HERMANN HÄHL

SECHZEHNDIMENSIONALE LOKALKOMPAKTE TRANSLATIONSEBENEN, DEREN KOLLINEATIONSGRUPPE G_2 ENTHÄLT

Meinem verehrten Lehrer Helmut Salzmann zum 60. Geburtstag

ABSTRACT. New results of Salzmann and Hubig say that a 16-dimensional (locally) compact topological projective plane in which the group $\mathbb{G}$ of continuous collineations has dimension $\geqslant 40$ is a translation plane. It is therefore important to determine all 16-dimensional locally compact translation planes with $\dim \mathbb{G} \geqslant 40$. From previous work of the author ([10]), it is known that such a plane is either the classical octonion plane, or $\dim \mathbb{G} = 40$ and $\mathbb{G}$ contains a subgroup isomorphic to the compact exceptional group G_2, but no larger compact simple subgroup. In the present paper, all planes satisfying the latter property more generally with $\dim \mathbb{G} \geqslant 38$ are explicitly determined. Together with the classification of all 16-dimensional locally compact translation planes in which $\mathbb{G}$ contains Spin(7) given by the author in [8], one thus knows all 16-dimensional locally compact translation planes with $\mathbb{G}$ containing G_2 and $\dim \mathbb{G} \geqslant 38$. Via suitable Baer subplanes, the classification makes use of analogous results for 8-dimensional planes ([7]).

1. EINLEITUNG

Neueste, bisher unveröffentlichte Resultate von H. Salzmann im Anschluß an die Arbeiten [14]–[17] sowie von M. Hubig (einem seiner Schüler, [11]) zeigen, daß eine sechzehndimensionale (lokal)kompakte topologische projektive Ebene, in der die Gruppe $\mathbb{G}$ der stetigen Kollineationen als topologische Gruppe Dimension $\geqslant 40$ hat, notwendig eine Translationsebene ist. Für $\dim \mathbb{G} \geqslant 41$ ist dies in [17] bewiesen; mit dem Hauptergebnis der Arbeit [10], die sich mit dieser Situation in Translationsebenen näher auseinandersetzt, folgt dann schließlich, daß die einzige Ebene dieser Art mit $\dim \mathbb{G} \geqslant 41$ die klassische Ebene über der Algebra $\mathbb{O}$ der reellen Oktaven ist.

Als nächstes müssen nun also die sechzehndimensionalen lokalkompakten Translationsebenen mit $\dim \mathbb{G} = 40$ bestimmt werden. Dies soll in der vorliegenden Arbeit geschehen. Das Ergebnis wurde in [4, S. 264], [16], [1, §14] angekündigt; es handelt sich um die Ebenen, die durch die folgenden 8-dimensionalen reellen Divisionsalgebren koordinatisiert werden können:

1.1. Die reelle *Mutation* $\mathbb{O}_{(t)}$ für $1/2 \neq t \in \mathbb{R}$ ist die Algebra, deren Multiplikation $\underset{(t)}{\circ}$ folgende Abwandlung der klassischen Oktavenmultiplikation $\cdot$ ist:

$$a \underset{(t)}{\circ} x = t \cdot ax + (1-t) \cdot xa \quad \text{für } a, x \in \mathbb{O}.$$

Geometriae Dedicata **36**: 181–197, 1990.

Mit der gewöhnlichen Addition in $\mathbb{O} \cong \mathbb{R}^8$ und dieser Multiplikation entsteht eine 8-dimensionale (nicht assoziative) Divisionsalgebra über $\mathbb{R}$; für $t = 1$ erhält man die klassische Oktavenalgebra, für $t = 0$ ihre entgegengesetzte Algebra (die vermöge Konjugation zu ihr isomorph ist).

Bei dieser Familie von Algebren handelt es sich genau um die 8-dimensionalen reellen Divisionsalgebren, die dieselbe Automorphismengruppe haben wie $\mathbb{O}$ selbst, nämlich die kompakte Ausnahmegruppe G_2, siehe [3, 4.1, 4.4 S. 215ff.] (wo diese Divisionsalgebren in einer anderen, isomorphen Beschreibung angegeben werden, vgl. 2.6). Ein Ziel der vorliegenden Arbeit ist nun der Beweis des folgenden Satzes:

1.2. SATZ. *Die sechzehndimensionalen lokalkompakten Translationsebenen mit einer Kollineationsgruppe der Dimension* 40 *sind genau die Ebenen über den Divisionsalgebren* $\mathbb{O}_{(t)}$ *aus* 1.1 *mit* $t \in \mathbb{R}\backslash\{0, 1/2, 1\}$.

Die Automorphismengruppe G_2 dieser Divisionsalgebren führt zu einer 14-dimensionalen Gruppe von Kollineationen, die zusammen mit der 16-dimensionalen Translationsgruppe, einer 8-dimensionalen Gruppe von Scherungen und der 2-dimensionalen Gruppe der reellen Streckungen in Richtung der Koordinatenachsen die gesamte 40-dimensionale Kollineationsgruppe erzeugt.

Der Beweis von Satz 1.2 (siehe 3.3) geht aus von Vorabeiten, die in [10] geleistet wurden. Dort wurde gezeigt, daß in einer sechzehndimensionalen lokalkompakten Translationsebene mit $\dim \mathbb{G} = 40$ folgende Situation vorliegt ([10, §5 Korollar S. 297 in Verbindung mit Satz 2.2 S. 271]):

Der Stabilisator $\mathbb{G}_o$ *eines affinen Punkts o enthält eine zu* G_2 *isomorphe Untergruppe, aber keine zu* $\mathrm{Spin}_7(\mathbb{R})$ *lokal isomorphe Untergruppe.*

Solche Ebenen werden im folgenden kurz *echte* G_2*-Ebenen* genannt. Ihre Kollineationsgruppe ist in §2 der genannten Arbeit [10] näher analysiert. Aufgrund dieser Vorarbeiten können wir hier nun, über die Situation von 1.2 hinaus, alle echten G_2-Ebenen mit $\dim \mathbb{G} \geqslant 38$ explizit bestimmen (siehe Satz 3.1). Satz 1.2 ergibt sich dann daraus durch Spezialisierung auf den Fall $\dim \mathbb{G} = 40$ (siehe 3.3). Die sechzehndimensionalen lokalkompakten Translationsebenen, in denen $\mathbb{G}_o$ sogar eine zu $\mathrm{Spin}_7(\mathbb{R})$ lokal isomorphe Untergruppe enthält, wurden übrigens sämtlich in [8] bestimmt; in ihnen ist von selbst $\dim \mathbb{G} \geqslant 38$. In einer späteren Arbeit soll gezeigt werden, daß umgekehrt in jeder sechzehndimensionalen lokalkompakten Translationsebene mit $\dim \mathbb{G} \geqslant 38$ der Stabilisator $\mathbb{G}_o$ eine zu G_2 isomorphe Untergruppe enthält, so daß mit den Klassifikationssätzen der erwähnten Arbeit [8] und der vorliegenden Arbeit alle solchen Ebenen bekannt sind.

In §2 werden zunächst Quasikörper vorgestellt, die sich dann in §3 als Koordinatenbereiche der in Rede stehenden Ebenen herausstellen werden. Dabei wird es sich als nützlich erweisen, daß man sehr rasch in den betrachteten sechzehndimensionalen Ebenen achtdimensionale Baer-Unterebenen findet, in denen analoge Verhältnisse vorliegen, wobei die der G_2 entsprechende Rolle von $SO_3(\mathbb{R})$ als der Automorphismengruppe des Quaternionenschiefkörpers $\mathbb{H}$ übernommen wird. Dies erleichtert die Klassifikation außerordentlich, da die fraglichen achtdimensionalen Ebenen in [7, §3] bestimmt wurden. Ausgehend von den Strukturaussagen aus [10, §2] wird es gelingen, das Resultat vom achtdimensionalen auf den sechzehndimensionalen Fall zu übertragen.

