THOMAS BUCHANAN

ZUR TOPOLOGIE DER PROJEKTIVEN EBENEN ÜBER REELLEN DIVISIONSALGEBREN

1. Einleitung

Das Ziel dieser Arbeit ist der Beweis des folgenden Satzes:

SATZ. *Alle Punkträume von projektiven Ebenen über reellen Divisionsalgebren gleicher endlicher Dimension sind zueinander homöomorph. Überdies ist jede Punktreihe einer solchen Ebene genauso im Punktraum eingebettet wie im klassischen Fall.*

Die betrachteten Divisionsalgebren sind nicht notwendig assoziativ.

Wir werden den Beweis des Satzes am Ende der Arbeit im Abschnitt 4 führen. Die für den Beweis benötigten Überlegungen werden vorwiegend homotopietheoretischer Natur sein.

Da der Begriff einer Divisionsalgebrenebene selbstdual ist, gilt auch die duale Aussage des Satzes.

Ist eine reelle Divisionsalgebra endlichdimensional, so hat sie bekanntlich die Dimension 1, 2, 4, oder 8 (s. z.B. Milnor [14], Cor. 1 oder Hilton [11], Thm. 5.17, S. 79). Eine reelle Divisionsalgebra der Dimension 1 oder 2 ist zu den reellen Zahlen $\mathbb{R}$ bzw. zu den komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ isomorph (s. Salzmann-Löwen [20], Satz 14.4.9, S. 255). Dagegen gibt es ausser den klassischen Beispielen der Quaternionen $\mathbb{H}$ und der Oktaven $\mathbb{O}$ noch weitere Beispiele hierzu nicht isomorpher Divisionsalgebren der Dimension 4 und 8, die verschiedene nicht isomorphe Ebenen koordinatisieren (s. Kuz'min [13] und Hähl [10]). Eine vollständige Klassifikation sämtlicher reeller Divisionsalgebren dieser Dimensionen ist meines Wissens nicht bekannt.

Die Tatsache, dass eine Ebene sich über einer reellen Divisionsalgebra koordinatisieren lässt, bedeutet eine Einschränkung für diese Geometrie. Mit dem Satz von Skornjakov (s. Salzmann [18], Thm. 7.15) und der Beschreibung von Ternärkörpern mit assoziativer Addition bei Salzmann [18], 7.23, können wir reelle Divisionsalgebrenebenen folgendermassen charakterisieren: Ebenen, die sich mit reellen endlichdimensionalen Divisionsalgebren koordinatisieren lassen, sind genau die topologischen projektiven Ebenen mit hausdorffschem Geradenraum und hausdorffschem, lokalkompaktem zusammenhängendem Punktraum vom Lenz-Typ mindestens V.

Dass der Punktraum einer projektiven Ebene ohne eine geometrische Zusatzvoraussetzung zu den klassischen Beispielen homöomorph ist – unter der Voraussetzung, dass ein zugehöriger Koordinatenbereich die Dimension

Geometriae Dedicata **8** (1979) 383–393. 0046–5755/79/0084–0383 $01.65

1 oder 2 hat – haben Salzmann [18], Theorem 2.0, bzw. Breitsprecher [3], Satz 2.5 (unter der Berücksichtigung von [19], 1.1) gezeigt.

Während der Vorbereitung dieser Arbeit habe ich in vielen Diskussionen mit Hochschullehrern der Universität Tübingen nützliche Hinweise erhalten. Besonders möchte ich den Betreuern dieser Arbeit, Prof. Dr. S. Breitsprecher und Prof. Dr. H. Salzmann, für ihre Anregungen danken. Einen wesentlichen Beitrag leistere Dr. H. Hähl, der mein Interesse auf das hier abgehandelte Thema lenkte, und der mir durch seine wertvollen Erläuterungen eine grosse Hilfe war. Abschliessend möchte ich darauf hinweisen, dass ich Prof. Dr. H. Wielandt die entscheidende Beweisidee des ersten Hilfssatzes verdanke.

Die Beweisidee des gesamten Satzes wurde von Proposition 15.2 und de Rhams Bemerkung, S. 435–436, bei Borel-Serre [2] inspiriert.

2. Räume von Endomorphismen von $\mathbb{R}^{2n}$ ohne reelle Eigenwerte

Wir bezeichnen mit $GL(n, \mathbb{R})$ und $GL(n, \mathbb{C})$ die generelle lineare Gruppe von $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{C}^n$ und mit $O(n, \mathbb{R})$ und $U(n, \mathbb{C})$ die Orthogonale bzw. unitäre Gruppe von $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{C}^n$, versehen mit den üblichen Skalarprodukten ($n \in \mathbb{N}$).

Seien

$$\begin{aligned}
\mathscr{A}(2n) &= \{A \in GL(2n, \mathbb{R}): \ \text{A hat keine reellen Eigenwerte}\} \\
\mathscr{B}(2n) &= \{B \in GL(2n, \mathbb{R}): \ B^2 + \mathrm{id} = 0\} \\
\mathscr{W}(2n) &= \{W \in O(2n, \mathbb{R}): \ W \text{ schiefsymmetrisch}\}.
\end{aligned}$$

Diese Räume von Endomorphismen sind als Teilräume des Raumes aller Endomorphismen von $\mathbb{R}^{2n}$ wie üblich topologisiert. Es ist $\mathscr{W}(2n) \subseteq \mathscr{B}(2n) \subseteq \mathscr{A}(2n)$.

