Mh. Math. 90, 207—218 (1980)

Monatshefte für
Mathematik

Achtdimensionale lokalkompakte Translationsebenen mit großen kompakten Kollineationsgruppen

Von

Hermann Hähl, Tübingen

(Eingegangen am 21. Dezember 1979)

Abstract. Eight-dimensional, Locally Compact Translation Planes Having Large Compact Collineation Groups. This paper is part of a program aiming at the classification of all higher-dimensional locally compact translation planes whose collineation groups have large dimension. In the present paper we determine all eight-dimensional locally compact translation planes which admit a *compact* collineation group Σ of dimension at least 5 acting almost effectively on the translation axis. In fact, Σ is isomorphic either to $\mathrm{Spin}_4(\mathbb{R})$ or to $SO_4(\mathbb{R})$. The case $\Sigma \cong \mathrm{Spin}_4(\mathbb{R})$ has already been treated elsewhere ([6]). Here, the planes with $\Sigma \cong SO_4(\mathbb{R})$ are explicitly determined and studied in detail.

1. Einleitung

Die vorliegende Arbeit ordnet sich ein in das Programm der Klassifikation achtdimensionaler lokalkompakter Translationsebenen mit großen Kollineationsgruppen, dessen Grundlagen in [5] zu finden sind. Aus den dort in § 1 geschilderten Ergebnissen geht hervor, daß bei der Verfolgung dieses Programms die Betrachtung kompakter Kollineationsgruppen sehr wichtig ist. Der Zweck der vorliegenden Arbeit ist nun die Bestimmung der achtdimensionalen lokalkompakten Translationsebenen, die besonders große kompakte Kollineationsgruppen haben.

Der Verfasser dankt der Deutschen Forschungsgemeinschaft für das Stipendium, zu dessen Ergebnissen diese Arbeit inhaltlich gehört. Sie ist die abgerundete Version eines Abschnitts aus der Habilitationsschrift des Verfassers.

1.1. Grundtatsachen. Im folgenden betrachten wir eine zunächst beliebige achtdimensionale lokalkompakte topologische Translationsebene, die wir als affine Ebene mit der Translationsachse als uneigentlicher Geraden L_∞ repräsentieren. Der Raum A der affinen

0026—9255/80/0090/0207/$02.40

Punkte läßt sich so mit dem $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^8$ identifizieren, daß die Gruppe $\mathbb{T}$ der Translationen mit Achse L_∞ aus den Vektorraumtranslationen besteht (siehe [2: §3]). Die affinen Geraden durch den Ursprung $o \in \mathbb{R}^8 = A$ sind dann 4-dimensionale Untervektorräume; die uneigentliche Gerade L_∞ als projektive Gerade ist homöomorph zur 4-Sphäre. Die Gruppe $\mathbb{G}^c$ der stetigen affinen Kollineationen ist das semidirekte Produkt der Translationsgruppe $\mathbb{T}$ mit der Untergruppe $\mathbb{G}_o^c$ der den Ursprung festlassenden Elemente; diese sind $\mathbb{R}$-lineare Automorphismen.

1.2. Kompakte Kollineationsgruppen. Sei nun C eine kompakte Gruppe stetiger affiner Kollineationen. Da $\mathbb{T}$ kompaktfrei ist, sieht man durch Faktorisierung nach $\mathbb{T}$ im semidirekten Produkt $\mathbb{G}^c = \mathbb{G}_o^c \cdot \mathbb{T}$, daß $\mathbb{G}_o^c$ eine zu C isomorphe Untergruppe enthält. Bis auf Konjugation kann man also $C \subseteq \mathbb{G}_o^c$ annehmen.

Zum Studium solcher kompakter Kollineationsgruppen genügt es ferner die Situation zu betrachten, daß zudem C fast effektiv auf der uneigentlichen Geraden L_∞ wirkt, d. h. endlichen Schnitt mit der Gruppe $\mathbb{G}_{[o, L_\infty]}$ aller Streckungen zu Zentrum o und Achse L_∞ hat. Anhand der kompakten Untergruppen der Gruppe $\mathbb{G}_{[o, L_\infty]}$, die man über den Kern der Ebene gut im Griff hat, beherrscht man dann auch die allgemeine Situation, vgl. [4:1.6—1.7].

