

## Charakterisierung der kompakten, zusammenhängenden Moufang-Hughes-Ebenen anhand ihrer Kollineationen

Hermann Hähl

Mathematisches Seminar der Universität Kiel, Olshausenstr. 40,  
D-2300 Kiel 1, Bundesrepublik Deutschland

### 1. Einleitung

1.1. Die allgemeine Fragestellung, zu der die vorliegende Arbeit einen Beitrag leistet, lautet:

Gegeben sei eine projektive Ebene  $\mathcal{P}$  mit einer desarguesschen Baer-Unterebene  $\mathcal{D}$  derart, daß jede projektive Kollineation von  $\mathcal{D}$  sich zu einer Kollineation von  $\mathcal{P}$  fortsetzen läßt. Was kann man über  $\mathcal{P}$  aussagen?

Eine allgemeine Lösung dieses Problems scheint schwierig zu sein. Unter geeigneten Zusatzvoraussetzungen wird man jedoch zu befriedigenden Antworten gelangen können. Im endlichen Fall etwa ergeben sich so genau die Hughes-Ebenen, siehe [5].

1.2. Hier soll die Fragestellung auf topologische projektive Ebenen  $\mathcal{P}$  mit kompakter, zusammenhängender Punktmenge  $P$  beschränkt werden, wobei wir noch annehmen, daß die Punktmenge  $D$  der Baer-Unterebene  $\mathcal{D}$  abgeschlossen in  $P$  ist.  $\mathcal{D}$  ist dann selbst eine kompakte, topologische Ebene. Eine affine Unterebene von  $\mathcal{D}$  ist homöomorph zu einer affinen Geraden von  $\mathcal{P}$  ([26: §1(9)], siehe auch 2.1) und daher ebenfalls zusammenhängend ([22]). Da nach Annahme desarguessch, ist  $\mathcal{D}$  somit die Ebene  $\mathcal{P}_2(\mathbb{K})$  über einem lokalkompakten zusammenhängenden topologischen Schiefkörper  $\mathbb{K}$ , nach dem Satz von Pontrjagin also über  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$  oder dem Quaternionenschiefkörper  $\mathbb{H}$  (siehe [12]). Die beiden ersten Fälle wurden von Salzmann abschließend behandelt: im Fall  $\mathcal{D} \cong \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$  folgt  $\mathcal{P} \cong \mathcal{P}_2(\mathbb{C})$  (siehe [25]), und im Fall  $\mathcal{D} \cong \mathcal{P}_2(\mathbb{C})$  ergibt sich in [29], daß  $\mathcal{P}$  eine der dort näher untersuchten verallgemeinerten Hughes-Ebenen über den Fastkörpern von Kalscheuer-Tits [11, 35] ist.

1.3. Es bleibt der Fall  $\mathcal{D} \cong \mathcal{P}_2(\mathbb{H})$ . In [30] konstruiert Salzmann ausgehend von derselben Fragestellung in diesem Fall eine Familie von Beispielen für  $\mathcal{P}$ , die sich zum klassischen Beispiel (der Moufang-Ebene  $\mathcal{P}_2(\mathbb{O})$  über der Oktavenalgebra  $\mathbb{O}$ ) ähnlich verhalten wie im Fall  $\mathcal{D} \cong \mathcal{P}_2(\mathbb{C})$  die genannten verallgemeinerten Hughes-Ebenen zu  $\mathcal{P}_2(\mathbb{H})$ . Wir nennen diese Beispiele daher im folgenden *Moufang-Hughes-Ebenen*. (Es handelt sich allerdings weder um Moufang-Ebenen noch um Hughes-Ebenen im eigentlichen Sinn, siehe 1.7).

Hier soll nun gezeigt werden, daß diese Beispiele durch die genannten Eigenschaften charakterisiert werden, d.h. daß die beschriebene Situation für  $\mathcal{D} \cong \mathcal{P}_2(\mathbb{H})$  notwendig auf diese Moufang-Hughes-Ebenen führt; damit ist dann die eingangs gestellte Frage für kompakte, zusammenhängende Ebenen in allen Fällen vollständig beantwortet.

Nur unter weiteren einschneidenden Einschränkungen nimmt schon Salzmann in [30: Satz 1] eine solche Charakterisierung vor, die allerdings so angelegt ist, daß sie nur zur klassischen Moufang-Ebene  $\mathcal{P}_2(\mathbb{O})$  führt und daß die übrigen Moufang-Hughes-Ebenen von vornherein ausgeschlossen bleiben. Die dort verwendeten Ideen gehen jedoch auch hier in die Charakterisierung der Moufang-Hughes-Ebenen ein, die infolgedessen eine natürliche Ausweitung und Ergänzung von [30: Satz 1] ist.

Hier nun nochmals die genaue Formulierung unseres Hauptergebnisses:

**1.4. Charakterisierungssatz.** *Die kompakten projektiven Ebenen, die eine zu  $\mathcal{P}_2(\mathbb{H})$  isomorphe abgeschlossene Baer-Unterebene  $\mathcal{D}$  enthalten so, daß jede Kollineation von  $\mathcal{D}$  sich zu einer Kollineation der ganzen Ebene fortsetzen läßt, sind bis auf Isomorphie genau die Moufang-Hughes-Ebenen.*

Eine Beschreibung der Moufang-Hughes-Ebenen und ihrer Kollineationen findet man in 3.15 und § 4.

Zum Beweis sei vorab bemerkt, daß Teile des Aufbaus und eine Reihe von Argumentationsschritten sinngemäß aus den Beweisen von Salzmann ([25, 29]) für die anderen Fälle  $\mathcal{D} \cong \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$  und  $\mathcal{D} \cong \mathcal{P}_2(\mathbb{C})$  übernommen werden können. Einige zentrale Schlüsse jedoch, bei denen dort davon Gebrauch gemacht wurde, daß die Unterebene  $\mathcal{D}$  papposch ist, müssen hier für die nicht-papposche Unterebene  $\mathcal{D} \cong \mathcal{P}_2(\mathbb{H})$  ganz anders geführt werden. Umgekehrt könnte man hingegen die anderen Fälle ohne weiteres in die hier geführte Argumentation einreihen und auf diese Weise eine einheitliche Erörterung des gesamten Problemkreises erreichen. Es wurde darauf verzichtet, das im einzelnen auszuführen.

An den Beweis von Satz 1.4 (siehe § 3) schließt sich in § 4 noch die Erörterung einiger Fragen bezüglich

**Kollineationen von Moufang-Hughes-Ebenen** an, deren Ergebnisse hier noch kurz dargestellt seien.

**1.5.** In der Situation des Charakterisierungssatzes sei  $\Gamma$  die Gruppe aller stetigen Kollineationen von  $\mathcal{P}$ , versehen mit der kompakt-offenen Topologie, und sei  $\Delta$  die Untergruppe bestehend aus denjenigen Kollineationen, die die Punktmenge  $D$  der Baer-Unterebene invariant lassen.  $\Delta$  ist eine abgeschlossene Untergruppe, und nach den Voraussetzungen induziert  $\Delta$  auf  $\mathcal{D}$  die volle Kollineationsgruppe  $\text{PSL}_3(\mathbb{H})$  der Quaternionenebene. Nach [17: 1.1] ist  $\Gamma$  eine Liegruppe.

Schon während des Beweises des Charakterisierungssatzes wird sich ergeben (siehe 3.2, 3.6 und 3.12):

**1.6.**  $\Gamma$  enthält eine zu  $\text{SL}_3(\mathbb{H})$  isomorphe Untergruppe  $\Sigma$ , die  $\mathcal{D}$  invariant läßt, die Kollineationsgruppe von  $\mathcal{D}$  zweifach überlagert und fahnen transitiv auf der äußeren Geometrie  $\mathcal{P} \setminus \mathcal{D}$  wirkt.

Die Fahnen transitivität leitet sich dabei aus dem folgenden Sachverhalt her (siehe 3.5):

**1.7.** *Eine Moufang-Hughes-Ebene  $\mathcal{P}$  ist eine Semitranslationsebene, d.h. jede Elation von  $\mathcal{D}$  wird von einer geeigneten Elation von  $\mathcal{P}$  induziert.*

Zum Begriff der Semitranslationsebene vergleiche man [19]. Es sei darauf hingewiesen, daß ein entsprechender Sachverhalt für Homologien nicht gilt (siehe 4.4); die Moufang-Hughes-Ebenen sind also keine Hughes-Ebenen im Sinne von [20: Theorem 2].

**1.8.**  $\Delta$  ist fast-semidirektes Produkt von  $\Sigma$  mit dem Normalteiler  $\Theta$  bestehend aus denjenigen Kollineationen, die alle Punkte von  $\mathcal{D}$  festlassen. Anhand [28] läßt sich nun zeigen, daß  $\Theta$  kompakt und höchstens eindimensional oder aber zu  $\text{Spin}_3(\mathbb{R})$  isomorph ist; wir werden dies auch durch eine elementare Analyse in den Moufang-Hughes-Ebenen bestätigen (4.2). Der erwähnte engere Charakterisierungssatz von Salzmann [30: Satz 1] beschränkt sich nun auf den Fall  $\Theta \cong \text{Spin}_3(\mathbb{R})$ :

**Satz** (Salzmann). *Ist in der Situation des Charakterisierungssatzes 1.4 die Gruppe  $\Theta$  der  $\mathcal{D}$  punktweise festlassenden Kollineationen dreidimensional, so ist  $\mathcal{P}$  isomorph zur Oktavenebene  $\mathcal{P}_2(\mathbb{O})$ .*

Im Rahmen unserer Überlegungen wird sich diese Spezialisierung aus dem Charakterisierungssatz 1.4 zusammen mit 4.2 und 4.3 ergeben.

