Arch. Math., Vol. 48, 267–276 (1987) 0003-889X/87/4803-0267 $ 3.50/0

Sechzehndimensionale lokalkompakte Translationsebenen mit Spin (7) als Kollineationsgruppe

Von

HERMANN HÄHL

1. Einleitung. Ziel dieser Note ist die explizite Bestimmung und Beschreibung aller sechzehndimensionalen lokalkompakten Translationsebenen, in denen die Gruppe $\mathfrak{G}$ der affinen Kollineationen eine zu $SO_7(\mathbb{R})$ lokal isomorphe Untergruppe besitzt (Klassifikationssatz 4.2).

Die in solchen Ebenen für die Kollineationsgruppe $\mathfrak{G}$ bestehenden Möglichkeiten lassen sich schon vorab leicht überblicken (2.3 und detaillierter dann Satz 5.2); abgesehen von der Oktavenebene ist $\mathfrak{G}$ eine Liegruppe der Dimension 38 oder 39. Diese Ebenen bilden also einen wichtigen Bestandteil der in [7: S. 264] angekündigten Klassifikation aller sechzehndimensionalen lokalkompakten Translationsebenen mit mindestens 38-dimensionaler Kollineationsgruppe.

Bei der Untersuchung dieser Ebenen werden wir, soweit dies möglich ist, auf den analogen Fall für achtdimensionale Ebenen zurückgreifen, der in [8] behandelt wurde.

2. Kollineationsgruppen. Im folgenden sei eine sechzehndimensionale lokalkompakte Translationsebene mit einer zu $SO_7(\mathbb{R})$ lokal isomorphen, zusammenhängenden Gruppe Σ von affinen Kollineationen gegeben.

2.1. Allgemeines. Die affine Punktmenge $\mathbb{A}$ läßt sich so mit dem Vektorraum $\mathbb{R}^{16}$ identifizieren, daß die Geraden durch den Ursprung o Untervektorräume der Dimension 8 werden, und daß die Translationen die üblichen Vektorraumtranslationen sind. Die Ebene wird koordinatisiert über einem Quasikörper mit additiver Gruppe $\mathbb{R}^8$ (siehe etwa [4: § 3]).

Die zentrischen Streckungen vom Zentrum o aus, d.h. die affinen Kollineationen, die alle Ursprungsgeraden invariant lassen und also identisch auf der uneigentlichen Geraden L_∞ wirken, werden in Koordinaten über einem solchen Quasikörper beschrieben durch komponentenweise Multiplikation mit Elementen des sog. Kerns des Quasikörpers ([1], [11: 8.2]). Bei einem achtdimensionalen lokalkompakten Quasikörper besteht nun der Kern immer nur aus den reellen Vielfachen des Einselements ([2: Theorem 1]). Die Gruppe $\mathfrak{G}_{[o, L_\infty]}$ der zentrischen Streckungen mit Zentrum o besteht also genau aus den reellen skalaren Streckungen von $\mathbb{A} = \mathbb{R}^{16}$.

Die affine Kollineationsgruppe $\mathfrak{G}$ ist das semidirekte Produkt der zur Vektorgruppe $\mathbb{R}^{16}$ isomorphen Translationsgruppe mit dem Stabilisator $\mathfrak{G}_o$ des Ursprungs. Die Kollineationen aus $\mathfrak{G}_o$ sind semilinear über dem Kern ([1], [11: 8.3 (8)]), im vorliegenden Fall also $\mathbb{R}$-lineare Abbildungen, d. h. $\mathfrak{G}_o$ ist eine Untergruppe von $GL_{16}(\mathbb{R})$, die im übrigen topologisch abgeschlossen ist.

2.2. Wirkung von Σ. Durch Faktorisierung nach der kompaktfreien Translationsgruppe sieht man, daß mit $\mathfrak{G}$ auch $\mathfrak{G}_o$ eine zu $SO_7(\mathbb{R})$ lokal isomorphe Untergruppe enthält. O. B. d. A. ist also

$$\Sigma \leqq \mathfrak{G}_o.$$

Nach [6: 3.6] läßt Σ zwei Ursprungsgeraden S und W invariant. Wir betrachten nun die Möglichkeiten, die für die Wirkung von Σ auf diesen zu $\mathbb{R}^8$ isomorphen Teilräumen bestehen. Σ kann nicht trivial auf einer der beiden Geraden operieren, da sie sonst als Gruppe von Achsenstreckungen frei auf der anderen Geraden wirken müßte, was schon aus Dimensionsgründen nicht geht. Anhand der Informationen über Darstellungen einfacher Liegruppen (siehe z. B. [12]) ergibt sich ferner, daß die lineare Wirkung von Σ auf S bzw. W entweder äquivalent zur Spindarstellung von Spin (7) ist oder zur naheliegenden Wirkung als $SO_7(\mathbb{R})$ auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^7$ (bei der die Faktoren invariant bleiben und auf $\mathbb{R}^7$ die gewöhnliche Wirkung vorliegt).