Sei also im folgenden C eine kompakte Untergruppe von $\mathbb{G}_o^c$, die fast effektiv auf L_∞ wirkt, und sei Σ ihre Zusammenhangskomponente. Wir fassen nun die Wirkung von Σ auf der 4-Sphäre L_∞ ins Auge. Ist Σ transitiv auf L_∞, so ist die zugrundeliegende Ebene die klassische Ebene über dem Quaternionenkörper $\mathbb{H}$ ([9]). Andernfalls kann man die Ergebnisse von RICHARDSON [8] zur Klassifikation nichttransitiver Wirkungen kompakter Liegruppen auf der 4-Sphäre anwenden und erhält, daß entweder $\dim \Sigma \leqslant 4$ gilt oder aber Σ auf L_∞ klassisch als $SO_4(\mathbb{R})$ wirkt. (Diese klassische Wirkung kann zum Beispiel beschrieben werden als die Einhängung der kanonischen Wirkung von $SO_4(\mathbb{R})$ auf der Einheitssphäre des $\mathbb{R}^4$.) Da wir angenommen haben, daß Σ fast effektiv auf L_∞ wirkt, ist die Einschränkungsabbildung $\Sigma \to \Sigma | L_\infty = SO_4(\mathbb{R})$ eine Überlagerung, so daß für Σ nur die folgenden beiden Möglichkeiten bestehen:

1. Σ ist isomorph zur (zweiblättrigen) universellen Überlagerungsgruppe Spin (4) von $SO_4(\mathbb{R}) = \Sigma | L_\infty$. Die Ebenen mit einer solchen Kollineationsgruppe wurden in [6] unter der Bezeichnung Spin (4)-*Ebenen* vollständig bestimmt.

2. $\Sigma \to \Sigma | L_\infty$ ist ein Isomorphismus, d.h. Σ ist isomorph zu $SO_4(\mathbb{R})$ und wirkt effektiv auf L_∞. Die Ebenen mit einer solchen Kollineationsgruppe nennen wir $SO_4(\mathbb{R})$-*Ebenen*; sie werden in der vorliegenden Arbeit eingehend untersucht.

Die klassische affine Ebene über dem Quaternionenkörper $\mathbb{H}$ ist im übrigen sowohl eine Spin (4)-Ebene als auch eine $SO_4(\mathbb{R})$-Ebene. Unter Benützung dieser Benennungen läßt sich das bisher Gesagte also folgendermaßen zusammenfassen:

1.3. *Eine achtdimensionale lokalkompakte Translationsebene, in der die Gruppe der stetigen affinen Kollineationen eine kompakte, auf L_∞ fast effektive Untergruppe der Dimension mindestens* 5 *enthält, ist eine* Spin (4)-*Ebene oder eine* $SO_4(\mathbb{R})$-*Ebene.*

Zur expliziten Bestimmung aller solchen Ebenen ist also über die Bestimmung der Spin(4)-Ebenen von [6] hinaus noch die Bestimmung der $SO_4(\mathbb{R})$-Ebenen zu leisten. Dies soll in §2 geschehen. In §3 werden dann Kollineationen und Isomorphismen von $SO_4(\mathbb{R})$-Ebenen untersucht. Die Gruppe aller affinen Kollineationen einer solchen Ebene erweist sich dabei als höchstens 16-dimensional, wenn man von der Quaternionenebene absieht. Im Rahmen der Gesamtklassifikation der Ebenen mit großen Kollineationsgruppen (siehe [5]) ist die volle Kollineationsgruppe der $SO_4(\mathbb{R})$-Ebenen also dimensionsmäßig nicht besonders groß (etwa im Vergleich zu den Ebenen aus [3], [6]), obwohl die $SO_4(\mathbb{R})$-Ebenen mit vergleichsweise besonders großen *kompakten* Kollineationsgruppen ausgestattet sind.

2. Klassifikation der $SO_4(\mathbb{R})$-Ebenen

Wir beschreiben zunächst eine Familie von Quasikörpern, die sich im weiteren als natürliche Koordinatenbereiche der $SO_4(\mathbb{R})$-Ebenen ergeben werden.

2.1. Für einen festen Homöomorphismus

$$\varrho : [0, \infty) \mapsto [0, \infty)$$

des Bereichs der nichtnegativen reellen Zahlen mit

$$\varrho(1) = 1$$

betrachten wir auf der additiven Gruppe $\mathbb{R}^4$ des Quaternionenkörpers $\mathbb{H}$ eine neue Multiplikation $(a, x) \mapsto a \circ x$, die durch Zerlegung des Multiplikanden $x \in \mathbb{H}$ in seinen Realteil $\operatorname{Re} x$ und seinen reinen Teil $\operatorname{Pu} x = x - \operatorname{Re} x$ und mit Hilfe der klassischen Quaternionenmultiplikation folgendermaßen beschrieben wird:

$$a \circ x = \begin{cases} a \cdot \left(\operatorname{Re} x + \dfrac{\varrho(|a|)}{|a|} \cdot \operatorname{Pu} x\right), & \text{falls } a \neq 0 \\ 0 & , \text{falls } a = 0. \end{cases}$$

Die algebraische Struktur bestehend aus der Vektoraddition $+$ des $\mathbb{R}^4$ und dieser neuen Multiplikation $\circ$ nennen wir $K_\varrho^{\mathbb{H}}$. Wir zeigen:

$K_\varrho^{\mathbb{H}} = (\mathbb{R}^4, +, \circ)$ *ist ein topologischer Quasikörper.*

