Mh. Math. 106, 265—299 (1988)

Monatshefte für
Mathematik

Die Oktavenebene als Translationsebene mit großer Kollineationsgruppe

Von

Hermann Hähl, Kiel

(Eingegangen am 5. Januar 1988)

Abstract. The Cayley Plane as a Translation Plane with a Large Collineation Group. It is shown that the affine plane over the Cayley numbers is the only 16-dimensional locally compact topological translation plane having a collineation group of dimension at least 41. This (hitherto unpublished) result is one of the ingredients of H. Salzmann's characterizations of the Cayley plane among general compact projective planes by the size of its collineation group.

The proof involves various case studies of the possibilities for the structure and size of collineation groups of 16-dimensional locally compact translation planes. At the same time, these case studies are important steps for a classification program aiming at the explicit determination of all such translation planes having a collineation group of dimension at least 38.

1. Einleitung

Eines der Ziele der vorliegenden Arbeit ist der Beweis der folgenden Charakterisierung der affinen Ebene über der Algebra $\mathbb{O}$ der reellen Oktaven:

1.1. Satz. *Die affine Ebene über $\mathbb{O}$ ist bis auf Isomorphie die einzige lokalkompakte, sechzehndimensionale topologische Translationsebene, die eine Kollineationsgruppe einer Dimension $\geqslant 41$ besitzt.*

Hingegen gibt es Ebenen dieser Art, die nicht zur Oktavenebene isomorph sind und deren Kollineationsgruppe die Dimension 40 hat (nämlich die Ebenen über den Divisionsalgebren mit G_2 als Automorphismengruppe, die in [7: 4.4, S. 215] sämtlich bestimmt wurden; siehe auch die Bemerkungen zu Satz 2.2).

Zum Verständnis sei gleich vermerkt, daß die Kollineationsgruppe solcher Ebenen eine Liegruppe ist (siehe 1.2(d)); ihre Dimension kann als Maß für ihre Größe angesehen werden.

Die bisher unveröffentlichte Charakterisierung 1.1 wird in Arbeiten von H. Salzmann ([21]—[24]) verwendet, um darüber hinaus entsprechende Charakterisierungen der Oktavenebene unter den sechzehndimensionalen lokalkompakten (affinen oder projektiven) Ebenen allgemein, also ohne Beschränkung auf Translationsebenen, zu gewinnen. In diesen Arbeiten wird immer wieder das Charakterisierungsproblem auf den Fall von Translationsebenen zurückgeführt, der dann selbst nicht weiter behandelt wird.

Der Beweis des Charakterisierungssatzes 1.1 wird gleichzeitig dazu dienen, allgemeiner die in [9] angekündigte Klassifikation aller sechzehndimensionalen lokalkompakten Translationsebenen mit einer Kollineationsgruppe der Dimension $\geqslant 38$ voranzutreiben. Der dort niedergelegte Ansatz beruht auf der Erkenntnis, daß in Ebenen mit dimensionsmäßig großer Kollineationsgruppe auch relativ große kompakte Kollineationsgruppen auftreten, die zwei sich schneidende affine Geraden festlassen. Die Möglichkeiten für die Zusammenhangskomponente K einer solchen kompakten Kollineationsgruppe, die in Betracht gezogen werden müssen, wurden in [9: 1.7, S. 263] festgehalten, und zwar absteigend nach der Dimension von K.

In den ersten Fällen enthält K eine zu $SU_4(\mathbb{C})$ lokal isomorphe Untergruppe. Diese Situation ist in [14: Sätze 1.2, 7.1] und [12] abgehandelt; es ergibt sich, daß abgesehen von der Oktavenebene die Ebenen dieser Art höchstens 39-dimensionale Kollineationsgruppe haben.

In der vorliegenden Arbeit sind nun noch die folgenden Fälle zu untersuchen: K ist (lokal) isomorph zu G_2 (§ 2), K enthält eine zu $SU_2(\mathbb{H})$ lokal isomorphe Untergruppe (§ 3), K enthält eine zu $SO_4(\mathbb{R}) \times U_2(\mathbb{C})$ lokal isomorphe Untergruppe (§ 4). Jeder dieser Fälle wird in voller Allgemeinheit so weit behandelt, wie es für den Beweis des Charakterisierungssatzes 1.1 erforderlich ist. Gleichzeitig können dabei schon für die allgemeinere Klassifikation nützliche Aussagen bereitgestellt werden; diese vollends auszumünzen, bleibt weiteren Arbeiten vorbehalten. In § 5 werden dann diese Einzeluntersuchungen zum Beweis des Charakterisierungssatzes 1.1 zusammengefügt.

Zur Vorbereitung hier noch einige

1.2. Grundtatsachen, Bezeichnungen. (a) (siehe z. B. [6: § 3]). In einer lokalkompakten sechzehndimensionalen (affinen) Translationsebene seien W und S zwei Geraden durch einen als Koordinatenursprung gewählten Punkt o, und sei e ein weiterer affiner Punkt außerhalb W, S. Dann läßt sich die Ebene bezüglich W und S als Achsen und e als Einheitspunkt koordinatisieren über einem lokalkompakten topologischen Quasikörper Q, dessen additive Gruppe die Vektorgruppe $\mathbb{R}^8$ ist.

Der affine Punktraum $\mathbb{A}$ ist in diesen Koordinaten der $\mathbb{R}$-Vektorraum $Q \times Q = \mathbb{R}^{16}$, und es ist $W = Q \times \{0\}$, $S = \{0\} \times Q$, $o = (0,0)$ und $e = (1,1)$. Die weiteren Ursprungsgeraden sind die achtdimensionalen linearen Teilräume $\{(x, a \circ x);\ x \in Q\}$ (Ursprungsgerade der „Steigung" a) für $0 \neq a \in Q$; die übrigen affinen Geraden entstehen als Bilder der Ursprungsgeraden unter der Translationsgruppe des Vektorraums $\mathbb{A} = \mathbb{R}^{16}$. Durch Adjunktion einer uneigentlichen Geraden L_∞ erhält man eine kompakte topologische projektive Ebene; deren projektive Geraden, also insbesondere L_∞, sind homöomorph zur 8-Sphäre $\mathbb{S}_8$.

(b) $\mathbb{G}$ bezeichne die Gruppe der affinen Kollineationen. Sie ist das semidirekte Produkt der Translationsgruppe mit dem Stabilisator $\mathbb{G}_o$ des Ursprungs. Der Kern $\mathbb{G}_{[o, L_\infty]}$ der Wirkung von $\mathbb{G}_o$ auf L_∞ ist die Gruppe der zentrischen Streckungen, die alle Geraden durch o invariant lassen; sie läßt sich ganz direkt beschreiben:

(c) *Die Gruppe $\mathbb{G}_{[o, L_\infty]}$ der zentrischen Streckungen mit o als Zentrum besteht genau aus den reellen skalaren Streckungen.*

Daß dies so einheitlich gilt, ist eine Besonderheit der sechzehndimensionalen Ebenen unter den lokalkompakten zusammenhängenden Translationsebenen allgemein; zugrunde liegt die Tatsache, daß nach [4] der Kern eines achtdimensionalen lokalkompakten Quasikörpers immer nur aus den reellen Vielfachen der 1 besteht, vgl. [14: 1.4 (b)].

(d) Die Kollineationen aus $\mathbb{G}_o$ sind $\mathbb{R}$-lineare Transformationen von $\mathbb{A} = \mathbb{R}^{16}$ (da semilinear über dem Kern, [1: Satz 19, S. 178], [19: 8.8, S. 208]); $\mathbb{G}_o$ ist also eine Untergruppe von $\mathrm{GL}_{16}(\mathbb{R})$. Da eine topologische Ebene vorliegt, ist $\mathbb{G}_o$ abgeschlossen in $\mathrm{GL}_{16}(\mathbb{R})$ (siehe [14: 1.4 (c)]). Insbesondere sind $\mathbb{G}_o$ und $\mathbb{G}$ Liegruppen.

$\mathbb{G}_o$ ist fastdirektes Produkt der Streckungsgruppe $\mathbb{G}_{[o, L_\infty]}$ aus (c) mit der Untergruppe

$$\mathrm{S}\mathbb{G}_o = \{\gamma \in \mathbb{G}_o;\ \det \gamma = \pm 1\},$$

die nach (c) auf L_∞ fast effektiv wirkt. Da die Translationen und Streckungen die uneigentlichen Punkte festlassen, induziert $S\mathfrak{G}_o$ auf L_∞ dieselbe Gruppe von Transformationen wie $\mathfrak{G}$.

Für Gruppen von Streckungen mit affinen Achsen hat man ein etwas schwächeres Gegenstück zu (c), das wiederum charakteristisch ist für sechzehndimensionale lokalkompakte Translationsebenen:

(e) *Sei S eine affine Gerade und $w \in L_\infty$ ein nicht zu S gehöriger uneigentlicher Punkt. Dann ist die Zusammenhangskomponente der Gruppe $\mathfrak{G}_{[w,S]}$ aller Streckungen mit Achse S und Zentrum w trivial oder isomorph zu $\mathbb{R}$, also insbesondere kompaktfrei und höchstens 1-dimensional.*

Dies wird in [14: 1.4(d)] auf der Grundlage einer Aussage über Nuklei achtdimensionaler Quasikörper aus [4: Theorem 2, S. 474] gezeigt. Indem man die Aussage, daß solche Streckungsgruppen in der Zusammenhangskomponente kompaktfrei sind, weiterverfolgt, erhält man noch (siehe [9: 2.7, S. 269]):

(f) *Sei C eine kompakte Untergruppe von $\mathfrak{G}$, die eine affine Gerade S invariant läßt. Dann ist die Untergruppe $C_{[S]}$ der Kollineationen, die S punktweise festlassen, endlich; infolgedessen ist die natürliche Abbildung $C \to C|S$ auf die von C induzierte Gruppe von Transformationen von S eine endliche Überlagerung.*

(g) *Der Stabilisator eines Vierecks.* Seien W und S zwei Geraden durch o, und seien $p \in W \setminus \{o\}$, $q \in S \setminus \{o\}$ zwei weitere Punkte. e sei der Schnittpunkt der Parallelen zu W und S durch q und p; seien w und s die zu W und S gehörigen uneigentlichen Punkte. Dann gilt für die Stabilisatoren dieser Elemente in der Kollineationsgruppe

$$\mathfrak{G}_{o,p,q} = \mathfrak{G}_{W,S,p,q} = \mathfrak{G}_{o,p,q,e} = \mathfrak{G}_{o,w,s,e}.$$

In Koordinaten (mit W und S als Achsen und e als Einheitspunkt) über einem Quasikörper Q sind die Kollineationen aus $\mathfrak{G}_{o,w,s,e}$ genau die Abbildungen

$$\gamma_\alpha: (x,y) \to (\alpha(x), \alpha(y)) ,$$

wo

$$\alpha \in \operatorname{Aut} Q$$

ein Automorphismus des Quasikörpers Q ist ([19: 1.24, S. 37]). Die Ursprungsgerade der Steigung a geht unter γ_α in die Ursprungsgerade der Steigung $\alpha(a)$ über. Identifiziert man $L_\infty \setminus \{s\}$ mit Q, indem man jedem uneigentlichen Punkt die Steigung der zugehörigen Ursprungsgeraden zuordnet, so wirkt also γ_α auf $W = Q \times \{0\}$, $S = \{0\} \times Q$ und $L_\infty \setminus \{s\} = Q$ in derselben Weise. Man hat somit:

Für eine Untergruppe Ω von $\mathbb{G}_{W,S,p,q}$ sind die Einschränkungsabbildungen

$$\Omega \to \Omega \mid W, \quad \Omega \to \Omega \mid S, \quad \Omega \to \Omega \mid L_\infty$$

Isomorphismen, und

$$\Omega \mid W, \quad \Omega \mid S \ \textit{und} \ \Omega \mid L_\infty \setminus \{s\}$$

sind als Transformationsgruppen isomorph.

Allgemeiner kann man Stabilisatoren zweier Ursprungsgeraden betrachten. Die folgende Aussage über ihre Struktur präzisiert den eingangs erwähnten Umstand, daß große Kollineationsgruppen auch große kompakte Untergruppen haben; sie ist eine vereinfachte Version eines grundlegenden Ergebnisses aus [6: 4.2] und [8: 2.1]:

(h) Lemma über Achsenstandgruppen. *Sei Ω eine abgeschlossene, zusammenhängende Untergruppe von $\mathrm{S}\mathbb{G}_o$, die zwei verschiedene uneigentliche Punkte $s, w \in L_\infty$ festläßt. Dann ist Ω kompakt, oder aber Produkt eines kompakten Normalteilers mit einer zu $\mathbb{R}$ isomorphen, abgeschlossenen Einparameteruntergruppe. Im zweiten Fall häuft sich jede Bahn von Ω in $L_\infty \setminus \{s, w\}$ sowohl bei s als auch bei w. Insbesondere ist Ω kompakt, falls Ω einen dritten Fixpunkt in L_∞ hat.*

Für eine abgeschlossene Untergruppe Δ von $\mathrm{S}\mathbb{G}_o$ liefert die Anwendung dieses Lemmas auf die Zusammenhangskomponente des Stabilisators $\Delta_{s,w}$ von s und w die Abschätzung

$$\dim \Delta_{s,w} \leqslant \dim K + 1 \ ,$$

wo K eine maximale kompakte zusammenhängende Untergruppe von $\Delta_{s,w}$ ist.

