

Beweis. (a) Angenommen, Δ sei einfach. Die einfachen nichtkompakten Liegruppen einer Dimension zwischen 7 und 30, die eine irreduzible lineare Darstellung in \mathbb{R}^{16} besitzen, sind lokal isomorph zu einer der Gruppen $SO_8(\mathbb{R}, i)$ ($i=1, 2, 3$), $SO_7(\mathbb{R}, i)$ ($i=1, 2$), $SL_3(\mathbb{C})$ und $SO_5(\mathbb{R}, 2)$, wie man etwa Tabelle [32] entnimmt. Nach 3.13 und 2.13 kann Δ nicht lokal isomorph zu $SO_8(\mathbb{R}, i)$, $SO_7(\mathbb{R}, i)$ oder $SL_3(\mathbb{C})$ sein. Ist Δ einfach, so muß Δ also nach 3.6 und 3.7 lokal isomorph zu $SO_5(\mathbb{R}, 2)$ sein.

(b) Δ enthält dann eine zu $SO_4(\mathbb{R}, 2)$ lokal isomorphe abgeschlossene zusammenhängende Untergruppe Λ . Da $SO_4(\mathbb{R}, 2)$ lokal isomorph zu $SL_2(\mathbb{R}) \times SL_2(\mathbb{R})$ ist, ist Λ fastdirektes Produkt von zwei zu $SL_2(\mathbb{R})$ lokal isomorphen zusammenhängenden abgeschlossenen Normalteilern Λ_i ($i=1, 2$). Sei Ξ_i die zusammenhängende abgeschlossene Untergruppe von Λ_i ($i=1, 2$), die der Untergruppe

$$\left\{ \begin{pmatrix} r & b \\ & r^{-1} \end{pmatrix} \mid r > 0, b \in \mathbb{R} \right\} \subseteq SL_2(\mathbb{R})$$

entspricht. Dann gilt zunächst:

(c) Ξ_i läßt in \mathbb{A} keinen eindimensionalen \mathbb{R} -linearen Teilraum invariant.

Denn angenommen doch, dann bliebe auch eine Ursprungsgerade der Ebene invariant unter Ξ_i , und zwar nach 3.4 genau eine, da Ξ_i keine kompakte Untergruppe der Kodimension höchstens 1 enthält. Diese einzige unter Ξ_i invariante Ursprungsgerade S wäre dann auch invariant unter dem Normalisator von Ξ_i in Δ , der neben Ξ_i selbst noch die Λ_i zentralisierende Untergruppe Λ_j ($i \neq j \in \{1, 2\}$) enthält und daher Kodimension höchstens 5 in Δ hat. Die Δ -Bahn des uneigentlichen Punkts von S wäre also höchstens 5-dimensional, im Widerspruch zur Generalvoraussetzung.

(d) Sei nun V eine irreduzible Komponente von $\mathbb{A} = \mathbb{R}^{16}$ unter der Wirkung von Λ . Nach (c) müssen insbesondere beide Faktoren Λ_i ($i=1, 2$) von Λ nichttrivial auf V operieren. Da alle Darstellungen von $SL_2(\mathbb{R})$ reell sind, läßt sich V so mit einem Tensorprodukt $\mathbb{R}^{m_1} \otimes \mathbb{R}^{m_2}$ ($m_i \geq 2$) identifizieren, daß die Wirkung von Λ auf V als Tensorprodukt von irreduziblen Darstellungen ρ_i der Faktoren Λ_i auf den Faktoren \mathbb{R}^{m_i} beschrieben ist. Wäre m_i gleich 2 oder 4, so wäre ρ_i die gewöhnliche Darstellung von $SL_2(\mathbb{R})$ auf \mathbb{R}^2 bzw. die Darstellung vom Gewicht 3 von $SL_2(\mathbb{R})$ auf \mathbb{R}^4 (vgl. den Beweis von 3.16 für eine Beschreibung der letzteren). In beiden Fällen ließe Ξ_i einen eindimensionalen Unterraum von \mathbb{R}^{m_i} und damit von $V \subseteq \mathbb{A}$ invariant, im Widerspruch zu (c). Also ist $m_i=3, 5, \dots$ und wegen $m_1 \cdot m_2 = \dim V \leq 16$ daher die Dimension von V gleich 9 oder 15. Die affine Ebene $\mathbb{A} = \mathbb{R}^{16}$ müßte nun in irreduzible Komponenten dieser Art zerlegt werden können, was offensichtlich unmöglich ist. Dies zeigt, daß Δ entgegen unserer Annahme nicht einfach sein kann. \square