HILFSSATZ 1. *$\mathscr{W}(2n)$ ist ein starker Deformationsretrakt von $\mathscr{A}(2n)$ ($n \in \mathbb{N}$).*

Beweis. Der Beweis wird in zwei Schritten geführt. In Schritt 1 wird gezeigt, dass $\mathscr{W}(2n)$ ein starker Deformationsretrakt von $\mathscr{B}(2n)$ ist; in Schritt 2, dass $\mathscr{B}(2n)$ ein starker Deformationsretrakt von $\mathscr{A}(2n)$ ist.

Schritt 1. Wir wollen $\mathscr{W}(2n)$ und $\mathscr{B}(2n)$ als Quotientenräume von Lieschen Gruppen betrachten. Dazu fassen wir $\mathbb{C}^n$ als reellen Vektorraum, genauer als die direkte Summe $\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n$ des Real- und Imaginärteils von $\mathbb{C}^n$, auf. Wir fassen dementsprechend $GL(n, \mathbb{C})$ als Untergruppe von $GL(2n, \mathbb{R})$ auf, und zwar mit der Einbettung

$$Z \mapsto \begin{pmatrix} \mathrm{Re}\, Z & -\mathrm{Im}\, Z \\ \mathrm{Im}\, Z & \mathrm{Re}\, Z \end{pmatrix}$$

($Z \in GL(n, \mathbb{C})$), wobei die obige Matrix von links auf $\mathbb{R}^{2n}$ $(= \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n)$ operieren soll. Sei J der Endomorphismus auf $\mathbb{R}^{2n}$ definiert durch

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{id} \\ \mathrm{id} & 0 \end{pmatrix}.$$

Dann ist der Zentralisator von J in $GL(2n, \mathbb{R})$ die Gruppe $GL(n, \mathbb{C})$ und $GL(2n, \mathbb{R})$ wirkt mittels Konjugation $(X, B) \mapsto XBX^{-1}$ $(X \in GL(2n, \mathbb{R})$, $B \in \mathscr{B}(2n))$ transitiv auf $\mathscr{B}(2n)$. Ferner ist die Bahn von J unter $O(2n, \mathbb{R})$ genau der Raum $\mathscr{W}(2n)$.

Wir erinnern uns, dass in bezug auf die Projektion $O(2n, \mathbb{R}) \to \mathscr{W}(2n)$, $X \mapsto XJX^{-1}$ $(X \in O(2n, \mathbb{R}))$ der Raum $\mathscr{W}(2n)$ die Quotiententopologie trägt; es ist also $\mathscr{W}(2n) \approx O(2n, \mathbb{R})/U(n, \mathbb{C})$ (vgl. Steenrod [22], Abschnitt 41.10, S. 212–213). Dass das Analoge für die Projektion $GL(2n, \mathbb{R}) \to \mathscr{B}(2n)$, $X \mapsto XJX^{-1}$ $(X \in GL(2n, \mathbb{R}))$ und für den Raum $\mathscr{B}(2n)$ gelten muss, folgt aus dem auf S. 65 bei Montgomery-Zippin [15] aufgeführte Theorem, welches ein Kriterium dafür angibt, wann ein homogener Raum die Quotiententopologie trägt. Es gilt also analog: $\mathscr{B}(2n) \approx GL(2n, \mathbb{R})/GL(n, \mathbb{C})$.

Aufgrund der Topologie der Gruppen $O(2n, \mathbb{R})$ und $GL(2n, \mathbb{R})$ ist es klar, dass sowohl $\mathscr{W}(2n)$ als auch $\mathscr{B}(2n)$ aus zwei zueinander homöomorphen Zusammenhangskomponenten bestehen. Seien $\mathscr{W}^0(2n)$ bzw. $\mathscr{B}^0(2n)$ die Zusammenhangskomponenten von J in $\mathscr{W}(2n)$ bzw. $\mathscr{B}(2n)$ und seien $GL^+(2n, \mathbb{R})$ bzw. $O^+(2n, \mathbb{R})$ die Zusammenhangskomponenten von id in $GL(2n, \mathbb{R})$ bzw. $O(2n, \mathbb{R})$. Ferner sei φ: $GL^+(2n, \mathbb{R}) \to \mathscr{B}^0(2n)$ die Projektion $\varphi(X) = XJX^{-1}$ und sei φ': $O^+(2n, \mathbb{R}) \to \mathscr{W}^0(2n)$ die Einschränkung von φ.

Die Inklusionsabbildung $\mathscr{W}^0(2n) \hookrightarrow \mathscr{B}^0(2n)$ ist ein Bestandteil der Bündelinklusion

$$\begin{aligned}&(O^+(2n, \mathbb{R}),\quad \mathscr{W}^0(2n),\quad U(n, \mathbb{C}), \varphi')\\ &\quad\hookrightarrow (GL^+(2n, \mathbb{R}),\quad \mathscr{B}^0(2n),\quad GL(n, \mathbb{C}), \varphi).\end{aligned}$$

Diese Bündelinklusion induziert eine Transformation zwischen den langen exakten Homotopiesequenzen der beiden Bündel.

