THOMAS BUCHANAN, HERMANN HÄHL und RAINER LÖWEN

TOPOLOGISCHE OVALE

Der Ausgangspunkt für die hier dargestellten Untersuchungen war die Frage, ob es lokalkompakte topologische Laguerreebenen gibt, in denen die topologische Dimension des Punktraums größer ist als vier. Im Zusammenhang damit galt es zu klären, ob es in kompakten topologischen projektiven Ebenen einer Dimension größer als vier Ovale[1] geben kann, die in topologischer Hinsicht gutartig sind. In dieser Arbeit (3.5, 3.6) werden wir beide Fragen verneinend entscheiden (wobei wir allerdings die betrachteten Ebenen als endlichdimensional voraussetzen); dabei genügt als topologische Voraussetzung an die Ovale ihre Abgeschlossenheit im Punktraum.

Dies zeigt ein weiteres Mal die einschneidende Wirkung topologischer Annahmen, da in jeder unendlichen projektiven Ebene Ovale schlechthin zu finden sind: nach einem Verfahren von Mazurkiewicz [29] kann man zum Beispiel eine 2-Kurve konstruieren und diese dann um einen Punkt vermindern, um ein Oval zu erhalten; siehe auch [2], [15].

In projektiven Räumen liegen ähnliche Verhältnisse vor: Aus unseren Aussagen über Ovale können wir folgern, daß in den projektiven Räumen höherer Dimension ($\geqslant 3$) über den komplexen Zahlen oder den Quaternionen keine abgeschlossenen Ovoide existieren (3.4). Weiter ergibt sich, daß der Punktraum einer endlichdimensionalen lokalkompakten zusammenhängenden Möbiusebene nur zweidimensional sein kann (3.2); unter der zusätzlichen Voraussetzung, daß die Kreise lokal euklidisch sind, ist dies schon länger bekannt [18].

Grundlage für diese Reihe von negativen Resultaten sind verschiedene positive Ergebnisse über abgeschlossene Ovale in endlichdimensionalen kompakten zusammenhängenden projektiven Ebenen: Die Abgeschlossenheit eines Ovals O impliziert, daß es ein topologisches Oval ist in dem Sinne, daß die Menge der Schnittpunkte einer Geraden L mit O stetig von L abhängt, auch falls L sich gegen eine Tangente bewegt (2.6). Infolgedessen ist O homöomorph zu einem Geradenbüschel, und die Menge der O schneidenden Geraden ist homöomorph zum symmetrischen Produkt $O * O$ (2.5). Ferner besitzt ein abgeschlossenes Oval eine Passante genau dann, wenn die Ebene zweidimensional ist (3.1). Nachdem die Nichtexistenz von Ovalen in Ebenen höherer Dimension gezeigt ist, kann man dann noch leicht beweisen, daß die Tangentenmenge O^* eines abgeschlossenen Ovals O wieder ein Oval (in der dualen Ebene) ist (3.8). Abgeschlossene Ovale in endlichdimensionalen kompakten zusammenhängenden Ebenen fallen also unter den scharfen

[1] Zum Ovalbegriff siehe Definition 2.1

Geometriae Dedicata 9 (1980) 401–424. 0046–5755/80/0094–0401$03.60

selbstdualen Ovalbegriff, wie ihn manche Autoren zugrunde legen, siehe z.B. [1].

Nach unseren Ergebnissen können in endlichdimensionalen kompakten zusammenhängenden Ebenen abgeschlossene Ovale genau bei zwei- oder vierdimensionalem Punktraum auftreten. Besonderes Interesse gilt nun gemeinhin den polaren Ovalen, also Ovalen, die aus den absoluten Punkten einer Polarität bestehen. Bedürftig [3] hat Polaritäten zweidimensionaler kompakter projektiver Ebenen studiert und gezeigt, daß bei solchen die Menge der absoluten Punkte entweder leer oder ein abgeschlossenes Oval ist. Für vierdimensionale Ebenen gilt dies nicht immer, wie schon in der komplexen Ebene zu sehen ist. In §4 geben wir deshalb Kriterien dafür an, wann die absoluten Punkte einer stetigen Polarität in einer vierdimensionalen kompakten Ebene ein Oval bilden.

Nach einem getrennt veröffentlichten Satz des ersten Autors ist jedes abgeschlossene Oval der komplexen projektiven Ebene ein Kegelschnitt, also polar [7]. Im Kontrast hierzu konstruieren wir in den Ebenen über den nichtklassischen ein- und zweidimensionalen Hurwitzschen Ternärkörpern [31] mit kommutativer additiver Gruppe neben polaren Ovalen auch Beispiele von nicht polaren Ovalen (§5). Damit ist auch dem Umstand abgeholfen, daß abgesehen von der komplexen Ebene bisher nur in zweidimensionalen kompakten Ebenen konkrete Beispiele von abgeschlossenen Ovalen bekannt waren.

In den Beweisen spielt eine wichtige Rolle, daß wir die Homologie eines Ovals O der betrachteten Art auf Grund von Ergebnissen von P.A. Smith über die Homologie symmetrischer Produkte mit der Homologie des Geradenraums in Verbindung bringen können, da $O * O$ homöomorph zum Raum der O schneidenden Geraden ist. Zur Auswertung dieses Zusammenhangs brauchen wir zum Teil noch unveröffentlichte Ergebnisse über die Homologie kompakter zusammenhängender projektiver Ebenen. Diese gehen auf Dugundji und Salzmann zurück und werden hier mit deren freundlichem Einverständnis, wofür wir ihnen herzlich danken, in §1 vorab dargestellt, soweit es für unsere Zwecke nötig ist. Herrn Salzmann danken wir für die diesbezüglichen Mitteilungen in Vorträgen und Gesprächen. Falls man gewillt ist, nur Ebenen zu betrachten, deren Geraden Mannigfaltigkeiten sind, sind diese Informationen leicht einzusehen, so daß unsere Ergebnisse, abgesehen von der Anwendung der Resultate von Smith, für solche Ebenen mit geläufigen Methoden erhalten werden können.

Wie schon gesagt, müssen wir durchweg voraussetzen, daß die betrachteten Ebenen endliche topologische Dimension haben. Hierzu sei bemerkt, daß bisher völlig offen ist, ob es kompakte topologische projektive Ebenen gibt, deren Punktraum unendlichdimensional ist.

Herrn Strambach, der uns für die zu Anfang aufgeworfenen Fragen interessiert hat, möchten wir herzlich für seine Anregungen danken.

1. Vorbereitungen

Gegeben sei eine kompakte zusammenhängende projektive Ebene, deren Punktraum P von endlicher (kleiner induktiver) Dimension ist. $\mathscr{L}$ bezeichne den Geradenraum der Ebene; wir identifizieren jede Gerade L mit der Menge der auf ihr liegenden Punkte.

Wir benötigen Informationen über die Topologie und insbesondere die Homologie einiger Räume, die mit der Ebene auftreten: nämlich einer Geraden $L \in \mathscr{L}$, der durch L definierten affinen Ebene $A = P\backslash L$, des Geradenbüschels $\mathscr{L}_x = \{L \in \mathscr{L}; x \in L\}$ durch $x \in P$, und der multiplikativen Loop eines Koordinatenbereichs der Ebene, die definiert ist auf einer zweifach punktierten Geraden $M = L\backslash\{a, b\}$ $(a, b \in L \in \mathscr{L}; a \neq b)$. Die Dimension einer Geraden L sei mit l bezeichnet.

Für $l \leqslant 2$ ist sogar der Homöomorphietyp dieser Räume genau bekannt ([32], [36], [4: 2.5]): Das Paar (P, L) ist dann stets homöomorph zum entsprechenden Paar der reellen projektiven Ebene $(l = 1)$ bzw. der komplexen projektiven Ebene $(l = 2)$. Für $l \geqslant 3$ scheinen derart weitgehende Aussagen bisher unerreichbar. Die folgenden Informationen sollen solche Aussagen für $l \geqslant 3$ ersetzen; die meisten von ihnen gelten auch für $l \leqslant 2$, wo sie unmittelbar einsichtig sind.

Zunächst sind die genannten Räume metrisch separabel und lokal kontrahierbar [35: 7.8–7.11]; also gilt (vgl. [12], [20: S. 168] und [47: S. 218]):

(1.1) *Alle betrachteten Räume sind ANR (bezüglich metrischen Räumen) und insbesondere homotopieäquivalent zu* CW-*Komplexen.*

P und L sind kompakt und für $l \geqslant 2$ einfach zusammenhängend [38: S. 220(3)]; damit folgt nach de Lyra [10] oder neuerdings allgemeiner nach West [48], [49] (vgl. auch [9]):

(1.2) *P und L sind homotopieäquivalent zu kompakten Polyedern und insbesondere von endlichem Typ*

(das heißt, die Summe aller Homologiemoduln ist endlich erzeugt).

(1.3) *Die Homöomorphismengruppe von P ist n-fach transitiv für jede natürliche Zahl n.*

Bemerkung. Auf einer Geraden L operiert bekanntlich bereits die Projektivitätengruppe 3-*fach transitiv.*

Beweis von (1.3). Die Behauptung ergibt sich durch einen leichten Induktionsbeweis aus der folgenden Aussage:

> Zu $p, q \in P$, $p \neq q$ und einer offenen Teilmenge U von P, die die Verbindungsgerade $L = p \vee q$ enthält, existiert ein Homöomorphismus α von P mit $p^\alpha = q$ und $\alpha|P\backslash U = \mathrm{id}$.

Zum Beweis dieser Aussage wählen wir Punkte $z \in L\backslash\{p, q\}$ und $w \notin L$. Um

α zu konstruieren, benötigen wir eine Homotopie $F_t: L \to L$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ derart, daß alle F_t Homöomorphismen sind mit $z^{F_t} = z$, $F_0 = \mathrm{id}_L$ und $p^{F_1} = q$. Eine solche ist leicht mit Hilfe einer Ternärkörperstruktur auf $L \backslash \{z\}$ anzugeben oder [27: 2.2b)] als Weg in der Projektivitätengruppe von L zu realisieren. Ferner wählen wir eine Umgebung $\mathscr{U}$ von L im Geradenbüschel $\mathscr{L}_z$ mit $\bigcup \mathscr{U} \subseteq U$ und $z \vee w \notin \mathscr{U}$, und eine Urysohn-Funktion $f: \mathscr{L}_z \to [0, 1]$ mit $f(L) = \{1\}$ und $f(\mathscr{L}_z \backslash \mathscr{U}) = \{0\}$. Der gesuchte Homöomorphismus α kann definiert werden durch

$$\alpha|z \vee w = \mathrm{id}, \ (A \cap B)^\alpha = A \cap ((B \cap L)^{F_{f(A)}} \vee w)$$

für $A \in \mathscr{L}_z \backslash \{z \vee w\}$, $B \in \mathscr{L}_w \backslash \{z \vee w\}$.

