

## Lokalkompakte zusammenhängende Translationsebenen mit großen Sphärenbahnen auf der Translationsachse

VON HERMANN HÄHL

### 1. Einleitung

Die vorliegende Arbeit untersucht lokalkompakte zusammenhängende topologische Translationsebenen, auf deren Translationsachse  $L_\infty$  eine Gruppe von stetigen affinen (d.h.  $L_\infty$  invariant lassenden) Kollineationen eine Bahn hat, die zu einer Sphäre relativ großer Dimension homöomorph ist. Daß diese Situation natürlich auftritt und häufig vorkommt, zeigt das folgende

1.1. *Sphären – LEMMA.* Sei  $\Xi$  eine abgeschlossene Untergruppe der Gruppe der stetigen affinen Kollineationen einer lokalkompakten zusammenhängenden Translationsebene; und sei  $\mathcal{S}$  eine mindestens zweidimensionale Bahn der Zusammenhangskomponente  $\Xi^1$  von  $\Xi$  auf der Translationsachse  $L_\infty$ .

Gibt es zwei verschiedene Punkte  $s, w \in \mathcal{S}$  so, daß die von der Standgruppe  $\Xi_{s,w}$  auf  $L_\infty$  induzierte Homöomorphismengruppe nicht relativ kompakt ist, so ist  $\mathcal{S}$  homöomorph zu einer Sphäre.

Über Ebenen, auf deren Translationsachse  $L_\infty$  Sphärenbahnen dieser Art mit großer Dimension vorkommen, lassen sich nun sehr präzise Aussagen machen.  $L_\infty$  ist selbst homöomorph zu einer Sphäre der Dimension 1, 2, 4 oder 8 ([27, §7, insbesondere 7.23], [10, 8.1]). Die Existenz einer Sphärenbahn der vollen Dimension in  $L_\infty$  ist also gleichbedeutend mit der Transitivität der affinen Kollineationsgruppe auf  $L_\infty$ ; nach [5, Satz 3] und [28] kommt dies genau in den klassischen Ebenen über  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$ ,  $\mathbb{H}$  (den Quaternionen) und  $\mathbb{O}$  (den Oktaven) vor. Das Hauptresultat der vorliegenden Arbeit betrifft Sphärenbahnen der Kodimension 1 in  $L_\infty$ :

1.2. *Sphären – SATZ.* Sei  $\mathcal{P}$  eine lokalkompakte mindestens 8-dimensionale Translationsebene mit Translationsachse  $L_\infty$ , und sei  $n = \dim L_\infty$ .

Hat eine Gruppe von stetigen affinen Kollineationen von  $\mathcal{P}$  in  $L_\infty$  eine zur  $(n-1)$ -Sphäre homöomorphe Bahn, so trifft eine der folgenden Aussagen zu:

- (i)  $\mathcal{P}$  ist moufangsch, also die klassische Ebene über  $\mathbb{H}$  oder  $\mathbb{O}$ .

- (ii) Die Gruppe der affinen Kollineationen hat genau einen Fixpunkt in  $L_\infty$ , und  $\mathcal{P}$  ist vom Lenz-Typ V, also die Ebene über einer reellen Divisionsalgebra der Dimension  $n$ .
- (iii) Es gibt genau zwei Punkte  $s, w \in L_\infty$  so, daß  $\{s, w\}$  invariant unter der Gruppe  $\mathcal{G}^c$  aller stetigen affinen Kollineationen ist. Die Zusammenhangskomponente  $\Gamma$  von  $\mathcal{G}^c$  läßt dann  $s$  und  $w$  fest und ist entweder transitiv auf  $L_\infty \setminus \{s, w\}$  oder hat dort lauter zur  $(n-1)$ -Sphäre homöomorphe Bahnen.

Der wesentliche Schritt beim Beweis dieses Satzes wird die Herleitung des folgenden Sachverhalts sein, der auch unabhängig hiervon von Interesse ist:

1.3. SATZ. In einer lokalkompakten mindestens 8-dimensionalen Translationsebene  $\mathcal{P}$  möge eine Gruppe von stetigen affinen Kollineationen in der Translationsebene  $L_\infty$  eine zu einer Sphäre der Kodimension 1 homöomorphe Bahn  $\mathcal{S}$  haben und auf  $\mathcal{S}$  zweifach transitiv wirken. Dann ist  $\mathcal{P}$  moufangsch, also die klassische Ebene über  $\mathbb{H}$  oder  $\mathbb{O}$ .

1.4. Bemerkungen. Die Dimension  $m$  (des Punktraums) einer lokalkompakten zusammenhängenden Translationsebene ist 2, 4, 8 oder 16 ([27, §7, insbesondere 7.23]), und es gilt  $n = \dim L_\infty = m/2$ . Der Fall  $m = 2$  ist hier ohne Belang, da er nur die klassische Ebene über  $\mathbb{R}$  umfaßt ([27, 7.24]). Für  $m = 4$  gelten die den Sätzen 1.2 und 1.3 entsprechenden Aussagen nicht allgemein: Bei vierdimensionalen lokalkompakten Translationsebenen findet man gerade unter den Typen mit besonders großer Kollineationsgruppe häufig die Situation vor, daß die Kollineationsgruppe in der zur 2-Sphäre homöomorphen Translationsebene  $L_\infty$  eine Kreislinie als Bahn besitzt und auf deren Komplement in  $L_\infty$  oder zumindest auf dessen Zusammenhangskomponenten transitiv operiert. Die Kollineationsgruppe ist dann mindestens 7-dimensional; daher sind immerhin alle solchen Ebenen nach [8, Lemma 1], [5] und [6, Satz 5] bekannt.

Ebenso existieren nichtklassische vierdimensionale lokalkompakte Translationsebenen, in denen die Kollineationsgruppe eine Kreislinie  $\mathcal{S}$  als Bahn in  $L_\infty$  hat und auf ihr zweifach transitiv operiert. Da die Zusammenhangskomponente der Kollineationsgruppe nach dem Satz von Brouwer ([27, 3.18]) auf  $\mathcal{S}$  als Transformationsgruppe eine endlichblättrige Überlagerung von  $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$  induziert, ist in Ebenen dieser Art die Kollineationsgruppe mindestens 8-dimensional, so daß unter Beachtung von [7, Satz 1] alle diese Ebenen nach [5, Satz 5] und [6] klassifiziert sind.

Die Alternative (iii) des Sphärensatzes ist bei 8- und 16-dimensionalen Translationsebenen tatsächlich verwirklicht. Zum Beispiel liegen die dort genannten Verhältnisse in den Ebenen über den Kalscheuer-Tits'schen Fastkörpern vor

(vgl. [20], [30], [2]). Mit der Nennung dieser einen Beispielfamilie soll es hier sein Bewenden haben; weitere Familien von Ebenen mit diesem Bahnverhalten werden in nachfolgenden Arbeiten systematisch untersucht.

Die vorgestellten Sätze spielen eine zentrale Rolle bei der expliziten Bestimmung aller achtdimensionalen und sechzehndimensionalen lokalkompakten Translationsebenen mit mindestens 17-dimensionaler bzw. mindestens 38-dimensionaler Kollineationsgruppe, die in einer Reihe weiterer Arbeiten auseinandergesetzt werden soll. Summarisch gesprochen zeigt der Sphärensatz in Verbindung mit dem Sphärenlemma, daß große Kollineationsgruppen mit großen Bahnen in  $L_\infty$  häufig durch ihre Standgruppe auf zwei nichtparallelen affinen Geraden bestimmt sind, was ihre Behandlung entscheidend erleichtert, da man nach [16, §4] solche "Achsenstandgruppen" gut im Griff hat (vgl. auch §2 der vorliegenden Arbeit).

Haupt Hilfsmittel beim Beweis des Satzes 1.3, der eine Schlüsselrolle spielt, ist die Klassifikation von Tits aller auf der 3-Sphäre und der 7-Sphäre zweifach transitiven zusammenhängenden Liegruppen. Von den meisten dieser Gruppen läßt sich mit Kenntnissen über ihre Darstellungen zeigen, daß sie nicht als Kollineationsgruppen auftreten können. Die verbleibenden Gruppen kennzeichnen die klassischen Ebenen über  $\mathbb{H}$  und  $\mathbb{O}$ . Damit ist der Inhalt von §3, der dem Beweis der Sätze 1.2 und 1.3 gewidmet ist, umrissen. §2 behandelt das Sphärenlemma 1.1 und damit zusammenhängende Fragen.

Der Verfasser dankt der Deutschen Forschungsgemeinschaft für das Forschungsstipendium, zu dessen Ergebnissen die vorliegende Arbeit gehört. Sie ist ein Teil der Habilitationsschrift des Verfassers; in dieser sind die vorgestellten Resultate allerdings nur für achtdimensionale Ebenen formuliert und bewiesen.

1.5. KONVENTIONEN, BEZEICHNUNGEN. Im folgenden sei  $\mathcal{P}$  eine lokalkompakte zusammenhängende topologische Translationsebene mit Punktraum  $\mathbb{P}$ . Indem man die zur  $n$ -Sphäre (mit  $n=1, 2, 4, 8$ ) homöomorphe Translationsachse  $L_\infty$  entfernt, entsteht eine affine Ebene  $\mathcal{A}$  mit Punktraum  $\mathbb{A} = \mathbb{P} \setminus L_\infty$ .

Sei  $\mathbb{G}$  die Gruppe der affinen (d.h.  $L_\infty$  invariant lassenden) Kollineationen von  $\mathcal{P}$ . Für Punkte  $p, p_1, \dots, p_k$ , Geraden  $L, L_1, \dots, L_l$  und eine Untergruppe  $\Omega$  von  $\mathbb{G}$  sei

$$\Omega_{p_1, \dots, p_k, L_1, \dots, L_l} = \left\{ \omega \in \Omega \mid \bigwedge_i \omega(p_i) = p_i; \omega(L_j) = L_j \right\}$$

die *Standgruppe* von  $\Omega$  auf  $p_1, \dots, p_k, L_1, \dots, L_l$  und  $\Omega_{[p, L]}$  die Gruppe der Kollineationen aus  $\Omega$  mit *Achse*  $L$  und *Zentrum*  $p$  (d.h. der Kollineationen, die alle Punkte von  $L$  fest und alle Geraden durch  $p$  invariant lassen).

$G^c$  bezeichne die (topologische) Gruppe der *stetigen* affinen Kollineationen (versehen mit der kompakt-offenen Topologie bezüglich  $A$ ). Nach [16, 3.5] wirkt  $G^c$  dann als topologische Transformationsgruppe auch von  $\mathbb{P}$  und damit von  $L_\infty$ . Für eine Untergruppe  $\Xi$  von  $G^c$  sei  $\Xi^1$  die Zusammenhangskomponente (der Identität) von  $\Xi$ . Besondere Bedeutung kommt der Zusammenhangskomponente

$$\Gamma = (G^c)^1$$

von  $G^c$  selbst zu.

Ist  $L$  eine unter  $\Xi$  invariante Gerade, so bezeichnet  $\Xi|L$  die Gruppe  $\{\xi|L / \xi \in \Xi\}$  der von  $\Xi$  auf  $L$  induzierten Homöomorphismen  $\xi|L$  (versehen mit der kompakt-offenen Topologie).

1.6. GRUNDTATSACHEN (vgl. [16, §3]). Der Raum  $A$  der affinen Punkte läßt sich so mit dem topologischen  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $\mathbb{R}^{2n}$  identifizieren, daß die Geraden durch den Ursprung  $o \in \mathbb{R}^{2n}$  paarweise komplementäre lineare Teilräume der Dimension  $n$  werden, und daß sich die übrigen affinen Geraden als die Bilder von Ursprungsgeraden unter der Translationsgruppe  $T$  dieses Vektorraums ergeben. Eine solche Identifikation wird stets stillschweigend zugrundegelegt.  $G^c$  ist das semidirekte Produkt von  $T$  mit der Standgruppe  $G_o^c$  im Ursprung.  $G_o^c$  besteht bei der vorgenommenen Identifikation aus  $\mathbb{R}$ -linearen Transformationen von  $A = \mathbb{R}^{2n}$ ; es handelt sich also um eine abgeschlossene Untergruppe von  $GL_{2n}(\mathbb{R})$  und damit um eine Liegruppe.

Feinere Aussagen erhält man, wenn man den Kern  $K$  der Ebene (d.h. den Kern eines die affine Ebene koordinatisierenden lokalkompakten zusammenhängenden Quasikörpers, vgl. [16, 2.4]) als Grundkörper wählt.  $K$  ist als topologischer Körper isomorph zu  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$  oder  $\mathbb{H}$ ; dabei kommt  $\mathbb{H}$  als Kern nur in der klassischen Quaternionenebene  $\mathcal{P}(\mathbb{H})$  selbst vor ([14, Theorem 1]). Der affine Punktraum  $A$  ist in natürlicher Weise ein topologischer Vektorraum über  $K$ ; die eben betrachtete  $\mathbb{R}$ -lineare Struktur erhält man, indem man nötigenfalls den Skalarenbereich einschränkt. Die Kollineationen aus  $G_{[o, L_\infty]}$  sind genau die skalaren Streckungen mit Elementen aus  $K$ , und die Kollineationen aus  $G_o$  sind über  $K$  semilineare Transformationen von  $A$  ([1]). Die Untergruppe  $LG_o$  der  $K$ -linearen Elemente von  $G_o$  ist natürlich in  $G^c$  enthalten. Ist  $\mathcal{P}$  nicht isomorph zu  $\mathcal{P}(\mathbb{H})$ , so hat  $LG_o$  Index höchstens 2 in  $G_o^c$ , da  $\mathbb{R}$  nur einen und  $\mathbb{C}$  genau zwei stetige Automorphismen hat. Aus demselben Grund ist dann die zusammenhängende Gruppe  $\Gamma_o$  in  $LG_o$  enthalten.