3.19. ($n=8$) Die lineare Wirkung von Δ auf $\mathbb{A} = \mathbb{R}^{16}$ ist nicht die Reellifizierung einer komplex-linearen Darstellung in \mathbb{C}^8 .

Beweis. Nach 3.6 und 3.18 ist Δ fastdirektes Produkt zweier nichttrivialer abgeschlossener zusammenhängender halbeinfacher Normalteiler Δ_1 und Δ_2 . Angenommen nun, die nach 3.7 irreduzible Wirkung von Δ auf \mathbb{A} sei die Reellifizierung einer komplex-linearen Darstellung. Dann kann \mathbb{A} als \mathbb{R} -Vektorraum o.B.d.A. so mit $\mathbb{C}^2 \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^4$ identifiziert werden, daß die Wirkung von Δ das Tensorprodukt von komplex-linearen Darstellungen von Δ_1 bzw. Δ_2 auf \mathbb{C}^2 bzw. \mathbb{C}^4 ist. Nach 3.8 ist dabei notwendig

$$\Delta_1 = \text{SU}_2(\mathbb{C}).$$

Weiter muß Δ_2 einfach sein: sonst wäre nämlich die Wirkung von Δ auf $\mathbb{A} = \mathbb{C}^8$ Tensorprodukt von Darstellungen dreier nichttrivialer abgeschlossener zusammenhängender Normalteiler von Δ auf \mathbb{C}^2 , nach 3.8 wäre jeder der drei Normalteiler isomorph zu $\text{SU}_2(\mathbb{C})$, und Δ wäre kompakt, im Widerspruch zu 3.6.

Wegen $\Delta_1 = \text{SU}_2(\mathbb{C})$ und nach 3.17 ist $4 \leq \dim \Delta_2 \leq 27$; ferner ist Δ_2 nicht kompakt. Der Tabelle [32] entnimmt man, daß die einfachen nichtkompakten Liegruppen einer Dimension zwischen 4 und 27, die eine irreduzible Darstellung in \mathbb{C}^4 haben, lokal isomorph zu einer der Gruppen $\text{SL}_4(\mathbb{R})$, $\text{Sp}_4(\mathbb{C})$, $\text{Sp}_4(\mathbb{R})$, $\text{SU}_2(\mathbb{H}, 1)$, $\text{SL}_2(\mathbb{H})$, $\text{SL}_2(\mathbb{C})$ oder $\text{SU}_4(\mathbb{C}, i)$ ($i=1, 2$) sind. Nach 3.16, 3.14 und 3.15 kommt unter dieser Auswahl für Δ_2 nur noch der lokale Typ von $\text{SU}_4(\mathbb{C}, i)$ in Betracht.

