

Ovale und Kegelschnitte in der komplexen projektiven Ebene

Von THOMAS BUCHANAN in Darmstadt

Die Kegelschnitte der komplexen projektiven Ebene werden in dieser Arbeit durch ihre geometrischen und topologischen Eigenschaften charakterisiert - genauer: durch die Ovaleigenschaft und die topologische Abgeschlossenheit.

Die *komplexe projektive Ebene* $P_2(\mathbb{C})$ wird üblicherweise als Geometrie der ein- und zweidimensionalen linearen Teilräume des komplexen dreidimensionalen Vektorraums \mathbb{C}^3 definiert. Die Punktmenge P (= Menge der eindimensionalen Teilräume des \mathbb{C}^3) und die Geradenmenge \mathcal{L} (= Menge der zweidimensionalen Teilräume des \mathbb{C}^3) wollen wir wie üblich mit Topologien versehen; mit diesen wird $P_2(\mathbb{C})$ eine topologische projektive Ebene. Die Definition dieser Topologien werden wir in § 2 angeben und einige ihrer bekannten Eigenschaften herleiten.

Ein *Kegelschnitt* in $P_2(\mathbb{C})$ ist als die Nullstellenmenge eines irreduziblen homogenen Polynoms vom Grad 2 in drei Unbestimmten definiert; es ist bekannt, daß sich die beschreibende quadratische Gleichung eines beliebigen Kegelschnitts durch eine geeignete Koordinatentransformation auf die Form

$$x_0^2 - x_1x_2 = 0$$

bringen läßt (vgl. etwa [Pickert: Analytische Geometrie, Abschnitt 31, insbes. (31.1)]).

Ein *Oval* \emptyset einer beliebigen projektiven Ebene ist eine nicht leere Teilmenge der Punktmenge mit den folgenden Eigenschaften:

- i) Jede Gerade trifft \emptyset in höchstens zwei Punkten.
- ii) Zu jedem Punkt p von \emptyset gibt es genau eine Gerade t , die das Oval nur im Punkt p trifft, die sogenannte "Tangente".

Ein Oval θ in einer topologischen projektiven Ebene heißt *abgeschlossen*, wenn es abgeschlossen im üblichen topologischen Sinn ist, d.h. wenn das Komplement von θ offen ist.

Es ist bekannt, daß jeder Kegelschnitt in $P_2(\mathbb{C})$ ein abgeschlossenes Oval ist. Umgekehrt beweisen wir:

Satz A. *Jedes abgeschlossene Oval der komplexen projektiven Ebene ist ein Kegelschnitt.*

Der analoge Satz für Ovale in der reellen Ebene ist falsch (vgl. Fig. 1).

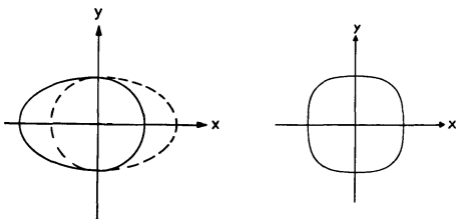


Fig. 1. Zwei Beispiele von Ovalen in \mathbb{R}^2 , die keine Kegelschnitte sind: Das linke Beispiel besteht aus einem Halbkreis und einer Halbellipse, die an der y -Achse (einer Symmetrieachse der beiden Kurven) zusammengesetzt sind. Das rechte Beispiel ist die Einheits-"Sphäre" $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x,y)\|_p = 1\}$ in der sogenannten p -Norm

$$\|(x,y)\|_p = \sqrt[p]{|x|^p + |y|^p}$$

(im Bild $p = 3$). Für $1 < p < \infty$ ist diese "Sphäre" ein Oval, für $p = 2$ natürlich der Einheitskreis.

Segre (1955) hat einen ähnlichen Satz im Bereich der endlichen Geometrie bewiesen: Jedes Oval einer endlichen Desargueschen projektiven Ebene ungerader Ordnung ist ein Kegelschnitt.

Bemerkung. Mit transfiniten Induktion kann man ein Oval in $P_2(\mathbb{C})$ konstruieren, das kein Kegelschnitt ist (und das a fortiori nicht abgeschlossen sein kann). Ein solches Oval entsteht, indem man einen Punkt aus der von Mazurkiewicz (1914) angegebenen Menge wegläßt; die dort aufgeführte Konstruktion ist auf $P_2(\mathbb{C})$ anwendbar.

An einer Stelle des Beweises benötigen wir ein nichtelementares Hilfsmittel: den Jordanschen Kurvensatz. Abgesehen davon wird ausschließlich mathematisches Grundwissen herangezogen.

Der Beweis zerfällt in einen topologischen Teil und einen funktionentheoretischen Teil. § 1 enthält den funktionentheoretischen Teil unter Vorwegnahme des Ergebnisses des topologischen Teils; er gibt somit gleichzeitig einen relativ knapp gehaltenen Überblick über die Grobstruktur des Beweises. In den folgenden Paragraphen sind die topologischen Argumente breit ausgeführt. Sie sind unabhängig von § 1, so daß der Leser § 1 zunächst nur überfliegen oder auch erst am Schluß lesen kann.

