Achtdimensionale lokalkompakte Translationsebenen mit großen Streckungsgruppen

Von

Hermann Hähl

1. Einleitung.

1.1. Ziel dieser Note ist die Bestimmung und Beschreibung aller acht dimensionalen lokalkompakten topologischen Translationsebenen, welche zu zwei nichtparallelen affinen Achsen eine große (mindestens 3-dimensionale) Gruppe von affinen Achsenstreckungen einheitlicher Richtung zulassen. Diese Ebenen sind gekennzeichnet durch die Existenz einer zu $\mathrm{Spin}(4) = \mathrm{Spin}(3)^2$ isomorphen Gruppe affiner stetiger Kollineationen, die auf der uneigentlichen Geraden als $\mathrm{SO}_4(\mathbb{R})$ operiert. Sie werden deshalb als Spin(4)-*Ebenen* bezeichnet.

Die Spin(4)-Ebenen sind auch wichtig im Rahmen der Klassifikation aller achtdimensionalen lokalkompakten Translationsebenen mit großen Kollineationsgruppen, die in [4] begonnen wurde. Dort ([4: 1.6]) wurde dieses Klassifikationsprogramm in einzelne Fälle aufgeschlüsselt. Eine der demnach zu betrachtenden Situationen (Fall (iii) von [4: 1.6]) ist beschrieben durch die Existenz einer kompakten zusammenhängenden (affinen) Kollineationsgruppe K, die auf der uneigentlichen Geraden L_∞ fast effektiv als $\mathrm{SO}_4(\mathbb{R})$ operiert. K ist dann entweder selbst isomorph zu $\mathrm{SO}_4(\mathbb{R})$, oder aber zur universellen Überlagerungsgruppe Spin(4) von $\mathrm{SO}_4(\mathbb{R})$, da $\mathrm{SO}_4(\mathbb{R})$ nur diese beiden Überlagerungsgruppen hat. Die Untersuchung des Falls $K \cong \mathrm{SO}_4(\mathbb{R})$ wird an anderer Stelle erfolgen; der Fall $K \cong \mathrm{Spin}(4)$ jedoch stellt gerade die in der vorliegenden Arbeit behandelte Situation dar.

In § 2 wird zunächst der Aspekt, daß diese Ebenen genau die achtdimensionalen lokalkompakten Translationsebenen mit mehreren großen Streckungsgruppen sind, näher erläutert. — In § 3 werden dann die Spin(4)-Ebenen im einzelnen bestimmt (3.2). Wichtige Sonderfälle sind die Ebenen über den vierdimensionalen lokalkompakten Fastkörpern von Kalscheuer-Tits ([5], [9]); die hier betrachtete Ebenenfamilie wird sich denn auch als eine natürliche Erweiterung des Bereichs dieser Fastkörperebenen erweisen (3.3). Damit ergibt sich unter anderem aus der expliziten Beschreibung der Spin(4)-Ebenen eine neue Variante der Bestimmung aller lokalkompakten zusammenhängenden topologischen Fastkörper. — In § 4 werden schließlich Kollineationen und Isomorphismen von Spin(4)-Ebenen untersucht. Die Fastkörperebenen zeichnen sich dabei unter den Spin(4)-Ebenen durch ihre besonders große Kollineationsgruppe aus. An den erzielten Ergebnissen (insbesondere 4.2) läßt sich etwa sofort ablesen, daß genau diejenigen Spin(4)-Ebenen Fastkörperebenen sind, deren Kollineationsgruppe mindestens 17-dimensional ist. Dies ist von Bedeutung für das erwähnte Klassifikationsprogramm, das unter anderem die explizite Bestimmung aller achtdimensionalen lokalkompakten Translationsebenen mit mindestens 17-dimensionaler Kollineationsgruppe zum Ziel hat.

Der Verfasser dankt der Deutschen Forschungsgemeinschaft für das Stipendium, zu dessen Ergebnissen diese Arbeit gehört. Sie ist die abgerundete Version eines Abschnitts aus der Habilitationsschrift des Verfassers.

1.2. Grundtatsachen. Im folgenden betrachten wir eine (zunächst beliebige) achtdimensionale lokalkompakte topologische Translationsebene; wir repräsentieren sie als affine Ebene mit der Translationsachse als uneigentlicher Geraden L_∞. Der Raum A der affinen Punkte läßt sich so mit dem $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^8$ identifizieren, daß die Gruppe der Translationen mit Achse L_∞ aus den Vektorraumtranslationen besteht (für diese und die folgenden Grundtatsachen siehe [1], § 3). Die affinen Geraden durch den Ursprung $o \in \mathbb{R}^8 = A$ sind dann 4-dimensionale Untervektorräume; die uneigentliche Gerade L_∞ als projektive Gerade ist homöomorph zur 4-Sphäre. Die Gruppe $\mathbb{G}^c$ der stetigen affinen Kollineationen ist das semidirekte Produkt der Translationsgruppe mit der Untergruppe $\mathbb{G}_o^c$ der den Ursprung festlassenden Elemente; diese sind $\mathbb{R}$-lineare Automorphismen.

1.3. Achsenstandgruppen. Seien W und S zwei nichtparallele Geraden, die o.B.d.A. durch den Ursprung o gehen mögen. Nach dem sogenannten *Lemma über Achsenstandgruppen* [3: 2.1] hat die Gruppe $\mathbb{G}_{W,S}^c$ der stetigen affinen Kollineationen, die W und S invariant lassen, eine größte kompakte Untergruppe M. Diese besteht aus denjenigen Kollineationen, deren Einschränkungen auf W und S als $\mathbb{R}$-lineare Abbildungen Determinante ± 1 haben. Das Produkt von M und der Gruppe aller Streckungen mit Achse L_∞ und Zentrum o hat Kodimension höchstens 1 in $\mathbb{G}_{W,S}^c$.