Die Inklusionen $O^+(2n, \mathbb{R}) \hookrightarrow GL^+(2n, \mathbb{R})$ und $U(n, \mathbb{C}) \hookrightarrow GL(n, \mathbb{C})$ sind Homotopieäquivalenzen; demzufolge induzieren sie Isomorphismen zwischen allen Homotopiegruppen. Nach dem Fünferlemma induziert die Inklusion $\mathscr{W}^0(2n) \hookrightarrow \mathscr{B}^0(2n)$ ebenfalls Isomorphismen zwischen allen Homotopiegruppen.

Sowohl $\mathscr{W}(2n)$ als auch $\mathscr{B}(2n)$ sind lokal euklidisch; also sind beide Räume ANR (s. Hu [12], Corollary 8.3, S. 98). Aus dem für ANR formulierten Whiteheadschen Satz (s. Hu [12], Thm. 8.2, S. 218 und Thm. 2.1, S. 199) folgt, dass $\mathscr{W}^0(2n)$ ein starker Deformationsretrakt von $\mathscr{B}^0(2n)$ ist.

Schritt 2. Sei f: $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ die Funktion, die durch

$$f(z) = \begin{cases} i & \text{für} \quad \operatorname{Im} z > 0 \\ -i & \text{für} \quad \operatorname{Im} z < 0 \end{cases}$$

$(i^2 = -1)$ gegeben wird. Ich behaupte, dass eine Homotopie H: $\mathscr{A}(2n) \times I \to \mathscr{A}(2n)$ (I bezeichnet das Einheitsintervall) der gesuchten Art durch

$$(1) \qquad H(A, t) = (1 - t)A + tf(A)$$

($t \in I$, $A \in \mathscr{A}(2n)$) definiert werden kann, wobei $f(A)$ die übliche Anwendung einer holomorphen Funktion auf einen Endomorphismus bedeutet.* Diese Formel wollen wir im folgenden genauer erläutern.

Jedes $A \in \mathscr{A}(2n) \subseteq \mathrm{End}\,\mathbb{R}^{2n}$ kann in natürlicher Weise als Endomorphismus von $\mathbb{C}^{2n}$ aufgefasst werden. Es gilt für $f(A) \in \mathrm{End}\,\mathbb{C}^{2n}$ die Cauchysche Integralformel

$$f(A) = \frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)(z - A)^{-1}\,dz,$$

wobei C ein passendes Kurvensystem in $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ um das Spektrum von A ist (vgl. z.B. Dunford-Schwartz [6], Thm. 10, S. 560). Mit Hilfe dieser Formel können wir die Stetigkeit von $A \mapsto f(A)$ bei einem $A_0 \in \mathscr{A}(2n)$ nachweisen.

Dazu sei C ein passendes Kurvensystem um das Spektrum von A_0 (dass dann auch aus mindestens zwei Kurven besteht). Wir bezeichnen mit $\mathscr{U}$ die Menge der Endomorphismen von $\mathscr{A}(2n)$, deren sämtlichen Eigenwerte innerhalb der von C umfassten Gebiete liegen. Dann ist $\mathscr{U}$ eine Umgebung von A_0, denn die Zuordnung eines Endomorphismus zu seinem charakteristischen Polynom ist stetig und die Zuordnung eines komplexen $2n$-tupels zu dem Polynom mit den Komponenten des $2n$-tupels als Nullstellen ist offen.

Sei $\mathscr{C}(C, \mathrm{End}\,\mathbb{C}^{2n})$ der Raum aller stetigen Abbildungen $C \to \mathrm{End}\,\mathbb{C}^{2n}$ versehen mit der kompakt-offenen Topologie. Die Cauchysche Integralformel legt folgende Faktorisierung von $f \mid \mathscr{U}\colon \mathscr{U} \to \mathrm{End}\,\mathbb{C}^{2n}$ nahe:

$$\begin{aligned} &\mathscr{U} \to \mathscr{C}(C, \mathrm{End}\,\mathbb{C}^{2n}) \to \mathrm{End}\,\mathbb{C}^{2n} \\ &A \mapsto \frac{1}{2\pi i} f(z)(z - A)^{-1} \mapsto f(A) \end{aligned}$$

($z \in C$, $A \in \mathscr{U}$). Sowohl die erste Abbildung oben, die A den Integranden zuordnet, als auch die zweite Abbildung, die Funktionen mit Werten in $\mathrm{End}\,\mathbb{C}^{2n}$ über C integriert, sind stetig. Damit ist die Stetigkeit von $A \mapsto f(A)$ gezeigt.

$f(A)$ lässt sich auch folgendermassen erklären: Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_s, \bar{\lambda}_1, \ldots, \bar{\lambda}_s$ die paarweise verschiedenen Eigenwerte von $A \in \mathscr{A}(2n)$ mit den Vielfachheiten $r_1, \ldots, r_s$ mit $\sum_{k=1}^s r_k = n$ und $\mathrm{Im}\,\lambda_k > 0$. Sei $h_A(x)$ das Hermitesche Interpolationspolynom vom Grad kleiner oder gleich $2n - 1$, das die Funktion f samt ihren Ableitungen in den Eigenwerten von A interpoliert; $h_A(x)$ hat also die definierenden Eigenschaften

$$\begin{aligned} h_A(\lambda_k) &= i, \qquad h_A^{(1)}(\lambda_k) = 0, \ldots, h_A^{(r_k-1)}(\lambda_k) = 0 \\ h_A(\bar{\lambda}_k) &= -i, \qquad h_A^{(1)}(\bar{\lambda}_k) = 0, \ldots, h_A^{(r_k-1)}(\bar{\lambda}_k) = 0 \end{aligned}$$

($k = 1, \ldots, s$). Dann gilt $f(A) = h_A(A)$ (s. etwa Dunford-Schwartz [6], S. 557 unten).