2. Eine Familie von Quasikörpern

Die hier vorgestellten Koordinatenbereiche entstehen aus der Algebra $\mathbb{O}$ der reellen Oktaven durch einen Modifikationsprozess, der aus [7, 3.2] schon bekannt ist, wo er in derselben Weise auf den Quaternionenschiefkörper $\mathbb{H}$ angewandt wurde. Dieser Prozess verallgemeinert die in 1.1 beschriebene Mutation. Die benötigten Informationen über die Oktavenmultiplikation findet man z.B. in [13, Ch. 14 S. 277ff.].

2.1. KONSTRUKTION. Wir zerlegen jede Oktav $x \in \mathbb{O}$ in ihren Realteil $\operatorname{Re} x$ und ihren reinen Teil $\operatorname{Pu} x$

$$x = \operatorname{Re} x + \operatorname{Pu} x.$$

Für einen festen Homöomorphismus

$$\rho: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{mit } \rho(0) = 0 \text{ und } \rho(1) = 1$$

sowie einen festen Parameter

$$\alpha > 0$$

definieren wir mit Hilfe der Oktavenmultiplikation $\cdot$ eine neue Multiplikation $\circ$ auf $\mathbb{O}$ wie folgt:

$$\begin{aligned} a \circ x = {} & \operatorname{Re} a \cdot \operatorname{Re} x + \rho(\operatorname{Re} a) \cdot \operatorname{Pu} x \\ & + \alpha \cdot \operatorname{Re}((\operatorname{Pu} a) \cdot x) + \operatorname{Pu}((\operatorname{Pu} a) \cdot x). \end{aligned}$$

Die algebraische Struktur, die auf $\mathbb{O}$ mit der üblichen Addition und dieser neuen Multiplikation entsteht, nennen wir $D^{\mathbb{O}}_{\alpha,\rho}$. Wir zeigen:

2.2. *$D^{\mathbb{O}}_{\alpha,\rho}$ ist ein topologischer Quasikörper. Die Gruppe G_2 der Automorphis-*

men der Oktavenalgebra $\mathbb{O}$ *besteht aus Automorphismen auch von* $D^{\mathbb{O}}_{\alpha,\rho}$. *Genau für* $\rho = \mathrm{id}$ *ist* $D^{\mathbb{O}}_{\alpha,\rho}$ *beidseitig distributiv, also eine reelle Divisionsalgebra, und genau für* $\rho = \mathrm{id}$ *und* $\alpha = 1$ *ein Alternativkörper (nämlich* $\mathbb{O}$*).*

BEMERKUNG. Die reellen Divisionsalgebren $D^{\mathbb{O}}_{\alpha,\mathrm{id}}$ sind isomorph zu den in 1.1 beschriebenen Mutationen $\mathbb{O}_{(t)}$, siehe 2.6.

Im Beweis von 2.2 werden wir die nun zunächst folgenden Vorbetrachtungen benutzen. Unmittelbar aus der Definition der Multiplikation $\circ$ ergibt sich für den Unterraum $\mathrm{Pu}\,\mathbb{O} \cong \mathbb{R}^7$ der reinen Oktaven folgender Sachverhalt:

2.3. $\mathrm{Pu}\,\mathbb{O}$ *liegt im Distributor von* $D^{\mathbb{O}}_{\alpha,\rho}$, *d.h. für* $a, x \in \mathbb{O}$ *und* $p \in \mathrm{Pu}\,\mathbb{O}$ *ist stets*

$$(a + p)\circ x = a\circ x + p\circ x.$$

2.4. *Die Unterstruktur* $D^{\mathbb{H}}_{\alpha,\rho}$. Identifiziert man den Quaternionenschiefkörper $\mathbb{H}$ mit einem Unterkörper von $\mathbb{O}$, so erhält man eine Unterstruktur $D^{\mathbb{H}}_{\alpha,\rho}$ von $D^{\mathbb{O}}_{\alpha,\rho}$, indem man die Konstruktion der Multiplikation $\circ$ auf $\mathbb{H}$ einschränkt. $D^{\mathbb{H}}_{\alpha,\rho}$ wurde bereits in [7, §3] eingeführt und ausführlich untersucht. (Man beachte, daß dort die Multiplikation $\circ$ zunächst auf andere Weise definiert wurde; die dann anschließend in [7] auf S. 33 gefundene Beschreibung $(*)$ stimmt jedoch mit der hier verwendeten Definition überein.) Wir werden weitgehenden Gebrauch davon machen, daß für diese Unterstruktur die entsprechenden Aussagen von 2.2 dort bereits bewiesen wurden ([7, 3.2 S. 32]).

Zur Rückführung der Erörterung von $\mathbb{O}$ auf $\mathbb{H}$ wird die Automorphismengruppe G_2 der Oktavenalgebra $\mathbb{O}$ verwendet. Die Automorphismen von $\mathbb{O}$ respektieren die Zerlegung in Realteil und reinen Teil, da die reinen Oktaven genau die Elemente mit reellem nichtpositivem Quadrat sind. Aus der Definition der neuen Multiplikation $\circ$ ist damit sofort ersichtlich, daß Automorphismen von $\mathbb{O}$ auch Automorphismen von $D^{\mathbb{O}}_{\alpha,\rho}$ sind. Wir werden die folgenden Transitivitätseigenschaften von G_2 benutzen:

2.5. *Jede Oktav läßt sich durch ein Element von* G_2 *in den Unterkörper* $\mathbb{C} = \mathrm{Spann}\{1, i\}$ *von* $\mathbb{H} \subseteq \mathbb{O}$ *überführen, und jede Oktav läßt sich in den Unterkörper* $\mathbb{H}$ *überführen durch ein Element von* G_2, *das* $\mathbb{C}$ *elementweise festläßt. Insbesondere lassen sich je zwei beliebige Oktaven durch ein Element von* G_2 *in Elemente von* $\mathbb{H}$ *transformieren.*

Um dies einzusehen, genügt es zu zeigen, daß zu je zwei reinen Oktaven $a, b \in \mathrm{Pu}\,\mathbb{O}$ der Norm $|a| = 1 = |b|$, die bezüglich der Normform von $\mathbb{O}$ zueinander orthogonal sind, ein Automorphismus $\gamma \in \mathrm{G}_2$ existiert mit $\gamma(a) = i$, $\gamma(b) = j$. Dazu ergänzt man a, b zu einem sogenannten Cayley-Tripel durch eine reine Oktav c der Norm 1, die auf a, b und ab senkrecht steht; da das Cayley-Tripel (a, b, c) die Algebra $\mathbb{O}$ in genau derselben Weise, und mit derselben Multiplikationstabelle erzeugt wie das Standard-Cayley-Tripel (i, j, l) (siehe [13, 14.10 S. 282]), existiert genau ein Automorphismus $\gamma \in G_2$ mit $\gamma(a) = i$, $\gamma(b) = j$ und $\gamma(c) = l$.

Beweis von 2.2. (a) Daβ die Gruppe $G_2 = \operatorname{Aut} \mathbb{O}$ auch aus Automorphismen von $D^{\mathbb{O}}_{\alpha,\rho}$ besteht, wurde bereits festgestellt.

(b) Zum Nachweis der Eigenschaften eines topologischen Quasikörpers verwenden wir ein hinreichendes (und notwendiges) Kriterium aus [5, 2.4 S. 276] dafür, daβ eine stetige und linksdistributive Multiplikation auf $\mathbb{R}^n$ einen topologischen Quasikörper definiert. Es besteht aus den folgenden beiden Aussagen:

(E) Für eine gegen ∞ konvergente Folge von Elementen x_ν und $a \neq 0$ gilt auch

$$\lim(x_\nu \circ a) = \infty.$$

(R_l) $\quad x \circ a = y \circ a,\ a \neq 0 \ \Rightarrow\ x = y.$

Die in (E) beschriebene Situation kann man nun durch Anwendung geeigneter Automorphismen $\gamma_\nu \in G_2$ so modifizieren, daβ a in $\mathbb{C} \subseteq \mathbb{H}$ und die x_ν in $\mathbb{H}$ liegen (siehe 2.5); an der Frage der Konvergenz gegen ∞ ändert sich dabei nichts, da die Automorphismen von $\mathbb{O}$ normerhaltend sind. In der zu $\mathbb{H}$ gehörigen Unterstruktur $D^{\mathbb{H}}_{\alpha,\rho}$, für die in [7, 3.2] bereits verifiziert wurde, daβ es sich um einen topologischen Quasikörper handelt, gilt nun die Aussage (E); also gilt sie allgemein.