1.7. *Komplemente von  $G_{[o, L_\infty]}$* . Bezüglich einer festen  $K$ -Basis  $\{e_i\}$  von  $A$  definieren wir den *linearen Anteil* von  $\gamma \in G_o$  als die Matrix  $A_\gamma = (a_{ij})$  mit  $\gamma(e_i) = \sum_j e_j \cdot a_{ij}$  ( $a_{ij} \in K$ ). Ist  $\mathcal{P}$  nicht isomorph zu  $\mathcal{P}(\mathbb{H})$ , also  $K = \mathbb{R}$  oder  $K = \mathbb{C}$ , so können wir diejenigen Kollineationen  $\gamma \in G_o$  betrachten, deren linearer Anteil

Determinante  $\pm 1$  über  $\mathbf{K}$  hat; diese bilden eine Untergruppe

$$SG_o = \{\gamma \in G_o / \det_{\mathbf{K}} A_\gamma \in \{1, -1\}\}.$$

$SG_o$  hat mit der Gruppe  $G_{[\Gamma_o, L_\infty]}$  der skalaren Streckungen endlichen Durchschnitt (mit anderen Worten:  $SG_o$  wirkt *fast effektiv* auf  $L_\infty$ ), und  $G_o$  ist fast zerfallende Erweiterung von  $(G_{[\Gamma_o, L_\infty]})^1$  mit  $SG_o$ . Wegen  $\Gamma_o \subseteq LG_o$  und des Zusammenhangs von  $\Gamma_o$  ist

$$S\Gamma_o := \Gamma_o \cap SG_o = \{\gamma \in \Gamma_o / \det_{\mathbf{K}} \gamma = 1\}, \quad (1)$$

und wegen  $\Gamma_o = S\Gamma_o \cdot (G_{[\Gamma_o, L_\infty]})^1$  ist auch  $S\Gamma_o$  zusammenhängend.

Man beachte, daß  $SG_o$  im allgemeinen von der gewählten Basis abhängen wird.  $S\Gamma_o$  ist jedoch basisunabhängig, wie man an (1) abliest.

Im Fall der klassischen Ebene über  $\mathbb{H}$  erhält man analoge Aussagen durch die Setzung

$$SG_o = SL_2(\mathbb{H}) = S\Gamma_o.$$

Allgemein schreiben wir für eine abgeschlossene Untergruppe  $\Omega$  von  $G_o$  mit  $\Omega \supseteq (G_{[\Gamma_o, L_\infty]})^1$

$$S\Omega = \Omega \cap SG_o;$$

man hat dann stets

$$\Omega = S\Omega \cdot (G_{[\Gamma_o, L_\infty]})^1, \quad \text{insbesondere} \quad \Omega | L_\infty = S\Omega | L_\infty,$$

wobei  $S\Omega$  fast effektiv auf  $L_\infty$  wirkt. Darin besteht die technische Bedeutung dieser Definitionen. Ist dabei  $\Omega$  eine abgeschlossene Untergruppe von  $G_o^c$ , so ist nach [16, 3.8] die Homöomorphismengruppe  $\Omega | L_\infty$  lokalkompakt, und daher die Einschränkungabbildung  $S\Omega \rightarrow S\Omega | L_\infty = \Omega | L_\infty$  eine endlichblättrige Überlagerung.

## 2. Achsenstandgruppen

Dieser Abschnitt gilt hauptsächlich dem Beweis des Sphärenlemmas 1.1. Es seien stets  $S$  und  $W$  zwei verschiedene (affine) Geraden durch den Ursprung  $o \in \mathbb{R}^{2n} = \mathbf{A}$ , aufgefaßt als  $\mathbb{R}$ -lineare Teilräume von  $\mathbf{A}$ ; mit  $s$  und  $w$  bezeichnen wir die zugehörigen uneigentlichen (auf der Translationsachse  $L_\infty$  liegenden) Punkte.

Wir beginnen mit einer Weiterentwicklung eines grundlegenden Sachverhalts aus [16]:

### 2.1. LEMMA über Achsenstandgruppen.

(a) Die Gruppe  $G_{S,W}^c$  aller stetigen affinen,  $W$  und  $S$  invariant lassenden Kollineationen hat eine größte kompakte Untergruppe, nämlich die Untergruppe  $M$

derjenigen Kollineationen, deren Einschränkungen auf  $W$  und  $S$  als  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildungen Determinante  $\pm 1$  haben.

Bezeichnet  $R$  die Gruppe der Streckungen aus  $G_{\{0, L_\infty\}}$  mit positivem reellem Faktor, so ist  $G_{s,w}^c$  entweder gleich  $M \cdot R$  oder aber semidirektes Produkt von  $M \cdot R$  mit einer abgeschlossenen Untergruppe, die unendlich zyklisch diskret oder isomorph zur multiplikativen Gruppe  $\mathbb{R}^0$  der positiven reellen Zahlen ist.

Ähnliches gilt auch für gewisse Untergruppen, z.B.

(b) Sei  $\Omega$  eine nichtkompakte abgeschlossene Untergruppe von  $SG_{s,w}^c$ . Dann ist  $\Omega$  semidirektes Produkt seiner größten kompakten Untergruppe  $M \cap \Omega = (M \cdot R) \cap \Omega$  mit einer abgeschlossenen Untergruppe, die entweder unendlich zyklisch diskret oder isomorph zu  $\mathbb{R}^0$  ist.

(c) Für jede Kollineation  $\gamma \in G_{s,w}^c \setminus M \cdot R$  und einen beliebigen Punkt  $e \in L_\infty \setminus \{s, w\}$  existieren die Grenzwerte

$$e_+ = \lim_{\nu \rightarrow +\infty} \gamma^\nu(e) \quad \text{und} \quad e_- = \lim_{\nu \rightarrow -\infty} \gamma^\nu(e) \quad (\nu \in \mathbb{Z}),$$

und es gilt

$$\{e_+, e_-\} = \{s, w\}.$$

Dieses Verhalten ist gleichmäßig auf  $L_\infty \setminus \{s, w\}$ ; genauer:  $\gamma^\nu \mid L_\infty \setminus \{e_-\}$  konvergiert für  $\nu \rightarrow +\infty$  gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von  $L_\infty \setminus \{e_-\}$  gegen die konstante Abbildung  $L_\infty \setminus \{e_-\} \rightarrow L_\infty \setminus \{e_-\}$ :  $z \mapsto e_+$ ; und dasselbe gilt bei vertauschten Rollen von  $+$  und  $-$ .

(d) Insbesondere ist die Standgruppe von  $SG_s^c$  auf drei verschiedenen Punkten aus  $L_\infty$  kompakt.

*Beweis.* Es ist technisch bequem, den Fall der klassischen Ebene über  $\mathbb{R}$ , wo die Aussage des Lemmas offensichtlich ist, außer acht zu lassen, sich also auf Ebenen der Dimension  $m = 2n$  mit  $n = 2, 4, 8$  zu beschränken. Das Argument lehnt sich eng an [16, §4] an.

Man koordinatisiere zunächst die affine Ebene  $\mathbb{A}$  bezüglich  $W$  und  $S$  als Koordinatenachsen durch einen lokalkompakten Quasikörper  $Q$  mit additiver Gruppe  $\mathbb{R}^n$ , und identifiziere  $\mathbb{A}$  mit  $Q \times Q$ . Eine Kollineation  $\gamma \in G_{s,w}^c$  aufgefaßt als Abbildung von  $\mathbb{A}$  läßt sich dann in der Form

$$Q \times Q \rightarrow Q \times Q : (x, y) \mapsto (B_\gamma(x), C_\gamma(y))$$

schreiben, wo  $B_\gamma$  und  $C_\gamma$  lineare Automorphismen der additiven Gruppe  $\mathbb{R}^n$  von  $Q$  sind. Wie in [16, 4.1] läßt sich ferner  $L_\infty$  so mit der Einpunktkompaktifizierung  $\hat{Q} = Q \cup \{\infty\}$  von  $Q$  identifizieren, daß die Punkte  $w$  und  $s$  zu  $0$  und  $\infty$  werden, und daß der  $\gamma \mid L_\infty$  entsprechende Homöomorphismus  $P_\gamma$  von  $\hat{Q}$  für alle  $a, x \in Q$

der Beziehung

$$C_\gamma(ax) = P_\gamma(a) \cdot B_\gamma(x) \quad (1)$$

genügt. Für die modulare Funktion

$$\Delta : Q \rightarrow \mathbb{R}^0$$

von  $Q$  (vgl. [16, 2.1–2.3]) gilt dann

$$\Delta(P_\gamma(a)) = \det B_\gamma^{-1} \cdot \det C_\gamma \cdot \Delta(a) \quad (2)$$

für alle  $a \in Q$ , wo  $\det$  für die Determinante über dem Grundkörper  $\mathbb{R}$  steht. Man betrachtet nun den stetigen Homomorphismus

$$\psi : \mathbb{G}_{S,w}^c \rightarrow \mathbb{R}^0 : \gamma \mapsto \det B_\gamma^{-1} \cdot \det C_\gamma.$$

Wie man unmittelbar verifiziert, gilt für die in der Behauptung beschriebenen Gruppen  $M$  und  $R$

$$M \cdot R = \psi^{-1}(1).$$

Die Argumente von [16, 4.2(a)–(d)] zeigen, daß  $M$  kompakt ist. Zum Beweis der weiteren Aussagen in der hier angestrebten Schärfe ist es nötig, die dort verwendeten Methoden zu verfeinern.

Wir beweisen zunächst die Aussage (b) und betrachten hierzu die Einschränkung von  $\psi$  auf eine abgeschlossene Untergruppe  $\Omega$  von  $\mathbb{S}\mathbb{G}_{S,w}^c$ . Für  $0 < r \leq t$  ist  $\Omega \cap \psi^{-1}[r, t]$  eine abgeschlossene Teilmenge von  $\Omega$ ; die von ihr induzierte Menge von Homöomorphismen von  $L_\infty$  entspricht unter der vorgenommenen Identifikation von  $L_\infty$  mit  $\hat{Q}$  der Menge

$$\begin{aligned} H_{r,t} &= \{P_\omega \mid \omega \in \Omega; \psi(\omega) \in [r, t]\} \\ &= \left\{ P_\omega \mid \omega \in \Omega; \bigwedge_{a \in Q} : \Delta(P_\omega(a)) \in [r, t] \cdot \Delta(a) \right\} \end{aligned}$$

von Homöomorphismen von  $\hat{Q}$ :

$$H_{r,t} \cong \Omega \cap \psi^{-1}[r, t] \mid L_\infty.$$

Da nach [16, 2.3] die Mengen  $\{b \in Q / \Delta(b) \leq u\}$  für  $u \in \mathbb{R}^0$  ein System beliebig kleiner und beliebig großer kompakter Nullumgebungen in  $Q$  bilden, ist  $H_{r,t}$  gleichgradig stetig auf  $\hat{Q}$  (man zeigt dies genau wie in [16, 4.2(c)–(d)], wo nur der Spezialfall  $r = t = 1$  betrachtet wurde).

Nach dem Satz von Arzela-Ascoli ist also der Abschluß  $\overline{H_{r,t}}$  von  $H_{r,t}$  im Raum der stetigen Abbildungen von  $\hat{Q}$  in sich kompakt (bezüglich der kompakt-offenen Topologie). Dasselbe gilt für den Abschluß der Menge der Inversen aller

Homöomorphismen aus  $H_{r,t}$ , da  $H_{r,t}^{-1} = H_{1/t,1/r}$ . Folglich ist  $\overline{H_{r,t}}$  in der Homöomorphismengruppe  $\mathcal{H}(\hat{Q})$  von  $\hat{Q}$  enthalten. Vermöge der vorgenommenen Identifikationen ergibt sich also, daß der Abschluß von  $\Omega \cap \psi^{-1}[r, t] | L_\infty$  in der Homöomorphismengruppe  $\mathcal{H}(L_\infty)$  von  $L_\infty$  kompakt ist.