* Die Idee, hier die Retraktion $A \mapsto f(A)$ zu verwenden, stammt von Prof. Dr. H. Wielandt.

Wegen der Invarianz dieser Eigenschaften von $h_A(x)$ gegenüber Komplexkonjugation ist $h_A(x)$ ein reelles Polynom. Demzufolge ist $f(A)$ ein reeller Endomorphismus und es gilt sogar $f(A) \in \mathscr{A}(2n)$, da das Spektrum von $f(A)$ aus i und $-i$ besteht.

Um zu sehen, dass H in Formel (1) eine Homotopie der gesuchten Art ist, wählen wir eine Basis von $\mathbb{C}^{2n}$ so, dass die Matrix von A bezüglich dieser Basis in Jordanscher Normalform steht. (Es wird hier nicht behauptet, dass die Wahl dieser Basis in stetiger Abhängigkeit vom Endomorphismus A getroffen werden kann.) In der oberen Jordanschen Normalform hat die Matrix von A Diagonalblöcke der Form

$$\left.\begin{pmatrix} \lambda_k & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_k \end{pmatrix}\right\} \leqslant r_k$$

mit einem Eigenwert λ_k in der Hauptdiagonale. Die Grösse eines solchen Blocks ist kleiner oder gleich der Vielfachheit r_k von λ_k. Der entsprechende Block bei der Matrix von $H(A, t)$ bezüglich derselben Basis ist

$$\begin{pmatrix} (1-t)\lambda_k + th_A(\lambda_k) & (1-t) + th_A^{(1)}(\lambda_k) & \dfrac{th_A^{(2)}(\lambda_k)}{2!} & \cdots \\ & (1-t)\lambda_k + th_A(\lambda_k) & (1-t) + th_A^{(1)}(\lambda_k) & \cdots \\ & & \ddots & \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (1-t)\lambda_k \pm ti & 1-t & 0 & \cdots & 0 \\ & (1-t)\lambda_k \pm ti & 1-t & \cdots & 0 \\ & & \ddots & & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

(s. Gantmacher [9], Bsp. 2, S. 92–93). Das Vorzeichen im Ausdruck $(1-t)\lambda_k \pm ti$ oben ist positiv oder negativ je nach dem Vorzeichen von Im λ_k.

Hieraus wird klar, dass $H(A, t)$ stets aus $\mathscr{A}(2n)$ ist. Man sieht hier auch, dass $H(A, 1) \in \mathscr{B}(2n)$ gilt. Da $\mathscr{B}(2n)$ genau aus denjenigen Endomorphismen besteht, die in Jordanscher Normalform als Diagonalmatrizen mit Eigenwerten $\pm i$ darstellbar sind, gilt auch $H(B, t) = B$ für alle $B \in \mathscr{B}(2n)$ und alle $t \in I$.

Hilfssatz 1 ist damit bewiesen.

Im folgenden benötigen wir dieses Resultat nur für die Paare $(\mathscr{A}(4), \mathscr{W}(4))$ und $(\mathscr{A}(8), \mathscr{W}(8))$. Von hier ab sei stets $m = 4$ oder 8.

Wir bezeichnen mit e den Vektor $(1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^m$. Sei S^{m-2} die $(m-2)$-Sphäre von Vektoren der Länge 1, die in $\mathbb{R}^m$ orthogonal zu e sind. Sei $\rho: \mathscr{A}^0(m) \to \mathbb{R}^m \backslash \{\lambda e : \lambda \in \mathbb{R}\}$ definiert durch $\rho(A) = A(e)$, wobei $\mathscr{A}^0(m)$ irgendeine Zusammenhangskomponente von $\mathscr{A}(m)$ bezeichne, und sei $\rho': \mathscr{W}^0(m) \to S^{m-2}$ die Einschränkung von ρ auf die in $\mathscr{A}^0(m)$ liegende Zusammenhangskomponente von $\mathscr{W}(m)$. Mit dieser Bezeichnungen haben wir die

FOLGERUNG. *ρ induziert eine Bijektion zwischen den Mengen der freien Homotopieklassen*

$$\rho_{\#}: [S^{m-2}, \mathscr{A}^0(m)] \xrightarrow{\approx} [S^{m-2}, \mathbb{R}^m \backslash \{\lambda e : \lambda \in \mathbb{R}\}].$$