Diese Arbeit entstand im Rahmen einer allgemeinen Untersuchung über topologische Ovale, die gemeinsam mit H. Hähl und R. Löwen durchgeführt wurde. Ich möchte beiden für ihre Anregungen danken. Außerdem möchte ich Herrn Professor Pickert für viele nützliche Vorschläge hinsichtlich Stil und Methode danken.

§ 1. Der funktionentheoretische Teil des Beweises

Im folgenden sei \emptyset ein abgeschlossenes Oval in der Punktmenge von $P_2(\mathbb{C})$.

Für einen festen Punkt $p \in \emptyset$ betrachten wir die "Projektionsabbildung" $\alpha = \alpha_p$, die das Oval \emptyset auf das Büschel

$\mathcal{L}(p)$ der Geraden durch den Punkt p abbildet und die wie folgt definiert ist:

$$\alpha: \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{L}(p)$$

$$\alpha(q) = \begin{cases} q \vee p & \text{für } q \neq p \\ t & \text{für } q = p, \end{cases}$$

wobei $q \vee p$ die Verbindungsgerade und t die Tangente in p bezeichnet (Fig. 2).

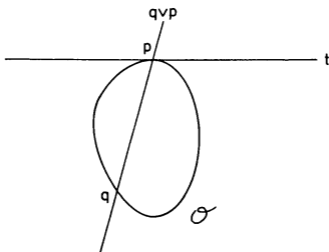


Fig. 2. Schematisches Bild des Ovals \mathcal{O} mit Punkten p , q , Verbindungsgerade $g \vee p$ und Tangente t in p .

In § 4 werden wir folgendes zeigen:

Satz B. Für jeden Punkt $p \in \mathcal{O}$ ist die Projektionsabbildung $\alpha: \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{L}(p)$ ein Homöomorphismus.

Dabei sind \mathcal{O} und $\mathcal{L}(p)$ mit der Spurtopologie vom Punkt- bzw. Geradenraum versehen. (Auf diese Topologien gehen wir in § 2 näher ein.)

Bemerkung. In [Buchanan-Hähl-Löwen] wird Satz B für kompakte zusammenhängende endlichdimensionale topologische projektive Ebenen allgemein bewiesen.

Beweis von Satz A. Sei p ein beliebiger Punkt von \mathcal{O} und t die Tangente in p . Wir entfernen t samt ihren Punkten aus der projektiven Ebene. $P_2(\mathbb{C}) \setminus \{t\}$ kann in der Weise mit \mathbb{C}^2 identifiziert werden, daß die Geraden genau die Graphen von linearen inhomogenen Funktionen und die "Senkrechten" $(z) \times \mathbb{C}$ ($z \in \mathbb{C}$) sind (vgl. § 2, Hilfssatz 4). Darin sei das Achsenkreuz u, v so gewählt, daß p der "unendlichferne" Punkt der Achse v ist (Fig. 3).

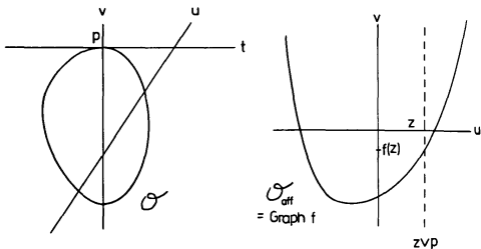


Fig. 3. Das Oval schematisch dargestellt: Links \mathcal{O} in der projektiven Ebene; die Geraden u und v entsprechen in der affinen Ebene (rechts) dem Achsenkreuz u, v . Die unendlichferne Gerade ist die Tangente t . Der affine Teil \mathcal{O}_{aff} des Ovals erweist sich als Graph einer Funktion f .

Da jede Parallele zu v das Oval \mathcal{O} in genau einem affinen Punkt trifft, ist der affine Teil \mathcal{O}_{aff} von \mathcal{O} der Graph einer Funktion f , deren Definitions- und Bildbereich die Menge der Punkte auf u ($= \mathbb{C} \times \{0\}$) bzw. v ($= \{0\} \times \mathbb{C}$) ist, die wir jeweils mit \mathbb{C} identifizieren. Dabei läßt sich f durch die Vorschrift

$$f(z) = \text{proj}_v((z \vee p) \wedge \mathcal{O}_{\text{aff}})$$

beschreiben, wobei $(z \vee p) \wedge \mathcal{O}_{\text{aff}}$ den affinen Schnittpunkt und proj_v die Parallelprojektion in Richtung von u auf die Gerade v bezeichnen. Wegen unserer Identifikation ist $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Wegen Satz B ist diese Funktion stetig.

Wenn wir Satz B auf einen affinen Punkt q des Ovals anwenden, stellen wir fest, daß f überall komplex differenzierbar ist, denn die Sekanten durch q haben gemäß Satz B (für q statt p) die Tangente in q als eindeutigen Grenzwert. f ist also eine ganze Funktion im Sinne der Funktionentheorie.