Nun ist aber nach [16, 3.8]  $SG_0^c | L_\infty = G_0^c | L_\infty$  lokalkompakt; als Untergruppe von  $\mathcal{H}(L_\infty)$  ist also  $SG_0^c | L_\infty$  vollständig – etwa in der rechtsuniformen Struktur von  $\mathcal{H}(L_\infty)$  – und daher abgeschlossen in  $\mathcal{H}(L_\infty)$ . Die Einschränkungsbildung  $SG_0^c \rightarrow SG_0^c | L_\infty$  ist als endlichblättrige Überlagerung insbesondere abgeschlossen. Insgesamt ist daher  $\Omega \cap \psi^{-1}[r, t] | L_\infty$  schon abgeschlossen in  $\mathcal{H}(L_\infty)$  und mithin selbst kompakt. Mittels der Endlichblättrigkeit von  $SG_0^c \rightarrow SG_0^c | L_\infty$  erhält man daraus als Ergebnis, daß  $\Omega \cap \psi^{-1}[r, t]$  kompakt ist. Dies läßt sich nun auf zweierlei Weise ausnützen:

Da  $\mathbb{R}^0$  keine nichttrivialen kompakten Untergruppen besitzt, ist zunächst (mit  $r = t = 1$ )

$$K = \Omega \cap \psi^{-1}(1) = (M \cdot R) \cap \Omega = M \cap \Omega$$

die größte kompakte Untergruppe von  $\Omega$ ; dies war im wesentlichen das Ergebnis von [16, 4.2].

Die Kompaktheit von  $\Omega \cap \psi^{-1}[r, t]$  im allgemeinen zeigt ferner, daß die Untergruppe  $\psi(\Omega)$  von  $\mathbb{R}^0$  abgeschlossen ist. Da jede Untergruppe von  $\mathbb{R}^0$  zyklisch oder dicht ist, bestehen also nur die folgenden Möglichkeiten: 1)  $\psi(\Omega) = \{1\}$ , 2)  $\psi(\Omega) = \mathbb{R}^0$ , 3)  $\psi(\Omega)$  ist unendlich zyklisch diskret. Wie bereits festgestellt, ist  $\Omega$  im Fall 1) kompakt. Es bleibt zu zeigen, daß  $\Omega$  im Fall 2) eine abgeschlossene zu  $\mathbb{R}^0$  isomorphe Untergruppe  $Y$  und im Fall 3) eine abgeschlossene diskrete unendlich zyklische Untergruppe  $Z$  enthält so, daß  $\psi(\Omega) = \psi(Y)$  bzw.  $\psi(\Omega) = \psi(Z)$ . Daß dann, wie in (b) behauptet,  $\Omega$  das semidirekte Produkt von  $K = \Omega \cap \psi^{-1}(1)$  mit  $Y$  bzw.  $Z$  ist, ergibt sich unmittelbar.

Im Fall 2) existiert nun eine abgeschlossene zu  $\mathbb{R}^0$  isomorphe Einparameteruntergruppe  $Y$  in  $\Omega$ : sonst wäre nämlich nach dem Weil'schen Lemma [32, S.96 Lemma 2] jede Einparameteruntergruppe  $X$  von  $\Omega$  relativ kompakt und daher  $\psi(X) = \{1\}$ ; da die Einparameteruntergruppen von  $\Omega$  die Zusammenhangskomponente  $\Omega^1$  erzeugen, wäre also auch  $\psi(\Omega^1) = \{1\}$ , und wegen  $\psi(\Omega) = \mathbb{R}^0$  hätte  $\Omega$  überabzählbar viele Zusammenhangskomponenten, im Widerspruch dazu, daß  $\Omega$  eine abgeschlossene Untergruppe von  $GL_{2n}(\mathbb{R})$  ist. Die nicht kompakte, abgeschlossene Untergruppe  $Y$  ist dann insbesondere nicht in  $K$  enthalten, daher ist  $\psi(Y) \neq \{1\}$ , und da  $\mathbb{R}^0$  keine nichttrivialen zusammenhängenden echten Untergruppen besitzt, folgt  $\psi(Y) = \mathbb{R}^0 = \psi(\Omega)$ .

Im Fall 3) wähle man  $\zeta \in \Omega$  so, daß  $\psi(\Omega) = \{\psi(\zeta^v) | v \in \mathbb{Z}\}$ . Die von  $\zeta$  erzeugte Untergruppe  $Z$  von  $\Omega$  ist zyklisch diskret; sie ist ferner abgeschlossen in  $\Omega$ , sonst wäre nach dem Weil'schen Lemma  $Z$  relativ kompakt in  $\Omega$ , und also  $\psi(Z) = \{1\}$ , während nach Definition  $\psi(Z) = \psi(\Omega)$  unendlich zyklisch ist.



Damit ist Aussage (b) bewiesen. – Aussage (a) folgt nahezu unmittelbar aus der Aussage (b) für den Spezialfall  $\Omega = \text{SG}_{S,W}^c$ . Man braucht hierzu nur zu beachten, daß  $M$  wegen  $\mathbb{G}_{S,W}^c = \text{SG}_{S,W}^c \cdot \mathbb{G}_{\{0, L_\infty\}}$  und nach Definition das Komplexprodukt der größten kompakten Untergruppe  $M \cap \text{SG}_{S,W}^c$  von  $\text{SG}_{S,W}^c$  und der größten kompakten Untergruppe  $\Theta$  von  $\mathbb{G}_{\{0, L_\infty\}}$  ist, und die Beziehung  $\mathbb{G}_{\{0, L_\infty\}} = \Theta \cdot R$  benützen.

Nun zur Aussage (c). Für  $\gamma \in \mathbb{G}_{S,W}^c \setminus M \cdot R$  ist

$$r = \psi(\gamma) \neq 1.$$

Nach (2) und der Definition von  $\psi$  hat man für alle  $a \in Q$  und  $\nu \in \mathbb{Z}$  wegen  $P_\gamma^\nu = (P_\gamma)^\nu$

$$\Delta(P_\gamma^\nu(a)) = r^\nu \cdot \Delta(a). \quad (3)$$

Zum Beweis von (c) nehmen wir o.B.d.A.  $r > 1$  an (der Fall  $r < 1$  läßt sich dann behandeln, indem man  $\gamma^{-1}$  statt  $\gamma$  betrachtet). Da nach [16, 2.3] das System der Teilmengen  $U_t = \{a \in Q / \Delta(a) \leq t\}$  von  $Q$  für  $t > 0$  eine Nullumgebungsbasis bildet und andererseits jede kompakte Teilmenge von  $Q$  für geeignetes  $t > 0$  in  $U_t$  enthalten ist, zeigt dann (3), daß für jede kompakte Teilmenge  $C$  von  $Q$  und jede Nullumgebung  $U$  in  $Q$  für genügend großes  $\nu$  stets  $P_\gamma^\nu(C) \subseteq U$  ist. Da  $P_\gamma$  bei der vorgenommenen Identifikation von  $Q$  und  $L_\infty \setminus \{s\}$  die Wirkung von  $\gamma$  auf  $L_\infty \setminus \{s\}$  beschreibt, bedeutet dies, daß  $\gamma^\nu | L_\infty \setminus \{s\}$  für  $\nu \rightarrow \infty$  gleichmäßig auf kompakten Teilmengen gegen die konstante Abbildung konvergiert, die alles auf  $w$  wirft. Eine entsprechende Konvergenzaussage für  $\nu \rightarrow -\infty$  ergibt sich durch Vertauschung der Rollen von  $s$  und  $w$  in den vorstehenden Argumenten, oder aber durch Betrachtung der Komplemente der Mengen  $U_t$  in  $\hat{Q}$ , die nach [16, 2.3] eine Umgebungsbasis des ( $s$  entsprechenden) Punktes  $\infty$  von  $\hat{Q}$  bilden.

Die Aussage (d) schließlich ist eine unmittelbare Folgerung aus (c). Aussage (c) besagt nämlich insbesondere, daß für  $e \in L_\infty \setminus \{s, w\}$  die Gruppe  $\text{SG}_{0,s,w,e}^c = \text{SG}_{S,W,e}^c$  in  $M \cdot R$  und wegen  $(M \cdot R) \cap \text{SG}_0^c = M \cap \text{SG}_0^c$  also in  $M$  enthalten ist; folglich ist sie kompakt.  $\square$

Aus der Konvergenzaussage (c) von 2.1 wird nun das Sphärenlemma 1.1 hergeleitet. Zur Bequemlichkeit bei späteren Anwendungen sei es zunächst nochmals in etwas technischerer Sprache formuliert, und zwar in zwei Varianten, von denen die zweite in [ ] gesetzt ist:

**2.2. LEMMA.** *Sei  $\mathcal{S}$  eine mindestens zweidimensionale Bahn in  $L_\infty$  unter der Zusammenhangskomponente  $\Xi^1$  einer abgeschlossenen Untergruppe  $\Xi$  von  $\mathbb{G}_0^c$  [bzw. von  $\text{SG}_0^c$ ]. Seien  $w, s \in \mathcal{S}$  zwei verschiedene Punkte,  $W$  und  $S$  die zugehörigen Ursprungsgeraden,  $M$  die größte kompakte Untergruppe von  $\mathbb{G}_{S,W}^c$  und  $R$  die Gruppe der positiv-reellen Streckungen aus  $\mathbb{G}_{\{0, L_\infty\}}$ .*

Ist dann  $\Xi_{s,w} = \Xi_{S,w}$  nicht in  $M \cdot R$  enthalten [bzw. ist  $\Xi_{s,w}$  nicht kompakt], so ist  $\mathcal{S} = \Xi^1(s)$  homöomorph zu einer Sphäre.

*Bemerkung.* In der Sprache der topologischen Transformationsgruppen kann dieses Ergebnis z.B. so formuliert werden:

In einer abgeschlossenen Untergruppe  $\Xi$  von  $SG_s^c$  habe die Standgruppe  $\Xi_s$  auf einem uneigentlichen Punkt  $s \in L_\infty$  Kodimension mindestens 2; ferner möge ein  $\xi \in \Xi \setminus \Xi_s$  existieren so, daß  $\Xi_s \cap \Xi_s^\xi$  nicht kompakt ist. Dann ist  $\Xi^1/(\Xi^1 \cap \Xi_s)$  homöomorph zu einer Sphäre.

Diese Ausdrucksweise macht am deutlichsten, wie einschneidend die Bedingungen sind, die das Sphärenlemma Kollineationsgruppen auferlegt.

*Beweis.* (a) Ist  $\Xi_{s,w} | L_\infty$  nicht relativ kompakt, so ist  $\Xi_{s,w} | L_\infty$  nicht in  $M \cdot R | L_\infty = M | L_\infty$  enthalten. Dasselbe gilt, falls  $\Xi \subseteq SG_s^c$  und falls  $\Xi_{s,w}$  nicht kompakt ist, da  $(M \cdot R) \cap SG_{S,w}^c$  die größte kompakte Untergruppe von  $SG_{S,w}^c$  ist. In jeder der in 1.1 und 2.1 zugrundegelegten Situationen existiert also nach 2.1(c) eine Kollineation  $\gamma \in \Xi_{s,w}$  derart, daß  $\gamma^\nu | L_\infty \setminus \{s\}$  für  $\nu \in \mathbb{N}$ ,  $\nu \rightarrow \infty$  gleichmäßig auf kompakten Teilmengen gegen die konstante Abbildung  $L_\infty \setminus \{s\} \rightarrow \{w\}$  konvergiert.

Sei

$$H = \Xi^1 \cap \Xi_s$$

die Standgruppe von  $\Xi^1$  auf  $s$ ; wir betrachten den Rechtsnebenklassenraum  $\Xi^1/H$  mit der Quotiententopologie und die kanonische stetige bijektive Abbildung

$$\Phi: \Xi^1/H \rightarrow \Xi^1(s) = \mathcal{S}: \xi H \mapsto \xi(s).$$

Die Abbildung

$$\tilde{\gamma}: \Xi^1/H \rightarrow \Xi^1/H: \xi H \mapsto \gamma \xi \gamma^{-1} \cdot H$$

ist wohldefiniert, weil  $\Xi^1$  normal in  $\Xi$  und  $\gamma \in \Xi_s$  ist; sie ist ein Homöomorphismus und macht das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \Xi^1/H & \xrightarrow{\Phi} & \mathcal{S} \\ \tilde{\gamma} \downarrow & & \downarrow \gamma | \mathcal{S} \\ \Xi^1/H & \xrightarrow{\Phi} & \mathcal{S} \end{array}$$

kommutativ.  $\Xi^1/H$  ist eine zusammenhängende Mannigfaltigkeit; ihre Dimension  $d$  ist nach Voraussetzung mindestens 2. Sei

$$\tilde{w} = \Phi^{-1}(w); \quad \tilde{s} = \Phi^{-1}(s); \quad V = (\Xi^1/H) \setminus \{\tilde{s}\}.$$

Wir behaupten:

(b) Zu jeder zur  $d$ -dimensionalen Vollkugel homöomorphen Koordinatenumgebung  $D$  von  $\tilde{w}$  in  $V$  mit Rand  $\delta D$  und zu jeder kompakten zusammenhängenden  $\tilde{w}$  enthaltenden Teilmenge  $C$  von  $V$  existiert ein  $\nu \in \mathbb{N}$  so, daß

$$\tilde{\gamma}^\nu(C) \subseteq D \setminus \delta D.$$

In der Tat: Da  $\delta D$  die Mannigfaltigkeit  $V$  zerlegt, und da wegen  $\gamma \in \Xi_{s,w}$  stets  $\tilde{\gamma}^\nu(\tilde{w}) = \tilde{w}$  für alle  $\nu \in \mathbb{N}$ , gälte sonst

$$\bigwedge_{\nu \in \mathbb{N}} \bigvee_{x_\nu \in C} : \tilde{\gamma}^\nu(x_\nu) \in \delta D.$$

Da  $\gamma^\nu | L_\infty \setminus \{s\}$  gleichmäßig auf kompakten Teilmengen gegen  $w$  konvergiert, da die  $\Phi(x_\nu)$  in der kompakten Teilmenge  $\Phi(C)$  von  $L_\infty \setminus \{s\}$  enthalten sind, und da  $\Phi(\delta D)$  kompakt ist, wäre dann

$$w = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \gamma^\nu(\Phi(x_\nu)) = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \Phi(\tilde{\gamma}^\nu(x_\nu)) \in \Phi(\delta D),$$

im Widerspruch zu  $\tilde{w} \in D \setminus \delta D$ . Damit ist (b) gezeigt.