Dabei ist der Fall, daß Σ sowohl auf S als auch auf W eine zu $SO_7(\mathbb{R})$ isomorphe Transformationsgruppe induziert, ausgeschlossen, denn dann hätte Σ auf beiden Geraden von o verschiedene Fixpunkte und würde also beschrieben durch eine Gruppe von Automorphismen eines geeigneten koordinatisierenden Quasikörpers; ein lokalkompakter Quasikörper mit additiver Gruppe $\mathbb{R}^8$ hat aber nie eine zu $SO_7(\mathbb{R})$ isomorphe Automorphismengruppe ([5]). – Alternativ kann man auch von dem Hilfssatz in [10: § 3] Gebrauch machen, wo direkt gezeigt wird, daß $\mathfrak{G}_o$ keine zu $SO_6(\mathbb{R})$ isomorphe Untergruppe und damit erst recht keine zu $SO_7(\mathbb{R})$ isomorphe Untergruppe haben kann.

Der Fall, daß sowohl auf S als auch auf W die Spindarstellung induziert wird, kommt nur in der klassischen Ebene über der Oktavenalgebra vor ([6: 3.6]).

Zu behandeln bleibt also der gemischte Fall, daß o. B. d. A.

$$\Sigma \mid W \cong SO_7(\mathbb{R}), \qquad \Sigma \mid S \cong \mathrm{Spin}(7).$$

Die Wirkung von Σ auf der uneigentlichen Geraden L_∞ läßt sich dann durch „Projektion" an der Wirkung auf einer Parallele zu S durch einen von o verschiedenen affinen Fixpunkt auf W ablesen: Σ läßt auf L_∞ genau die beiden uneigentlichen Punkte s und w von S und W fest und wirkt auf $L_\infty \backslash \{s\} \cong \mathbb{R}^8$ wie Spin (7) auf $\mathbb{R}^8$ in der Spindarstellung:

$$\Sigma \mid L_\infty \cong \mathrm{Spin}(7).$$

Insbesondere hat Σ in $L_\infty \backslash \{w, s\}$ lauter zur 7-Sphäre homöomorphe Bahnen. (Dies kann man etwa durch Realisierung von Spin (7) als Kollineationsgruppe der Oktavenebene bequem einsehen, siehe z. B. [6: 3.5 c] für ein pauschales Argument. In Abschnitt 3 der vorliegenden Arbeit werden hierzu genaue Ausführungen gemacht, die sich direkt auf die algebraische Struktur der Oktaven stützen, vgl. 3.2.)

2.3. Die Zusammenhangskomponente der vollen Kollineationsgruppe.

(a) Ausgehend von diesen Informationen über die Bahnen von Σ in L_∞ besagt der Hauptsatz („Sphärensatz") von [6: 1.2], daß s und w unter der Zusammenhangskomponente Γ von ganz $\mathbb{G}$ festbleiben, es sei denn, die Ebene wäre die Oktavenebene oder sie hätte den Lenz-Typ V, wobei einer der beiden uneigentlichen Punkte s oder w Zentrum einer transitiven Gruppe von Scherungen wäre.

(b) Es soll nun zunächst gezeigt werden, daß dabei eine echte Lenz-Typ-V-Ebene nicht auftritt. Dazu benutzen wir die Technik der Transposition und der Dualisierung in analoger Weise, wie sie in [9: § 5, 5.4, 5.5] bei achtdimensionalen Translationsebenen angewandt wurde. Bis auf Vertauschung der Rollen von S und W hat man die Situation zu betrachten, daß die Gruppe der Scherungen mit Achse S transitiv auf $L_\infty \backslash \{s\}$ operiert. Dabei kann man die getroffene Festlegung beibehalten, daß $\Sigma \mid W \cong \mathrm{SO}_7(\mathbb{R})$ und $\Sigma \mid S \cong \mathrm{Spin}(7)$: ist es andersherum, so kann man zur transponierten Ebene (siehe [3]) übergehen, in der dies wieder gilt.

Wegen der linear transitiven Scherungsgruppe können wir nun auch noch die duale Ebene betrachten, die dann ebenfalls eine Translationsebene ist. Angesichts der weiteren Annahmen wirkt Σ in der dualen Ebene auf zwei Ursprungsgeraden als Spin(7) (entsprechend den beiden Geraden S und L_∞ in der ursprünglichen Ebene bzw. den zugehörigen Geradenbüscheln durch w und o). Wie in 2.2 schon erwähnt, ist dies aber nur in der klassischen Oktavenebene möglich ([6: 3.6]).