(i) *Dimensionsabschätzungen.* Nach den vorstehenden Informationen und mit der bekannten Dimensionsformel für die Dimensionen von Bahnen und Stabilisatoren bei Wirkungen von Liegruppen kann man eine Abschätzung der Dimension von Kollineationsgruppen vornehmen, die wir im weiteren immer wieder verwenden werden.

Mit der 16-dimensionalen Translationsgruppe und der 1-dimensionalen Streckungsgruppe ist

$$\dim \mathbb{G} = 17 + \dim \mathrm{S}\mathbb{G}_o .$$

Zum Beweis von Satz 1.1 ist also zu zeigen, daß in einer sechzehndimensionalen lokalkompakten Translationsebene abgesehen von der klassischen Oktavenebene stets $\dim \mathrm{S}\mathbb{G}_o \leqslant 23$ gilt.

Zur Abschätzung der Dimension von $\mathrm{S}\mathbb{G}_o$ und allgemeiner einer abgeschlossenen Untergruppe Δ von $\mathrm{S}\mathbb{G}_o$ betrachten wir nun Bahnen zweier verschiedener uneigentlicher Punkte $s, w \in L_\infty$. Nach der Dimensionsformel gilt

$$\dim \Delta = \dim \Delta(s) + \dim \Delta_s = \dim \Delta(s) + \dim \Delta_s(w) + \dim \Delta_{s,w} .$$

Mit der Abschätzung nach dem Lemma über Achsenstandgruppen (h) hat man dann

$$\dim \Delta \leqslant \dim \Delta(s) + \dim \Delta_s(w) + \dim K + 1 .$$

Beim Einsatz dieser Abschätzung wird man oft noch davon Gebrauch machen, daß nach dem Hauptsatz von [9: 1.2, S. 260] stets uneigentliche Punkte s mit $\dim \Delta(s) \leqslant 6$ existieren (es sei denn, man befindet sich in der klassischen Oktavenebene). In einzelnen Abschnitten dieser Arbeit wird denn auch häufig eine derartige Forderung an s gestellt.

2. Kollineationsgruppen, die G_2 enthalten

In diesem Paragraphen bezeichne G_2 die Automorphismengruppe der reellen Oktavenalgebra $\mathbb{O}$ (also eigentlich die kompakte Form $G_{2(-14)}$ in exakter Nomenklatur). Wir betrachten eine sechzehndimensionale lokalkompakte Translationsebene, in der $\mathbb{G}_o$ eine zu G_2 lokal isomorphe abgeschlossene, zusammenhängende Untergruppe Σ enthält; solche Ebenen seien kurz G_2-*Ebenen* genannt. Bezüglich der Wirkung von Σ gilt:

2.1. *Σ ist isomorph zu* G_2. *Die Menge*

$$F = \mathrm{Fix}(\Sigma, L_\infty)$$

der Fixpunkte von Σ in L_∞ ist homöomorph zur Kreislinie. Auf jeder zugehörigen invarianten Ursprungsgeraden S wirkt Σ effektiv und, bei geeigneter Identifikation von S mit $\mathbb{O}$, wie G_2 *als die Automorphismen-*

gruppe der Oktavenalgebra. Auf L_∞ *wirkt* Σ *wie* G_2 *auf der Einpunktkompaktifizierung von* $\mathbb{O} = \mathbb{R}^8$.

Daß Σ zunächst jedenfalls mindestens zwei Ursprungsgeraden W und S invariant läßt, ist die Aussage von [9: 2.10, S. 273]. Die angegebene Wirkung auf einer invarianten Ursprungsgeraden entspricht der einzigen nichttrivialen linearen Darstellung von G_2 auf $\mathbb{R}^8$. Insbesondere bilden die Fixpunkte von Σ auf W und auf S jeweils einen eindimensionalen Unterraum. Da also ein Viereck festbleibt, wirkt Σ nach 1.2 (g) effektiv auf der invarianten Ursprungsgeraden S, und auf L_∞ wie die Einpunktkompaktifizierung der Wirkung auf S, also insbesondere mit einer Kreislinie von Fixpunkten.

Ziel dieses Paragraphen ist der Beweis von

2.2. Satz. *In einer sechzehndimensionalen lokalkompakten Translationsebene, die nicht isomorph zur klassischen Oktavenebene ist, sei* Δ *eine zusammenhängende, abgeschlossene Untergruppe von* $\mathrm{S}\mathbb{G}_0$, *die eine zu* G_2 *lokal isomorphe, abgeschlossene zusammenhängende Untergruppe* Σ *enthält. Dann bestehen folgende Möglichkeiten:*

(1) Δ *enthält eine zu* $\mathrm{Spin}_7(\mathbb{R})$ *lokal isomorphe Untergruppe.*

(2) *Die maximalen kompakten Untergruppen von* Δ *sind isomorph zu* G_2 *oder* $\mathrm{G}_2 \times \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$; *ein halbeinfacher Kopf von* Δ *ist isomorph zu* G_2 *oder lokal isomorph zu* $\mathrm{G}_2 \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$.

Ist $\dim \Delta \geqslant 21$, *so enthält* Δ *eine analytische Untergruppe* N, *die als Liegruppe isomorph zur Vektorgruppe* $\mathbb{R}^7$ *ist und folgende Eigenschaften besitzt: Sie hat in* L_∞ *einen Fixpunkt* s *und wirkt frei auf* $L_\infty \setminus \{s\}$; *ferner wird* N *von* Σ *normalisiert, aber nicht zentralisiert. Der Punkt* s *bleibt dann unter ganz* Δ *fest, und es gilt*

$$\dim \Delta \leqslant 23 \ .$$

Bemerkungen. (1) Für die Ebenen, in denen Situation (1) vorliegt, gilt

$$\dim \mathbb{G} \leqslant 39, \text{ also sogar } \dim \Delta \leqslant 22,$$

siehe hierzu die Arbeit [12], in der diese Ebenen auch sämtlich explizit bestimmt werden.

(2) Im Spezialfall, daß Δ die volle Zusammenhangskomponente $(\mathrm{S}\mathbb{G}_0)^1$ ist, liefert der Satz damit für $\dim \mathbb{G} = 17 + \dim \mathrm{S}\mathbb{G}_0$ die Abschätzung

$$\dim \mathbb{G} \leqslant 17 + 23 = 40 .$$

Beim Beweis des Hauptsatzes 1.1 in § 5 wird sich zeigen, daß umgekehrt unter allen sechzehndimensionalen lokalkompakten Translationsebenen abgesehen von der klassischen Oktavenebene die Möglichkeit $\dim \mathbb{G} \geqslant 40$ nur in der in (2) geschilderten Situation mit $\Delta = (\mathrm{S}\mathbb{G}_0)^1$ und $\dim \mathrm{S}\mathbb{G}_0 = 23$, also $\dim \mathbb{G} = 40$ besteht (siehe § 5, Korollar).

Ganz allgemein kann man in der Situation (2) unter der Annahme $\dim \Delta \geqslant 21$ beweisen, daß die Vektorgruppe N aus Scherungen besteht; man greift dabei mittels Unterebenenargumenten auf die analoge Situation bei achtdimensionalen Ebenen (siehe [10]) zurück. Darauf aufbauend kann man dann auch hier die entsprechenden Ebenen sämtlich explizit bestimmen (hinsichtlich Vorgehen und Ergebnis wiederum analog zum Fall achtdimensionaler Ebenen, für die dies in [11] ausgeführt ist). Dies zu präzisieren, sei einer späteren Arbeit vorbehalten.

Nach Abschluß der in der Einleitung angesprochenen Gesamtklassifikation werden sich die dabei entstehenden Ebenen zusammen mit den Ebenen aus [12] (zu Situation (1 b)) als die einzigen sechzehndimensionalen lokalkompakten Translationsebenen mit mindestens 38-dimensionaler Kollineationsgruppe erweisen.

Insbesondere ergibt sich, daß die sechzehndimensionalen lokalkompakten Translationsebenen mit 40-dimensionaler Kollineationsgruppe genau die Ebenen über den achtdimensionalen (nicht-assoziativen und nicht-alternativen) Divisionsalgebren mit Automorphismengruppe G_2 sind, die in [7: 4.4, S. 215] bestimmt wurden.

Beweis von Satz 2.2. Im folgenden setzen wir voraus, daß in der Situation des Satzes Δ keine zu $\mathrm{Spin}_7(\mathbb{R})$ lokal isomorphe Untergruppe enthält (daß also nicht die Situation (1) vorliegt).

(a) *Maximale kompakte Untergruppen.* Sei C eine maximale kompakte Untergruppe von Δ, die Σ enthält. Nach allgemeinen Struktursätzen ist

$$C = E_1 \cdot \Theta,$$

wobei E_1 ein quasi-einfacher, kompakter zusammenhängender Faktor ist, der eine zu G_2 isomorphe Untergruppe Σ_1 (als Projektion von Σ) enthält; Θ ist die Zusammenhangskomponente des Zentralisators von E_1 (Produkt des Zentrums von C mit eventuellen weiteren einfachen Faktoren von C). Die Wirkung von Σ_1 ist wie in 2.1 beschrieben; insbesondere ist die Menge F_1 der Fixpunkte von Σ_1 in L_∞ zur Kreislinie homöomorph. Θ läßt F_1 invariant. Sei $s_1 \in F_1$; auf der zugehörigen Ursprungsgeraden S_1 wirkt Σ_1 nach 2.1 wie G_2 auf $\mathbb{O} = \mathbb{R}^8$. Da der Zentralisator von G_2 in $GL_8(\mathbb{R})$ keine nichttrivialen kompakten, zusammenhängenden Untergruppen enthält, wirkt die Zusammenhangskomponente des Stabilisators Θ_{s_1} trivial auf S_1; nach 1.2 (f) ist somit Θ_{s_1} endlich. Wegen $\Theta/\Theta_{s_1} \cong \Theta(s_1) \subseteq F_1$ ist also $\dim \Theta \leqslant 1$, und Θ ist trivial oder ein eindimensionaler Torus. Wegen $\Sigma \subseteq C = E_1 \cdot \Theta$ ist dann

$$\Sigma \subseteq E_1 \, .$$

Sei nun S eine Σ-invariante Ursprungsgerade, s der zugehörige uneigentliche Punkt. Die Zusammenhangskomponente $(C_s)^1$ seines Stabilisators wirkt nach 1.2 (f) fast effektiv auf S; sie induziert auf $S = \mathbb{R}^8$ eine kompakte Untergruppe von $GL_8(\mathbb{R})$, die $\Sigma | S = G_2$ enthält. Die großen kompakten Untergruppen von $GL_8(\mathbb{R})$ sind nun bekannt (siehe [9: 2.8, S. 270] für eine Aufstellung); da nach Annahme Δ keine zu $\mathrm{Spin}_7(\mathbb{R})$ lokal isomorphe Untergruppe enthält, ist demnach

$$(C_s)^1 = \Sigma \, . \tag{1}$$

Nach der Dimensionsformel ergibt sich damit die Abschätzung $\dim E_1 \leqslant \dim C \leqslant 8 + \dim \Sigma = 22$.

Eine quasi-einfache kompakte Liegruppe der Dimension $\leqslant 22$, die G_2 enthält, ist entweder G_2 selbst oder lokal isomorph zu $\mathrm{Spin}_7(\mathbb{R})$. Wiederum wegen unserer Annahme besteht für E_1 nur die erste Möglichkeit; also ist $E_1 = \Sigma$ und

$$C = \Sigma \cdot \Theta \, .$$

Dies ist die Aussage von 2.2 über die maximalen kompakten Untergruppen.

(b) Für eine erste Abschätzung der Dimension von Δ gemäß 1.2 (i) benötigen wir die Dimension einer maximalen kompakten Untergruppe K des Stabilisators $\Delta_{u,v}$ zweier uneigentlicher Punkte $u, v \in L_\infty$. K ist konjugiert zur Zusammenhangskomponente des Stabilisators $C_{u',v'}$ der maximalen kompakten Untergruppe C in zwei Punkten $u', v' \in L_\infty$. Sind u', v' Fixpunkte von Σ, so folgt mit (1), daß $(C_{u',v'})^1 = \Sigma$, also $\dim K = 14$. Andernfalls ist $\Sigma \cong \mathrm{G}_2$ nicht in $C_{u',v'}$ enthalten; als Untergruppe von $C = \Sigma \cdot \Theta$ ist dann $C_{u',v'}$ ebenfalls höchstens 14-dimensional (sogar höchstens 9-dimensional, aber das spielt hier keine Rolle). In allen Fällen ist somit $\dim K \leqslant 14$ und nach dem Lemma über Achsenstandgruppen 1.2(h) also

$$\dim \Delta_{u,v} \leqslant 14 + 1 = 15 . \tag{2}$$

Nach dem Hauptsatz von [9: S. 260] hat nun Δ eine Bahn der Dimension $\leqslant 6$ in L_∞, und wir können u aus einer solchen Bahn wählen. Ist u sogar ein Fixpunkt von Δ, so wählen wir $v \in L_\infty \setminus \{u\}$ beliebig; andernfalls wählen wir v aus derselben Bahn $\Delta(u)$. In beiden Fällen ist damit $\dim \Delta(u) + \dim \Delta_u(v) \leqslant 12$, und man erhält mit (2) gemäß 1.2(i) die Abschätzung $\dim \Delta \leqslant 12 + 15 = 27$.

c) *Halbeinfacher Kopf.* Sei H ein halbeinfacher Kopf von Δ, und sei

$$H = H_1 \cdot H_2 \cdot \ldots \cdot H_n$$

eine Zerlegung von H als fastdirektes Produkt quasi-einfacher (zusammenhängender) Faktoren H_i. Da der halbeinfache Anteil $\Sigma \cong \mathrm{G}_2$ der maximalen kompakten Untergruppe C einfach ist, kann man bis auf Konjugation o. B. d. A. $H_1 \supseteq \Sigma$ annehmen.