Bevor wir die Folgerung beweisen, wollen wir ein paar bekannte Eigenschaften von ρ' erwähnen, die im Beweis benötigt werden. Im Fall $m = 4$ ist $\rho': \mathscr{W}^0(4) \to S^2$ ein Homöomorphismus (s. Steenrod [22], S. 215 oben). Im Fall $m = 8$ ist $\rho': \mathscr{W}^0(8) \to S^6$ eine (lokal triviale) Faserung mit Faser $\mathscr{W}^0(6)$ (s. Steenrod [22], Thm. 41.18, S. 216). Es ist bekannt, dass $\mathscr{W}^0(6)$ homöomorph zum komplexen, projektiven 3-dimensionalen Raum $P(3, \mathbb{C})$ ist (s. etwa Ehresmann [8], Abschnitt 5): Der Raum $\mathscr{W}^0(6)$ $(\approx O^+(6, \mathbb{R})/U(3, \mathbb{C}))$ entspricht einer Schar von linearen Höchsträumen in einer nichtausgearteten Quadrik des $\mathbb{C}^6$ (s. etwa Porteous [17], Prop. 12.11, S. 232); vermöge Plückerscher Linienkoordinaten entsprechen die Elemente dieser Schar den Geradensternen – also den Punkten – des $P(3, \mathbb{C})$ (s. z.B. Pickert [16], S. 400 unten). Aus den langen exakten Homotopiesequenz der Faserung $(\mathscr{W}^0(8), S^6, \mathscr{W}^0(6), \rho')$ und aus der Tatsache, dass die Homotopiegruppen $\pi_k(\mathscr{W}^0(6))$ $(= \pi_k(P(3, \mathbb{C})) = \pi_k(S^7))$ für $k = 5$ und 6 verschwinden, erkennt man, dass $\rho'_{\#}: \pi_6(\mathscr{W}^0(8)) \to \pi_6(S^6)$ ein Isomorphismus ist.

Beweis. Nach den obigen Bemerkungen induziert $\rho': \mathscr{W}^0(m) \to S^{m-2}$ einen Isomorphismus zwischen den $(m-2)$-ten Homotopiegruppen der zwei Räume. Dass ρ einen Isomorphismus zwischen den Homotopiegruppen $\rho_{\#}: \pi_{m-2}(\mathscr{A}(m)) \to \pi_{m-2}(\mathbb{R}^m \backslash \{\lambda e : \lambda \in \mathbb{R}\})$ induziert, folgt aus der Kommutativität des Diagramms

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{W}^0(m) \arrow[r, "\rho'"] \arrow[d, hook] & S^{m-2} \arrow[d, hook] \\
\mathscr{A}^0(m) \arrow[r, "\rho"] & \mathbb{R}^m \backslash \{\lambda e : \lambda \in \mathbb{R}\}
\end{tikzcd}$$

und aus der Tatsache, dass die zwei senkrechten Inklusionen im Diagramm Homotopieäquivalenzen sind. Die Folgerung ergibt sich dann aus dem einfachen Zusammenhang von $\mathbb{R}^m \backslash \{\lambda e : \lambda \in \mathbb{R}\}$ und aus allgemeinen Basispunktüberlegungen (s. etwa Dold [5], Satz 4.10, S. 4.3).

3. Die assoziierte Abbildung einer reellen Divisionsalgebra

Aufgrund der Bemerkungen in der Einleitung der Arbeit müssen wir den Satz nur für 4- und 8-dimensionale Divisionsalgebren beweisen. O.B.d.A. nehmen wir an, dass diese ein zweiseitiges Einselement besitzen (s. Skornyakov [21], Beweis vom Thm. 13 und Thm. 16).

Sei D eine m-dimensionale Divisionsalgebra mit Einselement, wobei $m = 4$ oder 8 ist. Unter der von D bestimmten *assoziierten Abbildung* $\alpha: \mathbb{R}^m\backslash\{0\} \to GL(m, \mathbb{R})$ versteht man die von der Linksmultiplikation in D induzierte Abbildung, die durch $\alpha(x)(y) = x \underset{\mathsf{D}}{\cdot} y$ definiert wird ($x, y \in \mathsf{D}$ ($\approx \mathbb{R}^m$), $x \neq 0$).

HILFSSATZ 2. *Die assoziierte Abbildung α einer reellen* 4- (*bzw.* 8-) *dimensionalen Divisionsalgebra* D *mit Einselement ist entweder zur assoziierten Abbildung der klassischen Divisionsalgebra* $\mathbb{H}$ (*bzw.* $\mathbb{O}$) *oder zur assoziierten Abbildung der entgegengesetzten klassischen Divisionsalgebra* $\mathbb{H}^{\mathrm{op}}$ (*bzw.* $\mathbb{O}^{\mathrm{op}}$) *homotop.*

Wir schicken dem Beweis des Hilfssatzes eine Bemerkung voraus, in deren Licht der Hilfssatz gesehen werden sollte.

Bemerkung. Statt nach den Homotopieklassen von assoziierten Abbildungen reeller Divisionsalgebren kann man allgemeiner nach den Homotopieklassen von solchen Abbildung $\beta: \mathbb{R}^m\backslash\{0\} \to GL(m, \mathbb{R})$ fragen, die vermöge $(x, y) \mapsto \beta(x)(y)$ $(x, y \in \mathbb{R}^m\backslash\{0\})$ H-Multiplikationen auf $\mathbb{R}^m\backslash\{0\}$ definieren. Bezeichnet man mit $x \mapsto x_{\mathrm{L}}$ und $x \mapsto x_{\mathrm{R}}$ die assoziierten Abbildungen der klassischen und entgegengesetzten klassischen Algebra – die Indizes R und L deuten auf Links- bzw. Rechtsmultiplikation hin – so vertreten die Abbildungen $x \mapsto x_{\mathrm{L}}^{n+1}x_{\mathrm{R}}^{-n} (n \in \mathbb{Z})$ alle Homotopieklassen von Abbildung β dieser Art. Diese Homotopieklassen hängen mit verschiedenen Räumen zusammen, die bestimmte Eigenschaften mit den klassischen projektiven Punkträumen gemeinsam haben (s. Eells-Kuiper [7]).