2. Große Streckungsgruppen.

2.1. Betrachten wir nun die Gruppe $\mathbb{G}_{[S,w]}$ aller affinen Streckungen mit Achse S, deren Zentrum der uneigentliche Punkt w der Geraden W ist. Durch Einschränkung induziert diese Streckungsgruppe eine Gruppe $\mathbb{R}$-linearer Transformationen von $W = \mathbb{R}^4$, die frei auf $W \setminus \{o\}$ wirkt. Die Elemente mit Determinante ± 1 bilden entsprechend dem Lemma über Achsenstandgruppen die größte kompakte Untergruppe von $\mathbb{G}_{[S,w]}$; wegen der Freiheit der Wirkung ist die Zusammenhangskomponente $\Sigma_{[S,w]}$ dieser größten kompakten Untergruppe isomorph zu einer Untergruppe der Gruppe $\mathrm{Spin}(3) \cong \mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$ der Quaternionen der Norm 1. Falls nichttrivial, ist also $\Sigma_{[S,w]}$ ein eindimensionaler Torus oder isomorph zu Spin(3). Da nach dem Lemma über Achsenstandgruppen die Kodimension von $\Sigma_{[S,w]}$ in $\mathbb{G}_{[S,w]}$ höchstens 1 ist, hat man somit die Implikation

$$\dim \mathbb{G}_{[S,w]} \geqq 3 \Rightarrow \Sigma_{[S,w]} \cong \mathrm{Spin}(3).$$

Eine nach der Dimension große Streckungsgruppe enthält also stets eine zu Spin(3) isomorphe Untergruppe.

2.2. Falls diese Situation $\Sigma_{[S,w]} \cong \mathrm{Spin}(3)$ vorliegt, hat man nun über die Bahnen von $\mathbb{G}^c$ in L_∞ recht präzise Informationen: Ist die betrachtete Ebene nicht die desarguessche Ebene über dem Quaternionenkörper $\mathbb{H}$, so läßt die Zusammenhangskomponente von $\mathbb{G}^c$ die uneigentlichen Punkte w und s von W und S fest und wirkt transitiv auf $L_\infty \setminus \{w, s\}$ oder hat dort lauter zur 3-Sphäre homöomorphe Bahnen. Das Punktepaar $\{w, s\}$ ist dann invariant unter $\mathbb{G}^c$.

Diese Aussage folgt aus einem allgemeinen Ergebnis von [3]: Die Streckungsgruppe $\Sigma_{[S,w]} \cong \mathrm{Spin}(3)$ hat nämlich auf der 4-Sphäre L_∞ genau die beiden Fixpunkte w und s und wirkt frei auf $L_\infty \setminus \{w, s\}$ mit zur 3-Sphäre homöomorphen Bahnen. Nach dem Sphärensatz in [3: 1.2] hat daher $\mathbb{G}^c$ das beschriebene Bahnverhalten, es sei denn, die Ebene ist mindestens vom Lenz-Typ V. Im letzteren Fall ist aber einer der Nuklei einer koordinatisierenden vierdimensionalen reellen Divisionsalgebra D isomorph zum Quaternionenkörper $\mathbb{H}$, da die Ebene eine zu $\mathrm{Spin}(3)$ isomorphe Streckungsgruppe zuläßt; aus Dimensionsgründen muß ein solcher Nukleus aber ganz D sein, so daß der desarguessche Fall vorliegt, vgl. auch [2: 2.6 und 3.4].

2.3. Ebenen mit mehreren großen Streckungsgruppen. In dieser Arbeit soll nun der Fall näher untersucht werden, daß neben der bisher betrachteten zu $\mathrm{Spin}(3)$ isomorphen Streckungsgruppe $\Sigma_{[S,w]}$ noch eine weitere zu $\mathrm{Spin}(3)$ isomorphe Streckungsgruppe mit nicht zu S paralleler Achse auftritt. Da s nach 2.2 unter zusammenhängenden Kollineationsgruppen festbleibt, ist s das Zentrum dieser zweiten Streckungsgruppe; umgekehrt ergibt sich, daß w der uneigentliche Punkt ihrer Achse ist, die wir mit W bezeichnen. Somit hat man zwei zu $\mathrm{Spin}(3)$ isomorphe Streckungsgruppen $\Sigma_{[S,w]}$ und $\Sigma_{[W,s]}$, die sich gegenseitig zentralisieren, da das Zentrum der einen auf der Achse der andern liegt. Sie erzeugen zusammen eine zu $\mathrm{Spin}(4) \cong \mathrm{Spin}(3)^2$ isomorphe Kollineationsgruppe Σ. Da der einzige nichttriviale echte Normalteiler von $\mathrm{Spin}(3)$ das zweielementige Zentrum ist, ist die einzige nichtidentische Kollineation in Σ, die L_∞ punktweise festläßt, das Produkt ι der beiden zentralen Involutionen von $\Sigma_{[S,w]}$ und $\Sigma_{[W,s]}$. Die von Σ auf L_∞ induzierte Homöomorphismengruppe $\Sigma | L_\infty$ ist also isomorph zur Faktorgruppe $\Sigma / \{1, \iota\} \cong \mathrm{SO}_4(\mathbb{R})$.

Das folgende Lemma zeigt, daß die Annahme einer zu $\mathrm{Spin}(4)$ isomorphen Kollineationsgruppe Σ mit $\Sigma | L_\infty \cong \mathrm{SO}_4(\mathbb{R})$ die beschriebene Situation insgesamt bereits charakterisiert:

2.4. Lemma. *In einer achtdimensionalen lokalkompakten Translationsebene sei Σ eine zu* $\mathrm{Spin}(4)$ *isomorphe affine Kollineationsgruppe mit* $\Sigma | L_\infty \cong \mathrm{SO}_4(\mathbb{R})$.

Dann läßt Σ genau zwei affine Geraden W und S invariant; und der eine der beiden zu $\mathrm{Spin}(3)$ *isomorphen Normalteiler von Σ besteht aus Streckungen mit Achse W und Zentrum $s = S \wedge L_\infty$, der andere aus Streckungen mit Achse S und Zentrum $w = W \wedge L_\infty$.*

Bezeichnung. Die achtdimensionalen lokalkompakten Translationsebenen, die eine Kollineationsgruppe Σ der hier beschriebenen Art besitzen, werden im folgenden $\mathrm{Spin}(4)$-*Ebenen* genannt.

Beweis. Es ist $\Sigma = \Sigma_1 \times \Sigma_2$ mit $\Sigma_i \cong \mathrm{Spin}(3)$. Mit ι_i $(i = 1, 2)$ bezeichnen wir die zentrale Involution von Σ_i; sei $\iota = \iota_1\iota_2$. Wegen $\Sigma | L_\infty \cong \mathrm{SO}_4(\mathbb{R})$ ist ι eine Streckung mit Achse L_∞, da $\{1, \iota\}$ der einzige Normalteiler N von Σ mit $\Sigma/N \cong \mathrm{SO}_4(\mathbb{R})$ ist. Das Zentrum o von ι bleibt fest unter Σ.