Nach der eben gefundenen Dimensionsabschätzung ist H_1 eine quasi-einfache Gruppe der Dimension $\leqslant 27$; ihre maximalen kompakten Untergruppen sind isomorph zu G_2 oder $\mathrm{G}_2 \times \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$. Die Klassifikation der einfachen Liegruppen zeigt, daß nur eine Möglichkeit besteht:

$$H_1 = \Sigma .$$

Der Zentralisator

$$Z = H_2 \cdot \ldots \cdot H_n$$

von $H_1 = \Sigma$ in H läßt die Kreislinie F der Fixpunkte von Σ in L_∞ invariant. Die Betrachtung der Bahnen zweier Punkte $s, w \in F$ ergibt also die Dimensionsabschätzung $\dim Z \leqslant 1 + 1 + \dim Z_{s,w}$. Nun hat $Z_{s,w}$ diskreten Schnitt mit $\Sigma = H_1$, und da Σ nach (2) Kodimension $\leqslant 1$ in $\Delta_{s,w}$ hat, ist $\dim Z_{s,w} \leqslant 1$, also insgesamt $\dim Z \leqslant 3$. Angesichts der maximalen kompakten Untergruppen ist Z lokal isomorph zu $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ oder trivial. Damit ist $H = H_1 \cdot Z = \Sigma \cdot Z$ isomorph zu G_2 oder lokal isomorph zu $\mathrm{G}_2 \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$.

(d) *Levi-Zerlegung.* Δ ist fast-semidirektes Produkt

$$\Delta = H \cdot A$$

des Radikals A (des größten auflösbaren zusammenhängenden Normalteilers) mit dem halbeinfachen Kopf H.

Der auflösbare Normalteiler $A_{s,w}$ von $\Delta_{s,w}$ hat diskreten Schnitt mit der einfachen Gruppe $\Sigma \subseteq \Delta_{s,w}$; und da diese nach (2) Kodimension $\leqslant 1$ in $\Delta_{s,w}$ hat, ist

$$\dim A_{s,w} \leqslant 1\ . \tag{3}$$

Wir ziehen nun die Dimensionsformeln

$$\dim A = \dim A(s) + \dim A_s \tag{4}$$

$$\dim A_s = \dim A_s(w) + \dim A_{s,w} \tag{5}$$

heran.

Wird A von Σ zentralisiert, so läßt A die Kreislinie F der Fixpunkte von Σ in L_∞ invariant; aus (3)—(5) erhält man dann $\dim A \leqslant 3$, insgesamt also $\dim \Delta \leqslant \dim H + 3 \leqslant 14 + 3 + 3 = 20$.

Im folgenden nehmen wir

$$\dim \Delta \geqslant 21$$

an; dann liegt A nicht im Zentralisator von Σ. Der Stabilisator A_s wird von Σ normalisiert; falls er sogar zentralisiert wird, läßt er F invariant, und nach (5) mit (3) ergibt sich $\dim A_s \leqslant 2$, nach (4) also $\dim A \leqslant 8 + 2 = 10$. Wird A_s hingegen nicht von Σ zentralisiert, so liefert (5) mit (3) jedenfalls $\dim A_s \leqslant 9$. In jedem Fall existiert also eine abgeschlossene Untergruppe B von A mit $\dim B \leqslant 10$, die von Σ normalisiert, aber nicht zentralisiert wird.

Durch Einschränkung der adjungierten Darstellung erhält man eine nichttriviale Darstellung von $\Sigma \cong \mathrm{G}_2$ als Automorphismengruppe der Liealgebra $\mathscr{B}$ von B. Die einzige nichttriviale irreduzible Darstellung von G_2 einer Dimension $\leqslant 10$ ist nun die Wirkung als Automorphismengruppe der Oktavenalgebra $\mathbb{O}$ auf dem Raum $\mathrm{Pu}\,\mathbb{O} \cong \mathbb{R}^7$ der reinen Oktaven. $\mathscr{B}$ läßt sich also zerlegen in zwei Untervektorräume

$$\mathscr{B} = \mathscr{N} \oplus \mathscr{D},$$

wobei Σ auf $\mathcal{N} \cong \mathbb{R}^7$ wie G_2 auf $\mathrm{Pu}\,\mathbb{O}$, und auf $\mathcal{D}$ trivial wirkt. Im folgenden legen wir eine entsprechende Identifikation

$$\mathcal{N} = \mathrm{Pu}\,\mathbb{O}$$

zugrunde. Wir zeigen:

(e) *$\mathcal{N}$ ist eine kommutative Unteralgebra.*

Stellt man die Oktaven als Paare von Elementen des Quaternionenkörpers $\mathbb{H}$ mit der Multiplikation

$$(a,b)\cdot(x,y) = (a\,x - y\,\bar{b},\ x\,b + \bar{a}\,y)$$

(für $a,b,x,y \in \mathbb{H}$) dar, so ist

$$\sigma\colon\ \mathbb{O} \to \mathbb{O}\colon\ (x,y) \mapsto (i\,x\,i^{-1}, i\,y)$$

ein Automorphismus der Oktavenalgebra, also ein Element von G_2, mit

$$\sigma(i) = i,\ \sigma(j) = -j,\ \sigma(k) = -k$$

(wobei wir zur Abkürzung wie üblich wieder i,j,k statt $(i,0)$, $(j,0)$, $(k,0)$ schreiben). Aufgefaßt als Element der Kollineationsgruppe Σ liefert σ einen Automorphismus der Liealgebra $\mathcal{B} = \mathcal{N} \oplus \mathcal{D}$, dessen Eigenraum zum Eigenwert -1 genau der Aufspann $\langle j,k\rangle \subseteq \mathrm{Pu}\,\mathbb{O} = \mathcal{N}$ ist. Für die Lieklammer der Elemente $i,j \in \mathrm{Pu}\,\mathbb{O} = \mathcal{N} \subseteq \mathcal{B}$ gilt nun $\sigma[i,j] = [i,-j] = -[i,j]$, also

$$[i,j] \in \langle j,k\rangle \subseteq \mathcal{N}\,.$$

Ganz entsprechend ergibt sich, unter Vertauschung der Rollen von i und j,

$$[i,j] \in \langle i,k\rangle\,,$$

insgesamt also

$$[i,j] = \varrho\cdot k$$

mit einem Skalar $\varrho \in \mathbb{R}$. Wegen der Transitivität von G_2 auf den Paaren orthogonaler reiner Oktaven von Einheitslänge folgt

$$[x,y] = \varrho\cdot x\,y \quad \text{für } x,y \in \mathrm{Pu}\,\mathbb{O} = \mathcal{N} \text{ mit } x \perp y,\ |x| = 1 = |y|.$$

Wendet man nun die Jacobi-Identität auf die Elemente von $\mathcal{N}$ an, die den reinen Oktaven i,j und $l = (0,1)$ entsprechen, so ergibt sich $\varrho = 0$. Damit ist (e) bewiesen.

(f) Sei nun N die zu $\mathcal{N}$ gehörige analytische Untergruppe von Δ. Mit wörtlich denselben Schlüssen wie in [14: 4.5, 4.6, S. 332] (wo eine analoge Situation für $SU_4(\mathbb{C})$ statt G_2 untersucht wurde) ergibt sich, daß N als Liegruppe eine Vektorgruppe, also isomorph zu $\mathbb{R}^7$ ist, daß N und Σ in L_∞ einen gemeinsamen Fixpunkt s haben und daß N frei auf dem Komplement $L_\infty \setminus \{s\}$ operiert. Damit hat N die behaupteten Eigenschaften.

Für die Abschätzung der Dimension von Δ ist dabei entscheidend, daß abgesehen von s alle N-Bahnen in L_∞ 7-dimensional sind. Da andererseits Δ nach dem Hauptsatz von [9; S. 260] in L_∞ eine Bahn der Dimension $\leqslant 6$ hat, muß s ein Fixpunkt von ganz Δ sein. Dimensionsabschätzung gemäß 1.2 (i) liefert nach (2) dann $\dim \Delta \leqslant 23$.

3. Kollineationsgruppen, die $SU_2(\mathbb{H})$ enthalten

Ziel dieses Paragraphen ist die Abschätzung der Dimension von Kollineationsgruppen in Ebenen der folgenden Art:

3.1. Generalvoraussetzung. *Im folgenden sei eine sechzehndimensionale lokalkompakte Translationsebene zugrunde gelegt, die nicht isomorph zur klassischen Oktavenebene ist, und in der* $S\mathbb{G}_o$ *eine zu* $SU_2(\mathbb{H})$ *lokal isomorphe zusammenhängende, abgeschlossene Untergruppe* Σ *enthält, welche zwei verschiedene Punkte* $s, w \in L_\infty$ *festläßt.*

Sei Δ *eine zusammenhängende, abgeschlossene Untergruppe von* $S\mathbb{G}_o$ *mit* $\Sigma \leqslant \Delta$, *für die die Bahn* $\Delta(s)$ *höchstens* 6-*dimensional ist und* w *enthält, falls nicht* s *sogar ein Fixpunkt von* Δ *ist.* Δ *enthalte jedoch keine zu* $SU_4(\mathbb{C})$ *lokal isomorphe Untergruppe.*

3.2. Satz. *In dieser Situation ist* $\dim \Delta \leqslant 22$.

Bemerkungen. (1) Diese Abschätzung kann verschärft werden zu $\dim \Delta \leqslant 20$, wenn man die Argumentation noch etwas weiter treibt. Sind die Voraussetzungen an Δ für die volle Zusammenhangskomponente von $S\mathbb{G}_o$ erfüllt, so erhält man daraus $\dim \mathbb{G} = 17 + \dim S\mathbb{G}_o \leqslant 37$. Da für den Hauptsatz 1.1 nicht von Belang, soll dies an anderer Stelle ausgeführt werden.

(2) Die Zusatzvoraussetzung über die Bahn von s bzw. w unter Δ ist eine technische Erleichterung, auf die verzichtet werden kann, indem man zusätzlichen Aufwand investiert oder aber die Klassifikation der Ebenen mit $\dim \mathbb{G} \geqslant 38$ abwartet (in die die in (1) erwähnte Verschärfung der Abschätzung 3.2 mit dieser Zusatzvoraussetzung eingeht).

(3) Der Fall, daß Δ eine zu $SU_4(\mathbb{C})$ lokal isomorphe Untergruppe enthält, wird hier nur zur Vereinheitlichung der Argumentation ausgeschlossen. Nach [14] gilt in diesem Fall ganz allgemein $\dim \mathbb{G} \leqslant 37$, also ebenfalls $\dim \Delta \leqslant 20$.

Unter die in der Generalvoraussetzung gegebene Beschreibung fallen mehrere verschiedene Ebenentypen, die zum Beweis von 3.2 der Reihe nach behandelt werden sollen. Zunächst untersuchen wir die

3.3. *Möglichkeiten für die Wirkung von Σ. Seien W und S die zu den uneigentlichen Fixpunkten w und s von Σ gehörigen Ursprungsgeraden. Es gilt:*

(a) *Hat Σ außer dem Ursprung o keine weiteren affinen Fixpunkte, so lassen sich W und S als $\mathbb{R}$-Vektorräume so mit $\mathbb{H}^2$ identifizieren, daß Σ auf W und auf S effektiv als die Gruppe* $SU_2(\mathbb{H})$ *operiert.*

(b) *Hat Σ weitere affine Fixpunkte, so wirkt Σ auf einer der beiden Ursprungsgeraden W und S wie eben als* $SU_2(\mathbb{H})$; *die andere läßt sich so mit $\mathbb{R}^8 = \mathbb{R}^5 \times \mathbb{R}^3$ identifizieren, daß Σ auf ihr die Gruppe* $SO_5(\mathbb{R}) \times \{\mathrm{id}\}$ *induziert.*

Beweis: Dies folgt weitgehend aus der Tatsache, daß die einzigen irreduziblen Darstellungen von $SU_2(\mathbb{H})$ der Dimension $\leqslant 8$ gerade die gewöhnliche Wirkung auf $\mathbb{H}^2$ und die Wirkung als $SO_5(\mathbb{R})$ auf $\mathbb{R}^5$ sind; nach 1.2(e) kann Σ ja nicht trivial auf W oder S operieren. Es muß lediglich noch begründet werden, warum der Fall, daß Σ sowohl auf W als auch auf S die Gruppe $SO_5(\mathbb{R})$ induziert, nicht vorkommen kann. Σ hätte dann auf beiden Ursprungsgeraden Fixpunkte, ließe also ein Viereck fest und würde nach 1.2(g) einer Gruppe von Automorphismen eines koordinatisierenden lokalkompakten, zusammenhängenden Quasikörpers entsprechen. Nach [7: Hauptsatz 1.2, S. 204] hat aber die Automorphismengruppe eines solchen Quasikörpers keine zu $SU_2(\mathbb{H})$ lokal isomorphe Untergruppe.