Beweis: Die Linksdistributivität der Multiplikation $\circ$ ist evident, ebenso die Stetigkeit der Abbildung $(a, x) \mapsto a \circ x$ für $a \neq 0$. Die Stetigkeit dieser Abbildung in $(0, x)$ folgt aus der Betragsgleichung

$$|a \circ x| = \sqrt{|a|^2 (\operatorname{Re} x)^2 + \varrho(|a|)^2 |\operatorname{Pu} x|^2}\,. \tag{1}$$

Die Gleichung $y \circ d = c$ hat ferner für $d \neq 0$ eine eindeutig bestimmte Auflösung y: Nach (1) ist nämlich $|y \circ d|$ eine monotone und unbeschränkte Funktion von $|y|$, so daß $|y|$ eindeutig durch $|c|$ bestimmt ist; damit ergibt sich dann eindeutig als die gesuchte Auflösung $y = c \cdot (\operatorname{Re} d + (\varrho(|y|)/|y|) \cdot \operatorname{Pu} d)^{-1}$. Die Auflösung y hängt ferner stetig von $d \neq 0$ und c ab. Andernfalls gäbe es nämlich Elemente c und $d \neq 0$ sowie gegen c bzw. d konvergente Folgen (c_ν) und (d_ν) derart, daß die Auflösung y_ν der Gleichung $y_\nu \circ d_\nu = c_\nu$ nicht gegen die Auflösung y von $y \circ d = c$ strebt. Da wegen der Stetigkeit der Multiplikation und der Eindeutigkeit der Auflösung y jede konvergente Teilfolge von (y_ν) gegen y konvergiert, könnten wir o. B. d. A. annehmen, daß $|y_\nu|$ gegen ∞ strebt. Da nach (1)

$$|c_\nu| = |y_\nu \circ d_\nu| \geqslant \max\{|y_\nu| \cdot |\operatorname{Re} d_\nu|,\ \varrho(|y_\nu|) \cdot |\operatorname{Pu} d_\nu|\}$$

gilt, würde daraus wegen $0 \neq d = \lim d_\nu$ folgen, daß auch $|c_\nu|$ gegen ∞ strebt, im Widerspruch zur Konvergenz der Folge (c_ν).

Wegen der Eindeutigkeit der Auflösung y von Gleichungen $y \circ d = c$ ist schließlich für $a \neq b$ die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$: $x \mapsto a \circ x - b \circ x$ nichtsingulär und wird durch eine invertierbare Matrix beschrieben, deren Koeffizienten stetig von a und b abhängen. Die Auflösung der Gleichung $a \circ x - b \circ x = c$ nach x ist also ebenfalls eindeutig und eine stetige Funktion der Koeffizienten a, b und c. $\square$

2.2. Satz. *Die $SO_4(\mathbb{R})$-Ebenen (d. h. die achtdimensionalen lokalkompakten Translationsebenen, die eine zu $SO_4(\mathbb{R})$ isomorphe, auf L_∞ effektiv wirkende Gruppe stetiger Kollineationen zulassen) sind genau die Ebenen über den Quasikörpern $K_\varrho^{\mathbb{H}}$ aus* 2.1.

Beweis: Wir verwenden die Bezeichnungen und vorbereitenden Überlegungen von 1.1 und 1.2. Sei eine $SO_4(\mathbb{R})$-Ebene gegeben, und sei Σ eine zu $SO_4(\mathbb{R})$ isomorphe Untergruppe von $\mathfrak{G}_o^c$, die auf L_∞ effektiv wirkt. Σ ist dann das fastdirekte Produkt zweier Normalteiler Σ_i $(i = 1, 2)$, die zur Gruppe Spin (3) der Quaternionen der Norm 1 isomorph sind. Σ_1 und Σ_2 sind die einzigen zusammenhängenden abgeschlossenen echten Normalteiler von Σ (siehe auch [3:3.1 ff.]). Der Durchschnitt $\Sigma_1 \cap \Sigma_2$ ist das zweielementige Zentrum von Σ.

Wir zeigen zunächst, daß die zentrale Involution $\iota \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2$ von Σ eine axiale Kollineation ist. Andernfalls würden die Fixpunkte und Fixgeraden von ι eine Unterebene der halben Dimension (eine Baer-Unterebene, siehe [5:2.6]) bilden, deren affine Punkte einen Untervektorraum $B \cong \mathbb{R}^4$ ausmachen. B wäre invariant unter Σ, und Σ würde fast effektiv auf B wirken: sonst würde nämlich einer der Normalteiler $\Sigma_i \cong$ Spin (3) auf B trivial operieren, was ausgeschlossen ist, da ein die Ebene koordinatisierender vierdimensionaler lokalkompakter Quasikörper keine zu Spin (3) isomorphe Automorphismengruppe haben kann ([2:2.6]). Aus Dimensionsgründen wäre somit die Gruppe $\Sigma|B$ der von den Elementen von Σ auf $B \cong \mathbb{R}^4$ induzierten linearen Transformationen eine maximale kompakte zusammenhängende Untergruppe von $GL_4(\mathbb{R})$, also $\Sigma|B \cong SO_4(\mathbb{R})$, und Σ müßte sogar effektiv auf B operieren, im Widerspruch dazu, daß ι dort die Identität bewirkt. Dieser Widerspruch zeigt, daß wie behauptet ι axial ist.