(1.4)(a) *P, $\mathscr{L}$, die Geraden L und die Geradenbüschel $\mathscr{L}_x$ $(x \in P)$ sind Cantor-Mannigfaltigkeiten, das heißt sie werden von keiner abgeschlossenen Teilmenge einer Kodimension größer als 1 zerlegt.*

(b) *Für die genannten Räume gilt der Brouwersche Gebietsinvarianzsatz: Sind U und V Hausdorff-Räume, die zueinander und zu einem der Räume P, $\mathscr{L}$, L oder $\mathscr{L}_x$ lokal homöomorph sind, und ist $f: U \to V$ eine stetige Injektion, so ist U^f offen in V, und f induziert einen Homöomorphismus von U auf U^f.*

Dies wurde von Łysko [28] allgemein für kompakte homogene metrische ANR bewiesen. Daß wir solche Räume vor uns haben, ist in (1.1) und (1.3) ausgesagt; man beachte, daß $\mathscr{L}$ und die Geradenbüschel $\mathscr{L}_x$ die Punktmenge bzw. die Geraden der dualen Ebene sind, so daß (1.1) und (1.3) auch auf diese Räume zutreffen. Falls man spezieller nur Mannigfaltigkeiten betrachten will, sind die vorstehenden Aussagen wohlbekannte klassische Sachverhalte (siehe etwa [23, S. 48 und S. 95 ff.]). Aus der bei Łysko [28] angegebenen Version des Gebietsinvarianzsatzes erhält man die in (b) gewählte Formulierung durch folgenden Standardschluß: Sei X einer der genannten Räume, und seien U und V lokal homöomorph zu X. Man überdecke V bzw. U mit relativ kompakten offenen Teilmengen V_β $(\beta \in \mathscr{B})$ bzw. U_α $(\alpha \in \mathscr{A})$, die homöomorph zu offenen Teilmengen von X sind und derart, daß $\overline{U_\alpha}^f$ stets in einer der Teilmengen V_β enthalten ist. Da $\overline{U_\alpha}$ kompakt ist, vermittelt f einen Homöomorphismus von U_α auf U_α^f, so daß nach [28: Theorem 2] U_α^f offen in V_β und folglich in V ist. Aussage (b) folgt nun durch Vereinigung.— Aussage (a) war übrigens für die Geraden bekannt: siehe [38: S. 220].

Die nun folgenden Aussagen sind Ergebnisse von Dugundji und Salzmann (teils aus [38], teils in [40] angekündigt). Soweit die Beweise noch nicht veröffentlicht sind, skizzieren wir kurz, wie diese Aussagen erschlossen werden können. Sie betreffen die Homologie der hier betrachteten Räume mit Koeffizienten in einem Modul G über einem Hauptidealring. Für die in dieser

Arbeit angestrebten Anwendungen würden die Koeffizientenbereiche $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}_2$ ausreichen; der Mehraufwand für den allgemeinen Fall besteht in der gelegentlichen Benutzung bekannter universeller Koeffizientensätze (siehe z.B. [44: 5.2.8. S. 222 und 5.5.3 S. 243]).

Zunächst zeigt die reduzierte Mayer-Vietoris-Sequenz der beiden nach [35:7.11] kontrahierbaren Räume $L\backslash\{a\}$, $L\backslash\{b\}$ mit Durchschnitt $M = L\backslash\{a, b\}$:

(1.5) $\tilde{H}_q(M; G) \cong H_{q+1}(L; G)$ *für* $q \geqslant 0$; *insbesondere ist auch* M *von endlichem Typ.*

Nach [38: S. 220] mit [44: 5.2.8 S. 222] gilt:

(1.6) *Für* $l \geqslant 3$ *ist* $\pi_1(M) = \{0\}$ *und folglich* $H_1(M; G) = \{0\}$.

Da in einem metrischen separablen ANR die Homologie als Čech-Homologie und die Dimension als Überdeckungsdimension interpretiert werden kann ([30], [23: Theorem V 1 S. 54]), verschwindet die Homologie von L oberhalb des Grades $l = \dim L$. Ferner ist $H_l L$ bekannt (angekündigt in [40]):

(1.7) $H_q(L; G) = \{0\}$ *für* $q > l$;

$H_l(L; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} = \tilde{H}_{l-1}(M; \mathbb{Z})$.

Wir benötigen hier im Grunde nur eine schwächere Aussage, die unmittelbar aus bekannten Tatsachen folgt: Als Träger der multiplikativen Loop eines die Ebene koordinatisierenden topologischen Ternärkörpers ist M ein H-Raum. Sieht man von der Situation $l = 1$ ab, in der (1.7) ohnehin klar ist, so ist M wegzusammenhängend (1.4a). Nach [6: Theorem 7.2] ist die höchste nicht verschwindende Homologiegruppe $H_k(L; \mathbb{Z}) = H_{k-1}(M; \mathbb{Z})$ von L bzw. M unendlich zyklisch. Dabei ist $k > 1$, falls $l > 1$: sonst wäre nämlich der für $l > 1$ einfach zusammenhängende Raum L nach bekannten Sätzen von Whitehead [44: 7.5.9 S. 399 und 7.6.24 S. 405] kontrahierbar, und L wäre sogar ein AR [20: III 7.2 S. 96]; dies ist nun aber nach [13] ausgeschlossen (die dort vorausgesetzte 'starke Homogenität' ist mit Hilfe von Projektivitäten bequem zu verifizieren). Aus (1.5) und (1.6) folgt schließlich, daß für $l \geqslant 3$ auch $k \geqslant 3$ gilt. Über diese Informationen hinaus besagt (1.7) noch zusätzlich $k = l$; von dieser Präzisierung wird aber im weiteren nie wesentlich Gebrauch gemacht.

Wegen (1.5) und (1.7) erfüllt M als H-Raum die Poincaré-Dualität nach Browder [6: Theorem 7.9]:

(1.8) $H_q(M; G) = H^{l-q-1}(M; G)$.

(1.6) impliziert nach dem universellen Koeffizientensatz [44: 5.5.3 S. 243], daß $H^1(M; G) = \{0\}$ ist für $l \geqslant 3$; damit ergibt sich aus (1.8):

(1.9) *Für* $l \geqslant 2$ *ist* $H_{l-1}(L; G) = \tilde{H}_{l-2}(M; G) = \{0\}$.

Mit dem universellen Koeffizientensatz [44: 5.2.8 S. 222] folgt hieraus als Verallgemeinerung von (1.7) noch

(1.7′) $H_l(L;G) = G = \tilde{H}_{l-1}(M;G)$.

Für einen festen Punkt $z \in A = P \backslash L$ ist die Abbildung

$$\pi : x \mapsto (z \vee x) \cap L$$

eine lokaltriviale Faserung von $P\backslash\{z\}$ (beziehungsweise von $A\backslash\{z\}$) über der Basis L, deren Fasern homöomorph sind zu $L\backslash\{a\}$ (beziehungsweise zu M). Man erhält sogar für jeden Punkt $w \in L$ eine Trivialisierung von π über $L\backslash\{w\}$, indem man die Fasern durch Projektion aus w aufeinander bezieht. Auf $P\backslash\{z\}$ hat π kontrahierbare Fasern. Mit der exakten Homotopiesequenz der Faserung π und dem Satz von Whitehead [44: 7.6.24 S. 405] ergibt sich, daß $\pi : P\backslash\{z\} \to L$ eine Homotopieäquivalenz ist; also gilt

(1.10) $H_q(P\backslash\{z\};G) = H_q(L;G)$.

Insbesondere ist $H_q(P\backslash\{z\};G) = \{0\}$ für $q \geqslant l+1$; da ferner A kontrahierbar ist, ergibt die Mayer-Vietoris-Sequenz für das Paar $(A, P\backslash\{z\})$

(1.11) $H_{q+1}(P;G) = H_q(A\backslash\{z\};G)$ *für* $q \geqslant l+1$.

Schließlich zeigen wir

(1.12) *Für* $l \geqslant 2$ *ist* $H_{2l-1}(P;G) = \{0\} = H_{2l-1}(\mathscr{L};G)$.

In der in topologischer Hinsicht klassischen Situation $l = 2$ ist dies bekannt. Für $l \geqslant 3$ betrachten wir die Spektralsequenz der Faserung $\pi : A\backslash\{z\} \to L$ mit Faser M entsprechend [44: 9.2.17 S. 481]. Für diese Sequenz gilt

$$E^2_{p,q} \cong H_p(L;H_q(M;G)).$$

Nach (1.5), (1.7) und (1.9) verschwinden alle E^2-Terme vom Gesamtgrad $p+q = 2l-2$, also auch die zugehörigen E^∞-Terme und deren Summe $H_{2l-2}(A\backslash\{z\};G)$. (1.12) folgt nun aus (1.11) und durch einen entsprechenden Schluß in der dualen Ebene.

2. Charakterisierung topologischer Ovale

(2.1) *Definition.* Eine Menge O von Punkten einer projektiven Ebene $(P, \mathscr{L})$ heißt ein *Oval*, wenn sie folgende Eigenschaften hat:

(i) Keine Gerade trifft O in mehr als zwei Punkten

(ii) Durch jeden Punkt $x \in O$ geht genau eine Gerade T_x mit

$$T_x \cap O = \{x\}.$$

Eine Gerade heißt *Passante, Tangente* oder *Sekante* je nachdem, ob sie O in 0, 1 oder 2 Punkten schneidet. Mit $\mathscr{L}_O$ bezeichnen wir die Menge aller O schneidenden Geraden, mit O^* die Menge der Tangenten.

(2.2) *Definition.* Das (zweifache) *symmetrische Produkt* eines topologischen Raumes X ist der Bahnenraum

$$X * X := X \times X \bmod \mathbb{Z}_2,$$

wobei $\mathbb{Z}_2$ auf dem kartesischen Produkt durch Vertauschen der Koordinaten wirkt; als Topologie auf $X * X$ betrachtet man die Quotiententopologie.