Angenommen also, Δ_2 wäre lokal isomorph zu $\text{SU}_4(\mathbb{C}, i)$ ($i=1, 2$). Die irreduzible Darstellung von Δ_2 auf dem Faktor \mathbb{C}^4 von $\mathbb{A} = \mathbb{C}^2 \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^4$ ist dann die gewöhnliche Wirkung von $\text{SU}_4(\mathbb{C}, i)$ oder deren Kontragrediente. Wir betrachten $\text{SU}_4(\mathbb{C}, i)$ als spezielle unitäre Gruppe bezüglich der hermiteschen Form $h(x, y) = x_1 \bar{y}_1 + x_2 \bar{y}_2 \pm x_3 \bar{y}_3 - x_4 \bar{y}_4$ von \mathbb{C}^4 , wobei (x_1, x_2, x_3, x_4) die Koordinaten von $x \in \mathbb{C}^4$ bezüglich der kanonischen Basis (f_1, f_2, f_3, f_4) sind. Die Vereinigung des Unterraums $\mathbb{C}^2 \otimes_{f_3}$ von $\mathbb{A} = \mathbb{C}^2 \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^4$ mit $\mathbb{C}^2 \otimes_{f_1}$ einerseits bzw. mit $\mathbb{C}^2 \otimes_{f_2}$ andererseits bleibt jeweils punktweise fest unter einer geeignet gewählten zu $\text{SU}_2(\mathbb{C}, 1)$ isomorphen Untergruppe von $\Delta_2 \subseteq \Delta$. Da $\text{SU}_2(\mathbb{C}, 1)$ keine kompakte Untergruppe der Kodimension höchstens 1 enthält, müßten also nach 3.5 alle diese Unterräume $\mathbb{C}^2 \otimes_{f_j}$ ($j=1, 2, 3$) in ein und derselben Ursprungsgeraden der Ebene enthalten sein, im Widerspruch dazu, daß sie zusammen einen reell 12-dimensionalen Teilraum von \mathbb{A} aufspannen. \square

3.20. ($n=8$) Nach 3.19 muß sich also die gemäß 3.7 irreduzible Wirkung von Δ auf $\mathbb{A} = \mathbb{R}^{16}$ als reelle Form einer komplex-linearen irreduziblen Darstellung ρ von Δ auf \mathbb{C}^{16} beschreiben lassen. Die halbeinfache Liegruppe (3.6) Δ ist fastdirektes Produkt nichttrivialer abgeschlossener zusammenhängender *einfacher* Normalteiler Δ_i ($i=1, \dots, k$), wobei nach 3.18 $k \geq 2$; und ρ ist das Tensorprodukt komplexer irreduzibler Darstellungen

$$\rho_i \text{ von } \Delta_i \text{ auf } \mathbb{C}^{m_i}$$

vermöge einer geeigneten Identifikation

$$\mathbb{C}^{16} = \mathbb{C}^{m_1} \otimes \mathbb{C}^{m_2} \otimes \dots \otimes \mathbb{C}^{m_k}.$$

Wegen

$$m_1 \cdot m_2 \cdot \dots \cdot m_k = 16$$

ist jedes der m_i eine Zweierpotenz und daher

$$m_i \leq 8 \quad (i=1, \dots, k).$$

O.B.d.A. sei

$$m_1 \leq m_2 \leq \dots \leq m_k.$$

Im einzelnen sind dann die folgenden Fälle denkbar:

- (i) $k=4, m_i=2 \ (i=1, \dots, 4)$,
- (ii) $k=3, m_1=m_2=2, m_3=4$,
- (iii) $k=2, m_1=2, m_2=8$,
- (iv) $k=2, m_1=m_2=4$.

Diese werden nun gesondert diskutiert.

Zu (i): Nach 3.9 müßte in diesem Fall Δ_i gleich $SU_2(\mathbb{C})$ sein ($i=1, \dots, 4$), im Widerspruch dazu, daß Δ nach 3.6 nicht kompakt sein darf.