3.4. *Eine kompakte, zusammenhängende Untergruppe C von Δ_S, die Σ enthält, ist gleich Σ oder fastdirektes Produkt von Σ mit einer zu* $SO_2(\mathbb{R})$ *oder* $\mathrm{Spin}_3(\mathbb{R})$ *lokal isomorphen zusammenhängenden, abgeschlossenen Untergruppe.*

Beweis: Nach 1.2(f) wirkt C fast effektiv auf S und induziert dort eine kompakte, zusammenhängende Untergruppe von $GL_8(\mathbb{R})$, die entsprechend 3.3 $\mathrm{SO}_5(\mathbb{R})$ oder $\mathrm{SU}_2(\mathbb{H})$ enthält. Nach der Generalvoraussetzung enthält andererseits $C \mid S$ keine zu $\mathrm{SU}_4(\mathbb{C})$ und also zu $\mathrm{SO}_6(\mathbb{R})$ lokal isomorphe Untergruppe. Die Behauptung ergibt sich nun aufgrund der expliziten Kenntnis der großen kompakten Untergruppen von $\mathrm{GL}_8(\mathbb{R})$, siehe z. B. die Liste in [9: 2.8, S. 270].

Als unmittelbare Folgerung aus 3.4 erhält man mit dem Lemma über Achsenstandgruppen 1.2 (h):

3.5. $\dim \Delta_{s,w} \leqslant 14$.

Damit kann nun einer der beiden Fälle von 3.3 abschließend behandelt werden:

3.6. Satz. *Hat Σ neben o weitere affine Fixpunkte, so trifft eine der folgenden Aussagen zu:*

(1) *s und w bleiben unter der ganzen Zusammenhangskomponente von $\mathbb{G}$ fest; dann ist* $\dim \Delta \leqslant 14$.

(2) *Die betrachtete Ebene ist vom Lenz-Typ* V; *es gilt dann* $\dim \Delta \leqslant 22$.

Beweis: Nach 3.3 (b) wirkt Σ auf einer der beiden Ursprungsgeraden W bzw. S wie $\mathrm{SU}_2(\mathbb{H})$ auf $\mathbb{H}^2$, und ebenso auf einer ihrer Parallelen durch einen weiteren affinen Fixpunkt. Wie man durch Projektion von o aus auf die uneigentliche Gerade sieht, wirkt Σ somit auf $L_\infty \setminus \{w, s\}$ wie $\mathrm{SU}_2(\mathbb{H})$ auf $\mathbb{H}^2 \setminus \{0\}$, also insbesondere mit lauter zur 7-Sphäre homöomorphen Bahnen. Die behauptete Alternative ist damit (abgesehen von den Dimensionsabschätzungen) genau die Aussage des sog. Sphärensatzes aus [8: 1.2, S. 62].

In Situation (1) folgt die Dimensionsabschätzung unmittelbar aus 3.5. In einer Ebene vom Lenz-Typ V hingegen hat man definitionsgemäß eine Gruppe von Scherungen, die transitiv auf dem Komplement des Scherungszentrums in L_∞ operiert; das Scherungszentrum selbst bleibt fest unter allen Kollineationen ([15: VIII Lemma 8.3, S. 172]). In Situation (2) ist also das Scherungszentrum einer der beiden einzigen Fixpunkte s oder w von Σ in L_∞. Es gilt daher $\dim \Delta(s) + \dim \Delta(w) \leqslant 8$, und die behauptete Dimensionsabschätzung folgt mit 3.5 nach 1.2 (i).

Bemerkung. Nach 3.4 und dem Lemma über Achsenstandgruppen 1.2 (h) ist genauer $\dim \Delta_{s,w} \leqslant 12$, oder eine maximale kompakte, zusammenhängende Untergruppe von $\Delta_{s,w}$ ist lokal isomorph zu $\mathrm{SU}_2(\mathbb{H}) \times \mathrm{Spin}_3(\mathbb{R})$. Damit läßt sich in Situation (2) von 3.6 die angegebene Abschätzung zu $\dim \Delta \leqslant 20$ verschärfen, indem man zeigt, daß eine Ebene, die mindestens Lenz-Typ V hat und in der $\mathbb{G}_o$ eine zu $\mathrm{SU}_2(\mathbb{H}) \times \mathrm{Spin}_3(\mathbb{R})$ lokal isomorphe Untergruppe enthält, notwendig isomorph zur klasssischen Oktavenebene ist. Dies soll an anderer Stelle geschehen.

3.7. Annahmen für das Weitere. Im folgenden wenden wir uns nun der Situation zu, daß

$$\Sigma \text{ außer } o \text{ keine affinen Fixpunkte}$$

mehr hat. Nach 3.3 gilt dann

$$\Sigma \cong \mathrm{SU}_2(\mathbb{H}); \quad \Sigma | W \cong \mathrm{SU}_2(\mathbb{H}); \quad \Sigma | S \cong \mathrm{SU}_2(\mathbb{H}) .$$

Zur Behandlung dieser Situation gehen wir ähnlich vor wie in § 2, wobei allerdings meist nicht ganz Δ, sondern nur der Stabilisator Δ_s bzw. seine Zusammenhangskomponente betrachtet wird.

3.8 (Voraussetzungen von 3.7). *Ein halbeinfacher Kopf H von $(\Delta_s)^1$, der Σ enthält, ist gleich Σ oder direktes Produkt von Σ mit einer zu* $\mathrm{Spin}_3(\mathbb{R})$ *isomorphen Untergruppe.*

Beweis: Durch Projektion ergibt sich, daß mindestens einer der quasi-einfachen Faktoren von H eine zu Σ isomorphe Untergruppe enthält; und angesichts der Tatsache, daß nach 3.4 die maximalen kompakten Untergruppen von $(\Delta_s)^1$ keine zu $\mathrm{SU}_2(\mathbb{H}) \times \mathrm{SU}_2(\mathbb{H})$ lokal isomorphen Untergruppen besitzen, existiert genau ein solcher quasi-einfacher Faktor H_1 von H; er enthält dann Σ.

Aufgrund der Dimensionsformel und nach dem Lemma über Achsenstandgruppen 1.2 (h) ist nun wegen $(H_1)_w \subseteq \Delta_{s,w}$

$$\dim H_1 = \dim H_1(w) + \dim (H_1)_w \leqslant 8 + \dim K_1 + 1, \tag{6}$$

wo K_1 eine maximale kompakte Untergruppe von $(H_1)_w$ ist. Nach 3.4 ist $\dim K_1 \leqslant 13$, also $\dim H_1 \leqslant 22$.

Genauer besagt 3.4 noch, daß Σ ein normaler Faktor einer maximalen kompakten Untergruppe von H_1 ist. Die quasi-einfachen Liegruppen der Dimension $\leqslant 22$, deren maximale kompakte Untergruppen einen zu $\mathrm{SU}_2(\mathbb{H})$ isomorphen Faktor haben, sind nun lokal isomorph zu $\mathrm{SU}_2(\mathbb{H})$, $\mathrm{SL}_2(\mathbb{H})$, $\mathrm{SO}_5(\mathbb{C})$, $\mathrm{SO}_7(\mathbb{R}, 2)$, $\mathrm{SU}_3(\mathbb{H}, 1)$. In unserem Fall kann H_1 nicht lokal isomorph zu $\mathrm{SO}_5(\mathbb{C})$ oder $\mathrm{SO}_7(\mathbb{R}, 2)$ sein, da in diesen Gruppen die maximalen kompakten Untergruppen nicht wie in (6) verlangt Kodimension $\leqslant 9$ haben. Eine zu $\mathrm{SU}_3(\mathbb{H}, 1)$ lokal isomorphe Gruppe kommt nach [8: 3.2, S. 73] nicht als Kollineationsgruppe vor.

Wäre H_1 lokal isomorph zu $\mathrm{SL}_2(\mathbb{H})$, so ließe H_1 einen zu S komplementären Teilraum $V = \mathbb{R}^8$ des affinen Punktraums $\mathbb{A} = \mathbb{R}^{16}$ invariant und würde auf V trivial oder wie $\mathrm{SL}_2(\mathbb{H})$ auf $\mathbb{H}^2$ oder wie $\mathrm{SO}_6(\mathbb{R}, 1)$ auf $\mathbb{R}^6 \times \mathbb{R}^2$ wirken (da dies die einzigen Darstellungen von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{H})$ der Dimension 8 sind; man beachte, daß $\mathrm{SO}_6(\mathbb{R}, 1)$ von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{H})$ zweifach überlagert wird). In jedem Fall enthielte der Stabilisator eines geeigneten Punkts aus $V \setminus \{o\}$ eine zu $\mathbb{R}^4$ isomorphe, abgeschlossene Untergruppe (die der Untergruppe $\left\{\begin{pmatrix} 1 & \\ b & 1 \end{pmatrix};\ b \in \mathbb{H}\right\}$ von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{H})$ entspricht); da in L_∞ der uneigentliche Punkt der zugehörigen Ursprungsgerade sowie s dann ebenfalls festbleiben, steht dies im Widerspruch zur Struktur von Achsenstandgruppen (1.2 (h)).

Es bleibt nur die Möglichkeit, daß H_1 isomorph zu $\mathrm{SU}_2(\mathbb{H})$, also $H_1 = \Sigma$ ist. Damit ist $H = \Sigma \cdot Z$, wo Z die Zusammenhangskomponente des Zentralisators von Σ in H ist. Auf der Fixgeraden S kann nun kein quasi-einfacher zusammenhängender Faktor Z_i von Z trivial operieren, also ganz aus axialen Kollineationen mit Achse S bestehen: Nach 1.2 (f) wäre nämlich sonst Z_i kompaktfrei, also isomorph zur universellen Überlagerung von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$; aber diese kommt bekanntlich nicht als Untergruppe einer linearen Gruppe vor.

Somit wirkt Z fast effektiv auf S (d. h. mit diskretem Kern) und ist lokal isomorph zu $Z \mid S$. Da $Z \mid S$ im Zentralisator von $\Sigma \mid S = \mathrm{SU}_2(\mathbb{H})$ liegt, ist $Z \mid S$ isomorph zu einer halbeinfachen Untergruppe der multiplikativen Gruppe $\mathbb{H}^\times$, also $Z \mid S \cong \mathrm{Spin}_3(\mathbb{R})$ (falls nicht $Z \mid S = \{\mathrm{id}\}$, also $Z = \{\mathrm{id}\}$ ist).

3.9. *Ist* (*unter den Voraussetzungen von* 3.1 *und* 3.7) Σ *normal in* $(\Delta_s)^1$, *so ist* $\dim \Delta \leqslant 20$.

Beweis: Wir gehen aus von der Dimensionsformel

$$\dim \Delta_s = \dim (\Delta_s)^1 = \dim (\Delta_s)^1(w) + \dim (\Delta_s)^1_w. \tag{7}$$

Darin versuchen wir die Bahn $(\Delta_s)^1(w)$ abzuschätzen, indem wir beachten, daß sie ganz aus Fixpunkten von Σ besteht (voraussetzungsgemäß ist ja w ein Fixpunkt von Σ und Σ ein Normalteiler von $(\Delta_s)^1$).

Die zusammenhängenden, abgeschlossenen Untergruppen der Kodimension $\leqslant 5$ in der zu $SO_5(\mathbb{R})$ lokal isomorphen Gruppe Σ sind nun alle lokal isomorph zu $SO_4(\mathbb{R})$, also 6-dimensional. Außer Fixpunkten hat daher Σ in L_∞ keine Bahnen der Dimension 1, 2, 3 oder 5; insbesondere gilt für die höchste vorkommende Dimension m einer Bahn $m \geqslant 4$. Nach einer Formel von Montgomery [16: Theorem 2.2, S. 118] hat somit die Menge der Fixpunkte von Σ in L_∞ Dimension $\leqslant \dim L_\infty - m - 1 \leqslant 8 - 4 - 1 = 3$. Insbesondere ist also $\dim (\Delta_s)^1(w) \leqslant 3$.

Besteht $\Delta(s)$ ganz aus Fixpunkten von Σ, so ist auch $\dim \Delta(s) \leqslant 3$, und die Behauptung folgt gemäß 1.2(i) nach (7) mit 3.5.

Im folgenden nehmen wir an, daß Σ nichttriviale Bahnen in $\Delta(s)$ hat. In dieser Situation werden die bisherigen Abschätzungen durch Einschränkung der Untersuchung auf $\Delta(s)$ verfeinert werden. Wir betrachten dabei $\Delta(s)$ als homogenen Raum Δ/Δ_s mit der Faktortopologie; $\Delta(s)$ ist dann eine Mannigfaltigkeit der Dimension $\dim \Delta(s)$. Eine Bahn von Σ in $\Delta(s)$ kann nun nicht die volle Dimension $\dim \Delta(s)$ haben: sie wäre sonst offen und gleichzeitig kompakt, aus Zusammenhangsgründen also gleich $\Delta(s)$, im Widerspruch dazu, daß s ein Fixpunkt von Σ ist. Da nach der Generalvoraussetzung $\dim \Delta(s) \leqslant 6$ ist, ergibt sich damit und mit den oben gewonnenen Aussagen über die Bahnen von Σ, daß

$$5 \leqslant \dim \Delta(s) \leqslant 6,$$

und daß Σ in $\Delta(s)$ außer Fixpunkten lauter 4-dimensionale Bahnen hat. Die Menge

$$F = \mathrm{Fix}(\Sigma, \Delta(s))$$

der Fixpunkte von Σ in $\Delta(s)$ ist wieder invariant unter $(\Delta_s)^1$; nach der Generalvoraussetzung 3.1 ist $w \in F$ und daher

$$\dim (\Delta_s)^1(w) \leqslant \dim F \,. \tag{8}$$

Da wir jetzt die Fixpunkte von Σ nicht mehr in ganz L_∞, sondern nur noch innerhalb der kleineren Mannigfaltigkeit $\Delta(s)$ betrachten, liefert die Formel von Montgomery (loc. cit.) die schärfere Abschätzung

$$\dim F \leqslant \dim \Delta(s) - 4 - 1 \,. \tag{9}$$

Ist $\dim \Delta(s) = 5$, so folgt $\dim F = 0$; die Behauptung ergibt sich dann mit (8) und 3.5 durch Einsetzen in (7) nach 1.2 (i).