(2.3) Ist O ein Oval in einer topologischen projektiven Ebene, so induziert die außerhalb der Diagonalen stetige Abbildung

$$O \times O \to \mathscr{L}_O : (x, y) \mapsto \begin{cases} x \vee y, & \text{falls} \quad x \neq y \\ T_y, & \text{falls} \quad x = y \end{cases}$$

eine Bijektion

$$\psi_O : O * O \to \mathscr{L}_O,$$

die außerhalb der Diagonalen Δ_O von $O * O$ stetig ist. Durch Einschränkung erhält man daraus für einen festen Punkt $y \in O$ die Bijektion

$$\psi_y : O \to \mathscr{L}_y : x \mapsto \begin{cases} x \vee y, & \text{falls} \quad x \neq y \\ T_y, & \text{falls} \quad x = y \end{cases}$$

auf das Büschel der Geraden durch y; in $O \backslash \{y\}$ ist ψ_y stetig. Seien im folgenden

$$\varphi_O = \psi_O^{-1} : \mathscr{L}_O \to O * O : L \mapsto L \cap O$$

und

$$\varphi_y = \psi_y^{-1} : \mathscr{L}_y \to O : L \mapsto x \quad \text{mit} \quad L \cap O = \{x, y\}$$

die Umkehrungen.

(2.4) *Definition.* Ein Oval O in einer topologischen projektiven Ebene heißt *topologisches Oval*, wenn die Abbildung φ_O stetig ist.

Bemerkung. Für jedes $y \in O$ ist dann auch die Abbildung φ_y stetig.

(2.5) LEMMA. *O sei ein topologisches Oval in einer kompakten zusammenhängenden projektiven Ebene. Dann ist O kompakt, und die Bijektionen φ_O, ψ_O, φ_y, ψ_y ($y \in O$) sind Homöomorphismen.*

Beweis. $\mathscr{L}_y$ ist kompakt; folglich ist die stetige Bijektion φ_y ein Homöomorphismus, und O ist kompakt. Damit ist auch $\mathscr{L}_O$ kompakt [26: 1.17 und 1.5], und der Rest der Behauptung folgt.

Nach (2.5) ist jedes topologische Oval insbesondere abgeschlossen im Punktraum. Gegenstand dieses Paragraphen ist der Beweis der Umkehrung:

(2.6) SATZ. *In einer kompakten zusammenhängenden projektiven Ebene von endlicher Dimension ist jedes abgeschlossene Oval topologisch.*

Bemerkung. Ein Spezialfall dieses Sachverhalts findet sich bei Groh [19: 2.9] für zur Kreislinie homöomorphe Ovale in zweidimensionalen kompakten projektiven Ebenen. Der Ansatz und der erste Teil unseres Beweises stammen aus [7: Satz B], wo die Argumente allerdings nur in der komplexen projektiven Ebene verwendet werden.

Beweis. Sei O ein abgeschlossenes Oval. Um den Gebietsinvarianzsatz (1.4 b) anwenden zu können, zeigen wir zunächst:

(1) *O enthält eine nichtleere offene Teilmenge U, die zu einer offenen Teilmenge eines Geradenbüschels homöomorph ist.*

Hierzu betrachten wir einen Punkt $y \in O$ und die zugehörige Bijektion $\psi_y : O \to \mathscr{L}_y$, die jedenfalls in $O\backslash\{y\}$ stetig ist. Da $O\backslash\{y\}$ σ-kompakt und $\mathscr{L}_y\backslash\{T_y\}$ ein Bairescher Raum ist, gibt es eine kompakte Teilmenge $X \subseteq O\backslash\{y\}$, deren Bild X^{ψ_y} eine offene Teilmenge U^{ψ_y} von $\mathscr{L}_y\backslash\{T_y\}$ enthält. $U \subseteq O\backslash\{y\}$ ist dann wegen der Stetigkeit von $\psi_y|O\backslash\{y\}$ ebenfalls offen und wird von ψ_y homöomorph abgebildet.

(2) *O ist homöomorph zu einem Geradenbüschel.*

Zum Beweis wechseln wir den Standpunkt und betrachten die Bijektion ψ_x für einen Punkt $x \in U$. Da ψ_x in $O\backslash\{x\}$ als stetig bekannt ist und da O kompakt ist, genügt der Nachweis der Stetigkeit von ψ_x in x.

Zunächst ist die Umkehrung $\varphi_x : \mathscr{L}_x \to O$ von ψ_x stetig bei der Tangente $T_x \in \mathscr{L}_x$, und $U^{\psi_x} = U^{\varphi_x^{-1}}$ ist offen in $\mathscr{L}_x$: Für jede offene Umgebung V von x in O ist nämlich das Urbild von V bei φ_x gleich dem Komplement der Teilmenge $(O\backslash V)^{\psi_x}$ in $\mathscr{L}_x$, und diese Teilmenge ist wegen der Stetigkeit von ψ_x in $O\backslash\{x\}$ kompakt.

Wir wenden nun den Gebietsinvarianzsatz für Geradenbüschel (1.4 b) an, wobei zu beachten ist, daß je zwei Geradenbüschel – etwa vermöge einer Projektivität – homöomorph sind. Er zeigt zunächst, daß ψ_x einen Homöomorphismus von $U\backslash\{x\}$ auf $U^{\psi_x}\backslash\{T_x\}$ vermittelt; folglich ist φ_x als Umkehrung von ψ_x auch in $U^{\psi_x}\backslash\{T_x\}$ und damit überall auf der offenen Teilmenge U^{ψ_x} von $\mathscr{L}_x$ stetig. Wieder mit dem Invarianzsatz ergibt sich daraus, daß φ_x einen Homöomorphismus von U^{ψ_x} auf U induziert, womit die Stetigkeit von $\psi_x = \varphi_x^{-1}$ auch in x gezeigt ist. Insgesamt ist ψ_x eine stetige Bijektion des kompakten Ovals O auf $\mathscr{L}_x$, also ein Homöomorphismus.

(3) *$\psi_O : O * O \to \mathscr{L}$ vermittelt einen Homöomorphismus von $O * O\backslash\Delta_O$ auf die Menge der Sekanten von O; diese ist offen in $\mathscr{L}$, und die Menge O^* der Tangenten an O ist kompakt.*

Die Bijektion ψ_O ist nämlich jedenfalls außerhalb der Diagonalen Δ_O von $O * O$ stetig. Nach (2) ist $O * O\backslash\Delta_O$ lokal homöomorph zum Produkt zweier Geradenbüschel und damit zu $\mathscr{L}$, so daß (3) aus dem Gebietsinvarianzsatz (1.4 b) für $\mathscr{L}$ folgt; daß O^* kompakt ist, ergibt sich mit dem Hinweis, daß wegen der Kompaktheit von O auch die Menge der Passanten offen in $\mathscr{L}$ ist.

(4) Zum Beweis des Satzes genügt es schließlich, die Stetigkeit von ψ_O in Δ_O zu verifizieren: wir wissen dann, daß ψ_O überall stetig und folglich ein Homöomorphismus des kompakten Raums $O * O$ auf $\mathscr{L}_O$ ist, womit die Stetigkeit von $\varphi_O = \psi_O^{-1}$ nachgewiesen ist. Wäre nun ψ_O nicht stetig in Δ_O, so gäbe es eine Folge von Punktepaaren $(x_n, y_n) \in O \times O$, die gegen ein Element (z, z) der Diagonale von $O \times O$ konvergiert und so, daß die Bildgeraden

$$L_n = [(x_n, y_n) \bmod \mathbb{Z}_2]^{\psi_O} = \begin{cases} x_n \vee y_n, & \text{falls} \quad x_n \neq y_n \\ T_{x_n}, & \text{falls} \quad x_n = y_n \end{cases}$$

im kompakten Raum $\mathscr{L}$ gegen eine Gerade L konvergieren, welche jedoch von T_z verschieden ist. Der Punkt z wäre dann in der Grenzgeraden L enthalten, so daß $L \neq T_z$ keine Tangente sein könnte. Wegen der Kompaktheit der Tangentenmenge O^* wären also fast alle L_n ebenso wie $L = \lim L_n$ Sekanten, was angesichts

$$\lim L_n^{\psi_O^{-1}} \in \Delta_O$$

im Widerspruch zu (3) steht.

3. Eigenschaften topologischer Ovale und Nichtexistenzsätze

(3.1) SATZ. *Ein topologisches Oval O in einer kompakten zusammenhängenden projektiven Ebene $(P, \mathscr{L})$ mit* $\dim P < \infty$ *besitzt genau dann eine Passante, wenn* $\dim P = 2$ *ist. Insbesondere ist $\mathscr{L}$ homöomorph zu $O * O$, falls* $\dim P > 2$ *ist.*

Beweis. Ist $\dim P = 2$, so ist $O \cong \mathscr{L}_x \cong S_1$ eine Kreislinie (siehe (2.5) und [32]). Also ist $\mathscr{L}_O \cong S_1 * S_1$ eine Mannigfaltigkeit mit nicht leerem Rand (nämlich ein Möbiusband) und kann daher nicht ganz $\mathscr{L}$ sein; vgl. auch [19: 2.2].

Ist umgekehrt $L \in \mathscr{L}$ eine Passante, so wird L ein H-Raum mit der Multiplikation

$$\mu(x, y) \coloneqq (\varphi_e(x \vee e) \vee \varphi_e(y \vee e)) \cap L,$$

wobei e ein fester Punkt von O ist und φ_e wie in (2.3) definiert wird. Dies verträgt sich (mit den Bezeichnungen aus §1) nur für $l = 1$ mit der Tatsache, daß auch M ein H-Raum ist: Wäre $l \geqslant 2$, so wäre auch M zusammenhängend.

Nach dem Satz von Hopf über die rationale Kohomologie von H-Räumen [44: 5.8.13 S. 269] hätten die Poincaré-Polynome von L und M die Form

$$p_L(t) = \prod_{i=1}^{r} (1 + t^{l_i}), \qquad p_M(t) = \prod_{i=1}^{s} (1 + t^{m_i})$$

mit ungeraden Exponenten l_i und m_i. Nach (1.5) ergäbe sich

$$p_L(t) = t(p_M(t) - 1) + 1,$$

und nach (1.7) wäre keins der beiden Polynome konstant. Einsetzen von $t = -1$ ergibt einen Widerspruch.

Ein anderer Beweis macht davon Gebrauch, daß die H-Multiplikation μ auf einer Passanten L kommutativ ist: Nach [21] ist folglich L homotopieäquivalent zu einem Torus geeigneter Dimension (da nach (1.7) nicht kontrahierbar); für $l > 1$ ist andererseits L einfach zusammenhängend [38: S. 220(3)].