In der allgemeinen Situation stellt sich bei der genaueren Untersuchung der Kollineationen in §4 heraus, daß  $\Theta$  immer einen eindimensionalen Torus enthält. Damit sind schon alle Kollineationen erfaßt; es zeigt sich (4.2, 4.3, 4.5):

**1.9.** *In einer nicht zu  $\mathcal{P}_2(\mathbb{O})$  isomorphen Moufang-Hughes-Ebene läßt die Gruppe  $\Gamma$  aller stetigen Kollineationen die Unterebene  $\mathcal{D}$  invariant.  $\Gamma$  ist fastdirektes Produkt von  $\Sigma \cong \text{SL}_3(\mathbb{H})$  mit einem eindimensionalen Torus  $\Theta$ , der  $\mathcal{D}$  punktweise festläßt (dabei ist die zentrale Involution von  $\Sigma$  gleich der Involution von  $\Theta$ ).*

**1.10.** Ein Satz von Löwen und Salzmann [17: 1.1] besagt, daß man unter viel schwächeren Voraussetzungen an die Kollineationsgruppe auf die hier behandelte Situation geführt wird, nämlich schon unter der Annahme, daß  $\Gamma$  eine Untergruppe der Dimension  $>31$  enthält, welche eine echte abgeschlossene Unterebene invariant läßt. In Kombination mit unserem Charakterisierungssatz erhält man so unmittelbar den folgenden

**Satz.** *Sei  $\mathcal{P}$  eine kompakte, sechzehndimensionale projektive Ebene, in welcher die Gruppe der stetigen Kollineationen eine mindestens 32-dimensionale Untergruppe besitzt, die eine echte abgeschlossene Unterebene invariant läßt. Dann ist  $\mathcal{P}$  eine Moufang-Hughes-Ebene.*

Bei schärferen Annahmen über die Kollineationsgruppe kann man auch noch die Existenz einer invarianten Unterebene erschließen, statt sie vorauszusetzen; dies führt dann zu der folgenden Charakterisierung der Moufang-Hughes-Ebenen rein durch ihre Kollineationsgruppe (siehe 2.5):

**1.11. Satz.** *Sei  $\mathcal{P}$  eine kompakte, sechzehndimensionale projektive Ebene, in welcher die Gruppe der stetigen Kollineationen eine abgeschlossene, zu  $\text{SL}_3(\mathbb{H})$*

lokal isomorphe Untergruppe  $\Sigma$  besitzt. Dann läßt  $\Sigma$  eine abgeschlossene, zu  $\mathcal{P}_2(\mathbb{H})$  isomorphe Baer-Unterebene invariant, so daß also eine Moufang-Hughes-Ebene vorliegt.

Mündlichen Hinweisen von R. Löwen und H. Salzmann verdanke ich einige interessante Varianten und nützliche Vereinfachungen in den Argumenten.

## 2. Vorbereitungen

In diesem Abschnitt werden die Hilfsmittel zum Beweis des Charakterisierungssatzes 1.4 bereitgestellt; gleichzeitig wird Satz 1.11 bewiesen.

Das folgende Lemma zeigt, daß bei kompakten projektiven Ebenen die Einbettung einer abgeschlossenen Baer-Unterebene topologisch gutartig (nämlich lokal flach) ist; diese Tatsache wurde auch in [29: 3.8] bei der Behandlung des Falles  $\mathcal{D} \cong \mathcal{P}_2(\mathbb{C})$  ohne Beweis verwendet. Der Beweis folgt Ideen von Salzmann (siehe [26: 1(9)] und [27: §1(4)]).

**2.1. Lemma.** *Sei  $\mathcal{P}$  eine kompakte projektive Ebene,  $P$  ihre Punktmenge, und sei  $\mathcal{D}$  eine abgeschlossene Baer-Unterebene mit Punktmenge  $D \subseteq P$ . Ist  $L$  eine beliebige Gerade von  $\mathcal{P}$ , die auch zu  $\mathcal{D}$  gehört,  $w \in L \cap D$  und*

$$o \in K := (L \setminus \{w\}) \cap D,$$

so gilt:

(i)  $L$  ist lokal homöomorph zu  $D$ ; genauer:

Das Paar  $(L \setminus \{w\}, (L \setminus \{w\}) \cap D)$  ist homöomorph zu  $(K^2, K \times \{0\})$ ; insbesondere ist  $L \setminus D$  homöomorph zu  $K \times (K \setminus \{o\})$ .

Daraus ergibt sich noch:

- (ii) Das Paar  $(P \setminus L, D \setminus L)$  ist homöomorph zu  $(K^4, K \times \{o\} \times K \times \{o\})$ .
- (iii)  $\dim P = 2 \cdot \dim D$ .

*Beweis.* Sei  $W \neq L$  eine weitere Gerade durch  $w$ , die ebenfalls zu  $\mathcal{D}$  gehört, und sei  $a \in W \setminus D$  ein „äußerer“ Punkt auf ihr. Wir können die Gerade  $L$  projizieren auf das Büschel  $\mathcal{L}_a$  der Geraden durch  $a$ . Eine Gerade  $A \in \mathcal{L}_a \setminus \{W\}$  gehört wegen  $a \notin D$  nicht zu  $\mathcal{D}$ ; da  $\mathcal{D}$  eine Baer-Unterebene ist, enthält  $A$  also genau einen Punkt  $x_A$  von  $\mathcal{D}$ , so daß  $\{x_A\} = A \cap D$ . Die Abbildung

$$\varphi: \mathcal{L}_a \setminus \{W\} \rightarrow D \setminus W: A \mapsto x_A$$

ist bijektiv; die Umkehrabbildung ergibt sich einfach durch Verbinden mit  $a$ . Wie man anhand der Kompaktheit von  $D$  leicht sieht, ist  $\varphi$  ein Homöomorphismus (siehe [26: 1(9)]). Verknüpft man noch  $\varphi$  mit der Projektion  $L \setminus \{w\} \rightarrow \mathcal{L}_a \setminus \{W\}$ , so erhält man einen Homöomorphismus von  $(L \setminus \{w\}, (L \setminus \{w\}) \cap D)$  auf  $(D \setminus W, (L \setminus \{w\}) \cap D)$ . Als Punktmenge einer affinen Ebene ist aber  $D \setminus W$  homöomorph zum Produkt der affinen Geraden  $K = (L \setminus \{w\}) \cap D$  mit einer zweiten, zu  $K$  homöomorphen Koordinatenachse. Damit ist (i) gezeigt. (ii) ergibt sich durch Darstellung der affinen Ebene  $P \setminus L$  als Produkt

zweier punktierter Geraden von  $\mathcal{P}$ , auf die man (i) anwendet. (iii) folgt aus (i), da nach [16: Theorem 1]  $\dim P = 2 \cdot \dim L$ .

Es folgt eine Zusammenstellung benötigter bekannter Aussagen über

**2.2. Involutorische Kollineationen** von kompakten projektiven Ebenen beliebiger endlicher Dimension.

(a) Es gibt keine involutorischen Elationen, da die Punktmenge einer affinen Ebene, die durch Weglassen einer Geraden entsteht, kontrahierbar ist ([23: 7.11]) und in ihr also der Fixpunktsatz von Smith [32: Theorem I] angewandt werden kann.

(b) Eine involutorische Kollineation ist folglich entweder eine Spiegelung oder aber eine Baer-Involution, deren Fixpunkte und Fixgeraden eine Baer-Unterebene bilden ([9: 4.3, 4.4 S. 91ff.]).

(c) Zwei verschiedene *vertauschbare Spiegelungen* können nicht dasselbe Zentrum oder dieselbe Achse haben; insbesondere liegt das Zentrum der einen auf der Achse der andern (*Vertauschbarkeitsprinzip*), und es gibt höchstens drei verschiedene paarweise vertauschbare Spiegelungen (siehe [24: 1.11], [27: §1(2)]; der letztgenannte Beweis läßt sich direkt auch für höherdimensionale Ebenen verwenden, da man nach [16] inzwischen auch dann weiß, daß die projektiven Geraden homotopieäquivalent zu Sphären sind).

Den folgenden Hilfssatz, der sich mit diesen Informationen ergibt, werden wir auf Unterebenen von sechzehndimensionalen kompakten Ebenen anwenden:

**2.3. Hilfssatz.** (a) *In einer vierdimensionalen kompakten projektiven Ebene enthält die Gruppe der stetigen Kollineationen keine zu  $SO_4(\mathbb{R})$  lokal isomorphe Untergruppe.*

(b) *In einer achtdimensionalen kompakten projektiven Ebene enthält die Gruppe der stetigen Kollineationen keine zu  $SO_5(\mathbb{R})$  isomorphe Untergruppe.*

Man beachte als Unterschied von (b) zu (a), daß die zu  $SO_5(\mathbb{R})$  lokal isomorphe Gruppe  $SU_2(\mathbb{H})$  durchaus als Kollineationsgruppe auftreten kann, z.B. in der Quaternionenebene.

*Beweis.* (a) ist eine Spezialisierung eines Ergebnisses von R. Löwen [14: Lemma 2.2] für den allgemeineren Kontext von stabilen Ebenen. Für den projektiven Fall kann man etwas kürzer etwa folgendermaßen argumentieren:

Bei vierdimensionalen Ebenen enthält eine zusammenhängende Kollineationsgruppe außer der Identität kein Element, das ein Viereck festläßt ([24: 4.1]), also insbesondere keine Baer-Involution. Nach 2.2(b) wäre somit jede Involution einer zu  $SO_4(\mathbb{R})$  lokal isomorphen zusammenhängenden Kollineationsgruppe  $Z$  eine Spiegelung. Folglich müßte  $Z$  isomorph zu  $\text{Spin}_3(\mathbb{R}) \times \text{Spin}_3(\mathbb{R})$  sein, da die übrigen zu  $SO_4(\mathbb{R})$  lokal isomorphen Gruppen mindestens vier paarweise vertauschbare Involutionen enthalten, was dem Vertauschbarkeitsprinzip 2.2(c) widerspräche. Ebenfalls nach dem Vertauschbarkeitsprinzip würden die Zentren der drei zentralen Spiegelungen in  $Z \cong \text{Spin}_3(\mathbb{R}) \times \text{Spin}_3(\mathbb{R})$  ein nicht ausgeartetes Dreieck bilden, das unter  $Z$  festbliebe. Eine mindestens zweidimensionale Untergruppe von  $Z$  ließe also ein Viereck fest, im Widerspruch zum eingangs erwähnten Sachverhalt.

(b) Angenommen,  $K$  wäre eine zu  $SO_5(\mathbb{R})$  isomorphe Kollineationsgruppe einer achtdimensionalen Ebene. Sie enthält dann vier paarweise vertauschbare Involutionen, von denen jede im Zentrum einer zu  $SO_4(\mathbb{R})$  isomorphen Untergruppe liegt. Wir zeigen, daß jede solche Involution eine Spiegelung sein müßte; dies steht dann im Widerspruch zum Vertauschbarkeitsprinzip 2.2(c).

Nach 2.2(b) ist die Alternative dazu, daß eine solche Involution  $\kappa$  eine Baer-Involution ist. Die zugehörige Baer-Unterebene  $\mathcal{F}$  der Fixelemente ist nach 2.1(iii) eine Unterebene der halben Dimension. Eine  $\kappa$  zentralisierende zu  $SO_4(\mathbb{R})$  isomorphe Untergruppe müßte  $\mathcal{F}$  invariant lassen; und da  $SO_4(\mathbb{R})$  keine 1-dimensionalen Normalteiler besitzt, müßte sie nach [27: §2(5)] sogar fast effektiv auf  $\mathcal{F}$  wirken. Dies steht aber im Widerspruch zu (a).