Wir zeigen nun, daß ι_1 eine axiale Kollineation sein muß. Andernfalls würden die Fixpunkte und Fixgeraden von ι_1 eine Unterebene der halben Dimension (eine Baer-Unterebene, siehe [4: 2.6]) bilden, deren affine Punkte einen Untervektorraum $B = \mathbb{R}^4$ ausmachen. B wäre invariant unter Σ. Daß ganz Σ_1 trivial auf B wirkt, wäre dabei ausgeschlossen, da ein die Ebene koordinatisierender vierdimensionaler lokalkompakter Quasikörper keine zu Spin(3) isomorphe Automorphismengruppe haben kann ([1: 2.6]). Da $\iota = \iota_1\iota_2$ nur einen einzigen affinen Fixpunkt hat, könnte ι_2 auf B nicht die Identität induzieren, und Σ_2 würde effektiv auf B wirken. Insgesamt müßte Σ auf $B = \mathbb{R}^4$ eine zu $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R}) \times \mathrm{Spin}(3)$ isomorphe Gruppe $\mathbb{R}$-linearer Transformationen induzieren; aber $\mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ enthält keine solche Untergruppe.

Entsprechend ist auch ι_2 eine axiale Kollineation. Die Achsen S und W von ι_1 und ι_2 schneiden sich in o und sind invariant unter ganz Σ. Da ι_2 nichtidentisch auf S wirkt, operiert Σ_2 dort effektiv. Folglich muß Σ_1 trivial auf S wirken, denn sonst würde Σ auf $S = \mathbb{R}^4$ eine zu $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R}) \times \mathrm{Spin}(3)$ isomorphe Gruppe $\mathbb{R}$-linearer Transformationen induzieren, was nicht angeht, wie wir schon bemerkt haben.

Also ist Σ_1 eine Gruppe von Streckungen mit Achse S und Zentrum w; und entsprechendes gilt für Σ_2. $\square$

Bemerkung. Der Beweis von 2.4 ist so gehalten, daß er sich anhand der Ergebnisse von [8: §§ 1, 2] auf beliebige achtdimensionale lokalkompakte projektive Ebenen übertragen läßt.

3. Klassifikation der Spin(4)-Ebenen.

Es wird sich herausstellen, daß die Spin(4)-Ebenen sich über den Quasikörpern koordinatisieren lassen, die auf folgende Weise entstehen:

3.1. $\mathbb{R}_{\mathrm{pos}}$ bezeichne die Menge der positiven reellen Zahlen. Für eine stetige Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{R}_{\mathrm{pos}} \to \mathrm{Spin}(3) \quad \text{mit} \quad \varphi(1) = 1$$

definieren wir auf der additiven Gruppe $\mathbb{R}^4$ des Quaternionenkörpers $\mathbb{H}$ eine neue Multiplikation $\circ$ durch

$$a \circ x = a \cdot x^{\varphi(|a|)} \qquad (a \neq 0)$$

und

$$0 \circ x = 0;$$

dabei ist $\cdot$ die Quaternionenmultiplikation und

$$x^f = f^{-1} x f \qquad (f \in \mathbb{H} \setminus \{0\},\ x \in \mathbb{H}).$$

Wir zeigen:

$F_\varphi = (\mathbb{R}^4, +, \circ)$ *ist ein topologischer Quasikörper.*

Bemerkung. Insbesondere ist F_φ ein sogenanntes verallgemeinertes André-System über dem Quaternionenkörper $\mathbb{H}$.

Beweis. Die Linksdistributivität der Multiplikation $\circ$ ist evident, ebenso die Stetigkeit der Abbildung $(a, x) \mapsto a \circ x$ für $a \neq 0$. Die Stetigkeit dieser Abbildung in $(0, x)$ folgt aus $|a \circ x| = |a| \cdot |x|$. Mit dieser Beziehung verifiziert man auch, daß für $a \neq 0$ die Auflösung y der Gleichung $y \circ a = c$ eindeutig durch $y = c \cdot (a^{-1})^{\varphi(|ca^{-1}|)}$ bestimmt ist; dieser Ausdruck hängt stetig von a und c ab. Wegen der Eindeutigkeit der Auflösung von Gleichungen dieses Typs ist für $a \neq b$ die lineare Abbildung $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$: $x \mapsto a \circ x - b \circ x$ nichtsingulär und wird also durch eine invertierbare Matrix beschrieben, deren Koeffizienten stetig von a und b abhängen. Die Auflösung der Gleichung $a \circ x - b \circ x = c$ nach x ist also eindeutig und eine stetige Funktion von a und b. $\square$

Der folgende Satz bestimmt nun explizit alle Spin(4)-Ebenen:

3.2. Satz. *Gegeben sei eine* Spin(4)*-Ebene, das heißt eine achtdimensionale lokalkompakte Translationsebene, die eine zu* Spin(4) *isomorphe affine Kollineationsgruppe* Σ *mit* $\Sigma | L_\infty \cong \mathrm{SO}_4(\mathbb{R})$ *zuläßt. Seien* W *und* S *die beiden affinen Fixgeraden von* Σ *gemäß* 2.4, *und sei* e *ein nicht auf ihnen liegender affiner Punkt.*

Dann ist der Koordinatenbereich, der die Ebene bezüglich W *und* S *als Koordinatenachsen und* e *als Einheitspunkt koordinatisiert, einer der Quasikörper* F_φ *aus* 3.1. *In Koordinaten über* $F_\varphi \triangleq \mathbb{H}$ *ist*

$$\Sigma = \{(x, y) \mapsto (ax, by) / a, b \in \mathrm{Spin}(3)\}.$$

Umgekehrt läßt die Ebene über jedem der Quasikörper F_φ *diese Kollineationsgruppe zu und ist daher eine* Spin(4)*-Ebene.*

Beweis. Nach Lemma 2.4 ist Σ das direkte Produkt einer zu Spin(3) isomorphen Gruppe Σ_1 von Streckungen mit Achse S und einer zu Spin(3) isomorphen Gruppe Σ_2 von Streckungen mit Achse W. Wir identifizieren den $\mathbb{R}$-Vektorraum der affinen Punkte so mit $\mathbb{H} \times \mathbb{H}$, daß $W = \mathbb{H} \times \{0\}$, $S = \{0\} \times \mathbb{H}$, $e = (1,1)$ und daß die Ursprungsgerade E durch e die Diagonale

$$E = \{(x, x) / x \in \mathbb{H}\}$$

wird. Da alle zu Spin(3) isomorphen Untergruppen von $\mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ konjugiert sind, kann bei dieser Identifikation noch

$$(1) \qquad \Sigma_2 = \{(x, y) \mapsto (x, by) / b \in \mathrm{Spin}(3)\}$$

erreicht werden.