Wiederum aufgrund von Satz B konvergiert $f(z)$ gegen ∞ für z gegen ∞ ; daher ist f eine ganzrationale Funktion nach dem Satz von Casorati-Weierstraß, der besagt, daß bei einer ganzen transzendenten, d.h. nichtrationalen Funktion das Bild jeder ∞ -Umgebung dicht in \mathbb{C} liegt (s. etwa [Knopp 1976, § 28, Satz 5]).

Das Oval \mathcal{O} ist der Abschluß von Graph f in P . Wir müssen nur noch zeigen, daß f den Grad 2 hat. Hätte f einen Grad ≥ 3 , so müßte jede Gleichung $f(z) = a$ eine mehrfache Wurzel haben, da \mathcal{O} mit der Geraden $\mathbb{C} \times \{a\}$ höchstens zwei Punkte gemeinsam hat; das würde aber $f'(z) = 0$ für unendlich viele z bedeuten im Widerspruch dazu, daß f' einen Grad ≥ 2 hat. Da der affine Teil von \mathcal{O} keine Gerade ist, kann f nicht einen Grad ≤ 1 haben. Also wird f durch ein Polynom zweiten Grades beschrieben. \square

§ 2. Die Topologie der komplexen projektiven Ebene

Dieser Paragraph beschäftigt sich mit der Definition und einigen bekannten Eigenschaften der Topologie von $P_2(\mathbb{C})$.

Wie üblich bezeichnen wir die Punkte von $P_2(\mathbb{C})$ in homogenen Koordinaten mit $[z_0, z_1, z_2]$, wobei $[z_0, z_1, z_2]$ dem eindimensionalen Teilraum von \mathbb{C}^3 entspricht, der von dem Vektor $(z_0, z_1, z_2) \in \mathbb{C}^3$ erzeugt wird.

Sei $\varphi: \mathbb{C}^3 \setminus (0) \rightarrow P: (z_0, z_1, z_2) \mapsto [z_0, z_1, z_2]$ die kanonische Abbildung auf den Punktraum P .

Definition. Die *Topologie des Punktraums* P wird als Quotiententopologie bezüglich der Abbildung φ definiert; mit anderen Worten, eine Teilmenge X von P heißt offen genau dann, wenn ihre Urbildmenge $\varphi^{-1}(X)$ in $\mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$ offen ist; dabei trägt $\mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$ die übliche Topologie, die mit Hilfe der Norm

$$\|(z_0, z_1, z_2)\| = \sqrt{z_0\bar{z}_0 + z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2}$$

definiert ist.

Die Geraden der komplexen Ebene werden wir wie üblich durch Gleichungen der Form

$$a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0$$

beschreiben, wobei die Koeffizienten a_0, a_1, a_2 aus \mathbb{C} und nicht alle $= 0$ sind und x_0, x_1, x_2 Variablen bezeichnen. Die Abbildung

$$\psi: P \rightarrow \mathcal{L}$$

$$[a_0, a_1, a_2] \mapsto \left(\begin{array}{l} \text{Gerade mit der Gleichung} \\ a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0 \end{array} \right)^1$$

ist eine Bijektion zwischen Punkt- und Geradenraum. Die Hintereinanderausführung $\psi \circ \varphi: \mathbb{C}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathcal{L}$ bezeichnen wir mit χ :

$$(1) \quad \begin{array}{ccc} & \mathbb{C}^3 \setminus \{0\} & \\ \varphi \swarrow & & \searrow \chi \\ P & \xrightarrow{\psi} & \mathcal{L} \end{array}$$

\cong

Definition. Die *Topologie des Geradenraumes* \mathcal{L} wird so definiert, daß $\psi: P \rightarrow \mathcal{L}$ ein Homöomorphismus ist. Dann ist auch $\chi = \psi \circ \varphi: \mathbb{C}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathcal{L}$ wie φ eine Quotientenabbildung.

¹D. i. diejenige Gerade, die mit einem Punkt $[z_0, z_1, z_2]$ genau dann inzidiert, wenn $a_0z_0 + a_1z_1 + a_2z_2 = 0$ ist.

(Eine stetige surjektive Abbildung $\eta: A \rightarrow B$ zwischen topologischen Räumen heißt *Quotientenabbildung* oder auch "Identifizierende Abbildung", wenn B die Quotiententopologie bezüglich η trägt. Man sieht leicht, daß eine Quotientenabbildung $\eta: A \rightarrow B$ die folgenden Eigenschaften besitzt: Eine Abbildung $\zeta: B \rightarrow C$ ist genau dann stetig, wenn $\zeta \circ \eta: A \rightarrow C$ stetig ist. Aus der Definition der Quotientenabbildung ist ersichtlich, daß die Einschränkung einer solchen auf das Urbild einer offenen Menge wieder eine Quotientenabbildung ist.)