Sei nun $\dim \Delta(s) = 6$. Ist $\Delta(s)$ nicht homöomorph zur 6-Sphäre $\mathbb{S}_6$, so ist nach einer Verschärfung des Lemmas über Achsenstandgruppen (siehe [8: 2.2, S. 70]) der Stabilisator $\Delta_{s,w}$ kompakt; nach 3.4 ist in diesem Fall also $\dim \Delta_{s,w} \leqslant 13$. Nach (9) und (8) ist $\dim(\Delta_s)^1(w) \leqslant 1$, und die Behauptung folgt durch Einsetzen in (7) nach 1.2 (i).

Der Fall, daß $\Delta(s)$ homöomorph zu $\mathbb{S}_6$ ist, ist nun ausgeschlossen: Dann wäre nämlich eine maximale kompakte Untergruppe M von Δ mit $M \supseteq \Sigma$ ebenfalls transitiv auf $\Delta(s) \cong \mathbb{S}_6$ ([18: 5.6, S. 226]). Nach [2: Theorem III] müßte die von M auf $\Delta(s)$ induzierte Transformationsgruppe (lokal) isomorph zu G_2 oder $SO_7(\mathbb{R})$ sein. Andererseits ist $\Sigma | \Delta(s)$ lokal isomorph zu $SO_5(\mathbb{R})$, und G_2 enthält keine zu $SO_5(\mathbb{R})$ lokal isomorphen Untergruppen. Im Fall, daß $M | \Delta(s)$ lokal isomorph zu $SO_7(\mathbb{R})$ ist, würde Δ eine zu $SO_6(\mathbb{R})$ und damit zu $SU_4(\mathbb{C})$ lokal isomorphe Untergruppe enthalten; aber dieser Fall sollte nach der Generalvoraussetzung 3.1 unberücksichtigt bleiben.

3.10. Satz. *Ist (unter den Voraussetzungen von* 3.1 *und* 3.7) Σ *nicht normal in* $(\Delta_s)^1$, *so enthält* Δ *einen zur Vektorgruppe* $\mathbb{R}^5$ *isomorphen Normalteiler N, der aus Scherungen mit Achse S besteht, und auf dem* Σ *durch Konjugation als die Gruppe* $SO_5(\mathbb{R})$ *wirkt.*

(*Hinweis:* Für diesen Satz werden die speziellen Voraussetzungen über die Bahnen von s und w in der Generalvoraussetzung 3.1 nicht benötigt.)

Beweis: $(\Delta_s)^1$ ist fast-semidirektes Produkt

$$(\Delta_s)^1 = H \cdot A$$

des Radikals A mit dem halbeinfachen Kopf $H \supseteq \Sigma$ (Levi-Zerlegung). Nach 3.8 ist Σ ein Normalteiler von H; voraussetzungsgemäß zentralisiert also Σ das Radikal A nicht.

Der Stabilisator A_w wird von Σ normalisiert; sei Θ eine maximale kompakte Untergruppe von A_w. Ist $\dim \Theta \geqslant 1$, so kann eine maximale kompakte Untergruppe von $(\Delta_s)^1$, die Σ und Θ enthält, nicht halbeinfach sein; nach 3.4 hat also Σ in ihr Kodimension 1, und da

$\Sigma \cap A$ diskret ist, folgt $\dim \Theta \leqslant 1$. Nach dem Lemma über Achsenstandgruppen 1.2(h) ist somit $\dim A_w \leqslant 2$.

Wir betrachten nun die Darstellung von Σ auf der Liealgebra $\mathscr{L}A$ von A, die sich durch Einschränkung der adjungierten Darstellung ergibt; sei $\mathscr{Z}$ die Unteralgebra der Fixelemente unter Σ. Da Σ keine nichttrivialen Darstellungen in Dimension $\leqslant 2$ hat, ist die zu A_w gehörige Unteralgebra $\mathscr{L}A_w$ in $\mathscr{Z}$ enthalten. Nach der Dimensionsformel $\dim A = \dim A(w) + \dim A_w \leqslant 8 + \dim A_w$ ist

$$\mathscr{L}A = \mathscr{N} \oplus \mathscr{Z}$$

mit einem zu $\mathscr{Z}$ komplementären, unter Σ invarianten Untervektorraum $\mathscr{N}$ der Dimension $\leqslant 8$.

Entsprechend unseren Annahmen in 3.7 ist nun die zentrale Involution von $\Sigma \cong \mathrm{SU}_2(\mathbb{H})$ die Spiegelung am Ursprung und kommutiert also mit allen Kollineationen aus $\mathbb{G}_o$. Infolgedessen ist Σ auf $\mathscr{N}$ als die Faktorgruppe $\mathrm{SO}_5(\mathbb{R})$ von $\mathrm{SU}_2(\mathbb{H})$ dargestellt. Die einzige irreduzible Darstellung von $\mathrm{SO}_5(\mathbb{R})$ der Dimension $\leqslant 8$ ist die gewöhnliche Darstellung auf $\mathbb{R}^5$; da $\mathscr{N}$ komplementär zur Fixunteralgebra $\mathscr{Z}$ ist, ist somit

$$\mathscr{N} \cong \mathbb{R}^5,$$

und Σ wirkt auf $\mathscr{N}$ als $\mathrm{SO}_5(\mathbb{R})$ in der gewöhnlichen Weise.

Von dieser Stelle an kann man völlig analog vorgehen wie in [10: S. 91ff.], wo für achtdimensionale Ebenen der analoge Sachverhalt (mit $\Sigma \cong \mathrm{Spin}_3(\mathbb{R}) \cong \mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$ statt $\mathrm{SU}_2(\mathbb{H})$ und $\mathbb{R}^3$ statt $\mathbb{R}^5$) abgehandelt wird. Man zeigt zunächst anhand der Wirkung von Σ ([10: S. 91]), daß $\mathscr{N}$ ein kommutatives Ideal von $\mathscr{L}A$ und folglich die zu $\mathscr{N}$ gehörige analytische Untergruppe N (wegen der Transitivität von Σ auf der Menge der Einparameteruntergruppen) eine Vektorgruppe ist. Nun muß N trivial auf der invarianten Ursprungsgeraden $S \cong \mathbb{R}^8$ operieren, da $\mathrm{GL}_8(\mathbb{R})$ kein semidirektes Produkt $\mathrm{SU}_2(\mathbb{H}) \cdot \mathbb{R}^5$ enthält (dies wird im nachstehenden Hilfssatz noch ausgeführt); die Elemente von N sind also Streckungen oder Scherungen mit Achse S (und Zentrum in L_∞). Wegen der Kommutativität haben alle Elemente von N dasselbe Zentrum; da aber gemäß 1.2(e) eine Gruppe affiner Streckungen mit fester Achse und festem Zentrum höchstens eindimensional ist, besteht N aus Scherungen.

Noch nachzutragen ist hierzu:

3.11. $GL_8(\mathbb{R})$ *enthält keine zu* $\mathbb{R}^5$ *isomorphe Untergruppe, die von* $SU_2(\mathbb{H})$ *normalisiert wird.*

Beweis: Wir konkretisieren $SU_2(\mathbb{H})$ als die Gruppe der unitären $\mathbb{H}$-linearen Transformationen des $\mathbb{H}$-*Rechts*-Vektorraums $\mathbb{H}^2$; als Untergruppe von $GL_8(\mathbb{R})$ deutet man $SU_2(\mathbb{H})$ durch eine Identifikation $\mathbb{H}^2 = \mathbb{R}^8$.

Angenommen nun, $GL_8(\mathbb{R})$ enthielte eine Vektoruntergruppe $N \cong \mathbb{R}^5$, die von $SU_2(\mathbb{H})$ normalisiert wird. Der Zentralisator von $SU_2(\mathbb{H})$ in $GL_8(\mathbb{R})$ ist isomorph zu $\mathbb{H}^*$; insbesondere kann $SU_2(\mathbb{H})$ nicht N zentralisieren und operiert daher durch Konjugation als $SO_5(\mathbb{R})$ auf $N \cong \mathbb{R}^5$. Die Untergruppe

$$\mathrm{Spin}_4(\mathbb{R}) = \left\{\begin{pmatrix} a & \\ & b \end{pmatrix};\ a, b \in \mathbb{H},\ a\bar{a} = 1 = b\bar{b}\right\}$$

von $SU_2(\mathbb{H})$ wirkt dann auf $N \cong \mathbb{R}^5$ als $SO_4(\mathbb{R})$ und zentralisiert eine Einparameteruntergruppe N_1 von N. Die Elemente von N_1 kommutieren insbesondere mit den Matrizen $\begin{pmatrix} a & \\ & a \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{H}$, $a\bar{a} = 1$ und bestehen daher aus $\mathbb{H}$-linearen Transformationen des $\mathbb{H}$-*Links*-Vektorraumes $\mathbb{H}^2$. Zudem lassen sie die Fixunterräume der Matrizen $\begin{pmatrix} 1 & \\ & a \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} a & a \\ & 1 \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{H}$, $a\bar{a} = 1$ invariant. Insgesamt ist ein Element von N_1 also von der Form

$$\eta_1\colon\ \mathbb{H}^2 \to \mathbb{H}^2\colon\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \cdot c \\ x_2 \cdot d \end{pmatrix} \quad \text{mit } c, d \in \mathbb{H}^* .$$

Durch Konjugation mit

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in SU_2(\mathbb{H})$$

entsteht ein Element $\eta_2 \in N$ mit

$$\eta_2\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{2} x_1 \cdot \begin{pmatrix} c + d \\ c - d \end{pmatrix}.$$

Eine einfache Rechnung zeigt

$$\eta_2 \circ \eta_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} c^2 + c\,d \\ c^2 - c\,d \end{pmatrix},$$

$$\eta_1 \circ \eta_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} c^2 + d\,c \\ c\,d - d^2 \end{pmatrix}.$$

Da N kommutativ ist, müssen die beiden Bilder gleich sein. Der Vergleich liefert $c\,d = d\,c$ und $c^2 - c\,d = c\,d - d^2$, also $0 = = c^2 - 2\,c\,d + d^2 = c^2 - c\,d - d\,c + d^2 = (c - d)^2$, d.h. $c = \pm\, d$. Da η_1 ein beliebiges Element von N_1 war, ist aus Zusammenhangsgründen $c = d$. Damit liegt aber N_1 im Zentralisator von ganz $\mathrm{SU}_2(\mathbb{H})$, im Widerspruch dazu, daß nach unseren Annahmen $\mathrm{SU}_2(\mathbb{H})$ transitiv auf den Einparametergruppen von N wirken sollte.

3.12. Zusatz zu Satz 3.10. *Die Bahnen des Scherungsnormalteilers $N \cong \mathbb{R}^5$ in $L_\infty \setminus \{s\}$ sind invariant unter Σ; in jeder dieser (zu $\mathbb{R}^5$ homöomorphen) Bahnen hat Σ genau einen Fixpunkt und wirkt also auf ihr wie auf N als* $\mathrm{SO}_5(\mathbb{R})$.

Beweis: Zunächst überlegt man sich, daß $L_\infty \setminus \{s\}$ so mit $\mathbb{R}^8$ identifiziert werden kann, daß die N-Bahnen genau den Nebenklassen eines 5-dimensionalen Unterraums entsprechen.

Man kann dazu die Beschreibung der Gruppe aller Scherungen mit Achse S durch den sogenannten Distributor DQ eines koordinatisierenden Quasikörpers Q verwenden, siehe [11: 1.3, S. 26], wo dies im Fall achtdimensionaler Translationsebenen ausgeführt ist. DQ ist eine abgeschlossene Untergruppe der additiven Gruppe $Q_+ = \mathbb{R}^8$, und N entspricht einer zusammenhängenden abgeschlossenen Untergruppe von DQ, also einem Untervektorraum von Q_+.

Σ führt N-Bahnen in N-Bahnen über, da N von Σ normalisiert wird. Σ induziert also eine Transformationsgruppe auf dem Bahnenraum von N in $L_\infty \setminus \{s\}$, der wie eben beschrieben zu $\mathbb{R}^3$ homöomorph ist. Da $\Sigma \cong \mathrm{SU}_2(\mathbb{H})$ keine echten Untergruppen der Kodimension $\leqslant 3$ hat, ist die Wirkung auf diesem Bahnenraum trivial, d.h. alle N-Bahnen in $L_\infty \setminus \{s\}$ sind invariant unter Σ.

Daß Σ auf jeder dieser (zu $\mathbb{R}^5$ homöomorphen) N-Bahnen einen Fixpunkt hat, folgt nun nach [17]. Ist f ein solcher Fixpunkt, so ist die Abbildung $N \to N(f)$: $\eta \mapsto \eta(f)$ äquivariant bezüglich der Wirkung von Σ (durch Konjugation auf N, und als Kollineationsgruppe auf $N(f) \subseteq L_\infty$); sie ist bijektiv, da N frei auf $L_\infty \setminus \{s\}$ wirkt. Also wirkt

Σ auf der Bahn $N(f)$ wie auf $N \cong \mathbb{R}^5$ als $SO_5(\mathbb{R})$ in der gewöhnlichen Weise; insbesondere ist f der einzige Fixpunkt von Σ in $N(f)$.