Die Gruppe Σ_2 läßt auf L_∞ genau die uneigentlichen Punkte w und s der Geraden W und S fest und wirkt als Streckungsgruppe auf $L_\infty \setminus \{w, s\}$ wie auf $S \setminus \{0\}$. Insbesondere ist der Bahnenraum $\mathscr{B}_2$ der Wirkung von Σ_2 auf $L_\infty \setminus \{w, s\}$ homöomorph zu $\mathbb{R}_{\mathrm{pos}}$, und alle Bahnen sind 3-Sphären. Da Σ_2 von Σ_1 zentralisiert wird, permutiert Σ_1 die Bahnen von Σ_2. Als kompakte zusammenhängende Gruppe kann Σ_1 aber nur trivial auf $\mathscr{B}_2 \cong \mathbb{R}_{\mathrm{pos}}$ wirken, da die einpunktigen Mengen die einzigen kompakten zusammenhängenden homogenen Teilräume von $\mathbb{R}_{\mathrm{pos}}$ sind. Da entsprechendes bei Vertauschung von Σ_1 und Σ_2 gilt, haben also Σ_1 und Σ_2 dieselben Bahnen in $L_\infty \setminus \{w, s\}$.

Diese Bahnen sind 3-Sphären, auf denen Σ_1 und Σ_2 jeweils frei operieren. Die Standgruppe Σ_z eines uneigentlichen Punkts $z \in L_\infty \setminus \{w, s\}$ ist folglich eine „Diagonaluntergruppe" von $\Sigma = \Sigma_1 \times \Sigma_2$, d.h. eine Untergruppe, die durch Projektion auf die Faktoren Σ_1 und Σ_2 isomorph abgebildet wird. In der Ebene läßt sich die Projektion auf Σ_2 durch Einschränkung auf die Gerade S ablesen, da Σ_1 aus Streckungen mit der Achse S besteht. Anhand (1) ergibt sich daher, daß die Standgruppe Σ_E der Diagonale E in den gewählten quaternalen Koordinaten die Gruppe

$$\Sigma_E = \{(x, y) \mapsto (bx, by)/b \in \mathrm{Spin}(3)\}$$

ist. Insgesamt ist also

$$\Sigma = \Sigma_E \cdot \Sigma_2 = \{(x, y) \mapsto (ax, by)/a, b \in \mathrm{Spin}(3)\}.$$

Die Diagonaluntergruppen von Σ sind paarweise konjugiert, da Spin(3) nur innere Automorphismen besitzt. Daher gibt es auf jeder Σ-Bahn in $L_\infty \setminus \{w, s\}$ Punkte, deren Standgruppe Σ_E ist, und zwar genau zwei, da diese unter der zentralen Involution ι_1 von Σ_1 auseinander hervorgehen: sie bilden nämlich eine Bahn unter dem Normalisator von Σ_E in Σ, und dieser wird von Σ_E und ι_1 erzeugt. Der Raum der Fixpunkte von Σ_E in $L_\infty \setminus \{w, s\}$ überlagert also den einfach zusammenhängenden Bahnenraum $\mathscr{B}_2 \cong \mathbb{R}_{\mathrm{pos}}$ zweifach, so daß eine stetige Auswahlfunktion existiert, die jeder Σ_2-Bahn in $L_\infty \setminus \{w, s\}$ einen auf ihr liegenden Fixpunkt von Σ_E zuordnet.

Eine Σ_2-Bahn in L_∞ besteht nun aus den uneigentlichen Punkten der Ursprungsgeraden durch die Punkte $(1, r \cdot b)$ mit festem $r \in \mathbb{R}_{\mathrm{pos}}$ und laufendem $b \in \mathrm{Spin}(3)$. Eine Auswahlfunktion der eben besprochenen Art führt also zu einer stetigen Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{R}_{\mathrm{pos}} \to \mathrm{Spin}(3) \quad \text{mit} \quad \varphi(1) = 1$$

derart, daß die Ursprungsgerade durch $(1, r \cdot \varphi(r))$ invariant unter Σ_E ist. Diese Ursprungsgerade hat die Gestalt $\{(x, A(x))/x \in \mathbb{R}^4 = \mathbb{H}\}$ mit $A \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ und $A(1) = r \cdot \varphi(r)$, wobei die Invarianz unter Σ_E bedeutet, daß A die Transformationen $x \mapsto bx$ mit $b \in \mathrm{Spin}(3)$ zentralisieren muß; also ist $A(x) = r \cdot x \cdot \varphi(r)$. Durch Anwendung von Σ_2 auf die so gewonnenen Geraden erhält man insgesamt als Ursprungsgeraden die Unterräume der Form

$$U_{r,b} = \{(x, rbx \cdot \varphi(r))/x \in \mathbb{H}\} \quad \text{mit} \quad r \in \mathbb{R}_{\mathrm{pos}}, \quad b \in \mathrm{Spin}(3).$$

$U_{r,b}$ ist die Gerade durch den Punkt $(1, q)$ mit $q = rb \cdot \varphi(r)$. Die „Steigung" q bestimmt dabei den Parameter r durch $r = |q|$, womit sich dann $b = \dfrac{q}{|q|} \cdot \varphi(|q|)^{-1}$ ergibt. Für die Multiplikation $\circ$ des Quasikörpers Q, der die Ebene bezüglich W und S als Koordinatenachsen und e als Einheitspunkt koordinatisiert, hat man also

$$q \circ x = rbx \cdot \varphi(r) = |q| \cdot \frac{q}{|q|} \cdot \varphi(|q|)^{-1} \cdot x \cdot \varphi(|q|) = q \cdot x^{\varphi(|q|)};$$

es ist also $Q = F_\varphi$. Dies war zu zeigen.

Die Umkehrung ergibt sich durch unmittelbare Verifikation. $\square$

Der folgende Satz ordnet die lokalkompakten zusammenhängenden Fastkörper von Kalscheuer und Tits ([5], [9]) in den hier erörterten Kontext ein:

3.3. Satz. *Der Quasikörper F_φ aus* 3.1 *ist ein Fastkörper genau dann, wenn*

$$\varphi\colon \mathbb{R}_{\mathrm{pos}} \to \mathrm{Spin}(3)$$

ein multiplikativer Homomorphismus ist; und jeder lokalkompakte zusammenhängende Fastkörper, der kein Körper ist, ergibt sich auf diese Weise.