In den folgenden Beweisen der folgenden Hilfssätze werden wir stillschweigend davon Gebrauch machen, daß eine Abbildung stetig ist, wenn sie durch rationale Funktionen beschrieben werden kann (s. etwa [Dieudonné 1971, Bd. 1, S. 86, 4.1.5.]).

Hilfssatz 1. Sei $\lambda: \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ ein Vektorraumautomorphismus.

Dann ist die induzierte Kollineation $\tilde{\lambda}: P_2(\mathbb{C}) \rightarrow P_2(\mathbb{C})$ sowohl als Punkt- wie auch als Geradenabbildung stetig.

Beweis. Die Einschränkung λ' der Abbildung λ auf $\mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$ induziert eine Faktorabbildung $\lambda_P: P \rightarrow P$, die das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^3 \setminus \{0\} & \xrightarrow{\lambda'} & \mathbb{C}^3 \setminus \{0\} \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi \\ P & \xrightarrow{\lambda_P} & P \end{array}$$

kommutativ macht; λ_P beschreibt die Wirkung der Kollineation $\tilde{\lambda}$ auf den Punktraum. Da λ stetig ist und da P die Quotiententopologie trägt, ist λ_P ebenfalls stetig wegen der oben erwähnten Eigenschaft der Quotientenabbildung φ .

Das Entsprechende gilt für die von der Transponierten von λ induzierte Abbildung λ_G auf dem Geradenraum, die die Wirkung der Kollineation $\tilde{\lambda}$ auf dem Geradenraum beschreibt. \square

Hilfssatz 2. P und \mathcal{L} sind Hausdorffräume.

Beweis. Es genügt, die Behauptung für P zu beweisen. Wegen Hilfssatz 1 und der Tatsache, daß die lineare Gruppe des \mathbb{C}^3 zweifach transitiv ist, genügt es, disjunkte Umgebungen U_1 und U_2 für die Punkte $[1,0,0]$ und $[0,1,0]$ anzugeben.

$$W_1 = \{(z_0, z_1, z_2) \mid |z_0| > |z_1|\}$$

und

$$W_2 = \{(z_0, z_1, z_2) \mid |z_0| < |z_1|\},$$

die Urbilder der offenen Intervalle $(0, \infty)$ bzw. $(-\infty, 0)$ bei der stetigen Abbildung $(z_0, z_1, z_2) \mapsto |z_0| - |z_1|$, sind offen, und es gilt

$$\varphi^{-1}\varphi(W_1) = W_1 \quad \text{und} \quad \varphi^{-1}\varphi(W_2) = W_2.$$

Nach der Definition der Quotiententopologie sind $\varphi(W_1)$ und $\varphi(W_2)$ offen in P und damit disjunkte Umgebungen von $[1,0,0]$ bzw. $[0,1,0]$. \square

Hilfssatz 3. P und \mathcal{L} sind kompakt.

Beweis. Für die Einheitssphäre

$$S^5 = \{(z_0, z_1, z_2) \mid z_0\bar{z}_0 + z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 = 1\}$$

in \mathbb{C}^3 gilt $P = \varphi(S^5)$. Da S^5 kompakt ist, ist P kompakt und dann $\mathcal{L} (= \psi(P))$ ebenfalls. \square

Bemerkung. Ein abgeschlossenes Oval $\theta \subset P$ ist demzufolge auch kompakt.

Hilfssatz 4. Entfernt man aus P sämtliche Punkte einer beliebigen Geraden, so ist die übliche Identifikation zwischen der so entstandenen affinen Punktmenge und \mathbb{C}^2 ein Homöomorphismus.

Beweis. Wegen Hilfssatz 1 genügt es, die Behauptung für die Gerade mit der Gleichung $x_0 = 0$ zu beweisen. Die kanonische Identifikation wird dann durch

$$(z_1, z_2) \mapsto [1, z_1, z_2] \quad \text{mit Umkehrung} \\ [z_0, z_1, z_2] \mapsto (z_1/z_0, z_2/z_0)$$

gegeben. Zum Nachweis der Stetigkeit der Umkehrabbildung benutzt man, daß die Einschränkung von φ auf das in $\mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$ offene Urbild $\{(z_0, z_1, z_2) \in \mathbb{C}^3 \mid z_0 \neq 0\}$ der affinen Punktmenge eine Quotientenabbildung liefert. \square

Mit $S^2 = \{(y_0, y_1, y_2) \in \mathbb{R}^3 \mid y_0^2 + y_1^2 + y_2^2 = 1\}$ bezeichnen wir die Einheitskugel in \mathbb{R}^3 .

