

Einige Bemerkungen zur holographischen Meßmethode der optischen Übertragungsfunktion

Von *H. J. Tiziani* und *A. H. Aemmer*

Institut für Technische Physik an der Eidgenössischen Technischen
Hochschule Zürich, Schweiz

Eingegangen am 2. Juni 1972

Inhalt

Die holographische Methode zur Messung optischer Übertragungsfunktionen, 1966 postuliert von *Françon et. al.*, wird an einer plankonvexen Linse, die nach den Spezifikationen der 50 mm-Testlinse der „SIRA“ hergestellt wurde, untersucht. Vor allem wird der Einfluß von Fehlerquellen wie mechanische Instabilitäten und Nichtlinearität der Transparenzfunktion der Photoplatte analysiert. Es werden die experimentell gewonnenen Resultate mit berechneten Funktionen verglichen, die simulierte Abweichungen enthalten.

Abstract

Discussion of a Holographic Method to Measure the Optical Transfer Function. The application of the holographic method to measure the autocorrelation function, suggested by *Françon et. al.*, is studied. The optical transfer function of the plankonvex lens "SIRA" ($f = 50$ mm) was measured. The influence of the mechanical stability and the nonlinearity of the photographic emulsion on the results is investigated. Mechanical errors are simulated and the corresponding experimental and theoretical results are compared.

1. Einleitung

Den Zusammenhang zwischen Pupillenfunktion $f(x, y)$ eines optischen Systems und der zugehörigen Übertragungsfunktion $D(s, t)$ liefert das normierte Autokorrelationsintegral

$$D(s, t) = \frac{g(s, t)}{g(0, 0)} = \frac{\iint f(x, y) f^*(x - s, y - t) dx dy}{\iint f(x, y) f^*(x, y) dx dy} \quad (1)$$

(die entsprechenden Definitionen wurden aus [1] übernommen). Die holographische Methode zur Messung der optischen Übertragungsfunktion [2-4] beruht darauf, daß vorerst von der Pupillenfunktion $f(x, y)$ zwei identische Hologramme hergestellt werden, danach wird bei der Rekonstruktion das eine Hologramm relativ zum andern seitlich verschoben. Von der totalen Intensität des von den Hologrammen gebeugten Lichtes wird derjenige An-

teil betrachtet, der als einziger einen von der Verschiebung abhängigen Term – das Autokorrelationsintegral der Pupillenfunktion – enthält. D. h. die Intensitätsvariation ist proportional zur Übertragungsfunktion und die Verschiebung proportional zum Argument der Übertragungsfunktion.

2. Prinzip der Methode

Aus der Pupillenfunktion $f(x, y)$ wird bei der Überlagerung mit der Referenzwelle $r(x, y)$, welche zur Senkrechten der Hologrammebene um den Winkel Φ verkippt ist, die Intensitätsverteilung

$$I(x, y) = |f(x, y) + r(x, y)|^2 \quad (2)$$

wobei
$$r(x, y) = r_0 \exp [i k \sin \Phi \cdot x]$$

Die Amplitudentransparenz $t_A(x, y)$ der Hologrammplatte sei proportional zur Intensitätsverteilung¹

$$t_A(x, y) \sim I(x, y). \quad (3)$$

Überlagert man zwei identische Hologramme, wobei eines um s in der x -Richtung verschoben ist und beleuchtet sie mit der Referenzwelle $r(x, y)$, so wird die resultierende Amplitude

$$a(x, y, s) = r(x, y) \cdot t_A(x, y) \cdot t_A(x - s, y).$$

Durch Einsetzen ergibt sich

$$a(x, y, s) = r_0 \exp [i k \sin \Phi \cdot x] \cdot \left| \begin{aligned} & f(x, y) + r_0 \exp [i k \sin \Phi \cdot x] \\ & \cdot [f(x - s, y) + r_0 \exp [i k \sin \Phi \cdot (x - s)]] \end{aligned} \right|^2$$

Es zeigt sich, daß fünf Terme mit den Faktoren

$$\begin{aligned} & \exp [-i k \sin \Phi \cdot x], & 1, & \exp [+i k \sin \Phi \cdot x], \\ & \exp [+2 i k \sin \Phi \cdot x] & \text{und} & \exp [+3 i k \sin \Phi \cdot x] \end{aligned}$$

auftreten, welche räumlich getrennt unter den Richtungen Φ_{-1} , Φ_0 , Φ_1 , Φ_2 und Φ_3 erscheinen. (Abb. 1.)