Zu (ii): Nach 3.9 wäre dann $\Delta_1 = SU_2(\mathbb{C}) = \Delta_2$, und die Darstellungen ρ_1 bzw. ρ_2 von Δ_1 bzw. Δ_2 wären die gewöhnliche Wirkung. Insbesondere wäre $\rho_1 \otimes \rho_2$ selbstkonjugiert und vom reellen Typ, so daß auch ρ_3 selbstkonjugiert und vom reellen Typ sein müßte, da die Darstellung $\rho = \rho_1 \otimes \rho_2 \otimes \rho_3$ von Δ in \mathbb{C}^{16} eine reelle Form hat, nämlich die Wirkung von Δ auf $\mathbb{A} = \mathbb{R}^{16}$. Diese könnte dann aber beschrieben werden als Tensorprodukt einer Darstellung von $\Delta_1 \cdot \Delta_2$ in \mathbb{R}^4 (nämlich der reellen Form von $\rho_1 \otimes \rho_2$) und einer Darstellung von Δ_3 in \mathbb{R}^4 (nämlich der reellen Form von ρ_3), was in 3.16 ausgeschlossen wurde.

Zu (iii): Auch in dieser Situation wäre ρ_1 die gewöhnliche Wirkung von $\Delta_1 = SU_2(\mathbb{C})$ auf \mathbb{C}^2 . Diese ist vom quaternionalen Typ; da andererseits $\rho = \rho_1 \otimes \rho_2$ vom reellen Typ ist, müßte also die Darstellung ρ_2 von Δ_2 auf \mathbb{C}^8 auch (selbstkonjugiert und) vom quaternionalen Typ sein. Wegen $\Delta_1 = SU_2(\mathbb{C})$ und nach 3.6 wäre Δ_2 nicht kompakt, und nach 3.17 hätte man $4 \leq \dim \Delta_2 \leq 27$. Tabelle [32] zufolge ist nun eine einfache nichtkompakte Liegruppe aus diesem Dimensionsbereich, die eine irreduzible komplex-lineare selbstkonjugierte Darstellung in \mathbb{C}^8 vom quaternionalen Typ besitzt, lokal isomorph zu $SO_7(\mathbb{R}, i)$ mit $i \in \{1, 2\}$. Nach 3.13 kann aber Δ_2 nicht lokal isomorph zu einer dieser Gruppen sein.

Zu (iv): Die Darstellung $\rho = \rho_1 \otimes \rho_2$ von Δ ist vom reellen Typ; folglich müssen in dieser Situation die Darstellungen ρ_i beide selbstkonjugiert, und entweder beide vom reellen oder beide vom quaternionalen Typ sein. Wären beide reell, so wäre die Wirkung von Δ auf $\mathbb{A} = \mathbb{R}^{16}$ als reelle Form von ρ beschreibbar durch ein Tensorprodukt von Darstellungen von Δ_1 und Δ_2 in \mathbb{R}^4 (nämlich der reellen Formen von ρ_1 und ρ_2); dies wurde in 3.16 ausgeschlossen. Also müssen ρ_1 und ρ_2 quaternional sein. Nach 3.17 ist $3 \leq \dim \Delta_i \leq 27 \ (i=1, 2)$. Gemäß Tabelle [32] sind die einzigen einfachen Liegruppen dieses Dimensionsbereichs, die eine irreduzible selbstkonjugierte Darstellung in \mathbb{C}^4 vom quaternionalen Typ haben, die Gruppen $SU_2(\mathbb{C})$, $SU_2(\mathbb{H})$, $SU_2(\mathbb{H}, 1)$ und $SL_2(\mathbb{H})$. Nach 3.15 kann keiner der Faktoren Δ_i isomorph zu $SL_2(\mathbb{H})$ sein; außerdem sind nach 3.6 nicht beide Faktoren Δ_i von

$\Delta = \Delta_1 \cdot \Delta_2$ kompakt. Folglich müßte Δ lokal isomorph zu einer der Gruppen $SU_2(\mathbb{C}) \times SU_2(\mathbb{H}, 1)$, $SU_2(\mathbb{H}) \times SU_2(\mathbb{H}, 1)$ oder $SU_2(\mathbb{H}, 1) \times SU_2(\mathbb{H}, 1)$ sein. Ersteres scheidet nach 3.14 aus; die letzten beiden Möglichkeiten werden im folgenden Abschnitt ausgeschlossen.

In sämtlichen unter den Generalvoraussetzungen denkbaren Situationen ist dann ein Widerspruch erzielt und der Hauptsatz 1.2 damit bewiesen.

