Mh. Math. 97, 23–45 (1984)

Monatshefte für **Mathematik**

Eine Klasse von achtdimensionalen lokalkompakten Translationsebenen mit großen Scherungsgruppen

Von

Hermann Hähl, Kiel

(Eingegangen am 30. September 1983)

Abstract. A Class of Eight-dimensional, Locally Compact Translation Planes with Many Shears. This paper is one of the final steps in a classification program to determine all eight-dimensional, locally compact translation planes having large collineation groups. Here, we describe all such planes whose collineation group contains a semidirect product $\Sigma \cdot N$, where N is an at least 3-dimensional normal subgroup consisting of shears with fixed axis, and Σ is isomorphic to $SO_3(\mathbb{R})$.

1. Einleitung

1.1. Inhalt. In [12] wurde die allgemeine Struktur der Kollineationsgruppe von achtdimensionalen lokalkompakten Translationsebenen untersucht, in denen die Gruppe $\mathbb{G}^c$ der stetigen affinen Kollineationen eine zu $SO_3(\mathbb{R})$ lokal isomorphe Untergruppe Σ enthält, welche auf der Translationsachse L_∞ Fixpunkte hat und eine zu $SO_3(\mathbb{R})$ isomorphe Transformationsgruppe induziert.

Als besonders relevant unter dem Blickwinkel der Klassifikation der Ebenen mit großer Kollineationsgruppe (die in [6] begonnen wurde) erweist sich dabei der Spezialfall, daß $\mathbb{G}^c$ noch eine dreidimensionale abgeschlossene Untergruppe N von Scherungen mit fester Achse enthält, die von Σ normalisiert wird (Alternative (2) des $SO_3(\mathbb{R})$-Satzes in [12; 1.4]). Dies ist ein glücklicher Umstand, da man Scherungsgruppen über Koordinatenmethoden algebraisch gut im Griff hat.

Die Ebenen, in denen solche Kollineationsgruppen Σ und N auftreten, lassen sich denn auch alle explizit bestimmen. In der vorliegenden Arbeit wird der Fall $\Sigma \cong SO_3(\mathbb{R})$ behandelt; solche Ebenen nennen wir kurz $SO_3(\mathbb{R})$-*Ebenen mit mindestens dreidimensionaler Scherungsgruppe*. Die alternative Möglichkeit, daß Σ die universelle Überlagerungsgruppe $Spin_3(\mathbb{R})$ von $SO_3(\mathbb{R})$ ist, wird in einer weiteren Arbeit [13] diskutiert werden. Dabei wird sich schließlich herausstellen, daß in diese beiden Ebenenklassen — neben den in [5] behandelten Ebenen vom Lenz-Typ V sowie den Ebenen über den Fastkörpern von Kalscheuer-Tits (siehe [8; 3.3]) — alle weiteren achtdimensionalen lokalkompakten Translationsebenen mit (mindestens) 17-dimensionaler Kollineationsgruppe fallen.

Zur Gliederung: Wir erinnern zunächst an die einschlägigen Grundtatsachen und führen dann in § 2 ausgehend von den Ergebnissen von [12] die Feinanalyse der für die Struktur der Kollineationsgruppe bestehenden Möglichkeiten durch; dies kann ohne weiteren Aufwand für beide Ebenenklassen zugleich geschehen. In § 3 werden dann auf dieser Grundlage alle $SO_3(\mathbb{R})$-Ebenen explizit bestimmt.

Der Verfasser dankt der Deutschen Forschungsgemeinschaft für das Forschungsstipendium, zu dessen Ergebnissen die vorliegende Arbeit gehört. Sie stellt einen Ausschnitt aus der Habilitationsschrift des Verfassers dar.

1.2. Grundtatsachen. Eine achtdimensionale lokalkompakte Translationsebene läßt sich als affine Ebene bezüglich irgend zweier verschiedener Koordinatenachsen W und S durch einen als Ursprung gewählten Punkt o koordinatisieren über einem lokalkompakten topologischen Quasikörper Q, dessen additive Gruppe die Vektorgruppe $\mathbb{R}^4$ ist ([19; § 7, insb. 7.23]).

Der affine Punktraum $\mathbb{A}$ ist in diesen Koordinaten der $\mathbb{R}$-Vektorraum $Q \times Q = \mathbb{R}^8$. Die Ursprungsgeraden sind die 4-dimensionalen linearen Teilräume $W = Q \times \{0\}$, $S = \{0\} \times Q$ und $\{(x, a \circ x);\ x \in Q\}$ (Gerade der ‚Steigung' a) für $0 \neq a \in Q$, wo $\circ$ die Multiplikation des Quasikörpers Q ist; die übrigen affinen Geraden entstehen als Bilder der Ursprungsgeraden unter der Translationsgruppe des Vektorraums $\mathbb{A} = \mathbb{R}^8$. Durch Adjunktion einer uneigentlichen Geraden L_∞ erhält man eine kompakte topologische projektive Ebene ([19; § 7]); als projektive Gerade ist L_∞ homöomorph zur Einpunktkompaktifizierung einer affinen Geraden, also zur 4-Sphäre $\mathbb{S}^4$.

Die Gruppe $\mathbb{G}^c$ der stetigen affinen Kollineationen ist das semidirekte Produkt der Translationsgruppe mit dem Stabilisator $\mathbb{G}^c_o$ des Ursprungs. $\mathbb{G}^c_o$ ist eine abgeschlossene Gruppe von $\mathbb{R}$-linearen Transformationen von $\mathbb{A} = \mathbb{R}^8$ (siehe z. B. [3; § 3]). Der Trägheitsnormalteiler der Wirkung von $\mathbb{G}^c_o$ auf der uneigentlichen Geraden L_∞ ist die Gruppe $\mathbb{G}_{[o, L_\infty]}$ der affinen Streckungen vom Zentrum o aus, also aller Kollineationen, die jede Ursprungsgerade invariant lassen. Sie wird algebraisch beschrieben durch den Kern

$$\operatorname{Ker} Q =$$
$$= \{c \in Q;\ \bigwedge x, y \in Q\colon (x+y)\circ c = x\circ c + y\circ c,\ (x\circ y)\circ c = x\circ(y\circ c)\}$$

des Quasikörpers Q; die Streckungen vom Zentrum o aus sind nämlich — in Koordinaten über Q — genau die Kollineationen der Form

$$(x, y) \mapsto (x\circ c, y\circ c) \quad \text{mit } 0 \neq c \in \operatorname{Ker} Q$$

(vgl. [1], [15; 8.2]). $\operatorname{Ker} Q$ ist ein abgeschlossener Unterkörper von Q, der $\mathbb{R} = 1\cdot\mathbb{R}$ enthält (entsprechend den Streckungen mit reellen Skalaren im Vektorraum $\mathbb{A} = \mathbb{R}^8$). Nach dem Satz von Pontrjagin ist also $\operatorname{Ker} Q$ gleich $\mathbb{R}$ oder isomorph zu $\mathbb{C}$, sofern nicht $\operatorname{Ker} Q = Q$ der Quaternionenschiefkörper ist, d. h. die klassische Quaternionenebene vorliegt. Angesichts der Beziehung zur Streckungsgruppe $\mathbb{G}_{[o, L_\infty]}$ ist der Isomorphietyp von $\operatorname{Ker} Q$ unabhängig vom gewählten Koordinatensystem, weshalb man ihn auch als Kern der Ebene ansprechen kann.

Insgesamt hat die affine Ebene eine lineare Struktur als Rechtsvektorraum über $\operatorname{Ker} Q$, wobei $\mathbb{G}_{[o, L_\infty]}$ einfach die Gruppe der skalaren Streckungen dieses Vektorraums ist. Die Kollineationen aus $\mathbb{G}_o^c$ sind semilinear über $\operatorname{Ker} Q$ ([1], [15; 8.3.8]), natürlich mit stetigem Begleitautomorphismus. Da $\mathbb{R}$ nur einen und $\mathbb{C}$ genau zwei stetige Automorphismen hat, sind außer im Fall der Quaternionenebene die Kollineationen aus der Zusammenhangskomponente Γ_o von $\mathbb{G}_o^c$ stets linear sogar über $\operatorname{Ker} Q$. Man erhält dann eine Darstellung von Γ_o als fastdirektes Produkt

$$\Gamma_o = \Delta \cdot (\mathbb{G}_{[o, L_\infty]})^1;$$

dabei ist Δ die Zusammenhangskomponente von

$$\mathrm{S}\Gamma_o = \{\gamma \in \Gamma_o;\ \det_{\operatorname{Ker} Q} \gamma = 1\}$$

der Kollineationen aus Γ_o, die über $\operatorname{Ker} Q$ Determinante 1 haben, und $(\mathbb{G}_{[o, L_\infty]})^1$ die Zusammenhangskomponente der Streckungsgruppe vom Zentrum o aus. $\mathrm{S}\Gamma_0$ ist damit eine Untergruppe, die auf L_∞ dieselbe Transformationsgruppe bewirkt wie Γ_o, dabei aber fast effektiv auf L_∞ wirkt. — Im Fall der Quaternionenebene erreicht man im übrigen dasselbe durch die Setzung

$$\Delta = \mathrm{S}\Gamma_o = \mathrm{SL}_2(\mathbb{H}).$$

Im Hinblick auf das Thema dieser Arbeit ist es wichtig, Scherungen in Koordinaten beschreiben zu können.

1.3. Scherungen Sei $s \in L_\infty$ der zur Koordinatenachse $S = \{0\} \times Q$ gehörige uneigentliche Punkt. Die Gruppe $\mathbb{G}_{[s,S]}$ der Scherungen mit Achse S (und Zentrum s) läßt sich in Koordinaten beschreiben anhand des *Distributors*

$$\mathrm{D}Q = \{d \in Q;\ \bigwedge a, x \in Q\colon (d+a)x = d \circ x + a \circ x\}$$

von Q; die Elemente von $\mathbb{G}_{[s,S]}$ sind nämlich in Koordinaten über Q genau die Kollineationen der Form

$$\sigma_d\colon (x, y) \mapsto (x, d \circ x + y) \quad \text{mit } d \in \mathrm{D}Q,$$

wie man sich leicht überlegt.