Beweis. Die Multiplikation von F_φ ist genau dann assoziativ, wenn für alle $t_1, t_2 \in \mathbb{R}_{\mathrm{pos}}$ und für alle $x \in \mathbb{H}$ stets

$$x^{\varphi(t_1 \cdot t_2)} = x^{\varphi(t_1) \cdot \varphi(t_2)}$$

gilt. Wegen $|\varphi(t_i)| = 1$, und da das Zentrum von $\mathbb{H}$ aus den reellen Vielfachen der 1 besteht, bedeutet dies

$$\varphi(t_1 \cdot t_2) = \pm\, \varphi(t_1) \cdot \varphi(t_2)\,.$$

Infolge der Stetigkeit von φ und aus Zusammenhangsgründen gilt dabei stets das positive Vorzeichen, da nach Voraussetzung $\varphi(1) = 1$ ist. Also ist F_φ ein Fastkörper genau dann, wenn φ ein Homomorphismus ist.

Ein lokalkompakter zusammenhängender Fastkörper F, der kein Körper ist, ist nach [7: 7.21, 7.24 und 7.25] vierdimensional, und seine multiplikative Gruppe $F^\times$ ist isomorph zur multiplikativen Gruppe $\mathbb{H}^\times$ der Quaternionen. In der Ebene über F existieren wegen der Assoziativität der Multiplikation alle Achsenstreckungen mit einer der beiden Koordinatenachsen als Achse und dem uneigentlichen Punkt der anderen Koordinatenachse als Zentrum, und bilden eine zu $\mathbb{H}^\times$ isomorphe Gruppe. Folglich ist die Ebene über F eine Spin(4)-Ebene (2.3), und nach 3.2 ist F einer der Quasikörper F_φ. □

Wir bestimmen nun noch die Kerne der Quasikörper F_φ:

3.4. *F_φ ist ein Körper genau dann, wenn $\varphi(t) = 1$ für alle $t \in \mathbb{R}_{\mathrm{pos}}$ gilt. Andernfalls hat F_φ genau dann zu $\mathbb{C}$ isomorphen Kern, wenn $\varphi(\mathbb{R}_{\mathrm{pos}})$ in einem zu $\mathbb{C}$ isomorphen Unterkörper C von $\mathbb{H}$ enthalten ist; es ist dann* $\mathrm{Ker}\, F_\varphi = C$. *Ansonsten ist der Kern isomorph zu $\mathbb{R}$.*

Beweis. Ist F_φ ein Körper, so liegen die reellen Vielfachen der 1 im Zentrum. Nach Definition von F_φ ist dies genau dann der Fall, wenn $\varphi(\mathbb{R}_{\mathrm{pos}})$ im Zentrum des Quaternionenkörpers enthalten ist. Wegen $\varphi(\mathbb{R}_{\mathrm{pos}}) \subseteq \mathrm{Spin}(3)$ und da das Zentrum von Spin(3) nur aus 1 und -1 besteht, folgt aus Zusammenhangsgründen daraus $\varphi(\mathbb{R}_{\mathrm{pos}}) = \{1\}$.

Der Kern $\mathrm{Ker}\, F_\varphi$ von F_φ enthält die reellen Vielfachen der 1 und ist isomorph zu $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, falls F_φ kein Körper ist. Ist $\mathrm{Ker}\, F_\varphi \cong \mathbb{C}$, so stellt $\mathrm{Ker}\, F_\varphi$ insbesondere einen zweidimensionalen 1 enthaltenden Untervektorraum des F_φ zugrundeliegenden $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{R}^4 = \mathbb{H}$ dar. Ein solcher bildet stets einen Unterkörper auch des Quaternionenkörpers $\mathbb{H}$, und der Normalisator von $\mathrm{Ker}\, F_\varphi$ in $\mathbb{H}^\times$ besteht aus

$\operatorname{Ker} F_\varphi \setminus \{0\}$ sowie dem orthogonalen Komplement $(\operatorname{Ker} F_\varphi)^\perp \setminus \{0\}$. Für $c, x \in \operatorname{Ker} F_\varphi \setminus \{0\}$ ist wegen $c \circ x = c x^{\varphi(|c|)} \in \operatorname{Ker} F_\varphi$ auch $x^{\varphi(|c|)} \in \operatorname{Ker} F_\varphi$ und daher $\varphi(|c|) \in (\operatorname{Ker} F_\varphi) \cup (\operatorname{Ker} F_\varphi)^\perp$. Wegen $(\operatorname{Ker} F_\varphi) \cap (\operatorname{Ker} F_\varphi)^\perp = \{0\}$ und $0 \notin \varphi(\mathbb{R}_{\text{pos}})$ folgt aus Zusammenhangsgründen $\varphi(\mathbb{R}_{\text{pos}}) \subsetneqq \operatorname{Ker} F_\varphi$.

Ist umgekehrt $\varphi(\mathbb{R}_{\text{pos}})$ in einem zu $\mathbb{C}$ isomorphen Unterkörper C von $\mathbb{H}$ enthalten, so hat man wegen der Kommutativität von C für alle $a \in F_\varphi$ und $c \in C$

$$a \circ c = a \cdot c^{\varphi(|a|)} = ac,$$

womit leicht verifiziert werden kann, daß dann c im Kern von F_φ liegt. $\square$

4. Kollineationen und Isomorphismen.

In diesem Abschnitt wird die volle Kollineationsgruppe der Ebenen über den Quasikörpern F_φ aus 3.1 bestimmt; ferner werden die Isomorphieklassen dieser Ebenen ermittelt. Dabei ergeben sich auch einige Kennzeichnungen der lokalkompakten zusammenhängenden Fastkörperebenen durch ihre Kollineationsgruppe.

4.1. In der affinen Ebene über F_φ hat man zunächst stets die schon aus Satz 3.2 bekannten zu Spin(3) isomorphen Kollineationsgruppen

$$\Sigma_1 = \{(x, y) \mapsto (ax, y) / a \in \operatorname{Spin}(3)\},$$
$$\Sigma_2 = \{(x, y) \mapsto (x, by) / b \in \operatorname{Spin}(3)\}$$

und ihr Produkt

$$\Sigma = \Sigma_1 \cdot \Sigma_2.$$

(Dabei und im folgenden verwenden wir stets die quaternalen Koordinaten, die durch die Konstruktion von F_φ im Quaternionenkörper gegeben sind; die üblich notierte Multiplikation ist stets die Quaternionenmultiplikation.)