Mit ganz ähnlichen Schlüssen läßt sich damit nun zeigen:

**2.4. Hilfssatz.** *Sei  $K$  eine zu  $SU_2(\mathbb{H})$  isomorphe Gruppe von Kollineationen einer sechzehndimensionalen kompakten projektiven Ebene. Dann ist die zentrale Involution  $\kappa$  von  $K$  eine Spiegelung.*

*Beweis.* Andernfalls wäre wieder  $\kappa$  eine Baer-Involution; sei  $\mathcal{B}$  die zugehörige Baer-Unterebene.  $\mathcal{B}$  ist invariant unter  $K$ . Auf  $\mathcal{B}$  kann  $K$  nicht trivial wirken, denn sonst würde  $K$  auf den mit einer Geraden  $L$  von  $\mathcal{B}$  inzidenten, aber nicht zu  $\mathcal{B}$  gehörenden Punkten frei operieren, was wegen  $\dim K = 10 > \dim L$  nicht angeht. Also muß die zu  $SO_5(\mathbb{R})$  isomorphe Faktorgruppe von  $K$  nach dem einzigen nichttrivialen Normalteiler  $\{\text{id}, \kappa\}$  effektiv auf  $\mathcal{B}$  wirken, im Widerspruch zu 2.3(b).

Mit diesen Hilfsmitteln kann nun der

**2.5. Beweis von Satz 1.11** geführt werden. Sei  $\Sigma$  eine zu  $SL_3(\mathbb{H})$  lokal isomorphe zusammenhängende Kollineationsgruppe einer sechzehndimensionalen kompakten Ebene  $\mathcal{P}$ .

(a) Zur Konstruktion einer  $\Sigma$ -invarianten Unterebene  $\mathcal{D}$  bauen wir eine in [29: 3.6] enthaltene Idee entsprechend aus:

Wir betrachten die (a priori nicht unbedingt effektive) Wirkung der universellen Überlagerung  $\tilde{\Sigma} \cong SL_3(\mathbb{H})$  auf  $\mathcal{P}$ , und die zu  $SU_2(\mathbb{H})$  isomorphen Untergruppen von  $\tilde{\Sigma}$ . Sei  $I$  die Menge der zentralen Involutionen dieser Untergruppen. Nach 2.4 induzieren diese Involutionen Spiegelungen in  $\mathcal{P}$ . Auch in der gewöhnlichen projektiven Wirkung von  $\tilde{\Sigma} \cong SL_3(\mathbb{H})$  auf der Quaternionenebene  $\mathcal{P}_2(\mathbb{H})$  induzieren sie Spiegelungen, und jede Spiegelung von  $\mathcal{P}_2(\mathbb{H})$  ist in  $I$  repräsentiert. Insbesondere sind die Elemente von  $I$  konjugiert. Die gesuchte Unterebene  $\mathcal{D}$  von  $\mathcal{P}$  wird aus ihren Zentren und Achsen in  $\mathcal{P}$  bestehen.  $\Sigma$  wirkt transitiv auf der Menge  $D$  dieser Zentren und entsprechend auf der Menge  $\mathcal{G}$  dieser Achsen. Insbesondere ist  $D$  zusammenhängend.

Es muß gezeigt werden, daß  $\mathcal{D}$  eine abgeschlossene Unterebene ist. Dies ist komplizierter, als es zunächst scheinen mag. Wir verwenden ständig das Vertauschbarkeitsprinzip aus 2.2(c) und die Tatsache, daß in  $\mathcal{P}_2(\mathbb{H})$  auch die Umkehrung dieses Prinzips zur Verfügung steht, daß also zwei quaternale Involutionen genau dann vertauschbar sind, wenn das Zentrum der einen auf der Achse der andern liegt. – Noch einige Bezeichnungen: Für  $\kappa \in I$  seien  $z(\kappa)$

und  $A(\kappa)$  Zentrum und Achse von  $\kappa$  in der Wirkung auf  $\mathcal{P}_2(\mathbb{H})$ , und  $\bar{z}(\kappa)$  und  $\bar{A}(\kappa)$  Zentrum und Achse in  $\mathcal{P}$ .

(b) Wir beweisen nun, daß alternativ eine der beiden folgenden Aussagen zutrifft:

**Fall 1.** Alle Involutionen aus  $I$ , die in  $\mathcal{P}_2(\mathbb{H})$  dasselbe Zentrum haben, haben auch in  $\mathcal{P}$  dasselbe Zentrum.

**Fall 2.** Alle Involutionen aus  $I$ , die in  $\mathcal{P}_2(\mathbb{H})$  dieselbe Achse haben, haben in  $\mathcal{P}$  dasselbe Zentrum.

*Beweis.* Angenommen, Fall 2 trifft nicht zu, d.h. für zwei verschiedene Involutionen  $\kappa_1, \kappa_2 \in I$  mit  $A(\kappa_1) = A(\kappa_2)$  ist  $\bar{z}(\kappa_1) \neq \bar{z}(\kappa_2)$ . Wegen der Viereckstransitivität von  $\bar{\Sigma}$  auf  $\mathcal{P}_2(\mathbb{H})$  gilt dies dann für alle solchen Paare von Involutionen.

Seien nun  $\lambda_1, \lambda_2$  Involutionen aus  $I$  mit gleichem Zentrum  $z = z(\lambda_1) = z(\lambda_2)$  in  $\mathcal{P}_2(\mathbb{H})$ , aber verschiedenen Achsen  $A(\lambda_1) \neq A(\lambda_2)$ . Zu zeigen ist, daß sie auch in  $\mathcal{P}$  gleiches Zentrum haben. Seien  $L$  und  $L'$  zwei verschiedene Geraden durch  $z$ , die den Schnittpunkt  $A(\lambda_1) \cap A(\lambda_2)$  nicht enthalten. Für  $v=1,2$  setzen wir  $z_v = A(\lambda_v) \cap L$  und  $z'_v = A(\lambda_v) \cap L'$ , und wir betrachten die Involutionen  $\kappa_v \in I$  mit Zentren  $z(\kappa_v) = z_v$  und Achse  $A(\kappa_v) = L$  sowie die Involutionen  $\kappa'_v \in I$  mit Zentren  $z(\kappa'_v) = z'_v$  und Achse  $A(\kappa'_v) = L'$  (Fig. 1). Die Involutionen  $\kappa_1$  und  $\kappa_2$  kommutieren mit  $\kappa'_1$  und  $\kappa'_2$ , und  $\lambda_v$  kommutiert mit  $\kappa_v$  und  $\kappa'_v$ . In  $\mathcal{P}$  gilt nun nach unserer Annahme  $\bar{z}(\kappa_1) \neq \bar{z}(\kappa_2)$  und  $\bar{z}(\kappa'_1) \neq \bar{z}(\kappa'_2)$ , und nach dem Vertauschbarkeitsprinzip kann man schließen, daß die Zentren und Achsen der betrachteten Involutionen in  $\mathcal{P}$  eine zu Fig. 1 isomorphe Figur bilden: es folgt nämlich  $\bar{A}(\kappa_1) = \bar{z}(\kappa'_1) \vee \bar{z}(\kappa'_2) = \bar{A}(\kappa_2)$  und  $\bar{A}(\kappa'_1) = \bar{z}(\kappa_1) \vee \bar{z}(\kappa_2) = \bar{A}(\kappa'_2)$ , und daraus schließlich

$$\bar{z}(\lambda_1) = \bar{A}(\kappa_1) \cap \bar{A}(\kappa'_1) = \bar{A}(\kappa_2) \cap \bar{A}(\kappa'_2) = \bar{z}(\lambda_2),$$

was zu zeigen war.

Wir betrachten nun nur den Fall 1 explizit weiter. Man hat dann eine wohldefinierte stetige Abbildung

$$\zeta: \mathcal{P}_2(\mathbb{H}) \rightarrow D \quad \text{mit} \quad \zeta(z(\kappa)) = \bar{z}(\kappa) \quad \text{für alle } \kappa \in I.$$

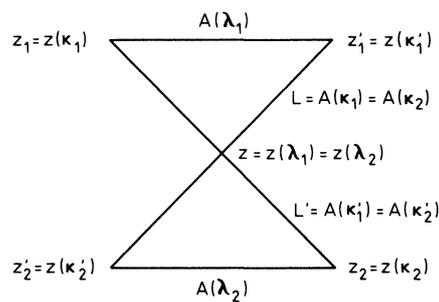


Fig. 1

Wir werden zeigen, daß  $\zeta$  ein Isomorphismus von  $\mathcal{P}_2(\mathbb{H})$  auf  $\mathcal{D}$  ist. Im Fall 2 kann man dann ganz analog durch Dualisieren in  $\mathcal{P}_2(\mathbb{H})$  schließen.

(c) Die Abbildung  $\zeta$  führt nicht-ausgeartete Dreiecke von  $\mathcal{P}_2(\mathbb{H})$  in nicht-ausgeartete Dreiecke über; insbesondere ist  $\zeta$  bijektiv.

*Beweis.* Die Ecken eines nicht-ausgearteten Dreiecks in  $\mathcal{P}_2(\mathbb{H})$  bilden die Zentren eines Tripels paarweise vertauschbarer Involutionen aus  $I$ ; deren Zentren in  $\mathcal{P}$  bilden dann nach dem Vertauschbarkeitsprinzip ebenfalls wieder ein nicht-ausgeartetes Dreieck. Daraus ergibt sich sofort die Injektivität von  $\zeta$ ; die Surjektivität folgt unmittelbar aus der Definition.

(d) Die Abbildung  $\zeta$  erhält die Kollinearität.

Seien  $z_\nu$  ( $\nu=1,2,3$ ) drei kollineare Punkte von  $\mathcal{P}_2(\mathbb{H})$  auf einer Geraden  $A$ . Man wähle in  $\mathcal{P}_2(\mathbb{H})$  einen weiteren Punkt  $z \notin A$  und drei Geraden  $A_\nu$  durch  $z$  mit  $z_\nu \notin A_\nu$ . Sei  $\kappa \in I$  die Spiegelung mit Zentrum  $z$  und Achse  $A$ , und sei  $\kappa_\nu \in I$  die Spiegelung mit Zentrum  $z_\nu$  und Achse  $A_\nu$ . Die  $\kappa_\nu$  sind mit  $\kappa$  vertauschbar, und nach dem Vertauschbarkeitsprinzip folgt, daß in  $\mathcal{P}$  die Zentren  $\bar{z}(\kappa_\nu) = \zeta(z_\nu)$  alle auf der Achse  $\bar{A}(\kappa)$  liegen müssen.