$\mathrm{D}Q$ ist eine abgeschlossene Untergruppe der additiven Gruppe $\mathbb{R}^4$ von Q, und $\mathrm{D}Q \to \mathbb{G}_{[s,S]}\colon d \mapsto \sigma_d$ ist ein Isomorphismus topologischer Gruppen.

Eine abgeschlossene zusammenhängende Untergruppe N von $\mathbb{G}_{[s,S]}$ entspricht unter diesem Isomorphismus einem Untervektorraum V von $\mathbb{R}^4$ ([16; Beispiel 33, S. 127]). Ein Element $\sigma_d \in N$ ($d \in V$) führt die Ursprungsgerade der Steigung $a \in Q$ in die Ursprungsgerade der Steigung $d + a$ über. Identifiziert man also $L_\infty \setminus \{s\}$ mit Q, indem man jedem Punkt aus $L_\infty \setminus \{s\}$ die Steigung der zugehörigen Ursprungsgeraden zuordnet, so geht das System der Bahnen von N in $L_\infty \setminus \{s\}$ über in das System der Nebenklassen von $\mathbb{R}^4$ nach V.

Schließlich werden wir uns wesentlich auf die folgende Aussage stützen, die eine vereinfachte Version eines grundlegenden Ergebnisses aus [7; 2.1] ist:

1.4. Lemma über Achsenstandgruppen. *Eine zusammenhängende, abgeschlossene Untergruppe von $\mathrm{S}\Gamma_o$, die zwei verschiedene uneigentliche Punkte $w, s \in L_\infty$ festläßt, ist entweder kompakt oder direktes Produkt einer kompakten Untergruppe mit einer zu $\mathbb{R}$ isomorphen „Kompressionsuntergruppe" Y; die Bahnen von Y in $L_\infty \setminus \{w, s\}$ haben dann sowohl w als auch s als Häufungspunkt.*

2. Struktur und Wirkung der Kollineationsgruppe

In diesem Abschnitt bestimmen wir die Möglichkeiten, die für die Struktur der Kollineationsgruppe in den Ebenen des eingangs geschilderten Typs bestehen. Im einzelnen treffen wir folgende

2.1. Voraussetzungen. Gegeben sei eine nicht desarguessche achtdimensionale lokalkompakte Translationsebene, in der bezüglich einer Geraden S durch den als Ursprung gewählten affinen Punkt o die Gruppe der Scherungen mit Achse S mindestens dreidimensional ist. (Das Zentrum dieser Scherungen ist der zu S gehörige uneigentliche Punkt s.) Ferner enthalte $\mathbb{G}_o^c$ eine zu $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ lokal isomorphe, zusammenhängende Untergruppe Σ mit $\Sigma | L_\infty = \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$, die S invariant läßt.

Auf der 4-Sphäre L_∞ kann Σ dann nur in der gewohnten Weise wirken, d. h. als die Einpunktkompaktifizierung der Wirkung von $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R}) = \mathrm{SO}_3(\mathbb{R}) \times \{\mathrm{id}\}$ auf $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ (siehe RICHARDSON [18]). Insbesondere bilden die Fixpunkte von Σ in L_∞ eine durch s gehende Kreislinie.

Da die Ebene voraussetzungsgemäß nicht die desarguessche Ebene über dem Quaternionenkörper ist, ist die quasi-einfache Gruppe Σ in $\Delta = (S\Gamma_o)^1$ (siehe 1.2) enthalten.

Zunächst betrachten wir die Wirkung von Σ und der Scherungsgruppe auf L_∞:

2.2. Lemma. *Die Gruppe der Scherungen mit Achse S besitzt genau eine zu* $\mathbb{R}^3$ *isomorphe abgeschlossene Untergruppe N, die von* Σ *normalisiert wird;* Σ *induziert auf N eine zu* $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ *isomorphe Gruppe von Automorphismen.*

Σ *läßt die Bahnen von N in* $L_\infty \setminus \{s\}$ *invariant und hat auf jeder dieser (zu* $N = \mathbb{R}^3$ *homöomorphen) Bahnen genau einen Fixpunkt, wirkt also auf ihr wie auf N als* $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$.

Beweis: Wir behandeln zunächst den Fall, daß die Scherungsgruppe $\mathbb{G}_{[s,S]}$ genau dreidimensional ist. N ist dann ihre Zusammenhangskomponente. Nach 1.3 ist $N \cong \mathbb{R}^3$, und $L_\infty \setminus \{s\}$ läßt sich so mit $\mathbb{R}^4$ identifizieren, daß die N-Bahnen das System der Nebenklassen eines dreidimensionalen Untervektorraums von $\mathbb{R}^4$ werden.

Der Bahnenraum $\mathscr{B}$ der Wirkung von N auf $L_\infty \setminus \{s\}$ ist also zu $\mathbb{R}$ homöomorph, und Σ wirkt auf diesem Bahnenraum, da N von Σ normalisiert wird. Die Bahnen von Σ auf $\mathscr{B} \cong \mathbb{R}$ sind kompakte zusammenhängende homogene Teilmengen und daher einelementig, d. h. Σ läßt jede N-Bahn in L_∞ invariant.

N wird von Σ nicht zentralisiert, da sonst N die Kreislinie der Fixpunkte von Σ in L_∞ invariant ließe, was angesichts der zu $\mathbb{R}^3$ homöomorphen N-Bahnen nicht geht. Folglich operiert Σ als $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ auf $N \cong \mathbb{R}^3$ und auf jeder N-Bahn in $L_\infty \setminus \{s\}$.

Da die Σ-Bahnen in L_∞ Punkte oder 2-Sphären sind, hat Σ in jeder N-Bahn $\mathfrak{X} \cong \mathbb{R}^3$ in $L_\infty \setminus \{s\}$ genau einen Fixpunkt. Dies entspricht einem viel allgemeineren Sachverhalt bezüglich der Wirkung kompakter zusammenhängender Liegruppen auf euklidischen Räumen mit Bahnen der Kodimension 1 (vgl. [14]), kann aber hier etwa durch folgende elementare Überlegungen gewonnen werden: Die Innengebiete von zur 2-Sphäre homöomorphen Σ-Bahnen in $\mathfrak{X} \cong \mathbb{R}^3$ sind invariant unter Σ, und ihre Abschlüsse bilden nach dem Zerlegungssatz von JORDAN—BROUWER eine durch Inklusion teilweise geordnete Menge derart, daß zwei Elemente vergleichbar oder disjunkt sind. Der Durchschnitt einer maximalen Kette in dieser geordneten Menge ist aus Kompaktheitsgründen nicht leer und enthält keine zur 2-Sphäre homöomorphe Σ-Bahn mehr, besteht also aus Fixpunkten von Σ. Ausgehend von einem Punkt $f \in \mathfrak{X}$ kann man N mit $\mathfrak{X}$ vermöge der Abbildung $\eta \mapsto \eta(f)$ identifizieren, und diese Identifikation ist Σ-äquivariant, wenn f ein Fixpunkt von Σ ist. Also ist die Wirkung von Σ auf $\mathfrak{X}$ äquivalent zur linearen Wirkung auf $N \cong \mathbb{R}^3$ und hat insbesondere genau einen Fixpunkt. Damit sind für den Fall $\dim \mathbb{G}_{[s,S]} = 3$ alle Aussagen bewiesen.

Eine höhere Dimension für $\mathbb{G}_{[s,S]}$ ergibt sich nur, falls $\mathbb{G}_{[s,S]}$ scharf transitiv auf $L_\infty \setminus \{s\}$ operiert (siehe 1.3). Man kann dann ganz $L_\infty \setminus \{s\}$ in Σ-äquivarianter Weise mit der Gruppe $\mathbb{G}_{[s,S]} \cong \mathbb{R}^4$ identifizieren, in der Σ eine zu $SO_3(\mathbb{R})$ isomorphe Gruppe von Automorphismen induziert und insbesondere genau eine dreidimensionale Vektoruntergruppe $N \cong \mathbb{R}^3$ invariant läßt. An dieser Identifikation liest man auch alle weiteren Aussagen für diesen Fall unmittelbar ab.

2.3. Satz (Voraussetzungen von 2.1). *Die Zusammenhangskomponente Γ der Gruppe aller stetigen affinen Kollineationen läßt das Scherungszentrum s fest. Die von Σ normalisierte Scherungsgruppe $N \cong \mathbb{R}^3$ (siehe 2.2) ist ein Normalteiler von Γ_o, und es liegt eine der folgenden alternativen Situationen vor:*

(i) *Γ läßt jede N-Bahn in $L_\infty \setminus \{s\}$ invariant. Dann ist*

$$\Gamma_o = N \cdot \Sigma \cdot (\mathbb{G}_{[o, L_\infty]})^1 .$$

(ii) *Γ läßt genau eine N-Bahn $\mathfrak{X}$ in $L_\infty \setminus \{s\}$ invariant. $\mathfrak{X}$ besteht dann genau aus den Punkten $w \in L_\infty \setminus \{s\}$, für die eine nichttriviale Kompressionsuntergruppe Y bezüglich w und s (im Sinne des Lemmas über Achsenstandgruppen 1.4) existiert. Auf den beiden zu $\mathbb{R}^4$ homöomorphen Zusammenhangskomponenten von $L_\infty \setminus (\mathfrak{X} \cup \{s\})$ wirkt Γ*

transitiv, und es ist

$$\Gamma_o = N \cdot \Sigma \cdot Y \cdot (\mathbb{G}_{[o, L_\infty]})^1 .$$

Ist speziell w der Fixpunkt von Σ in $\mathfrak{X}$, so kann dabei Y im Zentralisator von Σ gewählt werden.