Die interessanten Anteile finden sich in den Richtungen Φ_0 und Φ_2 , in denen allein der Autokorrelationskern ff^*_s bzw. $f^* f_s$ auftritt; in Φ_1 erhält man indessen zusätzlich noch die Quadrate von ff^*_s und $f^* f_s$ [7] ($f = f(x, y)$, $f_s = f(x - s, y)$). Aus experimentellen Gründen wurde in unseren Messungen die Richtung Φ_0 gewählt, in der die Amplitude

$$\begin{aligned} a_0(x, y, s) = & r_0^2 ff^*_s \exp [i k \sin \Phi \cdot s] + r_0^2 ff_s f^*_s \\ & + r_0^4 f + r_0^4 f_s \exp [i k \sin \Phi \cdot s] \end{aligned} \quad (4)$$

¹ Die Voraussetzung ist gerechtfertigt, falls $|f(x, y)| \ll |r(x, y)|$ (vergl. [4], [6], [7] und Abschnitt 4.).

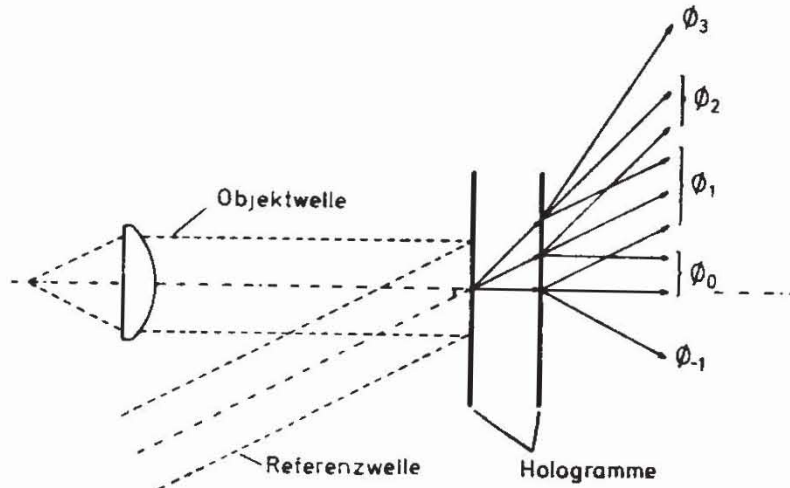


Abb. 1. Schematische Darstellung bei Aufnahme und Rekonstruktion. Die beiden Hologramme spalten die Referenzwelle in die fünf richtungsabhängigen Terme auf.

erscheint, die auch geschrieben werden kann als

$$a_0(x, y, s) = r_0^2 (|f|^2 + r_0^2) (f + f_s \exp [i k \sin \Phi \cdot s])$$

(falls $|f| = |f_s|$).

Daraus erhält man die Intensitätsverteilung

$$i(x, y, s) = r_0^4 (|f|^2 + r_0^2) (|f|^2 + |f_s|^2 + ff^*_s \exp [-i k \sin \Phi \cdot s] + f^*f_s \exp [ik \sin \Phi \cdot s]) \quad (5)$$

und die gesamte Intensität unter Φ_0 ist nun

$$I(s) = \iint i(x, y, s) dx dy. \quad (6)$$

Durch Einsetzen von (5) in (6) ergibt sich

$$I(s) = K_0 + K_1 T(s) \cos [\theta(s) + k \sin \Phi \cdot s]. \quad (7)$$

K_0 und K_1 sind Größen, die nur von der Öffnung der Austrittspupille und den Intensitäten von Objekt- und Referenzwelle abhängen.

$$K_0 = r_0^4 \iint (|f|^2 + r_0^2) (|f|^2 + |f_s|^2) dx dy$$

$$K_1 = 2 r_0^4 \iint (|f|^2 + r_0^2) dx dy.$$

Der erste Summand in Gl. (7) repräsentiert einen konstanten, von s unabhängigen Anteil, der zweite oszilliert mit der Frequenz

$$\frac{d\theta(s)}{ds} + k \sin \Phi$$

und der Amplitude $K_1 \cdot T(s)$, die proportional zum Betrag der Übertragungsfunktion $g(s)$ ist ($g(s) = T(s) \exp [i \theta(s)]$). Der Betrag $T(s)$ wird auch Modulationsübertragungsfunktion genannt (MÜF).

3. Experiment

Als optisches System diente vorwiegend die plankonvexe Linse der SIRA (Brennweite $f = 50$ mm) [5]. Als Lichtquelle wurde ein 15-mW He-Ne-Laser verwendet; alle Rechnungen und Resultate beziehen sich auf die Wellenlänge $\lambda = 632.8$ nm und die Daten der SIRA-Linse. Zur Bestimmung der gewünschten Position der Testlinse wurde mit einer planparallelen Platte das jeweilige Interferenzbild der Austrittspupillenfunktion gewonnen und mit berechneten Interferenzen verglichen; derart konnte die Position mit einer Abweichung von weniger als $10 \mu\text{m}$ festgelegt werden. Die entsprechenden Interferenzbilder sind in Abb. 2 wiedergegeben.