Die Achse von ι ist eine Ursprungsgerade W, das Zentrum s von ι liegt auf der uneigentlichen Geraden L_∞. Da ι von Σ zentralisiert wird, bleiben W und die zu s gehörige Ursprungsgerade S unter ganz Σ invariant. Auf S wirkt ι nichtidentisch, ferner ist ι in jedem Normalteiler von Σ enthalten; also wirkt Σ effektiv auf $S \cong \mathbb{R}^4$ als $SO_4(\mathbb{R})$. Auf $W \cong \mathbb{R}^4$ kann Σ nicht fast effektiv wirken, da sonst $\Sigma| W \cong SO_4(\mathbb{R})$ und also die Wirkung sogar effektiv wäre; aber W ist die Achse von ι. Also operiert o. B. d. A. der Normalteiler Σ_1 trivial auf W. Da $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \{\mathrm{id}, \iota\}$ der einzige echte Normalteiler von $\Sigma_2 \cong$ Spin (3) (mit zu $SO_3(\mathbb{R})$ isomorpher Faktorgruppe) ist, wirkt Σ auf W — falls nicht trivial — als $SO_3(\mathbb{R})$ und hat insbesondere von o verschiedene Fixpunkte in W (vgl. [3:3.2]).

Zur Beschreibung der Ebene in Koordinaten identifizieren wir im folgenden W und S als 4-dimensionale $\mathbb{R}$-Vektorräume in geeigneter Weise mit $\mathbb{H}$. Wegen $\Sigma|S \cong SO_4(\mathbb{R})$ und nach der bekannten Beschreibung von $SO_4(\mathbb{R})$ mittels Quaternionen (siehe [7:10.30]) läßt sich zunächst S so mit $\mathbb{H}$ identifizieren, daß

$$\Sigma|S = \{y \mapsto a y b^{-1};\ a, b \in \mathrm{Spin}(3)\}, \text{ wobei}$$

$$\Sigma_1|S = \{y \mapsto a y;\ a \in \mathrm{Spin}(3)\} \text{ und } \Sigma_2|S = \{y \mapsto y b^{-1};\ b \in \mathrm{Spin}(3)\}.$$

Die Untergruppe Ξ von Σ mit

$$\Xi|S = \{y \mapsto b y b^{-1};\ b \in \mathrm{Spin}(3)\}$$

hat von o verschiedene Fixpunkte in S; da ganz Σ von o verschiedene Fixpunkte in W hat, hat also Ξ als affine Kollineationsgruppe auch Fixpunkte außerhalb W und S. Sei E eine Ursprungsgerade durch einen solchen Fixpunkt. Da E komplementär zu W und S ist, kann man den Punktraum der affinen Ebene als $\mathbb{R}$-Vektorraum so mit $\mathbb{H} \times \mathbb{H}$ identifizieren, daß $W = \mathbb{H} \times \{0\}$ und $S = \{0\} \times \mathbb{H}$ (letzteres im Einklang mit der eben getroffenen Identifikation von S mit $\mathbb{H}$) und daß ferner

$$E = \{(x, x);\, x \in \mathbb{H}\}$$

wird. Wegen der Invarianz von E unter Ξ ist bezüglich dieser quaternalen Koordinaten dann

$$\Xi = \{(x, y) \mapsto (b x b^{-1}, b y b^{-1});\ b \in \mathrm{Spin}(3)\}. \tag{1}$$

Da $\Sigma = \Sigma_1 \cdot \Xi$, und da Σ_1 trivial auf W wirkt, ist damit insgesamt

$$\Sigma = \{(x, y) \mapsto (b x b^{-1}, a y b^{-1});\ a, b \in \mathrm{Spin}(3)\}. \tag{2}$$

Wir untersuchen nun, wie sich die übrigen Ursprungsgeraden mit diesen quaternalen Koordinaten beschreiben lassen. Für $0 \leqslant r \in \mathbb{R} \subseteq \mathbb{H}$ ist der Punkt $(1, r)$ Fixpunkt von Ξ; die Ursprungsgerade L_r durch diesen Punkt ist also invariant unter Ξ. Das bedeutet, daß L_r als $\mathbb{R}$-linearer Unterraum der affinen Punktmenge $\mathbb{H} \times \mathbb{H}$ die Gestalt $\{(x, \eta(x));\, x \in \mathbb{H}\}$ hat, wobei η eine $\mathbb{R}$-lineare Transformation mit $\eta(1) = r$ von $\mathbb{R}^4 = \mathbb{H}$ ist, die die Gruppe $\{\mathbb{H} \to \mathbb{H} : x \mapsto b x b^{-1};\ b \in \mathrm{Spin}(3)\}$ zentralisiert. Diese Gruppe läßt bekanntlich $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{H}$ punktweise fest und den dazu orthogonalen 3-dimensionalen Untervektorraum $\mathrm{Pu}\,\mathbb{H}$ der reinen Quaternionen invariant und induziert auf $\operatorname{Pu}\mathbb{H}$ die Gruppe $SO_3(\mathbb{R})$ der eigentlichen Drehungen (siehe z. B. [7:10.23]). Folglich läßt die mit dieser Wirkung vertauschbare Transformation η ebenfalls $\operatorname{Pu}\mathbb{H}$ invariant und induziert dort eine Streckung mit einem gewissen Skalarfaktor $\varrho(r)$. Man erhält so