(iii) *Γ ist transitiv auf $L_\infty \setminus \{s\}$. Dann ist die Zusammenhangskomponente Z des Zentralisators von Σ in $S\Gamma_o$ isomorph zu $\mathbb{R}$ oder L_2 und enthält einen zu $\mathbb{R}$ isomorphen Normalteiler Θ, der scharf transitiv auf dem zu $\mathbb{R}$ homöomorphen Bahnenraum von N in $L_\infty \setminus \{s\}$ operiert. Ist $Z \cong \mathbb{R}$, also $Z = \Theta$, so gilt*

$$\Gamma_o = N \cdot \Theta \cdot \Sigma \cdot (\mathbb{G}_{[o, L_\infty]})^1 .$$

Im Fall $Z \cong \mathrm{L}_2$ besteht Θ aus Scherungen, so daß die Ebene vom Lenz-Typ V (mit der vierdimensionalen auf $L_\infty \setminus \{s\}$ transitiven Scherungsgruppe $\mathbb{G}_{[s,S]} = N \cdot \Theta$) ist, und man hat

$$\Gamma_o = N \cdot Z \cdot \Sigma \cdot (\mathbb{G}_{[o, L_\infty]})^1 .$$

Bemerkung: Jede dieser Alternativen ist in geeigneten Ebenen tatsächlich verwirklicht (siehe 3.3 und [13]).

Beweis: (a) Daß N ein Normalteiler von Γ_o und s ein Fixpunkt von Γ ist, ergibt sich aus den Aussagen des $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$-Satzes von [12; 1.4], von dem die hier behandelte Problemstellung ihren Ausgang nimmt.

Sei nun $w \in L_\infty \setminus \{s\}$ ein Fixpunkt von Σ. Da s ein Fixpunkt von Γ ist, hat nach dem Lemma über Achsenstandgruppen (1.4) die Zusammenhangskomponente $(\Delta_w)^1$ des Stabilisators von $\Delta = (S\Gamma_o)^1$ (siehe 1.2) in w eine größte kompakte Untergruppe K der Kodimension höchstens 1. Wegen $\Sigma \subseteq K$ ist aufgrund der Möglichkeiten für die Wirkung kompakter Liegruppen auf der 4-Sphäre (Richardson [18]) entweder $K | L_\infty \cong \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ (woraus aus Dimensionsgründen $K = \Sigma$ folgt), oder aber es wäre $K | L_\infty \cong \mathrm{SO}_4(\mathbb{R})$. Im zweiten Fall läge eine sogenannte $\mathrm{SO}_4(\mathbb{R})$-Ebene oder Spin(4)-Ebene im Sinne von [9], [8] vor; dann wäre aber auch w ein Fixpunkt von Γ ([8; 2.4, 2.2], [9; 3.3]), was sich nicht mit der Scherungsgruppe N verträgt. Also ist Σ die größte kompakte Untergruppe von $(\Delta_w)^1$. Insbesondere ist nach dem Lemma über Achsenstandgruppen

$$\dim \Delta_w \leqslant 3 + 1 = 4$$

und

$$\dim \Delta = \dim \Delta(w) + \dim \Delta_w \leqslant 4 + 4 = 8 .$$

(b) Γ_o permutiert die Bahnen des Normalteilers N und operiert also als Transformationsgruppe auf dem Bahnenraum $\mathscr{B}$ der Wirkung von N in $L_\infty \setminus \{s\}$. Nach 1.3 ist $\mathscr{B}$ homöomorph zum Faktorraum $\mathbb{R}^4/\mathbb{R}^3 \cong \mathbb{R}$. Die zusammenhängende Gruppe Γ_o wirkt also entweder transitiv auf $\mathscr{B}$ (und dann transitiv auf $L_\infty \setminus \{s\}$), oder sie läßt ein Element von $\mathscr{B}$ fest, d. h. eine N-Bahn in $L_\infty \setminus \{s\}$ invariant. Wir behandeln die beiden Fälle getrennt:

(b 1) *Γ_o lasse eine N-Bahn in $L_\infty \setminus \{s\}$ invariant*, d. h. für ein $w \in L_\infty \setminus \{s\}$ sei $\Gamma_o(w) = N(w)$. Dann ist $\Gamma_o = N \cdot \Gamma_{o,w}$ und aus Zusammenhangsgründen mit 1.2 also

$$\Gamma_o = N \cdot (\Delta_w)^1 \cdot (\mathbb{G}_{[o, L_\infty]})^1 .$$

Nach 2.2 hat Σ auf $N(w)$ genau einen Fixpunkt; o. B. d. A. können wir also annehmen, daß w ein solcher ist. Nach (a) und nach dem Lemma über Achsenstandgruppen ist entweder $(\Delta_w)^1 = \Sigma$ oder $(\Delta_w)^1 = \Sigma \cdot Y$, wo $Y \cong \mathbb{R}$ eine (Σ zentralisierende) Kompressionsuntergruppe ist.

Im ersten Fall ist $\Gamma_o = N \cdot \Sigma \cdot (\mathbb{G}_{[o, L_\infty]})^1$ das Erzeugnis von Gruppen, die sämtliche N-Bahnen invariant lassen. Insgesamt liegt damit Situation (i) vor.

Im zweiten Fall ist $\Gamma_o = N \cdot \Sigma \cdot Y \cdot (\mathbb{G}_{[o, L_\infty]})^1$. Ist w' irgendein Punkt von $L_\infty \setminus \{s\}$, dessen Stabilisator $\Delta_{w'}$ eine Kompressionsuntergruppe Y' bezüglich w' und s im Sinne von 1.4 enthält, so ist w' ein Häufungspunkt von $Y'(w)$ und damit auch von $\Gamma_o(w) = N(w)$. Wegen der Abgeschlossenheit von $N(w)$ in $L_\infty \setminus \{s\}$ folgt $w' \in N(w)$, so daß $N(w)$ genau aus den Punkten mit Kompressionsuntergruppe besteht. Aus demselben Grunde bleibt neben $N(w)$ keine weitere N-Bahn in $L_\infty \setminus \{s\}$ invariant; im Raum $\mathscr{B} \cong \mathbb{R}$ der N-Bahnen in $L_\infty \setminus \{s\}$ hat Γ_o also außer $N(w)$ keine weiteren Fixpunkte und wirkt folglich transitiv auf den beiden Zusammenhangskomponenten von $\mathscr{B} \setminus \{N(w)\}$. Nach der Beschreibung 1.3 von Scherungsbahnen sind die beiden entsprechenden Zusammenhangskomponenten von $(L_\infty \setminus \{s\}) \setminus N(w) \cong \mathbb{R}^4 \setminus \mathbb{R}^3$ homöomorph zu $\mathbb{R}^4$, und Γ wirkt transitiv auf ihnen. Somit liegt die in Alternative (ii) der Behauptung beschriebene Situation vor.

(b 2) *Γ_o wirke transitiv auf $\mathscr{B}$* (und damit auf $L_\infty \setminus \{s\}$). Nach 2.2 hat Σ in jeder N-Bahn in L_∞ einen Fixpunkt. Modulo N kann also jede Kollineation aus Δ zu einer Kollineation δ modifiziert werden, die den Fixpunkt $w \in L_\infty \setminus \{s\}$ von Σ wieder in einen Fixpunkt w' von Σ überführt. Da Σ nach (a) die größte kompakte Untergruppe von $(\Delta_w)^1$

und $(\Delta_{w'})^1$ ist, liegt dann δ im Normalisator $\mathcal{N}(\Sigma)$ von Σ in Δ, so daß $\Delta = \mathcal{N}(\Sigma) \cdot N$.

Die zu $SO_3(\mathbb{R})$ lokal isomorphe Gruppe Σ besitzt bekanntlich nur innere Automorphismen; folglich ist weiter $\mathcal{N}(\Sigma)$ Produkt von Σ und dem Zentralisator von Σ, also aus Zusammenhangsgründen

$$\Delta = Z \cdot \Sigma \cdot N,$$

wo Z die Zusammenhangskomponente des Zentralisators von Σ in Δ ist.

Wir bestimmen nun die Zusammenhangskomponente Ξ des Trägheitsnormalteilers der Wirkung von Δ auf $\mathscr{B}$. Wegen $N \subseteq \Xi$ ist $\Xi = \Xi_w \cdot N$. In Ξ_w können keine Kompressionsuntergruppen im Sinne von 1.4 liegen, da Ξ_w alle N-Bahnen in L_∞ invariant läßt. Also ist Ξ_w nach 1.4 kompakt, und wegen $\Sigma \subseteq \Xi_w$ und nach (a) folglich gleich Σ, so daß

$$\Xi = \Sigma \cdot N.$$

Der Normalisator $\mathcal{N}(\Sigma)$ permutiert die Fixpunkte von Σ in L_∞, von denen jeweils genau einer in jeder N-Bahn liegt (2.2) und hat daher trivialen Schnitt mit N; folglich ist $Z \cap \Xi$ im diskreten Zentrum von Σ enthalten. Z wirkt also mit diskretem Trägheitsnormalteiler auf $\mathscr{B}$, und zwar transitiv, da nach Voraussetzung $\Delta = Z \cdot \Sigma \cdot N$ transitiv wirkt. Wegen $\dim \Delta \leqslant 8$ (siehe (a)) ist ferner $\dim Z \leqslant 2$; nach dem Satz von Brouwer über die transitiven Wirkungen von lokalkompakten Gruppen auf 1-Mannigfaltigkeiten (siehe [19; 3.18]) ist die von Z auf $\mathscr{B} \cong \mathbb{R}$ induzierte Transformationsgruppe also isomorph zur affinen Gruppe L_2 oder zur Translationsgruppe $\mathbb{R}$. Da diese beiden Gruppen einfach zusammenhängend sind und folglich nicht echt von Z überlagert werden können, ist insbesondere die Wirkung von Z auf $\mathscr{B}$ sogar effektiv. Man erhält somit die in Teil (iii) der Behauptung geschilderte Situation. Ergänzend ist allerdings noch zu zeigen, daß im Fall $Z \cong L_2$ die Kommutatorgruppe Θ von Z, die auf $\mathscr{B} \cong \mathbb{R}$ wie der Normalteiler der Translationen in L_2 wirkt, aus Scherungen besteht.

