HERMANN HÄHL

$SU_4(\mathbb{C})$ ALS KOLLINEATIONSGRUPPE IN SECHZEHNDIMENSIONALEN LOKALKOMPAKTEN TRANSLATIONSEBENEN

ABSTRACT. We study 16-dimensional locally compact translation planes in which, for an affine point o, the stabilizer $\mathbb{G}_o$ of the affine collineation group $\mathbb{G}$ contains a subgroup Σ locally isomorphic to $SU_4(\mathbb{C})$. If Σ has only one affine fixed point o, then it is shown that either the plane is the classical Moufang plane over the Cayley numbers, or else Σ must be normal in the stabilizer $\mathbb{G}_o$ and $\mathbb{G}$ has dimension at most 37. This also comprises the proof of the fact that if $\mathbb{G}_o$ contains a subgroup locally isomorphic to $SU_4(\mathbb{C}) \times SL_2(\mathbb{C})$ then the plane is the classical Cayley plane. The case that Σ has more affine fixed points in dealt with as well; then, except for a well-known family of planes admitting $Spin_7(\mathbb{R})$ as a group of collineations, $\mathbb{G}$ has dimension at most 34.

1. EINLEITUNG

1.1. *Gegenstand* dieser Arbeit sind sechzehndimensionale lokalkompakte Translationsebenen, in denen die Gruppe $\mathbb{G}_o$ der affinen Kollineationen, die einen affinen Punkt o festlassen, eine zusammenhängende, abgeschlossene Untergruppe Σ enthält, die zu $SU_4(\mathbb{C})$ lokal isomorph ist.

Vorwiegend wird uns dabei der Fall beschäftigen, in dem folgende Zusatzannahme gilt:

Σ habe außer o keinen weiteren affinen Fixpunkt.

Das Hauptergebnis ist der folgende

1.2. $SU_4(\mathbb{C})$-SATZ. *Unter den Annahmen aus* 1.1 *gilt:*

(i) *Ist Σ nicht normal in der Zusammenhangskomponente von $\mathbb{G}_o$, so ist die Ebene isomorph zur klassischen Ebene über der Oktavenalgebra $\mathbb{O}$.*

(ii) *Andernfalls hat die Gruppe $\mathbb{G}$ aller affinen Kollineationen Dimension* $\leqslant 37$

(siehe 5.2 und 6.3).

Der alternative Fall, daß eine zu $SU_4(\mathbb{C})$ lokal isomorphe Untergruppe von $\mathbb{G}_o$ mehrere affine Fixpunkte hat, wird im letzten Paragraphen ebenfalls behandelt (Satz 7.1); er ist wesentlich einfacher zu erledigen. Es zeigt sich, daß dann die Kollineationsgruppe höchstens 34-dimensional ist, es sei denn, $\mathbb{G}_o$ enthielte sogar eine zu $Spin_7(\mathbb{R})$ isomorphe Untergruppe. Die Ebenen, in denen letzteres zutrifft, sind sämtlich bekannt ([11]).

1.3. Im Rahmen der Klassifikation aller sechzehndimensionalen lokalkompakten, topologischen Translationsebenen, die eine große Kollineationsgruppe haben, kommt diesen Ergebnissen eine zentrale Rolle

Geometriae Dedicata **23**, (1987) 319–345.

zu. In [8] wurde diese Klassifikation angekündigt und vorbereitet. Ihr Ansatz beruht auf der Erkenntnis, daß in Ebenen mit dimensionsmäßig großer Kollineationsgruppe auch relativ große kompakte Kollineationsgruppen auftreten, die zwei Geraden S und W durch einen affinen Punkt o festlassen. Die dabei zu betrachtenden Fälle wurden in [8, 1.7] festgehalten, und zwar absteigend nach der Dimension einer maximalen kompakten zusammenhängenden Untergruppe K des Stabilisators $\mathbb{G}_{S,W}$ der beiden Geraden. Die beiden ersten Fälle sind dabei, daß K lokal isomorph zu $\mathrm{Spin}_7(\mathbb{R})$ bzw. zu $\mathrm{U}_4(\mathbb{C})$ oder $\mathrm{SU}_4(\mathbb{C})$ ist.

Die Ebenen, in denen eine zu $\mathrm{Spin}_7(\mathbb{R})$ (lokal) isomorphe Gruppe von Kollineationen vorkommt, wurden bereits erwähnt; ihre Kollineationsgruppe hat Dimension 38 oder 39 (wenn man von der klassischen Oktavenebene absieht).

Die vorliegende Arbeit ist nun der Behandlung des zweitgenannten Falls gewidmet, daß K einen zu $\mathrm{SU}_4(\mathbb{C})$ lokal isomorphen Normalteiler Σ hat. Das Ergebnis, daß die Ebenen dieses Typs nur relativ kleine Kollineationsgruppe haben und damit zur angestrebten Klassifikation letztendlich keinen Beitrag liefern, ist unerwartet. In der entsprechenden Klassifikation achtdimensionaler Translationsebenen (mit $\Sigma \cong \mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$) erhielt man nämlich eine Familie von nichtklassischen Ebenen mit recht großer Kollineationsgruppe, in denen $\mathbb{G}_o$ neben Σ noch eine relativ große Scherungsgruppe enthielt ([10, §2, §4]). Hier ergibt sich nun überraschenderweise (und zwar bereits in einem frühen Stadium der Erörterung, 3.1), daß eine analoge Situation ausschließlich in der klassischen Oktavenebene zu realisieren ist.

Die Arbeit ist folgendermaßen gegliedert: Den Abschnitten 2 bis 6 liegt die in 1.1 geschilderte Situation zugrunde. In Abschnitt 2 werden grundlegende Aussagen über die Wirkung von Σ bereitgestellt. In Abschnitt 3 wird gezeigt, daß nur in der klassischen Oktavenebene zusätzlich zu Σ eine große Scherungsgruppe auftreten kann. In Abschnitt 4 wird der Fall, daß das Radikal von $\mathbb{G}_o$ nicht von Σ zentralisiert wird, darauf zurückgeführt. In Abschnitt 5 wird komplementär dazu der halbeinfache Kopf von $\mathbb{G}_o$ betrachtet; es wird gezeigt, daß außer im Fall der klassischen Oktavenebene Σ ein Faktor des halbeinfachen Kopfes ist. Mit dem Ergebnis von Abschnitt 4 folgt, daß dann Σ ein Normalteiler von ganz $\mathbb{G}_o$ ist. In Abschnitt 6 wird schließlich die Dimension der Kollineationsgruppe abgeschätzt; kritisch ist dabei der Fall, daß der Zentralisator von Σ eine zu $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ lokal isomorphe Untergruppe enthält, der aber wiederum zur klassischen Oktavenebene führt. In Abschnitt 7 wird schließlich die alternative Situation einer zu $\mathrm{SU}_4(\mathbb{C})$ isomorphen Kollineationsgruppe mit mehreren affinen Fixpunkten studiert; dabei gehen nur die Ergebnisse aus den Abschnitten 2 und 3 nochmals ein (insbesondere der Sachverhalt, daß große Scherungsgruppen den klassischen Fall erzwingen).

Vorbereitend erinnern wir noch an einige

1.4. *Grundtatsachen* (siehe z.B. [6, §3]). (a) Der affine Punktraum $\mathbb{A}$ einer sechzehndimensionalen lokalkompakten Translationsebene läßt sich so mit dem Vektorraum $\mathbb{R}^{16}$ identifizieren, daß die Translationen genau die Vektorraumtranslationen sind. Die Geraden durch den Nullvektor o (als 'Koordinatenursprung') sind dann Untervektorräume der halben Dimension; sie bilden eine Partition von $\mathbb{R}^{16}$ in paarweise komplementäre Untervektorräume. Die übrigen affinen Geraden ergeben sich als Bilder von Ursprungsgeraden unter den Translationen. Durch Adjunktion einer uneigentlichen Geraden L_∞ erhält man eine kompakte topologische projektive Ebene; L_∞ ist homöomorph zur 8-Sphäre.

(b) *Die Gruppe* $\mathbb{G}_{[o,L_\infty]}$ *der zentrischen Streckungen, die alle Geraden durch* o *invariant lassen* (*und dementsprechend alle Punkte von* L_∞ *festlassen*), *besteht genau aus den reellen skalaren Streckungen von* $\mathbb{A} = \mathbb{R}^{16}$.

Daß dies so einheitlich gilt, ist eine Besonderheit der sechzehndimensionalen Ebenen unter den zusammenhängenden lokalkompakten topologischen Translationsebenen allgemein. In Koordinaten über einem Quasikörper Q werden die Elemente von $\mathbb{G}_{[o,L_\infty]}$ nämlich im allgemeinen beschrieben durch komponentenweise Multiplikation mit Elementen des Kerns von Q ([1], [14, 8.2]). Hier ist nun aber Q ein achtdimensionaler lokalkompakter topologischer Quasikörper, und der Kern eines solchen besteht immer nur aus den reellen Vielfachen der 1 [4, Theorem 1].

(c) Die Gruppe $\mathbb{G}$ der affinen Kollineationen ist das semidirekte Produkt der Translationsgruppe mit dem Stabilisator $\mathbb{G}_o$ des Ursprungs. Die Kollineationen aus $\mathbb{G}_o$ sind im allgemeinen semilinear über dem Kern, hier bei sechzehndimensionalen lokalkompakten Translationsebenen also $\mathbb{R}$-lineare Transformationen von $\mathbb{A} = \mathbb{R}^{16}$. Es handelt sich um diejenigen Elemente von $\mathrm{GL}_{16}(\mathbb{R})$, die die Partition der Ursprungsgeraden invariant lassen. Da diese eine kompakte Teilmenge in der Graßmann–Mannigfaltigkeit $G_8(\mathbb{R}^{16})$ der 8-dimensionalen Teilräume von $\mathbb{R}^{16}$ bildet ([3, S. 14 Satz 1, S. 30 Satz 1, S. 17]), ist $\mathbb{G}_o$ eine abgeschlossene Untergruppe von $\mathrm{GL}_{16}(\mathbb{R})$ und also eine Liegruppe.

$\mathbb{G}_o$ ist fastdirektes Produkt der Streckungsgruppe $\mathbb{G}_{[o,L_\infty]}$ mit der Untergruppe

$$S\mathbb{G}_o = \{\gamma \in \mathbb{G}_o;\ \det\gamma = \pm 1\},$$

die auf L_∞ fast effektiv wirkt.

Für Gruppen von Streckungen mit affinen Achsen hat man ein etwas schwächeres Gegenstück zu (b), das wiederum charakteristisch ist für sechzehndimensionale lokalkompakte Translationsebenen:

(d) *Für zwei sich schneidende affine Geraden S und W in einer sechzehndimensionalen lokalkompakten Translationsebene ist die Zusammenhangskomponente der Gruppe $\mathbb{G}_{[W],S}$ aller Streckungen mit Achse W in Richtung von S trivial oder isomorph zu $\mathbb{R}$.*

Insbesondere ist eine kompakte Untergruppe von $\mathbb{G}_{[W],S}$ diskret und also endlich.