3.21. ($n=8$) Δ ist nicht lokal isomorph zu $SU_2(\mathbb{H}, 1) \times SU_2(\mathbb{H}, 1)$ oder $SU_2(\mathbb{H}) \times SU_2(\mathbb{H}, 1)$.

Beweis. Angenommen, Δ sei lokal isomorph zu einer dieser Gruppen. Dann enthält Δ eine nicht zentrale Involution ι , die von einem zu $SU_2(\mathbb{H}, 1)$ lokal isomorphen abgeschlossenen zusammenhängenden Normalteiler Σ zentralisiert wird. Dieser kann nach 3.4 keine zwei verschiedenen Ursprungsgeraden festlassen, da er keine kompakte Untergruppe der Kodimension höchstens 1 enthält.

Folglich ist ι nicht axial, da sonst Σ nach 2.6 genau zwei Ursprungsgeraden invariant ließe, die dann auch invariant unter der ι zentralisierenden zusammenhängenden Gruppe Σ wären.

Also ist ι eine Baer-Involution. Auf der affinen Punktmenge $\mathbb{I}\mathbb{B}$ der zugehörigen (achtdimensionalen) Baer-Unterebene \mathcal{B} , die unter Σ invariant bleibt, kann Σ nicht trivial operieren, da sonst Σ zwei Ursprungsgeraden festlassen würde. Als einfache Liegruppe wirkt Σ daher auf $\mathbb{I}\mathbb{B}$ fast effektiv. Da Σ lokal isomorph zu $SU_2(\mathbb{H}, 1)$ ist, ist \mathcal{B} folglich ([15, 3.4]) die klassische Quaternionenebene, und Σ wirkt klassisch auf $\mathbb{I}\mathbb{B}$, d.h. die affine Ebene von \mathcal{B} kann so mit der affinen Ebene über dem Quaternionenkörper \mathbb{H} identifiziert werden, daß Σ auf $\mathbb{I}\mathbb{B} = \mathbb{H}^2$ gewöhnlich als $SU_2(\mathbb{H}, 1)$ operiert.

Σ wirkt dann transitiv auf dem System derjenigen Ursprungsgeraden der affinen Quaternionenebene, deren Steigung Betrag 1 hat. Unter den Generalvoraussetzungen an Δ müßte also nach 3.4 die Standgruppe von Σ auf zwei solchen Geraden kompakt sein. Dies ist nicht der Fall: Die abgeschlossene aber nicht kompakte Untergruppe

$$\left\{ \begin{pmatrix} r & t \\ t & r \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{H}) \mid r, t \in \mathbb{R} \subseteq \mathbb{H}, r^2 - t^2 = 1 \right\}$$

von $SU_2(\mathbb{H}, 1)$ läßt in der Quaternionenebene die Ursprungsgeraden der Steigung 1 und -1 invariant. \square

Literatur

1. André, J.: Projektive Ebenen über Fastkörpern. Math. Z. **62**, 137–160 (1955)
2. Baer, R.: Projectivities with fixed points on every line of the plane. Bull. Amer. math. Soc. **52**, 273–286 (1946)
3. Baer, R.: Linear Algebra and Projective Geometry. New York: Academic Press 1952
4. Betten, D.: 4-dimensionale Translationsebenen. Math. Z. **128**, 129–151 (1972)
5. Betten, D.: 4-dimensionale Translationsebenen mit irreduzibler Kollineationsgruppe. Arch. der Math. **24**, 552–560 (1973)
6. Borel, A.: Some remarks about Lie groups transitive on spheres and tori. Bull. Amer. math. Soc. **55**, 580–586 (1949)
7. Borel, A.: Le plan projectif des octaves et les sphères comme espaces homogènes. C. r. Acad. Sci., Paris **231**, 943–945 (1950)