(c) Mit  $\Xi^1/H$  ist auch  $V = (\Xi^1/H) \setminus \{\tilde{s}\}$  eine zusammenhängende Mannigfaltigkeit der Dimension  $d \geq 2$ ; folglich ist  $V$  die Vereinigung von abzählbar vielen kompakten zusammenhängenden  $\tilde{w}$  enthaltenden Teilmengen. Nach (b) und wegen  $\gamma(s) = s$ , also  $\tilde{\gamma}(V) = V$ , läßt sich somit  $V$  darstellen als Vereinigung einer abzählbaren aufsteigenden Familie von zu  $\mathbb{R}^d$  homöomorphen offenen Teilmengen. Ein bekannter Satz von Brown [13] besagt, daß folglich  $V$  selbst homöomorph zu  $\mathbb{R}^d$  ist. Die zusammenhängende Mannigfaltigkeit  $\Xi^1/H = V \cup \{\tilde{s}\}$  ist Vereinigung von  $V$  und einer zur  $d$ -dimensionalen Vollkugel homöomorphen Koordinatenumgebung  $B$  von  $\tilde{s}$ , die so gewählt werden kann, daß ihr Rand  $\delta B$  flach eingebettet ist. Die Anwendung des Schönflies-Satzes [12] auf die  $(d-1)$ -Sphäre  $\delta B$  in  $V \cong \mathbb{R}^d$  ergibt nun leicht, daß  $\Xi^1/H$  eine  $d$ -Sphäre ist. Die bijektive stetige Abbildung  $\Phi$  stellt dann einen Homöomorphismus dieser  $d$ -Sphäre auf  $\Xi^1(s) = \mathbb{C}$  her.  $\square$

Für das weitere nun noch ein technisches Hilfsmittel:

**2.3. HILFSSATZ.** Seien  $s, w$  verschiedene Punkte aus  $L_\infty$  und  $S, W$  die zugehörigen Ursprungsgeraden. Sei  $\Delta$  eine zusammenhängende abgeschlossene Untergruppe von  $\Gamma_{o,S}$ ; ferner möge  $\Delta_{[w,S]}$  oder  $\Delta_{[s,W]}$  eine Involution enthalten. Dann ist  $\Delta_{[s,S]}(w) = \Delta(w)$ ; insbesondere ist  $\Delta_{[s,S]}$  zusammenhängend und  $\dim \Delta_{[s,S]} = \dim \Delta(w)$ .

*Beweis.* Ist  $\Delta(w) = \{w\}$ , so ist die Behauptung trivial. Sei also

$$d = \dim \Delta(w) = \dim \Delta/\Delta_w > 0.$$

Indem man einen lokalen Schnitt der Faserung  $\Delta \rightarrow \Delta/\Delta_w$  betrachtet, erhält man eine kompakte Teilmenge  $\mathcal{D}$  von  $\Delta$  der Dimension  $d$  derart, daß  $\mathcal{D}(w) \subseteq L_\infty \setminus \{s, w\}$  und daß die Abbildung  $\mathcal{D} \rightarrow L_\infty \setminus \{s, w\}: \delta \mapsto \delta(w)$  injektiv ist.

Ist nun  $\iota$  eine Involution aus  $\Delta_{[w, S]}$  und  $\delta \in \mathcal{D}$ , so ist  $\delta\iota\delta^{-1}$  eine Spiegelung mit Achse  $S$  und Zentrum  $\delta(w) \neq w$ ; daher ist auch die Abbildung  $\mathcal{D} \rightarrow \Delta_{[S]}: \delta \mapsto \delta\iota\delta^{-1}$  injektiv. Das Bild  $\mathcal{F}$  dieser Abbildung hat ebenfalls Dimension  $d$ , da  $\mathcal{D}$  kompakt und also homöomorph zu  $\mathcal{F}$  ist. Nach [3, S.103] oder [19, 4.21] ist  $\mathcal{F} \cdot \iota = \{\sigma\iota \mid \sigma \in \mathcal{F}\} \subseteq \Delta_{[s, S]}$ . Da  $\Delta_{[s, S]}$  frei auf  $L_\infty \setminus \{s\}$  wirkt, erhält man insgesamt die Abschätzung

$$\dim \Delta(w) = d = \dim \mathcal{F} = \dim \mathcal{F} \cdot \iota \leq \dim \Delta_{[s, S]} = \dim \Delta_{[s, S]}(w) \leq \dim \Delta(w),$$

in der nachträglich überall das Gleichheitszeichen gesetzt werden kann.  $\Delta(w)$ , aufgefaßt als homogener Raum mit der Quotiententopologie von  $\Delta/\Delta_w$ , ist eine Mannigfaltigkeit; aus Dimensionsgründen sind also alle Bahnen von  $\Delta_{[s, S]}$  in  $\Delta(w)$  offen bezüglich dieser Topologie. Da  $\Delta$  zusammenhängend ist, folgt  $\Delta_{[s, S]}(w) = \Delta(w)$  und der Zusammenhang von  $\Delta_{[s, S]}$ .

Ausgehend von einer Involution  $\iota \in \Delta_{[s, w]}$  schließt man entsprechend in der dualen Ebene.  $\square$

### 3. Beweis der Hauptsätze

In der Situation von Satz 1.3 liefert die Tits'sche Klassifikation aller zweifach transitiven Liegruppen Kandidaten für Kollineationsgruppen. Einige davon können aus geometrischen Gründen sofort ausgeschlossen werden; hierzu dient die folgende simple Bemerkung:

**3.1. HILFSSATZ.** *In einer lokalkompakten zusammenhängenden Translationsebene lasse eine abgeschlossene zusammenhängende halbeinfache Untergruppe  $\Delta$  von  $\Gamma_o$  einen vom Ursprung  $o$  verschiedenen Punkt fest. Dann zerfällt die Wirkung von  $\Delta$  als linearer Gruppe von  $\mathbb{A} = \mathbb{R}^{2n}$  in irreduzible Komponenten der Dimension höchstens  $n$ .*

*Beweis.*  $\Delta$  läßt mit einem von  $o$  verschiedenen Punkt auch die dadurch bestimmte Ursprungsgerade  $S$  invariant.  $S$  ist ein linearer Teilraum der Dimension  $n$  von  $\mathbb{A}$ ; da  $\Delta$  als halbeinfache Gruppe vollständig reduzibel wirkt, existiert ein zu  $S$  komplementärer Teilraum der Dimension  $n$ , der ebenfalls  $\Delta$ -invariant ist.  $\square$

**3.2. FOLGERUNG.** *In einer lokalkompakten 16-dimensionalen Translationsebene enthält  $\Gamma_o$  nie eine zu  $SU_5(\mathbb{C}, i)$  oder  $SU_3(\mathbb{H}, i)$  ( $i = 0, 1, 2$ ) lokal isomorphe abgeschlossene Untergruppe.*

*Beweis.* Nach [31] sind die Dimensionen der reellen linearen irreduziblen Darstellungen der universellen Überlagerungen von  $SU_5(\mathbb{C}, i)$  bzw.  $SU_3(\mathbb{H}, i)$  gleich 10 bzw. 12, 14 oder größer als 16. Eine zu  $SU_5(\mathbb{C}, i)$  oder  $SU_3(\mathbb{H}, i)$  lokal isomorphe abgeschlossene zusammenhängende Untergruppe von  $\Gamma_o$  ließe in  $\mathbb{A} = \mathbb{R}^{16}$  also stets einen Teilraum der Dimension mindestens 2 punktweise fest, hat aber andererseits keine nichttrivialen irreduziblen reellen Darstellungen der Dimension  $\leq 8$ . Mit 3.1 ergäbe sich dann ein Widerspruch.  $\square$

Eine entsprechende Aussage für 8-dimensionale Ebenen kostet etwas mehr Mühe:

**3.3. HILFSSATZ.** *In einer lokalkompakten 8-dimensionalen Translations-ebene enthält  $\Gamma_o$  nie eine zu  $SU_3(\mathbb{C}, 1)$  lokal isomorphe abgeschlossene Untergruppe.*

*Beweis.* Wir beschreiben hier die Gruppe  $SU_3(\mathbb{C}, 1)$  als die Gruppe aller komplexen  $3 \times 3$ -Matrizen mit Determinante 1, die die hermitesche Form

$$\mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}: z \mapsto z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2 - z_3 \bar{z}_3$$

invariant lassen; mit anderen Worten:

$$SU_3(\mathbb{C}, 1) = \{U \in SL_3(\mathbb{C}) \mid U^{-1} = JU^*J\},$$

wobei  $U^*$  die zu  $U$  transponiert-konjugierte Matrix und

$$J = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$$

ist. Die Liealgebra von  $SU_3(\mathbb{C}, 1)$  ist der 8-dimensionale Unterraum

$$\mathbb{A}_2^{\mathbb{C},1} = \{A \in \mathbb{C}(3) \mid \text{sp } A = 0, JA^*J = -A\}$$

des  $\mathbb{R}$ -Vektorraums aller komplexen  $3 \times 3$ -Matrizen. Die Elemente von  $\mathbb{A}_2^{\mathbb{C},1}$  sind also genau die Matrizen der Form

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \cdot i & z_{12} & z_{13} \\ -\bar{z}_{12} & x_2 \cdot i & z_{23} \\ \bar{z}_{13} & \bar{z}_{23} & -(x_1 + x_2) \cdot i \end{pmatrix} (x_\mu \in \mathbb{R}; z_{\kappa\nu} \in \mathbb{C}). \quad (1)$$

Angenommen nun, in einer lokalkompakten 8-dimensionalen Translations-ebene enthielte  $\Gamma_o$  eine zu  $SU_3(\mathbb{C}, 1)$  lokal isomorphe abgeschlossene zusammenhängende Untergruppe  $\Delta$ . Die Dimensionen der reellen linearen irreduziblen Darstellungen der universellen Überlagerung von  $SU_3(\mathbb{C}, 1)$  sind nach [31] 6, 8 oder größer als 8. Nach 3.1 müßte folglich die Wirkung von  $\Delta$  auf der affinen

Ebene  $\mathbb{A} = \mathbb{R}^8$  irreduzibel sein. Die einzige irreduzible Darstellung der reellen Dimension 8 ist nun die adjungierte Darstellung von  $\text{PSU}_3(\mathbb{C}, 1)$  auf ihrer Liealgebra  $\mathbb{A}_2^{\mathbb{C},1}$ ; die affine Ebene  $\mathbb{A}$  ließe sich also als  $\mathbb{R}$ -Vektorraum so mit  $\mathbb{A}_2^{\mathbb{C},1}$  identifizieren, daß  $\Delta$  die Gruppe

$$\{\mathbb{A}_2^{\mathbb{C},1} \rightarrow \mathbb{A}_2^{\mathbb{C},1}: X \mapsto UXU^{-1} \mid U \in \text{SU}_3(\mathbb{C}, 1)\} \quad (2)$$

wird.

Schränkt man in (2)  $U$  auf die Matrizen­gruppe

$$\left\{ \begin{pmatrix} ac & bc \\ -\bar{b}c & \bar{a}c \\ & & \bar{c}^2 \end{pmatrix} \middle/ a, b, c \in \mathbb{C}; a\bar{a} + b\bar{b} = 1; c\bar{c} = 1 \right\} \quad (3)$$

ein, so erhält man eine zu  $U_2(\mathbb{C})$  isomorphe Untergruppe  $\Xi$  von  $\Delta$ . Da  $\Delta$  einfach ist, wäre  $\Gamma_{[0, L_\infty]} \cap \Delta = \{\text{id}\}$ , und  $\Xi$  würde effektiv auf  $L_\infty$  wirken. Nach [26] wäre daher die Wirkung von  $\Xi$  auf der 4-Sphäre  $L_\infty$  äquivalent zur gewöhnlichen Wirkung von  $U_2(\mathbb{C})$  auf der Einpunktkompaktifizierung von  $\mathbb{C}^2$ . Der zu  $\text{Spin}_3(\mathbb{R}) \cong \text{SU}_2(\mathbb{C})$  isomorphe Normalteiler  $\Theta$  von  $\Xi$  (den man durch die Einschränkung  $c = 1$  in (3) erhält) ließe also genau zwei Ursprungsgeraden  $S$  und  $W$  invariant.