Ein dritter Beweis führt über ein Zerlegungsargument und benützt die Tatsache, daß $\mathscr{L}$ nach (1.4 a) eine Cantor-Mannigfaltigkeit ist: Die Menge O^* der Tangenten an O ist nach (2.5) homöomorph zu O und damit zu einem Geradenbüschel und insbesondere l-dimensional. Da $\mathscr{L}$ lokal homöomorph zum Produkt zweier Geraden ist, hat man nach [14] allgemein $\dim \mathscr{L} \geqslant 2l - 1$; im Fall $l = 2$ weiß man präziser $\dim \mathscr{L} = 4$. Für $l > 1$ ist damit stets $\dim O^* \leqslant \dim \mathscr{L} - 2$ und also $\mathscr{L} \backslash O^*$ zusammenhängend. Andererseits ist sowohl die Menge der Passanten als auch die der Sekanten offen in $\mathscr{L}$ (siehe Beweisteil (3) von (2.6)); falls Passanten existieren, ist also $\mathscr{L} \backslash O^*$ unzusammenhängend und folglich $l = 1$. Mit diesem Argument ist für den Fall, daß die Punktmenge P eine Mannigfaltigkeit ist, ein leicht zugänglicher Beweis gegeben.

(3.2) KOROLLAR 1. *Jede lokalkompakte endlichdimensionale zusammenhängende Möbiusebene ist eben* (*das heißt zweidimensional*).

Bemerkung. Unter der zusätzlichen Voraussetzung, daß die Kreise lokaleuklidisch seien, hat dies schon Groh [18] gezeigt.

Beweis. Ist E der Punktraum einer Möbiusebene der genannten Art, $a \in E$ und K ein Kreis, der nicht durch a geht, so ist K ein topologisches Oval der affinen Ebene $E \backslash \{a\}$ (deren Geraden die Kreise durch a sind). Ergänzt man $E \backslash \{a\}$ zu einer topologischen projektiven Ebene (vgl. [35: 7.15]), so wird die uneigentliche Gerade eine Passante des Ovals K.

Aus (3.1) ergibt sich als weitere Folgerung die Antwort auf eine Frage von H. Mäurer über Ovoide:

(3.3) *Definition*. Ein *Ovoid* in einem mindestens dreidimensionalen projektiven Raum P ist eine Teilmenge $X \subseteq P$, die von jeder Geraden in höchstens zwei Punkten getroffen wird, und deren Tangenten im Punkt

$x \in X$ eine Hyperebene von P füllen. Dabei ist eine Tangente in x eine Gerade L mit $L \cap X = \{x\}$.

(3.4) KOROLLAR 2. *In einem mindestens dreidimensionalen projektiven Raum über den komplexen Zahlen oder den Quaternionen kann es kein abgeschlossenes Ovoid geben.*

Beweis. Wäre X ein abgeschlossenes Ovoid, so wäre jeder mehrpunktige ebene Schnitt $X \cap Q$ ein abgeschlossenes, also topologisches Oval in der Schnittebene Q. Der Durchschnitt von Q mit der Tangentialhyperebene an X in einem Punkt $x \in X \backslash Q$ wäre eine Passante für dieses Oval. Dies steht im Widerspruch zu (3.1), da die komplexe bzw. quaternale projektive Ebene Q die topologische Dimension 4 bzw. 8 hat.

(3.5) SATZ. *Es gibt kein topologisches Oval in einer kompakten projektiven Ebene der endlichen Dimension $d > 4$.*

Beweis. Angenommen, O wäre ein topologisches Oval in einer solchen Ebene. $d > 4$ bedeutet $l \geqslant 3$ (mit den Bezeichnungen von §1). Nach (3.1) hat O keine Passante, so daß der Geradenraum $\mathscr{L}$ homöomorph zu $O * O$ ist. Man erhält so einen Widerspruch zu (1.12), da nach Resultaten von Smith [42] über die Homologie symmetrischer Produkte (am bequemsten zu entnehmen bei Stein [46]) die Gruppe $H_{2l-1}(O * O\,; \mathbb{Z}_2)$ für $l \geqslant 3$ nicht verschwindet. In der Tat: O ist homöomorph zu einem Geradenbüschel (2.5) und folglich zu einer Geraden L, nach (1.2) also homotopieäquivalent zu einem Polyeder K; $O * O$ ist dann homotopieäquivalent zu $K * K$. Ist $l \geqslant 3$, so hat man für $q = 2l - 1$ die Beziehung $q/2 < l \leqslant q - 2$, so daß nach [46: 17.3, S. 583] $\dim H_{2l-1}(O * O; \mathbb{Z}_2) \geqslant \dim H_l(O; \mathbb{Z}_2)$ gilt. Nach (1.7′) ist der $\mathbb{Z}_2$-Vektorraum $H_l(O\,; \mathbb{Z}_2) \cong H_l(L\,; \mathbb{Z}_2)$ nichttrivial.

Falls die Geraden der betrachteten Ebene (und damit auch O) Mannigfaltigkeiten, also nach [4: 2.5] Sphären sind, kann man statt [46] die Arbeit von Liao [25: 5.3–5.5 S. 529, siehe auch S. 539–541] über die Homologie symmetrischer Produkte von Sphären heranziehen.

(3.6) KOROLLAR. *Es gibt keine lokalkompakte topologische Laguerreebene einer endlichen Dimension $d > 4$.*

Beweis. Wäre $(S, \mathscr{Z})$ eine solche Laguerreebene, S der Raum der Speere und $\mathscr{Z}$ der Raum der Zykel, so erhielte man durch Herausnehmen einer Klasse X paralleler Speere eine topologische affine Ebene $(A, \mathscr{L})$ mit $A = S \backslash X$, deren Geraden die Zykel durch einen festen Speer $x \in X$ sowie alle von X verschiedenen Parallelklassen sind. Letztere bilden eine Klasse paralleler Geraden, also einen uneigentlichen Punkt w der affinen Ebene. Ist Z ein Zykel durch einen Speer aus $X \backslash \{x\}$, so wäre $O := (Z \cap A) \cup \{w\}$ ein Oval im projektiven Abschluß von A. Da eine lokalkompakte zusammenhängende Laguerreebene kohärent ist [17], wäre O kompakt, also nach (2.6) ein topologisches Oval, im Widerspruch zu (3.5).

Bemerkung. Mit der Konstruktion des vorangehenden Beweises ergibt sich aus (3.1) auch ein neuer Beweis der bekannten Tatsache, daß je zwei Zykel einer vierdimensionalen lokalkompakten Laguerreebene sich schneiden [17].

Nach Satz (3.5) hat eine endlichdimensionale kompakte projektive Ebene, die ein topologisches Oval enthält, Dimension 2 oder 4. Es zeigt sich nun, daß die Einbettung des topologischen Ovals in die Ebene in vieler Hinsicht sich verhält wie im klassischen Fall eines Kegelschnitts in der reellen oder komplexen projektiven Ebene. Für zweidimensionale Ebenen finden sich die diesbezüglichen Informationen bei Groh [19: §2], allerdings mit wesentlich anderen Beweisen, als wir sie hier im Rahmen einer einheitlichen Behandlung zwei- und vierdimensionaler Ebenen angeben.

(3.7) SATZ. *Es sei O ein topologisches Oval in einer kompakten zusammenhängenden projektiven Ebene $(P, \mathscr{L})$.*

(a) *Ist* $\dim P = 2$, *so ist O homöomorph zur Kreislinie und liegt in einer affinen Unterebene A von P; diese ist homöomorph zu $\mathbb{R}^2$. Die in A beschränkte Komponente B des Komplements von O läßt sich dadurch kennzeichnen, daß durch die Punkte von B nur Sekanten von O gehen, während durch jeden Punkt von $E = P \setminus (B \cup O)$ Passanten, Sekanten und genau zwei Tangenten gehen.*

(b) *Ist* $\dim P = 4$, *so ist O homöomorph zur 2-Sphäre; es gibt keine Passanten, und durch jeden Punkt von $P \setminus O$ gehen genau zwei Tangenten.*

Daraus folgt unmittelbar

(3.8) KOROLLAR. *Ist O ein topologisches Oval in einer endlichdimensionalen kompakten zusammenhängenden projektiven Ebene, so ist die Menge O^* der Tangenten ein Oval der dualen Ebene.*

Bemerkung. Manche Autoren formulieren die Definition eines Ovals bereits selbstdual, siehe etwa [1]. Die hier verwendete Definition scheint jedoch die üblichere zu sein; es ist daher angenehm, daß sie im hier betrachteten Kontext mit der selbstdualen Version äquivalent ist.

Beweis von (3.7). Für $y \in P \setminus O$ ziehen wir im folgenden die *Büschelinvolution*

$$\pi_y : O \to O$$

heran, die die Schnittpunkte der Sekanten durch y mit O vertauscht und genau die Berührpunkte der Tangenten durch y festläßt. Nach (2.5) ist π_y ein Homöomorphismus. Die Surjektion

$$\rho_y : O \to \mathscr{L}_y \cap \mathscr{L}_O : x \mapsto x \vee y$$

induziert einen Homöomorphismus

$$O/\langle \pi_y \rangle \cong \mathscr{L}_y \cap \mathscr{L}_O$$

des Bahnenraums von O nach der von π_y erzeugten Transformationsgruppe mit dem Raum der O schneidenden Geraden durch y.

Im Fall dim $P = 2$ hat nun das Oval O eine Passante L (3.1), so daß O in der affinen Ebene $A = P\backslash L$ enthalten ist. Nach (2.5) ist O homöomorph zu einem Geradenbüschel und also zu einer Kreislinie [32], und A ist homöomorph zur euklidischen Ebene $\mathbb{R}^2$, wie behauptet. Daß durch Punkte von B nur Sekanten gehen, folgt mit Zerlegungsargumenten. Für Aussagen über die Wirkung der Büschelinvolution π_y auf der Kreislinie O sei daran erinnert, daß ein involutorischer Homöomorphismus des Einheitskreises in $\mathbb{R}^2$ topologisch äquivalent entweder zur Antipodenabbildung oder aber zur Spiegelung an einer Ursprungsgeraden des $\mathbb{R}^2$ ist; genau im zweiten Fall ist er orientierungsumkehrend. Daran liest man ab, daß die folgenden Aussagen gleichwertig sind:

(a1) π_y ist orientierungsumkehrend.
(a2) Der Bahnenraum $O/\langle\pi_y\rangle$ ist homöomorph zu einem kompakten Intervall.
(a3) $\mathscr{L}_y \cap \mathscr{L}_O \cong O/\langle\pi_y\rangle$ füllt die Kreislinie $\mathscr{L}_y$ nicht aus, d.h. durch y gehen Passanten.