Ferner hat man über den Kern $\operatorname{Ker} F_\varphi$ von F_φ die Gruppe $\mathbb{G}_{[o, L_\infty]}$ der Streckungen mit Achse L_∞ und dem Koordinatenursprung o als Zentrum im Griff. Sie besteht bekanntlich aus den Transformationen $(x, y) \mapsto (x \circ c, y \circ c)$ mit $0 \neq c \in \operatorname{Ker} F_\varphi$; und da nach 3.4 für $x \in F_\varphi$ und $c \in \operatorname{Ker} F_\varphi$ stets $x \circ c = xc$ gilt, ist in quaternalen Koordinaten

$$\mathbb{G}_{[o, L_\infty]} = \{(x, y) \mapsto (xc, yc) / 0 \neq c \in \operatorname{Ker} F_\varphi\}.$$

Mit diesen Bezeichnungen lautet nun das Hauptergebnis dieses Abschnitts:

4.2. Satz. *Sei F_φ kein Körper, d.h. φ sei nicht konstant. Dann gilt:*

(i) *Alle affinen Kollineationen der Ebene über F_φ sind stetig; die den Ursprung festlassenden Kollineationen lassen die Koordinatenachsen W und S invariant oder vertauschen sie. Die Gruppe $\mathbb{G}_{W,S}$ der Kollineationen, die W und S invariant lassen, ist also ein Normalteiler vom Index höchstens 2 in der Gruppe $\mathbb{G}_o$ der den Ursprung festlassenden Kollineationen.*

(ii) *Für $\mathbb{G}_{W,S}$ bestehen folgende Möglichkeiten:*

(1) $\mathbb{G}_{W,S} = \Sigma \cdot \mathbb{G}_{[o, L_\infty]}$.

(2) $\mathbb{G}_{W,S}$ *ist direktes Produkt von* $\Sigma \cdot \mathbb{G}_{[o,L_\infty]}$ *mit einer nicht kompakten abgeschlossenen Einparameteruntergruppe. Dies gilt genau dann, wenn* φ *die Gestalt*

$$\varphi = (t \mapsto c(t)^{-1} d(t))$$

hat, wo $t \mapsto c(t)$ *und* $t \mapsto d(t)$ *multiplikative Homomorphismen von* $\mathbb{R}_{\text{pos}}$ *in* Spin(3) *sind. Genau in diesem Fall ist* $\mathbb{G}_{W,S}$ *transitiv auf* $L_\infty \setminus \{w, s\}$.

In Verbindung mit zu $\mathbb{C}$ *isomorphem Kern tritt dies genau dann auf, wenn* F_φ *ein Fastkörper ist.*

(3) $\mathbb{G}_{W,S}$ *ist das semidirekte Produkt des Normalteilers* $\Sigma \cdot \mathbb{G}_{[o,L_\infty]}$ *mit einer unendlich zyklischen diskreten abgeschlossenen Untergruppe. Dies tritt genau dann auf, wenn* φ *zwar nicht die in* (2) *geforderte Gestalt hat, aber dennoch eine Symmetrie der Form*

$$\varphi(t_0 \cdot t) = c^{-1} \cdot \varphi(t) \cdot d \quad \text{für alle} \quad t \in \mathbb{R}_{\text{pos}}$$

mit festen $t_0 \in \mathbb{R}_{\text{pos}}$ *und* $c, d \in \text{Spin}(3)$ *aufweist.*

(iii) $\mathbb{G}_o$ *ist größer als* $\mathbb{G}_{W,S}$ *dann und nur dann, wenn* φ *eine Symmetrie der Form*

$$\varphi(t_0 \cdot t^{-1}) = c^{-1} \cdot \varphi(t)^{-1} \cdot d \quad \text{für alle} \quad t \in \mathbb{R}_{\text{pos}}$$

mit festen $t_0 \in \mathbb{R}_{\text{pos}}$ *und* $c, d \in \text{Spin}(3)$ *aufweist.*

Liegt außerdem Fall (ii2) *(Transitivität auf* $L_\infty \setminus \{w, s\}$*) vor, so ist* F_φ *notwendig ein Fastkörper.*

Bemerkung. Die Fastkörperebenen erweisen sich somit als diejenigen Spin(4)-Ebenen, die in jeder Hinsicht die größtmögliche Kollineationsgruppe haben.

Mit den folgenden Nr. wird nun der Beweis von 4.2 durchgeführt.

4.3. *Σ ist ein Normalteiler von* $\mathbb{G}_o$.

Beweis. Nach [3: 1.2] (siehe auch 2.2) läßt zunächst jede *stetige* Kollineation die uneigentlichen Punkte w und s von W und S fest oder vertauscht sie; also sind W und S die einzigen Ursprungsgeraden, die als Achsen von Quadraten von Streckungen auftreten. Jede Kollineation γ aus $\mathbb{G}_o$ läßt also W und S invariant oder vertauscht sie; entsprechend führt Konjugation mit γ die zugehörigen Streckungsgruppen $\mathbb{G}_{[W,s]}$ und $\mathbb{G}_{[S,w]}$ in sich oder ineinander über. Da γ semilinear über dem Kern der Ebene ist, gilt dasselbe für die jeweiligen Untergruppen derjenigen Achsenstreckungen, die über dem Kern Determinante 1 haben. Diese Untergruppen enthalten Σ_1 bzw. Σ_2. Nach dem Lemma über Achsenstandgruppen ([3: 2.1], siehe auch 1.3) sind sie kompakt und folglich gleich Σ_1 bzw. Σ_2, da nach unserer Diskussion in 2.1 die zu Spin(3) isomorphen Gruppen Σ_1 und Σ_2 bereits größtmöglich unter den kompakten Streckungsgruppen sind. Also ist $\Sigma = \Sigma_1 \cdot \Sigma_2$ normal in $\mathbb{G}_o$. □

Ist nun der Kern von F_φ isomorph zu $\mathbb{R}$, so ist jede Kollineation aus $\mathbb{G}_o$ $\mathbb{R}$-linear und damit stetig. Im Fall $\text{Ker}\, F_\varphi \cong \mathbb{C}$ betrachten wir einen Bogen in

$$(\text{Spin}(3) \cap \text{Ker}\, F_\varphi) \times \{0\} \subseteqq W.$$

Er ist in einer Σ-Bahn enthalten und wird daher von jeder Kollineation $\gamma \in \mathbb{G}_o$ in eine Σ-Bahn abgebildet, hat also jedenfalls beschränktes Bild unter γ. Daher muß der Begleitautomorphismus von γ stetig sein, da unstetige Automorphismen von $\mathbb{C}$ jeden Bogen in eine dichte Teilmenge von $\mathbb{C}$ überführen ([6]). Damit ist gezeigt, daß jede Kollineation stetig ist.