3.13. Satz. *Unter der Generalvoraussetzung* 3.1 *und der Annahme* 3.7 *gilt:*

Ist Σ nicht normal in $(\Delta_s)^1$, so bleibt s fest unter Δ.

Korollar. $\dim \Delta \leqslant 22$.

Beweis: **(a)** Wir nehmen an, s sei kein Fixpunkt von Δ. Angesichts der zu $\mathbb{R}^5$ homöomorphen Bahnen des Scherungsnormalteilers $N \cong \mathbb{R}^5$ in $L_\infty \setminus \{s\}$ (siehe 3.12) ist dann die Bahn $\Delta(s)$ mindestens 5-dimensional, nach Generalvoraussetzung also

$$5 \leqslant \dim \Delta(s) \leqslant 6 \text{ und } w \in \Delta(s) .$$

Wir betrachten wieder die Menge

$$F = \operatorname{Fix}(\Sigma, \Delta(s))$$

der Fixpunkte von Σ in $\Delta(s)$ und zeigen:

(b) *Der Normalisator $\mathfrak{N}(\Sigma)$ von Σ in Δ ist transitiv auf F.*

Sei $u \in F \setminus \{s\}$, und sei $\delta \in \Delta$ mit $\delta(s) = u$. In der N-Bahn $N(\delta^{-1}(s))$ hat Σ nach 3.12 einen Fixpunkt; es existiert also $\eta \in N$ mit

$$w' := \eta \circ \delta^{-1}(s) \in F \setminus \{s\} .$$

Mit

$$\delta' := \delta \circ \eta^{-1}$$

gilt

$$\delta'(w') = s, \quad \delta'(s) = \delta(s) = u,$$

insbesondere

$$\delta' \Delta_{s,w'} \delta'^{-1} = \Delta_{s,u} .$$

Nach 3.4 und dem Lemma über Achsenstandgruppen 1.2(h) ist nun Σ sowohl in $\Delta_{s,w'}$ als auch in $\Delta_{s,u}$ die einzige zu $SU_2(\mathbb{H})$ isomorphe Untergruppe; folglich muß δ' dem Normalisator von Σ angehören.

(c) Wir betrachten nun die Bahn $\Delta(s)$ und die Fixpunktmenge F als homogene Räume Δ/Δ_s bzw. $\mathfrak{N}(\Sigma)/\mathfrak{N}(\Sigma)_s$ mit der Faktortopologie; mit dieser Topologie werden $\Delta(s)$ und F Mannigfaltigkeiten. Die Abbildung

$$\Phi\colon (F \setminus \{s\}) \times N \to \Delta(s) \setminus \{s\}\colon \ (f, \eta) \mapsto \eta(f)$$

ist stetig, und sie ist bijektiv, da nach 3.12 in jeder N-Bahn in $L \setminus \{s\}$ genau ein Fixpunkt von Σ liegt und da die Scherungsgruppe N frei auf $L_\infty \setminus \{s\}$ operiert. Daraus folgt mit einem allgemeinen Schluß, daß Φ ein Homöomorphismus ist:

Indem man die links stehende Mannigfaltigkeit als abzählbare Vereinigung kompakter Mengen schreibt, ergibt sich nämlich mit dem Kategorieschluß des Dichtesatzes von BAIRE [5: XI 10.5, S. 250], daß in ihr eine kompakte Teilmenge D mit nichtleerem Inneren existiert, deren Bild $\Phi(D)$ ebenfalls nichtleeres Inneres hat. D und $\Phi(D)$ haben dann die volle Dimension der jeweiligen Mannigfaltigkeit, und da $\Phi | D$ ein Homöomorphismus auf $\Phi(D)$ ist, sind diese Dimensionen gleich. Mit dem Invarianzsatz von BROUWER folgt dann, daß Φ global ein Homöomorphismus ist. — Insbesondere gilt:

(d) $\dim F = \dim \Delta(s) - 5$, *und* $F \setminus \{s\}$ *ist zusammenhängend.*

Wir behandeln nun die beiden Möglichkeiten, die für die Dimension von $\Delta(s)$ bestehen, getrennt weiter.

Ist $\dim \Delta(s) = 5$, so ist $F \setminus \{s\}$ nach (d) ein Punkt; also besteht $\Delta(s) \setminus \{s\}$ aus einer einzigen N-Bahn und ist homöomorph zu $\mathbb{R}^5$. Mit Hilfe des Satzes von SCHOENFLIES folgt, daß die Mannigfaltigkeit $\Delta(s)$ homöomorph zur 5-Sphäre $\mathbb{S}_5$ ist. Eine maximale kompakte Untergruppe M von Δ mit $M \supseteq \Sigma$ wirkt dann ebenfalls transitiv auf $\Delta(s)$ ([18: 5.6, S. 226]). Nach [3] ist die von M auf $\Delta(s)$ induzierte Transformationsgruppe isomorph zu $\mathrm{SU}_3(\mathbb{C})$, $\mathrm{U}_3(\mathbb{C})$ oder $\mathrm{SO}_6(\mathbb{R})$. Da $\Sigma \cong \mathrm{SU}_2(\mathbb{H})$ quasi-einfach ist, wirkt Σ auf $\Delta(s)$ fast effektiv (die Wirkung kann ja nicht trivial sein, da F nur aus zwei Punkten besteht). Aus Dimensionsgründen bleibt somit nur die Möglichkeit $M | \Delta(s) \cong \mathrm{SO}_6(\mathbb{R})$. Dann enthält jedoch Δ eine zu $\mathrm{SO}_6(\mathbb{R})$ und damit zu $\mathrm{SU}_4(\mathbb{C})$ lokal isomorphe Untergruppe; diese Situation soll aber nach der Generalvoraussetzung 3.1 ausgeklammert bleiben.

Ist $\dim \Delta(s) = 6$, so ist F nach (d) eine 1-dimensionale Mannigfaltigkeit. Da $F \setminus \{s\}$ zusammenhängend ist, ist F homöomorph zur Kreislinie, und $F \setminus \{s\}$ ist homöomorph zu $\mathbb{R}$. Unter dem Homöomorphismus Φ und wegen $N \cong \mathbb{R}^5$ folgt, daß $\Delta(s) \setminus \{s\}$ homöomorph zu $\mathbb{R}^6$ und also $\Delta(s)$ homöomorph zur 6-Sphäre $\mathbb{S}_6$ ist. Man sieht nun wie am Ende des Beweises von 3.9, daß dies ebenfalls auf eine Situation führt, die hier unberücksichtigt bleibt.

Der Punkt s muß also unter ganz Δ festbleiben. Die Dimensionsabschätzung des Korollars folgt daraus unmittelbar nach 1.2 (i) mit 3.5.

Mit 3.6, 3.9 und dem eben gezeigten Korollar zu 3.13 ist insgesamt Satz 3.2 bewiesen.

4. Kollineationsgruppen, die $SO_4(\mathbb{R}) \times U_2(\mathbb{C})$ enthalten

4.1. Generalvoraussetzung. *Im folgenden wird eine sechzehndimensionale lokalkompakte Translationsebene betrachtet, in der* $S\mathbb{G}_o$ *eine zu* $SO_4(\mathbb{R}) \times U_2(\mathbb{C})$ *lokal isomorphe, zusammenhängende abgeschlossene Untergruppe* Λ *enthält, welche zwei verschiedene uneigentliche Punkte* $w, s \in L_\infty$ *festläßt.*

Λ enthält einen zu $\mathrm{Spin}_3(\mathbb{R})^3$ lokal isomorphen Normalteiler Θ; unter $\mathrm{Spin}_3(\mathbb{R})$ verstehen wir dabei die zu $SU_2(\mathbb{C})$ isomorphe Gruppe

$$\mathrm{Spin}_3(\mathbb{R}) = \{a \in \mathbb{H};\ a\bar{a} = 1\}$$

der Quaternionen der Norm 1 (mit der Quaternionenmultiplikation). Bezüglich der Wirkung von Θ werden wir zeigen:

4.2. Θ *ist isomorph zu* $\mathrm{Spin}_3(\mathbb{R})^3$; *bei einem geeigneten Isomorphismus*

$$\vartheta\colon \mathrm{Spin}_3(\mathbb{R})^3 \to \Theta\colon (a, b, c) \mapsto \vartheta_{a,b,c}$$

und bei geeigneter Identifikation der zu w *und* s *gehörigen Ursprungsgeraden* W *und* S *jeweils mit* $\mathbb{H} \times \mathbb{H}$ *induzieren die Kollineationen aus* Θ *die folgenden Transformationen von* W *bzw.* S:

$$\vartheta_{a,b,c} \mid W = \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a x_1 b^{-1} \\ c x_2 \end{pmatrix} \right)$$

$$\vartheta_{a,b,c} \mid S = \left(\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} c y_1 b^{-1} \\ a y_2 \end{pmatrix} \right)$$

$(x_i, y_i \in \mathbb{H})$. *Die drei zu* $\mathrm{Spin}_3(\mathbb{R})$ *isomorphen Normalteiler*

$$\Theta_1 = \{\vartheta_{a,1,1};\ a \in \mathrm{Spin}_3(\mathbb{R})\}$$

$$\Theta_2 = \{\vartheta_{1,b,1};\ b \in \mathrm{Spin}_3(\mathbb{R})\}$$

$$\Theta_3 = \{\vartheta_{1,1,c};\ c \in \mathrm{Spin}_3(\mathbb{R})\}$$

wirken auf der uneigentlichen Geraden L_∞ *wie auf der Einpunktkompaktifizierung von* W *bzw.* S*; insbesondere ist die Menge* F_i *der Fixpunkte von* Θ_i *in* L_∞ *homöomorph zur 4-Sphäre* $\mathbb{S}_4$.

Die Bahn eines uneigentlichen Punkts außerhalb $(F_1 \cup F_2) \cap \cap (F_3 \cup F_2)$ *unter* Θ *ist 6-dimensional.*

Aus der letzten Information erhalten wir dann unter einer technischen Zusatzvoraussetzung noch die folgende

4.3. Dimensionsabschätzung. *In der in* 4.1 *beschriebenen Situation sei* Δ *eine zusammenhängende abgeschlossene Untergruppe von* $\mathrm{S}\mathbb{G}_o$, *die* Λ *enthält;* Δ *möge aber keine zu* $\mathrm{SO}_8(\mathbb{R})$ *lokal isomorphe Untergruppe besitzen. Ferner sei*

$$\dim \Delta(s) \leqslant 6$$

und

$$w \in \Delta(s), \text{ falls nicht } s \text{ ein Fixpunkt von } \Delta \text{ ist.}$$

Dann gilt

$$\dim \Delta \leqslant 21.$$

Eine leichte Verfeinerung des Beweises von 4.3, die für den Hauptsatz 1.1 der vorliegenden Arbeit nicht benötigt wird, die wir aber für spätere Zwecke anschließen, wird ergeben, daß genauer folgendes gilt:

4.4. Zusatz zu 4.3. *Es ist sogar*

$$\dim \Delta \leqslant 20,$$

falls nicht eine maximale kompakte zusammenhängende Untergruppe von $\Delta_{s,w}$ *isomorph zu* $\mathrm{SO}_4(\mathbb{R}) \times \mathrm{SO}_4(\mathbb{R})$ *ist und eine der beiden folgenden Situationen vorliegt:*

(1) Δ *läßt* s *fest und wirkt transitiv auf* $L_\infty \setminus \{s\}$, *und* $\Delta_{s,w}$ *ist nicht kompakt; oder*

(2) *die Bahn* $\Delta(s)$ *ist homöomorph zur* 4-*Sphäre, und* Δ *wirkt auf ihr zweifach transitiv.*

In diesen Fällen ist in der Tat $\dim \Delta = 21$ und damit $\dim \mathbb{G} \geqslant 17 + 21 = 38$. Es soll späteren Arbeiten vorbehalten sein, diese beiden Spezialsituationen dann noch weiter zu untersuchen; dabei wird sich herausstellen, daß nur in der klassischen Oktavenebene die Kollineationsgruppe eine Untergruppe Δ mit solchen Eigenschaften enthält. Zu den Voraussetzungen von 4.3 sei noch bemerkt, daß nach [8: 3.7, S. 81] eine zu $SO_8(\mathbb{R})$ lokal isomorphe Untergruppe von $S\mathbb{G}_o$ auch nur in der klassischen Oktavenebene vorkommen kann.

Beweis von 4.2. **(a)** Λ wirkt auf W und S fast effektiv (1.2(e)) als lineare Gruppe; genauer lassen sich W und S so mit $\mathbb{R}^4 \times \mathbb{C}^2$ identifizieren, daß Λ auf W und S jeweils die Gruppe $SO_4(\mathbb{R}) \times U_2(\mathbb{C})$ in der naheliegenden Wirkung induziert (vgl. die Übersicht [9: 2.8] über die großen kompakten zusammenhängenden Untergruppen von $GL_8(\mathbb{R})$).