Treffen diese Aussagen zu, so hat π_y insbesondere genau zwei Fixpunkte, durch y gehen also genau zwei Tangenten an O, und $\mathscr{L}_y$ enthält Passanten, Tangenten und Sekanten. Diese Situation liegt nun insbesondere vor, wenn man y auf der Passanten L wählt (a3). Dasselbe gilt dann für alle Punkte y aus der zusammenhängenden Menge $E \supseteq L$, da π_y nach (2.5) stetig von y abhängt und insbesondere für alle $y \in E$ das gleiche Orientierungsverhalten hat. Damit ist (a) bewiesen.

Im Fall dim $P = 4$ ist $\mathscr{L}_y = \mathscr{L}_y \cap \mathscr{L}_O$, da nach (3.1) keine Passanten existieren. Nach [36], [4: 2.5] und (2.5) sind $\mathscr{L}_y = \mathscr{L}_y \cap \mathscr{L}_O \cong O/\langle\pi_y\rangle$ ($y \in P\backslash O$) und O homöomorph zur 2-Sphäre, so daß π_y nicht äquivalent zur Spiegelung der 2-Sphäre an einer Äquatorialebene oder zur Antipodenabbildung sein kann. Nach [5], [24] ist folglich entweder π_y äquivalent zur Halbdrehung der 2-Sphäre um eine Polachse und hat dann genau zwei Fixpunkte, so daß durch y genau zwei Tangenten an O gehen, oder aber π_y ist die Identität. Käme $\pi_y = \mathrm{id}$ für irgendeinen Punkt $y \in P\backslash O$ tatsächlich vor, so wäre $L_y = O^*$, und durch keinen weiteren Punkt ginge mehr als eine Tangente, ein Widerspruch. Damit ist auch (b) bewiesen.

Bezüglich Büschelinvolutionen haben wir mit diesem Beweis folgendes gezeigt:

(3.9) *Unter den Voraussetzungen von* (3.7) *sei y ein äußerer Punkt von O, (d.h. durch y mögen zwei Tangenten an O gehen), und sei* π_y *die zu y gehörige Büschelinvolution von O. Dann gilt: Ist* dim $P = 2$, *so ist* π_y *topologisch äquivalent zur Spiegelung des Einheitskreises von* $\mathbb{R}^2$ *an einer Ursprungsgeraden. Ist* dim $P = 4$, *so ist* π_y *topologisch äquivalent zur Halbdrehung der 2-Sphäre um eine Polachse.*

Das nächste Korollar ist als Umformulierung und Abrundung der vorstehenden Ergebnisse zu verstehen. Es erlaubt, die Einbettung von beliebigen topologischen Ovalen in zwei- oder vierdimensionalen kompakten Ebenen zu vergleichen mit der Einbettung von Kegelschnitten in die klassische reelle oder komplexe projektive Ebene:

(3.10) KOROLLAR. *Seien* $(P, \mathscr{L})$ *und* $(P', \mathscr{L}')$ *zwei kompakte projektive Ebenen gleicher endlicher Dimension, seien* O *bzw.* O' *topologische Ovale in* $(P, \mathscr{L})$ *bzw.* $(P', \mathscr{L}')$, *sei* L *eine Sekante von* O *und* L' *eine Sekante von* O'. *Dann existiert ein Homöomorphismus von* P *auf* P', *der* O *auf* O', L *auf* L' *und jede Tangente an* O *auf eine Tangente an* O' *abbildet.*

Beweis. (3.8) gestattet uns, das Problem zu dualisieren. Wir studieren also die Einbettungen der Tangentenmengen O^* und O'^* an O bzw. O' in $\mathscr{L}$ bzw. $\mathscr{L}'$.

Seien $z \in P$ und $z' \in P'$ äußere Punkte bezüglich O bzw. O', d.h. Punkte, durch die zwei Tangenten gehen. Nach (3.9) sind die zugehörigen Büschelinvolutionen von O bzw. O' äquivalent; es existiert also ein Homöomorphismus h von O auf O' mit der folgenden Eigenschaft:

(∗) Ist $K \in \mathscr{L}_z$ und $\emptyset \neq K \cap O = \{x, y\}$, so gilt für die Verbindungsgerade $K' = x^h \vee z' \in \mathscr{L}'$, daß $K' \cap O = \{x^h, y^h\}$.

Sei nun

$$h * h : O * O \to O' * O'$$

der von $h \times h : O \times O \to O' \times O'$ induzierte Homöomorphismus. Mit den Bezeichnungen von (2.1) und (2.3) betrachten wir die Abbildung

$$H = \varphi_O(h * h)\psi_{O'} : \mathscr{L}_O \xrightarrow{\varphi_O} O * O \xrightarrow{h*h} O' * O' \xrightarrow{\psi_{O'}} \mathscr{L}'_{O'}.$$

Nach (2.5) ist H ein Homöomorphismus. Man verifiziert unmittelbar, daß H die folgenden Eigenschaften hat:

(i) $(O^*)^H = O'^*$

(ii) Für $x \in O$ ist $\mathscr{L}_x^H = \mathscr{L}'_{x^H}$

(iii) $(\mathscr{L}_z \cap \mathscr{L}_O)^H = \mathscr{L}_{z'} \cap \mathscr{L}'_{O'}$;

zu (iii) beachte man (∗).

Im Fall vierdimensionaler Ebenen ist damit der Abschluß des Beweises nur noch eine Deutungsfrage. Es ist dann nämlich $\mathscr{L}_O = \mathscr{L}$ und $\mathscr{L}'_{O'} = \mathscr{L}'$, da nach (3.1) keine Passanten existieren. Der Homöomorphismus H beweist somit die Behauptung für die dualen Ovale O und O' und ihre Einbettung in $\mathscr{L}$ und $\mathscr{L}'$ aufgefaßt als Punkträume der dualen Ebenen, also für $(O^*, \mathscr{L})$ und $(O'^*, \mathscr{L}')$ statt (O, P) und (O', P'). Dabei entspricht (ii) der Aussage, daß Tangenten in Tangenten übergeführt werden und (iii) der Aussage, daß eine vorgegebene Sekante in eine vorgegebene Sekante abgebildet werden kann, da Geradenbüschel durch äußere Punkte genau die Sekanten des dualen Ovals sind.

Im Fall zweidimensionaler Ebenen seien E bzw. E' die Mengen der äußeren Punkte von P bzw. P' bezüglich O und O'. Die Dualisierung der Konstruktion von H besagt dann die Existenz eines Homöomorphismus von $\bar{E} = E \cup O$ auf $\overline{E'} = E' \cup O'$ mit folgenden Eigenschaften:

(i*) O wird in O' übergeführt

(ii*) Das Bild einer Tangenten an O ist eine Tangente an O' (man beachte, daß nach (3.7a) alle Punkte einer Tangente – abgesehen vom Berührpunkt – äußere Punkte sind)

(iii*) $L \cap \bar{E}$ wird auf $L' \cap \overline{E'}$ abgebildet.

Nach (3.7) sind E und $B = P \backslash \bar{E}$ (bzw. E' und $B' = P' \backslash \overline{E'}$) die Zusammenhangskomponenten von $P \backslash O$ (bzw. $P' \backslash O'$). Eine direkte Anwendung des Schoenflies-Satzes zeigt daher, daß der genannte Homöomorphismus $\bar{E} \to \overline{E'}$ nach B hinein zu einem Homöomorphismus von ganz P auf P' fortgesetzt werden kann, der L auf L' abbildet.

4. Polaritäten und Ovale

(4.1) Es sei π eine stetige Polarität einer kompakten endlichdimensionalen zusammenhängenden projektiven Ebene $(P, \mathscr{L})$. Sie wirkt in natürlicher Weise auf dem *Fahnenraum* $\mathscr{F}$ (dem Graphen der Inzidenzrelation). Die Fixpunktmenge von π in $\mathscr{F}$ ist kompakt, ebenso deren beide Projektionen nach P und $\mathscr{L}$ (die Menge der *absoluten Punkte* bzw. der *absoluten Geraden* von π). Falls die absoluten Punkte von π ein Oval O_π bilden, so ist O_π demnach topologisch, siehe (2.6). In diesem Fall nennen wir π eine *ovale Polarität* und O_π ein *polares Oval.*

Nach (3.5) impliziert die Existenz einer stetigen ovalen Polarität, daß P zwei- oder vierdimensional ist. Beispiele von ovalen Polaritäten sind die orthogonalen Polaritäten vom Index 1 der reellen und die vom Index 0 der komplexen projektiven Ebene. Nicht oval sind die übrigen klassischen Polaritäten der reellen oder komplexen projektiven Ebene. Bedürftig [3] hat gezeigt, daß in zweidimensionalen kompakten projektiven Ebenen jede Polarität, die absolute Punkte besitzt, oval ist; er hat außerdem Beispiele solcher Polaritäten angegeben. Wir werden daher hier nur den Fall vierdimensionaler Ebenen diskutieren, obwohl unsere Argumente die von Bedürftig verallgemeinern, also auch im zweidimensionalen Fall anwendbar sind. Vorbild sind die Methoden der endlichen Geometrie, vgl. [22: chap. 12].

(4.2) LEMMA. *Ist π eine stetige Polarität einer kompakten endlichdimensionalen zusammenhängenden projektiven Ebene und L eine nicht absolute Gerade, so ist der Homöomorphismus*

$$\pi_L : L \to L : x \mapsto x^\pi \cap L$$

eine Involution.

Bemerkung. Die Fixpunkte von π_L sind genau die absoluten Punkte von π auf L.

Beweis. Es ist $\pi_L^2 = \mathrm{id}$. Um zu beweisen, daß π_L nicht die Identität ist, nutzen wir die Tatsache aus, daß durch einen absoluten Punkt x von π genau eine absolute Gerade, nämlich x^π geht. Wäre also π_L die Identität, d.h. jeder Punkt von L absolut, so wären die absoluten Geraden von π genau die Polaren $x^\pi = x \vee L^\pi$ der Punkte $x \in L$, und die absoluten Punkte von π wären genau die Punkte von L. Auf einer weiteren Geraden K, die L^π nicht enthält, hätte also der Homöomorphismus π_K genau einen Fixpunkt, nämlich $p = K \cap L$. Also würde π_K einen fixpunktfreien Homöomorphismus der Ordnung 2 des nach [35, 7.11] kontrahierbaren Raums $K \backslash \{p\}$ induzieren, was nach einem bekannten Satz von Smith [43] nicht angeht. Wir vermerken noch, daß im Fall zwei- oder vierdimensionaler Ebenen der Rückgriff auf Smith-Sätze umgangen werden kann, indem man beachtet, daß dann eine Gerade homöomorph zur Kreislinie bzw. zur 2-Sphäre ist; die möglichen Fixpunktmengen der involutorischen Homöomorphismen dieser Räume sind dann explizit bekannt (für die 2-Sphäre siehe [5], [24]).