Hierzu betrachte man die lineare Wirkung von Σ und Z auf der zu s gehörigen affinen Ursprungsgeraden $S \cong \mathbb{R}^4$. Zunächst kann Σ nicht trivial auf S wirken, da sonst Σ aus Streckungen mit Achse S und Zentrum w bestünde und also außer w keine weiteren Fixpunkte in $L_\infty \setminus \{s\}$ haben dürfte. Somit induziert Σ auf S eine zu $SO_3(\mathbb{R})$ oder deren universelle Überlagerungsgruppe $\mathrm{Spin}_3(\mathbb{R})$ isomorphe Untergruppe von $GL_4(\mathbb{R})$. Der Zentralisator einer solchen Untergruppe ist isomorph zu $(\mathbb{R}^*)^2$ bzw. zur multiplikativen Gruppe des Quaternionenkörpers; insbesondere sind Untergruppen der Dimension $\leqslant 2$ dieses Zentralisators kommutativ. Die Kommutatorgruppe $\Theta \cong \mathbb{R}$ von $Z \cong L_2$ wirkt also identisch auf S, und angesichts der scharf transitiven Wirkung von Θ auf $\mathscr{B}$ handelt es sich um eine Gruppe von Scherungen mit Achse S. Die Scherungsgruppe $\Theta \cdot N$ ist dann transitiv auf $L_\infty \setminus \{s\}$; es liegt also eine Ebene vom Lenz-Typ V vor, wie behauptet.

3. $SO_3(\mathbb{R})$-Ebenen mit großen Scherungsgruppen

3.1. In diesem Abschnitt soll nun der Fall $\Sigma \cong SO_3(\mathbb{R})$ abschließend behandelt werden. Wir betrachten also achtdimensionale lokalkompakte Translationsebenen, in denen bezüglich einer affinen Geraden S die Gruppe der Scherungen mit Achse S mindestens dreidimensional ist, und in denen $\mathbb{G}_o^c$ eine zu $SO_3(\mathbb{R})$ isomorphe Untergruppe Σ besitzt, welche S invariant läßt. Solche Ebenen nennen wir kurz $SO_3(\mathbb{R})$-*Ebenen mit mindestens dreidimensionaler Scherungsgruppe*. Sie lassen sich sämtlich explizit bestimmen. Wir werden sie als Koordinatenebenen über geeigneten lokalkompakten Quasikörpern angeben, die nun zunächst beschrieben werden sollen:

3.2. Die additive Gruppe des Quaternionenkörpers $\mathbb{H}$ sei in der Weise mit $\mathbb{R}^4$ identifiziert, daß dem Element $a = a_1 + i a_2 + j a_3 + k a_4 \in \mathbb{H}$ das 4-Tupel der Koeffizienten $a_n \in \mathbb{R}$ entspricht.

Für einen festen Homöomorphismus

$$\varrho : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ mit } \varrho(0) = 0 \text{ und } \varrho(1) = 1$$

sowie einen festen Parameter

$$\alpha > 0$$

betrachten wir nun auf dieser additiven Gruppe eine Modifikation $\circ$ der Quaternionenmultiplikation, die in Matrizenschreibweise wie folgt definiert ist:

$$a \circ x = \begin{pmatrix} a_1 & -\alpha a_2 & -\alpha a_3 & -\alpha a_4 \\ a_2 & \varrho(a_1) & -a_4 & a_3 \\ a_3 & a_4 & \varrho(a_1) & -a_2 \\ a_4 & -a_3 & a_2 & \varrho(a_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

Die algebraische Struktur bestehend aus der Vektoraddition $+$ und dieser Multiplikation $\circ$ nennen wir $D^{\mathbb{H}}_{\alpha,\varrho}$. Wir zeigen:

$D^{\mathbb{H}}_{\alpha,\varrho} = (\mathbb{R}^4, +, \circ)$ ist ein topologischer Quasikörper. Die Automorphismengruppe

$$\Lambda := \{\mathbb{H} \to \mathbb{H} :\ x \mapsto a x a^{-1};\ a \in \mathbb{H}, |a| = 1\}$$

des Quaternionenkörpers besteht aus Automorphismen auch von $D^{\mathbb{H}}_{\alpha,\varrho}$. Genau für $\varrho = \mathrm{id}$ ist $D^{\mathbb{H}}_{\alpha,\varrho}$ beidseitig distributiv, und genau für $\varrho = \mathrm{id}$ und $\alpha = 1$ ein Körper (der Quaternionenkörper).

Beweis: Zunächst beweisen wir die Behauptung bezüglich Automorphismen. Indem man $a \in \mathbb{H}$ in seinen Realteil $\mathrm{Re}\, a = a_1$ und seinen reinen Teil $\mathrm{Pu}\, a = i a_2 + j a_3 + k a_4$ aufspaltet, kann man die Multiplikation $\circ$ auch wie folgt mittels der gewöhnlichen Quaternionenmultiplikation $\cdot$ beschreiben:

$$\begin{aligned} a \circ x = {} & \mathrm{Re}\, a \cdot \mathrm{Re}\, x + \alpha \cdot \mathrm{Re}(\mathrm{Pu}\, a \cdot \mathrm{Pu}\, x) + \mathrm{Pu}\, a \cdot \mathrm{Re}\, x + \\ & + \varrho(\mathrm{Re}\, a) \cdot \mathrm{Pu}\, x + \mathrm{Pu}(\mathrm{Pu}\, a \cdot \mathrm{Pu}\, x). \end{aligned} \tag{*}$$

Daran liest man sofort ab, daß die Elemente von Λ auch Automorphismen bezüglich dieser neuen Multiplikation sind, da sie die Zerlegung in Realteil und reinen Teil respektieren; genauer gesagt läßt ja Λ die Realteile fest und wirkt als $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ auf dem Raum $\mathrm{Pu}\, \mathbb{H} = \mathbb{R}^3$ der reinen Quaternionen (mit verschwindendem Realteil), siehe etwa [17; S. 179ff.].

$D^{\mathbb{H}}_{\alpha,\varrho}$ erfüllt weiter die Planaritätsbedingung, wonach für $a \neq b$ die lineare Abbildung $x \mapsto a \circ x - b \circ x$ stets nichtsingulär ist. Um dies zu beweisen, kann man sich durch Anwendung eines geeigneten Automorphismus aus Λ auf den Spezialfall $a_3 = a_4 = 0$, $b_4 = 0$ zurückziehen; die Matrix der fraglichen linearen Abbildung ist dann

$$\begin{pmatrix} a_1 - b_1 & -\alpha \cdot (a_2 - b_2) & \alpha b_3 & 0 \\ a_2 - b_2 & \varrho(a_1) - \varrho(b_1) & 0 & -b_3 \\ -b_3 & 0 & \varrho(a_1) - \varrho(b_1) & -(a_2 - b_2) \\ 0 & b_3 & a_2 - b_2 & \varrho(a_1) - \varrho(b_1) \end{pmatrix}$$

und hat Determinante

$$\begin{aligned} & [(\varrho(a_1) - \varrho(b_1))^2 + (a_2 - b_2)^2 + {b_3}^2] \cdot \\ & \qquad \cdot [(a_1 - b_1)(\varrho(a_1) - \varrho(b_1)) + \alpha \cdot (a_2 - b_2)^2 + \alpha {b_3}^2]; \end{aligned}$$

diese ist für $a \neq b$ stets > 0, da $\alpha > 0$ und da $a_1 - b_1$ und $\varrho(a_1) - \varrho(b_1)$ wegen der Monotonie von ϱ stets dasselbe Vorzeichen haben. —

Mit diesen Informationen zeigen wir zunächst, daß die von $1 \cdot \mathbb{R}$ und i erzeugte Unterstruktur $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ ein topologischer Quasikörper $D^{\mathbb{C}}_{\alpha,\varrho}$ ist. Nach dem Kriterium 2.3 von [11] genügt hierzu die Verifikation der rein algebraischen Auflösungsbedingung, daß für $a = a_1 + i a_2 \neq 0$ und $c = c_1 + i c_2$ die Gleichung $y \circ a = c$ stets nach $y = y_1 + i y_2$ aufgelöst werden kann. In Koordinaten hat man hierzu das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a_1 y_1 - \alpha a_2 y_2 &= c_1 \\ a_2 \cdot \varrho(y_1) + a_1 y_2 &= c_2 \end{aligned}$$

zu lösen. Multipliziert man die erste Gleichung mit a_1, die zweite mit αa_2 und addiert, so erhält man

$$a_1^2 y_1 + \alpha a_2^2 \cdot \varrho(y_1) = c_1 a_1 + \alpha c_2 a_2 .$$

Links steht eine monotone und unbeschränkte Funktion von y_1, so daß diese Gleichung eine Lösung y_1 hat; y_2 ergibt sich dann nach einer der Ausgangsgleichungen.