(c) Insgesamt hat sich damit ergeben, daß abgesehen von der Oktavenebene s und w Fixpunkte der Zusammenhangskomponente Γ sind. Der Stabilisator Γ_o des Ursprungs läßt also S und W invariant:

$$\Gamma_o = \Gamma_{S,W}.$$

Wir zeigen nun:

(d) *Ist die Ebene nicht die klassische Oktavenebene, so ist Σ eine maximale kompakte Untergruppe von Γ_o.*

Sei nämlich C eine maximale kompakte Untergruppe von Γ_o mit $C \supseteqq \Sigma$. C wirkt fast effektiv auf $W \cong \mathbb{R}^8$ (siehe [7: 2.7 (ii)]) als kompakte zusammenhängende lineare Gruppe, die $\Sigma \mid W \cong \mathrm{SO}_7(\mathbb{R})$ umfaßt. Nun sind bekanntlich die maximalen kompakten zusammenhängenden Untergruppen von $\mathrm{GL}_8(\mathbb{R})$ konjugiert zu $\mathrm{SO}_8(\mathbb{R})$, und die einzige echte Untergruppe zwischen $\mathrm{SO}_7(\mathbb{R})$ und $\mathrm{SO}_8(\mathbb{R})$ ist isomorph zu $\mathrm{O}_7(\mathbb{R})$, so daß $\mathrm{SO}_7(\mathbb{R})$ maximal unter den echten zusammenhängenden kompakten Untergruppen von $\mathrm{SO}_8(\mathbb{R})$ ist. Demnach ist entweder $C \mid W = \Sigma \mid W$, oder aber $C \mid W \cong \mathrm{SO}_8(\mathbb{R})$. Im letzteren Fall ist C lokal isomorph zu $\mathrm{SO}_8(\mathbb{R})$, aber nach [6: 3.7] läßt nur die klassische Oktavenebene eine solche Kollineationsgruppe zu. Aus $C \mid W = \Sigma \mid W$ folgt andererseits mit Dimensions- und Zusammenhangsargumenten $C = \Sigma$.

(e) Nach dem Lemma über Achsenstandsgruppen ([6: 2.1]) ist nun $\Gamma_o = \Gamma_{S,W}$ entweder das direkte Produkt

(Fall 1) $\Gamma_o = \Sigma \cdot R$

der maximalen kompakten Untergruppe Σ mit der Gruppe R der positiven reellen Streckungen, oder aber semidirektes Produkt

(Fall 2) $\Gamma_o = \Sigma \cdot R \cdot Y$

des Normalteilers $\Sigma \cdot R$ mit einer nichtkompakten abgeschlossenen Einparameteruntergruppe Y. Insbesondere ist die Dimension von Γ_o entweder 22 oder 23, und angesichts der 16-dimensionalen Translationsgruppe also

$$\dim \Gamma = \begin{cases} 38 & \text{im Fall 1} \\ 39 & \text{im Fall 2}. \end{cases}$$

3. Spin (7) als Kollineationsgruppe der Oktavenebene. Die explizite Bestimmung aller Ebenen der hier diskutierten Art wird durch Vergleich mit der klassischen Oktavenebene erfolgen. Vorbereitend soll hier eine zu Spin (7) isomorphe Kollineationsgruppe Σ der Oktavenebene, die den in 2.2 für den allgemeinen Fall geschilderten Verhältnissen genau entspricht, in Koordinaten fixiert werden.

Auf der Oktavenalgebra $\mathbb{O}$ aufgefaßt als $\mathbb{R}$-Vektorraum betrachten wir das Skalarprodukt $(x, y) \mapsto \frac{1}{2}(x\bar{y} + y\bar{x})$, die zugehörige Norm mit $|x|^2 = x\bar{x}$ und den entsprechenden Orthogonalitätsbegriff. Mit Pu $\mathbb{O}$ bezeichnen wir den Raum der reinen Oktaven, mit SPu $\mathbb{O}$ die Teilmenge der reinen Oktaven der Norm 1.

3.1. Lemma. *In der affinen Ebene über $\mathbb{O}$ sind die Transformationen*

$$\sigma_c\colon \mathbb{O}\times\mathbb{O} \to \mathbb{O}\times\mathbb{O}\colon (x, y) \mapsto (-cxc, yc)$$

für

$$c \in \mathrm{SPu}\,\mathbb{O}$$

Kollineationen; sie erzeugen eine zu Spin (7) *isomorphe Kollineationsgruppe Σ.*

Auf der „waagrechten" Koordinatenachse $W = \mathbb{O} \times \{0\} \triangleq \mathbb{O}$ induziert Σ eine zu $\mathrm{SO}_7(\mathbb{R})$ *isomorphe Transformationsgruppe, die $1 \in \mathbb{O}$ fest und* Pu $\mathbb{O} \cong \mathbb{R}^7$ *invariant läßt und auf* Pu $\mathbb{O}$ *die Gruppe aller eigentlichen Rotationen induziert.*

Auf der „senkrechten" Koordinatenachse $S = \{0\} \times \mathbb{O}$ wirkt Σ effektiv (Spindarstellung).