8. Borel, A.: Seminar on Transformation Groups. Princeton, N.J.: Princeton University Press 1960
9. Brauer, R.: On the relation between the orthogonal group and the unimodular group. Arch. rat. Mech. Analysis **18**, 97–99 (1965)
10. Buchanan, T., Hähl, H.: On the kernel and the nuclei of 8-dimensional locally compact quasifields. Arch. der Math. **29**, 472–480 (1977)
11. Dembowski, P.: Finite Geometries. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1968
12. Hähl, H.: Automorphismengruppen von lokalkompakten zusammenhängenden Quasikörpern und Translationsebenen. Geometriae dedicata **4**, 305–321 (1975)
13. Hähl, H.: Geometrisch homogene vierdimensionale reelle Divisionsalgebren. Geometriae dedicata **4**, 333–361 (1975)
14. Hähl, H.: Automorphismengruppen achtdimensionaler lokalkompakter Quasikörper. Math. Z. **149**, 203–225 (1976)
15. Hähl, H.: Lokalkompakte zusammenhängende Translationsebenen mit großen Sphärenbahnen auf der Translationsachse. Preprint
16. Hofmann, K.H., Lorenz, F.: Einführung in die Theorie der Liegruppen II. Vorlesung Tübingen Sommersemester 1963
17. Hopf, H.: Systeme symmetrischer Bilinearformen und euklidische Modelle der projektiven Räume. Vjschr. naturforsch. Ges. Zürich **85**, Beiblatt Nr. 32 (1940) (Festschrift Rudolf Fueter). Siehe auch: Selecta Hopf, pp. 107ff. Berlin-Göttingen-Heidelberg-New York: Springer 1964
18. Kalscheuer, F.: Die Bestimmung aller stetigen Fastkörper. Abh. math. Sem. Univ. Hamburg **13**, 413–435 (1940)
19. Montgomery, D.: Finite dimensionality of certain transformation groups. Illinois J. Math. **1**, 28–35 (1957)
20. Montgomery, D., Samelson, H.: Transformation groups of spheres. Ann. of Math., II. Ser. **44**, 454–470 (1943)
21. Montgomery, D., Zippin, L.: Topological Transformation Groups. New York: Interscience 1955
22. Noll, W.: Proof of the maximality of the orthogonal group in the unimodular group. Arch. rat. Mech. Analysis **18**, 100–102 (1965)
23. Poncet, J.: Groupes de Lie compacts de transformations de l'espace euclidien et les sphères comme espaces homogènes. Commentarii math. Helvet. **33**, 109–120 (1959)
24. Richardson, R.W. jr.: Groups acting on the 4-sphere. Illinois J. Math. **5**, 474–485 (1961)
25. Salzmann, H.: Topological planes. Advances Math. **2**, 1–60 (1967/68)
26. Salzmann, H.: Homogene affine Ebenen. Abh. math. Sem. Univ. Hamburg **43**, 216–220 (1975)
27. Salzmann, H.: Compact 8-dimensional projective planes with large collineation groups. Erscheint in Geometriae dedicata
28. Spanier, E.: Algebraic Topology. New York: Mc. Graw Hill 1966
29. Tits, J.: Sur certaines classes d'espaces homogènes de groupes de Lie. Mémoires de l'Académie royale de Belgique, Classe des Sciences XXIX, Fasc. 3 (1955)
30. Tits, J.: Sur les groupes doublement transitifs continus: corrections et compléments. Commentarii math. Helvet. **30**, 234–240 (1956)
31. Tits, J.: Transitivité des groupes de mouvements. In: Bericht von der Riemann-Tagung (Berlin 1954) pp. 98–111. Berlin: Akademie-Verlag 1957
32. Tits, J.: Tabellen zu den einfachen Liegruppen und ihren Darstellungen. Lecture Notes in Mathematics 40. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1967
33. Želobenko, D.P.: Compact Lie Groups and their Representations. Translations of Mathematical Monographs Vol. 40. Providence: American Mathematical Society 1973

Eingegangen am 27. Dezember 1977