Beweis. Sei o.B.d.A. $e = (1, 0, \ldots, 0)$ das Einselement der Divisionsalgebra D. Wir bezeichnen mit Z die Menge

$$Z = \left\{(x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m : |x_1| + \sqrt{\sum_{k=2}^{m} x_k^2} = 1\right\}.$$

Um die Homotopieklasse der assoziierten Abbildung α von D zu untersuchen, genügt es, die Einschränkung von α auf Z zu betrachten.

Wir stellen uns Z als eine Realisierung der (nicht reduzierten) Einhängung der zu e orthogonalen $(m-2)$-Sphäre S^{m-2} in $\mathbb{R}^m$ vor. Es ist $\alpha(S^{m-2}) \subseteq$

$\mathscr{A}(m)$; denn gäbe es einen Eigenvektor $y \in \mathbb{R}^m \backslash \{0\}$ zu einem $\alpha(x)$ $(x \in S^{m-2})$ zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$, so wäre $(x - \lambda e) \underset{\mathsf{D}}{\cdot} y = 0$ und D hätte Nullteiler.

Die gesuchte Homotopie $H: Z \times I \to GL(m, \mathbb{R})$ werden wir in der Form einer linearen 'Einhängung' einer Homotopie $F: S^{m-2} \times I \to \mathscr{A}(m)$ gewinnen, wobei F die Einschränkung α' von α auf S^{m-2} in die Einschränkung der assoziierten Abbildung von $\mathbb{H}$ oder $\mathbb{H}^{\mathrm{op}}$ bzw. $\mathbb{O}$ oder $\mathbb{O}^{\mathrm{op}}$ deformiert. In einer Formel wird H durch

$$H((x_1, \ldots, x_m), t) = \begin{cases} x_1 \mathrm{id} + (1 - |x_1|) F\left(\left(\dfrac{x_2}{1 - |x_1|}, \ldots, \dfrac{x_m}{1 - |x_1|}\right), t\right) & \text{für } |x_1| \neq 1 \\ x_1 \mathrm{id} & \text{für } |x_1| = 1 \end{cases}$$

$((x_1, \ldots, x_m) \in Z, t \in I)$ beschrieben.

Sei $i = (0, 1, 0, \ldots, 0)$ und seien i_{L} und i_{R} die Endomorphismen, die durch Links- bzw. Rechtsmultiplikation von i in $\mathbb{H}$ bzw. $\mathbb{O}$ induziert werden. Stellt man die Matrizen dieser Endomorphismen bezüglich der üblichen Basis von $\mathbb{H}$ oder $\mathbb{O}$ auf, so sieht man schnell, dass die Bilder von i_{L} und i_{R} verschiedene Vorzeichen unter der Einschränkung der Pfaffschen Form pf: $\mathscr{W}(m) \to \{1, -1\}$ haben. Hieraus folgt, dass i_{L} und i_{R} in verschiedenen Zusammenhangskomponenten von $\mathscr{W}(m)$ liegen. Daren können wir sehen, dass die Bilder von S^{m-2} unter der assoziierten Abbildung von $\mathbb{H}$ und von $\mathbb{H}^{\mathrm{op}}$ (bzw. von $\mathbb{O}$ und von $\mathbb{O}^{\mathrm{op}}$) in verschiedenen Zusammenhangskomponenten von $\mathscr{A}(m)$ liegen.

Die Hintereinanderausführung $\rho \circ \alpha'$ und die Hintereinanderausführung von ρ und der entsprechenden Einschränkung der assoziierten Abbildung sowohl von $\mathbb{H}$ als auch von $\mathbb{H}^{\mathrm{op}}$ (bzw. sowohl von $\mathbb{O}$ als auch von $\mathbb{O}^{\mathrm{op}}$) sind in allen Fällen nichts anderes als die Inklusionsabbildung $S^{m-2} \hookrightarrow \mathbb{R}^m \backslash \{\lambda e : \lambda \in \mathbb{R}\}$. Da $\rho_{\#}: [S^{m-2}, \mathscr{A}^0(m)] \to [S^{m-2}, \mathbb{R}^m \backslash \{\lambda e : \lambda \in \mathbb{R}\}]$ für jede Zusammenhangskomponente $\mathscr{A}^0(m)$ von $\mathscr{A}(m)$ eine Bijektion ist (s. die Folgerung zu Hilfssatz 1), wird die freie Homotopieklasse von α' durch die entsprechende Einschränkung der assoziierten Abbildung von $\mathbb{H}$ oder $\mathbb{H}^{\mathrm{op}}$ (bzw. $\mathbb{O}$ oder $\mathbb{O}^{\mathrm{op}}$) vertreten – je nachdem, welches die Zusammenhangskomponente von $\alpha(S^{m-2})$ in $\mathscr{A}(m)$ ist.

Damit ist Hilfssatz 2 bewiesen.