Der Beweis erfolgt wiederum wie in (b) anhand der Eigenschaften eines Quasikörpers Q, der die Ebene bezüglich W und S als erster und zweiter Koordinatenachse koordinatisiert. Nach [5, 3.1.28, S. 134] ist $\mathbb{G}_{[W],S}$ isomorph zu einem Nukleus von Q. Bei einem achtdimensionalen lokalkompakten Quasikörper ist die Zusammenhangskomponente eines Nukleus aber stets trivial oder isomorph zu $\mathbb{R}$ ([4, Theorem 2]).

Zur Struktur des gesamten Stabilisators zweier sich schneidender affiner Geraden hat man schließlich die folgende allgemeingültige Aussage, die eine vereinfachte Version eines grundlegenden Ergebnisses aus [7, 2.1] ist:

(e) LEMMA *über Achsenstandgruppen. Sei Ω eine abgeschlossene, zusammenhängende Untergruppe von* $\mathrm{S}\mathbb{G}_o$, *die zwei verschiedene uneigentliche Punkte $s, w \in L_\infty$ festläßt.*

Dann ist Ω kompakt, oder aber semidirektes Produkt eines kompakten Normalteilers mit einer zu $\mathbb{R}$ isomorphen abgeschlossenen Einparameteruntergruppe. Im zweiten Fall häuft sich jede Bahn von Ω in $L_\infty \setminus \{s, w\}$ sowohl bei s als auch bei w.

Insbesondere ist Ω kompakt, falls Ω einen dritten Fixpunkt in L_∞ hat.

2. Wirkung von Σ

2.0. Im folgenden sei entsprechend der Situation des $\mathrm{SU}_4(\mathbb{C})$-Satzes stets eine sechzehndimensionale lokalkompakte Translationsebene zugrundegelegt, in der $\mathbb{G}_o$ eine abgeschlossene, zusammenhängende, zu $\mathrm{SU}_4(\mathbb{C})$ lokal isomorphe Untergruppe Σ enthält, welche außer o keine weiteren affinen Fixpunkte hat.

(Indem man nötigenfalls mit einer Translation konjugiert, kann man dabei annehmen, daß der eindeutige affine Fixpunkt o von Σ in Übereinstimmung mit den Bezeichnungen aus 1.4 der Koordinatenursprung von $\mathbb{A} = \mathbb{R}^{16}$ ist.)

Die Wirkung von Σ auf $\mathbb{A}$ ist durch diese Annahmen bereits festgelegt. Um sie zu beschreiben, führen wir auf $\mathbb{A}$ geeignete Koordinaten über $\mathbb{C}$ bzw. dem Quaternionenkörper $\mathbb{H}$ ein.

2.1. *Koordinatisierung.* (a) Wir betrachten dazu $\mathbb{C}$ als Unterkörper von $\mathbb{H}$, etwa als den von 1 und i erzeugten Unterkörper

$$\mathbb{C} = \langle 1, i \rangle \subseteq \mathbb{H}.$$

Der $\mathbb{H}$-Rechtsvektorraum $\mathbb{H}^2$ ist dann in natürlicher Weise ein 4-dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum; man hat so eine kanonische Identifikation

$$\mathbb{H}^2 = \mathbb{C}^4.$$

Es gilt nun

(b) *$\mathbb{A}$ läßt sich als $\mathbb{R}$-Vektorraum so mit $\mathbb{C}^4 \times \mathbb{C}^4 = \mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$ identifizieren, daß Σ aus den Transformationen*

$$\mathbb{C}^4 \times \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4 \times \mathbb{C}^4\colon \quad (x, y) \mapsto (A(x), A(y))$$

mit

$$A \in \mathrm{SU}_4(\mathbb{C})$$

besteht.

Dies folgt aus den Informationen, die man über die irreduziblen Darstellungen von $\mathrm{SU}_4(\mathbb{C})$ (etwa nach [17]) hat. Die irreduziblen $\mathbb{R}$-linearen Darstellungen von Dimension $\leqslant 16$ haben Dimension 6, 8 oder 15; es handelt sich um die gewöhnliche Wirkung der Faktorgruppe $\mathrm{SO}_6(\mathbb{R})$ auf $\mathbb{R}^6$, die gewöhnliche Wirkung von $\mathrm{SU}_4(\mathbb{C})$ auf $\mathbb{C}^4$ und die adjungierte Darstellung. Da Σ außer o keine weiteren Fixpunkte in $\mathbb{A}$ haben soll, muß $\mathbb{A}$ in zwei irreduzible Komponenten $\mathbb{C}^4$ zerfallen. Dem entspricht die angegebene Beschreibung von Σ.

Eine entsprechende Identifikation

$$\mathbb{A} = \mathbb{C}^4 \times \mathbb{C}^4 = \mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$$

sei im folgenden stets stillschweigend zugrundegelegt.

(c) Mit unserer Identifikation $\mathbb{H}^2 = \mathbb{C}^4$ ist

$$\mathrm{SU}_2(\mathbb{H}) \subseteq \mathrm{SU}_4(\mathbb{C}).$$

In Σ hat man dann die entsprechende Untergruppe

$$\Theta = \{(x, y) \mapsto (U(x), U(y)); \quad U \in \mathrm{SU}_2(\mathbb{H})\}.$$

2.2. *Die Σ-invarianten Unterräume*

$$\{(x, xc);\ x \in \mathbb{C}^4\} \quad \textit{für } c \in \mathbb{C} \textit{ sowie } \{0\} \times \mathbb{C}^4$$

von $\mathbb{A} = \mathbb{C}^4 \times \mathbb{C}^4$ sind Ursprungsgeraden der Translationsebene, und jede Σ-invariante Ursprungsgerade ist von dieser Form.

Dies ist in [12, §3, Lemma] bewiesen, wo gezeigt wird, daß jeder reell 8-dimensionale Σ-invariante Unterraum von $\mathbb{C}^4 \times \mathbb{C}^4 = \mathbb{C}^4 \otimes \mathbb{C}^2$ zu der gegebenen Partition, deren Elemente die Ursprungsgeraden der Translationsebene sind, gehört; zu Beginn des Beweises werden auch alle diese Teilräume explizit angegeben.

Gemäß 2.2 ist das System der Σ-invarianten Ursprungsgeraden als Teilmenge der Graßmann–Mannigfaltigkeit $G_8(\mathbb{R}^{16})$ homöomorph zur Einpunktkompaktifizierung von $\mathbb{C}$, d.h. zur 2-Sphäre. Die uneigentlichen Punkte dieser Geraden sind genau die Fixpunkte von Σ in L_∞; durch Projektion auf L_∞ erhält man also:

2.3. *Die Menge F der Fixpunkte von Σ in L_∞ ist homöomorph zur 2-Sphäre.*

Im folgenden bezeichne Δ die Zusammenhangskomponente der Gruppe $S\mathbb{G}_o$ der Kollineationen von Determinante $\pm 1o$,

$$\Delta = (S\mathbb{G}_o)^1.$$

Offensichtlich ist

$$\Sigma \leqslant \Delta.$$

2.4. *Die Zusammenhangskomponente des Stabilisators Δ_{f_1, f_2} von zwei verschiedenen Fixpunkten $f_1, f_2 \in F$ von Σ in L_∞ ist entweder selbst kompakt oder semidirektes Produkt der größten kompakten Untergruppe K mit einer zu $\mathbb{R}$ isomorphen abgeschlossenen Untergruppe.*

Falls die Ebene nicht die klassische Oktavenebene ist, ist dabei K gleich Σ oder fastdirektes Produkt von Σ mit einem eindimensionalen Torus; insbesondere ist

$$\dim \Delta_{f_1, f_2} \leqslant 17.$$

Der erste Teil der Behauptung ist einfach das Lemma über Achsenstandgruppen 1.4(e). Es müssen noch die Möglichkeiten für die größte kompakte Untergruppe K bestimmt werden.

K wirkt fast effektiv auf den zu f_1 und f_2 gehörigen Ursprungsgeraden L_1 und L_2: Der Ineffektivitätskern der Wirkung auf L_1 besteht nämlich aus Streckungen mit Achse L_1 in Richtung von L_2 und ist nach 1.4(d) also diskret; entsprechend schließt man für L_2.

Also ist K eine Überlagerungsgruppe der auf $L_i \cong \mathbb{R}^8$ induzierten linearen Gruppe $K \mid L_i$. Nach 2.2 und 2.1 weiß man andererseits, wie die L_i als Σ-invariante Ursprungsgeraden aussehen und wie Σ auf ihnen wirkt, nämlich wie $\mathrm{SU}_4(\mathbb{C})$ auf $\mathbb{C}^4 = \mathbb{R}^8$ in der gewöhnlichen Wirkung; $K \mid L_i$ umfaßt also $\mathrm{SU}_4(\mathbb{C})$. Die großen kompakten, zusammenhängenden Untergruppen von $\mathrm{GL}_8(\mathbb{R})$ sind nun bekannt (siehe etwa [8, 2.8] für eine Zusammenstellung); bei geeigneter Identifikation von L_i mit $\mathbb{R}^8$ bzw. $\mathbb{C}^4$ ist demnach $K \mid L_i$ eine der Gruppen $\mathrm{SO}_8(\mathbb{R})$, $\mathrm{Spin}_7(\mathbb{R})$ oder $\mathrm{U}_4(\mathbb{C})$, falls nicht $K \mid L_i = \Sigma \mid L_i$ und dann aus Dimensions- und Zusammenhangsgründen $K = \Sigma$ ist.

Ist $K \mid L_i$ isomorph zu $\mathrm{SO}_8(\mathbb{R})$ oder $\mathrm{Spin}_7(\mathbb{R})$, so ist die zugrundeliegende Ebene nach [7, 3.7, 3.6] notwendig die klassische Oktavenebene.

Ist $K \mid L_i$ isomorph zu $\mathrm{U}_4(\mathbb{C})$, also fastdirektes Produkt von $\Sigma \mid L_i = \mathrm{SU}_4(\mathbb{C})$ und einem eindimensionalen Torus, so gilt dies auch für die überlagernde Gruppe K, wie behauptet.

3. Der Fall grosser Scherungsgruppe

In diesem Abschnitt zeigen wir

3.1. SATZ. *Sei S eine Σ-invariante Ursprungsgerade. Hat die Gruppe der Scherungen mit Achse S Dimension >2, so ist die Ebene die klassische Oktavenebene.*

Der Beweis wird durch Vergleich mit der Oktavenebene geführt werden. Vorbereitend dazu studieren wir entsprechende Kollineationsgruppen in der Oktavenebene:

3.2. FESTSTELLUNG. *In der klassischen Oktavenebene enthält $\mathfrak{G}_0$ eine zu $\mathrm{SU}_4(\mathbb{C})$ isomorphe Kollineationsgruppe Σ, die die Koordinatenachsen invariant läßt und neben dem Koordinatenursprung keine weiteren affinen Fixpunkte hat, sowie eine zu $\mathbb{R}^6$ isomorphe Gruppe N von Scherungen mit der zweiten Koordinatenachse als Achse, die von Σ normalisiert, aber nicht zentralisiert wird. Jede Ursprungsgerade ist dabei Bild einer Σ-invarianten Ursprungsgeraden unter einer Scherung aus N.*

Beweis. (a) In der klassischen Oktavenebene (mit affiner Punktmenge $\mathbb{O} \times \mathbb{O}$) seien W und S die beiden Koordinatenachsen $\mathbb{O} \times \{0\}$ und $\{0\} \times \mathbb{O}$, und sei $s \in L_\infty$ der zu S gehörige Fernpunkt auf der uneigentlichen Geraden. Wir identifizieren $L_\infty \setminus \{s\}$ mit $\mathbb{O}$, indem wir jedem uneigentlichen Punkt die Steigung der zugehörigen Ursprungsgeraden zuordnen.