$$L_r = \{(x,\ r\cdot \operatorname{Re} x + \varrho(r)\cdot \operatorname{Pu} x);\ x \in \mathbb{H}\}.$$

Wegen $L_0 = W$ und $L_1 = E$ ist dabei

$$\varrho(0) = 0,\ \varrho(1) = 1.$$

Unter Σ_1 ergeben sich dann die Ursprungsgeraden durch die Punkte $(1, r\cdot a)$ mit $a \in \operatorname{Spin}(3)$ als

$$L_{r,a} = \{(x,\ a(r\cdot \operatorname{Re} x + \varrho(r)\cdot \operatorname{Pu} x));\ x \in \mathbb{H}\}.$$

Damit sind bereits alle Ursprungsgeraden bekannt; die Ursprungsgerade durch den Punkt $(1, q)$ mit beliebigem $q \in \mathbb{H} \setminus \{0\}$ erhält man, indem man $r = |q|$ und $a = q/|q| \in \operatorname{Spin}(3)$ setzt. Für die Multiplikation $\circ$ des Quasikörpers Q, der die Ebene bezüglich W und S als Koordinatenachsen und $(1,1)$ als Einheitspunkt koordinatisiert, hat man damit

$$q \circ x = \frac{q}{|q|}(|q|\cdot \operatorname{Re} x + \varrho(|q|)\cdot \operatorname{Pu} x) = q\left(\operatorname{Re} x + \frac{\varrho(|q|)}{|q|}\cdot \operatorname{Pu} x\right). \quad (3)$$

Da Q ein topologischer Quasikörper ist, muß für festes $q \in \mathbb{H} \setminus \{0\}$ die Abbildung $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^4 : t \mapsto t \circ q$ eine Einbettung sein. Wählt man speziell $q \in \operatorname{Pu}\mathbb{H} \setminus \{0\}$, so ist also $t \mapsto t \circ q = \operatorname{sgn}(t)\cdot \varrho(|t|)\cdot q$ ein Homöomorphismus von $\mathbb{R}$ auf $\mathbb{R}\cdot q$. Aus Zusammenhangsgründen und wegen $\varrho(1) = 1$ ist folglich $\varrho(r) > 0$ für $r > 0$, und $r \mapsto \varrho(r)$ ist ein Homöomorphismus von $[0, \infty)$ auf sich. (3) besagt, daß Q der gemäß 2.1 zu diesem Homöomorphismus gehörige Quasikörper $K_\varrho^{\mathbb{H}}$ ist.

Umgekehrt ergibt sich durch unmittelbare Verifikation, daß die Ebene über jedem der Quasikörper $K_\varrho^{\mathbb{H}}$ die in (2) beschriebene Kollineationsgruppe Σ zuläßt und folglich eine $SO_4(\mathbb{R})$-Ebene ist. □

3. Kollineationen und Isomorphismen

In diesem Abschnitt wird die volle Kollineationsgruppe der Ebenen über den Quasikörpern $K_\varrho^{\mathbb{H}}$ aus 2.1 bestimmt; ferner werden die Isomorphieklassen dieser Ebenen ermittelt.

Vom Sonderfall $\varrho = \mathrm{id}$, in dem $K_\varrho^{\mathbb{H}}$ der Quaternionenkörper wird, sehen wir dabei meist ab, da die Verhältnisse in der desarguesschen Quaternionenebene als bekannt gelten können.

3.1. *Für* $\varrho \neq \mathrm{id}$ *ist der Kern des Quasikörpers* $K_\varrho^{\mathbb{H}}$ *gleich* $\mathbb{R}$.