Zur Verifikation von (R_l) kann man ebenfalls vermöge eines geeigneten Automorphismus aus G_2 o.B.d.A. $a \in \mathbb{H}$ annehmen. Wir zerlegen nun Oktaven in Komponenten aus $\mathbb{H} = \operatorname{Spann}\{1, i, j, k\}$ und aus dem orthogonalen Komplement $\mathbb{H}^\perp = \operatorname{Spann}\{l, il, jl, kl\} \subseteq \operatorname{Pu} \mathbb{O}$ von $\mathbb{H}$ (bezüglich der Normform von $\mathbb{O}$):

$$x = x_1 + x_2 \quad \text{mit } x_1 \in \mathbb{H},\ x_2 \in \mathbb{H}^\perp$$

$$y = y_1 + y_2 \quad \text{mit } y_1 \in \mathbb{H},\ y_2 \in \mathbb{H}^\perp.$$

Wegen $\mathbb{H}^\perp \cdot \mathbb{H} \subseteq \mathbb{H}^\perp \subseteq \operatorname{Pu} \mathbb{O}$ und $a \in \mathbb{H}$ ist $x_2 \circ a = x_2 \cdot a \in \mathbb{H}^\perp$, wie man unmittelbar an der Definition von $\circ$ abliest, und entsprechend $y_2 \circ a = y_2 \cdot a \in \mathbb{H}^\perp$. Da $\mathbb{H}^\perp \subseteq \operatorname{Pu} \mathbb{O}$ nach 2.3 im Distributor von $D^{\mathbb{O}}_{\alpha,\rho}$ liegt, ist somit

$$(1) \qquad \begin{aligned} x \circ a &= x_1 \circ a + x_2 \circ a = x_1 \circ a + x_2 \cdot a \\ y \circ a &= y_1 \circ a + y_2 \circ a = y_1 \circ a + y_2 \cdot a, \end{aligned}$$

und dies ist wieder die Zerlegung in die Anteile aus $\mathbb{H}$ und $\mathbb{H}^{\perp}$. Aus $x \circ a = y \circ a$ folgt also $x_2 . a = y_2 . a$, woraus sich unmittelbar $x_2 = y_2$ ergibt, sowie $x_1 \circ a = y_1 \circ a$. Da sich die letzteren Produkte in der Unterstruktur $D^{\mathbb{H}}_{\alpha,\rho}$ befinden, von der bereits bekannt ist, daß sie einen Quasikörper bildet, so daß das in Rede stehende Kriterium in ihr gilt, folgt daraus auch $x_1 = y_1$, und (R_l) ist bewiesen.

(c) Die Multiplikation von $D^{\mathbb{O}}_{\alpha,\rho}$ ist genau dann beidseitig distributiv, wenn $\rho: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein additiver Homomorphismus und folglich (aus Stetigkeitsgründen) linear ist, wegen $\rho(1) = 1$ also genau für $\rho = \mathrm{id}$. Angesichts $(j \circ i) \circ i = -j$ und $j \circ (i \circ i) = -\alpha j$ ist die in einem Alternativkörper geltende Biassoziativität nur für $\alpha = 1$ gegeben.

2.6. HINWEIS. Bis auf Isomorphie kann man eine Beschreibung der Quasikörper $D^{\mathbb{O}}_{\alpha,\rho}$ mit Hilfe der Mutationen von $\mathbb{O}$ aus 1.1 erhalten. Für $1/2 \neq t \in \mathbb{R}$ definiert man dazu eine Multiplikation $\underset{(t)}{*}$ auf $\mathbb{O}$ durch

$$a \underset{(t)}{*} x = \operatorname{Re} a \cdot \operatorname{Re} x + \rho(\operatorname{Re} a) \cdot \operatorname{Pu} x + (\operatorname{Pu} a) \underset{(t)}{\circ} x,$$

wobei $\underset{(t)}{\circ}$ die in 1.1 beschriebene Mutation der Oktavenmultiplikation ist. Man verifiziert nun, daß die algebraische Struktur $(\mathbb{O}, +, \underset{(t)}{*})$ und der Quasikörper $D^{\mathbb{O}}_{\alpha,\rho}$ für

$$\alpha = (2t - 1)^{-2}, \text{ also } t = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}$$

isomorph sind, und zwar vermöge des Isomorphismus

$$\mathbb{O} \to \mathbb{O} : x \mapsto \operatorname{Re} x + (2t - 1) \cdot \operatorname{Pu} x.$$

Für $\rho = \mathrm{id}$ ist im übrigen $a \underset{(t)}{*} x = a \underset{(t)}{\circ} x$, da $\mathbb{R}$ im Zentrum von $\mathbb{O}$ liegt, so daß also die Divisionsalgebra $D^{\mathbb{O}}_{\alpha,\mathrm{id}}$ und die Mutation $\mathbb{O}_{(t)}$ aus 1.1 isomorph sind. Wir berechnen in $D^{\mathbb{O}}_{\alpha,\mathrm{id}}$ das Produkt $a \circ x$ noch in zwei speziellen Fällen: Sind a, x beides reine Oktaven und orthogonal zueinander, so ist das Oktavenprodukt ax ebenfalls rein und daher $a \circ x = ax$; ist x eine reine Oktav der Länge 1, also $x \cdot x = -1$, so ist $x \circ x = -\alpha \cdot 1$. In dieser Beschreibung erkennt man, daß die Divisionsalgebren $D^{\mathbb{O}}_{\alpha,\mathrm{id}}$ die in [3, 4.1, 4.4 S. 214ff.] angegebene Algebrenfamilie bilden; dort wurde bewiesen, daß es sich genau um die achtdimensionalen reellen Divisionsalgebren mit Automorphismengruppe G_2 handelt.

3. Die G_2-Ebenen mit grosser Kollineationsgruppe

Nun soll die angestrebte Klassifikation durchgeführt werden. Das Ergebnis ist

3.1. SATZ. *Die sechzehndimensionalen lokalkompakten Translationsebenen mit* $\dim \mathbb{G} \geqslant 38$, *in denen* $\mathbb{G}_o$ *eine zu* G_2 *isomorphe Untergruppe besitzt, aber keine zu* $\mathrm{Spin}_7(\mathbb{R})$ *lokal isomorphe Untergruppe, sind genau die Ebenen, die sich über den Quasikörpern* $D^{\mathbb{O}}_{\alpha,\rho}$ *aus* 2.1 *und* 2.2 *mit* $\alpha \neq 1$ *oder* $\rho \neq \mathrm{id}$ *koordinatisieren lassen.*