Zum Abschluß des Beweises, daß ganz $D^{\mathbb{H}}_{\alpha,\varrho}$ ein topologischer Quasikörper ist, verwenden wir schließlich eine Kombination der Kriterien 2.1 und 2.4 aus [11], wonach ein topologischer Quasikörper genau dann vorliegt, wenn über die Planaritätsbedingung hinaus die folgende Stetigkeitsbedingung im Unendlichen erfüllt ist: Für jede bestimmt divergente Folge von Elementen $a^{(\nu)} \in \mathbb{R}^4$ und für jede in $\mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$ konvergente Folge von Elementen $x^{(\nu)} \in \mathbb{R}^4$ ist die Folge $a^{(\nu)} \circ x^{(\nu)}$ ebenfalls bestimmt divergent. Durch Anwendung von Automorphismen aus Λ und Übergang zu geeigneten Teilfolgen kann man o. B. d. A. annehmen, daß die $a^{(\nu)}$ in der Unterstruktur $D^{\mathbb{C}}_{\alpha,\varrho} = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ liegen. Die Matrix der Linksmultiplikation in $D^{\mathbb{H}}_{\alpha,\varrho}$ mit $a^{(\nu)} = a_1^{(\nu)} + i a_2^{(\nu)} \in D^{\mathbb{C}}_{\alpha,\varrho}$ hat dann die Gestalt

$$\begin{pmatrix} A_1^{(\nu)} & 0 \\ 0 & A_2^{(\nu)} \end{pmatrix},$$

wo $A_1^{(\nu)} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ die Matrix der Linksmultiplikation mit $a^{(\nu)}$ im Unterquasikörper $D^{\mathbb{C}}_{\alpha,\varrho} = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ und $A_2^{(\nu)}$ die Matrix der Multiplikation mit

$$\varrho(a_1^{(\nu)}) + i a_2^{(\nu)}$$

im Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen ist. Damit ergibt sich die Gültigkeit der zu beweisenden Stetigkeitsbedingung im Unendlichen aus ihrer Gültigkeit in den topologischen Quasikörpern $D^{\mathbb{C}}_{\alpha,\varrho}$ und $\mathbb{C}$.

Die Multiplikation von $D^{\mathbb{H}}_{\alpha,\varrho}$ ist genau dann beidseitig distributiv, wenn $\varrho: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein additiver Homomorphismus und folglich (aus Stetigkeitsgründen) linear ist, wegen $\varrho(1) = 1$ also genau für $\varrho = \mathrm{id}$. Angesichts $(j \circ i) \circ i = -j$ und $j \circ (i \circ i) = -j\alpha$ ist schließlich die Multiplikation von $D^{\mathbb{H}}_{\alpha,\mathrm{id}}$ genau für $\alpha = 1$ assoziativ ($D^{\mathbb{H}}_{1,\mathrm{id}}$ ist der Quaternionenkörper).

3.3. Klassifikationssatz. *Die* $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$*-Ebenen mit mindestens dreidimensionaler Scherungsgruppe sind genau die Ebenen, die sich über den Quasikörpern* $D^{\mathbb{H}}_{\alpha,\varrho}$ *aus* 3.2 *koordinatisieren lassen.*

Genau für $\varrho = \mathrm{id}$ *und* $\alpha = 1$ *erhält man dabei die Ebene über dem Quaternionenkörper.*

In allen anderen Fällen ist der uneigentliche Punkt s der zweiten (‚senkrechten') Koordinatenachse S der einzige Fixpunkt der Zusammenhangskomponente Γ *der Gruppe der stetigen affinen Kollineationen. In Koordinaten über* $D^{\mathbb{H}}_{\alpha,\varrho}$ *ist*

$$\Sigma = \{(x, y) \mapsto (a x a^{-1}, a y a^{-1});\ a \in \mathbb{H},\ |a| = 1\}$$

eine zu $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ *isomorphe Kollineationsgruppe und*

$$N = \{(x, y) \mapsto (x, y + p \circ x);\ p \in \mathrm{Pu}\,\mathbb{H}\} \cong \mathbb{R}^3$$

ein Normalteiler von Γ_o*, der aus Scherungen mit Achse S besteht. Der Kern der Ebene ist isomorph zu* $\mathbb{R}$*, so daß*

$$\mathbb{G}_{[o, L_\infty]} = \{(x, y) \mapsto (x r, y r);\ r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}\,.$$

Bezüglich Γ*-Bahnen in* L_∞ *und der Dimension von* Γ *bestehen folgende Möglichkeiten:*

(i) *Für alle* $w' \in L_\infty \setminus \{s\}$ *ist die Gruppe* $\Gamma_{[w', S]}$ *der Streckungen in* Γ *mit Achse S und Zentrum w' trivial,* Γ *läßt jede N-Bahn in* L_∞ *invariant, man hat*

$$\Gamma_o = N \cdot \Sigma \cdot (\mathbb{G}_{[o, L_\infty]})^1$$

und infolgedessen (zusammen mit der Translationsgruppe)

$$\dim \Gamma = 15\,.$$

(ii) *Die uneigentlichen Punkte* $w' \in L_\infty \setminus \{s\}$*, für die* $\Gamma_{[w', S]}$ *nichttrivial ist, bilden eine N-Bahn* $\mathfrak{X}$*. Für diese Punkte ist dann* $\Gamma_{[w', S]} \cong \mathbb{R}$*. Auf den beiden Zusammenhangskomponenten von* $L_\infty \setminus (\mathfrak{X} \cup \{s\})$ *wirkt* Γ *transitiv, und es ist*

$$\Gamma_o = N \cdot \Sigma \cdot \Gamma_{[w', S]} \cdot (\mathbb{G}_{[o, L_\infty]})^1,$$

also

$$\dim \Gamma = 16 .$$

Dies ist genau dann der Fall, wenn für ein $\bar{r} \in \mathbb{R}$ *die Einschränkungen von* ϱ *auf* $(-\infty, \bar{r}]$ *und* $[\bar{r}, \infty)$ *jeweils linear mit verschiedener Steigung sind. (Dabei ist* $\bar{r}$ *bestimmt als der konstante Realteil der Steigungen der Geraden durch die Punkte aus* $\mathfrak{X}$*).*

Bis auf Isomorphie kann man $\bar{r} = 0$ *annehmen (was bedeutet, daß in der Koordinatisierung der uneigentliche Punkt* w *der ersten Koordinatenachse zu* $\mathfrak{X}$ *gehört) und* ϱ *auf die Form*

$$\varrho(r) = r \quad \text{für} \quad r \geqslant 0$$

$$\varrho(r) = \varkappa \cdot r \quad \text{für} \quad r \leqslant 0$$

mit einer Knickkonstanten

$$\varkappa > 1$$

normieren; es ist dann

$$\Gamma_{[w,S]} = \{(x, y) \mapsto (x\, t, y);\ t > 0\} .$$

Man erhält so eine durch zwei Parameter $\alpha > 0$ *und* $\varkappa > 1$ *beschriebene Familie von Ebenen.*

(iii) *Für alle* $w' \in L_\infty \setminus \{s\}$ *ist* $\Gamma_{[w',S]} \cong \mathbb{R}$*. Die Ebene hat dann den Lenz-Typ V, d.h. die Gruppe* $\Gamma_{[s,S]}$ *der Scherungen mit Achse* S *ist vierdimensional und wirkt transitiv auf* $L_\infty \setminus \{s\}$*, und es ist*

$$\Gamma_o = \Gamma_{[s,S]} \cdot \Sigma \cdot \Gamma_{[w,S]} \cdot (\mathbb{G}_{[o,L_\infty]})^1 ,$$

also

$$\dim \Gamma = 17 .$$

Dieser Fall tritt genau für $\varrho = \mathrm{id}$ *ein (er läßt sich als Grenzfall der Ebenen aus* (ii) *auffassen, indem man* $\varkappa = 1$ *zuläßt).*

Bemerkungen. 1) Man kann zeigen, daß die Ebenen, die sich in Situation (ii) durch die beschriebene Normierung ergeben, für verschiedene Parameterwerte $\alpha, \varkappa$ untereinander nicht isomorph sind.

2) Die sich in Situation (iii) ergebenden nichtassoziativen Divisionsalgebren $D^{\mathbb{H}}_{\alpha,\mathrm{id}}$ und die von ihnen koordinatisierten Ebenen sind in [4] und [5; §4.2] bereits eingehend behandelt worden. Für verschiedene Parameterwerte $\alpha > 0$ ergeben sich nicht isomorphe Ebenen.

Beweis: (a) Sei Σ eine zu $SO_3(\mathbb{R})$ isomorphe Untergruppe von $\mathbb{G}_o^c$, welche die Ursprungsgerade S invariant läßt. Da Σ einfach ist, und da die Streckungsgruppe $\mathbb{G}_{[o, L_\infty]}$ zur multiplikativen Gruppe von $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{H}$ isomorph ist (1.2) und folglich keine zu $SO_3(\mathbb{R})$ isomorphe Untergruppe enthalten kann, wirkt Σ treu auf L_∞, und hat (siehe 2.1) eine Kreislinie von Fixpunkten in L_∞. Insbesondere kann Σ keine nichtidentischen Kollineationen mit Achse S enthalten (da eine solche höchstens zwei Fixpunkte in L_∞ hätte) und wirkt also auch auf S treu. Entsprechend der bereits benutzten Darstellung von $SO_3(\mathbb{R})$ mittels Quaternionen läßt sich demnach S als Untervektorraum von $\mathbb{A} = \mathbb{R}^8$ so mit dem $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{H}$ identifizieren, daß

$$\Sigma | S = \{\mathbb{H} \to \mathbb{H} : y \mapsto a y a^{-1};\ a \in \mathbb{H}, |a| = 1\}.$$

Wir betrachten nun zwei weitere unter Σ invariante Ursprungsgeraden W und E. Unter Wahrung der bereits vorgenommenen Identifikation von S mit $\mathbb{H}$ identifizieren wir $\mathbb{A}$ so mit $\mathbb{H} \times \mathbb{H}$, daß

$$S = \mathbb{H} \times \{0\}, \quad W = \{0\} \times \mathbb{H}, \quad E = \{(x, x);\ x \in \mathbb{H}\}.$$

Wegen der Invarianz von E und W schreibt sich Σ in diesen quaternalen Koordinaten, die im folgenden stets zugrunde gelegt seien, als

$$\Sigma = \{(x, y) \mapsto (a x a^{-1}, a y a^{-1});\ a \in \mathbb{H},\ |a| = 1\}.$$

Sei nun Q der topologische Quasikörper, der die Ebene bezüglich W und S als Koordinatenachsen und $(1, 1) \in \mathbb{H} \times \mathbb{H} = \mathbb{A}$ als Einheitspunkt koordinatisiert. Die zugrunde liegende additive Gruppe von Q ist nach dem Gesagten bereits mit der additiven Gruppe von $\mathbb{H}$ identifiziert. Zur Unterscheidung von der Quaternionenmultiplikation, die wir wie bisher notieren, schreiben wir die Quasikörpermultiplikation in Q mit dem Zeichen $\circ$.