In dieser Situation kann nun  $\Theta$  nicht effektiv auf jedem der beiden zu  $\mathbb{R}^4$  isomorphen Untervektorräume  $S$  und  $W$  wirken. Bis auf Äquivalenz hat nämlich  $\text{Spin}_3(\mathbb{R}) \cong \text{SU}_2(\mathbb{C})$  nur eine effektive lineare Wirkung in  $\mathbb{R}^4$  (die gewöhnliche Wirkung von  $\text{SU}_2(\mathbb{C})$  in  $\mathbb{C}^2$ ); in dieser induziert die zentrale Involution die Abbildung  $x \mapsto -x$ . Bei effektiver Wirkung von  $\Theta$  sowohl auf  $S$  als auch auf  $W$  wäre also die zentrale Involution  $\iota$  von  $\Theta$  die Spiegelung der affinen Ebene am Ursprung, die in  $\Gamma_{[0, L_\infty]}$  liegt, im Widerspruch zu  $\Gamma_{[0, L_\infty]} \cap \Delta = \{\text{id}\}$ .

Da der einzige nichttriviale Normalteiler von  $\text{Spin}_3(\mathbb{R})$  das zweielementige Zentrum ist, bliebe also o.B.d.A. die Gerade  $W$  punktweise fest unter  $\iota$ . Bei der vorgenommenen Identifikation von  $\mathbb{A}$  mit  $\mathbb{A}_2^{\mathbb{C},1}$  ist nun  $\iota$  die Abbildung

$$\iota: \mathbb{A}_2^{\mathbb{C},1} \rightarrow \mathbb{A}_2^{\mathbb{C},1}: X \mapsto \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}.$$

Mit der in (1) angegebenen Gestalt der Elemente von  $\mathbb{A}_2^{\mathbb{C},1}$  erhält man  $W$  als Unterraum der Fixpunkte von  $\iota$  in  $\mathbb{A} = \mathbb{A}_2^{\mathbb{C},1}$  in der Form

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \cdot i & z \\ -\bar{z} & x_2 \cdot i \\ & & -(x_1 + x_2) \cdot i \end{pmatrix} \middle/ x_1, x_2 \in \mathbb{R}; z \in \mathbb{C} \right\}.$$

Betrachten wir nun andererseits die Einparameteruntergruppe

$\Psi$  von  $\Delta$ ,

die man erhält, wenn man in (2)  $U$  auf die Matrizen­gruppe

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & & \\ & r & t \\ & t & r \end{pmatrix} \middle/ t \in \mathbb{R}; r^2 - t^2 = 1; r \geq 1 \right\}$$

einschränkt. Die Beziehung

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & r & t \\ & t & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2i & & \\ & i & \\ & & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & r & -t \\ & -t & r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2i & & \\ & i & \\ & & i \end{pmatrix}$$

(für  $r^2 - t^2 = 1$ ) besagt, daß der Punkt

$$\begin{pmatrix} -2i & & \\ & i & \\ & & i \end{pmatrix}$$

von  $W$  unter  $\Psi$  festbleibt. Also müßte die Ursprungsgerade  $W$  insgesamt unter  $\Psi$  invariant bleiben, was mit  $t \neq 0$  durch

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & r & t \\ & t & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \\ -1 & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & r & -t \\ & -t & r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & r & -t \\ -r & & \\ -t & 0 & \end{pmatrix} \notin W$$

widerlegt wird. Die Annahme,  $\Gamma_0$  könne eine zu  $SU_3(\mathbb{C}, 1)$  lokal isomorphe Untergruppe enthalten, führt also zu einem Widerspruch.  $\square$

Die folgenden Sätze dienen dazu, die klassischen Ebenen über  $\mathbb{H}$  und  $\mathbb{O}$  durch gewisse Untergruppen ihrer Kollineationsgruppe zu kennzeichnen:

**3.4. SATZ.** *In einer achtdimensionalen lokalkompakten Translationsebene  $\mathcal{P}$  möge  $\Gamma_0$  eine zu  $SU_2(\mathbb{H}, 1)$  lokal isomorphe abgeschlossene zusammenhängende Untergruppe  $\Delta$  enthalten. Dann ist  $\mathcal{P}$  die klassische Ebene über dem Quaternionenkörper  $\mathbb{H}$ , und die Wirkung von  $\Delta$  ist geometrisch äquivalent zur gewöhnlichen Wirkung von  $SU_2(\mathbb{H}, 1)$ .*

*Beweis.* Die universelle Überlagerungsgruppe von  $\Delta$  ist die einfach zusammenhängende Gruppe  $SU_2(\mathbb{H}, 1)$ . Wie man etwa an der Tabelle [31] abliest, hat  $SU_2(\mathbb{H}, 1)$  bis auf Äquivalenz genau zwei irreduzible reelle lineare Darstellungen einer Dimension höchstens 8, nämlich die Wirkung als  $SO_5(\mathbb{R}, 1)^1$  auf  $\mathbb{R}^5$  und die gewöhnliche Wirkung auf  $\mathbb{H}^2 = \mathbb{R}^8$ . Mit dem Argument von 3.1 folgt, daß die lineare Wirkung von  $\Delta$  auf der affinen Ebene  $\mathbb{A} = \mathbb{R}^8$  irreduzibel ist. Mit anderen Worten:  $\mathbb{A}$  kann als  $\mathbb{R}$ -Vektorraum so mit der Punktmenge  $\mathbb{H}^2$  der

affinen Ebene  $\mathcal{A}(\mathbb{H})$  über dem Körper  $\mathbb{H}$  identifiziert werden, daß  $\Delta$  die Kollineationsgruppe  $SU_2(\mathbb{H}, 1)$  von  $\mathcal{A}(\mathbb{H})$  wird.

Als einfache Gruppe wirkt  $\Delta$  fast effektiv auf der uneigentlichen Geraden  $L_\infty$  von  $\mathcal{P}$ . Die Untergruppe

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} a & \\ & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{H}) \mid a, d \in \mathbb{H}; |a| = |d| = 1 \right\}$$

von  $SU_2(\mathbb{H}, 1) = \Delta$  ist zu  $Spin_3(\mathbb{R}) \times Spin_3(\mathbb{R}) = Spin_4(\mathbb{R})$  isomorph. Nach [26] ist die Wirkung der Transformationsgruppe  $C \mid L_\infty$  auf der 4-Sphäre  $L_\infty$  äquivalent zur gewöhnlichen Wirkung von  $SO_4(\mathbb{R})$  auf der Einpunktkompaktifizierung von  $\mathbb{R}^4$ . Insbesondere läßt  $C$  in  $\mathcal{P}$  genau zwei Ursprungsgeraden invariant. Diese ergeben sich bei der Identifikation  $\mathbb{A} = \mathbb{H}^2$  als die beiden einzigen  $C$ -invarianten  $\mathbb{R}$ -Untervektorräume der Dimension 4, nämlich

$$W = \mathbb{H} \times \{0\}, \quad S = \{0\} \times \mathbb{H}.$$

Wir vermerken, daß diese als Ursprungsgeraden von  $\mathcal{P}$  gewonnenen Unterräume zugleich *quaternale* Ursprungsgeraden, d.h. Ursprungsgeraden der Ebene über  $\mathbb{H}$  sind.

Aufgefaßt als Kollineationsgruppe von  $\mathcal{A}(\mathbb{H})$  läßt nun  $\Delta = SU_2(\mathbb{H}, 1)$  das System  $\mathcal{D}_1$  der quaternalen Ursprungsgeraden, deren Steigung Betrag 1 hat, invariant. Überdies wirkt  $\Delta$  transitiv auf den Mengen  $\mathcal{D}_0$  bzw.  $\mathcal{D}_\infty$  der quaternalen Ursprungsgeraden, deren Steigung Betrag kleiner bzw. größer 1 hat (wobei  $S$  als Gerade der Steigung  $\infty$  aufzufassen und  $\mathcal{D}_\infty$  zuzuschlagen ist); dies ergibt sich leicht anhand der Untergruppen

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & \\ & c \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{H}) \mid c \in \mathbb{H}, |c| = 1 \right\}$$

und

$$\left\{ \begin{pmatrix} r & t \\ t & r \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{H}) \mid r, t \in \mathbb{R} \subseteq \mathbb{H}; r^2 - t^2 = 1 \right\}$$

von  $SU_2(\mathbb{H}, 1)$ .

Als Bilder von  $W$  bzw.  $S$  unter  $\Delta$  sind also alle quaternalen Ursprungsgeraden aus  $\mathcal{D}_0 \cup \mathcal{D}_\infty$  auch Geraden der Ebene  $\mathcal{P}$ , von der wir ausgegangen sind. Die quaternalen Ursprungsgeraden aus  $\mathcal{D}_1$  sind Grenzlagen von Folgen von Geraden aus  $\mathcal{D}_0$  und  $\mathcal{D}_\infty$  und daher ebenfalls Geraden der topologischen Ebene  $\mathcal{P}$ . Insgesamt sind also alle quaternalen Ursprungsgeraden auch Ursprungsgeraden der Translationsebene  $\mathcal{P}$ , und  $\mathcal{P}$  ist die Ebene über  $\mathbb{H}$ , wie behauptet.  $\square$

Zur Herleitung ähnlicher Resultate für 16-dimensionale Ebenen benötigt man einige Informationen über



### 3.5. Kollineationsgruppen der Oktavenebene

Der Kern der klassischen Ebene  $\mathcal{P}(\mathbb{O})$  über den Oktaven ist isomorph zu  $\mathbb{R}$ ; dies gilt sogar allgemein für sechzehndimensionale lokalkompakte Translationsebenen ([14, Theorem 1]). Daher sind alle (affinen) Kollineationen stetig, da die Kollineationen aus  $\mathbb{G}_o$  semilinear über dem Kern, im vorliegenden Fall also  $\mathbb{R}$ -linear sind.

(a) In  $\mathcal{P}(\mathbb{O})$  wirkt  $\mathbb{G}_o$  transitiv auf der zur 8-Sphäre homöomorphen uneigentlichen Geraden  $L_\infty$ , da  $\mathbb{O}$  ein Alternativkörper ist (siehe z.B. [2, S. 144 Hilfssatz 5]). Dasselbe gilt dann für die Zusammenhangskomponente  $\Gamma_o$  von  $\mathbb{G}_o$ , und nach [24, 5.6] folglich auch für eine maximale kompakte Untergruppe  $C$  von  $\Gamma_o$ . Da der Kern der Ebene isomorph zu  $\mathbb{R}$  ist, wirkt die kompakte Gruppe  $C$  fast effektiv auf  $L_\infty$ . Nach [25, §1] ist die Wirkung von  $C|L_\infty$  auf der 8-Sphäre  $L_\infty$  äquivalent zur Standardwirkung von  $SO_9(\mathbb{R})$  auf der Einheitskugel des  $\mathbb{R}^9$ . Für  $s \in L_\infty$  wirkt

$$K = C,$$

auf  $L_\infty$  als  $SO_8(\mathbb{R})$ , läßt also einen weiteren Punkt  $w \in L_\infty \setminus \{s\}$  fest. Die exakte Homotopiesequenz des Faserbündels  $C \rightarrow L_\infty$  mit Faser  $K$  zeigt, daß  $K$  zusammenhängend ist. Da  $K$  vermöge  $K \rightarrow K|L_\infty$  die Gruppe  $SO_8(\mathbb{R})$  überlagert, ist  $K$  die universelle (zweifache) Überlagerungsgruppe  $Spin_8(\mathbb{R})$  von  $SO_8(\mathbb{R})$  – es sei denn,  $K \rightarrow K|L_\infty$  wäre ein Isomorphismus. Um letzteres auszuschließen, betrachtet man die Einschränkung von  $K$  auf die beiden zu  $s$  und  $w$  gehörigen Ursprungsgeraden  $S$  und  $W$ , aufgefaßt als 8-dimensionale  $\mathbb{R}$ -lineare Teilräume der affinen Ebene. Da  $SO_8(\mathbb{R})$  eine maximale kompakte zusammenhängende Untergruppe von  $GL_8(\mathbb{R})$  ist, sind aus Dimensionsgründen  $K|S$  und  $K|W$  konjugiert zu  $SO_8(\mathbb{R})$ . Wäre  $K$  selbst isomorph zu  $SO_8(\mathbb{R})$ , so müßte  $K$  effektiv auf  $S$ ,  $W$  und  $L_\infty$  wirken, und die zentrale Involution würde auf  $S$  und  $W$  und damit auf der ganzen affinen Ebene die Spiegelung am Ursprung induzieren. Diese liegt aber in  $\Gamma_{\{o, L_\infty\}}$ , d.h.  $K \rightarrow K|L_\infty$  kann kein Isomorphismus sein.

Also ist  $K$  eine zu  $Spin_8(\mathbb{R})$  isomorphe Untergruppe von  $\Gamma_{s,w}$ , und die Einschränkungabbildung  $K \rightarrow K|L_\infty \cong SO_8(\mathbb{R})$  ist die universelle (zweifache) Überlagerung.