4. Beweis des Satzes

Aus beweistechnischen Gründen wird die duale Aussage des Satzes (in bezug auf Geradenräume und Geradenbüschel) bewiesen.

Sei (E, X, Y) eine nichtklassische Ebene, die den vorausgesetzten Eigenschaften der dualen Formulierung des Satzes genügt, wobei hier E den Inzidenzgraph, X den Punktraum und Y den Geradenraum bezeichnet. Weiter sollen $y_0 \in Y$ die Translationsachse der Ebene, $M = E^{-1}(y_0)$ die Punktreihe dieser Achse und $Y_M = Y \backslash \{y_0\}$ den zu y_0 gehörigen affinen Geradenraum bezeichnen.

Mit den Lemmata 1.2.2 und 1.2.4 bei Breitsprecher [3] in ihrer dualen Formulierung kann man leicht zeigen, dass die Abbildung π: $Y_M \to M$, die jedes $y \in Y_M$ dem Schnittpunkt $y \wedge y_0$ mit der Translationsachse y_0 zuordnet, eine (lokal triviale) Faserung ist. Dabei sind die Fasern $E(a)\backslash\{y_0\}$ mit $(a, y_0) \in E$ die Parallelenbüschel der affinen Ebene. Wir bezeichnen diese Faserung mit

$$\xi = (Y_M, M, E(a)\backslash\{y_0\}, \pi).$$

Zur Koordinateneinführung in der Ebene wählen wir ein nichtausgeartetes Punktquadrupel mit der Eigenschaft, dass das Koordinatensystem bezogen auf dieses Quadrupel eine Divisionsalgebra D mit Einselement wird. Nach den Bemerkungen der Einleitung ist die Dimension m von D gleich 4 oder 8. Wir bezeichnen die zugehörige Koordinatenachsen mit y_1 und y_2. Die affinen Punktreihen von y_1 und y_2 tragen dann mit dem eingeführten Koordinatensystem die Vektorraumstruktur des $\mathbb{R}^m$. Wir benutzen diese Struktur, um ξ zu einem Vektorraumbündel zu machen: Die affinen Parallelenbüschel, also die Fasern von ξ, erhalten durch die Abschnitte der Geraden des Parallenbüschels auf einer der zwei Koordinatenachsen ihre Vektorraumstruktur. Lokale Trivialisierungen $Y\backslash E(y_0 \wedge y_k) \to E^{-1}(y_0) \times \mathbb{R}^m$ $(= E^{-1}(y_0) \times (E^{-1}(y_k) \cap Y_M))$ sind durch $y \mapsto (y \wedge y_0, y \wedge y_k)$ ($k = 1$ oder 2, $y \in Y$) gegeben.

Wir betrachten das Geradenbüschel $E(x_0)$, das wir in der dualen Formulierung des Satzes untersuchen müssen, und unterscheiden zwei Fälle: Liegt der Träger x_0 des Büschels nicht auf der Translationsachse y_0; so ist das Punktquadrupel so zu wählen, dass x_0 im Koordinatenursprung $y_1 \wedge y_2$ liegt. Liegt x_0 doch auf y_0, so ist die Wahl des Ursprungs unwesentlich.

Durch die eingeführte Koordinatendarstellung der Ebene wird M mit der Ein-Punkt-Kompaktifizierung $\mathbb{R}^m \bigcup \{\infty\}$ von $\mathbb{R}^m$ identifiziert, wobei etwa $y_0 \wedge y_1 = 0 \in M$ und $y_0 \wedge y_2 = \infty \in M$ gilt.

Wir vereinbaren, dass in der üblichen Form der Geradengleichung die Steigung von links heranmultipliziert wird.

Sei V^m die volle Einheitskugel um den Nullvektor in $M(= \mathbb{R}^m \bigcup \{\infty\})$. Wir betrachten die Trivialisierungen $y \mapsto (y \wedge y_0, y \wedge y_2)$ für $y \wedge y_0 \in V^m$ und $y \mapsto (y \wedge y_0, y \wedge y_1)$ für $y \wedge y_1 \in M\backslash \operatorname{int} V^m$. Es ist leicht zu sehen, dass der Übergang von den Achsenabschnitten $y \wedge y_1$ zu den Achsenabschnitten $y \wedge y_2$ bei einer Faser über den Punkt $s \in S^{m-1} \subseteq M$ durch die Abbildung $r \mapsto -s \underset{\mathsf{D}}{\cdot} r$ $(r \in \mathbb{R}^m)$ gegeben wird. Die charakteristische Abbildung T: $S^{m-1} \to$

$GL(m, \mathbb{R})$ von ξ wird also durch $T(s) = -\alpha(s)$ $(s \in S^{m-1})$ beschrieben, wobei α die assoziierte Abbildung der Divisionsalgebra $\mathbb{D}$ bezeichnet.

Nach Hilfssatz 2 ist T zur charakteristischen Abbildung des entsprechenden Vektorraumbündels bei einer klassischen Ebene – eventuell in einer Koordinatendarstellung mit einer entgegengesetzten klassischen Divisionsalgebra-homotop.