(b) Die affine Oktavenebene besitzt eine kompakte Gruppe K von Kollineationen, die die Koordinatenachsen festläßt und auf $L_\infty \setminus \{s\} = \mathbb{O}$ fast effektiv als $\mathrm{SO}_8(\mathbb{R})$ wirkt (nämlich als die spezielle orthogonale Gruppe bezüglich der Normform der Oktavenalgebra).

Dies ist wohlbekannt. Man kennt ja die gesamte affine Kollineationsgruppe der Oktavenebene und ihre Wirkung als Projektivitätengruppe von L_∞ (siehe [12, §2] Beweisteil (a) für einige Literaturhinweise) und kann die hier gesuchte Untergruppe entnehmen. Andererseits erhält man eine direkte Konstruktion von K 'von unten' durch Übersetzung des Trialitätsprinzips, wie es in [18], Theorem 1, S. 159 und Corollary 4, S. 162 ausgeführt ist. Es besagt, daß für jedes $\rho \in SO_8(\mathbb{R})$ stets $\rho_1, \rho_2 \in SO_8(\mathbb{R})$ existieren mit

$$(*) \qquad \rho_2(mx) = \rho(m)\cdot\rho_1(x) \quad \text{für alle } m, x \in \mathbb{O};$$

zu gegebenem ρ sind die Paare ρ_1, ρ_2 von Transformationen mit dieser Eigenschaft ferner eindeutig bestimmt bis auf einen Skalarfaktor aus dem Zentrum der Oktavenalgebra; hier, im Fall der reellen Oktaven, wo das Zentrum $\mathbb{R}$ ist, ist dieser Skalarfaktor ± 1, solange man sich in der orthogonalen Gruppe bewegt.

Die Beziehung (*) bedeutet nun, daß die Transformation

$$\kappa_{\rho_1,\rho_2}\colon \ \mathbb{O}\times\mathbb{O}\to\mathbb{O}\times\mathbb{O}\colon \ (x,y)\mapsto(\rho_1(x),\rho_2(y))$$

der affinen Oktavenebene die Ursprungsgerade $\{(x, mx);\, x\in\mathbb{O}\}$ der Steigung m überführt in die Ursprungsgerade der Steigung $\rho(m)$; sie ist also eine Kollineation mit

$$\kappa_{\rho_1,\rho_2}\,|\,L_\infty = \rho.$$

Die Gesamtheit aller dieser Kollineationen bildet offensichtlich eine kompakte Gruppe K mit

$$K\,|\,L_\infty = SO_8(\mathbb{R});$$

die erwähnte Eindeutigkeitsaussage des Trialitätsprinzips zeigt, daß die Einschränkungsabbildung $K \to K\,|\,L_\infty$ eine zweifache Überlagerung ist.

Wenn man sich auf algebraische Details nicht einlassen will, kann man die Existenz einer solchen Kollineationsgruppe (jedenfalls für die hier betrachteten reellen Oktaven) auch aus den Transitivitätseigenschaften der gesamten Kollineationsgruppe durch ein pauschales Argument erschließen, das allerdings tiefliegende Aussagen über transitive Wirkungen von Liegruppen auf Sphären verwendet, siehe z.B. [7, 3.5(a)].

(c) Wir identifizieren nun $\mathbb{C}$ mit einem Unterkörper von $\mathbb{O}$ und betrachten in der Kollineationsgruppe K aus (b) mit $K\,|\,L_\infty = SO_8(\mathbb{R})$ die Untergruppe derjenigen Kollineationen, die die Ursprungsgeraden einer Steigung aus $\mathbb{C}$ einzeln invariant lassen. Sei Σ die Zusammenhangskomponente dieser Untergruppe.

Sei M das orthogonale Komplement von $\mathbb{C}$ in $\mathbb{O}$:

$$M = \mathbb{C}^\perp \leqslant \mathbb{O}; \quad M \cong \mathbb{R}^6.$$

Aufgefaßt als Teilmenge von $L_\infty \setminus \{s\} = \mathbb{O}$ ist M global invariant unter Σ, da $\Sigma | L_\infty \subseteq K \,|\, L_\infty$ als orthogonale Gruppe wirkt, und Σ induziert auf $M \cong \mathbb{R}^6$ die Gruppe $\mathrm{SO}_6(\mathbb{R})$:

$$\Sigma \,|\, M = \mathrm{SO}_6(\mathbb{R}); \quad \Sigma \,|\, L_\infty \cong \mathrm{SO}_6(\mathbb{R}).$$

Insbesondere ist Σ lokal isomorph zur universellen Überlagerungsgruppe $\mathrm{SU}_4(\mathbb{C})$ von $\mathrm{SO}_6(\mathbb{R})$.

Nach Konstruktion besteht Σ aus Kollineationen der Form κ_{ρ_1,ρ_2} wie in (b), wobei in der zugehörigen Trialitätsbeziehung (*) $\rho(c) = c$ gilt für alle $c \in \mathbb{C} \leqslant \mathbb{O}$. Mit $c = 1$ folgt $\rho_1 = \rho_2$, so daß die Kollineationen aus Σ die Gestalt

$$(x, y) \mapsto (\psi(x), \psi(y))$$

mit

$$\psi \in \mathrm{SO}_8(\mathbb{R})$$

und

$$\psi(cx) = c \cdot \psi(x) \quad \text{für } c \in \mathbb{C}$$

haben; insbesondere sind sie linear über $\mathbb{C}$. Die beschreibenden Transformationen ψ durchlaufen also bei geeigneter Identifikation des $\mathbb{C}$-Vektorraums $\mathbb{O}$ mit $\mathbb{C}^4$ eine zu Σ isomorphe Untergruppe $\bar{\Sigma} \subseteq \mathrm{U}_4(\mathbb{C})$, und da Σ lokal isomorph zu $\mathrm{SU}_4(\mathbb{C})$ und zusammenhängend ist, folgt $\bar{\Sigma} = \mathrm{SU}_4(\mathbb{C})$. Insgesamt wirkt Σ auf der affinen Oktavenebene entsprechend wie die gleichnamige Kollineationsgruppe in 2.1.

(d) Eine Scherung mit Achse $S = \{0\} \times \mathbb{O}$ ist durch die Steigung der Bildgeraden von $W = \mathbb{O} \times \{0\}$ eindeutig bestimmt. Bei der zu $\mathbb{R}^6$ isomorphen Gruppe N der Scherungen

$$\eta_m\colon \quad (x, y) \mapsto (x, y + mx) \quad \text{mit } m \in M$$

durchlaufen diese Steigungen gerade das orthogonale Komplement M von $\mathbb{C}$ in $\mathbb{O}$. Wegen der Σ-Invarianz von M wird also N von Σ normalisiert (aber natürlich nicht zentralisiert, da Σ nicht identisch auf M wirkt).

Nach Konstruktion von Σ sind die Σ-invarianten Ursprungsgeraden $\neq S$ die Geraden der Form

$$\{(x, cx);\quad x \in \mathbb{O}\} \quad \text{mit } c \in \mathbb{C}.$$

Eine solche geht unter der Scherung η_m über in die Ursprungsgerade

$$\{(x, (c + m)x);\quad x \in \mathbb{O}\}$$

der Steigung $c+m$. Wegen $\mathbb{O}=\mathbb{C}+M$ kann man so jede Ursprungsgerade erhalten. Damit ist 3.2 bewiesen.

3.3. *Beweis von Satz* 3.1. (a) Wir begeben uns nun wieder in eine beliebige 16-dimensionale lokalkompakte Translationsebene, in der die Situation des Satzes 3.1 vorliegt. Sei s der zur Σ-invarianten Ursprungsgeraden S gehörige uneigentliche Punkt, und sei $\Gamma^1_{[S,s]}$ die Zusammenhangskomponente der Gruppe der Scherungen mit Achse S. Sie ist eine Vektorgruppe der Dimension $\leqslant 8$, die frei auf $L_\infty \setminus \{s\}$ operiert (wie man analog zu [9, 1.3] sieht, wo dies für achtdimensionale Translationsebenen ausgeführt wird).

Da S invariant unter Σ ist, wird $\Gamma^1_{[S,s]}$ von Σ normalisiert. Nach Voraussetzung ist nun $\dim \Gamma^1_{[S,s]} > 2$; also kann die 2-dimensionale Menge F der Fixpunkte von Σ in L_∞ (2.3) nicht invariant unter $\Gamma^1_{[S,s]}$ sein, und angesichts der freien Wirkung in $L_\infty \setminus \{s\}$ wird $\Gamma^1_{[S,s]}$ von Σ nicht zentralisiert. Die zentrale Involution ι von Σ (die Punktspiegelung am Ursprung, 2.1) wirkt jedoch identisch auf L_∞ und zentralisiert daher $\Gamma^1_{[S,s]}$.

Durch Konjugation mit Σ erhält man also eine nichttriviale Darstellung der Faktorgruppe $\Sigma/\{\mathrm{id}, \iota\} = \mathrm{SO}_6(\mathbb{R})$ auf der höchstens 8-dimensionalen Vektorgruppe $\Gamma^1_{[S,s]}$. Nun hat $\mathrm{SO}_6(\mathbb{R})$ bis auf Äquivalenz nur eine irreduzible Darstellung der Dimension $\leqslant 8$, nämlich die gewöhnliche Wirkung auf $\mathbb{R}^6$ ([17]). Folglich enthält $\Gamma^1_{[S,s]}$ eine abgeschlossene Untergruppe $N \cong \mathbb{R}^6$, die von Σ normalisiert wird und auf der Σ per Konjugation als $\mathrm{SO}_6(\mathbb{R})$ in der gewöhnlichen Weise wirkt. Insbesondere gilt:

(b) *Konjugation mit der Kollineation*

$$\kappa\colon\ \mathbb{C}^4 \times \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4 \times \mathbb{C}^4\colon\ (x, y) \mapsto (xi, yi)$$

aus Σ invertiert die Elemente von N.

Es handelt sich nämlich um ein Element des Zentrums von Σ der Ordnung 4, das in der Wirkung von Σ auf N als $\mathrm{SO}_6(\mathbb{R})$ die zentrale Involution, d.h. die Spiegelung von $N \cong \mathbb{R}^6$ am Ursprung, induziert.