(b) Sei Ξ der zusammenhängende, abgeschlossene Normalteiler von Λ mit

$$\Xi \mid W = SO_4(\mathbb{R}) \times \{\mathrm{id}\} .$$

Ξ ist fastdirektes Produkt seiner beiden einzigen echten zusammenhängenden, abgeschlossenen Normalteiler Θ_1 und Θ_2; diese sind zu $\mathrm{Spin}_3(\mathbb{R})$ isomorph. Die übrigen dreidimensionalen Untergruppen von Ξ wirken auf W als $SO_3(\mathbb{R})$ und lassen einen 5-dimensionalen Unterraum von W punktweise fest. Eine solche Untergruppe kann auf S daher außer o keine Fixpunkte haben:

Sie würde nämlich sonst nach 1.2(g) auf S wirken wie auf W, und könnte gedeutet werden als Gruppe von Automorphismen eines koordinatisierenden (achtdimensionalen) Quasikörpers; dies kann aber angesichts der Fixpunkte auf W nicht angehen, da der Unterquasikörper der Fixpunkte eines Automorphismus höchstens die halbe Dimension hat ([7: 2.1, S. 205]).

Also wirkt Ξ auf den beiden Komponenten von $S = \mathbb{R}^4 \times \mathbb{C}^2 = \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4$ nichttrivial, und nicht als $SO_4(\mathbb{R})$. Auf jeder der beiden Komponenten wirkt somit jeweils ein anderer der beiden Normalteiler Θ_1 und Θ_2 trivial, und der andere wirkt auf ihr ohne von o verschiedene Fixpunkte, d. h. wie $SU_2(\mathbb{C}) = \mathrm{Spin}_3(\mathbb{R})$ auf $\mathbb{C}^2 = \mathbb{R}^4$. Insgesamt lassen sich W und S jeweils so mit $\mathbb{H} \times \mathbb{H}$ identifizieren, daß die Kollineationen aus Ξ auf W und S die in der Behauptung notierten Transformationen $\vartheta_{a,b,1}$ mit $a, b \in \mathrm{Spin}_3(\mathbb{R})$ induzieren.

(c) Sei andererseits Z der zusammenhängende, abgeschlossene Normalteiler von Λ mit

$$Z \mid W = \{\mathrm{id}\} \times \mathrm{U}_2(\mathbb{C}) \ .$$

Z hat genau zwei zusammenhängende abgeschlossene Normalteiler: Den $\mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$ entsprechenden Normalteiler $\Theta_3 \cong \mathrm{Spin}_3(\mathbb{R})$ und die Zusammenhangskomponente T des Zentrums (ein eindimensionaler Torus). Die Identifikation $W = \mathbb{H} \times \mathbb{H}$ läßt sich so einrichten, daß die Gruppe der von Θ_3 induzierten Transformationen von W beschrieben wird durch

$$\Theta_3 \mid W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ c\, x_2 \end{pmatrix};\ c \in \mathrm{Spin}_3(\mathbb{R}) \right\} .$$

Wir betrachten nun die Wirkung von Z auf $S = \mathbb{H} \times \mathbb{H}$. Die bereits analysierte Untergruppe $\Xi = \Theta_1 \cdot \Theta_2$ wird von Z zentralisiert. Auf den beiden Komponenten von $S = \mathbb{H} \times \mathbb{H}$ wirkt jeweils eine der beiden Gruppen Θ_1 bzw. Θ_2 als Gruppe quaternaler Streckungen; da deren Zentralisator in $\mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ ebenfalls eine zu $\mathrm{Spin}_3(\mathbb{R})$ isomorphe maximale kompakte Untergruppe hat, kann Z auf keiner der beiden Komponenten fast effektiv wirken. Die Kerne der Wirkung auf den beiden Komponenten enthalten also einen der beiden Normalteiler Θ_3 oder T. Beide Normalteiler können nicht zugleich auf derselben Komponente von S trivial operieren, denn sonst hätte Z von o verschiedene Fixpunkte in S und W und würde nach 1.2(g) auf W und S gleich wirken; ähnlich wie in (b) ergibt sich, daß das nicht angeht, da Z Kollineationen enthält, die auf W einen 6-dimensionalen Unterraum punktweise festlassen.

Also operiert Θ_3 auf einer der beiden Komponenten von S trivial; auf der anderen Komponente muß er mit Θ_1 bzw. Θ_2 kommutieren. In den auf S gegebenen quaternalen Koordinaten ist also entweder

$$\text{(Fall (i))} \quad \Theta_3 \mid S = \left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} c\, y_1 \\ y_2 \end{pmatrix};\ c \in \mathrm{Spin}_3(\mathbb{R}) \right\}$$

oder

$$\text{(Fall (ii))} \quad \Theta_3 \mid S = \left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2\, c^{-1} \end{pmatrix};\ c \in \mathrm{Spin}_3(\mathbb{R}) \right\} .$$

Im Fall (i) ergibt sich die in der Behauptung notierte Gruppe $\Theta = \Theta_1 \cdot \Theta_2 \cdot \Theta_3$. Fall (ii) geht in Fall (i) über, indem man auf S die beiden quaternalen Koordinaten vertauscht und zugleich konjugiert; dies bedingt dann auch noch eine Vertauschung der Rollen von Θ_1 und Θ_2, die ihrerseits erfordert, daß man die erste Koordinate von W

ebenfalls durch ihre Konjugierte ersetzt, um wieder die in der Behauptung niedergelegte Beschreibung von Θ zu erhalten.

(d) Wir untersuchen nun die Wirkung dieser Gruppen auf L_∞. Jeder der Normalteiler Θ_i hat von o verschiedene Fixpunkte auf W und auf S und wirkt also (siehe 1.2 (g)) auf $L_\infty \setminus \{s\}$ wie auf W bzw. S. Die Menge der Fixpunkte von Θ_i in $L_\infty \setminus \{s\}$ ist somit homöomorph zur Menge der Fixpunkte auf W oder S, also zu $\mathbb{H} \cong \mathbb{R}^4$. Die gesamte Fixpunktmenge F_i von Θ_i in L_∞, bei der noch s hinzukommt, ist kompakt und also homöomorph zur Einpunktkompaktifizierung $\mathbb{S}_4$.

Wie auf W und S wirkt jeder der Normalteiler Θ_i auch auf L_∞ frei außerhalb seiner Fixpunktmenge. Entsprechendes gilt auch für $\Theta_1 \cdot \Theta_2$:

(e) *$\Theta_1 \cdot \Theta_2$ wirkt frei auf $L_\infty \setminus (F_1 \cup F_2)$.* Sei nämlich $\vartheta \in \Theta_1 \cdot \Theta_2$ eine Kollineation, die einen uneigentlichen Punkt $e \in L_\infty \setminus (F_1 \cup F_2)$ und damit eine von W und S verschiedene Ursprungsgerade E festläßt. Aus den von o verschiedenen Fixpunkten von $\Theta_1 \cdot \Theta_2$ auf W lassen sich Fixpunkte von ϑ auf E und S konstruieren; nach 1.2 (g) wirkt also ϑ auf W und S in derselben Weise. Der gegebenen Beschreibung von $\Theta_1 \cdot \Theta_2$ entnimmt man nun, daß ϑ auf W einen mindestens 4-dimensionalen Unterraum von Fixpunkten hat; auf S hingegen läßt ein Element von $\Theta_1 \cdot \Theta_2$ genau dann einen 4-dimensionalen Unterraum elementweise fest, wenn es in Θ_1 oder Θ_2 liegt. Also ist $\vartheta \in \Theta_1 \cup \Theta_2$, und da Θ_i frei auf $L_\infty \setminus F_i$ operiert, folgt $\vartheta = \mathrm{id}$.

(f) Der Stabilisator Θ_e hat nach (e) also trivialen Schnitt mit $\Theta_1 \cdot \Theta_2$ und projiziert sich somit injektiv in $\Theta_3 \cong \mathrm{Spin}_3(\mathbb{R})$. Anhand der Kenntnis der Untergruppen von $\mathrm{Spin}_3(\mathbb{R})$ ergibt sich, daß Θ_e 1- oder 3-dimensional ist. Im ersten Fall wäre die Bahn $\Theta(e)$ nach der Dimensionsformel 8-dimensional, also offen in der 8-Sphäre L_∞, und da sie andererseits kompakt ist, müßte aus Zusammenhangsgründen Θ transitiv auf L_∞ wirken; aber die Fixpunktmengen F_i der Normalteiler Θ_i sind invariant unter Θ. Also ist $\dim \Theta_e = 3$, und die Bahn $\Theta(e)$ ist 6-dimensional.

Ganz entsprechend folgt — unter Vertauschung der Rollen von Θ_1 und Θ_3 —, daß die Θ-Bahnen von Punkten aus $L_\infty \setminus (F_2 \cup F_3)$ stets 6-dimensional sind.

Beweis der Dimensionsabschätzung 4.3. Sei nun Δ eine Λ enthaltende, zusammenhängende abgeschlossene Untergruppe von $S\mathbb{G}_o$, die den Bedingungen an die Bahnen von s und w aus 4.3 genügt. Aus $\dim \Delta(s) \leqslant 6$ folgt zunächst

$$\Delta(s) \subseteq F_1 \cup F_2: \tag{10}$$

Sonst enthielte nämlich $\Delta(s)$ die Θ-Bahn eines Punktes $e \in L_\infty \setminus (F_1 \cup F_2)$, die nach 4.2 genau 6-dimensional ist, und wäre selbst genau 6-dimensional. Mit der Topologie als homogener Raum Δ/Δ_s ist $\Delta(s)$ eine Mannigfaltigkeit; die homogene Teilmenge $\Theta(e)$, die die volle Dimension hat, wäre also offen in $\Delta(s)$, und da sie andererseits kompakt ist, wäre $\Theta(e) = \Delta(s)$. Aber F_1 und F_2 als Fixpunktmengen von Normalteilern von Θ sind invariant unter Θ, so daß s nicht in $\Theta(e)$ enthalten sein kann. Dieser Widerspruch zeigt (10). Wegen $F_i \cong \mathbb{S}_4$ folgt insbesondere $\dim \Delta(s) \leqslant 4$. Ist s kein Fixpunkt von Δ, so ist nach Voraussetzung $w \in \Delta(s)$ und damit

$$\dim \Delta(s) + \dim \Delta_s(w) \leqslant 4 + 4 = 8\,. \tag{11}$$

Ist s ein Fixpunkt von Δ, so hat man (11) trivialerweise.

Zur Abschätzung der Dimension von Δ gemäß 1.2(i) ist eine maximale kompakte zusammenhängende Untergruppe K von $\Delta_{s,w}$ zu betrachten. O. B. d. A. enthält K die zu $SO_4(\mathbb{R}) \times U_2(\mathbb{C})$ lokal isomorphe Gruppe Λ aus den Voraussetzungen von 4.2. Auf $W = \mathbb{R}^8 = \mathbb{R}^4 \times \mathbb{C}^2$ wirkt K fast effektiv (1.2(e)) als kompakte zusammenhängende $\mathbb{R}$-lineare Gruppe, die $SO_4(\mathbb{R}) \times U_2(\mathbb{C})$ enthält. Außer $SO_4(\mathbb{R}) \times U_2(\mathbb{C})$ selbst kommen dafür nur noch $SO_4(\mathbb{R}) \times SO_4(\mathbb{R})$ oder $SO_8(\mathbb{R})$ in Frage (siehe die Übersicht über die großen kompakten zusammenhängenden Untergruppen von $GL_8(\mathbb{R})$ in [9: 2.8, S. 270]), wobei $SO_8(\mathbb{R})$ nach den Voraussetzungen an Δ ausscheidet. Insbesondere ist $\dim K \leqslant 12$. Mit (11) ergibt sich nun die behauptete Dimensionsabschätzung $\dim \Delta \leqslant 21$ direkt nach 1.2(i).

Wir beweisen nun noch die in 4.4 behaupteten Verfeinerungen, die im Rahmen dieser Arbeit nicht weiter benötigt werden. Die eben geschilderte Dimensionsabschätzung gemäß 1.2(i) liefert sogar $\dim \Delta \leqslant 20$, falls nicht folgendes gilt:

$$\dim \Delta_{s,w} = \dim K + 1 \tag{12}$$

$$K \text{ ist lokal isomorph zu } \mathrm{SO}_4(\mathbb{R}) \times \mathrm{SO}_4(\mathbb{R}) \tag{13}$$

und

$$s \text{ ist ein Fixpunkt von } \Delta, \text{ und } \dim \Delta_s(w) = 8 \tag{14a}$$

oder

$$\dim \Delta(s) = 4, \dim \Delta_s(w) = 4\ . \tag{14b}$$

Die damit beschriebenen Situationen müssen also noch gesondert betrachtet werden. (12) besagt, daß die Zusammenhangskomponente $(\Delta_{s,w})^1$ nicht kompakt ist. Nach dem Lemma über Achsenstandgruppen (1.2 (h)) häuft sich also jede Bahn von Δ_s in $L_\infty \setminus \{s\}$ bei w. Eine Fortentwicklung dieser Aussage, das Sphärenlemma [8: 2.2, S. 70], besagt, daß deshalb im Fall (14b) die Bahn $\Delta(s)$ homöomorph zu einer Sphäre, also zur 4-Sphäre ist. Aufgrund der Annahmen über $\dim \Delta_s(w)$ in (14a) und (14b) ist nun $\Delta_s(w)$ eine offene Umgebung von w in $L_\infty \setminus \{s\}$ bzw. in $\Delta(s) \setminus \{s\}$, und da sich alle Bahnen von Δ_s in $L_\infty \setminus \{s\}$ bei w häufen, folgt schließlich die Transitivität von Δ in $L_\infty \setminus \{s\}$ bzw. die zweifache Transitivität von Δ auf $\Delta(s)$.