(4.3) SATZ. *Für eine stetige Polarität π einer vierdimensionalen kompakten projektiven Ebene sind die folgenden Aussagen paarweise äquivalent:*

(o) *π ist oval.*

(a1) *Jede nicht absolute Gerade trägt genau zwei absolute Punkte.*

(a2) *Auf jeder nicht absoluten Geraden L wirkt die Involution π_L aus* (4.2) *orientierungstreu.*

(e1) *Es existiert eine nicht absolute Gerade, die genau zwei absolute Punkte trägt.*

(e2) *Es existiert eine nicht absolute Gerade L, deren zugehörige Involution π_L orientierungstreu ist.*

Bemerkung. Man beachte, daß jede Gerade der in Rede stehenden Ebene homöomorph zur 2-Sphäre ist.

Beweis. (o) $\Leftrightarrow$ (a1): Die Äquivalenz der ersten beiden Aussagen ist eine unmittelbare Konsequenz aus Satz (3.1), wonach Ovale in vierdimensionalen kompakten Ebenen keine Passanten haben.— Die Äquivalenzen

(a1) $\Leftrightarrow$ (a2) und (e1) $\Leftrightarrow$ (e2) ergeben sich folgendermaßen: Die absoluten Punkte auf einer nicht absoluten Geraden L sind genau die Fixpunkte des involutorischen Homöomorphismus π_L von L. Nach Brouwer [5] und Kerékjártó [24] sind nun aber unter den involutorischen Homöomorphismen der 2-Sphäre gerade diejenigen orientierungstreu, die genau zwei Fixpunkte haben (nämlich die Konjugierten der Halbdrehung um eine Polachse).— Die Implikationen

(a1) $\Rightarrow$ (e1) bzw. (a2) $\Rightarrow$ (e2) sind trivial, so daß es schließlich genügt,

(e2) $\Rightarrow$ (o) zu zeigen. Die bereits bekannte Äquivalenz von (o) und (a2) legt nahe, daß man dabei das Orientierungsverhalten von π_L für verschiedene nicht absolute Geraden L zu vergleichen hat; hierzu dient die folgende

Vorüberlegung. Auf zwei verschiedenen nicht absoluten Geraden L_0 und L_1 ist das Orientierungsverhalten von π_{L_0} und π_{L_1} jedenfalls dann dasselbe, wenn der Schnittpunkt $L_0 \cap L_1$ absolut ist.

Dann geht nämlich durch $a = L_0 \cap L_1$ genau eine absolute Gerade (die Polare $A = a^\pi$). Im zur 2-Sphäre homöomorphen Büschel der Geraden durch a gibt es also einen L_0 und L_1 verbindenden Weg L_t ($t \in [0, 1]$) so, daß keine der Zwischengeraden L_t absolut ist. Wir wählen nun einen beliebigen Punkt $z \in A \setminus \{a\}$; wegen $z \notin \bigcup_{t \in [0,1]} L_t$ kann man die Perspektivitäten $\sigma_t : L_1 \to L_t$ mit Zentrum z betrachten. Die Homöomorphismen $\sigma_t \pi_{L_t} \sigma_t^{-1}$ von L_1 sind dann isotop, so daß das Orientierungsverhalten für alle π_{L_t} dasselbe ist; dies war für unsere Vorüberlegung zu zeigen.

Entsprechend Bedingung (e2) gebe es nun eine nicht absolute Gerade L, auf der π_L orientierungstreu wirkt. Um zu zeigen, daß dann π oval ist, hat man eine beliebige nicht absolute Gerade $K \neq L$ zu betrachten, die überhaupt absolute Punkte enthält – um zunächst denkbare Passanten braucht man sich hier nicht zu kümmern – und zu zeigen, daß sie dann genau zwei absolute Punkte enthält, daß also π_K wie π_L orientierungstreu ist.

Auf L liegen nach Voraussetzung genau zwei absolute Punkte; insbesondere existiert ein absoluter Punkt a in $L \setminus L \cap K$. Sei b einer der absoluten Punkte auf K. Die Verbindungsgerade $K' = a \vee b$ ist nicht absolut, da sie zwei absolute Punkte enthält. Nach unserer Vorüberlegung hat $\pi_{K'}$ dasselbe Orientierungsverhalten wie π_L einerseits und π_K andererseits, so daß mit π_L auch π_K orientierungstreu ist, was zu zeigen war.

(4.4) *Bemerkungen*. In der Situation von (4.3) ist die lokale Forderung der Orientierungstreue von π_L auf einer nicht absoluten Geraden L gleichwertig mit der globalen Aussage, daß π auf dem Fahnenraum $\mathscr{F}$ orientierungstreu wirkt. Um das zu sehen, ist eine feine Analyse des Kohomologierings von $\mathscr{F}$ auf der Basis der Ergebnisse von Breitsprecher [4] erforderlich, die der erstgenannte Autor durchgeführt hat (siehe [50: 9.24]).

Ein bekannter Satz von Segre [41] besagt, daß in endlichen desarguesschen Ebenen von ungerader Ordnung jedes Oval polar (ein Kegelschnitt) ist. Ein analoges Ergebnis für kompakte Ovale in der komplexen projektiven Ebene wurde vom erstgenannten Autor in [7] erzielt.

Bezüglich der von den Büschelinvolutionen gebildeten Permutationsstruktur $\mathscr{B}(O)$ auf einem Oval O hat Buekenhout in [8] gezeigt, daß genau dann ein Kegelschnitt O' in einer papposschen Ebene existiert mit $\mathscr{B}(O') \cong \mathscr{B}(O)$ wenn die von $\mathscr{B}(O)$ erzeugte Gruppe 3-regulär ist. Diese Bedingung kann für topologische Ovale abgeschwächt werden [27: 3.1].

5. Beispiele

Außer den Kegelschnitten der komplexen projektiven Ebene waren unseres Wissens bislang keine weiteren Beispiele von topologischen Ovalen in vierdimensionalen kompakten Ebenen bekannt. In diesem Abschnitt konstruieren wir nun Beispiele für eine ganze Ebenenfamilie, nämlich in den Ebenen über den ein- und zweidimensionalen Hurwitz-Ternärkörpern [31] mit kommutativer additiver Gruppe; wir werden zeigen, daß jede dieser Ebenen sowohl polare als auch nicht polare topologische Ovale enthält. Gerade Hurwitz-Ternärkörper zu betrachten, wurde uns nahegelegt durch ihre Ähnlichkeit mit den 'Ternaren', die entstehen, wenn man nach Artzy [1] eine Ebene an Hand eines in ihr enthaltenen Ovals koordinatisiert. Mit dem Hinweis auf diese Ähnlichkeit soll jedoch kein tieferer Zusammenhang behauptet werden.

(5.1) Unter einem *Hurwitz-Ternärkörper* verstehen wir mit [31] einen topologischen Ternärkörper K, der linear ist, dessen additive Loop assoziativ (also eine Gruppe) ist, und dessen multiplikative Loop isomorph ist zur multiplikativen Loop einer der vier klassischen Hurwitzschen Divisionsalgebren. Die wie in allen Ternärkörpern geforderte Planaritätsbedingung läßt sich dann so aussprechen, daß für $a \neq b$ die Gleichung

$$-bx + ax = c$$

stets eindeutig nach x aufgelöst werden kann; außerdem soll die Lösung stetig von den Parametern abhängen.

Wir wollen einen Hurwitz-Ternärkörper K *abelsch* nennen, wenn seine Addition und Multiplikation kommutativ sind. K ist dann höchstens zweidimensional (die Multiplikation der höherdimensionalen klassischen Hurwitzschen Divisionsalgebren ist ja nicht kommutativ); die additive und die multiplikative Gruppe von K sind also getrennt isomorph zur additiven und multiplikativen Gruppe der reellen Zahlen bzw. der komplexen Zahlen [35: 7.22]. Falls der abelsche Hurwitz-Ternärkörper K *nichtklassisch*, d.h. nicht sogar insgesamt isomorph zum topologischen Körper der reellen oder komplexen Zahlen ist, gilt in K kein Distributivgesetz [35: 7.24 ff.]. Plaumann und Strambach haben in [31] eine umfangreiche Klasse von Beispielen solcher Ternärkörper angegeben.

Im folgenden sei K stets ein abelscher Hurwitz-Ternärkörper. Wir definieren die *Halbierungsfunktion* $h : K \to K$ durch die Gleichung

$$h(x) + h(x) = x.$$

In der projektiven Ebene $\mathscr{P}(K)$ über K bezeichnen wir die uneigentliche Gerade mit W, den uneigentlichen Punkt der ersten Koordinatenachse X mit u und den der zweiten Koordinatenachse Y mit v.

(5.2) In Ergänzung zu [31] stellen wir hier einige Informationen über den Lenz-Barlotti-Typ der projektiven Ebene über einem nichtklassischen abelschen Hurwitz-Ternärkörper K zusammen, die wir im Hinblick auf Polaritäten benötigen.

Da K assoziative Addition und Multiplikation hat, ist die Ebene (v, W) - transitiv und (u, Y) - transitiv [11: 3.1.22 S. 130], hat also mindestens Typ II.2. Da K nach Voraussetzung nichtklassisch und also nichtdistributiv ist, kann angesichts der Lenz-Barlotti-Klassifikation (siehe [11: 3.1.20 S. 123 ff.]) $\mathscr{P}(K)$ keine Translationsebene und auch nicht dual zu einer solchen sein ([11: 3.1.22c, d]). Insgesamt kommen als Lenz-Barlotti-Typ von $\mathscr{P}(K)$ nur die Typen II.2 oder III.2 in Frage.

In beiden Fällen ist (u, Y) das einzige nichtinzidente Punkt-Geraden-Paar, dessen zugehörige Homologiegruppe transitiv ist. Da die Typen II.2 und III.2 selbstdual sind, muß daher jede Polarität von $\mathscr{P}(K)$ den Punkt u auf Y abbilden; u ist also nie absoluter Punkt einer Polarität.