Beweis. Für $c \in \mathrm{SPu}\,\mathbb{O}$ ist $\bar{c} = -c$ und $c^2 = -\bar{c}c = -1$. Für beliebige $m, x \in \mathbb{O}$ folgt damit aus den Moufang-Identitäten

$$(mc)(-cxc) = (mx)c.$$

Dies bedeutet, daß σ_c eine Kollineation ist, die die Ursprungsgerade der Steigung m in die Ursprungsgerade der Steigung mc überführt.

Die von σ_c auf der waagrechten Koordinatenachse induzierte Transformation entspricht der Abbildung

$$\kappa_c\colon \mathbb{O} \to \mathbb{O}\colon x \mapsto -cxc.$$

Wegen $c \in \mathrm{SPu}\,\mathbb{O}$ ist $\kappa_c(1) = -c^2 = 1$ und $\kappa_c(c) = -c^2 \cdot c = c$; für $x \in \mathrm{Pu}\,\mathbb{O}$ mit $x \perp c$ ist $c\,x = -x\,c$ und daher $\kappa_c(x) = -x$. Insgesamt läßt κ_c die 1 fest und $\mathrm{Pu}\,\mathbb{O}$ invariant und induziert in $\mathrm{Pu}\,\mathbb{O}$ die orthogonale Spiegelung an c. Die Gesamtheit der κ_c für $c \in \mathrm{SPu}\,\mathbb{O}$ erzeugt die Gruppe $\mathrm{SO}_7(\mathbb{R})$ der eigentlichen Rotationen von $\mathrm{Pu}\,\mathbb{O} \cong \mathbb{R}^7$ (da die Menge dieser Spiegelungen invariant unter $\mathrm{SO}_7(\mathbb{R})$ und ihr Erzeugnis damit ein Normalteiler ist; $\mathrm{SO}_7(\mathbb{R})$ ist aber einfach).

Sei nun Σ die von den σ_c erzeugte Kollineationsgruppe der Oktavenebene; wir betrachten die durch Einschränkung gewonnene Abbildung

$$\Phi\colon \Sigma \to \Sigma \mid W = \mathrm{SO}_7(\mathbb{R}).$$

Die Spiegelung an der W-Achse

$$\iota\colon (x, y) \mapsto (x, -y)$$

gehört zu Σ; es ist nämlich

(1) $$\iota = \sigma_c^2 \quad \text{für alle} \quad c \in \mathrm{SPu}\,\mathbb{O},$$

wie man aufgrund der Biassoziativität von $\mathbb{O}$ sofort nachrechnet. Sie liegt im Kern der Einschränkungsabbildung, und dieser kann darüber hinaus keine weiteren von der Identität verschiedenen Elemente enthalten, denn die Elemente von Σ sind normerhaltend, da die σ_c es sind, und die Gruppe der Achsenstreckungen mit W als Achse in Richtung von S besteht in der Oktavenebene nur aus den reellen Streckungen der zweiten Koordinate, enthält also außer der Identität und ι kein weiteres normerhaltendes Element. Insgesamt ist somit $\mathrm{Ker}\,\Phi = \{\mathrm{id}, \iota\}$. Damit folgt aus der Kompaktheit von $\Sigma \mid W = \mathrm{SO}_7(\mathbb{R})$ die Kompaktheit von Σ, und Φ ist eine zweiblättrige Überlagerung. Ferner ergibt sich nun, daß Σ zusammenhängend ist, denn jede Zusammenhangskomponente enthält mindestens ein Element des Kerns der Überlagerungsabbildung Φ, und wegen (1) liegt ι in der Zusammenhangskomponente des Neutralelements. Σ ist also die universelle Überlagerungsgruppe $\mathrm{Spin}(7)$ von $\mathrm{SO}_7(\mathbb{R})$. Wegen der Einfachheit von $\mathrm{SO}_7(\mathbb{R})$ ist der Kern von Φ der einzige echte Normalteiler von Σ, und da ι nichttrivial auf S wirkt, ist Σ dort effektiv.