In diesen Ebenen ist der uneigentliche Punkt s der zweiten Koordinatenachse S der einzige Fixpunkt von $\mathbb{G}$. *Beschreibt man die Punktmenge der affinen Ebene in affinen Koordinaten als* $D^{\mathbb{O}}_{\alpha,\rho} \times D^{\mathbb{O}}_{\alpha,\rho} = \mathbb{O} \times \mathbb{O} = \mathbb{R}^8 \times \mathbb{R}^8 = \mathbb{R}^{16}$, *so ist*

$$\Sigma = \{(x, y) \mapsto (\gamma(x), \gamma(y));\ \gamma \in \mathrm{G}_2\}$$

eine zu G_2 *isomorphe* 14-*dimensionale Kollineationsgruppe im Stabilisator* $\mathbb{G}_o$ *des Koordinatenursprungs* $o = (0, 0)$, *und*

$$\mathrm{N} = \{(x, y) \mapsto (x, y + p \circ x);\ p \in \mathrm{Pu}\,\mathbb{O}\} \cong \mathbb{R}^7$$

ist ein Normalteiler von $\mathbb{G}_o$, *der aus Scherungen mit Achse S besteht. Zusammen mit der Translationsgruppe* $\mathbb{R}^{16}$ *und der Gruppe der positiven reellen Streckungen mit Zentrum o und der uneigentlichen Geraden* L_∞ *als Achse*

$$(\mathbb{G}_{[o, L_\infty]})^1 = \{(x, y) \mapsto (rx, ry);\ 0 < r \in \mathbb{R}\}$$

erzeugen Σ *und* N *eine* 38-*dimensionale zusammenhängende Gruppe von Kollineationen.*

Für die Dimension der vollen Kollineationsgruppe $\mathbb{G}$ *und die Zusammenhangskomponente* Γ_o *von* $\mathbb{G}_o$ *bestehen folgende Möglichkeiten:*

(i) $\dim \mathbb{G} = 38$. *Es ist dann*

$$\Gamma_o = \Sigma \cdot \mathrm{N} \cdot (\mathbb{G}_{[o, L_\infty]})^1.$$

Dies ist genau dann der Fall, wenn der Homöomorphismus $\rho: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *nicht aus zwei linearen Stücken zusammengesetzt ist.*

(ii) $\dim \mathbb{G} = 39$. *Bis auf Isomorphie kann dann angenommen werden, daß* ρ *die Gestalt*

$$\rho(r) = \begin{cases} r & \textit{für } r \geqslant 0 \\ \kappa \cdot r & \textit{für } r \leqslant 0 \end{cases}$$

mit einer Knickkonstanten

$$\kappa > 1$$

hat. Zusätzlich zu den bereits geschilderten Gruppen von Kollineationen hat man in diesen Ebenen eine eindimensionale Gruppe von Achsenstreckungen mit Achse S und dem uneigentlichen Punkt w der ersten Koordinatenachse W als Zentrum, nämlich

$$\Gamma_{[w,S]} = \{(x, y) \mapsto (tx, y);\ 0 < t \in \mathbb{R}\},$$

und es ist

$$\Gamma_o = \Sigma \cdot \mathrm{N} \cdot \Gamma_{[w,S]} \cdot (\mathbb{G}_{[o,L_\infty]})^1.$$

(iii) $\dim \mathbb{G} = 40$. *Die Ebene hat dann den Lenz-Typ V, d.h. die Gruppe* $\Gamma_{[s,S]}$ *der Scherungen mit Achse S ist transitiv auf* $L_\infty \backslash \{s\}$ *und 8-dimensional (insbesondere also echt größer als* N*), und*

$$\Gamma_o = \Sigma \cdot \Gamma_{[s,S]} \cdot \Gamma_{[w,S]} \cdot (\mathbb{G}_{[o,L_\infty]})^1.$$

Dieser Fall tritt genau dann ein, wenn $D^{\mathbb{O}}_{\alpha,\rho}$ *eine nichtalternative Divisionsalgebra, d.h.* $\rho = \mathrm{id}$ *und* $\alpha \neq 1$ *ist. (Er läßt sich als Grenzfall der Ebenen aus* (ii) *auffassen, indem man dort* $\kappa = 1$ *zuläßt.)*

3.2. BEMERKUNGEN. (1) Sechzehndimensionale lokalkompakte Translationsebenen, in denen $\mathbb{G}_o$ nicht nur eine zu G_2 isomorphe, sondern sogar eine zu $\mathrm{Spin}_7(\mathbb{R})$ lokal isomorphe Untergruppe besitzt, bleiben im vorstehenden Satz außer Betracht. Sie wurden jedoch in [8] explizit bestimmt; abgesehen von der klassischen Oktavenebene hat ihre Kollineationsgruppe Dimension 38 oder 39. Damit sind alle sechzehndimensionalen lokalkompakten Translationsebenen mit $\dim \mathbb{G} \geqslant 38$ und einer zu G_2 isomorphen Untergruppe in $\mathbb{G}_o$ bekannt.

(2) Man kann zeigen, daß die Ebenen, die sich in den Situationen (ii) und (iii) von Satz 3.1 ergeben, für verschiedene Parameterwerte $\alpha > 0$, $\kappa \geqslant 1$ untereinander nicht isomorph sind.

Vor dem Beweis von Satz 3.1 soll noch gezeigt werden, wie sich aus ihm als Spezialfall der Satz 1.2 ergibt:

3.3. *Beweis des Satzes* 1.2. In einer sechzehndimensionalen lokalkompakten Translationsebene mit $\dim \mathbb{G} = 40$ enthält $\mathbb{G}_o$ nach [10, §5 Korollar S. 297 in Verbindung mit Satz 2.2 S. 271] eine zu G_2 isomorphe Untergruppe, aber keine zu $\mathrm{Spin}_7(\mathbb{R})$ lokal isomorphe Untergruppe; damit sind die Voraussetzungen von Satz 3.1 gegeben. Es trifft dann Fall (iii) zu, so daß also die Ebenen über den Divisionsalgebren $D^{\mathbb{O}}_{\alpha,\mathrm{id}}$ ($\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$) vorliegen, die ihrerseits gemäß 2.6 isomorph zu den Mutationen $\mathbb{O}_{(t)}$ von $\mathbb{O}$ aus 1.1 mit $t > 0$, $t \notin \{1/2, 1\}$ sind.

3.4. *Beweis des Satzes* 3.1.

(a) *Grundtatsachen* (vgl. z.B. [2, §3], [9, 1.4 S. 321], [10, 1.2 S. 266]). Der affine Punktraum $\mathbb{A}$ einer sechzehndimensionalen lokalkompakten Translationsebene läßt sich so mit dem Vektorraum $\mathbb{R}^{16}$ identifizieren, daß die Translationen genau die Vektorraumtranslationen sind. Die Geraden durch den Nullvektor o sind dann Untervektorräume der halben Dimension; die übrigen affinen Geraden ergeben sich als Bilder der Geraden durch o unter den Translationen.

Die Gruppe $\mathbb{G}$ der affinen Kollineationen ist das semidirekte Produkt der Translationsgruppe mit dem Stabilisator $\mathbb{G}_o$; alle Stabilisatoren affiner Punkte sind untereinander konjugiert. Die Streckungen des Vektorraums $\mathbb{A} = \mathbb{R}^{16}$ mit reellen Skalaren $\neq 0$ sind offensichtlich Kollineationen aus $\mathbb{G}_o$, die jede Gerade durch o festlassen, also Elemente der Gruppe $\mathbb{G}_{[o,L_\infty]}$ der zentralen Kollineationen mit o als Zentrum und der uneigentlichen Geraden L_∞ als Achse. Es ist eine Besonderheit sechzehndimensionaler lokalkompakter Translationsebenen (vgl. [9, 1.4b S. 321]), daß $\mathbb{G}_{[o,L_\infty]}$ nie größer wird, also genau aus den reellen skalaren Streckungen besteht. Eine Folge davon ist, daß die Kollineationen aus $\mathbb{G}_o$ stets $\mathbb{R}$-lineare Transformationen von $\mathbb{A} = \mathbb{R}^{16}$ sind; $\mathbb{G}_o$ ist mithin eine abgeschlossene Untergruppe von $\mathrm{GL}_{16}(\mathbb{R})$ und also eine Liegruppe. Sie läßt sich zerlegen als fastdirektes Produkt der Streckungsgruppe $\mathbb{G}_{[o,L_\infty]}$ mit der Untergruppe

$$\mathrm{S}\mathbb{G}_o = \{\gamma \in \mathbb{G}_o;\ \det\gamma = \pm 1\}.$$

Die Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{G}_o$ und $S\mathbb{G}_o$ seien im folgenden mit

$$\Gamma_o := (\mathbb{G}_o)^1 \text{ und } \Delta := (S\mathbb{G}_o)^1$$

bezeichnet. Es ist dann Γ_o Produkt von Δ mit der Gruppe $(\mathbb{G}_{[o,L_\infty]})^1$ der positiven reellen Streckungen, also

$$\dim \mathbb{G}_o = \dim \Gamma_o = \dim \Delta + 1, \tag{1}$$

und angesichts der 16-dimensionalen Translationsgruppe

$$\begin{aligned} \dim \mathbb{G} &= \dim \mathbb{G}_o + 16 \\ &= \dim \Delta + 17. \end{aligned} \tag{2}$$