Der gewählte Einheitspunkt ist ein Fixpunkt von Σ, was sich bekanntlich in die Aussage übersetzen läßt, daß die von Σ auf $S = Q = \mathbb{H}$ induzierte Gruppe

$$\Lambda := \{\mathbb{H} \to \mathbb{H} : x \mapsto a x a^{-1}; a \in \mathbb{H}, |a| = 1\} \cong SO_3(\mathbb{R})$$

aus Automorphismen des Quasikörpers Q besteht ([2; Satz 11, S. 153], siehe auch [15; 8.3 Satz 9, S. 209]). Die einzigen Λ-invarianten $\mathbb{R}$-Untervektorräume von $Q = \mathbb{H}$ sind $1 \cdot \mathbb{R} = \mathbb{R} \subseteq \mathbb{H}$ und der Unterraum

$$\mathbb{P} := \mathrm{Pu}\,\mathbb{H} \subseteq Q$$

der reinen Elemente. — Aufgrund dieser Tatsachen zeigen wir nun:

(b) *Ist Q kein Körper, so besteht der Kern von Q genau aus den reellen Vielfachen der* 1:

$$\operatorname{Ker} Q = 1 \cdot \mathbb{R} = \mathbb{R}.$$

Für alle $r \in \mathbb{R} \subseteq Q$ und alle $x \in Q$ gilt

$$x \circ r = x r. \tag{1}$$

Für $r \in \mathbb{R}$ und $p \in \mathbb{P}$ gilt andererseits

$$r \circ p = p \cdot \varrho(r), \tag{2}$$

wo

$$\varrho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

ein Homöomorphismus mit

$$\varrho(0) = 0 \quad \textit{und} \quad \varrho(1) = 1$$

ist.

Die Beziehung (1) drückt dabei nur aus, wie bei unseren Identifikationen die $\mathbb{R}$-Vektorraumstruktur mit der Vektorraumstruktur über dem Kern zusammenhängt und daß $\operatorname{Ker} Q \supseteq \mathbb{R}$, vgl. 1.2. Insbesondere ist $\operatorname{Ker} Q$ ein Λ-invarianter $\mathbb{R}$-Untervektorraum von Q, der 1 enthält, und daher entweder gleich $1 \cdot \mathbb{R}$ oder ganz Q; im zweiten Fall ist Q ein Körper.

Der Stabilisator Λ_p von $p \in \mathbb{P} \setminus \{0\}$ in der Automorphismengruppe Λ läßt auch $r \circ p$ für $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \subseteq Q$ fest. Da der 3-dimensionale Unterraum $r \circ \mathbb{P}$ invariant unter Λ und daher gleich $\mathbb{P}$ ist, und da Λ_p in $\mathbb{P}$ die Rotationen um die durch p bestimmte Achse induziert und folglich in $\mathbb{P}$ nur die reellen Vielfachen von p festläßt, ist somit

$$r \circ p = p \cdot \varrho(r) \quad \text{mit } \varrho(r) \in \mathbb{R},$$

wobei $\varrho(1) = 1$. Dabei ist $\varrho(r)$ unabhängig von p, weil $\Lambda \cong \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ transitiv auf den Richtungen von $\mathbb{P} = \mathbb{R}^3$ operiert. Für $r = 0$ ist (2) trivialerweise mit $\varrho(0) = 0$ erfüllt. Da $Q \to Q$: $x \mapsto x \circ p$ wegen $p \neq 0$ ein Homöomorphismus ist, muß für $r \to \pm\infty$ auch $\varrho(r)$ divergieren und $r \mapsto \varrho(r)$ ein Homöomorphismus von $\mathbb{R}$ auf sich sein.

(c) Entsprechend den Voraussetzungen 3.1 und gemäß 2.1 sei nun N eine zu $\mathbb{R}^3$ isomorphe Gruppe von Scherungen mit Achse S, die von Σ normalisiert wird. N stammt nach der Beschreibung 1.3 der Scherungen durch den Distributor $\mathrm{D}Q$ von einem 3-dimensionalen

Untervektorraum V von $Q = \mathbb{R}^4$ mit $V \subseteq DQ$ in der Weise, daß sich N in Koordinaten über Q als

$$N = \{(x, y) \mapsto (x, y + p \circ x);\ p \in V\}$$

schreibt. Da N von Σ normalisiert wird, muß V invariant unter der Σ entsprechenden Automorphismengruppe $\Lambda \cong \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ von Q und daher

$$V = \mathbb{P} = \mathrm{Pu}\,\mathbb{H}$$

sein. Die Bedingung $\mathbb{P} = V \subseteq DQ$ lautet nun ausgeschrieben

$$\bigwedge p \in \mathbb{P} \bigwedge a, x \in Q\colon (p + a) \circ x = p \circ x + a \circ x\,. \tag{3}$$

Mit $a = -p$ erhält man daraus $0 = p \circ x + (-p) \circ x$, also $(-p) \circ x = -(p \circ x)$. Für $m, n \in \mathbb{N}$ ist ferner $(p\,n) \circ x = (p + p + \ldots + p) \circ x = p \circ x + p \circ x + \ldots + p \circ x = (p \circ x)\,n$ und folglich $[(p \cdot m/n) \circ x]\,n = (p\,m) \circ x = (p \circ x)\,m$, also $(p \cdot m/n) \circ x = (p \circ x) \cdot m/n$. Damit ist die Aussage

$$\bigwedge r \in \mathbb{R} \bigwedge p \in \mathbb{P} \bigwedge x \in Q\colon (p\,r) \circ x = (p \circ x)\,r \tag{4}$$

jedenfalls für rationale r gezeigt; die volle Aussage ergibt sich dann aus Stetigkeitsgründen.

Für $p \in \mathbb{P}$ ist $p \circ p$ fest unter Λ_p und liegt also in $\mathbb{R} + p \cdot \mathbb{R}$. Nun existiert ein Automorphismus $\lambda \in \Lambda \cong \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ mit $\lambda(p) = -p$; nach (4) und (1) ist $\lambda(p \circ p) = (-p) \circ (-p) = (p \circ (-p)) \cdot (-1) = (p \circ p \circ (-1)) \circ (-1) = p \circ p$ und daher sogar $p \circ p \in \mathbb{R}$. Wegen $(1 + p\,r) \circ (1 - p\,r) = 1 - (p \circ p)\,r^2$ $(r \in \mathbb{R})$ und der Nullteilerfreiheit von Q muß dabei

$$p \circ p < 0$$

sein. Diese Informationen genügen nun, um ebenso wie für die Divisionsalgebren in [4; §2, insbesondere 2.1, 2.3] zu schließen, daß eine Orthogonalbasis e_1, e_2, e_3 von $\mathbb{P} = \mathbb{R}^3$ existiert mit $|e_1| = |e_2| = |e_3|$ und $e_1 \circ e_2 = e_3 = -(e_1 \circ e_2)$. Unter allfälliger Abänderung der Identifikation von Q mit $\mathbb{H}$ durch eine geeignete skalare Streckung der Elemente von $\mathbb{P}$ kann man annehmen, daß e_1, e_2, e_3 eine Orthonormalbasis positiver Orientierung von $\mathbb{P}$ ist. Durch Anwendung eines geeigneten Automorphismus aus Λ ergibt sich dann

$$i \circ j = k = -j \circ i\,.$$

Da i, j, k durch einen Automorphismus aus Λ zyklisch vertauscht werden können, ist dann auch

$$j \circ k = i = -k \circ j, \quad k \circ i = j = -i \circ k.$$

Ferner gilt nach dem Gesagten

$$i \circ i = j \circ j = k \circ k = -\alpha$$

für eine Konstante α mit $0 < \alpha \in \mathbb{R}$. Da nach (3) bei Multiplikation von Summen von reinen Elementen auch das zweite Distributivgesetz gilt und nach (4) somit $\mathbb{R}$-linear gerechnet werden kann, folgt hieraus im Vergleich zur Quaternionenmultiplikation

$$\bigwedge p, q \in \mathbb{P}\colon \operatorname{Pu}(p \circ q) = \operatorname{Pu}(p \cdot q); \ \operatorname{Re}(p \circ q) = \alpha \cdot \operatorname{Re}(p \cdot q). \qquad (5)$$

Mit den Beziehungen (1)—(5) läßt sich dann die Multiplikation in Q durch Zerlegung der Elemente in ihren Realteil und ihren reinen Teil vollständig bestimmen; es ergibt sich

$$\begin{aligned} a \circ x &= (\operatorname{Re} a + \operatorname{Pu} a) \circ (\operatorname{Re} x + \operatorname{Pu} x) = \\ &= \operatorname{Re} a \cdot \operatorname{Re} x + \operatorname{Pu} x \cdot \varrho(\operatorname{Re} a) + \operatorname{Pu} a \cdot \operatorname{Re} x + \\ &\quad + \alpha \cdot \operatorname{Re}(\operatorname{Pu} a \cdot \operatorname{Pu} x) + \operatorname{Pu}(\operatorname{Pu} a \cdot \operatorname{Pu} x). \end{aligned}$$

Dies ist die Multiplikation des Quasikörpers $D^{\mathbb{H}}_{\alpha,\varrho}$ in der Beschreibung (*) aus 3.2; es liegt also die Ebene über diesem Quasikörper vor.