3.2. Korollar. *Die Gruppe* $\mathrm{Spin}(7) \subseteq \mathrm{SO}_8(\mathbb{R})$ *wird erzeugt von den Transformationen*

$$\mathbb{R}^8 = \mathbb{O} \to \mathbb{O}\colon x \mapsto x\,c \quad \textit{mit} \quad c \in \mathrm{SPu}\,\mathbb{O}.$$

3.3. Zusatz. *Der Stabilisator* Π *von* Σ *im Punkt* $(0, 1) \in S$ *besteht genau aus den Transformationen*

$$\pi_\alpha\colon (x, y) \mapsto (\alpha(x), \alpha(y)) \quad \textit{mit} \quad \alpha \in \mathrm{G}_2$$

(*wobei* G_2 *die Automorphismengruppe der Oktavenalgebra bezeichnet*).

In der Tat wird jede Kollineation, die die Einheitspunkte $(1, 0)$ und $(0, 1)$ der Koordinatenachsen festläßt, in der angegebenen Weise durch einen Automorphismus des Koordinatenbereichs beschrieben. Umgekehrt ist jeder Automorphismus α normerhaltend, läßt also $\mathrm{Pu}\,\mathbb{O}$ invariant und induziert dort eine Transformation aus $\mathrm{SO}_7(\mathbb{R})$, da G_2 zusammenhängend ist (siehe etwa [5: 1.3]). Es existiert somit ein Element $\sigma \in \Sigma$ mit

$\sigma | W = \pi_\alpha | W$, und $\pi_\alpha \circ \sigma^{-1}$ ist eine normerhaltende Achsenstreckung mit Achse W in Richtung von S. Wie eben im Beweis von 3.1 ergibt sich daraus $\pi_\alpha \circ \sigma^{-1} \in \{\mathrm{id}, \iota\}$ und wegen $\iota \in \Sigma$ also $\pi_\alpha \in \Sigma$.

4. Bestimmung der Ebenen.

4.1. Sei nun wieder eine beliebige 16-dimensionale Translationsebene $\mathscr{P}$ mit einer zu $\mathrm{SO}_7(\mathbb{R})$ lokal isomorphen Kollineationsgruppe Σ gegeben. Es soll jetzt eine konkrete Beschreibung von $\mathscr{P}$ hergeleitet werden.

(a) Aufgrund der Ausführungen in 2.2 und 3.1 können wir die affine Punktmenge $\mathbb{A}$ von $\mathscr{P}$ so mit der affinen Punktmenge $\mathbb{O} \times \mathbb{O}$ der klassischen Oktavenebene identifizieren, daß Σ eine Kollineationsgruppe auch der Oktavenebene, nämlich die in 3.1 beschriebene Gruppe wird, und daß $W = \mathbb{O} \times \{0\}$ und $S = \{0\} \times \mathbb{O}$ Geraden von $\mathscr{P}$ sind.

Wir betrachten nun die Ursprungsgerade L_r von $\mathscr{P}$ durch den Punkt $(1, r)$ mit $0 < r \in \mathbb{R} \subseteq \mathbb{O}$. Dieser Punkt bleibt fest unter der Untergruppe $\Pi \cong \mathrm{G}_2$ von Σ aus 3.3, also ist L_r invariant unter Π und hat daher als zu W und S komplementärer Teilraum von $\mathbb{O} \times \mathbb{O}$ die Gestalt $L_r = \{(x, \eta(x));\ x \in \mathbb{O}\}$, wobei η eine $\mathbb{R}$-lineare Transformation von $\mathbb{O}$ mit $\eta(1) = r$ ist, die G_2 zentralisiert. Da G_2 transitiv auf $\mathrm{SPu}\,\mathbb{O}$ operiert und da der Stabilisator in G_2 einer reinen Oktav a genau den von 1 und a aufgespannten $\mathbb{R}$-Untervektorraum elementweise festläßt (vgl. etwa [5: 1.3, 3.5]), gilt $\eta(x) = r \cdot \mathrm{Re}\, x + \varrho(r) \cdot \mathrm{Pu}\, x$ für alle $x \in \mathbb{O}$, wobei $\mathrm{Re}\, x$ und $\mathrm{Pu}\, x$ der Realteil und der reine Teil von x und $0 \neq \varrho(r) \in \mathbb{R}$ sind. Insgesamt ist also

$$L_r = \{(x,\ r \cdot \mathrm{Re}\, x + \varrho(r) \cdot \mathrm{Pu}\, x);\ x \in \mathbb{O}\}.$$

Dabei kann man o. B. d. A.

$$\varrho(1) = 1$$

annehmen, indem man nötigenfalls die Identifikation von $\mathbb{A}$ mit $\mathbb{O} \times \mathbb{O}$ noch durch Streckung der reinen Teile in der ersten Koordinate abändert, was die Beschreibung von Σ gemäß 3.1 nicht tangiert.