5. Beweis von Satz 1.1

(a) Es ist zu zeigen, daß in einer sechzehndimensionalen lokalkompakten Translationsebene, die nicht isomorph zur klassischen Oktavenebene ist, stets $\dim \mathbb{G} \leqslant 40$ gilt. Dazu ziehen wir die Dimensionsabschätzungen aus den Paragraphen 2—4 heran, wobei hier nun die in diesen Abschätzungen betrachtete Gruppe Δ stets die volle Zusammenhangskomponente

$$\Delta = (\mathrm{S}\mathbb{G}_o)^1$$

von $\mathrm{S}\mathbb{G}_o$ sein soll. Es ist dann

$$\dim \mathbb{G} = \dim \Delta + 17. \tag{15}$$

Zum Beweis von Satz 1.1 ist somit $\dim \Delta \leqslant 23$ zu zeigen.

Nach dem Hauptsatz von [9: S. 260] existiert ein uneigentlicher Punkt $s \in L_\infty$ mit

$$\dim \Delta(s) \leqslant 6\ .$$

Falls s kein Fixpunkt von Δ ist, wählen wir einen zweiten uneigentlichen Punkt

$$w \in \Delta(s) \setminus \{s\};$$

andernfalls wählen wir $w \in L_\infty \setminus \{s\}$ beliebig. In jedem Fall ist dann

$$\dim \Delta(s) + \dim \Delta_s(w) \leqslant 12. \tag{16}$$

Sei nun K eine maximale kompakte zusammenhängende Untergruppe von $\Delta_{s,w}$. Ist $\dim K \leqslant 10$, so folgt direkt mit einer Dimensionsabschätzung nach 1.2(i) anhand (16), daß $\dim \Delta \leqslant 23$.

(b) Im folgenden müssen also noch die Situationen mit

$$\dim K \geqslant 11$$

betrachtet werden. Auf der zu s gehörigen Ursprungsgeraden $S = \mathbb{R}^8$ wirkt K als kompakte lineare Gruppe, und zwar nach 1.2(e) fast effektiv. Aufgrund der expliziten Kenntnis der großen kompakten Untergruppen von $\mathrm{GL}_8(\mathbb{R})$ (siehe z.B. die Aufstellung in [9: 2.8, S. 270]) ergibt sich, daß K lokal isomorph ist zu einer der Gruppen $\mathrm{SO}_8(\mathbb{R})$, $\mathrm{Spin}_7(\mathbb{R})$, $\mathrm{U}_4(\mathbb{C})$, $\mathrm{SU}_4(\mathbb{C})$, G_2, $\mathrm{SU}_2(\mathbb{H}) \cdot \mathrm{Spin}_3(\mathbb{R})$, $\mathrm{SU}_2(\mathbb{H}) \cdot \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$, $\mathrm{SO}_4(\mathbb{R}) \times \mathrm{SO}_4(\mathbb{R})$. Die verschiedenen Möglichkeiten werden nun gesondert betrachtet.

(b1) Nur in der klassischen Oktavenebene kann $\mathbb{G}_o$ eine zu $\mathrm{SO}_8(\mathbb{R})$ lokal isomorphe Untergruppe enthalten ([8: 3.7, S. 81]).

(b2) Enthält allgemeiner $\mathbb{G}_0$ eine zu $\mathrm{Spin}_7(\mathbb{R})$ isomorphe Untergruppe, so folgt $\dim \mathbb{G} \leqslant 39$ nach [12: 2.3(e), S. 270].

(b3) Enthält $\mathbb{G}_o$ eine zu $\mathrm{SU}_4(\mathbb{C})$ lokal isomorphe Untergruppe, aber keine zu $\mathrm{Spin}_7(\mathbb{R})$ lokal isomorphe Untergruppe, so ist $\dim \mathbb{G} \leqslant 37$ nach dem Hauptergebnis von [14: Satz 1.2, S. 319, Satz 7.1, S. 342].

Wenn man wie hier nur an einer gröberen Abschätzung interessiert ist, müssen die Ergebnisse dieser Arbeit nicht in vollem Umfang herangezogen werden; gerade im komplizierteren Fall, daß eine zu $\mathrm{SU}_4(\mathbb{C})$ isomorphe Untergruppe Σ außer o keine weiteren affinen Fixpunkte hat, bestehen Einsparungsmöglichkeiten: Aus den Sätzen 4.1 und 5.1 von [14] folgt, daß Σ ein Normalteiler von Δ ist (da die Ebene nicht die klassische Oktavenebene sein soll). Die Menge F der Fixpunkte von Σ in L_∞ ist dann invariant unter Δ; sie ist zur 2-Sphäre homöomorph (siehe [14: 2.3, S. 324], [13: §3 Lemma, S. 34]). Für $s, w \in F$ ist also $\dim \Delta(s) + \dim \Delta_s(w) \leqslant 4$. Eine maximale kompakte zusammenhängende Untergruppe K von $\Delta_{s,w}$ ist isomorph zu $\mathrm{SU}_4(\mathbb{C})$ oder $\mathrm{SU}_4(\mathbb{C}) \cdot \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ (siehe [14: 2.4, S. 324]), also höchstens 16-dimensional. Dimensionsabschätzung gemäß 1.2(i) ergibt damit

$\dim \Delta \leqslant 21$, also $\dim \mathbb{G} \leqslant 38$. Diese Argumentation ersetzt den § 6 von [14] (dessen Zweck es im wesentlichen ist, den Fall $\dim \mathbb{G} = 38$ auch noch auszuschließen).

(b4) Im folgenden können wir also davon ausgehen, daß Δ keine zu $SO_8(\mathbb{R})$, $Spin_7(\mathbb{R})$ oder $SU_4(\mathbb{C})$ lokal isomorphe Untergruppe enthält. Die damit verbleibenden Möglichkeiten wurden nun in §§ 2—4 behandelt:

Ist K lokal isomorph zu G_2, so folgt $\dim \Delta \leqslant 23$ nach 2.2. In den Fällen, daß K lokal isomorph zu $SU_2(\mathbb{H}) \cdot Spin_3(\mathbb{R})$ oder $SU_2(\mathbb{H}) \cdot SO_2(\mathbb{R})$ ist, hat man $\dim \Delta \leqslant 22$ nach 3.2. Ist K lokal isomorph zu $SO_4(\mathbb{R}) \times SO_4(\mathbb{R})$, so kann man eine darin enthaltene zu $SO_4(\mathbb{R}) \times U_2(\mathbb{C})$ lokal isomorphe Untergruppe betrachten und 4.3 heranziehen, um $\dim \Delta \leqslant 21$ zu erhalten. Damit ist Satz 1.1 bewiesen.

Für spätere Zwecke merken wir an, daß sich aus dem Beweis durch eine Zusatzüberlegung noch folgende Aussage ergibt:

Korollar. *In einer sechzehndimensionalen lokalkompakten Translationsebene mit* $\dim \mathbb{G} = 40$ *liegt für die Zusammenhangskomponente* $\Delta = (S\mathbb{G}_o)^1$ *von* $S\mathbb{G}_o$ *die Situation* (2) *von Satz 2.2 vor.*

Bei allen anderen Fällen mit $\dim K \geqslant 11$ hat sich nämlich im Beweis stets $\dim \Delta \leqslant 22$, d. h. $\dim \mathbb{G} \leqslant 39$ ergeben. Für $\dim K \leqslant 10$ zeigt die genauere Analyse der in (a) vorgenommenen Abschätzung gemäß 1.2 (i) mit (16) ebenfalls $\dim \Delta \leqslant 22$, es sei denn, daß in allen eingehenden Ungleichungen Gleichheit herrscht, daß also

$$\dim K = 10 \tag{17}$$

$$\dim \Delta_{s,w} = \dim K + 1 \qquad (\text{gemäß } 1.2\,(\text{h})) \tag{18}$$

$$\dim \Delta(s) + \dim \Delta_s(w) = 12 \qquad (\text{gemäß } (2))\,. \tag{19}$$

Insbesondere ist dann $\dim \Delta(s) = 6$ und $\dim \Delta_s(w) = 6$, und (4) besagt, daß die Zusammenhangskomponente $(\Delta_{s,w})^1$ nicht kompakt ist. Genau wie im Beweis des Zusatzes 4.4 (am Ende von § 4) ergibt sich aus diesen Informationen, daß die Bahn $\Delta(s)$ homöomorph zur 6-Sphäre ist und daß Δ zweifach transitiv auf ihr wirkt. Nach der Klassifikation von J. Tits [25: S. 222ff.] aller zweifach transitiv wirkenden Liegruppen ist die von Δ auf $\Delta(s)$ induzierte Gruppe von Transformationen äquivalent zu $PSO_8(\mathbb{R}, 1)$ in ihrer kanonischen Wirkung auf der Quadrik vom Index 1 des 7-dimensionalen reellen projektiven Raums. Δ hat dann eine zu $SO_6(\mathbb{R})$ lokal isomorphe, kompakte Untergruppe, die zwei Punkte von $\Delta(s)$ festläßt; dies steht aber im Widerspruch zu $\dim K = 10$, da die Stabilisatoren von Punktepaaren aus $\Delta(s)$ untereinander konjugiert sind.

Die im Korollar angesprochenen Ebenen sollen in einer späteren Arbeit genau bestimmt werden, siehe auch die Bemerkung (2) zu Satz 2.2.

Literatur

[1] ANDRÉ, J.: Über nicht-desarguessche Ebenen mit transitiver Translationsgruppe. Math. Z. **60**, 156—186 (1954).

[2] BOREL, A.: Some remarks about Lie groups transitive on spheres and tori. Bull. Amer. Math. Soc. **55**, 580—587 (1949).

[3] BOREL, A.: Le plan projectif des octaves et les sphères comme espaces homogènes. C. R. Acad. Sci. Paris **231**, 943—945 (1950).

[4] BUCHANAN, T., HÄHL, H.: On the kernel and the nuclei of 8-dimensional locally compact quasifields. Arch. Math. **29**, 472—480 (1977).

[5] DUGUNDJI, J.: Topology. Boston: Allyn and Bacon. 1965.

[6] HÄHL, H.: Automorphismengruppen von lokalkompakten zusammenhängenden Quasikörpern und Translationsebenen. Geom. Dedicata **4**, 305—321 (1975).

[7] HÄHL, H.: Automorphismengruppen achtdimensionaler lokalkompakter Quasikörper. Math. Z. **149**, 203—225 (1976).

[8] HÄHL, H.: Lokalkompakte zusammenhängende Translationsebenen mit großen Sphärenbahnen auf der Translationsachse. Resultate Math. **2**, 62—87 (1979).

[9] HÄHL, H.: Zur Klassifikation von 8- und 16-dimensionalen lokalkompakten Translationsebenen nach ihren Kollineationsgruppen. Math. Z. **159**, 259—294 (1978).

[10] HÄHL, H.: Zur Kollineationsgruppe von achtdimensionalen lokalkompakten Translationsebenen. Abh. Math. Seminar Hamburg **53**, 84—102 (1983).

[11] HÄHL, H.: Eine Klasse von achtdimensionalen lokalkompakten Translationsebenen mit großen Scherungsgruppen. Mh. Math. **97**, 23—45 (1984).

[12] HÄHL, H.: Sechzehndimensionale lokalkompakte Translationsebenen mit Spin(7) als Kollineationsgruppe. Arch. Math. **48**, 267—276 (1987).

[13] HÄHL, H.: Eine Kennzeichnung der Oktavenebene. Indag. Math. **49**, 29—39 (1987).

[14] HÄHL, H.: $SU_4(\mathbb{C})$ als Kollineationsgruppe in sechzehndimensionalen lokalkompakten Translationsebenen. Geom. Dedicata **23**, 319—345 (1987).

[15] HUGHES, D. R., PIPER, F. C.: Projective Planes. New York—Heidelberg—Berlin: Springer. 1973.

[16] MONTGOMERY, D.: Orbits of highest dimension. In: BOREL, A.: Seminar on Transformation Groups; S. 117—131. Ann. Math. Studies 46. Princeton: University Press. 1960.

[17] MONTGOMERY, D., ZIPPIN, L.: A class of transformation groups in E^n. Amer. J. Math. **65**, 601—608 (1943).

[18] MONTGOMERY, D., ZIPPIN, L.: Topological Transformation Groups. New York: Interscience. 1955.

[19] Pickert, G.: Projektive Ebenen. Berlin–Göttingen–Heidelberg: Springer. 1955.

[20] Salzmann, H.: Topological planes. Advances Math. **2**, 1—60 (1967).

[21] Salzmann, H.: Compact 16-dimensional projective planes with large collineation groups. Math. Ann. **261**, 447—454 (1982).

[22] Salzmann, H.: Compact 16-dimensional projective planes with large collineation groups. II. Mh. Math. **95**, 311—319 (1983).

[23] Salzmann, H.: Compact 16-dimensional projective planes with large collineation groups. III. Math. Z. **185**, 185—190 (1984).

[24] Salzmann, H.: Compact 16-dimensional projective planes with large collineation groups. IV. Canad. J. Math. (Im Druck.)

[25] Tits, J.: Sur certaines classes d'espaces homogènes de groupes de Lie. Mem. Acad. Roy. Belg., Cl. Sci. **29**, Fasc. 3 (1955).

[26] Tits, J.: Tabellen zu den einfachen Liegruppen und ihren Darstellungen. Lect. Notes Math. 40. Berlin–Heidelberg–New York: Springer. 1967.

H. Hähl
Mathematisches Seminar
der Universität Kiel
Ludewig-Meyn-Strasse 4
D-2300 Kiel, Bundesrepublik Deutschland