Beweis: Der Unterkörper $\mathbb{R}$, der aus den reellen Vielfachen der 1 besteht, ist jedenfalls im Kern enthalten. Wäre der Kern größer als $\mathbb{R}$, so enthielte er deshalb auch Elemente $z \neq 0$ mit $\mathrm{Re}\, z = 0$. Die Abbildung

$$q \mapsto q \circ z = \begin{cases} \dfrac{q}{|q|} \cdot \varrho(|q|) \cdot z & \text{für } q \neq 0 \\ 0 & \text{für } q = 0 \end{cases}$$

müßte dann nach Definition des Kerns linear sein. Durch Einschränkung auf $\mathbb{R}$ und Kürzen von z ergäbe sich daraus die Linearität der Abbildung $\mathbb{R} \to \mathbb{R}: r \mapsto \mathrm{sgn}\, r \cdot \varrho(|r|)$; wegen $\varrho(1) = 1$ zieht dies $\varrho = \mathrm{id}$ nach sich, was wir ausgeschlossen haben. □

3.2. *Bereits bekannte Kollineationsgruppen* der affinen Ebene über dem Quasikörper $K_\varrho^{\mathbb{H}}$ sind die Gruppen

$$\Sigma_1 = \{(x,y) \mapsto (x, a y);\ a \in \mathrm{Spin}(3)\}$$
$$\Sigma_2 = \{(x,y) \mapsto (b x b^{-1}, y b^{-1});\ b \in \mathrm{Spin}(3)\}$$

aus dem Beweis von Satz 2.2 sowie ihr Produkt

$$\Sigma = \Sigma_1 \cdot \Sigma_2 \cong SO_4(\mathbb{R}).$$

(Dabei und im folgenden verwenden wir stets die quaternalen Koordinaten, die durch die Konstruktion von $K_\varrho^{\mathbb{H}}$ aus dem Quaternionenkörper heraus gegeben sind; die üblich notierte Multiplikation ist stets die Quaternionenmultiplikation.)

Ferner hat man über den Kern des Quasikörpers die Gruppe $\mathbb{G}_{[o, L_\infty]}$ der Streckungen mit Achse L_∞ und dem Koordinatenursprung o als Zentrum im Griff. Sie besteht bekanntlich aus den Transformationen $(x,y) \mapsto (x \circ z, y \circ z)$ mit $0 \neq z$ aus dem Kern; nach 3.1 ist also im vorliegenden Kontext $\mathbb{G}_{[o, L_\infty]}$ nichts anderes als die Gruppe der reellen Streckungen des $\mathbb{R}$-Vektorraums $K_\varrho^{\mathbb{H}} \times K_\varrho^{\mathbb{H}}$, falls $\varrho \neq \mathrm{id}$.

Das Hauptergebnis dieses Abschnitts ist nun der folgende

3.3. Satz. *Alle Kollineationen der Ebene über $K_\varrho^{\mathbb{H}}$ ($\varrho \neq \mathrm{id}$) sind stetig. Die Koordinatenachsen W und S sind invariant unter der Gruppe $\mathbb{G}_o$ der den Ursprung festlassenden affinen Kollineationen. Für $\mathbb{G}_o$ bestehen folgende Möglichkeiten:*

(i) *$\mathbb{G}_o$ ist das direkte Produkt $\Sigma \cdot \mathbb{G}_{[o, L_\infty]} \cdot Y$ der Gruppe $\Sigma \cong SO_4(\mathbb{R})$ aus 3.2, der Gruppe $\mathbb{G}_{[o, L_\infty]}$ der reellen Streckungen und eines weiteren, zu $\mathbb{R}$ isomorphen Faktors Y. Dies ist genau dann der Fall, wenn ϱ ein multiplikativer Isomorphismus ist.*

(ii) *$\mathbb{G}_o$ ist direktes Produkt von $\Sigma \cdot \mathbb{G}_{[o, L_\infty]}$ mit einer unendlich zyklischen diskreten Gruppe. Dies tritt genau dann auf, wenn ϱ zwar nicht multiplikativ ist, aber dennoch eine „Periodizität" der Form*

$$\varrho(t_o \cdot t) = \varrho(t_o) \cdot \varrho(t) \textit{ für alle } t > 0$$

mit festem $t_o > 0$, $t_o \neq 1$ aufweist.

(iii) *In allen anderen Fällen ist $\mathbb{G}_o$ das direkte Produkt $\Sigma \cdot \mathbb{G}_{[o, L_\infty]}$.*

Beweis: (a) Die Gruppe der Kollineationen ist das semidirekte Produkt der Gruppe der Translationen mit $\mathbb{G}_o$. Nach [1] sind die Kollineationen aus $\mathbb{G}_o$ semilinear über dem Kern $\mathbb{R}$, also linear und daher stetig.

Die folgende Aussage ist ein nützlicher Zwischenschritt zum Beweis der Tatsache, daß die Koordinatenachsen W und S invariant unter $\mathbb{G}_o$ sind:

(b) *In der Gruppe $\mathbb{G}_{W,S}$ der die Koordinatenachsen invariant lassenden Kollineationen ist Σ die größte kompakte zusammenhängende Untergruppe.*

Daß $\mathbb{G}_{W,S}$ eine größte kompakte zusammenhängende Untergruppe C hat, ist eine der Aussagen des Lemmas über Achsenstandgruppen [4, 2.1]. Als solche enthält C die kompakte zusammenhängende Gruppe Σ; sie wirkt außerdem fast effektiv auf L_∞, da sie als kompakte Gruppe endlichen Schnitt mit der Gruppe $\mathbb{G}_{[o, L_\infty]}$ der reellen Streckungen hat. Die Behauptung von (b) ergibt sich dann aus den Überlegungen von 1.2.