Insbesondere ist jede Kollineation aus $\mathbb{G}_o$ linear über $\mathbb{R}$. Da der Normalisator der Gruppe $\{\mathbb{R}^4 = \mathbb{H} \to \mathbb{R}^4 : x \mapsto ax/a \in \mathrm{Spin}(3)\}$ in $\mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ aus den Transformationen $x \mapsto axq^{-1}$ mit $a \in \mathrm{Spin}(3)$ und $q \in \mathbb{H}^\times$ besteht, kann nach 4.3 jede Kollineation aus $\mathbb{G}_{W,S}$ modulo $\Sigma \cdot \mathbb{G}_{[o,L_\infty]}$ abgewandelt werden zu einer Kollineation der Form

(2) $\qquad (x, y) \mapsto (xc, yt_0d) \quad$ mit $\quad c, d \in \mathrm{Spin}(3) \quad$ und $\quad t_0 \in \mathbb{R}_{\mathrm{pos}}$,

und jede Kollineation aus $\mathbb{G}_o \backslash \mathbb{G}_{W,S}$ zu einer Kollineation der Form

(3) $\qquad (x, y) \mapsto (yc, xt_0d) \quad$ mit $\quad c, d \in \mathrm{Spin}(3) \quad$ und $\quad t_0 \in \mathbb{R}_{\mathrm{pos}}$.

Ganz entsprechende Überlegungen gelten für Isomorphismen zwischen den Ebenen über zwei Quasikörpern F_φ und F_ψ der hier betrachteten Art; sind die Ebenen isomorph, so existiert ein Isomorphismus der Gestalt (2) oder (3). Wann dies der Fall ist, läßt sich explizit bestimmen:

4.4. *Ausdruck* (2) *bzw.* (3) *beschreibt einen Isomorphismus der Ebene über F_φ auf die Ebene über F_ψ genau dann, wenn*

$$\left.\begin{array}{ll} (2') & \psi(t_0 \cdot t) = \pm\, c^{-1} \cdot \varphi(t) \cdot d \\ & \textit{bzw.} \\ (3') & \psi(t_0 \cdot t^{-1}) = \pm\, c^{-1} \cdot \varphi(t)^{-1} \cdot d \end{array}\right\} \textit{für alle} \quad t \in \mathbb{R}_{\mathrm{pos}}.$$

Beweis. Ist (2) ein Isomorphismus, so ist das Bild der Ursprungsgeraden

$$\{(x, q \circ x)/x \in F_\varphi\} = \{(x, q \cdot x^{\varphi(|q|)})/x \in \mathbb{H}\}$$

der Steigung q wieder eine Ursprungsgerade. Ist q' die Steigung der Bildgeraden, so hat man also

$$t_0 q \cdot x^{\varphi(|q|)} \cdot d = q' \cdot (xc)^{\psi(|q'|)} \quad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{H}.$$

In Beträgen folgt

$$|q'| = t_0 \cdot |q|;$$

und da das Zentrum von $\mathbb{H}$ aus den reellen Vielfachen der 1 besteht, ergibt sich

$$c \cdot \psi(|q'|) = \pm\, \varphi(|q|) \cdot d.$$

Die beiden letzten Beziehungen zusammengenommen liefern (2′). Ganz entsprechend schließt man auf (3′), falls (3) einen Isomorphismus beschreibt. □

Hinsichtlich der Isomorphieklassen der hier behandelten Ebenen ergibt sich aus der vorstehenden Diskussion und insbesondere mit 4.4 der folgende

4.5. Satz. *Die Ebenen über F_φ und F_ψ sind isomorph genau dann, wenn mit geeigneten $t_0 \in \mathbb{R}_{\mathrm{pos}}$ und $c, d \in \mathrm{Spin}(3)$ eine Beziehung der Form*

$$\psi(t_0 \cdot t^{\pm 1}) = c^{-1} \cdot \varphi(t)^{\pm 1} \cdot d \quad \textit{für alle} \quad t \in \mathbb{R}_{\mathrm{pos}}$$

besteht. □

Für den Beweis des Satzes 4.2 ist noch die folgende Aussage wichtig:

4.6. *Die größte kompakte Untergruppe M von $\mathbb{G}_{W,S}$ ist in $\Sigma \cdot \mathbb{G}_{[o,L_\infty]}$ enthalten.*

Beweis. Nach 4.3 wirkt M auf dem Raum der Bahnen von Σ in L_∞ (welcher homöomorph zu einem abgeschlossenen Intervall ist), und zwar so, daß die Endpunkte fest bleiben, da sie den Fixpunkten w und s entsprechen. Ein Intervall läßt aber keine nichttriviale kompakte Gruppe orientierungserhaltender Homöomorphismen zu, so daß M in L_∞ dieselben Bahnen hat wie $\Sigma \subseteqq M$. Modulo $\Sigma \cdot \mathbb{G}_{[o,L_\infty]}$ kann also jede Kollineation aus M so modifiziert werden, daß sie die Einheitsgerade E durch $(1, 1)$ invariant läßt, und weiter noch so, daß sie die Gestalt (2) annimmt, wobei (im Hinblick auf die Invarianz von E) $t_0 = 1$ und $c = d$ sein muß. Nach (2′) ist dann $\varphi(t) = c^{-1} \cdot \varphi(t) \cdot c$ für alle $t \in \mathbb{R}_{\text{pos}}$. Ist $\varphi(\mathbb{R}_{\text{pos}}) \subseteqq \operatorname{Spin}(3)$ in einem zu $\mathbb{C}$ isomorphen Unterkörper C von $\mathbb{H}$ enthalten, so folgt wegen $\varphi(\mathbb{R}_{\text{pos}}) \neq \{1\}$, daß c alle Elemente von C zentralisiert und deshalb ebenfalls in $C = \operatorname{Ker} F_\varphi$ (3.4) liegt. Andernfalls muß c im Zentrum $\mathbb{R}$ von $\mathbb{H}$ liegen. In jedem Fall ist $(x, y) \mapsto (xc, yc)$ eine Kollineation aus $\mathbb{G}_{[o,L_\infty]}$. $\square$

Damit lassen sich nun die Aussagen (ii) und (iii) von Satz 4.2 vollends beweisen. Nach dem Lemma über Achsenstandgruppen ([3: 2.1], siehe auch 1.3) ist $\mathbb{G}_{W,S}$ das semidirekte Produkt von $M \cdot \mathbb{G}_{[o,L_\infty]} = \Sigma \cdot \mathbb{G}_{[o,L_\infty]}$ (4.6) mit einer abgeschlossenen Untergruppe Y, die trivial, unendlich zyklisch diskret oder isomorph zur multiplikativen Gruppe $\mathbb{R}_{\text{pos}}$ ist und auf $L_\infty \backslash \{w, s\}$ fixpunktfrei mit abgeschlossenen Bahnen operiert. Aus diesen Informationen ergibt sich sofort, daß $Y \cong \mathbb{R}_{\text{pos}}$ gleichbedeutend mit der Transitivität von $\mathbb{G}_{W,S}$ auf $L_\infty \backslash \{w, s\}$ ist.