(b) Sei nun

$$\Lambda = K_e = C_{s,w,e}$$

die Standgruppe von  $K$  in einem weiteren Punkt  $e \in L_\infty \setminus \{s, w\}$ . Man hat dann  $\Lambda|L_\infty \cong SO_7(\mathbb{R})$ . Die exakte Homotopiesequenz der Faserung von  $K$  über der zur 7-Sphäre homöomorphen Bahn  $K(e)$  mit Faser  $\Lambda$  zeigt, daß  $\Lambda$  einfach zusammenhängend ist. Vermöge der zweifachen Überlagerung  $\Lambda \rightarrow \Lambda|L_\infty \cong SO_7(\mathbb{R})$  ist also  $\Lambda$  die universelle Überlagerung von  $SO_7(\mathbb{R})$ , d.h. isomorph zu  $Spin_7(\mathbb{R})$ .

Da der einzige nichttriviale echte Normalteiler von  $\text{Spin}_7(\mathbb{R})$  das zweielementige Zentrum ist, und da die zentrale Involution von  $\Lambda \cong \text{Spin}_7(\mathbb{R})$  Achse  $L_\infty$  hat und folglich nicht noch  $S$  oder  $W$  punktweise fixieren kann, wirkt  $\Lambda$  effektiv auf  $S$  und auf  $W$  (Spindarstellung!). Die Wirkungen auf  $S$  und  $W$  sind äquivalent. (Dies läßt sich z.B. einsehen, indem man  $W$  zunächst vermöge Parallelprojektion in  $S$ -Richtung auf die zu  $e \in L_\infty$  gehörige  $\Lambda$ -invariante Ursprungsgerade  $E$  und dann weiter mit Parallelprojektion in  $W$ -Richtung auf  $S$  abbildet; diese Projektionen sind  $\Lambda$ -äquivariant).

(c) Die Standgruppe

$\Sigma$

von  $\Lambda$  in einem affinen Punkt  $y \in S \setminus \{o\}$  läßt also auch einen affinen Punkt von  $W \setminus \{o\}$  fest und kann daher als Automorphismengruppe eines Koordinatenbereichs beschrieben werden ([2, S.135 Satz 11]). Die kompakte Bahn  $\Lambda(y) \subseteq S = \mathbb{R}^8$  ist höchstens 7-dimensional, folglich hat man  $\dim \Sigma \geq \dim \Lambda - 7 = 14$ . Nach [18] kommt unter den mindestens 14-dimensionalen kompakten Liegruppen nur die kompakte Ausnahmegruppe  $G_2$  als Automorphismengruppe eines Koordinatenbereichs in Frage. Also ist  $\Sigma$  isomorph zu  $G_2$  und insbesondere genau 14-dimensional. Die Bahnen von  $\Lambda$  auf  $S \setminus \{o\}$  sind also sämtlich 7-dimensional und daher 7-Sphären. (Um dies einzusehen, fasse man die kompakte Gruppe  $\Lambda|S$  als Untergruppe der orthogonalen Gruppe von  $S = \mathbb{R}^8$  auf; auf der Einheitssphäre von  $S$  ist  $\Lambda$  dann transitiv, da alle Bahnen die volle Dimension haben.)

(d) Wir betrachten nun noch eine zu  $\text{SO}_6(\mathbb{R})$  isomorphe Untergruppe von  $\Lambda|L_\infty \cong \text{SO}_7(\mathbb{R})$ , deren Fixpunkte eine 2-Sphäre in  $L_\infty$  bilden. Die nun schon mehrfach vorgeführten Faserungs- und Überlagerungsargumente zeigen, daß sie unter der Einschränkungabbildung  $\Lambda \rightarrow \Lambda|L_\infty$  von einer einfach zusammenhängenden Untergruppe  $\Xi$  von  $\Lambda$  zweifach überlagert wird.  $\Xi$  ist dann isomorph zur universellen Überlagerungsgruppe  $\text{SU}_4(\mathbb{C})$  von  $\text{SO}_6(\mathbb{R}) \cong \Xi|L_\infty$ . Da  $\Xi$  als Untergruppe von  $\Lambda$  effektiv auf  $W$  und  $S$  wirkt, und da eine treue lineare Darstellung von  $\text{SU}_4(\mathbb{C})$  in  $\mathbb{R}^8$  äquivalent zur gewöhnlichen Wirkung auf  $\mathbb{C}^4$  ist ([31]), lassen sich  $W$  und  $S$  als  $\mathbb{R}$ -Vektorräume so mit  $\mathbb{C}^4$  identifizieren, daß  $\Xi|S$  und  $\Xi|W$  gleich  $\text{SU}_4(\mathbb{C})$  sind. Wichtig für das weitere ist nun:

*Jeder 8-dimensionale  $\Xi$ -invariante  $\mathbb{R}$ -Untervektorraum der affinen Ebene ist eine Ursprungsgerade.*

In der Tat: Identifiziert man die affine Ebene als  $\mathbb{R}$ -Vektorraum so mit  $\mathbb{R}^8 \times \mathbb{R}^8$ , daß  $W = \mathbb{R}^8 \times \{0\}$  und  $S = \{0\} \times \mathbb{R}^8$ , so sind nach dem eben Ausgeführten die 8-dimensionalen  $\Xi$ -invarianten Unterräume abgesehen von  $S$  und  $W$  genau die Unterräume der Gestalt  $\{(x, A(x))/x \in \mathbb{R}^8\}$ , wobei  $A$  im Zentralisator von  $\text{SU}_4(\mathbb{C})$

in  $GL_8(\mathbb{R})$  liegt. Dieser besteht nun genau aus den Streckungen von  $\mathbb{C}^4 = \mathbb{R}^8$  mit komplexen Skalaren. (Beweis: Da  $SU_4(\mathbb{C})$  auf verschiedenen komplex 1-dimensionalen Teilräumen von  $\mathbb{C}^4 = \mathbb{R}^8$  verschiedene Standgruppen hat, induziert  $A$  den identischen Automorphismus auf dem projektiven Raum  $P_3(\mathbb{C})$  aller dieser Teilräume. Die Aussage folgt nun nach [4, III.1 S.44].) In der Grassmann-Topologie bildet also das System der 8-dimensionalen  $\Xi$ -invarianten Unterräume eine 2-Sphäre. Es enthält das System der  $\Xi$ -invarianten Ursprungsgeraden, das nach Definition von  $\Xi$  ebenfalls eine 2-Sphäre ist (zunächst in der Topologie des Geradenraums, nach [11, S.14 Satz 2, S.30 Satz 1 und S.17] aber auch in der Grassmann-Topologie), und stimmt daher mit diesem überein.—

**3.6. SATZ.** *In einer sechzehndimensionalen lokalkompakten Translations-ebene  $\mathcal{P}$  enthalte  $\Gamma_0$  eine zu  $SO_7(\mathbb{R})$  lokal isomorphe abgeschlossene zusammenhängende Untergruppe  $\Lambda$ . Dann läßt  $\Lambda$  zwei Ursprungsgeraden  $S$  und  $W$  invariant. Sind überdies  $\Lambda|S$  und  $\Lambda|W$  isomorph zu  $Spin_7(\mathbb{R})$ , so ist  $\mathcal{P}$  die klassische Ebene über den Oktaven.*

*Beweis.* (a) Nach [22, Lemma 3 und 4] haben die echten abgeschlossenen Untergruppen von  $\Lambda$  Kodimension mindestens 6, und die Untergruppen der Kodimension 6 sind lokal isomorph zu  $SO_6(\mathbb{R})$ . Die Bahnen der kompakten Gruppe  $\Lambda$  in der 8-Sphäre  $L_\infty$  sind also 6- oder 7-dimensional oder Fixpunkte, da  $\Lambda$  nach [22, Theorem II'] nicht transitiv auf der 8-Sphäre  $L_\infty$  operieren kann.

Falls alle Bahnen höchstens 6-dimensional sind, hat  $\Lambda$  nach [26, Theorem 1.2 und 1.3] als Ausnahmehahnen sogar überabzählbar viele Fixpunkte in  $L_\infty$ .

Falls hingegen 7-dimensionale Bahnen vorkommen, hat  $\Lambda$  nach [26, Theorem 1.1] in  $L_\infty$  genau zwei Ausnahmehahnen, und diese sind höchstens 6-dimensional, während alle anderen Bahnen von  $\Lambda$  in  $L_\infty$  Dimension 7 haben. Wir zeigen, daß die Ausnahmehahnen Fixpunkte sein müssen:

Angenommen, die Bahn  $\Lambda(e)$  von  $e \in L_\infty$  wäre eine 6-dimensionale Ausnahmehahn. Wie eingangs zitiert, wäre dann  $\Lambda_e$  lokal isomorph zu  $SO_6(\mathbb{R})$ . Nach [24, 5.3] ist nun für alle  $z$  aus einer genügend kleinen Umgebung von  $e$  in  $L_\infty$  die Standgruppe  $\Lambda_z$  konjugiert zu einer Untergruppe von  $\Lambda_e$ . Da  $\Lambda(e)$  eine Ausnahmehahn sein soll, kann  $z$  mit 7-dimensionaler Bahn, also 14-dimensionaler Standgruppe gewählt werden. Da aber nach [22, Lemma 4]  $SO_6(\mathbb{R})$  und damit  $\Lambda_e$  keine 14-dimensionale abgeschlossene Untergruppe besitzt, erhält man einen Widerspruch.

In allen Fällen hat also  $\Lambda$  mindestens 2 Fixpunkte  $s$  und  $w$  in  $L_\infty$ , und läßt dann die zugehörigen Ursprungsgeraden  $S$  und  $W$  invariant.

(b) Wir nehmen nun an, daß  $\Lambda|S \cong Spin_7(\mathbb{R}) \cong \Lambda|W$ . Da  $Spin_7(\mathbb{R})$  bis auf Äquivalenz nur eine treue Darstellung in  $\mathbb{R}^8$  besitzt ([31]), induziert die zentrale

Involution von  $\Lambda$  in  $S$  und  $W$  und damit in der ganzen affinen Ebene die Spiegelung am Ursprung, liegt also in  $\Gamma_{\{0, L_\infty\}}$ . Folglich ist  $\Lambda \mid L_\infty \cong \text{SO}_7(\mathbb{R})$ .

(b1) Hätte in dieser Situation  $\Lambda$  Bahnen der Dimension 7 in  $L_\infty$ , so wäre nach [25, §3] die Wirkung von  $\Lambda \mid L_\infty$  in  $L_\infty \setminus \{s\}$  äquivalent zu einer linearen Wirkung von  $\text{SO}_7(\mathbb{R})$  in  $\mathbb{R}^8$ . Nun hat aber  $\text{SO}_7(\mathbb{R})$ , wie man [31] entnimmt, bis auf Äquivalenz genau eine nichttriviale lineare Darstellung in  $\mathbb{R}^8$ ; und in dieser sind alle Bahnen höchstens 6-dimensional.

Also sind die Bahnen von  $\Lambda$  in  $L_\infty$  6-dimensional oder Fixpunkte. Nach [22, Lemma 7] sind nun alle zusammenhängenden abgeschlossenen Untergruppen der Kodimension 6 von  $\Lambda \mid L_\infty \cong \text{SO}_7(\mathbb{R})$  paarweise konjugiert; mithin gilt:

(b2) *Eine zusammenhängende abgeschlossene Untergruppe der Kodimension 6 in  $\Lambda$  hat auf jeder Bahn von  $\Lambda$  in  $L_\infty$  einen Fixpunkt.*

(b3) Wegen der Eindeutigkeit der Darstellung von  $\text{Spin}_7(\mathbb{R})$  auf  $\mathbb{R}^8$  läßt sich die Menge der affinen Punkte von  $\mathcal{P}$  als  $\mathbb{R}$ -Vektorraum so mit der Punktmenge der klassischen affinen Ebene über  $\mathbb{O}$  identifizieren, daß  $W$  und  $S$  Ursprungsgeraden auch der Oktavenebene sind, und daß  $\Lambda$  die gleichnamig bezeichnete Kollineationsgruppe der Oktavenebene aus 3.5(b) wird. Man betrachte nun die in 3.5(d) definierte zu  $\text{SU}_4(\mathbb{C})$  isomorphe Untergruppe  $\Xi$  von  $\Lambda$ . Sie hat Kodimension 6 in  $\Lambda$ ; nach (b2) ist also jede Ursprungsgerade von  $\mathcal{P}$  Bild einer  $\Xi$ -invarianten Ursprungsgeraden von  $\mathcal{P}$  unter einer Kollineation aus  $\Lambda$ . Die  $\Xi$ -invarianten Ursprungsgeraden von  $\mathcal{P}$  sind als 8-dimensionale  $\Xi$ -invariante Untervektorräume der affinen Ebene nach 3.5(d) auch Geraden der Oktavenebene. Unter  $\Lambda$  (aufgefaßt als Kollineationsgruppe der Oktavenebene) ergibt sich somit, daß jede Ursprungsgerade von  $\mathcal{P}$  gleichzeitig eine Gerade der Oktavenebene ist. Vermöge der vorgenommenen Identifikationen ist die Translationsebene  $\mathcal{P}$  also isomorph zur Ebene über den Oktaven.  $\square$

**3.7. KOROLLAR.** *Bis auf Isomorphie ist die klassische Ebene über den Oktaven die einzige sechzehndimensionale lokalkompakte Translationsebene, in der  $\Gamma_o$  eine zu  $\text{SO}_8(\mathbb{R})$  lokal isomorphe abgeschlossene Untergruppe enthält.*