Die Ebene ist desarguessch genau dann, wenn $D^{\mathbb{H}}_{\alpha,\varrho}$ ein Körper ist; nach 3.2 ist dies genau für $\varrho = \mathrm{id}$ und $\alpha = 1$ der Fall. Im folgenden soll dieser Fall außer Betracht gelassen werden. —

Die im Satz behaupteten Alternativen (i)—(iii) ergeben sich nun durch Präzisierung der entsprechenden Aussagen von Satz 2.3. Die Präzisierungen werden dabei anhand des folgenden Hilfssatzes hergeleitet werden:

(d) **Hilfssatz.** *Die betrachtete Ebene sei nicht vom Lenz-Typ V. Dann hat jede zu $\mathbb{R}$ isomorphe Untergruppe Y von Γ_o, die Σ zentralisiert und effektiv auf L_∞ wirkt, in L_∞ neben s noch genau einen zweiten Fixpunkt $\bar{w}$. Die Steigung $\bar{r}$ der affinen Geraden durch $\bar{w}$ (in der Koordinatisierung über $D^{\mathbb{H}}_{\alpha,\varrho}$) ist reell (d. h. liegt in dem Unterkörper $\mathbb{R} = 1 \cdot \mathbb{R}$ von $D^{\mathbb{H}}_{\alpha,\varrho}$). Eine solche Untergruppe existiert genau dann, wenn die Einschränkung von ϱ auf $(-\infty, \bar{r}]$ und $[\bar{r}, \infty)$ linear ist. Das Erzeugnis $Y \cdot (\mathbb{G}_{[o, L_\infty]})^1$ enthält dann eine zu $\mathbb{R}$ isomorphe Untergruppe Y', die aus Achsenstreckungen mit Achse S und Zentrum $\bar{w}$ besteht.*

Beweis: Nach 2.3 bleibt unter Γ_o der uneigentliche Punkt s von S fest und also S invariant. Die Elemente von Y haben daher in Koordinaten über $Q = D^{\mathbb{H}}_{\alpha,\varrho}$ die Gestalt

$$v\colon (x,y)\mapsto (A(x), C(x) + D(y)),$$

wobei A, C und D lineare Abbildungen von $\mathbb{R}^4 = Q$ in sich sind; A und D sind dabei invertierbar. Da Y im Zentralisator von Σ liegt, müssen A und D mit den Automorphismen aus $\Lambda \cong \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ vertauschbar sein; wegen der Transitivität von Σ auf den reinen Elementen vom Betrag 1 ist also

$$A(x) = \operatorname{Re} x \cdot r_1 + \operatorname{Pu} x \cdot r_2$$

$$D(y) = \operatorname{Re} y \cdot t_1 + \operatorname{Pu} y \cdot t_2,$$

wobei die reellen Koeffizienten r_ν, t_ν wegen des Zusammenhangs von Y positiv sind. Nun berücksichtigen wir noch, daß N ein Normalteiler von Γ_o ist. Die Elemente von N sind die Abbildungen

$$\eta_p\colon (x,y)\mapsto (x, y + p\circ x) \quad \text{mit } p\in\mathbb{P};$$

aus der Normalisierungsbedingung, daß speziell $v\eta_i v^{-1} = \eta_p$ für ein geeignetes $p\in\mathbb{P}$ sein muß, ergibt sich für A und D durch Einsetzen und kurze Rechnung $D(i\circ A^{-1}(x)) = p\circ x$ für alle $x\in Q$. Mit $x = 1$ folgt $i\cdot t_2 = p\cdot r_1$, also $p = i\cdot t_2 r_1^{-1}$, mit $x = j$ dann $k\cdot t_2 = k\cdot r_2 t_2 r_1^{-1}$, d. h.

$$r_2 = r_1$$

und mit $x = i$ schließlich $-\alpha t_1 = -\alpha r_2 t_2 r_1^{-1} = -\alpha t_2$, also

$$t_2 = t_1.$$

Somit hat v die Gestalt

$$v\colon (x,y)\mapsto (x\cdot r, C(x) + y\cdot t)$$

wobei $0 < r, t\in\mathbb{R}$. Durch Komposition mit der reellen zentrischen Streckung

$$((x,y)\mapsto (x\cdot t^{-1}, y\cdot t^{-1})) \in (\mathbb{G}_{[o,L_\infty]})^1$$

läßt sich v zu der Kollineation $(x,y)\mapsto (x\cdot r t^{-1}, C(x)\cdot t^{-1} + y)$ modifizieren, welche ersichtlich die Achse S punktweise festläßt. Indem man eine solche Modifikation auf alle Elemente von Y anwendet, erhält man eine zu $\mathbb{R}$ isomorphe Untergruppe Y' von $Y\cdot(\mathbb{G}_{[o,L_\infty]})^1$, die aus Kollineationen mit Achse S besteht und auf L_∞ wirkt wie Y selbst. Wegen der Kommutativität haben alle Kollineationen aus Y' dasselbe Zentrum $\bar{w}$, das auf der Fixgeraden L_∞ liegt. Da Y' aus axialen Kollineationen mit Achse S besteht, hat Y' auf L_∞ außer s und $\bar{w}$ keine weiteren Fixpunkte. Somit ist $\bar{w}$ ein Fixpunkt von Σ, denn mit Y liegt auch Y' noch im Zentralisator von Σ. Damit folgt auch $Y'\cap N = \{\mathrm{id}\}$, da Σ auf jeder N-Bahn in L_∞ genau einen Fixpunkt hat (2.2) und N als Scherungsgruppe frei auf $L_\infty \setminus \{s\}$ operiert. Ferner ist $\bar{w} \neq s$: denn sonst wäre auch Y' eine Scherungsgruppe und würde zusammen mit der komplementären Gruppe N eine vierdimensionale Gruppe von Scherungen erzeugen, die dann transitiv auf $L_\infty \setminus \{s\} \cong R^4$ wirken würde; es läge also eine Ebene vom Lenz-Typ V vor, entgegen den Voraussetzungen.

Nun soll Y' in Koordinaten über $D^{\mathbb{H}}_{\alpha,\varrho}$ genau angegeben werden; das liefert dann Aufschlüsse hinsichtlich der besonderen Gestalt von ϱ. Da Σ zentralisiert wird, permutiert Y' das System der von S verschiedenen unter Σ invarianten Ursprungsgeraden. Es handelt sich dabei genau um die Ursprungsgeraden, deren Steigung unter der von Σ induzierten Automorphismengruppe Δ von $D^{\mathbb{H}}_{\alpha,\varrho}$ festbleibt, also im Unterkörper $\mathbb{R} = 1 \cdot \mathbb{R}$ von $D^{\mathbb{H}}_{\alpha,\varrho}$ liegt, mit anderen Worten um die Geraden

$$W_r = \{(x, \operatorname{Re} x \cdot r + \operatorname{Pu} x \cdot \varrho(r));\ x \in D^{\mathbb{H}}_{\alpha,\varrho}\} \quad \text{mit } r \in \mathbb{R}.$$

Da $\bar{w}$ ein Fixpunkt sowohl von Σ als auch von Y' ist, erhält man für ein bestimmtes $\bar{r} \in \mathbb{R}$ insbesondere die Ursprungsgerade durch $\bar{w}$, und diese ist invariant unter Y'. Nun haben wir schon ermittelt, daß Y' aus Kollineationen

$$v_t'\colon (x, y) \mapsto (x \cdot t, C_t'(x) + y) \tag{6}$$

besteht, wobei C_t' eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung von $D^{\mathbb{H}}_{\alpha,\varrho}$ in sich und $t > 0$ ist. Die Invarianz von $W_{\bar{r}}$ unter v_t' bedeutet

$$C_t'(x) = \operatorname{Re} x \cdot \bar{r}(t-1) + \operatorname{Pu} x \cdot \varrho(\bar{r}) \cdot (t-1); \tag{6'}$$

damit ist v_t' und $Y' = \{v_t';\ t > 0\}$ vollständig bestimmt. — Die Ursprungsgerade $W_{\bar{r}-1}$ geht nun unter v_t' über in den Unterraum $\{(x t, \operatorname{Re} x \cdot (\bar{r} t - 1) + \operatorname{Pu} x \cdot (\varrho(\bar{r}) \cdot (t-1) + \varrho(\bar{r}-1))\}$. Dabei muß sich wie gesagt wieder eine der Ursprungsgeraden W_r ergeben. Der Vergleich zeigt, daß für $t > 0$ und $r = \bar{r} - 1/t$, d.h. für $r \in (-\infty, \bar{r}]$ und $t = (\bar{r} - r)^{-1}$, die Beziehung

$$\begin{aligned} \varrho(r) &= (\varrho(\bar{r}) \cdot (t-1) + \varrho(\bar{r}-1)) \cdot t^{-1} = \\ &= \varrho(\bar{r}) \cdot (1 - (\bar{r} - r)) + \varrho(\bar{r}-1) \cdot (\bar{r} - r) = \\ &= \varrho(\bar{r}) + (\varrho(\bar{r}) - \varrho(\bar{r}-1)) \cdot (r - \bar{r}) \end{aligned}$$

gilt; sie besagt, daß die Einschränkung von ϱ auf $(-\infty, \bar{r}]$ linear ist. Ebenso ergibt sich durch Abbildung der Ursprungsgeraden $W_{\bar{r}+1}$ die

Linearität von ϱ auf $[\bar{r}, \infty)$. Umgekehrt verifiziert man direkt, daß unter diesen Linearitätsbedingungen die durch (6) und (6′) definierten Abbildungen v_t' eine zu $\mathbb{R}$ isomorphe Gruppe von affinen Streckungen der Ebene über $D^{\mathbb{H}}_{\alpha,\varrho}$ mit Achse S bilden, welche von Σ zentralisiert wird. Damit ist Hilfssatz (d) bewiesen.

(e) Nunmehr konkretisieren wir die Fallunterscheidungen des Satzes 2.3.

Fall (i): Jede N-Bahn in L_∞ ist invariant unter Γ. Nach 2.3 ist dann $\Gamma_o = N \cdot \Sigma \cdot (\mathbb{G}_{[o, L_\infty]})^1$. Daran liest man unmittelbar ab, daß die Gruppe der axialen Kollineationen aus Γ mit Achse S sich in diesem Fall mit der Scherungsgruppe N deckt und also keine Achsenstreckungen enthält.