(e) *Schluß.* Insgesamt ist damit  $\zeta$  ein Isomorphismus von  $\mathcal{P}_2(\mathbb{H})$  auf  $\mathcal{D}$ ; es folgt auch, daß  $\mathcal{D}$  eine Unterebene von  $\mathcal{P}$  ist. Wegen der Kompaktheit von  $\mathcal{P}_2(\mathbb{H})$  ist  $\mathcal{D}$  abgeschlossen. Als Unterebene der halben Dimension ist  $\mathcal{D}$  eine Baer-Unterebene ([28: 1.4]). Da  $\zeta$  äquivariant bezüglich der Wirkung von  $\tilde{\Sigma}$  ist, induziert  $\tilde{\Sigma}$  auch auf  $\mathcal{D}$  die volle Kollineationsgruppe; insbesondere läßt sich jede Kollineation von  $\mathcal{D}$  zu einer Kollineation von  $\mathcal{P}$  fortsetzen. Somit liegt die Situation des Charakterisierungssatzes 1.4 vor.

Im Beweis des Charakterisierungssatzes 1.4 wird es erforderlich sein, bestimmte Untergruppen der Kollineationsgruppe der Quaternionenebene anhand weniger Charakteristika identifizieren zu können:

**2.6. Lemma.** Sei  $\Psi \cong \text{SL}_2(\mathbb{H}) \cdot \mathbb{H}^\times$  die Gruppe aller Transformationen des  $\mathbb{H}$ -Rechtsvektorraums  $\mathbb{H}^2$  der Form  $x \mapsto (a \cdot x)A$  mit  $a \in \mathbb{H}^\times = \mathbb{H} \setminus \{0\}$  und  $A \in \text{SL}_2(\mathbb{H})$ .

Sei  $\Xi$  eine zusammenhängende abgeschlossene Untergruppe dieser Gruppe mit folgenden Eigenschaften:

- a)  $\dim \Xi = 11$
- b)  $\Xi$  hat endliche Fundamentalgruppe
- c) die 3-te Homotopiegruppe  $\pi_3(\Xi)$  hat Rang 1.

Dann ist  $\Xi$  konjugiert zu  $\text{SU}_2(\mathbb{H}) \cdot P$ , wo  $P$  eine nicht kompakte Einparameteruntergruppe der multiplikativen Gruppe  $\mathbb{H}^\times$  der Form

$$P = \{e^{(1+i\alpha)t}; t \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{C} \subseteq \mathbb{H}$$

für eine geeignete Konstante  $\alpha \geq 0$  ist.

*Beweis.* Es geht im wesentlichen darum, den Isomorphietyp einer maximalen kompakten Untergruppe  $K$  von  $\Xi$  zu bestimmen.

Zur Abschätzung der Dimension von  $K$  betrachten wir auch eine maximale kompakte Untergruppe  $C$  der ganzen Gruppe  $\Psi$ . In der Liealgebra von  $\Psi$  ergibt sich dann anhand der Dimensionsformel für Unterräume

$$\dim K \geq \dim C \cap \Xi \geq \dim C + \dim \Xi - \dim \Psi = 13 + 11 - 19 = 5.$$

Angesichts der Malcev-Iwasawa-Zerlegung (siehe z.B. [8: Chap. XV Theorem 3.1 S. 180]) sind  $\Xi$  und  $K$  homotopieäquivalent. Die universelle Überlagerung  $\tilde{K}$  von  $K$  ist ein direktes Produkt einfacher, kompakter Liegruppen, da jede kompakte Liegruppe überlagert wird vom Produkt einer solchen Gruppe mit einem Torus (vgl. [21: Beispiel 107 S. 270]), und da hier wegen der Endlichkeit der Fundamentalgruppe der Torusanteil trivial ist. Aus der Voraussetzung  $\operatorname{rg} \pi_3(\Xi) = 1$  folgt nun, daß  $K$  selbst einfach ist:

Jede kompakte, einfache Liegruppe hat nämlich verschwindende zweite Homotopiegruppe ([1: Theorem 21.2]), aber nicht verschwindende dritte Betti-Zahl ([2: 59 S. 222], [13], siehe auch z.B. [3: Theorem 21.2] und allgemein die Übersicht in [31: §§ 11–14]). Nach dem Satz von Hurewicz ([33: Theorem 7.5.5 S. 398]) hat somit die dritte Homotopiegruppe eines jeden Faktors von  $\tilde{K}$  Rang  $\geq 1$ . Wegen  $\pi_3(\tilde{K}) = \pi_3(K) = \pi_3(\Xi)$  kann also nur ein Faktor vorhanden sein, und  $K$  ist einfach.

Insbesondere ist die Projektion von  $K$  auf den Faktor  $\mathbb{H}^\times / \{1, -1\}$  von  $\Psi$  trivial, da sie wegen  $\dim K \geq 5$  nicht endlichen Kern haben kann. Somit ist  $K$  bis auf Konjugation isomorph zu einer Untergruppe der maximalen kompakten Untergruppe  $SU_2(\mathbb{H})$  von  $SL_2(\mathbb{H}) \leq \Psi$ . Nun hat aber  $SU_2(\mathbb{H})$  nach der Klassifikation der einfachen Liegruppen (siehe z.B. [36]) keine echten einfachen Untergruppen einer Dimension  $\geq 5$  (eine zu  $SU_3(\mathbb{C})$  lokal isomorphe 8-dimensionale Untergruppe kommt nicht in Frage, da  $SU_3(\mathbb{C})$  z.B. keine zweidimensionale quaternale Darstellung hat, oder aber da eine transitiv und effektiv auf einem homogenen Raum der Dimension  $10 - 8 = 2$  wirkende kompakte Liegruppe nach [18: Theorem 6.25, Corollary 1 S. 243] höchstens 6-dimensional sein kann). Bis auf Konjugation ist also  $K = SU_2(\mathbb{H}) \leq SL_2(\mathbb{H})$ .

In der adjungierten Wirkung auf der 11-dimensionalen Liealgebra von  $\Xi$  läßt  $K$  die eigene 10-dimensionale Unteralgebra invariant und folglich einen geeigneten dazu komplementären 1-dimensionalen Teilraum fest, d.h.  $\Xi$  ist direktes Produkt von  $K$  mit einer nicht kompakten Einparameteruntergruppe  $P$ . Die Projektion von  $P$  in den Faktor  $SL_2(\mathbb{H}) / \{1, -1\}$  von  $\Psi$  ist trivial, da der Zentralisator von  $SU_2(\mathbb{H})$  in  $SL_2(\mathbb{H})$  gleich  $\{1, -1\}$  ist (z.B. wegen der Transitivität von  $SU_2(\mathbb{H})$  auf den Richtungen von  $\mathbb{H}^2$ ). Also ist  $P$  eine nicht kompakte Einparameteruntergruppe von  $\mathbb{H}^\times$ ; eine solche ist stets konjugiert in  $\mathbb{H}^\times$  zu einer Untergruppe der angegebenen Form.

### 3. Beweis der Charakterisierungssatzes

Wir legen nun die Situation des Charakterisierungssatzes 1.4 zugrunde. Sei  $\mathcal{P}$  eine kompakte projektive Ebene,  $P$  ihre Punktmenge, und sei  $\mathcal{D}$  eine zu  $\mathcal{P}_2(\mathbb{H})$

isomorphe Baer-Unterebene mit Punktmenge  $D \subseteq P$  derart, daß sich jede Kollineation von  $\mathcal{D}$  zu einer Kollineation von  $\mathcal{P}$  fortsetzen läßt.

**3.1.** Eine affine Gerade  $K$  der Quaternionenebene ist homöomorph zu  $\mathbb{H} \cong \mathbb{R}^4$ ; nach 2.1 ist folglich eine affine Gerade  $L$  von  $\mathcal{P}$  homöomorph zu  $\mathbb{R}^8$ , und  $P$  ist eine 16-dimensionale Mannigfaltigkeit.

**3.2.** Die Gruppe der stetigen Kollineationen von  $\mathcal{P}$  enthält eine abgeschlossene, zusammenhängende Untergruppe  $\Sigma$ , die  $D$  invariant läßt, auf  $\mathcal{D}$  die volle Kollineationsgruppe  $\text{PSL}_3(\mathbb{H})$  induziert und diese höchstens zweifach überlagert.

Um dies zu zeigen, betrachte man zunächst die Zusammenhangskomponente  $\Delta^1$  der Gruppe  $\Delta$  aller stetigen Kollineationen, die  $D$  invariant lassen und ihre Levizerlegung als fast-semidirektes Produkt des Radikals mit einem halbeinfachen Kopf  $H$ . Wie in 1.5 schon festgestellt wurde, gilt nach Voraussetzung  $\Delta|D \cong \text{PSL}_3(\mathbb{H})$ , und da dies eine einfache Liegruppe ist, wirkt das Radikal von  $\Delta^1$  trivial auf  $D$ , so daß auch  $H|D \cong \text{PSL}_3(\mathbb{H})$ . Denkt man sich  $H$  als fastdirektes Produkt von einfachen Liegruppen zerlegt, so besteht die Zusammenhangskomponente des Kerns der Wirkung von  $H$  auf  $D$  aus dem Produkt eines Teils der Faktoren. Das Produkt  $\Sigma$  der übrigen Faktoren überlagert dann  $H|D \cong \text{PSL}_3(\mathbb{H})$ , und zwar höchstens zweifach, da  $\text{PSL}_3(\mathbb{H})$  Fundamentalgruppe  $\mathbb{Z}_2$  hat (die zweifache Überlagerung  $\text{SL}_3(\mathbb{H})$  hat nach der Malcev-Iwasawa-Zerlegung [8: Chap. XV Theorem 3.1 S. 180] denselben Homotopietyp wie die maximale kompakte Untergruppe  $\text{SU}_3(\mathbb{H})$ , und diese ist einfach zusammenhängend, siehe z.B. [10: 12.3 S. 92]).