Übrigens tritt Lenz-Typ III in diesem Zusammenhang tatsächlich auf, was in [31] offensichtlich übersehen wurde: Koordinatisiert man nämlich eine Moulton-Ebene, indem man die 'Knickgerade' als zweite Koordinatenachse verwendet, so entsteht als Koordinatenbereich ein abelscher Hurwitz-Ternärkörper. Nach [45] haben die Moulton-Ebenen den Lenz-Typ III, nebenbei gesagt als einzige unter den kompakten zusammenhängenden projektiven Ebenen ([33: Satz 4.6 S. 165], [37], [39]). Mit den Polaritäten der Moulton-Ebenen befaßt sich [34].

Wir vermerken noch als Kontrast, daß bei den Ebenen über nichtabelschen Hurwitz-Ternärkörpern neben den in [31] genannten Lenz-Barlotti-Typen II.1 und II.2 auch Translationsebenen auftreten, nämlich die Ebenen vom Lenz-Typ IVa.2 über den vierdimensionalen lokalkompakten Fastkörpern, die bekanntlich vollständig klassifiziert sind (vgl. etwa [35: 7.26]).

(5.3) SATZ. *In der projektiven Ebene über einem abelschen Hurwitz-Ternärkörper K ist*

$$O_\pi := \{(x, h(x^2))\,;\, x \in K\} \cup \{v\}$$

ein (topologisches) polares Oval; dabei ist h die Halbierungsfunktion von K.

Beweis. Die Identität ist ein Antiautomorphismus von K. Man erhält also [11: S. 157] eine stetige Polarität π der Ebene über K, indem man den Punkt (c, d) der affinen Ebene abbildet auf die Gerade

$$(c, d)^\pi = L_{c,-d} = \{(x, xc - d);\, x \in K\}.$$

Man rechnet leicht nach, daß die angegebene Menge O_π genau aus den absoluten Punkten von π besteht. Im Fall dim $K = 1$ folgt die Behauptung aus der Tatsache, daß in zweidimensionalen kompakten projektiven Ebenen alle Polaritäten mit absoluten Punkten oval sind [3: 2.2]. Im Fall dim $K = 2$, also bei vierdimensionaler Ebene, wenden wir (4.3) an; es genügt zu bemerken, daß die zweite Koordinatenachse $Y = \{(0, y)\,;\, y \in K\} \cup \{v\}$ genau zwei absolute Punkte trägt, nämlich den Ursprung $(0, 0)$ und den uneigentlichen Punkt v.

Als direkte Folgerung ergibt sich

(5.4) *In jedem abelschen Hurwitz-Ternärkörper gilt:*

(i) *Für* $0 \neq a \in K$ *und* $b \in K$ *hat die Gleichung*

(∗) $\qquad x^2 + b = ax + ax$

genau eine Lösung, falls $b = a^2$, *und sonst genau zwei Lösungen oder keine Lösung. Ist* dim $K = 2$, *so existieren stets Lösungen.*

(ii) *Für* $x \to \infty$ *in* K *gilt* $h(x^2)x^{-1} \to \infty$.

Beweis. Gleichung $(*)$ ist gleichbedeutend mit $ax - h(b) = h(x^2)$; ihre Lösungen entsprechen also den Schnittpunkten $(x, h(x^2))$ des Ovals O_π aus (5.3) mit der Geraden $L_{a,-h(b)}$. Folglich existieren höchstens zwei Lösungen; und für dim $K = 2$, also bei vierdimensionaler Ebene, existieren stets Lösungen, da dann O_π keine Passanten hat (3.1). Eine eindeutige Lösung erhält man genau dann, wenn die Gerade $L_{a,-h(b)}$ eine Tangente an O_π ist, wenn also ihr Polpunkt $(L_{a,-h(b)})^\pi = (a, h(b))$ auf dem Oval O_π liegt; dies bedeutet $h(a^2) = h(b)$ und mithin $b = a^2$, wie behauptet. Die Aussage (ii) drückt aus, daß die Steigung der Ursprungsgeraden durch den Punkt $(x, h(x^2)) \in O_\pi$ für $x \to \infty$ gegen ∞ konvergiert. Damit gleichwertig ist $(x, h(x^2)) \to v$, was aus der Kompaktheit (2.5) des polaren topologischen Ovals O_π folgt.

Wir haben diese Konsequenzen aus (5.3) hauptsächlich zu dem Zweck notiert, sie im folgenden für die Behandlung eines zweiten, nicht polaren Ovals auszuwerten. Dabei werden wir bemerkenswerterweise im Fall dim $K = 2$ mit diesen Informationen allein auskommen, während in Ebenen über eindimensionalen Hurwitz-Ternärkörpern Spezialargumente nötig sind:

(5.5) SATZ. *In der projektiven Ebene über einem nichtklassischen abelschen Hurwitz-Ternärkörper* K *ist die Menge*

$$O := \{(z^2, z + z)\,;\, z \in K\} \cup \{u\}$$

ein nicht polares topologisches Oval. Die Tangente im Punkt $(c^2, c + c)$ *mit* $0 \neq c \in K$ *ist die Gerade*

$$L_{c^{-1},c} = \{(x, c^{-1}x + c)\,;\, x \in K\}.$$

Beweis. (1) Daß O kein polares Oval ist, folgt aus (5.2), wonach u kein absoluter Punkt einer Polarität sein kann. Nach (2.6) haben wir zu zeigen, daß O ein Oval und abgeschlossen in der projektiven Ebene ist. Wir überlegen zunächst, daß es hierzu genügt, die folgenden zu (5.4) analogen Aussagen zu beweisen:

(i) *Für* $0 \neq m \in K$ *und* $b \in K$ *hat die Gleichung*

$(**)$ $\qquad mz^2 + b = z + z$

keine oder genau zwei Lösungen für $b \neq m^{-1}$ *und für* $b = m^{-1}$ *genau eine Lösung, nämlich* $z = m^{-1}$.

(ii) *Für* $z \to \infty$ *in* K *gilt* $(z + z)z^{-2} \to 0$.

Die zweite Koordinatenachse Y und die uneigentliche Gerade sind nämlich offensichtlich Tangenten an O; die erste Koordinatenachse X und jede zu ihr parallele Gerade hat mit O genau zwei Schnittpunkte, von denen der eine u ist, und die Parallelen $\{(c, y) ; y \in K\}$ zu Y mit $0 \neq c \in K$ haben mit O zwei Schnittpunkte oder keinen Schnittpunkt, je nachdem, ob c in K ein Quadrat ist oder nicht. (i) besagt, daß auch die übrigen Geraden $L_{m,b}$ $(m \neq 0)$ mit O höchstens zwei Schnittpunkte haben, und daß $L_{m,m^{-1}}$ die einzige Tangente an O im Punkt $(m^{-2}, m^{-1} + m^{-1})$ ist; damit ist dann O als Oval bestätigt. (ii) bedeutet, daß die Steigung der Ursprungsgerade durch den Punkt $(z^2, z + z) \in O$ für $z \to \infty$ gegen 0 konvergiert, ist also gleichwertig damit, daß $(z^2, z + z)$ für $z \to \infty$ gegen den uneigentlichen Punkt $u = O \cap W$ strebt. Hieraus folgt die Kompaktheit von O, da der eigentliche Teil von O durch Vertauschen der Koordinaten aus dem Graphen der stetigen Funktion $x \mapsto h(x)^2$ entsteht, als Teilraum der affinen Ebene also abgeschlossen und homöomorph zu K ist.

(2) Ist $\dim K = 2$, so lassen sich nun (i) und (ii) auf (5.4) zurückführen, da dann in K wie in der multiplikativen Gruppe der komplexen Zahlen jedes Element ein Quadrat ist:

Für (i) schreibe man hierzu $m = a^{-2}$ mit $a \in K\backslash\{0\}$ und substituiere $z = ax$; damit geht Gleichung (∗∗) über in die Gleichung (∗) aus (5.4i). Für (ii) wähle man x in Abhängigkeit von z als Quadratwurzel von $z + z$; mit z strebt dann auch x gegen ∞, und aus (5.4ii) folgt $(z + z)^{-1}z^2 = x^{-2}h(x^2)^2 = (h(x^2)x^{-1})^2 \to \infty$.

(3) In der Situation $\dim K = 1$, die wir im folgenden voraussetzen, müssen wir anders argumentieren:

Für $0 \neq m \in K$ und $b \in K$ existiert nach der Planaritätsbedingung eines topologischen Ternärkörpers zu jedem $z \in K\backslash\{m^{-1}\}$ genau ein Element $z^\iota \in K$ mit

$$mz \cdot z^\iota + b = z + z^\iota,$$

und z^ι hängt stetig von z ab. Die Fixpunkte der dadurch gegebenen stetigen Abbildung $\iota : K\backslash\{m^{-1}\} \to K : z \mapsto z^\iota$ sind genau die von $z = m^{-1}$ verschiedenen Lösungen der Gleichung (∗∗) aus (i).

Wie man sofort sieht, ist $z = m^{-1}$ genau für $b = m^{-1}$ eine Lösung von (∗∗). In dieser Situation ist ι die konstante Abbildung $z^\iota = m^{-1}$, so daß ι keine Fixpunkte in $K\backslash\{m^{-1}\}$ und daher (∗∗) keine weiteren Lösungen hat.

Im folgenden sei $b \neq m^{-1}$. Dann sind die Fixpunkte von ι in $K\backslash\{m^{-1}\}$ genau die Lösungen von (∗∗). Ferner folgt unmittelbar aus der Definition, daß z^ι von m^{-1} verschieden ist, und wegen der Symmetrie der ι definierenden Gleichung ist $(z^\iota)^\iota = z$. Also ist ι ein Homöomorphismus der Ordnung höchstens 2 von $K\backslash\{m^{-1}\}$. Auf keiner der beiden Zusammenhangskomponenten von $K\backslash\{m^{-1}\}$ kann ι die Identität bewirken: sonst wären alle ihre Punkte und damit im Grenzwert auch $z = m^{-1}$ Lösungen von (∗∗), im Widerspruch zu $b \neq m^{-1}$. Entweder vertauscht also ι die Zusammenhangskomponenten von $K\backslash\{m^{-1}\}$, oder aber ι bewirkt auf jeder der beiden Zusammenhangskomponenten einen involutorischen Homöomorphismus. Im ersten Fall hat ι keine Fixpunkte und damit (∗∗) keine Lösungen. Im zweiten

Fall liegt in jeder der beiden Zusammenhangskomponenten (welche zu $\mathbb{R}$ homöomorph sind) genau ein Fixpunkt von ι, also genau eine Lösung von (**). Damit ist (i) bewiesen. Für den Spezialfall $b = 0$ ist darüber hinaus folgendes gezeigt:

Die Gleichung

$$mz^2 = z + z$$

hat für festes $m \in K\backslash\{0\}$ außer der trivialen Lösung $z = 0$ genau eine nichttriviale Lösung $z = m^\zeta \neq 0$. Diese liegt in derjenigen Zusammenhangskomponente von $K\backslash\{m^{-1}\}$, die die Lösung 0 nicht enthält; insbesondere hat man:

(+) Für $m \to 0$ strebt $m^\zeta \to \infty$.