Fall (ii): Γ läßt genau eine N-Bahn $\mathfrak{X}$ in $L_\infty \setminus \{s\}$ invariant. Sei $\bar{w}$ der eindeutig bestimmte Fixpunkt von Σ in $\mathfrak{X}$ (2.2). Nach 2.3 existiert eine nichttriviale Kompressionsuntergruppe Y bezüglich $\bar{w}$ und s im Sinne des Lemmas über Achsenstandgruppen 1.4, also eine zu $\mathbb{R}$ isomorphe, $\bar{w}$ und s festlassende Untergruppe von $\mathrm{S}\Gamma_o$, die die kompakte Gruppe Σ zentralisiert (um dies zu erreichen, wurde $\bar{w}$ als Fixpunkt von Σ gewählt). Nach Hilfssatz (d) hat das Erzeugnis $Y \cdot (\mathbb{G}_{[o, L_\infty]})^1$ eine zu $\mathbb{R}$ isomorphe Untergruppe Y', die aus Streckungen mit Achse S und Zentrum $\bar{w}$ besteht. Es ist dann $Y \cdot (\mathbb{G}_{[o, L_\infty]})^1 = Y' \cdot (\mathbb{G}_{[o, L_\infty]})^1$ und nach 2.3 also

$$\Gamma_0 = N \cdot \Sigma \cdot Y' \cdot (\mathbb{G}_{[o, L_\infty]})^1 .$$

Die Gruppe der axialen Kollineationen aus Γ mit Achse S ist somit das semidirekte Produkt $N \cdot Y'$, so daß sich für die Untergruppe $\Gamma_{[\bar{w}, S]}$ der Streckungen mit Achse S und Zentrum $\bar{w}$

$$\Gamma_{[\bar{w}, S]} = Y' \cong \mathbb{R}$$

ergibt. Nach [10; Corollary 1.5 (iii)] ist insgesamt die Menge aller uneigentlichen Punkte $w' \in L_\infty \setminus \{s\}$, für die $\Gamma_{[w', S]}$ nicht trivial ist, genau die Bahn von $\bar{w}$ unter der Scherungsgruppe N, also $\mathfrak{X}$.

Die in der Behauptung zu Fall (ii) angegebene Linearitätsaussage über ϱ wurde in Hilfssatz (d) bewiesen. Dabei kann man erreichen, daß die Steigung $\bar{r}$ der zu $\bar{w}$ gehörigen Ursprungsgeraden 0 wird, indem man diese als Koordinatenachse W für die Koordinatisierung wählt (in der Koordinatisierung der betrachteten Ebenen, wie wir sie in (a) bis (c) durchgeführt haben, war ja W unter den von S verschiedenen Σ-invarianten Ursprungsgeraden beliebig wählbar). ϱ ist dann linear auf

$(-\infty, 0]$ und $[0, \infty)$, d.h. die Einschränkung auf $[0, \infty)$ ist wegen $\varrho(1) = 1$ die Identität, und für $r \leqslant 0$ ist $\varrho(r) = \varkappa \cdot r$ mit $0 < \varkappa \neq 1$. Bis auf Isomorphie der Ebene kann dabei erreicht werden, daß der Knickfaktor $\varkappa > 1$ ist: die Abbildung $(x, y) \mapsto (x, -\operatorname{Re} y \cdot \varkappa - \operatorname{Pu} y)$ ist nämlich ein Isomorphismus der Ebene zum Knickfaktor $\varkappa$ auf die Ebene zum Knickfaktor $1/\varkappa$, wie man unmittelbar verifiziert. In einer solchen Koordinatisierung (mit $\bar{r} = 0$) erhält man schließlich aus (6) und (6′) für die Gruppe der Achsenstreckungen mit Achse S und Zentrum $\bar{w} = w$ die Beschreibung

$$\Gamma_{[\bar{w}, S]} = Y' = \{(x, y) \mapsto (x\,t, y);\ t > 0\}. \tag{7}$$

Damit sind alle zu Fall (ii) behaupteten Aussagen bewiesen.

Fall (iii): Γ ist transitiv auf $L_\infty \setminus \{s\}$. Nach 2.3 enthält dann der Zentralisator von Σ in Γ_o eine zu $\mathbb{R}$ isomorphe Untergruppe, die frei auf $L_\infty \setminus \{s\}$ wirkt. Nach der ersten Aussage von Hilfssatz (d) ist dies nur möglich, wenn die Ebene Lenz-Typ V hat; nach (c) ist dann $\varrho = \mathrm{id}$.

In der Ebene über $D^{\mathbb{H}}_{\alpha, \mathrm{id}}$ hat man nun die folgenden beiden Gruppen von Kollineationen: eine zusätzliche Einparametergruppe von Scherungen

$$T = \{(x, y) \mapsto (x, y + r\,x);\ r \in \mathbb{R} \subseteq D^{\mathbb{H}}_{\alpha, \mathrm{id}}\}$$

und die Gruppe

$$Y'' = \{(x, y) \mapsto (x\,t, y\,t^{-1});\ t > 0\},$$

die aus Achsenstreckungen mit Achse S und Zentrum w durch Modifikation mit geeigneten skalaren Streckungen entsteht; diese Modifikation wurde gerade so vorgenommen, daß die Elemente von Y'' ebenso wie die von T Determinante 1 haben, also in $\mathrm{S}\Gamma_o$ liegen. T und Y'' zentralisieren Σ, wie man unmittelbar verifiziert, und erzeugen also die nach 2.3 (iii) zu L_2 isomorphe Zusammenhangskomponente Z des Zentralisators von Σ in $S\Gamma_o$. Mit N als Komplement erzeugt T die vierdimensionale auf $L_\infty \setminus \{s\}$ scharf transitive Scherungsgruppe $\Gamma_{[s, S]}$. Nach 2.3 (iii) ist

$$\Gamma_o = N \cdot Z \cdot \Sigma \cdot (\mathbb{G}_{[o, L_\infty]})^1 = N \cdot T \cdot Y'' \cdot \Sigma \cdot (\mathbb{G}_{[o, L_\infty]})^1 = \Gamma_{[s, S]} \cdot \Sigma \cdot Y'' \cdot (\mathbb{G}_{[o, L_\infty]})^1.$$

Daraus gewinnt man für die Streckungsgruppe $\Gamma_{[w, S]}$ auch in diesem Fall wiederum die Beschreibung (7) und wegen $Y'' \subseteq \Gamma_{[w, S]} \cdot (\mathbb{G}_{[o, L_\infty]})^1$ insgesamt $\Gamma_o = \Gamma_{[s, S]} \cdot \Sigma \cdot \Gamma_{[w, S]} \cdot (\mathbb{G}_{[o, L_\infty]})^1$, wie behauptet.

Literatur

[1] ANDRÉ, J.: Über nicht-desarguessche Ebenen mit transitiver Translationsgruppe. Math. Z. **60**, 156—186 (1954).

[2] ANDRÉ, J.: Projektive Ebenen über Fastkörpern. Math. Z. **62**, 137—160 (1955).

[3] HÄHL, H.: Automorphismengruppen von lokalkompakten zusammenhängenden Quasikörpern und Translationsebenen. Geom. Dedicata **4**, 305—321 (1975).

[4] HÄHL, H.: Vierdimensionale reelle Divisionsalgebren mit dreidimensionaler Automorphismengruppe. Geom. Dedicata **4**, 323—331 (1975).

[5] HÄHL, H.: Geometrisch homogene vierdimensionale reelle Divisionsalgebren. Geom. Dedicata **4**, 333—361 (1975).

[6] HÄHL, H.: Zur Klassifikation von 8- und 16-dimensionalen lokalkompakten Translationsebenen nach ihren Kollineationsgruppen. Math. Z. **159**, 259—294 (1978).

[7] HÄHL, H.: Lokalkompakte zusammenhängende Translationsebenen mit großen Sphärenbahnen auf der Translationsachse. Resultate Math. **2**, 62—87 (1979).

[8] HÄHL, H.: Achtdimensionale lokalkompakte Translationsebenen mit großen Streckungsgruppen. Arch. Math. **34**, 231—242 (1980).

[9] HÄHL, H.: Achtdimensionale lokalkompakte Translationsebenen mit großen kompakten Kollineationsgruppen. Mh. Math. **90**, 207—218 (1980).

[10] HÄHL, H.: Homologies and elations in compact, connected projective planes. Topology Appl. **12**, 49—63 (1981).

[11] HÄHL, H.: Kriterien für lokalkompakte topologische Quasikörper. Arch. Math. **38**, 273—279 (1982).

[12] HÄHL, H.: Zur Kollineationsgruppe von achtdimensionalen lokalkompakten Translationsebenen. Abh. Math. Sem. Hamburg **53**, 84—102 (1983).

[13] HÄHL, H.: Achtdimensionale lokalkompakte Translationsebenen mit mindestens 17-dimensionalen Kollineationsgruppen. Preprint.

[14] MONTGOMERY, D., ZIPPIN, L.: A class of transformation groups in E^n. Amer. J. Math. **65**, 601—608 (1943).

[15] PICKERT, G.: Projektive Ebenen. Berlin–Göttingen–Heidelberg: Springer. 1955.

[16] PONTRJAGIN, L.: Topologische Gruppen, Band I. Leipzig: Teubner. 1955.

[17] PORTEOUS, I. R.: Topological Geometry. London: van Nostrand—Reinhold. 1969.

[18] RICHARDSON, R. W.: Groups acting on the 4-sphere. Ill. J. Math. **5**, 474—485 (1961).

[19] SALZMANN, H.: Topological planes. Advances Math. **2**, 1—60 (1967).

H. HÄHL
Mathematisches Seminar
der Universität Kiel
Olshausenstraße 40
D-2300 Kiel, Bundesrepublik Deutschland