Wir betrachten nun die Untergruppe

$$\Theta \cong \mathrm{SU}_2(\mathbb{H})$$

von Σ aus 2.1 und zeigen:

(c) Θ *zentralisiert eine Einparameteruntergruppe N_1 von N.*

Sie enthält nämlich die zentrale Involution ι von Σ; in der Wirkung von $\Sigma \cong \mathrm{SU}_4(\mathbb{C}) \cong \mathrm{Spin}_6(\mathbb{R})$ per Konjugation auf $N \cong \mathbb{R}^6$ als Faktorgruppe $\mathrm{SO}_6(\mathbb{R})$ wirkt $\Theta \cong \mathrm{SU}_2(\mathbb{H}) \cong \mathrm{Spin}_5(\mathbb{R})$ folglich als Faktorgruppe $\Theta/\{\mathrm{id}, \iota\}$

$\cong SO_5(\mathbb{R})$ und läßt ein Element $\eta \in N \setminus \{0\}$ fest. (Letzteres kann man etwa in [15, S. 438, S. 443 ff.] entnehmen, man beachte insbesondere die Kommentare zu Diagramm 21.6 und das Diagramm auf S. 444, dessen zweite Zeile sich als nebenklassen-exakt erweist.) Θ läßt dann den von η aufgespannten eindimensionalen Teilraum N_1 von $N \cong \mathbb{R}^6$ elementweise fest, d.h. zentralisiert ihn.

(d) Bezüglich der nach 2.1–2.2 zugrundegelegten Koordinatisierung können wir noch annehmen, daß die Scherungsachse S die 'zweite Koordinatenachse'

$$S = \{0\} \times \mathbb{C}^4 = \{0\} \times \mathbb{H}^2$$

ist. Dann schreiben sich die Scherungen aus $N \cong \mathbb{R}^6$ in der Form

$$(x, y) \mapsto (x, y + B(x)),$$

wobei B einen 6-dimensionalen Untervektorraum

$$\mathscr{V} \leqslant \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^4)$$

des Raums der $\mathbb{R}$-linearen Endomorphismen von $\mathbb{C}^4$ durchläuft. Da das Bild der Ursprungsgeraden

$$W = \mathbb{C}^4 \times \{0\}$$

unter einer nichtidentischen Scherung komplementär zu W ist, sind die Elemente von $\mathscr{V} \setminus \{0\}$ nichtsingulär. Die Wirkung von Σ auf N entspricht der Wirkung von $SU_4(\mathbb{C})$ auf $\mathscr{V}$ (jeweils durch Konjugation). Die von $\Theta \cong SU_2(\mathbb{H})$ zentralisierte Einparameteruntergruppe N_1 von N aus (b) entspricht einem eindimensionalen Teilraum $\mathscr{V}_1$, der von $SU_2(\mathbb{H})$ zentralisiert wird. Bei der der Koordinatisierung gemäß 2.1 zugrundeliegenden Identifikation $\mathbb{C}^4 = \mathbb{H}^2$ besteht $\mathscr{V}_1$ also aus den reellen Vielfachen einer Transformation der Form

$$\mathbb{H}^2 \to \mathbb{H}^2 \colon \quad x \mapsto x \cdot p$$

mit geeignetem

$$p \in \mathbb{H}, \quad |p| = 1.$$

Daß die Konjugation mit der Kollineation κ aus (b) die Elemente aus N_1 invertiert, bedeutet $ipi^{-1} = -p$; folglich liegt p in dem 2-dimensionalen $\mathbb{R}$-Unterraum $\langle j, k \rangle$.

Bei einer Koordinatentransformation der Gestalt $(x, y) \mapsto (xc, yc)$ mit $c \in \langle 1, i \rangle = \mathbb{C} \subseteq \mathbb{H}$, die an der Beschreibung von Σ nichts ändert, transformiert sich nun p in cpc^{-1}. Dabei kann c so gewählt werden, daß

$cpc^{-1} = j$ ist, denn Konjugation in $\mathbb{H}$ mit Elementen aus $\langle 1, i \rangle$ induziert auf $\langle j, k \rangle$ alle Drehungen. Man kann also insgesamt die Koordinatisierung gemäß 2.1 so einrichten, daß die Transformationen

$$(x, y) \mapsto (x, y + x \cdot jr)$$

$(x, y \in \mathbb{H}^2, r \in \mathbb{R})$ eine Einparameteruntergruppe der Scherungsgruppe N bilden. Damit ist das semidirekte Produkt $\Sigma \cdot N$ eindeutig bestimmt (die übrigen Scherungen aus N erhält man durch Konjugation mit Elementen aus Σ).

(e) Dieselbe Koordinatisierung kann man nun auch in der klassischen Oktavenebene einführen, in der man ja nach 3.2 eine entsprechende Situation hat. (Dabei ergeben sich allerdings nicht die im Beweis von 3.2 verwendeten komplexen Koordinaten, da dort $\mathbb{O}$ als $\mathbb{C}$-Linksvektorraum betrachtet wird, während hier $\mathbb{H}$ als Rechtsvektorraum über $\mathbb{C}$ aufgefaßt ist.) Aufgrund der erzielten Eindeutigkeit ergibt sich also insgesamt, daß man die betrachtete Ebene so mit der klassischen Oktavenebene identifizieren kann, daß Σ und N übereinstimmen mit den nach 3.2 konstruierten Kollineationsgruppen der Oktavengeometrie.

Nach 2.2 stimmen dabei auch noch die Σ-invarianten Ursprungsgeraden beider Geometrien überein. Wie in 3.2 ausgeführt, ist nun aber jede Ursprungsgerade der Oktavenebene Bild einer Σ-invarianten Ursprungsgeraden unter einer Scherung aus N und damit auch eine Ursprungsgerade der anderen betrachteten Ebene, in der N ja ebenfalls als Kollineationsgruppe wirkt. Damit sind die beiden Geometrien identifiziert und 3.1 ist bewiesen.

4. Das Radikal

Das Ziel dieses Abschnitts ist der Beweis des folgenden Sachverhalts:

4.1. SATZ. *Wird das Radikal A von $\Delta = (\mathrm{S}\,\mathbb{G}_o)^1$ nicht von Σ zentralisiert, so ist die zugrundeliegende Ebene die klassische Oktavenebene.*

Hierzu zeigen wir, in mehreren Schritten, daß dann die Situation von 3.1 vorliegt, d.h. eine große Scherungsgruppe existiert (siehe 4.7).

4.2. Der Stabilisator A_f eines uneigentlichen Punkts $f \in F$ (also eines Fixpunkts von Σ) wird von Σ normalisiert. Mit der quasi-einfachen Gruppe Σ hat A als auflösbarer Normalteiler diskreten Schnitt; für einen weiteren Punkt $f' \in F$ folgt daher $\dim A_{f,f'} \leqslant 2$, da Σ nach 2.4 Kodimension höchstens 2 in $\Delta_{f,f'}$ hat. Nach der Dimensionsformel hat man

$\dim A_f \leqslant \dim A_f(f') + \dim A_{f,f'} \leqslant 8+2$, also

(1) $\qquad \dim A_f \leqslant 10.$

Ebenso ist

(2) $\qquad \dim A \leqslant 8 + \dim A_f.$

Wir betrachten nun die adjungierte Wirkung von Σ auf der Liealgebra $\mathscr{L}A$ von A. Unter den Voraussetzungen von 4.1 ist diese Wirkung nichttrivial. Wir zeigen:

4.3. *Es gibt eine von Σ normalisierte, abgeschlossene Untergruppe B von A, deren Liealgebra $\mathscr{L}B$ direkte Summe*

$$\mathscr{L}B = \mathscr{N} \oplus \mathscr{D}$$

eines 6-dimensionalen Σ-invarianten Untervektorraums $\mathscr{N}$ und eines Untervektorraums $\mathscr{D}$ ist derart, daß $\Sigma \cong \mathrm{SU}_4(\mathbb{C})$ in der adjungierten Wirkung auf $\mathscr{N}$ wie in der gewöhnlichen Darstellung der Faktorgruppe $\mathrm{SO}_6(\mathbb{R})$ auf $\mathbb{R}^6$ und auf $\mathscr{D}$ trivial wirkt:

$$\Sigma \,|\, \mathscr{N} = \mathrm{SO}_6(\mathbb{R}); \quad \Sigma \,|\, \mathscr{D} = \{\mathrm{id}\}.$$

Beweis. Die zentrale Involution $\iota \in \Sigma$ ist die Spiegelung der affinen Ebene am Ursprung; sie liegt also im Zentrum der linearen Gruppe $\mathbb{G}_o$ und bewirkt in der adjungierten Darstellung auf $\mathscr{L}A$ die Identität. Also kann Σ in einer irreduziblen Komponente der Wirkung auf $\mathscr{L}A$ nicht die gewöhnliche Wirkung von $\mathrm{SU}_4(\mathbb{C})$ auf $\mathbb{C}^4$ induzieren. Die einzige andere reelle irreduzible Darstellung von $\mathrm{SU}_4(\mathbb{C})$ der Dimension < 15 ist nun die Darstellung als $\mathrm{SO}_6(\mathbb{R})$ auf $\mathbb{R}^6$ in der üblichen Wirkung ([17]).

Sei nun $\mathscr{L}A_f$ die zum Stabilisator A_f aus 4.2 gehörige Lie-Unteralgebra. Wirkt Σ auf ihr nichttrivial, so kann man $B = A_f$ wählen. Nach 4.2(1) ist dann nämlich $\mathscr{L}B$ höchstens 10-dimensional, und nach den Informationen über die irreduziblen Darstellungen von Σ zerfällt $\mathscr{L}B$ in eine 6-dimensionale irreduzible Komponente $\mathscr{N}$ und einen komplementären Σ-invarianten Unterraum $\mathscr{D}$, auf dem Σ trivial wirkt.