Die so definierte Abbildung $\zeta : K\backslash\{0\} \to K\backslash\{0\}$ hat als Umkehrung die stetige Abbildung $z \mapsto (z + z)z^{-2}$, ist also ein Homöomorphismus. Sei $\hat{K} = K \cup \{\infty\}$ die Einpunktkompaktifizierung von K. Nach der eben hergeleiteten Konvergenzbeziehung (+) läßt sich ζ durch $0^\zeta = \infty$ zu einer stetigen bijektiven Abbildung von K auf $\hat{K}\backslash\{0\}$ fortsetzen. Da K und $\hat{K}\backslash\{0\}$ homöomorph zu $\mathbb{R}$ sind, erhält man dadurch wieder einen Homöomorphismus; für $z \to \infty$ strebt folglich $(z + z)z^{-2} = z^{(\zeta^{-1})}$ gegen $0 = \infty^{(\zeta^{-1})}$, wie in (ii) behauptet. Damit ist Satz (5.5) auch für $\dim K = 1$ bewiesen.

Wenn man die Menge der Tangenten an das nicht polare Oval aus (5.5) mit der Polarität aus (5.3) abbildet, erhält man nach (3.8) wieder ein Oval:

(5.6) KOROLLAR. *In der projektiven Ebene über einem nichtklassischen abelschen Hurwitz-Ternärkörper K ist die Menge*

$$O := \{(x, -(x^{-1})) ; x \in K\} \cup \{u\} \cup \{v\}$$

ein nicht polares topologisches Oval.

Bemerkung. Man könnte auch versuchen, (5.6) direkt zu beweisen und daraus umgekehrt (5.5) durch Dualisierung herzuleiten. Ein direkter Beweis, daß in (5.6) ein Oval vorliegt, ist uns jedoch nicht gelungen.

BIBLIOGRAPHIE

1. Artzy, R., 'Non-euclidean incidence planes', *Israel J. Math.* **4**, 43–53 (1966).
2. Barlotti, A., 'Sulle 2-curve nei piani grafici', *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova* **37**, 91–97 (1967).
3. Bedürftig, T., 'Polaritäten ebener projektiver Ebenen', *J. Geometry* **5**, 39–66 (1974).
4. Breitsprecher, S., 'Projektive Ebenen, die Mannigfaltigkeiten sind', *Math. Z.* **121**, 157–174 (1971).
5. Brouwer, L.E.J., 'Über die periodischen Transformationen der Kugel', *Math. Ann.* **80**, 39–41 (1919).
6. Browder, W., 'Torsion in *H*-spaces', *Ann. of Math.* (2) **74**, 24–51 (1961).
7. Buchanan, T., 'Ovale und Kegelschnitte in der komplexen projektiven Ebene', *Math.-Phys. Semesterber.* **26**, 244–260 (1979).
8. Buekenhout, F., 'Étude intrinsèque des ovales', *Rend. Mat.*, Sec. 5, **25**, 333–393 (1966).

9. Chapman, T. A., *Lectures on Hilbert Cube Manifolds*, Amer. Math. Soc., Providence, 1976.
10. de Lyra, C.B., 'On spaces of the same homotopy type as polyhedra', *Bol. Soc. Mat. São Paulo* **12**, 43–62 (1957).
11. Dembowski, P., *Finite Geometries*, Springer, Berlin–Heidelberg–NewYork, 1968.
12. Dugundji, J., 'Absolute neighborhood retracts and local connectedness in arbitrary metric spaces', *Compositio Math.* **13**, 229–246 (1958).
13. Fadell, E.R., 'A note on the non-existence of strongly homogeneous AR's', *Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys.* **12**, 531–534 (1964).
14. Fàry, I., 'Dimension of the square of a space', *Bull. Amer. Math. Soc.* **67**, 135–137 (1961).
15. Glock, E., 'Eine Menge mit vorgegebenen ebenen Schnitten', *Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom. Phys.* **14**, 117–123 (1966).
16. Groh, H., 'Topologische Laguerreebenen I', *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* **32**, 216–231 (1968).
17. Groh, H., 'Topologische Laguerreebenen II', *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* **34**, 11–21 (1969/70).
18. Groh, H., 'Moebius planes with locally euclidean circles are flat', *Math. Ann.* **201**, 149–156 (1973).
19. Groh, H., 'Ovals and non-ovoidal Laguerre planes', *J. Reine Angew. Math.* **267**, 50–66 (1974).
20. Hu, S.T., *Theory of Retracts*, Wayne State Univ. Press, Detroit, 1965.
21. Hubbuck, J., 'On homotopy commutative H-spaces', *Topology* **8**, 119–126 (1969).
22. Hughes, D. and Piper, F., *Projective Planes*, Springer, New York–Heidelberg–Berlin, 1973.
23. Hurewicz, W. and Wallman, H., *Dimension Theory*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1948.
24. Kerékjártó, B. von, 'Über die periodischen Transformationen der Kreisscheibe und der Kugelfläche', *Math. Ann.* **80**, 36–38 (1919).
25. Liao, S.D., 'On the topology of cyclic products of spheres', *Trans. Amer. Math. Soc.* **77**, 520–551 (1954).
26. Löwen, R., 'Vierdimensionale stabile Ebenen', *Geometriae Dedicata* **5**, 239–294 (1976).
27. Löwen, R., 'Schleiermachers Starrheitsbedingung für Projektivitäten in der topologischen Geometrie', *Math. Z.* **155**, 23–28 (1977).
28. Łysko, J.M., 'Some theorems concerning finite dimensional homogeneous ANR spaces', *Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys.* **24**, 491–496 (1976).
29. Mazurkiewicz, S., 'Sur un ensemble plan' (polnisch), *C. R. Soc. Sci. Varsovie Classe* III, **4**, 382–384 (1914). Französisch übers. in: *Travaux de topologie et ses applications*, PWN – Éditions Scientifiques de Pologne, Warszawa, 1969, pp. 46–47.
30. Milnor, J., 'On axiomatic homology theory', *Pacific J. Math.* **12**, 337–341 (1962).
31. Plaumann, P. and Strambach, K., 'Hurwitzsche Ternärkörper', *Arch. Math. (Basel)* **25**, 129–134 (1974).
32. Salzmann, H., 'Topologische Struktur zweidimensionaler projektiver Ebenen', *Math. Z.* **71**, 408–413 (1959).
33. Salzmann, H., 'Zur Klassifikation topologischer Ebenen II', *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* **27**, 145–166 (1964).
34. Salzmann, H., 'Polaritäten von Moulton-Ebenen', *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* **29**, 212–216 (1966).
35. Salzmann, H., 'Topological planes', *Advances in Math.* **2**, 1–60 (1967).

36. Salzmann, H., 'Kompakte vier-dimensionale Ebenen', *Arch. Math. (Basel)* **20**, 551–555 (1969).
37. Salzmann, H., '4-dimensional projective planes of Lenz type III', *Geometriae Dedicata* **1**, 18–20 (1972).
38. Salzmann, H., 'Homogene kompakte projektive Ebenen', *Pacific J. Math.* **60**, 217–234 (1975).
39. Salzmann, H., 'Compact planes of Lenz type III', *Geometriae Dedicata* **3**, 399–403 (1974).
40. Salzmann, H., 'Die Quaternionenebene', *Lenz – Festband*, Preprint Nr. 9 Fachbereich Mathematik der Freien Universität Berlin, 1976, pp. 241–253.
41. Segre, B., 'Ovals in a finite projective plane', *Canadian J. Math.* **7**, 414–416 (1955).
42. Smith, P. A., 'The topology of involutions', *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **19**, 612–618 (1933).
43. Smith, P. A., 'Fixed point theorems for periodic transformations', *Amer. J. Math.* **63**, 1–8 (1941).
44. Spanier, E.H., *Algebraic Topology*, McGraw-Hill, New York, 1966.
45. Spencer-Yaqub, J.C.D., 'On the Lenz-Barlotti classification of projective planes', *Quart. J. Math. Oxford Ser.* **11**, 241–257 (1960).
46. Stein, S.K., 'Homology of the two-fold symmetric product', *Ann. of Math.* (2) **59**, 570–583 (1954).
47. Weber, C., 'Quelques théorèmes bien connus sur les A.N.R. et les C.W. complexes', *Enseignement Math.* **13**, 211–222 (1968).
48. West, J.E., 'Compact ANR's have finite type', *Bull. Amer. Math. Soc.* **81**, 163–165 (1975).
49. West, J.E., 'Mapping Hilbert cube manifolds to ANR's', *Ann. of Math.* (2) **106**, 1–18 (1977).

Nachtrag:

50. Buchanan, T., *The Topology of a Topological Projective Plane with 2-Spheres as Point Rows*, Dissertation, Erlangen-Nürnberg, 1979.

Zusatz bei der Korrektur. Zu der dritten Bemerkung in (4.4) ist hinzuzufügen, daß der dort erwähnte Satz aus [27] noch mehr behauptet, nämlich: eine Ebene mit einem unter $\langle \mathscr{B}(O) \rangle$ scharf 3-fach homogenen Oval O sei samt diesem Oval isomorph zu einer papposschen Ebene mit einem Kegelschnitt. Dies ist nur in 4-dimensionalen Ebenen richtig, und zwar auf Grund von (3.1); die Geometrie der Passanten wird nämlich durch $\mathscr{B}(O)$ nicht bestimmt. Die Folgerungen, die in [27] aus jener Behauptung gezogen werden, lassen sich jedoch mit geringer Mühe aufrecht erhalten.

Anschrift der Verfasser:
Thomas Buchanan
IST-Privates Institut
für Software-Technik GmbH
Alsfelderstr. 11
D-6100 *Darmstadt*
Bundesrepublik Deutschland

Hermann Hähl, Rainer Löwen
Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Auf der Morgenstelle 10
D-7400 *Tübingen* 1
Bundesrepublik Deutschland

(Eingegangen am 17. Juli 1978)