(b) Das Bild der Ursprungsgerade L_r unter der Kollineation σ_c aus 3.1 (für $c \in \mathrm{SPu}\,\mathbb{O}$) besteht aus den Punkten

$$(2) \qquad (-cxc,\ rc \cdot \mathrm{Re}\, x + \varrho(r) \cdot \mathrm{Pu}\, x \cdot c), \quad x \in \mathbb{O}.$$

Setzt man hierin

$$x' = -cxc$$

und beachtet, daß

$$\mathrm{Re}\, x' = \mathrm{Re}\, x$$

$$\mathrm{Pu}\, x' = -c \cdot \mathrm{Pu}\, x \cdot c,$$

wegen $c^2 = -1$ also $\mathrm{Pu}\, x = -c \cdot \mathrm{Pu}\, x' \cdot c$ ist, so erhält man in (2) für die zweite Koordinate $rc \cdot \mathrm{Re}\, x' + \varrho(r) \cdot c \cdot \mathrm{Pu}\, x'$. Indem man jetzt x' wieder in x umbenennt,

$b = r \cdot c \in \mathrm{Pu}\,\mathbb{O}$ setzt und $r = |b|$ beachtet, erhält man als Bild von L_r unter σ_c die Ursprungsgerade

$$L_b = \left\{\left(x,\ b \cdot \mathrm{Re}\,x + \varrho(|b|) \cdot \frac{b}{|b|} \cdot \mathrm{Pu}\,x\right);\ x \in \mathbb{O}\right\}$$

durch $(1, b)$. Mittels geeigneter Wahl von r und c kann darin b nun eine beliebige reine Cayley-Zahl $\neq 0$ sein.

(c) Die Bildgerade von L_b unter einer der Kollineationen σ_c (wobei nun wieder c ein beliebiges Element von $\mathrm{SPu}\,\mathbb{O}$ unabhängig von b ist) ergibt sich mit ähnlichen Rechnungen wie eben. Sie besteht aus den Punkten mit erster Koordinate $x' = -\,c\,x\,c$ und zweiter Koordinate $b\,c \cdot \mathrm{Re}\,x' + \varrho(|b|) \cdot \left(\frac{b}{|b|}(-\,c \cdot \mathrm{Pu}\,x' \cdot c)\right) c$. Dies läßt sich mit Hilfe der Moufang-Identitäten noch folgendermaßen umformen:

$$(b \cdot (-\,c \cdot \mathrm{Pu}\,x' \cdot c))\,c = -\,(((b\,c)\,\mathrm{Pu}\,x')\,c)\,c = -\,(b\,c)\,\mathrm{Pu}\,x' \cdot c^2 = (b\,c)\,\mathrm{Pu}\,x'.$$

Mit $a = b\,c$ erhält man damit die Ursprungsgerade

$$L_a = \left\{\left(x,\ a \cdot \mathrm{Re}\,x + \varrho(|a|) \cdot \frac{a}{|a|} \cdot \mathrm{Pu}\,x\right);\ x \in \mathbb{O}\right\}$$

durch $(1, a)$, wobei nun $a = b\,c$ durch geschickte Wahl von $b \in \mathrm{Pu}\,\mathbb{O}$ und $c \in \mathrm{SPu}\,\mathbb{O}$ eine völlig beliebige Cayley-Zahl $\neq 0$ sein kann. Damit sind alle Ursprungsgeraden bestimmt.

(d) Sei nun Q der Quasikörper, der die Ebene bezüglich W und S als Koordinatenachsen und den Einheitspunkten $(1, 0)$ und $(0, 1)$ koordinatisiert. Aufgrund der ermittelten Gestalt der Ursprungsgeraden läßt sich die Multiplikation $\circ$ von Q als Modifikation der Oktavenmultiplikation folgendermaßen beschreiben: Für $0 \neq a$ ist

$$a \circ x = a \cdot \left(\mathrm{Re}\,x + \frac{\varrho(|a|)}{|a|} \cdot \mathrm{Pu}\,x\right).$$

Da Q ein topologischer Quasikörper ist, muß für festes $x \in \mathbb{O}\setminus\{0\}$ die Abbildung $\mathbb{R} \to \mathbb{O}$: $t \mapsto t \circ x$ eine Einbettung sein. Wählt man speziell $x \in \mathrm{Pu}\,\mathbb{O}$, so ist also $t \mapsto t \circ x = \mathrm{sgn}(t) \cdot \varrho(|t|) \cdot x$, $0 \mapsto 0$ ein Homöomorphismus von $\mathbb{R}$ auf $\mathbb{R} \cdot x$. Aus Zusammenhangsgründen und wegen $\varrho(1) = 1$ ist folglich $\varrho(r) > 0$ für $r > 0$, und $r \mapsto \varrho(r)$, $0 \mapsto 0$ ist ein Homöomorphismus des Intervalls $[0, \infty)$ auf sich.