Hilfssatz 5. *Der Raum der Punkte einer Geraden ist homöomorph zu S^2 ; ebenso ist der Raum der Geraden eines Geradenbüschels homöomorph zu S^2 .*

Beweis. Wegen Hilfssatz 1 genügt es, die Gerade mit der Gleichung $x_0 = 0$ zu behandeln. Einen Homöomorphismus dieser Geraden auf S^2 erhält man z.B. durch "stereographische Projektion" π mit

$$\pi[0, 1, c+di] = \left(\frac{2c}{c^2+d^2+1}, \frac{2d}{c^2+d^2+1}, \frac{c^2+d^2-1}{c^2+d^2+1} \right) \\ (c, d \in \mathbb{R})$$

$$\pi[0, 0, 1] = (0, 0, 1),$$

deren Umkehrung π^{-1} mit

$$\pi^{-1}(y_0, y_1, y_2) = \begin{cases} [0, 1, \frac{y_0}{1-y_2} + \frac{y_1}{1-y_2} i] & \text{für } y_2 \neq 1 \\ [0, 0, 1] & \text{für } y_2 = 1, \end{cases}$$

(dabei $(y_0, y_1, y_2) \in S^2$) gegeben wird, was man leicht nachprüft. (Der Nachweis der Stetigkeit von π und π^{-1} bedarf lediglich in den Ausnahmepunkten $[0, 0, 1]$ bzw. $(0, 0, 1)$ einer zusätzlichen Überlegung.)

Die Abbildung $\psi: P \rightarrow \mathcal{L}$ in (1) bildet die Menge der Punkte auf der Geraden mit Gleichung $x_0 = 0$ auf das Geradenbüschel durch $[1, 0, 0]$ homöomorph ab. \square

Bemerkung. Da S^2 kompakt ist und da P und \mathcal{L} hausdorffsch sind, sind Geraden und Geradenbüschel abgeschlossene Teilmengen von P bzw. \mathcal{L} . Aus Satz B, den wir noch zu beweisen haben, folgt, daß ein abgeschlossenes Oval \emptyset in $P_2(\mathbb{C})$ ebenfalls homöomorph zu S^2 ist.

Hilfssatz 6. P und \mathcal{L} genügen dem ersten Abzählbarkeitsaxiom, d. h., Punkte und Geraden haben abzählbare Umgebungsbasen in P bzw. \mathcal{L} .

Beweis. Ist $p \in P$ und g eine nicht durch p gehende Gerade, so ist $P \setminus \{q \mid q \text{ ist ein Punkt von } g\}$ eine zu \mathbb{C}^2 homöomorphe Umgebung von p , die dem ersten Abzählbarkeitsaxiom genügt. Da P und \mathcal{L} homöomorph sind, ist die Behauptung auch für \mathcal{L} bewiesen. \square

Wir bezeichnen mit \vee die Abbildung, die je zwei verschiedenen Punkten ihre Verbindungsgerade zuordnet:

$$\begin{aligned} \vee: P \times P \setminus \Delta(P) &\rightarrow \mathcal{L} \\ (p, q) &\mapsto p \vee q, \end{aligned}$$

wobei $\Delta(P) = \{(p, p) \mid p \in P\}$ die Diagonale in $P \times P$ bezeichnet. Entsprechend bezeichnen wir mit \wedge die duale Abbildung, die je zwei verschiedenen Geraden ihren Schnittpunkt zuordnet:

$$\wedge: \mathcal{L} \times \mathcal{L} \setminus \Delta(\mathcal{L}) \rightarrow P,$$

wobei $\Delta(\mathcal{L}) = \{(g, g) \mid g \in \mathcal{L}\}$ die Diagonale in $\mathcal{L} \times \mathcal{L}$ bezeichnet. Die jeweiligen Definitionsbereiche $P \times P \setminus \Delta(P)$ und $\mathcal{L} \times \mathcal{L} \setminus \Delta(\mathcal{L})$ fassen wir auf als Teilräume der kartesischen Produkte $P \times P$ bzw. $\mathcal{L} \times \mathcal{L}$, die wir jeweils mit der Produkttopologie versehen.

Hilfssatz 7. Die Verbindungsabbildung $\vee: P \times P \setminus \Delta(P) \rightarrow \mathcal{L}$ und die Schnittabbildung $\wedge: \mathcal{L} \times \mathcal{L} \setminus \Delta(\mathcal{L}) \rightarrow P$ sind stetig.

Beweis. Seien $[u_0, u_1, u_2]$ und $[v_0, v_1, v_2]$ verschiedene Punkte. Die Koeffizienten in der Gleichung

$$a_0 x_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 = 0$$

ihrer Verbindungsgeraden sind durch

$$(2) \quad a_0 = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}, \quad a_1 = - \begin{vmatrix} u_0 & u_2 \\ v_0 & v_2 \end{vmatrix}, \quad a_2 = \begin{vmatrix} u_0 & u_1 \\ v_0 & v_1 \end{vmatrix}$$

gegeben.

Die Kollineationen induzieren Homöomorphismen des Raumes $P \times P \setminus \Delta(P)$. Da man mit solchen Homöomorphismen ein beliebiges Paar aus $P \times P \setminus \Delta(P)$ in ein vorgegebenes überführen kann, genügt es, die Stetigkeit von v in einer Umgebung von etwa $([1, 1, 0], [1, 0, 1])$ nachzuweisen. Die Paare voneinander verschiedener Punkte der affinen Ebene $\{(1, z_1, z_2) \mid z_1, z_2 \in \mathbb{C}\}$ bilden eine solche Umgebung.