**3.3.** Zur Beweisstruktur. Wie üblich nennen wir die Punkte der Baer-Unterebene  $\mathcal{D}$  *innere Punkte*, und die Geraden von  $\mathcal{P}$ , die mehrere innere Punkte enthalten, also eine Gerade von  $\mathcal{D}$  induzieren, *innere Geraden*. Die übrigen Punkte und Geraden heißen *äußere Punkte* und *äußere Geraden*. Daß  $\mathcal{D}$  eine Baer-Unterebene ist, bedeutet, daß auch jede äußere Gerade die Menge  $D$  der inneren Punkte trifft; die äußeren Geraden sind also diejenigen, die genau einen inneren Punkt enthalten. Dual geht durch jeden äußeren Punkt genau eine innere Gerade.

Die Beweisstrategie wird darin bestehen zu zeigen, daß  $\Sigma$  transitiv auf der Menge der *äußeren Fahnen* (d.h. der inzidenten Paare  $p \in A$  bestehend aus einem äußeren Punkt  $p$  und einer äußeren Geraden  $A$ ) operiert, und die Stabilisatoren äußerer Punkte und äußerer Geraden in  $\Sigma$  zu identifizieren. Nach der Methode von Higman-McLaughlin [7] läßt sich dann die äußere Geometrie aus der Gruppe rekonstruieren, und die äußere Geometrie legt schließlich ganz  $\mathcal{P}$  fest.

Die Transitivität von  $\Sigma$  auf den äußeren Fahnen kann man unter sinngemäßer Anwendung von Argumenten von Dembowski [4] gewinnen, wenn man weiß, daß die Elationen von  $\mathcal{D}$  durch in  $\Sigma$  enthaltene Elationen von  $\mathcal{P}$  induziert werden. Um dies zu erschließen, betrachten wir zunächst ein Paar

$$o \notin L$$

bestehend aus einem *inneren Punkt*  $o$  und einer nicht mit  $o$  inzidenten *inneren Geraden*  $L$ , und zeigen:

**3.4.**  $\Sigma$  enthält eine Spiegelung von  $\mathcal{P}$  mit Achse  $L$  und Zentrum  $o$ .

*Beweis.* Wir schränken uns zunächst auf die Quaternionenebene  $\mathcal{D}$  ein und betrachten die Spiegelung von  $\mathcal{D}$  mit Achse  $L \cap D$  und Zentrum  $o$ ; sie ist die zentrale Involution einer zu  $SU_2(\mathbb{H})$  isomorphen Untergruppe von  $\Sigma|D \cong PSL_3(\mathbb{H})$ . Diese ist einfach zusammenhängend ([10: 12.3 S. 92]), so daß sie nicht echt überlagert werden kann; die Zusammenhangskomponente  $K \leq \Sigma$  ihres Urbilds unter der Überlagerung  $\Sigma \rightarrow \Sigma|D$  wird also isomorph abgebildet, d.h.  $K \cong SU_2(\mathbb{H})$  wirkt effektiv auf  $D$ . Die zentrale Involution von  $K$  ist nach 2.4 eine Spiegelung von  $\mathcal{P}$ , und sie induziert in  $\mathcal{D}$  die Spiegelung, von der wir ausgegangen sind.

Dabei sind die innere Gerade  $L$  und der innere Punkt  $o$  völlig beliebig; 3.4 besagt also in anderen Worten, daß jede Spiegelung von  $\mathcal{D}$  induziert wird von einer in  $\Sigma$  enthaltenen Spiegelung von  $\mathcal{P}$ . Dasselbe folgt nun für die Elationen von  $\mathcal{D}$ , denn jede Elation von  $\mathcal{D}$  mit Achse  $L$  läßt sich darstellen als Produkt von zwei Spiegelungen von  $\mathcal{D}$  mit Achse  $L$ , und denkt man sich diese zu Spiegelungen von  $\mathcal{P}$  fortgesetzt, so ist deren Produkt wieder eine Elation (siehe z.B. [9: 4.21 S. 101]). Damit ist gezeigt:

**3.5.** Jede Elation von  $\mathcal{D}$  wird induziert von einer Elation von  $\mathcal{P}$  aus  $\Sigma$ . Insbesondere wirkt die Gruppe  $\Sigma_{[L,L]}$  der in  $\Sigma$  enthaltenen Elationen von  $\mathcal{P}$  mit der inneren Geraden  $L$  als Achse scharf transitiv auf  $D \setminus L$ .

Die letzte Aussage ist nun der Angelpunkt einer Argumentationskette von Dembowski (Beweisschritte (2), (3), (4) des Beweises von 5.2 in [4: S. 13]), die dort explizit nur für endliche Ebenen niedergelegt ist, aber ganz allgemein gilt und folgendes zeigt:

**3.6.**  $\Sigma$  wirkt transitiv auf der Menge der äußeren Fahnen.

**3.7.** Insbesondere ist  $\Sigma$  transitiv auf der Menge  $P \setminus D$  der äußeren Punkte. Eine Kollineation aus  $\Sigma$ , die einen äußeren Punkt  $p$  der inneren Geraden  $L$  wieder in einen Punkt  $p'$  von  $L$  überführt, läßt  $L$  fest, da  $L$  die einzige innere Gerade durch  $p$  ist, und dasselbe für  $p'$  gilt.

Damit ergibt sich aus 3.6 noch:

**3.8.** Der Stabilisator  $\Sigma_L$  einer inneren Geraden  $L$  wirkt transitiv auf  $L \setminus D$ .

**3.9.** Stabilisatoren äußerer Elemente. Nun sei im folgenden

$p$  ein äußerer Punkt auf der inneren Geraden  $L$ ,

und sei

$A$  die (äußere) Gerade durch  $p$  und den inneren Punkt  $o \notin L$ .

Wir betrachten die Stabilisatoren

$$\Pi := \Sigma_p$$

$$\Lambda := \Sigma_A.$$

Nach 3.7 ist  $\Pi \subseteq \Sigma_L$ , also

$$\Pi = \Sigma_{p,L}.$$

$\Pi$  enthält die Elationengruppe  $\Sigma_{[L,L]}$  als Normalteiler, der auf  $D \setminus L$  nach 3.5 transitiv operiert.  $\Pi$  ist also das semidirekte Produkt

$$\Pi = \Pi_o \cdot \Sigma_{[L,L]} \quad (1a)$$

mit dem Stabilisator

$$\Pi_o = \Sigma_{p,L,o}.$$

Dual ist  $\Lambda = \Sigma_A = \Sigma_{A,o}$  (da  $o$  der einzige innere Punkt auf  $A$  ist) und folglich  $\Lambda_L = \Sigma_{A,L} = \Sigma_{A,o,L} = \Sigma_{p,o,L}$ , also

$$A_L = \Pi_o;$$

als Gegenstück zur Zerlegung (1a) erhält man somit

$$\Lambda = \Pi_o \cdot \Sigma_{[o,o]}, \quad (1b)$$

wobei  $\Sigma_{[o,o]}$  die Gruppe der Elationen mit Zentrum  $o$  und Achse durch  $o$  bezeichnet.

Die Elationengruppen  $\Sigma_{[L,L]}$  und  $\Sigma_{[o,o]}$  sowie die Gruppe  $\Sigma_L$  sind in ihrer Wirkung jedenfalls auf  $D$  bekannt;  $\Sigma_L$  induziert die Kollineationsgruppe der affinen Quaternionenebene  $D \setminus L$ . Nach (1a) und (1b) sind somit die Stabilisatoren  $\Pi = \Sigma_p$  und  $\Lambda = \Sigma_A$  bestimmt, wenn man die Untergruppe  $\Pi_o$  in  $\Sigma_L$  identifizieren kann. Nun ist entsprechend den Zerlegungen (1a) und (1b)

$$\Sigma_L = \Sigma_{L,o} \cdot \Sigma_{[L,L]}, \quad (1c)$$

und  $\Sigma_{L,o}$  induziert in der affinen Quaternionenebene  $D \setminus L = \mathbb{H}^2$  die Gruppe  $SL_2(\mathbb{H}) \cdot \mathbb{H}^\times$ . Im Hinblick auf die Anwendung von Lemma 2.6 zeigen wir:

**3.10.**  $\Pi_o$  ist zusammenhängend, die Fundamentalgruppe von  $\Pi_o$  ist endlich,  $\pi_3(\Pi_o)$  hat den Rang 1, und  $\dim \Pi_o = 11$ .

*Beweis:* Wir leiten alle diese Aussagen aus der nach 3.8 transitiven Wirkung von  $\Sigma_L$  auf  $L \setminus D$  her; nach 2.1 kennen wir den Homöomorphietyp von  $L \setminus D$  und können die exakte Homotopiesequenz für Faserungen benützen.

Der Stabilisator der Wirkung von  $\Sigma_L$  auf  $L \setminus D$  ist  $\Sigma_{L,p} = \Sigma_p = \Pi$ , nach 3.1 ist  $L \setminus D$  eine 8-dimensionale Mannigfaltigkeit, und die affine Quaternionengruppe  $\Sigma_L$  hat Dimension 27; also ist  $\dim \Pi = 27 - 8 = 19$ . Die Translationsgruppe  $\Sigma_{[L,L]}$  der affinen Quaternionenebene  $D \setminus L$  ist isomorph zu  $\mathbb{H}^2 \cong \mathbb{R}^8$ , und mit der Zerlegung (1a) folgt  $\dim \Pi_o = \dim \Pi - 8 = 11$ .

Diese Zerlegung zeigt auch, daß  $\Pi$  denselben Homotopietyp hat wie  $\Pi_o$ ; es genügt also, die übrigen Aussagen für  $\Pi$  statt  $\Pi_o$  zu beweisen.

Ebenso zeigt Zerlegung (1c), daß  $\Sigma_L$  denselben Homotopietyp wie der Stabilisator  $\Sigma_{L,o}$  hat, der in der affinen Quaternionenebene  $D \setminus L$  eine zu  $SL_2(\mathbb{H}) \cdot \mathbb{H}^\times$  isomorphe Kollineationsgruppe induziert. Diese ist (nach der Malcev-Iwasawa-Zerlegung [8: Chap. XV Theorem 3.1 S. 180]) homotopieäquivalent zur maximalen kompakten Untergruppe  $SU_2(\mathbb{H}) \cdot Spin_3(\mathbb{R})$ , die von  $SU_2(\mathbb{H}) \times Spin_3(\mathbb{R})$  zweifach überlagert wird. Nach [10: 12.3 S. 92] ist letztere einfach zusammenhängend, so daß die Fundamentalgruppe von  $\Sigma_L \setminus D$  und damit auch der Überlagerungsgruppe  $\Sigma_L$  aus höchstens zwei Elementen besteht.

Die höheren Homotopiegruppen ändern sich bei Überlagerung nicht, also ist

$$\pi_3(\Sigma_L) = \pi_3(\mathrm{SU}_2(\mathbb{H}) \times \mathrm{Spin}_3(\mathbb{R})) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

(siehe [10: 12.6 S. 93]). – Wir bemerken noch, daß die zweite Homotopiegruppe bei allen Liegruppen verschwindet (vgl. etwa [1: 6.11]).