(c) Seien w und s die zu den Koordinatenachsen W und S gehörigen uneigentlichen Punkten in L_∞. Die Gruppe $\Sigma_1 \cong \mathrm{Spin}(3)$ besteht aus affinen Achsenstreckungen mit Achse W und Zentrum s.

Insbesondere kann die betrachtete Ebene nicht den Lenz-Typ V haben: sonst hätte in einer koordinatisierenden 4-dimensionalen reellen Divisionsalgebra D der Nukleus, der die Streckungen mit Achse W und Zentrum s beschreibt, eine zu Spin(3) isomorphe Untergruppe und wäre folglich als topologischer Körper isomorph zum Quaternionenkörper $\mathbb{H}$; aus Dimensionsgründen wäre also $D = \mathbb{H}$ und es läge die Quaternionenebene vor (siehe auch [3:2.6]).

Die Streckungsgruppe $\Sigma_1 \cong \mathrm{Spin}(3)$ wirkt frei auf $L_\infty \setminus \{w, s\}$; insbesondere hat sie dort zur 3-Sphäre homöomorphe Bahnen. Da die Ebene nicht den Lenz-Typ V hat, folgt aus dem Vorliegen solcher Bahnen anhand des Sphärensatzes [4:1.2], daß jede Kollineation aus $\mathbb{G}_o$ die Punkte w und s und damit die zugehörigen Ursprungsgeraden W und S festläßt oder vertauscht. Insbesondere ist Σ wegen (b) normal in $\mathbb{G}_o$. Unter den beiden einzigen zu Spin(3) isomorphen Normalteilern Σ_1 und Σ_2 von $\Sigma \cong SO_4(\mathbb{R})$ ist Σ_1 dadurch ausgezeichnet, daß er aus Streckungen besteht. Also gilt:

(d) *Σ_1 und Σ_2 sind Normalteiler von $\mathbb{G}_o$. Das Zentrum s und die Achse W der Streckungen aus Σ sind folglich invariant unter $\mathbb{G}_o$, so daß*

$$\mathbb{G}_o = \mathbb{G}_{W,S}.$$

(e) Da Spin(3) nur innere Automorphismen hat, kann somit jede Kollineation aus $\mathbb{G}_o$ modulo $\Sigma = \Sigma_1 \cdot \Sigma_2$ abgewandelt werden zu einer Kollineation φ, die Σ zentralisiert. Der Zentralisator von $\Sigma | W = \{x \mapsto b x b^{-1};\ b \in \mathrm{Spin}(3)\} \cong SO_3(\mathbb{R})$ in $GL_4(\mathbb{R})$ besteht (wie schon im Beweis von 2.2 ausgeführt) aus den Transformationen $x \mapsto r \cdot \mathrm{Re}\, x + r_o \cdot \mathrm{Pu}\, x$ mit $r, r_o \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Modulo $\mathbb{G}_{[o, L_\infty]}$ ist also o. B. d. A.

$$\varphi \,|\, W = (x \mapsto \mathrm{Re}\, x + r_o \cdot \mathrm{Pu}\, x) \cdot \tag{1a}$$

Der Zentralisator von $\Sigma | S \cong SO_4(\mathbb{R})$ in $GL_4(\mathbb{R})$ besteht aus den reellen Streckungen; modulo der zentralen Involution aus Σ_1, die auf W identisch wirkt, kann man also annehmen, daß

$$\varphi | S = (y \mapsto t_o \cdot y) \text{ mit } t_o > 0. \tag{1b}$$

(f) Ganz entsprechende Überlegungen gelten für Isomorphismen zwischen den Ebenen über zwei Quasikörpern $K_\varrho^{\mathbb{H}}$ und $K_\tau^{\mathbb{H}}$ der hier betrachteten Art: sind die Ebenen isomorph, so existiert ein Isomorphismus der Gestalt (1a—b). Unter diesem Isomorphismus wird die Ursprungsgerade $\left\{\left(x,\ a \cdot \left(\mathrm{Re}\, x + \frac{\varrho(|a|)}{|a|} \cdot \mathrm{Pu}\, x\right)\right)\right\}$ der Steigung a übergeführt in

$$\left\{\left(\operatorname{Re} x + r_o \cdot \operatorname{Pu} x,\ t_o a \cdot \left(\operatorname{Re} x + \frac{\varrho(|a|)}{|a|} \cdot \operatorname{Pu} x\right)\right)\right\}.$$