Wirkt hingegen Σ trivial auf $\mathscr{L}A_f$, so wählen wir $B = A$. Σ operiert dann nichttrivial auf einem Σ-invarianten, zu $\mathscr{L}A_f$ komplementären Unterraum $\mathscr{C}$ von $\mathscr{L}A$; nach 4.2(2) ist $\mathscr{C}$ höchstens 8-dimensional. Wieder mit den genannten darstellungstheoretischen Informationen erhält man in diesem Komplement eine 6-dimensionale irreduzible Komponente $\mathscr{N}$ für die Wirkung von Σ; auf einem invarianten komplementären Teilraum $\mathscr{D}$, der sich aus einem höchstens 2-dimensionalen Komplement in $\mathscr{C}$ und $\mathscr{L}A_f$ zusammensetzt, wirkt Σ trivial. Bisher ist noch nicht ausgesagt, daß die

Untervektorräume $\mathscr{D}$ und $\mathscr{N}$ sogar Unteralgebren sind. Für $\mathscr{D}$ ist dies klar, da es sich um die Fixalgebra der Automorphismengruppe Σ handelt; es ist aber auch für $\mathscr{N}$ richtig:

4.4. *$\mathscr{N}$ ist eine Unteralgebra; sie ist kommutativ.*

Zum Beweis zeigen wir, daß für $x, y \in \mathscr{N} \setminus \{0\}$ stets $[x, y] = 0$ bezüglich des in $\mathscr{L}B$ gebildeten Lieprodukts ist. O.B.d.A. kann man dabei $x \perp y$ annehmen (wobei $\perp$ eine Orthogonalitätsrelation ist, bezüglich der Σ als orthogonale Gruppe auf $\mathscr{N} \cong \mathbb{R}^6$ operiert). Für beliebiges $z \in \mathscr{N} \setminus \{0\}$ mit $z \perp x$, $z \perp y$ sei σ_{xz} diejenige lineare Transformation von $\mathscr{L}B$, die auf $\mathscr{N}$ die Spiegelung am orthogonalen Komplement $\langle x, z\rangle^\perp$ von x und z und auf $\mathscr{D}$ die Identität bewirkt. Nach 4.3 wird σ_{xz} von einem Element von Σ induziert und ist daher ein Liealgebra-Automorphismus von $\mathscr{L}B$. Folglich ist $\sigma_{xz}[x, y] = [\sigma_{xz}(x), \ \sigma_{xz}(y)] = [-x, y] = -[x, y]$; nach Konstruktion von σ_{xz} hat man also

$$[x, y] \in \mathscr{N}, \quad [x, y] \in \langle x, z\rangle.$$

Da $z \in \langle x, y\rangle^\perp$ beliebig war, folgt hieraus $[x, y] \in \mathbb{R} \cdot x$. Unter Vertauschung der Rollen von x und y erhält man mit demselben Argument $[x, y] \in \mathbb{R} \cdot y$, insgesamt also $[x, y] = 0$, wie behauptet.

4.5. Wir betrachten nun die zu $\mathscr{N}$ gehörige analytische Untergruppe N von A. Da $\mathscr{N}$ nach Konstruktion Σ-invariant ist, wird N von Σ normalisiert. Wir zeigen:

Eine Einparameteruntergruppe von N ist nie in einer kompakten Untergruppe von A enthalten; insbesondere ist N eine Vektorgruppe isomorph zu $\mathbb{R}^6$ (in der Lietopologie).

Beweis. Vorerst ist noch nicht geklärt, ob N eine abgeschlossene Untergruppe ist. Der Abschluß $\bar{N}$ von N ist eine abelsche Liegruppe; ihre größte kompakte Untergruppe T ist ein Torus, der invariant unter Konjugation mit Σ ist und folglich von der zusammenhängenden Gruppe Σ zentralisiert wird (da die Automorphismengruppe eines Torus diskret ist).

Wäre nun eine Einparameteruntergruppe P von N in einer kompakten Untergruppe von A enthalten, so wäre $\bar{P}$ kompakt, $\bar{P} \subseteq T$ und P würde also von Σ zentralisiert, im Widerspruch zur transitiven Wirkung von Σ auf den eindimensionalen Teilräumen von $\mathscr{N}$ gemäß 4.3.

Insbesondere enthält N also keine Torusuntergruppe und ist als abelsche Liegruppe somit eine Vektorgruppe der Dimension $\dim \mathscr{N} = 6$.

4.6. *N läßt einen Fixpunkt $s \in F$ von Σ in L_∞ fest.*

Beweis. Eine Einparameteruntergruppe P von N läßt nach dem Fixpunktsatz von Lefschetz auf der 8-Sphäre L_∞ einen Punkt s fest ([16, 4.7.12, S. 197]). Wir zeigen, daß s ein Fixpunkt von ganz N ist:

Die zusammenhängende Bahn von s unter der kommutativen Gruppe N besteht nämlich aus lauter Fixpunkten von P. Wäre s kein globaler Fixpunkt von N, so wäre also P im Stabilisator von drei uneigentlichen Punkten enthalten; da dieser nach dem Lemma über Achsenstandgruppen (1.4(e)) kompakt ist, erhielte man einen Widerspruch zu 4.5.

Derselbe Schluß zeigt dann, daß s auch ein Fixpunkt von Σ sein muß, da N von Σ normalisiert wird und folglich die Bahn von s unter Σ aus Fixpunkten von N besteht.

Sei nun S die zu dem Fixpunkt s aus 4.6 gehörige Σ-invariante Ursprungsgerade. Wir zeigen:

4.7. *N besteht aus Scherungen mit Achse S.*

Beweis. Nach 4.6 läßt N die Ursprungsgerade S invariant. Wir legen nun Koordinaten wie in 2.1 zugrunde, wobei wir noch annehmen können, daß

$$S = \{0\} \times \mathbb{H}^2$$

ist.

Wie in 3.3 Beweisteil (c) sieht man, daß die Untergruppe $\Theta \cong \mathrm{SU}_2(\mathbb{H})$ von Σ aus 2.1 eine Einparameteruntergruppe N_1 von N zentralisiert. In den zugrundeliegenden quaternalen Koordinaten induziert daher N_1 auf $S = \mathbb{H}^2$ eine Gruppe linearer Transformationen

$$\mathbb{H}^2 \to \mathbb{H}^2\colon \quad y \mapsto y \cdot \alpha(t)$$

mit einem Homomorphismus

$$\alpha\colon \quad \mathbb{R} \to \mathbb{H}^\times\colon \quad t \mapsto \alpha(t)$$

in die multiplikative Gruppe des Quaternionenkörpers.

Wie in 3.3 Beweisteil (b) ergibt sich andererseits, daß die Konjugation mit der Kollineation

$$\kappa\colon \quad \mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2 \to \mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2\colon \quad (x, y) \mapsto (xi, yi)$$

aus Σ auf N die Inversion bewirkt. Für die Einparameteruntergruppe N_1 in ihrer Wirkung auf $S = \mathbb{H}^2$ bedeutet das insbesondere, daß $i \cdot \alpha(t) \cdot i^{-1} = \alpha(t)^{-1}$ für alle $t \in \mathbb{R}$ ist. Insbesondere ist stets $|\alpha(t)| = 1$. Die Einparameteruntergruppen in der multiplikativen Gruppe der Quaternionen von Norm 1 sind nun bekannt; es handelt sich um eindimensionale Tori. $N_1|S$ ist somit entweder trivial oder ein eindimensionaler Torus, und wegen $N_1 \cong \mathbb{R}$ (siehe 4.5) hat die Einschränkungsabbildung

$N_1 \to N_1|S$ in jedem Fall nichttrivialen Kern. N enthält also eine Kollineation $\eta \neq \mathrm{id}$, die S als Achse hat, d.h. identisch auf S wirkt. Dasselbe gilt dann für die Konjugierten von η unter den Kollineationen aus Σ. Diese bilden aber eine 5-Sphäre in $N \cong \mathbb{R}^6$, da Σ auf der Vektorgruppe $N \cong \mathbb{R}^6$ wie auf ihrer Liealgebra $\mathcal{N}$ als $\mathrm{SO}_6(\mathbb{R})$ in der gewöhnlichen Wirkung operiert (4.3). Diese 5-Sphäre erzeugt N als Liegruppe; somit ist S Achse aller Kollineationen aus N.

Das Zentrum einer Kollineation aus N liegt auf der Fixgeraden L_∞ und ist wegen der Kommutativität ein Fixpunkt von ganz N. Da $N \cong \mathbb{R}^6$ nach dem Lemma über Achsenstandgruppen (1.4(e)) nicht zwei verschiedene uneigentliche Punkte festlassen kann, ist s das Zentrum aller Kollineationen aus N. Es handelt sich somit um Scherungen mit Achse S, womit 4.7 bewiesen ist.

Insgesamt hat man also zu der Σ-invarianten Ursprungsgeraden S als Achse die 6-dimensionale Scherungsgruppe N. Damit folgt Satz 4.1 aus 3.1.

5. Der halbeinfache Kopf

Nun soll folgendes bewiesen werden:

5.1. *Ist die Ebene nicht die klassische Oktavenebene, so ist Σ Normalteiler eines halbeinfachen Kopfs von $\Delta = (\mathrm{S}\mathbb{G}_o)^1$.*

Beweis. (a) Man findet zunächst einen halbeinfachen Kopf H, der die quasi-einfache Gruppe Σ enthält. Sei

$$H = H_1 \cdot H_2 \cdot \dots \cdot H_k$$

eine Zerlegung von H als fastdirektes Produkt quasi-einfacher zusammenhängender Faktoren H_ν von H. Es gibt einen Faktor, o.B.d.A. H_1, in den sich Σ nichttrivial projiziert, und da $\Sigma \cong \mathrm{SU}_4(\mathbb{C})$ quasi-einfach ist, ist das Projektionsbild eine zu $\mathrm{SU}_4(\mathbb{C})$ lokal isomorphe Untergruppe Σ_1 von H_1.

(b) Man überlegt sich nun, daß Σ_1 ebenso operiert wie Σ, d.h. ebenfalls außer o keine weiteren affinen Fixpunkte hat:

Angenommen nämlich, Σ_1 habe weitere affine Fixpunkte. Im Vorgriff auf Abschnitt 7, wo diese Situation analysiert ist, entnehmen wir dem Hilfssatz 7.2, daß dann folgendes gilt: Σ_1 ist isomorph zu $\mathrm{SU}_4(\mathbb{C})$, die zentrale Involution ι_1 von Σ_1 ist eine Spiegelung mit einer Ursprungsgeraden W als Achse, und auf der Ursprungsgeraden S durch das uneigentliche Zentrum $s \in L_\infty$ von ι_1, die invariant unter Σ_1 ist, wirkt Σ_1 wie $\mathrm{SU}_4(\mathbb{C})$ in der gewöhnlichen Wirkung auf $\mathbb{C}^4$.

Die anderen einfachen Faktoren H_ν ($\nu = 2, \dots, k$) zentralisieren Σ_1 und ι_1

und lassen damit die Achse W und die Ursprungsgerade S durch das Zentrum von ι_1 ebenfalls invariant. Der Kern der Wirkung von H_ν auf S ist diskret, denn es handelt sich um eine Gruppe von Achsenstreckungen mit Achse S in Richtung von W, die nach 1.4(d) diskret oder eindimensional ist; die quasi-einfache Gruppe H_ν hat aber keine eindimensionalen Normalteiler. Also ist H_ν lokal isomorph zu der auf S induzierten linearen Gruppe $H_\nu | S$. Diese zentralisiert $\Sigma_1 | S \cong \mathrm{SU}_4(\mathbb{C})$; der Zentralisator von $\mathrm{SU}_4(\mathbb{C})$ in $\mathrm{GL}_8(\mathbb{R})$ besteht aber aus den komplexen Streckungen und enthält keine quasi-einfachen Untergruppen. Somit kommen gar keine weiteren einfachen Faktoren außer H_1 vor; man hat also $H = H_1$, und wegen $\Sigma \subseteq H$ folgt, daß die Projektion Σ_1 gleich Σ ist. Dies verträgt sich aber nicht mit der Annahme, daß Σ_1 neben o weitere affine Fixpunkte haben soll.