Eine affine Gerade  $K$  der Quaternionenebene ist homöomorph zu  $\mathbb{H} \cong \mathbb{R}^4$ ; nach 2.1 ist somit  $L \setminus D$  homöomorph zu  $\mathbb{R}^4 \times (\mathbb{R}^4 \setminus \{0\})$  und hat den Homotopietyp der 3-Sphäre  $\mathbb{S}^3$ .

Wir können nun die Fasersequenz der transitiven Wirkung von  $\Sigma_L$  auf  $L \setminus D$  anwenden. Nach [18: 2.13 S. 63] ist  $L \setminus D$  homöomorph zum Faktorraum  $\Sigma_L/\Pi$  nach dem Stabilisator  $\Pi = \Sigma_{L,p}$ . Die kanonische Projektion  $\Sigma_L \rightarrow \Sigma_L/\Pi$  ist andererseits ein lokal triviales Faserbündel ([34: Part I 7.5 S. 32]), so daß man eine exakte Homotopiesequenz

$$\dots \rightarrow \pi_{n+1}(L \setminus D) \rightarrow \pi_n(\Pi) \rightarrow \pi_n(\Sigma_L) \rightarrow \pi_n(L \setminus D) \rightarrow \pi_{n-1}(\Pi) \rightarrow \dots$$

erhält ([34: Part II 17.4 S. 91]). Für  $n=3$  ergibt dies wegen  $\pi_4(\mathbb{S}^3) = \mathbb{Z}_2$  ([33: 8.5.12 S. 459]) eine exakte Sequenz

$$\mathbb{Z}_2 \rightarrow \pi_3(\Pi) \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0,$$

aus der sofort folgt, daß  $\pi_3(\Pi)$  keine Torsionsgruppe sein kann, also  $\pi_3(\Pi)$  mindestens Rang 1 haben muß. Die Faktorgruppe von  $\pi_3(\Pi)$  nach der Torsionsuntergruppe wird injektiv nach  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  abgebildet; hätte sie Rang  $\geq 2$ , so wäre die Faktorgruppe von  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  nach dem Bild endlich, und könnte nicht  $\mathbb{Z}$  als homomorphes Bild haben, wie es die exakte Sequenz verlangt. Also hat  $\pi_3(\Pi)$  den Rang 1.

Für  $n=1$  lautet der Abschnitt der exakten Homotopiesequenz

$$0 \rightarrow \pi_1(\Pi) \rightarrow \pi_1(\Sigma_L) \rightarrow 0 \rightarrow \dots,$$

so daß also

$$\pi_1(\Pi) \cong \pi_1(\Sigma_L) \tag{2}$$

ist und somit, wie oben ausgeführt, höchstens zwei Elemente hat.

Für  $n=0$  schließlich ergibt sich analog, daß  $\Pi$  so viele Zusammenhangskomponenten hat wie  $\Sigma_L$ .

Um nun zu zeigen, daß  $\Sigma_L$  und damit  $\Pi$  zusammenhängend ist, kann man ganz entsprechende Überlegungen für die transitive Wirkung von  $\Sigma$  auf dem Raum  $\mathcal{G}$  der Geraden der Quaternionengeometrie  $\mathcal{D}$  anstellen. Es ist  $\pi_1(\mathcal{G}) = \pi_2(\mathcal{G}) = 0$  (das gilt ganz allgemein für die Punkträume höherdimensionaler kompakter Ebenen und dual auch für ihre Geradenräume, siehe [26: 1(3), 1(6)]); folglich ist mit  $\Sigma$  auch  $\Sigma_L$  und damit  $\Pi$  zusammenhängend; ferner können wir für später noch notieren, daß

$$\pi_1(\Sigma_L) \cong \pi_1(\Sigma). \tag{3}$$

**3.11.**  $\Pi_o$  wirkt effektiv auf  $D$  und induziert auf  $D$  bis auf Konjugation in  $\Sigma_L$  (d.h. bis auf geeignete Wahl des äußeren Punkts  $p$  auf  $L$ ) eine Untergruppe der Form

$$\Pi_o|D = \text{SU}_2(\mathbb{H}) \cdot P$$

von

$$\Sigma_{L,o}|D = \text{SL}_2(\mathbb{H}) \cdot \mathbb{H}^\times$$

mit einer nicht kompakten Einparameteruntergruppe  $P$  von  $\mathbb{H}^\times$  wie in 2.6.

*Beweis.* Mit  $\Pi_o$  hat auch die von  $\Pi_o$  höchstens zweifach überlagerte Gruppe  $\Pi_o|D$  die in 3.10 bewiesenen Eigenschaften; nach 2.6 ergibt sich also für  $\Pi_o|D$  eine Gruppe des angegebenen Typs. Insbesondere ist  $\Pi_o|D$  einfach zusammenhängend und kann nicht echt überlagert werden, so daß  $\Pi_o$  effektiv auf  $D$  wirkt.

Mit Argumenten aus den Beweisen von 3.10 und 3.11 läßt sich nun noch  $\Sigma$  genau bestimmen. Mit  $\Pi_o$  ist nämlich auch  $\Pi = \Pi_o \cdot \Sigma_{[L,L]}$  einfach zusammenhängend, und nach 3.10(2) und 3.10(3) folgt dasselbe für  $\Sigma_L$  und schließlich  $\Sigma$ . Somit ist  $\Sigma$  die universelle Überlagerung von  $\Sigma|D \cong \text{PSL}_3(\mathbb{H})$ :

**3.12.**  $\Sigma$  ist isomorph zu  $\text{SL}_3(\mathbb{H})$ , und die Einschränkungabbildung  $\Sigma \rightarrow \Sigma|D \cong \text{PSL}_3(\mathbb{H})$  ist eine zweifache Überlagerung.

**3.13.** Damit können wir nun die Standgruppen äußerer Punkte und Geraden konkret angeben. Bei geeigneter Identifikation von  $\Sigma$  mit  $\text{SL}_3(\mathbb{H})$  und bezüglich geeigneter quaternaler homogener Koordinaten in der Unterebene  $\mathcal{D} = \mathcal{P}_2(\mathbb{H})$  wirkt  $\Sigma = \text{SL}_3(\mathbb{H})$  auf  $D = \mathbb{P}_2(\mathbb{H})$  in der gewohnten Weise als projektive lineare Gruppe (wobei wir verabreden, Matrizen auf Zeilenvektoren wirken zu lassen). Den inneren Punkt  $o$  und die innere Gerade  $L$  wählen wir so, daß in den Koordinaten von  $\mathcal{D}$

$$o = [1, 0, 0]$$

und

$$L \cap D = \{[0, x_1, x_2]; x_1, x_2 \in \mathbb{H}\}.$$

Es ist dann

$$\Sigma_L = \left\{ \begin{pmatrix} m & z_1 & z_2 \\ 0 & & Q \\ 0 & & \end{pmatrix} \in \text{SL}_3(\mathbb{H}) \right\}.$$

Die Elationengruppe  $\Sigma_{[L,L]}$  wird nach 3.5 durch Einschränkung isomorph auf die Gruppe aller Elationen von  $\mathcal{D}$  mit Achse  $L$  abgebildet; bei unseren Identifikationen ist also

$$\Sigma_{[L,L]} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & z_1 & z_2 \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}; z_1, z_2 \in \mathbb{H} \right\}.$$

Dual ergibt sich

$$\Sigma_{[o,o]} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & & \\ z_1 & 1 & \\ z_2 & & 1 \end{pmatrix}; z_1, z_2 \in \mathbb{H} \right\}.$$

Die Untergruppe  $\Pi_o$  von  $\text{SL}_3(\mathbb{H}) = \Sigma$ , die entsprechend 3.11 in der affinen Quaternionenebene  $D \setminus L = \{[1, x_1, x_2]; x_1, x_2 \in \mathbb{H}\}$  die Gruppe  $\text{SU}_2(\mathbb{H}) \cdot P$  indu-

ziert, ist eindeutig bestimmt als

$$\Pi_o = \left\{ \begin{pmatrix} h^{-2} & & \\ & |h| & C \end{pmatrix}; C \in \text{SU}_2(\mathbb{H}), h \in \mathbb{P} \right\}.$$

Nach 3.9 und 2.6 findet man somit die folgende Beschreibung für die Stabilisatoren  $\Sigma_p = \Pi_o \cdot \Sigma_{[L, L]}$  und  $\Sigma_A = \Pi_o \cdot \Sigma_{[o, o]}$  als Untergruppen von  $\text{SL}_3(\mathbb{H}) = \Sigma$ :

**3.14. Zusammenfassung.** Für einen geeigneten äußeren Punkt  $p$  und eine geeignete mit ihm inzidente äußere Gerade  $A$  ist in  $\Sigma = \text{SL}_3(\mathbb{H})$ :

$$\Sigma_p = \Pi = \left\{ \begin{pmatrix} h^{-2} & z_1 & z_2 \\ & |h| & C \end{pmatrix}; C \in \text{SU}_2(\mathbb{H}), h \in \mathbb{P}_\alpha, z_1, z_2 \in \mathbb{H} \right\}$$

und

$$\Sigma_A = \Lambda = \left\{ \begin{pmatrix} h^{-2} & & \\ z_1 & & \\ z_2 & & |h| & C \end{pmatrix}; C \in \text{SU}_2(\mathbb{H}), h \in \mathbb{P}_\alpha, z_1, z_2 \in \mathbb{H} \right\}$$

mit der Spiralgruppe

$$\mathbb{P}_\alpha = \{e^{(1+i\alpha)t}; t \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{C} \subseteq \mathbb{H}$$

zu einer Konstante  $\alpha \geq 0$ .

**3.15. Konstruktion der Moufang-Hughes-Ebenen aus ihren Kollineationsgruppen.**

(a) Durch die Kenntnis der Stabilisatoren  $\Pi = \Sigma_p$  und  $\Lambda = \Sigma_A$  für eine feste äußere Fahne  $p \in A$  entsprechend 3.14 ist  $\mathcal{P}$  nun eindeutig bestimmt.