(b) Nach Voraussetzung ist nun $\dim \mathbb{G} \geqslant 38$, also $\dim \Delta \geqslant 21$, und Δ enthält eine zu G_2 isomorphe Untergruppe Σ, aber keine zu $\mathrm{Spin}_7(\mathbb{R})$ lokal isomorphe Untergruppe. Diese Situation wurde in [10, §2] genau analysiert: Nach [10, Satz 2.2] hat Δ einen Fixpunkt s auf der uneigentlichen Geraden L_∞ und enthält eine zu $\mathbb{R}^7$ isomorphe analytische Untergruppe N, die von Σ normalisiert, aber nicht zentralisiert wird und die frei auf $L_\infty \setminus \{s\}$ wirkt; für die Dimension von Δ gilt

$$21 \leqslant \dim \Delta \leqslant 23.$$

Da s der einzige Fixpunkt des Normalteilers Δ von $\mathbb{G}_o$ ist, bleibt s unter allen Kollineationen fest. Im weiteren wird unter anderem gezeigt werden, daß N aus Scherungen besteht (deren Achse die Gerade S durch o in Richtung s ist).

Im Beweis des eben zitierten Satzes wurde N als Untergruppe des Radikals von Δ konstruiert (siehe [10, 2.2, Beweisschritt (d) S. 275ff.]); diesen Umstand wollen wir uns ebenfalls zunutze machen. Wegen $N \cong \mathbb{R}^7$ und $\dim \Delta \leqslant 23$ ist nämlich infolgedessen ein halbeinfacher Kopf von Δ höchstens 16-dimensional. Da $\Sigma \cong G_2$ eine 14-dimensionale einfache Gruppe ist, und da die einfachen Liegruppen der Dimension 15 und 16 keine zu G_2 isomorphe Untergruppe haben, hat also der halbeinfache Kopf von Δ einen einfachen Faktor G_2 und wird von diesem ganz ausgeschöpft, denn ein weiterer einfacher Faktor wäre mindestens 3-dimensional. Also ist Σ ein Levikomplement in Δ und in $\Gamma_o = \Delta \cdot (\mathbb{G}_{[o,L_\infty]})^1$; und für das Radikal A von $\mathbb{G}_o$, d.h. den größten zusammenhängenden auflösbaren Normalteiler, gilt

$$\Gamma_o = \Sigma \cdot A.$$

Wegen $\dim \Delta \leqslant 23$ ist $\dim \Gamma_o \leqslant 24$, also $\dim A \leqslant 10$. Da $N \cong \mathbb{R}^7$ in A enthalten ist und von Σ normalisiert wird, ist die Liealgebra $\mathscr{A}$ von A Summe der Liealgebra $\mathscr{N}$ von N mit einem höchstens dreidimensionalen Unterraum $\mathscr{U}$ von $\mathscr{A}$, der unter der adjungierten Darstellung von Σ in der Liealgebra von Γ_o invariant ist. Nun hat $\Sigma \cong G_2$ keine nichttrivialen Darstellungen der Dimension $\leqslant 6$, also ist $\mathscr{N}$ irreduzibel unter der adjungierten Darstellung von Σ, und $\mathscr{U}$ besteht aus Fixelementen dieser Darstellung, ist also die Liealgebra der Zusammenhangskomponente Z des Zentralisators von Σ. Die Wirkung von Σ auf $\mathscr{N}$ ist äquivalent zur Wirkung von G_2 als Automorphismengruppe der Oktavenalgebra $\mathbb{O}$ auf dem Raum $\mathrm{Pu}\,\mathbb{O} \cong \mathbb{R}^7$ der reinen Oktaven, da G_2 nur diese eine 7-dimensionale irreduzible Darstellung hat. Insbesondere liegt jedes Element von $\mathscr{N}\setminus\{0\}$ im Eigenraum zum Eigenwert -1 eines geeigneten Elements von Σ; damit sieht man noch, daß $\mathscr{N}$ sogar ein Ideal von $\mathscr{A}$ und also N normal in Γ_o ist. Insgesamt haben wir die Zerlegungen

$$A = N \cdot Z$$

$$\Gamma_o = \Sigma \cdot N \cdot Z,$$

und unsere Dimensionsabschätzungen resultieren in

$$\dim Z \leqslant 3.$$

(c) Wir beschreiben nun die Wirkung von Σ auf der affinen Punktmenge $\mathbb{A} = \mathbb{R}^{16}$ und identifizieren diese hierzu in geeigneter Weise mit $\mathbb{O} \times \mathbb{O}$. Die affine Gerade $S \cong \mathbb{R}^8$ durch o mit dem uneigentlichen Punkt s ist invariant unter Σ. Nach [10, 2.1 S. 270] läßt sich S als $\mathbb{R}$-Vektorraum so mit $\mathbb{O}$ identifizieren, daß Σ auf S wie G_2 als Automorphismengruppe von $\mathbb{O}$ wirkt; dies ist ja bis auf Äquivalenz die einzige nichttriviale Darstellung von G_2 auf

$\mathbb{R}^8$. Ferner existieren, wie in [10, loc. cit.] ausgeführt, weitere Σ-invariante Geraden durch o. Sind W und E zwei solche, so können wir unter Wahrung der bereits vorgenommenen Identifikation von S mit $\mathbb{O}$ den affinen Punktraum $\mathbb{A}$ so mit $\mathbb{O} \times \mathbb{O}$ identifizieren, daß

$$S = \{0\} \times \mathbb{O},\ W = \mathbb{O} \times \{0\},\ E = \{(x, x);\ x \in \mathbb{O}\}.$$

Es ist dann $o = (0, 0)$. Wegen der Σ-Invarianz von S, W und E schreibt sich Σ in diesen Koordinaten aus $\mathbb{O}$, die im folgenden stets zugrundegelegt seien, als

$$\Sigma = \{(x, y) \mapsto (\gamma(x), \gamma(y));\ \gamma \in \mathrm{G}_2\}.$$

(d) Beschreibt man die Ebene bezüglich W und S als Koordinatenachsen und des Einheitspunkts $(1, 1) \in \mathbb{O} \times \mathbb{O}$ durch einen topologischen Quasikörper Q, so hat man damit schon eine Identifikation der additiven Gruppe von Q mit der von $\mathbb{O}$. Es wird zu untersuchen sein, wie sich die Multiplikation von Q in diesen Koordinaten aus $\mathbb{O}$ ausdrückt.

Der Stabilisator des Koordinatenvierecks $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$ in $\mathbb{G}_o$ besteht ganz allgemein genau aus den Abbildungen $(x, y) \mapsto (\varphi(x), \varphi(y))$, wobei φ die Automorphismen des Quasikörpers Q durchläuft. Die gegebene Beschreibung von Σ zeigt, daß also G_2 aus Automorphismen auch von Q besteht. Nach dem Hauptsatz 1.2 von [3] kann nun ein achtdimensionaler lokalkompakter Quasikörper keine größere Automorphismengruppe als G_2 haben; also ist der Stabilisator des Koordinatenvierecks gleich Σ.

(e) Nun soll gezeigt werden, daß die Teilmenge $\mathbb{H} \times \mathbb{H}$ von $\mathbb{O} \times \mathbb{O} = \mathbb{A}$ die Punktmenge einer Baer-Unterebene $\mathscr{B}$ ist.