Identifiziert man die affine Ebene stetig mit \mathbb{C}^2 (Hilfssatz 4), so entspricht der Einschränkung von v die Hintereinanderausführung

$$\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \setminus \Delta(\mathbb{C}^2) \xrightarrow{v} \mathbb{C}^3 \setminus \{0\} \xrightarrow{\chi} \mathcal{S},$$

wobei $v((u_1, u_2), (v_1, v_2)) = (a_0, a_1, a_2)$ ist und (a_0, a_1, a_2) sich aus den Gleichungen (2) mit $u_0 = v_0 = 1$ ergibt. Da die a_1 rational von den u_1 und v_1 abhängen, sind v und somit auch $\chi \circ v$ und v stetig.

Die Schnittabbildung \wedge läßt sich als folgende Hintereinanderausführung darstellen:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S} \times \mathcal{S} \setminus \Delta(\mathcal{S}) & \xrightarrow{(\psi \times \psi)^{-1} | \mathcal{S} \times \mathcal{S} \setminus \Delta(\mathcal{S})} & P \times P \setminus \Delta(P) \\ \wedge \downarrow \text{---} & & \downarrow v \\ P & \xleftarrow{\psi^{-1}} & \mathcal{S} \end{array}$$

Sie ist somit stetig. \square

Bemerkung. Projektive Ebenen, deren Punkt- und Geradenräume Hausdorfftopologien tragen so, daß Schneiden und Verbinden stetig sind, heißen *topologische projektive Ebenen*. Eine Einführung in die axiomatische Theorie dieser Ebenen findet der Leser in [Pickert 1975: Projektive Ebenen, Abschnitt 10].

§ 3. Topologische Hilfsmittel

Wir benötigen die folgende Form des Dichtesatzes:

Satz (Baire). *Ein vollständiger metrischer Raum X kann nicht als Vereinigung einer höchstens abzählbaren Folge nirgends dichter Teilmengen von X dargestellt werden.*

Dabei heißt eine Teilmenge Y *nirgends dicht*, wenn ihre abgeschlossene Hülle keine inneren Punkte besitzt. Einen Beweis findet man z.B. in [Alexandroff-Hopf 1974, S. 108, Satz IV] oder in [Dieudonné 1975, Bd. 2, S. 95].

Zur Formulierung des Jordanschen Kurvensatzes erinnern wir uns an die folgenden Begriffe: eine *einfache geschlossene Kurve* γ in \mathbb{C} ist eine injektive stetige Abbildung der Kreislinie S^1 in \mathbb{C} ; ein *einfacher geschlossener Bogen* ist der Bildraum einer einfachen geschlossenen Kurve. Der *Index* $j(x, \gamma)$ einer beliebigen geschlossenen Kurve γ (d.h., auf die Injektivität wird jetzt verzichtet) in bezug auf einen Punkt $x \in \mathbb{C}$ gibt intuitiv gesprochen die Anzahl der Windungen der Kurve γ um x an. Ist γ stückweise differenzierbar, so läßt sich der Index mit Hilfe der Cauchy-Integralformel definieren:

$$j(x, \gamma) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z-x} .$$

Ist γ eine beliebige geschlossene Kurve, so gibt es stets eine Homotopie zwischen γ und einer stückweise differenzierbaren Kurve $\delta: S^1 \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{x\}$, d.h. eine stetige Abbildung $F: S^1 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{x\}$ mit $\gamma(z) = F(z, 0)$ und $\delta(z) = F(z, 1)$ (vgl. [Dieudonné 1971, Bd. 1, S. 250, 9'.1]). Der Index $j(\gamma, x)$ von γ wird als $j(\delta, x)$ definiert - nach dem Cauchyschen Integralsatz ist er unabhängig von der Wahl eines solchen δ .

Satz (Jordan-Veblen-Eilenberg). *Es sei H ein einfacher geschlossener Bogen in \mathbb{C} . Dann gilt*

- a) Die Menge $\mathbb{C} \setminus H$ hat genau zwei Zusammenhangskomponenten, von denen die eine beschränkt, die andere unbeschränkt ist;
- b) der Rand jeder der Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{C} \setminus H$ ist H ;
- c) ist γ eine einfache geschlossene Kurve mit $\gamma(S^1) = H$, so ist der Index $j(x, \gamma) = 0$, falls x der unbeschränkten Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C} \setminus H$ angehört, und $j(x, \gamma) = \pm 1$, wenn x in der beschränkten Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C} \setminus H$ liegt.

Diesen Kurvensatz findet man samt Beweis in [Dieudonné 1971, Bd. 1, S. 245, Satz 9'.4.2].

Wir brauchen auch den Gebietsinvarianzsatz (vgl. [Wall 1972, S. 140, Theorem 13.8]), den wir vollständigkeitshalber aus dem Kurvensatz herleiten.