Zunächst ist dadurch nach Higman-McLaughlin [7] die Geometrie der äußeren Punkte und Geraden festgelegt: Wegen der Transitivität von  $\Sigma$  auf der Menge der äußeren Fahnen (3.6) entsprechen die äußeren Punkte den Nebenklassen  $\Pi\sigma$  in  $\Sigma$  und die äußeren Geraden den Nebenklassen  $\Lambda\tau$  ( $\sigma, \tau \in \Sigma$ ), und wie man leicht nachrechnet (siehe [7: Lemma 1]), sind die entsprechenden Punkte und Geraden  $p^\sigma$  und  $A^\tau$  genau dann inzident, wenn  $\Pi\sigma \cap \Lambda\tau \neq \emptyset$ . Wegen  $\Sigma_{p^\sigma} = \sigma^{-1} \Sigma_p \sigma$  und  $\Sigma_{A^\tau} = \tau^{-1} \Sigma_A \tau$  kennt man im übrigen alle Stabilisatoren der äußeren Elemente.

Nun werden noch die Punkte und Geraden der Quaternionenebene  $\mathcal{D} = \mathcal{P}_2(\mathbb{H})$  als innere Punkte und Geraden hinzugefügt. Die Inzidenz eines äußeren Punkts  $q$  mit der inneren Geraden  $M$  kann dabei ebenfalls in der Gruppe  $\Sigma$  abgelesen werden, nämlich daran, daß  $\Sigma_{[M, M]} \subseteq \Sigma_q$ , und dual für die Inzidenz äußerer Geraden mit inneren Punkten.

(b) Umgekehrt zeigt Salzmann in [30: Satz 2], daß sich durch diese Konstruktion einer Geometrie aus der Gruppe  $\Sigma = \text{SL}_3(\mathbb{H})$  für jede Wahl der Konstante  $\alpha \geq 0$  in 3.14 eine projektive Ebene ergibt, die mit der naheliegenden Topologie (ausgehend von  $P \setminus D = \Sigma/\Pi$  als homogenem Raum) zu einer sechzehndimensionalen topologischen projektiven Ebene wird. Wir bezeichnen diese Ebene als die *Moufang-Hughes-Ebene*  $\mathcal{P}_\alpha$  zum Parameter  $\alpha$ .

(c) Insgesamt ist damit gezeigt, daß die Ebene  $\mathcal{P}$ , von der wir ausgegangen sind, isomorph ist zu einer der Moufang-Hughes-Ebenen  $\mathcal{P}_\alpha$ , womit eine Rich-

tion des Charakterisierungssatzes 1.4 bewiesen ist. Daß umgekehrt jede Moufang-Hughes-Ebene  $\mathcal{P}_\alpha$  die Eigenschaft hat, die diesem Satz zugrundeliegen, ist eine leichte Verifikation; vgl. auch den folgenden Abschnitt.

#### 4. Kollineationen der Moufang-Hughes-Ebenen

**4.1.** Im folgenden betrachten wir eine Moufang-Hughes-Ebene  $\mathcal{P}_\alpha$  wie in 3.14–3.15 konstruiert. Die äußeren Punkte und Geraden repräsentieren wir durch die Nebenklassen der Untergruppen  $\Pi$  bzw.  $\Lambda$  von  $SL_3(\mathbb{H})$  aus 3.14.

Einem Element  $\tau \in SL_3(\mathbb{H})$  entspricht die Kollineation, die auf den äußeren Punkten nach der Vorschrift

$$\Pi\sigma \mapsto \Pi\sigma\tau$$

wirkt und auf den inneren Punkten der Quaternionenebene  $\mathcal{D}$  in der üblichen Weise als projektive Abbildung operiert. Mit den Inzidenzkriterien aus 3.15 verifiziert man direkt, daß es sich tatsächlich um eine Kollineation handelt. Man erhält so eine Kollineationsgruppe  $\Sigma \cong SL_3(\mathbb{H})$  in Übereinstimmung mit den Aussagen in §3, da sie der Ausgangssituation 3.2 entspricht.

**4.2.** Die Gruppe  $\Theta$  der Kollineationen von  $\mathcal{P}_\alpha$ , die alle inneren Punkte festlassen, besteht genau aus den Abbildungen  $\mathcal{S}_c$ , die auf den äußeren Punkten folgendermaßen wirken:

$$\mathcal{S}_c: \Pi\sigma \mapsto \Pi\gamma_c\sigma;$$

dabei durchläuft  $\gamma_c$  die Matrizen

$$\gamma_c = \begin{pmatrix} c & & \\ & c & \\ & & c \end{pmatrix} \in SL_3(\mathbb{H})$$

für

$$c \in \mathbb{C} = \langle 1, i \rangle \subseteq \mathbb{H}, \quad |c| = 1 \quad (\text{falls } \alpha > 0)$$

bzw.

$$c \in \mathbb{H}, \quad |c| = 1 \quad (\text{falls } \alpha = 0).$$

Für  $\alpha > 0$  ist also  $\Theta$  ein eindimensionaler Torus, für  $\alpha = 0$  isomorph zu  $Spin_3(\mathbb{R})$ .

*Beweisskizze.* Die Matrizen  $\gamma_c$  normalisieren  $\Pi$ ; damit kann man entsprechend den Inzidenzbedingungen aus 3.14 ohne weiteres zeigen, daß die angegebenen Abbildungen zu Kollineationen führen.

Sei umgekehrt  $\mathcal{S} \in \Theta$ . Da  $\mathcal{S}$  auf den inneren Punkten identisch wirkt, kommutiert  $\mathcal{S}$  mit allen Elationen in  $\Sigma$  und damit mit allen Elementen von  $\Sigma$ , weil  $\Sigma$  von den Elationen erzeugt wird. Der äußere Punkt  $\Pi$  geht unter  $\mathcal{S}$  über in einen Punkt  $\Pi\lambda$ , der auf derselben inneren Geraden  $L$  liegt, so daß  $\lambda$  dem Stabilisator  $\Sigma_L$  angehört, der in 3.13 explizit angegeben ist. Nun kann man  $\lambda$  noch mit einem Element der Elationengruppe  $\Sigma_{[L, L]}$  modifizieren; man kann also annehmen, daß  $\lambda$  die Form

$$\lambda = \begin{pmatrix} a & & \\ & & \\ & & q \end{pmatrix}$$

hat. Wegen der Vertauschbarkeit von  $\mathcal{Q}$  mit den Elementen von  $\Sigma$  gilt für  $\pi \in \Pi$  nun  $\Pi\lambda = \Pi^{\mathcal{Q}} = (\Pi\pi)^{\mathcal{Q}} = (\Pi^{\mathcal{Q}})\pi = \Pi\lambda\pi$ , d.h.  $\lambda$  normalisiert  $\Pi$ . Daraus und wegen  $\lambda \in \text{SL}_3(\mathbb{H})$  folgt sofort, daß  $Q = r \cdot U$  mit  $U \in \text{SU}_2(\mathbb{H})$  und  $r > 0$ , und daß  $a = r^{-2}c$  mit  $|c|=1$  ist, wobei  $c$  für  $\alpha > 0$  den angegebenen Einschränkungen unterliegt, da dann die Untergruppe  $P_\alpha$  von  $\Pi$  (siehe 3.14) eine echte Spiralgruppe in  $\mathbb{C}^\times$  ist. Insgesamt hat man

$$\lambda = \bar{\pi} \gamma_c$$

für ein geeignetes Element  $\bar{\pi} \in \Pi$ . Wegen der Vertauschbarkeit von  $\mathcal{Q}$  mit den Kollineationen aus  $\Sigma$  folgt dann allgemein  $(\Pi\sigma)^{\mathcal{Q}} = (\Pi^{\mathcal{Q}})\sigma = \Pi\lambda\sigma = \Pi\bar{\pi}\gamma_c\sigma = \Pi\gamma_c\sigma$ .

**4.3. Bemerkung.** Genau für  $\alpha=0$  ist  $\mathcal{P}_\alpha$  die klassische Moufang-Ebene  $\mathcal{P}_2(\mathbb{O})$ .

Dies kann man etwa folgendermaßen einsehen: Wir betrachten  $\mathbb{H}$  als Unterkörper von  $\mathbb{O}$  und die dazugehörige Unterebene  $\mathcal{D} = \mathcal{P}_2(\mathbb{H})$  von  $\mathcal{P}_2(\mathbb{O})$ . Die Elationen von  $\mathcal{P}_2(\mathbb{O})$ , deren Achsen zu  $\mathcal{D}$  gehören und die einen Punkt von  $\mathcal{D}$  wieder nach  $\mathcal{D}$  abbilden, lassen  $\mathcal{D}$  invariant und induzieren sämtliche Elationen von  $\mathcal{D}$  (wegen der Transitivitätseigenschaften von Elationengruppen in der Moufang-Ebene  $\mathcal{P}_2(\mathbb{O})$ ). Die Elationen von  $\mathcal{D}$  erzeugen aber alle Kollineationen von  $\mathcal{D}$ , und somit ist  $\mathcal{P}_2(\mathbb{O})$  nach dem Charakterisierungssatz 1.4 eine der Moufang-Hughes-Ebenen  $\mathcal{P}_\alpha$ .

Nun hat  $\mathbb{O}$  eine zu  $\text{Spin}_3(\mathbb{R})$  isomorphe Gruppe von Automorphismen, die den Unterkörper  $\mathbb{H}$  elementweise festlassen (siehe z.B. [6: 3.1(vi)]). Dem entspricht eine zu  $\text{Spin}_3(\mathbb{R})$  isomorphe Gruppe von Kollineationen von  $\mathcal{P}_2(\mathbb{O})$ , die  $\mathcal{D}$  punktweise festlassen. Nach 4.2 kann daher  $\mathcal{P}_\alpha$  nur für  $\alpha=0$  isomorph zu  $\mathcal{P}_2(\mathbb{O})$  sein.

**4.4. Eine Homologie von  $\mathcal{D}$  läßt sich genau dann wiederum zu einer Homologie von  $\mathcal{P}_\alpha$  fortsetzen, wenn ihr Streckungsfaktor reell ist.**

*Beweis.* Wir verwenden die Bezeichnungen und Konventionen von 3.13–3.15. Eine Homologie von  $\mathcal{D}$  mit Achse  $L$  und Zentrum  $o$  wird in  $\text{SL}_3(\mathbb{H})$  repräsentiert von einer Matrix der Form

$$\rho = \begin{pmatrix} s^{-2}a & & \\ & s & \\ & & s \end{pmatrix}$$

mit  $a \in \mathbb{H}$ ,  $|a|=1$  und  $s > 0$ .