Für ein Element $l \in \mathbb{O}$, das bezüglich der Oktavennorm senkrecht auf dem Unterkörper $\mathbb{H} \subseteq \mathbb{O}$ steht und das die Länge 1 hat, also $l^2 = -1$ erfüllt, ist bekanntlich $\mathbb{O}$ die direkte Summe

$$\mathbb{O} = \mathbb{H} + \mathbb{H} \cdot l,$$

und die Multiplikation von $\mathbb{O}$ läßt sich durch die von $\mathbb{H}$ folgendermaßen beschreiben: Für $c, d, u, v \in \mathbb{H}$ ist

$$(c + dl)(u + vl) = (cu - \bar{v}d) + (d\bar{u} + vc)l.$$

Damit verifiziert man unmittelbar, daß für $a \in \mathbb{H}$ mit $|a| = 1$, d.h. $\bar{a} = a^{-1}$, die Abbildung

$$\lambda_a : \mathbb{O} \to \mathbb{O} : u + vl \mapsto aua^{-1} + (va^{-1})l \quad (u, v \in \mathbb{H})$$

ein Automorphismus von $\mathbb{O}$, also $\lambda_a \in \mathrm{G}_2$ ist. Diese Automorphismen bilden eine Untergruppe

$$\Lambda = \{\lambda_a;\ a \in \mathbb{H},\ |a| = 1\}$$

von G_2, die die Involution

$$\lambda_{-1}: \mathbb{O} \to \mathbb{O} : u + vl \mapsto u - vl$$

im Zentrum enthält. Entsprechend der Beschreibung der Kollineationsgruppe $\Sigma \cong G_2$ hat man damit die involutorische Kollineation

$$\iota: \mathbb{O} \times \mathbb{O} \to \mathbb{O} \times \mathbb{O} : (x, y) \mapsto (\lambda_{-1}(x), \lambda_{-1}(y)),$$

sowie eine ι zentralisierende Untergruppe

$$\Phi = \{(x, y) \mapsto (\lambda_a(x), \lambda_a(y));\ a \in \mathbb{H}, |a| = 1\}$$

von Σ.

Die Fixelemente des Automorphismus λ_{-1} von $\mathbb{O}$ bilden offensichtlich gerade den Unterkörper $\mathbb{H}$; die Menge der Fixpunkte der involutorischen Kollineation ι ist also $\mathbb{H} \times \mathbb{H}$. Da ι das Koordinatenviereck festläßt, ist ι keine Zentralkollineation, sondern eine Baer-Involution, und ihre Fixpunktmenge $\mathbb{H} \times \mathbb{H}$ bildet die Punktmenge einer Baer-Unterebene $\mathscr{B}$ ([12, IV §3 S. 91ff.]).

Der Unterkörper $\mathbb{H}$ ist invariant unter Λ, und Λ induziert auf ihm die Gruppe der (inneren) Automorphismen

$$\mathbb{H} \to \mathbb{H} : u \mapsto aua^{-1};$$

sie läßt den Raum $\operatorname{Pu} \mathbb{H} \cong \mathbb{R}^3$ invariant und wirkt auf ihm als $SO_3(\mathbb{R})$ (siehe etwa [13, S. 179ff.]). Die entsprechende Untergruppe Φ von Σ läßt die Baer-Unterebene $\mathbb{H} \times \mathbb{H}$ invariant und induziert auf ihr die zu $SO_3(\mathbb{R})$ isomorphe Kollineationsgruppe

$$\Phi|_{\mathbb{H} \times \mathbb{H}} = \{\mathbb{H} \times \mathbb{H} \to \mathbb{H} \times \mathbb{H} : (u, v) \mapsto (aua^{-1}, ava^{-1});\quad a \in \mathbb{H}, |a| = 1\}.$$

Da Σ durch Konjugation auf $N \cong \mathbb{R}^7$ wie G_2 auf $\operatorname{Pu} \mathbb{O}$ operiert, wirkt ι auf N wie λ_{-1} auf $\operatorname{Pu} \mathbb{O}$, und der Zentralisator M von ι in N entspricht dem Fixraum $\mathbb{H} \cap \operatorname{Pu} \mathbb{O} = \operatorname{Pu} \mathbb{H}$ von λ_{-1} in $\operatorname{Pu} \mathbb{O}$, ist also eine 3-dimensionale Vektorgruppe. Sie wird von der ι zentralisierenden Untergruppe Φ normalisiert, und Φ wirkt auf ihr durch Konjugation wie Λ auf $\operatorname{Pu} \mathbb{H}$, also als $SO_3(\mathbb{R})$.

Neben M enthält der Zentralisator von ι noch die ganz Σ zentralisierende Gruppe Z und insgesamt die Gruppe

$$\Phi \cdot M \cdot Z;$$

diese läßt somit die Menge $\mathbb{H} \times \mathbb{H}$ der Fixpunkte von ι invariant. Das Produkt $M \cdot Z$ wirkt dabei treu auf $\mathbb{H} \times \mathbb{H}$: der Kern der Wirkung auf $\mathbb{H} \times \mathbb{H}$ läßt nämlich das Koordinatenviereck $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$ fest und liegt daher nach (d) in Σ; aber $\Sigma \cap A = \{\mathrm{id}\}$, da $\Sigma \cong G_2$ zentrumsfrei ist. Mit der

Kollineationsgruppe, die von $\Phi \cdot \mathrm{M} \cdot \mathrm{Z}$ auf der achtdimensionalen Baer-Unterebene $\mathscr{B}$ induziert wird, haben wir damit eine Situation, die in [6] und [7] genau analysiert worden ist.

(f) Zunächst wirkt M auf $\mathscr{B}$ nach [6, §4 Satz S. 95] als Gruppe von Scherungen mit Achse $\{0\} \times \mathbb{H}$. Daraus könnte man mit Hilfe der Transitivitätseigenschaften von G_2 leicht direkt folgern, daß M aus Scherungen auch der ganzen Ebene besteht, und dann dasselbe für N schließen; dies spielt jedoch zunächst für den weiteren Beweisgang keine Rolle und wird sich noch auf andere Weise ergeben.

Jedenfalls liegt in der Unterebene $\mathscr{B}$ mit der dreidimensionalen Scherungsgruppe M und der zu $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ isomorphen Kollineationsgruppe, die von Φ auf $\mathscr{B}$ induziert wird, die Situation des Klassifikationssatzes 3.3 aus [7, S. 35] vor, in dem alle solchen achtdimensionalen Translationsebenen bestimmt werden. Es wird dort die Multiplikation $\circ$ eines koordinatisierenden Quasikörpers aufgestellt, und zwar genau in solchen Koordinaten aus $\mathbb{H}$, wie wir sie in der Punktmenge der Unterebene $\mathscr{B}$ bereits vorliegen haben. Bis auf eine allfällige Modifikation dieser Koordinaten durch geeignete reelle Streckung der reinen Anteile, die wir schadlos vornehmen können, hat diese Multiplikation die Gestalt

$$c \circ u = \operatorname{Re} c \cdot \operatorname{Re} u + \rho(\mathrm{R}\, c) \cdot \operatorname{Pu} u +$$
$$+ \alpha \cdot \operatorname{Re}((\operatorname{Pu} c) \cdot u) + \operatorname{Pu}((\operatorname{Pu} c) \cdot u) \quad \text{für } c, u \in \mathbb{H},$$

mit einer Konstanten $\alpha > 0$ und einem Homöomorphismus $\rho: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\rho(0) = 0$ und $\rho(1) = 1$, wobei $\cdot$ die klassische Quaternionenmultiplikation bezeichnet (siehe [7, S. 40]). Für den Quasikörper $Q \mathrel{\hat{=}} \mathbb{O}$, der die gesamte Ebene koordinatisiert, gibt dies die Multiplikation zunächst in demjenigen Unterquasikörper an, der $\mathbb{H} \subseteq \mathbb{O}$ entspricht und der die Unterebene $\mathscr{B}$ koordinatisiert. Nun lassen sich aber nach 2.5 zwei beliebige Oktaven durch ein geeignetes Element von G_2 in Elemente von $\mathbb{H} \subseteq \mathbb{O}$ überführen, und die Elemente von G_2 sind Automorphismen sowohl der klassischen Oktavenmultiplikation als auch, wie in (d) ausgeführt, des Quasikörpers Q. Da sie als Automorphismen von $\mathbb{O}$ die Zerlegung in Realteil und reinen Teil respektieren, ergibt sich damit, daß die angegebene Beschreibung der Quasikörpermultiplikation für beliebige Elemente c, u aus ganz $Q \mathrel{\hat{=}} \mathbb{O}$ gilt. Somit ist Q der in 2.1 eingeführte Quasikörper $D^{\mathbb{O}}_{\alpha,\rho}$.