Die zwei entsprechenden Vektorraumbündel einer klassischen Ebene, einmal beschrieben durch das gewöhnliche klassische Koordinatensystem und einmal beschrieben durch das entgegengesetzte klassische Koordinatensystem, sind zueinander schwach bündeläquivalent (vgl. Steenrod [22], Abschnitt 18.7, S. 99–100); eine schwache Bündeläquivalenz wird durch die Kollineation induziert, die durch die klassische Algebrakonjugation $r \mapsto \bar{r}$ definiert wird – die Algebrakonjugation ist nämlich ein Isomorphismus zwischen $\mathbb{H}$ und $\mathbb{H}^{op}$ bzw. $\mathbb{O}$ und $\mathbb{O}^{op}$.

Die Äquivalenzklasse eines Vektorraumbündels ist durch die Homotopieklasse seiner charakteristischen Abbildung vollständig bestimmt. (S. Atiyah-Anderson [1], Lemma 1.4.9, S. 24. Der dortige Beweis für komplexe Vektorraumbündel lässt sich ohne weiters auf reelle Vektorraumbündel übertragen.) Also ist ξ schwach bündeläquivalent zum entsprechenden Vektorraumbündel bei der klassischen Ebene mit dem gewöhnlichen klassischen Koordinatensystem.

Insbesondere ist also die Ein-Punkt-Kompaktifizierung Y von Y_M zum klassischen Geradenraum homöomorph. Da die Fasern des Bündels genau die affinen Parallelenbüschel sind, lässt sich die (duale) Behauptung des Satzes für ein Geradenbüschel mit Träger auf der Translationsachse aus der schwachen Bündeläquivalenz ableiten. Da im anderen Fall das Geradenbüschel, das wir untersuchen, nach unserer speziellen Wahl des Koordinatenursprungs dem Nullschnitt des Bündels entspricht, lässt sich wiederum die (duale) Behauptung des Satzes aus der schwachen Äquivalenz der Vektorraumbündel ableiten.

Damit ist der Satz bewiesen.

BIBLIOGRAPHIE

1. Atiyah, M. and Anderson, D.W., *K-Theory*, New York–Amsterdam, Benjamin, 1967.
2. Borel, A. and Serre, J.-P., 'Groupes de Lie et puissances réduites de Steenrod', *Amer. J. Math.* **75**, 409–448 (1953).
3. Breitsprecher, S., 'Projektive Ebenen, die Mannigfaltigkeiten sind', *Math. Z.* **121**, 157–174 (1971).
4. Dembowski, P., *Finite Geometries*, Berlin–Heidelberg–New York, Springer, 1968.
5. Dold, A., 'Halbexakte Homotopiefunktoren', *Lecture Notes in Mathematics* **12**, Berlin–Heidelberg–New York, Springer, 1966.
6. Dunford, N. and Schwartz, J.T., *Linear Operators. Part I: General Theory*, New York, Interscience, 1958.
7. Eells, J. and Kuiper, N.H., 'Manifolds which are like projective planes', *Inst. haut. Étud. sci., Publ. math.* **14**, 5–46 (1962).

8. Ehresmann, C., 'Sur les varietés presque complexes', In: *Proceedings of the International Congress of Mathematicians* (Cambridge, 1950). Vol. II, pp. 412–419. Providence, R.I., American Mathematical Society, 1952.
9. Gantmacher, F.R., *Matrizenrechung. Teil I. Allgemeine Theorie*, Berlin, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaft, 1958.
10. Hähl, H., 'Geometrisch homogene vierdimensionale reelle Divisionsalgebren', *Geometriae Dedicata* **4**, 333–361 (1975).
11. Hilton, P., *General Cohomology Theory and K-Theory*, Cambridge University Press, 1971.
12. Hu, S.-T., *Theory of Retracts*, Detroit, Wayne State University Press, 1965.
13. Kuz'min, E.N., 'Über einige Klassen von Divisionsalgebren', *Algebra Logika* **5**, 57–102 (1966) [Russisch].
14. Milnor, J., 'Some consequences of a theorem of Bott', *Ann. of Math., II. Ser.* **68**, 444–449 (1958).
15. Montgomery, D. and Zippin, L., *Topological Transformation Groups*, New York, Interscience, 1955.
16. Pickert, G., *Analytische Geometrie*, 4. Auflage, Leipzig, Akademische Verlagsgesellschaft Geest und Portig K.-G., 1966.
17. Porteous, I., *Topological Geometry*, London, Van Nostrand Reinhold, 1969.
18. Salzmann, H., 'Topological planes', 'Advances Math', **2**, 1–60 (1968).
19. Salzmann, H., 'Kompakte vierdimensionale Ebenen', *Arch. der Math.* **20**, 551–555 (1969).
20. Salzmann, H. and Löwen, R., *Zahlbereiche. Teil I: Die reellen Zahlen*, Vorlesungsskriptum, Universität Tübingen, 1971.
21. Skornyakov, L.A., 'Natural domains of Veblen-Wedderburn projective planes', *Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat.* **13**, 447–472 (1949) = *Amer. math. Soc., Translat., I. Ser.* **1**, 15–50 (1962).
22. Steenrod, N., *The Topology of Fibre Bundles*, Princeton, Princeton University Press, 1972.

Anschrift des Verfassers:

Thomas Buchanan
IST–Privates Institut für Software-Technik GmbH
Osannstr. 8
D-6100 Darmstadt
Bundesrepublik Deutschland

(Eingegangen am 11 November 1977)