*Beweis.* Nach [22, Lemma 4] haben die echten abgeschlossenen Untergruppen von  $\text{SO}_8(\mathbb{R})$  Kodimension mindestens 7. Ferner kann eine zu  $\text{SO}_8(\mathbb{R})$  lokal isomorphe Gruppe nicht als transitive topologische Transformationsgruppe auf der 8-Sphäre operieren ([22, Theorem II']). Enthält also in einer sechzehndimensionalen lokalkompakten Translationsebene  $\Gamma_o$  eine zu  $\text{SO}_8(\mathbb{R})$  lokal isomorphe abgeschlossene zusammenhängende Untergruppe  $K$ , so hat  $K$  in der 8-Sphäre  $L_\infty$  außer Fixpunkten nur Bahnen der Dimension 7. Nach [26, Theorem 1.1] hat  $K$  in  $L_\infty$  genau zwei Fixpunkte  $s$  und  $w$ ; und nach [25, §3] ist die Wirkung von  $K$  auf

$L_\infty \setminus \{s\}$  äquivalent zur gewöhnlichen Wirkung von  $SO_8(\mathbb{R})$  auf  $\mathbb{R}^8$ . Die Argumente von 3.5(b) (in denen von weiteren speziellen Eigenschaften der Oktavenebene kein Gebrauch gemacht wurde) zeigen nun, daß  $K$  eine zu  $Spin_7(\mathbb{R})$  isomorphe Untergruppe  $\Lambda$  enthält, die auf den zu  $s$  und  $w$  gehörenden Ursprungsgeraden  $S$  und  $W$  effektiv wirkt. Nach 3.6 ist dies nur in der Oktavenebene möglich.  $\square$

Der

### 3.8. Beweis von Satz 1.3

braucht nun nur noch kompiliert zu werden. In einer lokalkompakten Translationsebene der Dimension  $2n$  mit  $n = 4$  oder  $n = 8$  sei  $\mathfrak{S}$  eine zur  $(n-1)$ -Sphäre homöomorphe Teilmenge von  $L_\infty$ , auf der eine Untergruppe der Gruppe  $\mathfrak{G}^c$  aller stetigen affinen Kollineationen zweifach transitiv operiert. Wegen  $\mathfrak{G}^c|L_\infty = SG_0^c|L_\infty$  (1.7) ist dann auch die abgeschlossene Untergruppe  $\{\delta \in SG_0^c / \delta(\mathfrak{S}) \cup \delta^{-1}(\mathfrak{S}) \subseteq \mathfrak{S}\}$  von  $SG_0^c$  zweifach transitiv auf  $\mathfrak{S}$ ; und dasselbe gilt für ihre Zusammenhangskomponente  $\Delta$ .

Als Untergruppe von  $SI_0^c$  ist  $\Delta$  fast effektiv auf  $L_\infty$ . Nach 2.1(d) ist die Standgruppe von  $\Delta$  auf drei verschiedenen Punkten von  $\mathfrak{S}$  kompakt. Da nach [21] die Fixpunktmenge einer kompakten zusammenhängenden effektiven Transformationsgruppe einer Mannigfaltigkeit Kodimension mindestens 2 hat, ist also  $\Delta$  auch auf  $\mathfrak{S}$  fast effektiv. Nach der Klassifikation von Tits [30, S.223 ff.] aller zweifach transitiven Wirkungen von Liegruppen ist die effektive Wirkung von  $\Delta$  auf der  $(n-1)$ -Sphäre  $\mathfrak{S}$  im Fall  $n = 4$  äquivalent zur klassischen Wirkung einer der Gruppen  $PSO_5(\mathbb{R}, 1)^1$  bzw.  $PSU_3(\mathbb{C}, 1)$  bzw.  $PSU_2(\mathbb{H}, 1)$  auf der Quadrik vom Index 0 des projektiven Raums  $P_4(\mathbb{R})$  bzw.  $P_2(\mathbb{C})$  bzw.  $P_1(\mathbb{H})$ , im Fall  $n = 8$  zur klassischen Wirkung einer der Gruppen  $PSO_9(\mathbb{R}, 1)^1$  bzw.  $PSU_5(\mathbb{C}, 1)$  bzw.  $PSU_3(\mathbb{H}, 1)$  auf der Quadrik vom Index 0 des projektiven Raums  $P_8(\mathbb{R})$  bzw.  $P_4(\mathbb{C})$  bzw.  $P_2(\mathbb{H})$ . Insbesondere ist  $\Delta$  lokal isomorph zu einer dieser Gruppen. Nach 3.2 und 3.3 scheiden dabei die Fälle  $PSU_3(\mathbb{C}, 1)$  (für  $n = 4$ ) und  $PSU_5(\mathbb{C}, 1)$  sowie  $PSU_3(\mathbb{H}, 1)$  (für  $n = 8$ ) aus. Da  $PSO_5(\mathbb{R}, 1)$  lokal isomorph zu  $SU_2(\mathbb{H}, 1)$  ist, folgt in den verbleibenden Fällen nach 3.4 und 3.7, daß die vorliegende Ebene die klassische Ebene über den Quaternionen oder Oktaven sein muß.  $\square$

Zur Vorbereitung des Beweises von Spharensatz 1.2 sei noch an den folgenden Sachverhalt erinnert:

**3.9. LEMMA.** *Eine kompakte zusammenhängende Liegruppe  $G$  wirke als effektive topologische Transformationsgruppe auf der  $n$ -Sphäre  $S^n$  mit einer zu  $S^{n-1}$  homöomorphen Bahn. Dann ist die Wirkung von  $G$  äquivalent zur Wirkung einer zusammenhängenden abgeschlossenen Untergruppe von  $SO_n(\mathbb{R})$  auf der Einpunktkompaktifizierung von  $\mathbb{R}^n$ .*

*Beweis.* Nach [26, Theorem 1.1] ist der Bahnenraum  $S^n/G$  ein abgeschlossenes Intervall, dessen Inneres aus lauter äquivalenten, zu  $S^{n-1}$  homöomorphen Bahnen besteht; eine dieser Bahnen sei mit  $\mathfrak{S}$  bezeichnet. Die Vereinigung dieser Bahnen ist offen in  $S^n$  und nach [26, Theorem 1.5] homöomorph zum Produkt von  $\mathfrak{S}$  mit einem zu  $\mathbb{R}$  homöomorphen Querschnitt. Die  $(n-1)$ -Sphäre  $\mathfrak{S}$  ist also flach in  $S^n$  und zerlegt daher  $S^n$  in zwei unter  $G$  invariante zu  $\mathbb{R}^n$  homöomorphe Teilmengen ([12]), in denen  $G$  nach [23] jeweils genau einen Fixpunkt hat. Die Wirkung von  $G$  auf  $S^n$  ist also die Einpunktkompaktifizierung einer Wirkung auf  $\mathbb{R}^n$ ; die Behauptung findet sich nun in [25, §3].  $\square$

### 3.10. Beweis des Sphärensatzes 1.2

(a) In einer lokalkompakten Translationsebene  $\mathcal{P}$  der Dimension  $2n$  mit  $n=4$  oder  $n=8$  habe eine Untergruppe der Gruppe  $\mathbb{G}^c$  der stetigen affinen Kollinationen eine Bahn  $\mathfrak{S}$  in  $L_\infty$ , die zur  $(n-1)$ -Sphäre homöomorph sein möge. Wegen  $\mathbb{G}^c|L_\infty = S\mathbb{G}_o^c|L_\infty$  (1.7) ist dann  $\mathfrak{S}$  auch Bahn der Zusammenhangskomponente  $\Delta$  von  $\{\delta \in S\mathbb{G}_o^c/\delta(\mathfrak{S}) \cup \delta^{-1}(\mathfrak{S}) \subseteq \mathfrak{S}\}$ .  $\Delta$  ist eine abgeschlossene Untergruppe der Zusammenhangskomponente  $S\Gamma_o$  von  $S\mathbb{G}_o^c$ . Nach [24, 5.6] ist eine maximale kompakte Untergruppe von  $\Delta$  ebenfalls noch transitiv auf  $\mathfrak{S}$ .

Wir nehmen im folgenden an, daß  $\mathcal{P}$  nicht die klassische Ebene über  $\mathbb{H}$  bzw.  $\mathbb{O}$  ist. Wie in der Einleitung erwähnt, ist dann  $S\Gamma_o$  nicht transitiv auf  $L_\infty$ .

Sei nun  $C$  eine maximale kompakte Untergruppe von  $S\Gamma_o$ , die eine maximale kompakte Untergruppe von  $\Delta$  enthält. Nach dem Satz von Malcev-Iwasawa ist mit  $S\Gamma_o$  auch  $C$  zusammenhängend. Da  $C$  nicht transitiv auf  $L_\infty$  wirkt, sind die Bahnen von  $C$  in  $L_\infty$  höchstens  $(n-1)$ -dimensional. Diejenige Bahn von  $C$ , die  $\mathfrak{S}$  enthält, ist also genau  $(n-1)$ -dimensional und aus Zusammenhängsgründen gleich  $\mathfrak{S}$ .

Nach 3.9 wirkt  $C|L_\infty$  auf  $L_\infty$  wie eine abgeschlossene zusammenhängende Untergruppe von  $SO_n(\mathbb{R})$  auf der Einpunktkompaktifizierung von  $\mathbb{R}^n$ . Insbesondere hat  $C$  in  $L_\infty$  genau zwei Fixpunkte  $s$  und  $w$ ; die übrigen Bahnen sind homöomorph zur  $(n-1)$ -Sphäre.  $S$  und  $W$  bezeichnen die zu  $s$  und  $w$  gehörigen Ursprungsgeraden.

(b)  $C$  enthält eine Involution, die in  $\Gamma_{[w,s]}$  oder  $\Gamma_{[s,w]}$  liegt.

Nach [22, Theorem I] hat nämlich  $C$  einen zusammenhängenden einfachen Normalteiler  $N$ , der ebenfalls transitiv auf der  $(n-1)$ -Sphäre  $\mathfrak{S}$  wirkt. Die für  $N$  in Frage kommenden Gruppen kann man [9] entnehmen. Mit der Kenntnis ihrer linearen Darstellungen (etwa nach [31]) ergibt sich, daß  $N$  auf  $L_\infty \setminus \{s\}$  im Fall  $n=4$  wie  $SU_2(\mathbb{C})$  auf  $\mathbb{C}^2$  und im Fall  $n=8$  wie eine der Gruppen  $SO_8(\mathbb{R})$ ,  $Spin_7(\mathbb{R})$ ,  $SU_4(\mathbb{C})$  oder  $SU_2(\mathbb{H})$  auf  $\mathbb{R}^8 = \mathbb{C}^4 = \mathbb{H}^2$  wirkt. Da wir die klassische Ebene über  $\mathbb{O}$  ausgeschlossen haben, fällt bei  $n=8$  der Fall  $SO_8(\mathbb{R})$  nach 3.7 weg. Die übrigen

Gruppen sind einfach zusammenhängend; folglich ist die Einschränkungsbildung  $N \rightarrow N|L_\infty$  ein Isomorphismus, und  $N$  selbst ist isomorph zu einer der genannten Gruppen. Wir betrachten nun die (lineare) Wirkung von  $N$  auf den  $C$ -invarianten Ursprungsgeraden  $S$  und  $W$  aufgefaßt als  $n$ -dimensionale  $\mathbb{R}$ -Vektorräume. In allen genannten Fällen hat  $N$  bis auf Äquivalenz genau eine treue lineare Darstellung in  $\mathbb{R}^n$ ; und unter dieser bewirkt die zentrale Involution  $\iota$  von  $N$  die Spiegelung am Ursprung. Würde also  $N$  effektiv sowohl auf  $S$  als auch auf  $W$  wirken, so wäre  $\iota$  die Punktspiegelung der affinen Ebene am Ursprung, läge also in  $\Gamma_{[o, L_\infty]}$ , im Widerspruch dazu, daß  $N \rightarrow N|L_\infty$  ein Isomorphismus ist. Da der einzige echte Normalteiler von  $N$  in allen genannten Fällen das zweielementige Zentrum ist, läßt also  $\iota$  entweder  $S$  oder  $W$  punktweise fest, d.h.  $\iota$  ist eine axiale Kollineation. Das Zentrum von  $\iota$  ist notwendig der nicht auf der Achse liegende Fixpunkt  $w$  bzw.  $s$ . Dies beweist (b).

(c) Sei  $\Xi$  eine zusammenhängende abgeschlossene Untergruppe von  $\Gamma$  mit  $\Xi \supseteq C$ , und  $e \in L_\infty$  sei kein Fixpunkt von  $\Xi$ . Dann ist entweder  $\Xi(e) = C(e) \subseteq L_\infty \setminus \{s, w\}$  oder aber  $\dim \Xi(e) = n$ .