(g) Wir verifizieren nun die Angaben zur Kollineationsgruppe der Ebenen über den Quasikörpern $D^{\mathbb{O}}_{\alpha,\rho}$. Für jeden dieser Quasikörper ist in der Tat die angegebene Gruppe $\Sigma \cong \mathrm{G}_2$ eine Gruppe von Kollineationen der zugehörigen Ebene, da G_2 aus Automorphismen von $D^{\mathbb{O}}_{\alpha,\rho}$ besteht (2.2). Anhand der

Tatsache, daß $\mathrm{Pu}\,\mathbb{O}$ im Distributor von $D^{\mathbb{O}}_{\alpha,\rho}$ liegt (2.3), bestätigt man ferner leicht, daß für $p \in \mathrm{Pu}\,\mathbb{O}$ die Transformation

$$\eta_p : (x, y) \mapsto (x, y + p \circ x)$$

eine Kollineation ist, genauer eine Scherung mit Achse $S = \{0\} \times \mathbb{O}$; sie führt die Gerade $\{(x, a \circ x); x \in \mathbb{O}\}$ der Steigung a durch den Koordinatenursprung $o = (0, 0)$ in die Ursprungsgerade der Steigung $a + p$ über. Diese Scherungen bilden eine zu $\mathbb{R}^7$ isomorphe Gruppe $\tilde{\mathrm{N}}$, die frei auf $L_\infty \backslash \{s\}$ wirkt und von Σ normalisiert wird, wobei Σ durch Konjugation auf ihr wie G_2 auf $\mathrm{Pu}\,\mathbb{O}$ wirkt, also insbesondere irreduzibel. Insgesamt enthält Γ_o die 22-dimensionale Gruppe $\Sigma \cdot \tilde{\mathrm{N}} \cdot (\mathbb{G}_{[o,L_\infty]})^1$, so daß für jeden der Quasikörper $D^{\mathbb{O}}_{\alpha,\rho}$ die zugehörige affine Ebene tatsächlich von der hier betrachteten Art ist.

$\tilde{\mathrm{N}}$ stimmt dabei mit der bisher abstrakt gewonnenen Gruppe $\mathrm{N} \cong \mathbb{R}^7$ überein: Da der uneigentliche Punkt s von S, wie in (b) erwähnt, unter ganz $\mathbb{G}_o$ festbleibt, ist die Gruppe $\Gamma_{[s,S]}$ aller Scherungen aus Γ_o mit Achse S ein Normalteiler von $\mathbb{G}_o$; sie enthält $\tilde{\mathrm{N}}$ und ist bekanntlich kommutativ (etwa nach dem dualen Satz zu [12, 4.14 S.97]; man beachte, daß durch Konjugation mit einer Translation Scherungen mit Zentrum s und Achse $\neq S$ produziert werden können). Also liegt ihre Zusammenhangskomponente und damit $\tilde{\mathrm{N}}$ im Radikal von Γ_o, das nach (b) höchstens 10-dimensional ist; folglich muß $\tilde{\mathrm{N}}$ mit N übereinstimmen, denn wegen der Irreduzibilität von $\tilde{\mathrm{N}}$ unter Σ ist im Radikal kein Platz für zwei solche unter Σ invariante Untergruppen.

Zur Bestimmung von $\Gamma_o = \Sigma \cdot \mathrm{N} \cdot \mathrm{Z}$ (siehe (b)) müssen jetzt nur noch die Möglichkeiten für die Zusammenhangskomponente Z des Zentralisators von Σ in Γ_o erörtert werden. Dies werden wir im wesentlichen wieder in der Unterebene $\mathscr{B}$ tun. Vorbereitend diskutieren wir die Bahnen von N und des Zentralisators M von ι in N auf L_∞, und zwar in Bezug auf Fixpunkte von Σ:

(h) Die zum Automorphismus $\gamma \in \mathrm{G}_2$ gehörige Kollineation aus Σ bildet die Ursprungsgerade der Steigung a in die Ursprungsgerade der Steigung $\gamma(a)$ ab; genau wenn a reell ist, hat man also eine unter ganz Σ invariante Ursprungsgerade, deren uneigentlicher Punkt dann ein Fixpunkt von Σ in $L_\infty \backslash \{s\}$ ist. Nach unseren Informationen zur Wirkung der Scherungen η_p, $p \in \mathrm{Pu}\,\mathbb{O}$ entspricht jede Bahn von N in $L_\infty \backslash \{s\}$ über die Steigungen der zugehörigen Ursprungsgeraden einer Nebenklasse der Form $a + \mathrm{Pu}\,\mathbb{O}$ in $\mathbb{O}$. Eine solche Nebenklasse enthält genau ein Element aus $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{O}$; also enthält jede N-Bahn in L_∞ genau einen Fixpunkt von Σ.

Wird dieser Fixpunkt von einer Scherung $\eta \in \mathrm{N}$ in einen Fixpunkt der Involution ι überführt, so genügt dies, um zu wissen, daß η dem Zentralisator M von ι in N angehört, da N frei auf $L_\infty \backslash \{s\}$ operiert. Also enthält auch jede

Bahn von M in der Menge der Fixpunkte von ι in L_∞, d.h. in der Menge $L_\infty^{\mathscr{B}}$ der uneigentlichen Punkte der Unterebene $\mathscr{B}$, einen Fixpunkt von Σ. Diese Information wird im weiteren benötigt.

(Man kann sie auch konkret gewinnen, indem man M explizit bestimmt als die Untergruppe der Scherungen η_p mit $p \in \mathbb{H} \cap \operatorname{Pu} \mathbb{O} = \operatorname{Pu} \mathbb{H}$ und beachtet, daß die uneigentlichen Punkte von $\mathscr{B}$ die uneigentlichen Punkte von Ursprungsgeraden mit Steigungen aus $\mathbb{H} \subseteq \mathbb{O}$ sind; die M-Bahnen in $L_\infty^{\mathscr{B}} \setminus \{s\}$ entsprechen also den Nebenklassen $a + \operatorname{Pu} \mathbb{H}$ in $\mathbb{H}$, von denen wieder jede ein Element aus $\mathbb{R}$ enthält.)

(i) Zur Bestimmung der Möglichkeiten für Z können wir nun nochmals auf die entsprechenden Aussagen aus [7] für die Unterebene $\mathscr{B}$ zurückgreifen. Die zusammenhängende Gruppe $\Phi \cdot \mathrm{M} \cdot \mathrm{Z}$ induziert nämlich wegen $\dim \Phi = 3 = \dim \mathrm{M}$ auf $\mathscr{B}$ eine o festlassende Kollineationsgruppe der Dimension $6 + \dim \mathrm{Z}$, so daß aufgrund der Aussagen aus [7] die Dimension von Z abgeschätzt werden kann. Nach [7, Satz 3.3 S. 35ff.] hat man folgende Unterscheidung in disjunkte Fälle:

FALL (i): Der Homöomorphismus ρ ist nicht aus zwei linearen Stücken zusammengesetzt. Dann ist $\dim \mathrm{Z} \leqslant 1$.