Damit ist (b) bewiesen, und die Aussagen 2.1–2.4 über die Wirkung von Σ treffen *mutatis mutandis* auch auf Σ_1 zu. Insbesondere betrachten wir die zur 2-Sphäre homöomorphe Menge F_1 der Fixpunkte von Σ_1 auf L_∞, um zu zeigen:

(c) *Das Produkt*

$$Z = H_2 \cdot \cdots \cdot H_k$$

der übrigen einfachen Faktoren von H ist höchstens 6-dimensional.

Z zentralisiert nämlich Σ_1 und läßt daher die 2-Sphäre F_1 invariant. Für $f, f' \in F_1$ ist also nach der Dimensionsformel

$$\begin{aligned} \dim Z &\leqslant \dim Z(f) + \dim Z_f(f') + \dim Z_{f,f'} \\ &\leqslant 2 + 2 + \dim Z_{f,f'}. \end{aligned}$$

Nach 2.4 ist nun $\dim \Delta_{f,f'} \leqslant 17$; wegen $\Sigma_1 \leqslant \Delta_{f,f'}$ und da $\Sigma_1 \cap Z$ diskret ist, folgt

$$\dim Z_{f,f'} \leqslant 2,$$

womit insgesamt (c) bewiesen ist.

Damit ergibt sich nun

(d) $\quad \Sigma_1 = \Sigma,$

denn Σ_1 ist die Projektion von Σ in H_1, und die Projektion der quasi-einfachen 15-dimensionalen Liegruppe Σ in die übrigen Faktoren von H ist nach (c) aus Dimensionsgründen trivial.

Die insgesamt zu beweisende Behauptung, daß Σ normal in H ist, ist somit gleichbedeutend mit

(e) $\quad \Sigma = H_1.$

Um diese Aussage zu beweisen, schätzen wir die Möglichkeiten für die Dimension von H_1 grob ab. Für zwei uneigentliche Fixpunkte $f, f' \in F$ von Σ ist nach der Dimensionsformel für die Wirkung von H_1 auf der zur 8-Sphäre homöomorphen uneigentlichen Geraden

$$\begin{aligned} \dim H_1 \leqslant \dim \Delta \leqslant \dim \Delta(f) + \dim \Delta_f(f') + \dim \Delta_{f,f'} \\ \leqslant 8 + 8 + \dim \Delta_{f,f'}, \end{aligned}$$

nach 2.4 also $\dim H_1 \leqslant 33$. Als quasi-einfache Liegruppe einer Dimension $\leqslant 33$, die eine zu $SU_4(\mathbb{C})$ isomorphe Untergruppe hat, ist H_1 lokal isomorph zu einer der Gruppen $SU_4(\mathbb{C})$, $SO_7(\mathbb{R})$, $SO_7(\mathbb{R}, 1)$, $SU_5(\mathbb{C})$, $SU_5(\mathbb{C}, 1)$, $SO_8(\mathbb{R})$, $SO_8(\mathbb{R}, 1)$, $SO_8(\mathbb{R}, 2)$ oder $SL_4(\mathbb{C})$ (siehe [17]).

Nach dem Hauptsatz von [12] ist nun die einzige sechzehndimensionale Translationsebene, in der $\mathbb{G}_o$ eine zu $SO_7(\mathbb{R}, 1)$ lokal isomorphe Untergruppe enthält, die klassische Oktavenebene. Da von dieser abgesehen werden soll, scheiden damit die Fälle, daß H_1 lokal isomorph zu $SO_7(\mathbb{R}, 1)$, $SO_8(\mathbb{R}, 1)$ oder $SO_8(\mathbb{R}, 2)$ ist, aus.

Die sechzehndimensionalen Translationsebenen, in denen $\mathbb{G}_o$ eine zu $SO_7(\mathbb{R})$ lokal isomorphe zusammenhängende Untergruppe enthält, sind in [11] behandelt. Schon ganz zu Anfang der Erörterung zeigt sich dort ([11, 2.2]), daß außer im Fall der klassischen Oktavenebene eine solche neben o stets weitere affine Fixpunkte hat; wegen $H_1 \supseteq \Sigma$ trifft dies auf H_1 nicht zu.

Nach [7, 3.2] und [8, 2.13] hat in einer sechzehndimensionalen lokalkompakten Translationsebene $\mathbb{G}_o$ nie eine zu $SU_5(\mathbb{C})$, $SU_5(\mathbb{C}, 1)$ bzw. $SL_4(\mathbb{C})$ lokal isomorphe Untergruppe.

Schließlich ist nach [7, 3.7] die klassische Oktavenebene die einzige sechzehndimensionale lokalkompakte Translationsebene, in der $\mathbb{G}_o$ eine zu $SO_8(\mathbb{R})$ lokal isomorphe Untergruppe enthält.

Außer im Fall der klassischen Oktavenebene ist somit die einzige verbleibende Möglichkeit die, daß H_1 selbst lokal isomorph zu $SU_4(\mathbb{C})$, wegen $\Sigma \subseteq H_1$ also $H_1 = \Sigma$ ist. Damit ist 5.1 bewiesen.

Zusammen mit 4.1 erhält man nun anhand der Levizerlegung das folgende

5.2. KOROLLAR. *Ist die Ebene nicht die klassische Oktavenebene, so ist* Σ *normal in der Zusammenhangskomponente von* $\mathbb{G}_o$.

Dies ist der erste Teil des $SU_4(\mathbb{C})$-Satzes 1.2.

6. Der Normalisator von Σ

Zum Beweis des $SU_4(\mathbb{C})$-Satzes ist nun noch für den nichtklassischen Fall die Dimension der Kollineationsgruppe abzuschätzen.

Um nicht ständig die klassische Oktavenebene ausschließen zu müssen, formulieren wir die entsprechende Aussage als Dimensionsabschätzung für den Normalisator von Σ; im nichtklassischen Fall ist damit nach 5.2 ganz $\mathbb{G}_o$ erfaßt.

6.1. *Entweder ist der Normalisator von* Σ *in* $\Delta = (S\mathbb{G}_o)^1$ *höchstens* 20-*dimensional, oder aber die Ebene ist die klassische Oktavenebene.*

Beweis. (a) Sei Ψ die Zusammenhangskomponente des Normalisators. Sie läßt die zur 2-Sphäre homöomorphe Menge F der Fixpunkte von Σ in L_∞ (siehe 2.3) invariant.

(b) Ist die Wirkung von ψ auf F nicht zweifach transitiv, so existiert $f \in F$ derart, daß die Zusammenhangskomponente des Stabilisators Ψ_f nicht transitiv auf $F \setminus \{f\}$ ist, also eine Bahn der Dimension $\leqslant 1$ hat. Wählt man f' aus dieser, so folgt mit der Dimensionsformel $\dim \Psi \leqslant \dim \Psi(f) + \dim \Psi_f(f') + \dim \Psi_{f,f'} \leqslant 2 + 1 + 17$, letzteres nach 2.4. Damit ist die Behauptung für diesen Fall gezeigt.

(c) Nun muß noch die Situation behandelt werden, daß Ψ zweifach transitiv auf der 2-Sphäre F operiert. Die effektive Wirkung von Ψ auf F ist dann isomorph zur gewöhnlichen Wirkung von $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ auf der komlexen projektiven Geraden (dies folgt aus der Klassifikation von Mostow [13] aller auf Flächen transitiven Liegruppen, siehe auch Betten–Forst [2], oder aber aus der Klassifikation von Tits [17, IV. F, S. 223 ff.] aller zweifach transitiven Wirkungen von Liegruppen).

Betrachtet man nun einen halbeinfachen Kopf H von Ψ mit $H \supseteq \Sigma$, so stellt man fest, daß H unter der Einschränkungsabbildung $H \to H|F$ surjektiv auf $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ abgebildet wird. Die Zusammenhangskomponente $H^1_{[F]}$ des Ineffektivitätskerns der Wirkung von H auf F ist ein Normalteiler, also ein Produkt einfacher Faktoren von H, und das Produkt der übrigen einfachen Faktoren überlagert $H|F \cong \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$. Insbesondere enthält H also das fastdirekte Produkt von Σ mit einer zu $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ lokal isomorphen Untergruppe. Diese Situation wird nun durch den folgenden Satz erfaßt:

6.2. SATZ. *Eine sechzehndimensionale lokalkompakte Translationsebene, in der* $\mathbb{G}_o$ *eine zu* $\mathrm{SU}_4(\mathbb{C}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ *lokal isomorphe abgeschlossene Untergruppe enthält, ist isomorph zur klassischen Oktavenebene.*

Beweis. (a) Sei H eine zu $\mathrm{SU}_4(\mathbb{C}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ lokal isomorphe, abgeschlossene, zusammenhängende Untergruppe von $\mathbb{G}_o$.

Als lineare Gruppe von $\mathbb{A} = \mathbb{R}^{16}$ realisiert H eine Darstellung von $\mathrm{SU}_4(\mathbb{C}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$. Anhand der Kenntnis der Darstellungen der einfachen Liegruppen und ihrer direkten Produkte (siehe etwa [17], insbesondere 7.5,

S. 9; 7.6b), S. 10) ergibt sich, daß es in $\mathbb{R}^{16}$ bis auf Äquivalenz nur eine solche Darstellung gibt: H ist das fastdirekte Produkt $\mathrm{SU}_4(\mathbb{C})\cdot\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ in der naheliegenden Wirkung auf $\mathbb{C}^4 \otimes \mathbb{C}^2 = \mathbb{R}^{16}$.

Vermöge der $\mathbb{C}$-linearen Abbildung

$$\mathbb{C}^4 \otimes \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^4 \times \mathbb{C}^4,$$

die durch

$$x \otimes z \mapsto (xz_1, xz_2) \quad \text{für } z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$$

definiert ist, erhält man eine Identifikation

$$\mathbb{A} = \mathbb{C}^4 \times \mathbb{C}^4,$$

bezüglich der die beteiligten Gruppen folgendermaßen wirken: Der Faktor

$$\Sigma \cong \mathrm{SU}_4(\mathbb{C})$$

von H besteht aus den Transformationen

$$\mathbb{C}^4 \times \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4 \times \mathbb{C}^4\colon \quad (x, y) \mapsto (A(x), A(y))$$

mit

$$A \in \mathrm{SU}_4(\mathbb{C});$$

der Faktor

$$\Lambda \cong \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$$

aus den Transformationen

$$\mathbb{C}^4 \times \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4 \times \mathbb{C}^4\colon \quad (x, y) \mapsto (xa + yc, xb + yd)$$

mit $a, b, c, d \in \mathbb{C}$,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}).$$

Insbesondere wirkt Σ wie in 2.1 beschrieben. Wie dort werden wir gelegentlich $\mathbb{C}^4$ auch als den $\mathbb{C}$-Rechtsvektorraum $\mathbb{H}^2$ betrachten.

Sei nun wieder F die zur 2-Sphäre homöomorphe Menge der Fixpunkte von Σ in L_∞ (2.3). Wir zeigen:

(b) *Für $e \in L_\infty \setminus F$ ist die Zusammenhangskomponente H_e^1 des Stabilisators von e konjugiert zu*

$$\mathrm{SU}_2(\mathbb{H})\cdot\mathrm{SU}_2(\mathbb{C}) \subseteq \mathrm{SU}_4(\mathbb{C})\cdot\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) = H.$$

Insbesondere wirkt H transitiv auf $L_\infty \setminus F$.