In diesem Fall ($Y \cong \mathbb{R}_{\text{pos}}$) kann nach den Ausführungen im Anschluß an 4.3 die Einparametergruppe Y noch so gewählt werden, daß sie aus Kollineationen der Form (2) besteht. Bei Durchlaufen von Y nimmt in (2) dabei t_0 alle Werte in $\mathbb{R}_{\text{pos}}$ an, da $Y \cong \mathbb{R}_{\text{pos}}$ nicht kompakt ist; man hat also

$$Y = \{(x, y) \mapsto (x \cdot c(t),\, y \cdot t \cdot d(t)) / t \in \mathbb{R}_{\text{pos}}\},$$

wobei $t \mapsto c(t)$ und $t \mapsto d(t)$ Homomorphismen von $\mathbb{R}_{\text{pos}}$ in $\operatorname{Spin}(3)$ sind. Nach (2′) folgt $\varphi(t \cdot r) = \pm\, c(t)^{-1} \cdot \varphi(r) \cdot d(t)$ für alle $r,\, t \in \mathbb{R}_{\text{pos}}$, und aus Zusammenhangsgründen gilt stets das positive Vorzeichen, da es für $t = 1$ gilt. Mit $r = 1$ erhält man dann $\varphi(t) = c(t)^{-1} \cdot d(t)$. Bei dieser speziellen Gestalt von φ ist nur dann $\operatorname{Ker} F_\varphi \cong \mathbb{C}$, d.h. $\varphi(\mathbb{R}_{\text{pos}})$ in einem zu $\mathbb{C}$ isomorphen Unterkörper C von $\mathbb{H}$ enthalten (3.4), wenn schon die Einparametergruppen $\{c(t)\}$ und $\{d(t)\}$ von $\operatorname{Spin}(3)$ in C liegen; dann ist aber $\varphi = (t \mapsto c(t)^{-1} \cdot d(t))$ ein Homomorphismus und F_φ ist ein Fastkörper (3.3). Die Situation ist also wie in Behauptung (ii 2) von Satz 4.2 geschildert. Behauptung (ii 3) beschreibt den verbleibenden Fall, daß $\mathbb{G}_{W,S}$ von $\Sigma \cdot \mathbb{G}_{[o,L_\infty]}$ und einer weiteren Kollineation erzeugt wird; modulo $\Sigma \cdot \mathbb{G}_{[o,L_\infty]}$ ist diese von der Form (2), so daß nach (2′) φ eine Symmetrie der behaupteten Art aufweist.

Ist $\mathbb{G}_o$ größer als $\mathbb{G}_{W,S}$, so existiert eine Kollineation der Form (3), was nach 4.4 eine Symmetrie vom Typ (3′) für $\varphi = \psi$ nach sich zieht. Ist gleichzeitig $\mathbb{G}_{W,S}$ transitiv auf $L_\infty \backslash \{w, s\}$, so existiert eine Kollineation aus $\mathbb{G}_o \backslash \mathbb{G}_{W,S}$, die die Einheitsgerade E invariant läßt; mit Kollineationen aus $\Sigma_E \cdot \mathbb{G}_{[o,L_\infty]}$ läßt sich auch diese noch so abwandeln, daß sie die Form (3) annimmt. Wegen der Invarianz von

E ist dabei dann $t_0 = 1$ und $d = c$, und gemäß (3′) gilt $\varphi(t^{-1}) = c^{-1} \cdot \varphi(t)^{-1} \cdot c$ für alle $t \in \mathbb{R}_{\text{pos}}$. Nun berücksichtigen wir, daß man in der in Rede stehenden Situation $\varphi(t) = c(t)^{-1} \cdot d(t)$ hat mit Homomorphismen $t \mapsto c(t)$ und $t \mapsto d(t)$ von $\mathbb{R}_{\text{pos}}$ in Spin(3); insgesamt ergibt sich also die Beziehung

(4) $$c(t)\,d(t)^{-1} = c^{-1}\,d(t)^{-1}\,c(t)\,c \quad \text{für alle} \quad t \in \mathbb{R}_{\text{pos}},$$

aus der sich anhand eines expliziten Ansatzes für die Einparametergruppen $c(t)$ und $d(t)$ von Spin(3) ableiten läßt, daß c in $\mathbb{H}$ sowohl mit $c(t)$ als auch mit $d(t)$ kommutiert. Nach (4) kommutieren dann auch $c(t)$ und $d(t)$. Also ist $t \mapsto \varphi(t) = c(t)^{-1}\,d(t)$ ein Homomorphismus, und F_φ ist ein Fastkörper. — Damit ist auch die Aussage (iii) von Satz 4.2 gezeigt.

Literaturverzeichnis

[1] H. Hähl, Automorphismengruppen von lokalkompakten zusammenhängenden Quasikörpern und Translationsebenen. Geom. Dedic. **4**, 305—321 (1975).

[2] H. Hähl, Geometrisch homogene vierdimensionale reelle Divisionsalgebren. Geom. Dedic. **4**, 333—361 (1975).

[3] H. Hähl, Lokalkompakte zusammenhängende Translationsebenen mit großen Sphärenbahnen auf der Translationsachse. Resultate der Math. **2**, 62—87 (1979).

[4] H. Hähl, Zur Klassifikation von 8- und 16-dimensionalen lokalkompakten Translationsebenen nach ihren Kollineationsgruppen. Math. Z. **159**, 259—294 (1978).

[5] F. Kalscheuer, Die Bestimmung aller stetigen Fastkörper. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **13**, 413—435 (1940).

[6] H. Kestelmann, Automorphisms of the field of complex numbers. Proc. London Math. Soc. (2) **53**, 1—12 (1951).

[7] H. Salzmann, Topological planes. Advances in Math. **2**, 1—60 (1967).

[8] H. Salzmann, Compact 8-dimensional projective planes with large collineation groups. Geom. Dedic. **8**, 139—161 (1979).

[9] J. Tits, Sur les groupes doublement transitifs continus: corrections et compléments. Comment. Math. Helv. **30**, 234—240 (1956).

Eingegangen am 31. 10. 1979

Anschrift des Autors:

H. Hähl
Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Auf der Morgenstelle 10
D-7400 Tübingen