Satz (Brouwer). Sei G eine offene Teilmenge von \mathbb{C} und $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetige injektive Abbildung. Dann ist f eine offene Abbildung, d.h., sie führt offene Teilmengen von G in offene Teilmengen von \mathbb{C} über; insbesondere ist $f(G)$ offen.

Beweis. Sei D eine offene ϵ -Scheibe ($\epsilon > 0$) mit $\bar{D} \subseteq G$. Es genügt zu zeigen, daß das Bild $f(D)$ offen in \mathbb{C} ist. Ist R der Rand von D , so ist $f|_R: R \rightarrow \mathbb{C}$ eine einfache geschlossene Kurve. Nach dem Kurvensatz besteht $\mathbb{C} \setminus f(R)$ aus zwei Zusammenhangskomponenten. Wir wollen zeigen, daß $f(D)$ mit der beschränkten Komponente übereinstimmt und damit offen ist (wegen der Abgeschlossenheit von $f(R)$ ist $\mathbb{C} \setminus f(R)$ und damit auch jede seiner Zusammenhangskomponenten offen).

Da $f(D)$ zusammenhängend ist und deshalb in nur einer der zwei Komponenten liegen kann, genügt es zu zeigen, daß die beschränkte Komponente eine Teilmenge von $f(D)$ ist, oder anders ausgedrückt, daß das Komplement von $f(\bar{D})$ eine Teilmenge der unbeschränkten Komponente ist.

Ist $x \notin f(\bar{D})$ und m der Mittelpunkt von D , so ist

$$F: \mathbb{R} \times I \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{x\}: (z, t) \mapsto f((1-t)z + tm)$$

eine Homotopie von $f|_{\mathbb{R}}$ zu der konstanten Abbildung $z \mapsto f(m)$ (Fig. 4).

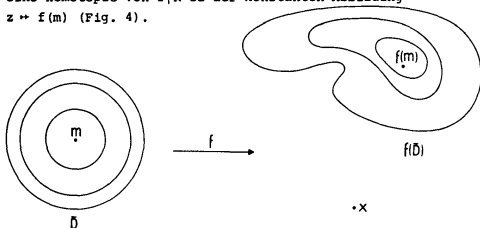


Fig. 4. Die Homotopie f wird definiert, indem man den Rand der Scheibe radial zum Mittelpunkt m zusammenzieht und die Hintereinanderausführung mit f bildet. Ist x nicht im Bild $f(\bar{D})$, so verläuft die Homotopie im Komplement von x .

Nach der Definition des Index ist dann $j(x, f|_{\mathbb{R}}) = 0$ und nach Teil c) des Kurvensatzes liegt x in der unbeschränkten Komponente. \square

Bemerkung. Eine Verallgemeinerung des Gebietsinvariansatzes für höherdimensionale Gebiete findet man etwa in [Alexandroff-Hopf 1974, S. 396, Satz IX] und in [Dold 1972, S. 79, Proposition 7.4].

§ 4. Der Beweis von Satz B

Wie in § 1 sei θ ein abgeschlossenes Oval in $P_2(\mathbb{C})$, p ein Punkt auf θ , und sei $\alpha: \theta \rightarrow \mathcal{L}(p): q \mapsto p \vee q; p \mapsto t$ die Projektionsabbildung bezüglich p . Ferner sei $\beta: \mathcal{L}(p) \rightarrow \theta$ die inverse Abbildung α^{-1} .

Hilfssatz 8. Ist $U \subseteq \theta$ eine offene Umgebung von p in θ und $\alpha: \theta \rightarrow \mathcal{L}(p)$ die Projektionsabbildung bezüglich p ,

so ist $\alpha(U)$ offen in $\mathcal{L}(p)$. Somit ist die Umkehrabbildung $\beta: \mathcal{L}(p) \rightarrow \mathcal{O}$ stetig in t , wobei t die Tangente an \mathcal{O} in p bezeichnet.

Beweis. Als abgeschlossene Teilmenge des kompakten Punkt-
raumes P ist $\mathcal{O} \setminus U$ kompakt. Nach Hilfssatz 7 ist die Ein-
schränkung $\alpha|(\mathcal{O} \setminus U)$ als Einschränkung der Verbindungs-
abbildung stetig. Daher ist $\alpha(\mathcal{O} \setminus U)$ ebenfalls kompakt,
als Teilmenge des hausdorffschen Raumes $\mathcal{L}(p)$ also abge-
schlossen. Somit ist $\alpha(U) (= \mathcal{L}(p) \setminus \alpha(\mathcal{O} \setminus U))$ offen in
 $\mathcal{L}(p)$. \square

Hilfssatz 9. Das punktierte Oval $\mathcal{O} \setminus \{p\}$ enthält ein
homöomorphes Bild E einer offenen Scheibe als offene
Teilmenge.