In der Tat: Aus  $1 \leq \dim \Xi(e) \leq n-1$  folgt  $\Xi(e) \setminus \{s, w\} \neq \emptyset$ , so daß man o.B.d.A.  $e \in L_\infty \setminus \{s, w\}$  annehmen kann. Ferner folgt  $\dim \Xi(e) = n-1$ , da  $\Xi(e)$  die  $(n-1)$ -Sphäre  $C(e)$  enthält. Man betrachte nun die kanonische stetige bijektive Abbildung

$$\Phi: \Xi/\Xi_e \rightarrow \Xi(e): \xi \cdot \Xi_e \mapsto \xi(e).$$

Da  $\Xi$  eine Liegruppe ist, ist der Rechtsnebenklassenraum  $\Xi/\Xi_e$  (mit der Quotiententopologie) eine zusammenhängende Mannigfaltigkeit der Dimension  $n-1$ . Vermöge Linkstranslation wirkt nun  $C$  so auf  $\Xi/\Xi_e$ , daß  $\Phi$  äquivariant ist. Da  $C$  kompakt ist, vermittelt  $\Phi$  einen Homöomorphismus der  $(n-1)$ -Sphäre  $C(e)$  und der entsprechenden Bahn von  $C$  in  $\Xi/\Xi_e$ . Diese ist also eine kompakte Untermannigfaltigkeit der vollen Dimension in  $\Xi/\Xi_e$ , nach dem Invarianzatz von Brouwer und aus Zusammenhangsgründen somit gleich  $\Xi/\Xi_e$ , und unter  $\Phi$  folgt daraus  $\Xi(e) = C(e)$ , wie behauptet.

(d) Entweder ist  $\mathcal{P}$  vom Lenz-Typ V (mit einer  $n$ -dimensionalen Scherungsgruppe  $\Gamma_{[s, S]}$ , die transitiv auf  $L_\infty \setminus \{s\}$  operiert), oder aber  $w$  ist fest unter  $(\Gamma_{o, s})^1$ .

In der Tat: Wird  $w$  unter  $(\Gamma_{o, s})^1$  bewegt, so ist nach (c)  $\dim (\Gamma_{o, s})^1(w) = n$ , da  $w$  ein Fixpunkt von  $C$  ist. Wegen (b) folgt nach 2.3 daraus  $\dim \Gamma_{[s, S]} = n$ . Da die Scherungsgruppe  $\Gamma_{[s, S]}$  frei auf  $L_\infty \setminus \{s\} = \mathbb{R}^n$  operiert, hat sie dort lauter  $n$ -dimensionale Bahnen, ist also transitiv auf  $L_\infty \setminus \{s\}$ . Das Scherungszentrum  $s$  bleibt unter der ganzen Kollineationsgruppe fest, sonst wäre  $\Gamma$  transitiv auf  $L_\infty$ . Also hat  $\mathcal{P}$  den Lenz-Typ V; diese Situation ist in der Alternative (ii) des Sphärensatzes beschrieben.

(e) Man erhält natürlich eine entsprechende Aussage, wenn man in (d) die Rollen von  $s$  und  $w$  vertauscht. Im weiteren nehmen wir nun an, daß  $\mathcal{P}$  nicht vom Lenz-Typ V ist. Dann hat man also

$$(\Gamma_{o,s})^1 = (\Gamma_{s,w})^1 = (\Gamma_{o,w})^1. \quad (1)$$

Diese Situation wird zur Alternative (iii) des Sphärensatzes führen. Zunächst gilt:

(e1) *Unter den getroffenen Annahmen sind  $s$  und  $w$  Fixpunkte von  $S\Gamma_o$  (und damit von  $\Gamma$ ).*

Nach (1) genügt es hierzu, zeigen, daß einer der beiden Punkte  $s$  oder  $w$  ein Fixpunkt von  $S\Gamma_o$  ist.

Da wir von den klassischen Ebenen abgesehen haben, also  $\Gamma$  nicht transitiv auf  $L_\infty$  ist, existiert ein Punkt  $s' \in L_\infty$  mit höchstens  $(n-1)$ -dimensionaler Bahn  $\Gamma(s') = S\Gamma_o(s')$ . Alle Punkte aus  $L_\infty \setminus \{s, w\}$  haben nun schon unter  $C$  Bahnen der Dimension  $n-1$ . Ist also  $\dim \Gamma(s') = 0$ , d.h.  $s'$  ein Fixpunkt von  $\Gamma$ , so ist  $s'$  gleich  $s$  oder  $w$ , und (e1) gilt.

Andernfalls ist nach (c)

$$\Gamma(s') = S\Gamma_o(s') = C(s'); \quad s' \in L_\infty \setminus \{s, w\}; \quad (2)$$

insbesondere

$$\dim \Gamma(s') = n-1. \quad (3)$$

Nach Satz 1.3 ist nun  $\Gamma$  nicht zweifach transitiv auf der  $(n-1)$ -Sphäre  $C(s') = \Gamma(s')$ ; für geeignetes  $w' \in C(s') \setminus \{s'\}$  ist also

$$\dim S\Gamma_{o,s'}(w') \leq n-2. \quad (4)$$

Mit  $S'$  und  $W'$  bezeichnen wir die zu  $s'$  und  $w'$  gehörigen Ursprungsgeraden:  $K$  sei die größte kompakte Untergruppe von  $(S\Gamma_{s',w'})^1$  gemäß 2.1. Da die maximalen kompakten Untergruppen zusammenhängender Liegruppen konjugiert sind, lassen sich  $s'$  und  $w'$  innerhalb ihrer Bahnen so modifizieren, daß  $K \subseteq C$ . Einerseits ist nun nach 2.1(b)  $\dim S\Gamma_{s',w'} \leq \dim K + 1$ , wegen (3) und (4) also

$$\begin{aligned} \dim S\Gamma_o &= \dim S\Gamma_o(s') + \dim S\Gamma_{o,s'}(w') + \dim S\Gamma_{s',w'} \\ &\leq (n-1) + (n-2) + \dim K + 1. \end{aligned} \quad (5)$$

Andererseits ist wegen  $\dim C(s') = n-1$  und  $K \subseteq C$ , jedenfalls  $\dim C \geq n-1 + \dim K$ , und wegen  $C \subseteq S\Gamma_{o,s}$  folglich

$$\begin{aligned} \dim S\Gamma_o &= \dim S\Gamma_o(s) + \dim S\Gamma_{o,s} \\ &\geq \dim S\Gamma_o(s) + \dim C \\ &\geq \dim S\Gamma_o(s) + (n-1) + \dim K. \end{aligned} \quad (6)$$



Zusammengenommen ergeben die Ungleichungen (5) und (6), daß  $S\Gamma_o(s) = \Gamma(s)$  höchstens  $(n-1)$ -dimensional ist. Nach (c) folgt daraus, daß  $s$  ein Fixpunkt von  $\Gamma$  ist. Damit ist (e1) gezeigt.

(e2) Folglich ist  $S\Gamma_o = S\Gamma_{s,w}$ . Nach dem Lemma 2.1 über Achsenstandgruppen hat  $S\Gamma_o$  also eine größte kompakte Untergruppe; diese ist natürlich identisch mit der maximalen kompakten Untergruppe  $C$  und ein Normalteiler von  $S\Gamma_o$ . Also permutieren  $S\Gamma_o$  und  $\Gamma$  die Bahnen von  $C$  in  $L_\infty$ . Ist  $S\Gamma_o$  kompakt, also gleich  $C$ , so sind die Bahnen von  $\Gamma$  in  $L_\infty \setminus \{s, w\}$  die  $C$ -Bahnen selbst, also  $(n-1)$ -Sphären. Andernfalls hat  $C$  nach dem Lemma 2.1 über Achsenstandgruppen in  $S\Gamma_{s,w} = S\Gamma_o$  ein zu  $\mathbb{R}^0$  isomorphes Komplement  $Y$ , das überdies angesichts der Aussagen von 2.1(c) fixpunktfrei und daher transitiv auf dem zu  $\mathbb{R}$  homöomorphen Raum der Bahnen von  $C$  in  $L_\infty \setminus \{s, w\}$  wirkt.  $\Gamma$  ist dann transitiv auf  $L_\infty \setminus \{s, w\}$ . In der Gruppe der stetigen affinen Kollineationen ist die Zusammenhangskomponente  $\Gamma$  ein Normalteiler; die Menge  $\{s, w\}$  der Fixpunkte von  $\Gamma$  wird also von allen stetigen Kollineationen permutiert. Damit sind sämtliche Aussagen der Alternative (iii) des Sphärensatzes 1.2 begründet, und der Sphärensatz ist bewiesen.  $\square$

## LITERATUR

- [1] J. ANDRÉ, *Über nicht-desarguessche Ebenen mit transitiver Translationsgruppe*. Math. Z. 60 (1954), 156–186.
- [2] J. ANDRÉ, *Projektive Ebenen über Fastkörpern*. Math. Z. 62 (1955), 137–160.
- [3] R. BAER, *The fundamental theorems of elementary geometry*. Trans. Amer. Math. Soc. 56 (1944), 94–129.
- [4] R. BAER, *Linear Algebra and Projective Geometry*. Academic Press, New York 1952.
- [5] D. BETTEN, *4-dimensionale Translationsebenen*. Math. Z. 128 (1972), 129–151.
- [6] D. BETTEN, *4-dimensionale Translationsebenen mit irreduzibler Kollineationsgruppe*. Arch. Math. (Basel) 24 (1973), 552–560.
- [7] D. BETTEN, *4-dimensionale Translationsebenen mit 8-dimensionaler Kollineationsgruppe*. Geometriae Dedicata 2 (1973), 327–339.
- [8] D. BETTEN, *4-dimensionale Translationsebenen mit 7-dimensionaler Kollineationsgruppe*. J. reine angew. Math. 285 (1976), 126–148.
- [9] A. BOREL, *Le plan projectif des octaves et les sphères comme espaces homogènes*. C.R. Acad. Sci. Paris 231 (1950), 943–945.
- [10] S. BREITSPRECHER, *Projektive Ebenen, die Mannigfaltigkeiten sind*. Math. Z. 121 (1971), 157–174.
- [11] P. BREUNING, *Translationsebenen und Vektorraumbündel*. Mitt. Math. Sem. Giessen 86 (1970), 1–50.
- [12] M. BROWN, *A proof of the generalized Schoenflies theorem*. Bull. Amer. Math. Soc. 66 (1960), 74–76.
- [13] M. BROWN, *The monotone union of open  $n$ -cells is an open  $n$ -cell*. Proc. Amer. Math. Soc. 12 (1961), 812–814.
- [14] T. BUCHANAN und H. HÄHL, *On the kernel and the nuclei of 8-dimensional locally compact quasifields*. Arch. der Math. (Basel) 29 (1977), 472–480

- [15] P. DEMBOWSKI, *Finite Geometries*. Springer, Berlin–Heidelberg–New York 1968.
- [16] H. HÄHL, *Automorphismengruppen von lokalkompakten zusammenhängenden Quasikörpern und Translationsebenen*. *Geometriae Dedicata* 4 (1975), 305–321.
- [17] H. HÄHL, *Geometrisch homogene vierdimensionale reelle Divisionsalgebren*. *Geometriae Dedicata* 4 (1975), 333–361.
- [18] H. HÄHL, *Automorphismengruppen achtdimensionaler lokalkompakter Quasikörper*. *Math. Z.* 149 (1976), 203–225.
- [19] D. R. HUGHES und F. C. PIPER, *Projective Planes*. Springer, Berlin–Heidelberg–New York 1973.
- [20] F. KALSCHUEFER, *Die Bestimmung aller stetigen Fastkörper*. *Abh. Math. Sem. Hamburg* 13 (1940), 413–435.
- [21] D. MONTGOMERY, *Finite dimensionality of certain transformation groups*. *Ill. J. Math.* 1 (1957), 28–35.
- [22] D. MONTGOMERY und H. SAMELSON, *Transformation groups of spheres*. *Ann. Math.* 44 (1943), 454–470.
- [23] D. MONTGOMERY und L. ZIPPIN, *A class of transformation groups in  $E^n$* . *Amer. J. Math.* 65 (1943), 601–608.
- [24] D. MONTGOMERY und L. ZIPPIN, *Topological Transformation Groups*. Interscience, New York 1955.
- [25] J. PONCET, *Groupes de Lie compacts de transformations de l'espace euclidien et les sphères comme espaces homogènes*. *Comment. Math. Helv.* 33 (1959), 109–120.
- [26] R. W. RICHARDSON JR., *Groups acting on the 4-sphere*. *Ill. J. Math.* 5 (1961), 474–485.
- [27] H. SALZMANN, *Topological planes*. *Advances in Math.* 2 (1967/68), 1–60.
- [28] H. SALZMANN, *Homogene affine Ebenen*. *Abh. Math. Sem. Hamburg* 43 (1975), 216–220.
- [29] J. TITS, *Sur certaines classes d'espaces homogènes de groupes de Lie*. *Mémoires de l'Académie Royale de Belgique, Classe des Sciences*, XXIX Fasc. 3, 1955.
- [30] J. TITS, *Sur les groupes doublement transitifs continus: corrections et compléments*. *Comment. Math. Helv.* 30 (1956), 234–240.
- [31] J. TITS, *Tabellen zu den einfachen Liegruppen und ihren Darstellungen*. *Lecture Notes in Mathematics* No. 40, Springer, Berlin–Heidelberg–New York 1967.
- [32] A. WEIL, *L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications*, Hermann, Paris 1951 (2<sup>ème</sup> édition).

Mathematisches Institut der Universität Tübingen  
Auf der Morgenstelle 10  
7400 Tübingen 1

Eingegangen am 6. März 1978