Eine beliebige Einparameteruntergruppe P von H_e^1 hat in der 2-Sphäre F nach dem Fixpunktsatz von Lefschetz ([16, 4.7.12, S. 197]) einen weiteren Fixpunkt f. Ist dabei P eine abgeschlossene Untergruppe, so ist sie sogar kompakt, denn nach dem Lemma über Achsenstandgruppen (1.4(e)) müßten sich sonst alle Bahnen von P in $L_\infty \setminus \{e,f\}$ bei e häufen, was für die in F eingeschlossenen Bahnen nicht möglich ist. Folglich ist H_e^1 insgesamt kompakt und damit bis auf Konjugation (d.h. bis auf Ersetzung von e durch einen anderen Punkt aus derselben Bahn) eine Untergruppe der maximalen kompakten Untergruppe $SU_4(\mathbb{C})\cdot SU_2(\mathbb{C})$ von $H = SU_4(\mathbb{C})\cdot SL_2(\mathbb{C})$.

Nach der Dimensionsformel

(1) $\qquad \dim H_e^1 = \dim H - \dim H(e) = 21 - \dim H(e)$

und da $H(e)$ als Teilmenge der 8-Sphäre L_∞ höchstens 8-dimensional ist, hat man

$$\dim H_e^1 \geqslant 13.$$

Wir betrachten nun die Faktorisierung von $SU_4(\mathbb{C})\cdot SU_2(\mathbb{C})$ nach dem Normalteiler $SU_2(\mathbb{C})$; das Bild ist die Faktorgruppe $SU_4(\mathbb{C})/\{\mathrm{id}, \iota\} \cong SO_6(\mathbb{R})$, wo ι die zentrale Involution von $SU_4(\mathbb{C})$ ist. Das Bild $\mathrm{pr}(H_e^1)$ der mindestens 13-dimensionalen Untergruppe H_e^1 unter der Faktorprojektion ist eine mindestens 10-dimensionale Untergruppe von $SO_6(\mathbb{R})$. Unter der Überlagerung $SU_4(\mathbb{C}) \to SU_4(\mathbb{C})/\{\mathrm{id}, \iota\} \cong SO_6(\mathbb{R})$ stammt sie von einer mindestens 10-dimensionalen Untergruppe von $SU_4(\mathbb{C})$. Die großen Untergruppen von $SU_4(\mathbb{C})$ bzw. $SO_6(\mathbb{R})$ sind nun bekannt (beispielsweise kann man sie heraussuchen aus den großen Untergruppen von $GL_8(\mathbb{R})$, von denen etwa in [8, 2.8] eine Liste zu finden ist): eine mindestens 10-dimensionale, zusammenhängende, abgeschlossene echte Untergruppe von $SU_4(\mathbb{C})$ ist konjugiert zur 10-dimensionalen Untergruppe $SU_2(\mathbb{H})$ (die man aufgrund unserer Identifikation $\mathbb{H}^2 = \mathbb{C}^4$ gewinnt) und überlagert eine zu $SO_5(\mathbb{R})$ konjugierte Untergruppe von $SO_6(\mathbb{R})$.

$\mathrm{pr}(H_e^1)$ ist nun in der Tat eine echte Untergruppe, denn sonst wäre H_e^1 mindestens 15-dimensional und der Schnitt von $H_e^1 \subseteq SU_4(\mathbb{C})\cdot SU_2(\mathbb{C})$ mit dem Faktor $\Sigma \cong SU_4(\mathbb{C})$ wäre mindestens 12-dimensional, also (nach den eben mitgeteilten Informationen über die großen Untergruppen von $SU_4(\mathbb{C})$) gleich Σ; somit läge Σ in H_e^1, im Widerspruch dazu, daß e kein Fixpunkt von Σ sein soll.

Bis auf Konjugation ist also insgesamt $H_e^1 \subseteq SU_2(\mathbb{H})\cdot SU_2(\mathbb{C})$, und wegen $\dim H_e^1 \geqslant 13$ folgt dann die Gleichheit. Insbesondere ist H_e^1 genau

13-dimensional, und mit der Dimensionsformel (1) folgt, daß jede Bahn von H in $L_\infty \setminus F$ die volle Dimension 8 hat, also offen ist. Aus Zusammenhangsgründen folgt daraus die behauptete Transitivität.

(c) Die Ursprungsgeraden, die zu den uneigentlichen Punkten aus F gehören (also die Σ-invarianten Ursprungsgeraden), liegen nach 2.2 eindeutig fest. Die übrigen Ursprungsgeraden werden nach (b) von H transitiv permutiert, und da die Wirkung von H auf $\mathbb{A} = \mathbb{R}^{16}$ nach (a) bekannt ist, genügt es, eine dieser Geraden zu bestimmen, um die Ebene zu kennen.

Dazu nehmen wir eine Ursprungsgerade E, die unter der Untergruppe $\mathrm{SU}_2(\mathbb{H})\cdot\mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$ selbst invariant bleibt (eine solche existiert nach (b)). Bezüglich der Identifikation

$$\mathbb{A} = \mathbb{C}^4 \times \mathbb{C}^4 = \mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$$

aus (a) hat diese Gerade die Gestalt

$$E = \{(x, T(x));\quad x \in \mathbb{H}^2\}$$

mit einer $\mathbb{R}$-linearen Transformation T von $\mathbb{H}^2$, da E komplementär zu den Σ-invarianten Geraden $\mathbb{H}^2 \times \{0\}$ und $\{0\} \times \mathbb{H}^2$ ist, wobei T wegen der $\mathrm{SU}_2(\mathbb{H})$-Invarianz von E im Zentralisator von $\mathrm{SU}_2(\mathbb{H})$ liegt, also die Multiplikation mit einem Skalar $\alpha \in \mathbb{H}$ im $\mathbb{H}$-Rechtsvektorraum $\mathbb{H}^2$ darstellt, so daß

$$E = \{(x, x\alpha);\quad x \in \mathbb{H}^2\}.$$

Nun nützen wir noch die Invarianz von E unter der $\mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$ entsprechenden Untergruppe Φ des Faktors $\Lambda \cong \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ von H aus; nach (a) besteht sie aus den Transformationen

$$\rho_{a,b}\colon\quad (x, y) \mapsto (xa - y\bar{b}, xb + y\bar{a})$$

mit

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \in \mathrm{SU}_2(\mathbb{C}),\quad \text{d.h. } a\bar{a} + b\bar{b} = 1.$$

Wegen $\rho_{a,b}(x, x\alpha) = (x\cdot(a - \alpha\bar{b}), x\cdot(b + \alpha\bar{a}))$ bedeutet die Invarianz von E unter $\Phi \cong \mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$, daß stets

$$(2)\qquad b + \alpha\bar{a} = (a - \alpha\bar{b})\alpha.$$

Speziell mit $b = 0$ folgt

$$\alpha\bar{a} = a\alpha$$

für alle $a \in \mathbb{C} = \langle 1, i \rangle \subseteq \mathbb{H}$ (zunächst speziell für $a\bar{a} = 1$ und dann allgemein); also muß die Quaternion α im $\mathbb{R}$-linearen Aufspann von j und k liegen:

$$\alpha \in \langle j, k \rangle.$$

Weiter folgt aus (2) dann $b = -\alpha\bar{b}\alpha = -b\alpha^2$, also $\alpha^2 = -1$; da α nach dem Vorausgegangenen eine reine Quaternion ist, ist dies gleichbedeutend mit

$$|\alpha| = 1.$$

Bei einer Koordinatentransformation der Gestalt $(x, y) \mapsto (xc, yc)$ mit $c \in \langle 1, i \rangle = \mathbb{C} \subseteq \mathbb{H}$ ändert sich an der Beschreibung der Gruppe H nichts, jedoch transformiert sich α in $c\alpha c^{-1}$. Dabei kann c so gewählt werden, daß $c\alpha c^{-1} = j$, da Konjugation in $\mathbb{H}$ mit Elementen aus $\langle 1, i \rangle$ auf $\langle j, k \rangle \cong \mathbb{R}^2$ alle Drehungen induziert.

Insgesamt kann man die Koordinatisierung also so einrichten, daß E die Gestalt

$$E = \{(x, xj); \quad x \in \mathbb{H}^2\}$$

bekommt. Da, wie oben ausgeführt, die Ebene durch die Angabe von E eindeutig bestimmt ist, ist damit gezeigt, daß es bis auf Isomorphie nur (höchstens) eine Ebene mit einer solchen Kollineationsgruppe gibt.

(d) Satz 6.2 ist somit bewiesen, wenn wir uns überzeugt haben, daß die Ausgangssituation des Satzes in der Oktavenebene ebenfalls vorliegt. In der Oktavenebene induziert nun $\mathbb{G}_o$ auf L_∞ eine zu $\mathrm{PSO}_{10}(\mathbb{R}, 1)$ isomorphe Transformationsgruppe (einige Hinweise auf die verzweigte Literatur hierzu sind in [12, §2], Beweisteil (a) zusammengestellt). $S\mathbb{G}_o$ überlagert also $\mathrm{PSO}_{10}(\mathbb{R}, 1)$ und enthält daher eine abgeschlossene Untergruppe, die zu $\mathrm{SO}_6(\mathbb{R}) \times \mathrm{SO}_4(\mathbb{R}, 1)$ und damit zu $\mathrm{SU}_4(\mathbb{C}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ lokal isomorph ist.

6.3. KOROLLAR. *In der Situation von* 1.1 *ist* $\dim \mathbb{G} \leqslant 37$, *falls nicht die klassische Oktavenebene vorliegt.*

Beweis. Außer im Fall der klassischen Oktavenebene ist nach 5.2 die Kollineationsgruppe Σ ein Normalteiler von $\Delta = (S\mathbb{G}_o)^1$, und nach 6.1 folgt dann $\dim S\mathbb{G}_o = \dim \Delta \leqslant 20$. Mit der eindimensionalen Streckungsgruppe $\mathbb{G}_{[o, L_\infty]}$ und der 16-dimensionalen Translationsgruppe ergibt sich damit $\dim \mathbb{G}_o \leqslant 21$ und $\dim \mathbb{G} \leqslant 21 + 16 \leqslant 37$.

Zusammen mit 5.2 sind damit alle Aussagen des $\mathrm{SU}_4(\mathbb{C})$-Satzes 1.2 bewiesen.

7. Die andere Wirkung von $SU_4(\mathbb{C})$ als Kollineationsgruppe

Zur Ergänzung beweisen wir hier:

7.1. SATZ. *In einer sechzehndimensionalen lokalkompakten Translationsebene enthalte* $\mathbb{G}_o$ *eine abgeschlossene, zusammenhängende Untergruppe* Ξ, *die lokal isomorph zu* $SU_4(\mathbb{C})$ *ist und neben o weitere affine Fixpunkte hat. Dann gilt eine der folgenden Alternativen:*

Entweder ist Ξ *in einer zu* $\mathrm{Spin}_7(\mathbb{R})$ *isomorphen Untergruppe von* $\mathbb{G}_o$ *enthalten (und die Ebene ist folglich eine der in* [11, 4.2] *bestimmten Ebenen, mit mindestens* 38*-dimensionaler Kollineationsgruppe), oder aber die Gruppe* $\mathbb{G}$ *aller affinen Kollineationen hat Dimension* $\leqslant 34$.