Damit dies in der Ebene über $K_\tau^{\mathbb{H}}$ wieder eine Ursprungsgerade (der Steigung $t_o a$, wie man für $x = 1$ abliest) ist, muß für alle x

$$t_o a \cdot \frac{\tau(t_o|a|)}{t_o|a|}\, r_o \cdot \operatorname{Pu} x = t_o a \cdot \frac{\varrho(|a|)}{|a|} \cdot \operatorname{Pu} x$$

gelten. Indem man speziell $|a| = t_o^{-1}$ wählt, erhält man $r_o = t_o \cdot \varrho(t_o^{-1})$; also ist φ die Abbildung

$$(x, y) \mapsto (\operatorname{Re} x + t_o \cdot \varrho(t_o^{-1}) \cdot \operatorname{Pu} x,\ t_o y) \cdot \tag{2}$$

Im Spezialfall $|a| = 1$ ergibt sich andererseits $\tau(t_o) = t_o \cdot r_o^{-1}$. Somit gilt:

$$\tau(t_o \cdot t) = \tau(t_o) \cdot \varrho(t) \text{ für alle } t > 0; \tag{3}$$

und wie man leicht verifiziert, ist dies nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend dafür, daß (2) ein Isomorphismus der Ebene über $K_\varrho^{\mathbb{H}}$ auf die Ebene über $K_\tau^{\mathbb{H}}$ ist.

(g) Im Spezialfall $\tau = \varrho$ haben wir damit erhalten, daß in der Ebene über $K_\varrho^{\mathbb{H}}$ die Gruppe $\mathbb{G}_o$ der den Ursprung festlassenden Kollineationen erzeugt wird von $\Sigma \cdot \mathbb{G}_{[o, L_\infty]}$ und den Kollineationen der Gestalt (2) für diejenigen $t_o > 0$, für die

$$\varrho(t_o \cdot t) = \varrho(t_o) \cdot \varrho(t) \text{ für alle } t > 0 \tag{4}$$

gilt. Wie man nun unmittelbar verifiziert, bilden diese t_o eine Untergruppe T_o der multiplikativen Gruppe $\mathbb{R}_{\text{pos}}$ der positiven reellen Zahlen; und die Kollineationen der Gestalt (4) bilden eine zu T_o isomorphe abgeschlossene Untergruppe von $\mathbb{G}_o$. Als abgeschlossene Untergruppe von $\mathbb{R}_{\text{pos}}$ ist T_o entweder ganz $\mathbb{R}_{\text{pos}}$ oder aber unendlich zyklisch diskret, falls nicht trivial; diese Fallunterscheidung liefert die Fälle (i)—(iii) von Satz 3.3, der damit bewiesen ist. —

Hinsichtlich Isomorphien fassen wir das in (f) Gesagte noch zusammen:

3.4 Satz. *Die Ebenen über $K_\varrho^{\mathbb{H}}$ und $K_\tau^{\mathbb{H}}$ sind genau dann isomorph, wenn mit geeignetem $t_o > 0$ eine Beziehung der Form*

$$\tau(t_o \cdot t) = \tau(t_o) \cdot \varrho(t) \text{ für alle } t \in [0, \infty)$$

besteht.

Beispielsweise sind also die Ebenen, die man für verschiedene multiplikative Isomorphismen ϱ erhält, paarweise nichtisomorph. Nach Satz 3.3 besteht diese Einparameterfamilie von Ebenen genau aus denjenigen $SO_4(\mathbb{R})$-Ebenen, für die die Gruppe $\mathbb{G}_o$ 8-dimensional, die gesamte Kollineationsgruppe (unter Berücksichtigung der Translationen) also 16-dimensional ist.

Literatur

[1] ANDRÉ, J.: Über nicht desarguessche Ebenen mit transitiver Translationsgruppe. Math. Z. **60**, 156—186 (1954).

[2] HÄHL, H.: Automorphismengruppen von lokalkompakten zusammenhängenden Quasikörpern und Translationsebenen. Geom. Dedicata **4**, 305—321 (1975).

[3] HÄHL, H.: Geometrisch homogene vierdimensionale reelle Divisionsalgebren. Geom. Dedicata **4**, 333—361 (1975).

[4] HÄHL, H.: Lokalkompakte zusammenhängende Translationsebenen mit großen Sphärenbahnen auf der Translationsachse. Resultate der Math. **2**, 62—87 (1979).

[5] HÄHL, H.: Zur Klassifikation von 8- und 16-dimensionalen lokalkompakten Translationsebenen nach ihren Kollineationsgruppen. Math. Z. **159**, 259—294 (1978).

[6] HÄHL, H.: Achtdimensionale lokalkompakte Translationsebenen mit großen Streckungsgruppen. Arch. Math. **34**, 231—242 (1980).

[7] PORTEOUS, I. R.: Topological Geometry. London: van Nostrand. 1969.

[8] RICHARDSON, R. W., JR.: Groups acting on the 4-sphere. Ill. J. Math. **5**, 474—485 (1961).

[9] SALZMANN, H.: Homogene affine Ebenen. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **43**, 216—220 (1975).

H. HÄHL
Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Auf der Morgenstelle 10
D-7400 Tübingen 1, Bundesrepublik Deutschland