Umgekehrt ergibt sich, daß für jeden Homöomorphismus ϱ von $[0, \infty)$ auf sich mit $\varrho(1) = 1$ die angegebene Multiplikation einen topologischen Quasikörper liefert. Dies entnimmt man [8: 2.1], wo die analoge Konstruktion über $\mathbb{H}$ statt $\mathbb{O}$ durchgeführt wurde; das dort angegebene Argument läßt sich direkt übertragen.

Für einen beliebigen Homöomorphismus ϱ erhält man auch stets eine Ebene mit einer Kollineationsgruppe $\Sigma \cong \mathrm{Spin}(7)$ der hier behandelten Art. Die in (c) durchgeführte Rechnung, die von L_b auf L_a führte, machte nämlich gar keinen Gebrauch mehr davon, daß b rein war; sie zeigt also allgemein, daß unter der Transformation σ_c

beliebige Ursprungsgeraden wieder in Ursprungsgeraden übergehen, daß also σ_c eine Kollineation ist.

Damit haben wir folgendes Ergebnis erreicht:

4.2. Klassifikationssatz. *Die sechzehndimensionalen lokalkompakten Translationsebenen mit einer zu* $\mathrm{SO}_7(\mathbb{R})$ *lokal isomorphen Gruppe von Kollineationen sind genau die Ebenen über den Quasikörpern* $K_\varrho^{\mathbb{O}}$, *die durch Deformation der Oktavenmultiplikation mit Hilfe eines Homöomorphismus*

$$\varrho\colon [0, \infty) \to [0, \infty) \quad mit \quad \varrho(1) = 1$$

folgendermaßen gebildet werden:

Die additive Gruppe von $K_\varrho^{\mathbb{O}}$ *ist die additive Gruppe* $\mathbb{O}^+$ *der Oktavenalgebra; die Multiplikation* $\circ$ *von* $K_\varrho^{\mathbb{O}}$ *ist*

$$a \circ x = \begin{cases} a \cdot \left(\mathrm{Re}\, x + \dfrac{\varrho(|a|)}{|a|} \cdot \mathrm{Pu}\, x\right), & falls \;\; a \neq 0 \\[2ex] 0, & falls \;\; a = 0. \end{cases}$$

In der Ebene über $K_\varrho^{\mathbb{O}}$ *sind die Abbildungen*

$$\sigma_c\colon (x, y) \mapsto (-c x c, y c) \quad für \quad c \in \mathrm{Pu}\, \mathbb{O},\ |c| = 1$$

($x, y \in \mathbb{O} \triangleq K_\varrho^{\mathbb{O}}$) *Kollineationen, die eine zu* Spin(7) *isomorphe Untergruppe* Σ *der Kollineationsgruppe erzeugen.*

Bemerkung. Für $\varrho = \mathrm{id}$ ist $K_\varrho^{\mathbb{O}}$ die Oktavenalgebra selbst.

5. Kollineationen und Isomorphismen. Ausgehend von den in 2.3(c), (d) und (e) schon bereitgestellten Informationen über die Zusammenhangskomponente der Kollineationsgruppe lassen sich nun für die damit beschriebenen Ebenen alle Kollineationen bestimmen; darüberhinaus beherrscht man auch alle möglicherweise auftretenden Isomorphismen zwischen zwei Ebenen dieser Art. Man kann dabei vorgehen wie in [8], wo eine analoge Untersuchung über $\mathbb{H}$ statt $\mathbb{O}$ durchgeführt wurde (siehe insbesondere die Beweisschritte (d), (e), (f) und (g) von [8: 3.3]). Es sollen deshalb hier nur die Ergebnisse festgehalten werden:

5.1. Satz über Isomorphien. *Die Ebenen über* $\mathbb{K}_\varrho^{\mathbb{O}}$ *und* $\mathbb{K}_\tau^{\mathbb{O}}$ *sind genau dann isomorph, wenn mit geeignetem* $t_0 > 0$ *eine Beziehung der Form*

$$\tau(t_0 \cdot t) = \tau(t_0) \cdot \varrho(t) \quad für\ alle \quad t \in [0, \infty)$$

besteht.

Insbesondere ist also für $\varrho \neq \mathrm{id}$ die Ebene über $K_\varrho^{\mathbb{O}}$ nie isomorph zur klassischen Oktavenebene.