Von den bisherigen Ergebnissen werden hierfür nur die Abschnitte 2 und 3 benötigt.

Zur Vorbereitung des Beweises zeigen wir:

7.2. HILFSSATZ. *In der Situation von* 7.1 *ist* Ξ *isomorph zu* $SU_4(\mathbb{C})$. *Die zentrale Involution* ι *von* Ξ *ist die Spiegelung an einer Ursprungsgeraden W. Die Ursprungsgerade S durch das uneigentliche Zentrum s dieser Spiegelung ist invariant unter* Ξ, *und* $\Xi \cong SU_4(\mathbb{C})$ *wirkt treu auf* $S \cong \mathbb{C}^4$ *wie in der gewöhnlichen Wirkung.*

Beweis. Sei W die Ursprungsgerade durch einen von o verschiedenen Fixpunkt von Ξ; sie ist invariant unter Ξ.

Die Wirkung von Ξ auf W ist nichttrivial, sonst enthielte Ξ verschiedene vertauschbare Spiegelungen mit Achse W, die dann auch dasselbe Zentrum haben müßten und alle die Ursprungsgerade durch dieses Zentrum invariant lassen würden; aber in einer linearen Gruppe ist eine Involution durch Angabe des Raums der Fixvektoren und eines invarianten Komplements eindeutig bestimmt.

Andererseits ist die Wirkung von Ξ auf W angesichts der Fixpunkte nicht irreduzibel. Also induziert Ξ auf W eine zu $SO_6(\mathbb{R})$ isomorphe lineare Gruppe, da die einzige reelle irreduzible Darstellung von $SU_4(\mathbb{C})$ einer Dimension <8 die gewöhnliche Wirkung als die Faktorgruppe $SO_6(\mathbb{R})$ auf $\mathbb{R}^6$ ist ([17]). Nun kann eine Untergruppe der Kollineationsgruppe $\mathbb{G}_o$ nach [12, §3 Hilfssatz] niemals selbst isomorph zu $SO_6(\mathbb{R})$ sein; also ist Ξ isomorph zur universellen Überlagerungsgruppe $SU_4(\mathbb{C})$, die $SO_6(\mathbb{R})$ zweiblättrig überlagert, und die zentrale Involution ι von Ξ ist eine Spiegelung mit Achse W.

Das Zentrum s von ι liegt auf der Fixgeraden L_∞; es bleibt fest unter ganz Ξ. Die zugehörige Ursprungsgerade S ist also Ξ-invariant; sie besteht aus den Eigenvektoren von ι zum Eigenwert -1. Da jeder Normalteiler von $SU_4(\mathbb{C})$ die zentrale Involution enthält, ist die Wirkung von Ξ auf S treu.

Sie ist äquivalent zur gewöhnlichen Wirkung von $\mathrm{SU}_4(\mathbb{C})$ auf $\mathbb{C}^4$, da dies die einzige treue reelle Darstellung von $\mathrm{SU}_4(\mathbb{C})$ in Dimension $\leqslant 8$ ist ([17]).

Beweis von Satz 7.1. (a) Wir knüpfen an die eben im Beweis von 7.2 gegebene Situationsbeschreibung an. Auf einer zu S parallelen Geraden durch einen von o verschiedenen Fixpunkt von Ξ in W wirkt Ξ wie auf S, und durch Projektion von o aus erhält man daraus auch Aufschluß, wie Ξ auf der uneigentlichen Geraden L_∞ wirkt: Sie läßt die zu S und W gehörigen uneigentlichen Punkte s und w fest und hat in $L_\infty \setminus \{s, w\}$ lauter zur 7-Sphäre homöomorphe Bahnen (wie $\Xi \cong \mathrm{SU}_4(\mathbb{C})$ in $S \setminus \{o\} \cong \mathbb{C}^4 \setminus \{0\}$). Daraus folgt nun mit Hilfe des sog. Sphärensatzes aus [7, 1.2]:

(b) *Ist die Ebene nicht die klassische Oktavenebene, so bleiben s und w unter der Zusammenhangskomponente von $\mathbb{G}_o$ fest.*

Nach dem Sphärensatz ist nämlich sonst die Ebene eine Ebene vom Lenz-Typ V, mit s oder w als Zentrum einer linear transitiven Gruppe von Scherungen, d.h. die Gruppe der Scherungen mit Achse S oder die Gruppe der Scherungen mit Achse W hat die größtmögliche Dimension 8.

Durch Dualisierung bzw. durch Transposition mit anschließender Dualisierung erhält man eine Lenz-Typ-V-Ebene mit einer Kollineationsgruppe $\Xi^* \cong \mathrm{SU}_4(\mathbb{C})$, die zwei Ursprungsgeraden S^* und W^* festläßt und auf beiden Geraden die Gruppe $\mathrm{SU}_4(\mathbb{C})$ induziert, wobei S^* die Achse einer 8-dimensionalen Gruppe von Scherungen ist (analog zu dem Argument in [10, 5.3, 5.4], wo diese Technik der Transposition für achtdimensionale Ebenen und mit der Gruppe $\mathrm{Spin}_3(\mathbb{R})$ statt $\mathrm{SU}_4(\mathbb{C}) = \mathrm{Spin}_6(\mathbb{R})$ erläutert wird). Insbesondere wirkt Ξ^* wie die Gruppe Σ, die in den früheren Abschnitten der vorliegenden Arbeit betrachtet wurde; und angesichts der großen Scherungsgruppe folgt mit Satz 3.1, daß die klassische Oktavenebene vorliegt.

(c) Sei nun wieder

$$\Delta = (\mathrm{S}\mathbb{G}_o)^1;$$

wir betrachten eine Ξ enthaltende, maximale kompakte zusammenhängende Untergruppe K des Stabilisators $\Delta_{s,w}$ (der nach (b) außer im Fall der klassischen Oktavenebene mit Δ übereinstimmt). Dabei gehen wir ähnlich vor wie in 2.4. K wirkt fast effektiv auf S. Wegen $\Xi \subseteq K$ enthält $K|S$ die Gruppe $\mathrm{SU}_4(\mathbb{C})$; folglich ist $K|S$ isomorph zu $\mathrm{SO}_8(\mathbb{R})$, $\mathrm{Spin}_7(\mathbb{R})$, $\mathrm{U}_4(\mathbb{C})$ oder $\mathrm{SU}_4(\mathbb{C})$.

In den beiden ersten Fällen enthält K eine zusammenhängende abgeschlossene Untergruppe Ω mit $\Xi \subseteq \Omega$ und $\Omega|S \simeq \mathrm{Spin}_7(\mathbb{R})$. Wegen der fast effektiven Wirkung von K auf S ist dann Ω selbst isomorph zu $\mathrm{Spin}_7(\mathbb{R})$, da die einfach zusammenhängende Gruppe $\mathrm{Spin}_7(\mathbb{R})$ nicht echt überlagert werden kann.

In den beiden letzten Fällen ist $\dim K \leqslant 16$. Insbesondere befinden wir uns nicht in der Oktavenebene (in der $\Delta_{s,w}$ ja eine zu $\mathrm{SO}_8(\mathbb{R})$ lokal isomorphe Untergruppe enthält, siehe 3.2 Beweisteil (b)). Also ist nach (b) $\Delta = \Delta_{s,w}$, und auf diesen Stabilisator kann man das Lemma über Achsenstandgruppen (1.4(e)) anwenden; es liefert

$$\dim \Delta = \dim \Delta_{s,w} \leqslant \dim K + 1 \leqslant 17.$$

Zusammen mit den reellen Streckungen und den Translationen hat dann $\mathbb{G}$ höchstens die Dimension $17 + 1 + 16 = 34$.

LITERATUR

1. André, J., 'Über nicht desarguessche Ebenen mit transitiver Translationsgruppe', *Math. Z.* **60** (1954), 156–186.
2. Betten, D. und Forst, M., *Transitive Wirkungen auf Flächen/Effektive Lie-Algebren-Paare der Codimension* 2, Math. Sem. Univ. Kiel, 1977.
3. Breuning, P., 'Translationsebenen und Vektorraumbündel', *Mitt. Math. Sem. Gießen* **86** (1970), 1–50.
4. Buchanan, T. und Hähl, H., 'On the Kernel and the Nuclei of 8-Dimensional Locally Compact Quasifields', *Arch. Math.* **29** (1977), 472–480.
5. Dembowski, P., *Finite Geometries*, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1968.
6. Hähl, H., 'Automorphismengruppen von lokalkompakten zusammenhängenden Quasikörpern und Translationsebenen', *Geom. Dedicata* **4** (1975), 305–321.
7. Hähl, H., 'Lokalkompakte zusammenhängende Translationsebenen mit großen Sphärenbahnen auf der Translationsachse', *Resultate der Math.* **2** (1979), 62–87.
8. Hähl, H., 'Zur Klassifikation von 8- und 16-dimensionalen lokalkompakten Translationsebenen nach ihren Kollineationsgruppen', *Math. Z.* **159** (1978), 259–294.
9. Hähl, H., 'Eine Klasse von achtdimensionalen lokalkompakten Translationsebenen mit großen Scherungsgruppen', *Mh. Math.* **97** (1984), 23–45.
10. Hähl, H., 'Achtdimensionale lokalkompakte Translationsebenen mit mindestens 17-dimensionaler Kollineationsgruppe', *Geom. Dedicata* **21** (1986), 299–340.
11. Hähl, H., 'Sechzehndimensionale lokalkompakte Translationsebenen mit Spin(7) als Kollineationsgruppe, *Arch. Math. (Basel)* **48** (1987), 267–276.
12. Hähl, H., 'Eine Kennzeichnung der Oktavenebene' (erscheint in *Indag. Math.*).
13. Mostow, G. D., 'The Extensibility of Local Lie Groups of Transformations and Groups on Surfaces', *Ann. Math.* **52** (1950), 606–636.
14. Pickert, G., *Projektive Ebenen*, Springer, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1955.
15. Porteous, I. R., *Topological Geometry*, 2. Auflage, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1981.
16. Spanier, E., *Algebraic Topology*, McGraw Hill, New York, 1966.
17. Tits, J., 'Tabellen zu den einfachen Lie-Gruppen und ihren Darstellungen', *Lecture Notes in Math.* **40**, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1967.
18. van der Blij, F. und Springer, T. A., 'Octaves and Triality', *Nieuw Archief voor Wiskunde* **8** (1960), 158–169.

Anschrift des Verfassers:

Hermann Hähl,
Mathematisches Seminar der Universität Kiel,
Olshausenstr. 40,
D-2300 Kiel 1,
B.R.D.

(Received, June 20, 1986)