FALL (ii): Die uneigentlichen Punkte von $\mathscr{B}$, die Zentren einer nichttrivialen zusammenhängenden Gruppe von Streckungen mit Achse S sind, bilden eine Bahn $\mathfrak{X}$ unter der Scherungsgruppe $\mathrm{M} \cong \mathbb{R}^3$. In diesem Fall ist $\dim \mathrm{Z} \leqslant 2$.

FALL (iii): Es ist $\rho = \mathrm{id}$.

Wir diskutieren nun diese Fälle getrennt. Dabei ist zu beachten, daß auf jeden Fall

$$(\mathbb{G}_{[o,L_\infty]})^1 \subseteq \mathrm{Z}.$$

Im Fall (i) folgt aus Dimensionsgründen $\mathrm{Z} = (\mathbb{G}_{[o,L_\infty]})^1$. Die Situation ist dann wie in der Behauptung des Satzes 3.1 geschildert.

Im Fall (ii) enthält die ausgezeichnete Bahn $\mathfrak{X}$ der Scherungsgruppe M in L_∞ nach den Feststellungen in (h) genau einen Fixpunkt von Σ; die zugehörige Ursprungsgerade ist dann Σ-invariant. Wir können o.B.d.A. annehmen, daß diese Ursprungsgerade die waagrechte Koordinatenachse W unserer Koordinatisierung ist, da die Σ-Invarianz die einzige an diese Koordinatenachse gestellte Erfordernis war. Den Detailaussagen aus [7, Satz 3.3] kann man dann entnehmen, daß in dieser Situation der Homöomorphismus $\rho: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Form

$$\rho(r) = \begin{cases} r & \text{für } r \geqslant 0 \\ \kappa \cdot r & \text{für } r \leqslant 0 \end{cases}$$

mit einem Knickfaktor $\kappa > 0$, $\kappa \neq 1$ hat. Dies hat die Konsequenz, daß die Gruppe

$$\Xi = \{(x, y) \mapsto (tx, y);\ 0 < t \in \mathbb{R}\}$$

aus Kollineationen besteht, wie man leicht nachrechnen kann; offensichtlich handelt es sich um Streckungen mit Achse S und Zentrum w, und Ξ wird von Σ zentralisiert. Wegen $\dim \mathrm{Z} \leqslant 2$ ist folglich $\mathrm{Z} = \Xi \cdot (\mathbb{G}_{[o,L_\infty]})^1$ und also $\Gamma_o = \Sigma \cdot \mathrm{N} \cdot \Xi \cdot (\mathbb{G}_{[o,L_\infty]})^1$. Daran kann man noch direkt ablesen, daß Ξ mit der Gruppe $\Gamma_{[w,S]}$ *aller* in Γ_o enthaltenen Streckungen mit Achse S und Zentrum w übereinstimmt. Damit hat man die in der Behauptung des Satzes 3.1 geschilderte Situation. Der Knickfaktor kann schließlich auf $\kappa > 1$ normiert werden, da die Abbildung $(x, y) \mapsto (x, -\kappa \cdot \operatorname{Re} y - \operatorname{Pu} y)$ ein Isomorphismus der Ebene zum Knickfaktor κ auf die Ebene zum Knickfaktor $1/\kappa$ ist, wie man unmittelbar verifiziert.

Im Fall (iii) ist der koordinatisierende Quasikörper $D^{\mathbb{O}}_{\alpha,\mathrm{id}}$ eine Divisionsalgebra, und zwar mit $\alpha \neq 1$ (sonst läge die Ebene über der Oktavenalgebra vor). Die Gruppe $\Gamma_{[s,S]}$ der Scherungen mit Achse S enthält dann bekanntlich alle Transformationen der Form $(x, y) \mapsto (x, y + a \circ x)$ für $a \in D^{\mathbb{O}}_{\alpha,\mathrm{id}} \mathrel{\hat{=}} \mathbb{O}$ (und nicht nur für $a \in \operatorname{Pu} \mathbb{O}$, wie bei den Scherungen aus N); dies kann man leicht anhand der beiden Distributivgesetze, die dann für $\circ$ gelten, nachrechnen. Da diese Transformationen bereits eine auf $L_\infty \backslash \{s\}$ transitive Gruppe bilden, füllen sie andererseits die Scherungsgruppe $\Gamma_{[s,S]}$, die frei dort wirkt, ganz aus. Man hat damit einen 8-dimensionalen Normalteiler von Γ_o, der zusammen mit der Einparametergruppe Ξ von Streckungen, mit $(\mathbb{G}_{[o,L_\infty]})^1$ und mit der 14-dimensionalen Gruppe Σ die nach (b) höchstens 24-dimensionale Gruppe Γ_o bereits erzeugen muß. Insbesondere ist wieder $\Gamma_{[w,S]} = \Xi$. Damit ist auch hier die in Satz 3.1 behauptete Beschreibung erreicht.

LITERATUR

1. Grundhöfer, T. und Salzmann, H., 'Locally compact double loops and ternary fields', Chap. XI in: Chein, O., Pflugfelder, H. und Smith, J. H. D. (Hrsg.), *Quasigroups and Loops – Theory and Applications*, Heldermann, Berlin, erscheint demnächst.
2. Hähl, H., 'Automorphismengruppen von lokalkompakten zusammenhängenden Quasikörpern und Translationsebenen', *Geom. Dedicata* **4** (1975), 305–321.
3. Hähl, H., 'Automorphismengruppen achtdimensionaler lokalkompakter Quasikörper', *Math. Z.* **149** (1976), 203–225.
4. Hähl, H., 'Zur Klassifikation von 8- und 16-dimensionalen lokalkompakten Translationsebenen nach ihren Kollineationsgruppen', *Math. Z.* **159** (1978), 259–294.
5. Hähl, H., 'Kriterien für lokalkompakte topologische Quasikörper', *Arch. Math.* **38** (1982), 273–279.
6. Hähl, H., 'Zur Kollineationsgruppe von achtdimensionalen lokalkompakten Translationsebenen', *Abh. Math. Sem. Hamburg* **53** (1983), 84–102.

7. Hähl, H., 'Eine Klasse von achtdimensionalen lokalkompakten Translationsebenen mit großen Scherungsgruppen', *Mh. Math.* **97** (1984), 23–45.
8. Hähl, H., 'Sechzehndimensionale lokalkompakte Translationsebenen mit Spin(7) als Kollineationsgruppe', *Arch. Math.* **48** (1987), 267–276.
9. Hähl, H., '$SU_4(\mathbb{C})$ als Kollineationsgruppe in sechzehndimensionalen lokalkompakten Translationsebenen', *Geom. Dedicata* **23** (1987), 319–345.
10. Hähl, H., 'Die Oktavenebene als Translationsebene mit großer Kollineationsgruppe', *Mh. Math.* **106** (1988), 265–299.
11. Hubig, M., 'Sechzehndimensionale kompakte projektive Ebenen mit großer Automorphismengruppe', Dissertation Tübingen, 1990.
12. Hughes, D. R. and Piper, F. C., *Projective Planes*, Springer, New York, Heidelberg, Berlin, 1973.
13. Porteous, I. R., *Topological Geometry*, 2. Auflage, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1981.
14. Salzmann, H., 'Compact 16-dimensional projective planes with large collineation groups', *Math. Ann.* **261** (1982), 447–454.
15. Salzmann, H., 'Compact 16-dimensional projective planes with large collineation groups. II', *Mh. Math.* **95** (1983), 311–319.
16. Salzmann, H., 'Compact 16-dimensional projective planes with large collineation groups. III', *Math. Z.* **185** (1984), 185–190.
17. Salzmann, H., 'Compact 16-dimensional projective planes with large collineation groups. IV', *Canad. J. Math.* **39** (1987), 908–919.

Anschrift des Verfassers:

Hermann Hähl,
Mathematisches Seminar
der Universität Kiel,
Ludewig-Meyn-Str. 4,
D-2300 Kiel 1,
Bundesrepublik Deutschland.

(Eingegangen am 26. Oktober 1989)