5.2. Satz über Kollineationen. *Für* $\varrho \neq \mathrm{id}$ *läßt in der Ebene über* $\mathbb{K}_\varrho^{\mathbb{O}}$ *die Gruppe* $\mathfrak{C}_o$ *der den Ursprung festlassenden affinen Kollineationen die Koordinatenachsen W und S invariant.*

Für die Struktur von $\mathfrak{G}_o$ *bestehen folgende Möglichkeiten*:

(i) $\mathfrak{G}_o$ *ist das direkte Produkt*

$$\mathfrak{G}_o = \Sigma \cdot \mathfrak{G}_{[o, L_\infty]} \cdot Y$$

der Gruppe $\Sigma \cong \mathrm{Spin}(7)$ *aus* 4.2, *der Gruppe* $\mathfrak{G}_{[o, L_\infty]}$ *der reellen Streckungen und eines weiteren, zu* $\mathbb{R}$ *isomorphen Faktors* Y.

Dies ist genau dann der Fall, wenn ϱ *ein multiplikativer Isomorphismus ist.* (*Als zusätzliche Faktor* Y *kann man dann die Gruppe der Achsenstreckungen*

$$(*) \qquad \xi_r : (x, y) \mapsto (r \cdot \mathrm{Re}\, x + \varrho(r) \cdot \mathrm{Pu}\, x,\ y) \quad \textit{für } r > 0$$

mit Achse S *gewinnen.*[1])

(ii) $\mathfrak{G}_o$ *ist das direkte Produkt*

$$\mathfrak{G}_o = \Sigma \cdot \mathfrak{G}_{[o, L_\infty]} \cdot Z$$

mit einer unendlich zyklischen diskreten Gruppe Z.

Dies tritt genau dann ein, wenn ϱ *zwar nicht multiplikativ ist, aber doch eine „Periodizität" der Form*

$$\varrho(t_0 \cdot t) = \varrho(t_0) \cdot \varrho(t) \quad \textit{für alle} \quad t > 0$$

mit festem $t_0 > 1$ *aufweist.* (*Ist* t_0 *die kleinste Periode dieser Art, so erhält man als zusätzlichen Faktor* Z *das Erzeugnis der gemäß* (*) *gebildeten Transformation* ξ_{t_0}.)

(iii) *In allen anderen Fällen ist*

$$\mathfrak{G}_o = \Sigma \cdot \mathfrak{G}_{[o, L_\infty]}.$$

Mit den Translationen ergibt sich insbesondere für die Dimension der Kollineationsgruppe

$$\dim \mathfrak{G} = \begin{cases} 39 & \textit{im Fall (i)} \\ 38 & \textit{sonst.} \end{cases}$$

Literaturverzeichnis

[1] J. André, Über nicht desarguessche Ebenen mit transitiver Translationsgruppe. Math. Z. **60**, 156–186 (1954).

[2] T. Buchanan and H. Hähl, On the kernel and the nuclei of 8-dimensional locally compact quasifields. Arch. Math. **29**, 472–480 (1977).

[3] T. Buchanan and H. Hähl, The transposition of locally compact, connected translation planes. J. Geom. **11**, 84–92 (1978).

[4] H. Hähl, Automorphismengruppen von lokalkompakten zusammenhängenden Quasikörpern und Translationsebenen. Geom. Dedicata **4**, 305–321 (1975).

[5] H. Hähl, Automorphismengruppen achtdimensionaler lokalkompakter Quasikörper. Math. Z. **149**, 203–225 (1976).

[1]) Die hier angegebenen Achsenstreckungen entstehen aus den Kollineationen, wie sie im Beweis von [8: 3.3], Ausdruck (2) angegeben sind, durch Modifikation mit einer geeigneten reellen Streckung in beiden Koordinaten, die ja ebenfalls eine Kollineation ist.

[6] H. HÄHL, Lokalkompakte zusammenhängende Translationsebenen mit großen Sphärenbahnen auf der Translationsachse. Resultate Math. **2,** 62–87 (1979).
[7] H. HÄHL, Zur Klassifikation von 8- und 16-dimensionalen lokalkompakten Translationsebenen nach ihren Kollineationsgruppen. Math. Z. **159,** 259–294 (1978).
[8] H. HÄHL, Achtdimensionale lokalkompakte Translationsebenen mit großen kompakten Kollineationsgruppen. Mh. Math. **90,** 207–218 (1980).
[9] H. HÄHL, Achtdimensionale lokalkompakte Translationsebenen mit mindestens 17-dimensionaler Kollineationsgruppe. Erscheint in Geom. Dedicata.
[10] H. HÄHL, Eine Kennzeichnung der Oktavenebene. Erscheint in Indag. Math.
[11] G. PICKERT, Projektive Ebenen. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1955.
[12] J. TITS, Tabellen zu den einfachen Liegruppen und ihren Darstellungen. LNM **40,** Berlin-Heidelberg-New York 1967.

Eingegangen am 26. 2. 1986

Anschrift des Autors:

H. Hähl
Mathematisches Seminar
der Universität Kiel
Olshausenstr. 40
D-2300 Kiel 1