Beweis. Die Abbildung $\alpha: \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{L}(p)$ induziert eine stetige
bijektive Abbildung $\mathcal{O} \setminus \{p\} \rightarrow \mathcal{L}(p) \setminus \{t\} = \mathbb{C}$. Nach Hilfs-
satz 6 genügt \mathcal{O} dem ersten Abzählbarkeitsaxiom. Seien
 Y_1, Y_2, \dots die Komplemente sämtlicher Umgebungen einer
aus offenen Mengen bestehenden abzählbaren Umgebungsbasis
von p in \mathcal{O} und damit (wegen der Kompaktheit von \mathcal{O}) sämt-
lich kompakt; dann ist $\mathcal{O} \setminus \{p\} = \bigcup_n Y_n$ und daher
 $\bigcup_n \alpha(Y_n) = \mathcal{L}(p) \setminus \{t\} = \mathbb{C}$. Der Raum \mathbb{C} ist ein vollständiger
metrischer Raum. Darüber hinaus sind die $\alpha(Y_n)$ kompakt
und somit abgeschlossen. Nach dem Dichtesatz gibt es ein
 $\alpha(Y_n)$, dessen Inneres nicht leer ist; damit enthält $\alpha(Y_n)$
eine offene Scheibe D . Da die Einschränkung $\alpha|Y_n$ stetig
und daher aufgrund der Kompaktheit von Y_n ein Homöomor-
phismus ist, ist $E = \alpha^{-1}(D)$ das homöomorphe Bild einer
Scheibe in $Y_n \subseteq \mathcal{O}$. Da $\alpha|(\mathcal{O} \setminus \{p\})$ stetig ist, ist E offen
in $\mathcal{O} \setminus \{p\}$. \square

Beweis von Satz B. Wir müssen nur noch die Stetigkeit
von α in p verifizieren; dies beweist dann, daß α eine
stetige bijektive Abbildung von \mathcal{O} auf $\mathcal{L}(p)$ und wegen der
Kompaktheit von \mathcal{O} folglich, wie behauptet, ein Homöomor-
phismus ist.

Es genügt, den Satz zu beweisen unter der Annahme, daß der ausgezeichnete Punkt p in einem homöomorphen Bild E einer offenen Scheibe enthalten ist; wenn die Behauptung von Satz B für einen einzigen solchen Punkt bewiesen ist, ist damit insbesondere gezeigt, daß \emptyset homöomorph zu S^2 ist, und folglich diese Annahme für jeden Punkt von \emptyset zutrifft.

Sei also $p \in E$. Da $E \neq \emptyset$ gilt, liegt $\alpha(E)$ in einer zu \mathbb{C} homöomorphen Teilmenge von $\mathcal{L}(p)$. Aufgrund von Hilfssatz 8 ist $\alpha(E)$ offen in $\mathcal{L}(p)$.

Wegen dem Gebietsinvarianzsatz genügt es zu zeigen, daß die Abbildung $\beta|_{\alpha(E)}: \alpha(E) \rightarrow E$ stetig ist, denn dann ist sie auch offen. Diese ist nun stetig in t nach Hilfssatz 8, und nach dem Gebietsinvarianzsatz stetig auf $\alpha(E) \setminus \{t\}$ als Umkehrung der stetigen Bijektion $\alpha|_{E \setminus \{p\}}: E \setminus \{p\} \rightarrow \alpha(E) \setminus \{p\}$. \square

Literatur

- ALEXANDROFF, P., HOPF, H.: Topologie. Bd. 1. Reprint. Berlin, Heidelberg, New York 1974.
- BUCHANAN, T., HÄHL, H., LÜWEN, R.: Topologische Ovale. In *Erscheint in Geometriae Dedicata*.
- DIEUDONNÉ, J.: Grundzüge der modernen Analysis. Braunschweig, Bd. 1 1971, Bd. 2 1975.
- DOLD, A.: Lectures on Algebraic Topology. Berlin, Heidelberg, New York 1972.
- KNOPP, K.: Funktionentheorie 1. Grundlagen der allgemeinen Theorie der analytischen Funktionen. 13. Aufl., Berlin 1976.
- MAZURKIEWICZ, S.: O pewnej mnogości płaskiej, która ma z każdą prostą dwa, i tylko dwa punkty wspólne. (Sur un ensemble plan qui a avec chaque droite deux et seulement deux points communs.) *Comptes rendus des séances de la Société des Sciences de Varsovie, Classe III* 4, 382-384 (1914). Franz. Übers. in: *Travaux de topologie et ses applications*, pp. 46-47. Warszawa 1969.
- PICKERT, G.: Projektive Ebenen. 2. Aufl., Berlin, Heidelberg, New York 1975.
- PICKERT, G.: Analytische Geometrie. 7. Aufl., Leipzig 1976.
- SEGRE, B.: Ovals in a finite projective plane. *Cand. J. Math.* 7, 414-416 (1955).
- WALL, C.T.C.: A Geometric Introduction to Topology. Reading, Mass. 1972.
- Eingegangen: 4. 11. 1977