Eine Homologie  $\psi$  von  $\mathcal{P}_\alpha$  mit Achse  $L$ , die auf  $\mathcal{D}$  diese Homologie induziert, ist ein Element von  $\Sigma \cdot \Theta$  (da  $\Sigma$  auf  $\mathcal{D}$  die volle Kollineationsgruppe induziert) und wirkt nach 4.2 auf den äußeren Punkten also folgendermaßen:

$$(\Pi\sigma)^\psi = \Pi\gamma_c\sigma\rho, \quad (4)$$

wobei  $\gamma_c$  eine der in 4.2 spezifizierten Matrizen ist.

Für beliebiges  $b \in \mathbb{H}$  mit  $|b|=1$  läßt nun

$$\sigma = \begin{pmatrix} b & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \in \text{SL}_3(\mathbb{H})$$

die Gerade  $L$  invariant. Das Bild  $\Pi\sigma$  des mit  $L$  inzidenten äußeren Punkts  $\Pi$  gehört daher wieder zu  $L$  und bleibt also unter der Homologie  $\psi$  fest. Folglich ist  $\Pi\gamma_c\sigma\rho=\Pi\sigma$ , d.h.  $\gamma_c\sigma\rho\sigma^{-1}\in\Pi$ . Einsetzen der Matrizen liefert die Bedingung, daß  $s^{-2}cbab^{-1}$  ein Element der Spiralgruppe  $P_\alpha$  (3.14) sein soll für alle  $b\in\mathbb{H}$  mit  $|b|=1$ . Dies ist nur möglich für reelles  $a$ , also  $a=\pm 1$ . Die Bedingung wird dann  $\pm s^{-2}c\in P_\alpha$ , also  $\pm s^{-2}c=e^{-2(1+i\alpha)t}$  für geeignetes  $t\in\mathbb{R}$ , d.h.  $s=e^t$  und  $c=\pm e^{-2i\alpha t}$ . Wir haben dann speziell

$$\gamma_c = \begin{pmatrix} \pm e^{-2i\alpha t} & & \\ & \pm e^{-2i\alpha t} & \\ & & \pm e^{-2i\alpha t} \end{pmatrix}$$

und

$$\rho = \begin{pmatrix} \pm e^{-2t} & & \\ & e^t & \\ & & e^t \end{pmatrix}.$$

Umgekehrt kann man verifizieren, daß mit solchen Matrizen  $\gamma_c$  und  $\rho$  die in (4) angegebene Kollineation  $\psi$  alle Punkte auf  $L$  (auch die äußeren!) festläßt und also eine Homologie von  $\mathcal{P}_\alpha$  darstellt. Auf  $\mathcal{D}$  induzieren diese Homologien angesichts der Gestalt der in Frage kommenden Matrizen  $\rho$  genau die Homologien mit reellen Streckungsfaktoren.

**4.5.** Ist  $\alpha>0$ , so ist die Unterebene  $\mathcal{D}=\mathcal{P}_2(\mathbb{H})$  von  $\mathcal{P}_\alpha$  invariant unter allen stetigen Kollineationen.

*Beweis.* Angesichts der Transitivität von  $\Sigma$  auf den äußeren Fahnen (3.6) wäre sonst die Gruppe der stetigen Kollineationen transitiv auf der Menge aller Punkte von  $\mathcal{P}_\alpha$ , und  $\mathcal{P}_\alpha$  wäre die Oktavenebene ([26], [15]), also  $\alpha=0$  nach 4.3.

**4.6. Bemerkung.** Für verschiedene Parameter  $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$  sind die Moufang-Hughes-Ebenen  $\mathcal{P}_{\alpha_1}$  und  $\mathcal{P}_{\alpha_2}$  nicht isomorph.

Dies ergibt sich etwa folgendermaßen: Sei  $\varphi$  ein Isomorphismus zwischen  $\mathcal{P}_{\alpha_1}$  und  $\mathcal{P}_{\alpha_2}$ . Wegen 4.3 können wir von den Fällen  $\alpha_1=0$  oder  $\alpha_2=0$  absehen. In den anderen Fällen führt  $\varphi$  nach 4.5 die in beiden Ebenen enthaltene Unterebene  $\mathcal{D}=\mathcal{P}_2(\mathbb{H})$  in sich über. Weiter kann man den Isomorphismus angesichts der Transitivitätseigenschaften von  $\Sigma$  so normieren, daß er den  $\Pi$  entsprechenden äußeren Punkt  $p$  von  $\mathcal{P}_{\alpha_1}$ , die eindeutig bestimmte innere Gerade  $L$  durch  $p$ , sowie den inneren Punkt  $o\notin L$  auf die entsprechenden Elemente von  $\mathcal{P}_{\alpha_2}$  abbildet. Konjugation mit  $\varphi$  führt außerdem die Faktoren  $\Sigma \cong \mathrm{SL}_3(\mathbb{H})$  der Kollineationsgruppen ineinander über, also auch die Gruppen  $\Pi_o = \Sigma_{p,L,o}$  (vgl. 3.9) in beiden Ebenen. Auf der in beiden Ebenen enthaltenen affinen Ebene  $D \setminus L \cong \mathbb{H}^2$  induziert  $\varphi$  eine Kollineation, die  $o$  festläßt, also ein Element von  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{H}) \cdot \mathbb{H}^\times$ . Nach der Beschreibung 3.11 der Untergruppen  $\Pi_o$  in beiden Ebenen (mit  $P=P_{\alpha_1}$  bzw.  $P=P_{\alpha_2}$ ) ergibt sich damit, daß die Spiralgruppen  $P_{\alpha_1}$  und  $P_{\alpha_2}$  in  $\mathbb{H}^\times$  konjugiert sind; die "Spiralweiten"  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  sind aber invariant unter Konjugation in  $\mathbb{H}^\times$  und daher gleich.

**Literatur**

1. Browder, W.: Torsion in  $H$ -spaces. *Ann. Math.* **74**, 24–51 (1961)
2. Cartan, E.: Sur les invariants intégraux de certains espaces homogènes clos et les propriétés topologiques de ces espaces. *Ann. Soc. Polon. Math.* **8**, 181–222 (1929)
3. Chevalley, C., Eilenberg, S.: Cohomology theory of Lie groups and Lie algebras. *Trans. Am. Math. Soc.* **63**, 85–124 (1948)
4. Dembowski, P.: Zur Geometrie der Gruppen  $\text{PSL}_3(q)$ . *Math. Z.* **117**, 125–134 (1970)
5. Dembowski, P.: Gruppenerhaltende quadratische Erweiterungen endlicher desarguesscher projektiver Ebenen. *Arch. Math.* **22**, 214–220 (1971)
6. Hähl, H.: Automorphismengruppen achtdimensionaler lokalkompakter Quasikörper. *Math. Z.* **149**, 203–225 (1976)
7. Higman, D.G., McLaughlin, J.E.: Geometric ABA-groups. *Ill. J. Math.* **5**, 382–397 (1961)
8. Hochschild, G.: *The Structure of Lie Groups*. San Francisco-London-Amsterdam: Holden-Day 1965
9. Hughes, D.R., Piper, F.C.: *Projective Planes*. New York-Heidelberg-Berlin: Springer 1973
10. Husemoller, D.: *Fibre Bundles*. New York: McGraw-Hill 1966
11. Kalscheuer, F.: Die Bestimmung aller stetigen Fastkörper. *Abh. Math. Semin. Univ. Hamburg* **13**, 413–435 (1940)
12. Kolmogoroff, A.N.: Zur Begründung der projektiven Geometrie. *Ann. Math.* **33**, 175–176 (1932)
13. Koszul, J.L.: Sur le troisième nombre de Betti des espaces de groupes de Lie compacts. *C.R. Acad. Sci., Paris* **224**, 251–253 (1947)
14. Löwen, R.: Halbeinfache Automorphismengruppen von vierdimensionalen stabilen Ebenen sind quasi-einfach. *Math. Ann.* **236**, 15–28 (1978)
15. Löwen, R.: Homogeneous compact projective planes. *J. Reine Angew. Math.* **321**, 217–220 (1981)
16. Löwen, R.: Topology and dimension of stable planes: On a conjecture of H. Freudenthal. *J. Reine Angew. Math.* **343**, 108–122 (1983)
17. Löwen, R., Salzmann, H.: Collineation groups of compact connected projective planes. *Arch. Math.* **38**, 368–373 (1982)
18. Montgomery, D., Zippin, L.: *Topological Transformation Groups*. New York: Interscience 1955
19. Ostrom, T.G.: Semi-translation planes. *Trans. Am. Math. Soc.* **111**, 1–18 (1964)
20. Ostrom, T.G.: A characterization of the Hughes planes. *Can. J. Math.* **17**, 916–922 (1965)
21. Pontrjagin, L.S.: *Topologische Gruppen, Teil 2*. Leipzig: Teubner 1958
22. Salzmann, H.: Über den Zusammenhang in topologischen projektiven Ebenen. *Math. Z.* **61**, 485–494 (1955)
23. Salzmann, H.: Topological planes. *Adv. Math.* **2**, 1–60 (1967)
24. Salzmann, H.: Kollineationsgruppen kompakter, vierdimensionaler Ebenen. *Math. Z.* **117**, 112–124 (1970)
25. Salzmann, H.: Reelle Kollineationen der komplexen projektiven Ebene. *Geom. Dedicata* **1**, 344–348 (1973)
26. Salzmann, H.: Homogene kompakte projektive Ebenen. *Pac. J. Math.* **60**, 217–234 (1975)
27. Salzmann, H.: Compact 8-dimensional projective planes with large collineation groups. *Geom. Dedicata* **8**, 139–161 (1979)
28. Salzmann, H.: Automorphismengruppen 8-dimensionaler Ternärkörper. *Math. Z.* **166**, 265–275 (1979)
29. Salzmann, H.: Kompakte, 8-dimensionale projektive Ebenen mit großer Kollineationsgruppe. *Math. Z.* **176**, 345–357 (1981)
30. Salzmann, H.: Baer-Kollineationsgruppen der klassischen projektiven Ebenen. *Arch. Math.* **38**, 374–377 (1982)
31. Samelson, H.: Topology of Lie groups. *Bull. Am. Math. Soc.* **58**, 2–37 (1952)
32. Smith, P.A.: Fixed-point theorems for periodic transformations. *Am. Math. J.* **63**, 1–8 (1941)

33. Spanier, E.: Algebraic Topology. New York: McGraw-Hill 1966
34. Steenrod, N.: The topology of fibre bundles. Princeton: Princeton University Press 1951
35. Tits, J.: Sur les groupes doublement transitifs continus: corrections et compléments. Comment. Math. Helv. **30**, 234–240 (1956)
36. Tits, J.: Tabellen zu den einfachen Liegruppen und ihren Darstellungen. Lecture Notes in Math. **40**. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1967

Eingegangen am 4. September 1984