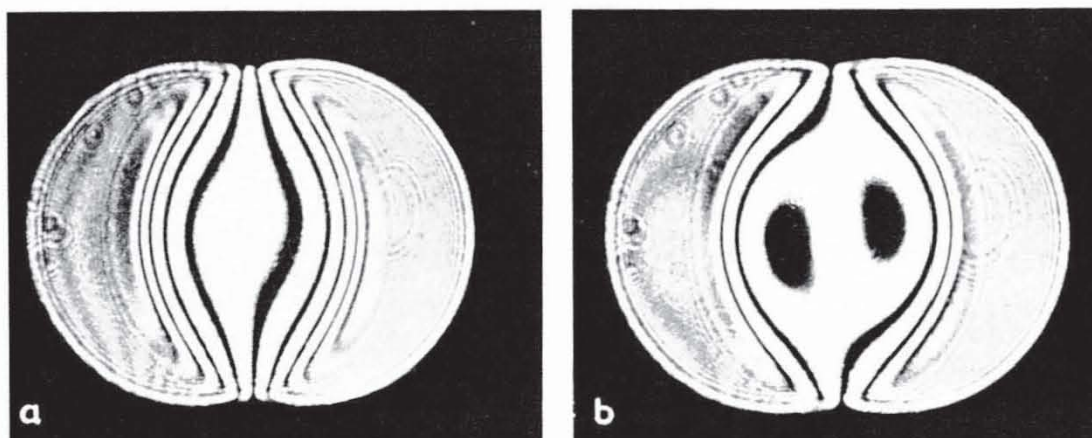


Abb. 2. Interferenzaufnahmen der Austrittspupillenfunktion der Testlinse mit Blende $f/4$ (Distanz zur Linse 100 mm, Scherung 4 mm).
a) paraxialer Fokus; b) fokussiert für maximale Übertragung bei 50 l/mm.

Im beschriebenen Experiment wird in der Richtung Φ_0 das gebeugte Licht auf der Kathode eines Photomultipliers gesammelt. Unter Vernachlässigung der Phase wird der Photostrom proportional zu

$$K_0 + K_1 T(s) \cos [k \sin \Phi \cdot s].$$

Die Verschiebung erfolgte mit der Geschwindigkeit v_s

$$k \sin \Phi \cdot s = k \sin \Phi \cdot v_s \cdot t = 2\pi \left[\frac{\sin \Phi}{\lambda} \cdot v_s \right] \cdot t$$

d. h. der Photostrom oszilliert mit der Frequenz $\frac{\sin \Phi}{\lambda} \cdot v_s$. Mit einem Bandfilter wird der Gleichstromanteil und die Terme mit mehrfacher Grundfrequenz (vergl. Abschnitt 4.) eliminiert, anschließend wird die Amplitude mit einem Wechselstrominstrument gemessen und von einem X-Y-Schreiber aufgezeichnet.

Der experimentelle Aufbau ist in Abb. 3 schematisch dargestellt. Die ebene Referenzwelle, die mit einem Laserteleskop erzeugt wird, bildet mit der

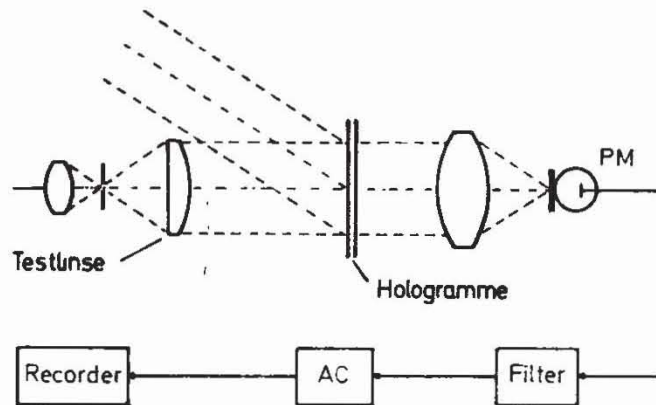


Abb. 3. Prinzipieller Aufbau zur Messung der Übertragungsfunktion

Objektwelle einen Winkel von $\Phi = 30^\circ$. Unter dieser Voraussetzung wird die Auflösungsgrenze der Hologrammplatte nicht annähernd erreicht, d. h. der Kontrast des Hologramms ist noch derart groß, daß eine genügend starke rekonstruierte Welle erzeugt werden konnte. Um zwei möglichst identische Hologramme zu erhalten, sind bei der Aufnahme die Photoplatten Schicht gegen Schicht angeordnet worden.

Die Resultate der Messungen auf der Achse für die Testlinse sind in Abb. 4 wiedergegeben. Bei den experimentellen Untersuchungen hatten sich Abweichungen von den anhand der optischen Daten gerechneten Werte ergeben. Diese sind vor allem auf Verkippungen der verschobenen Hologrammplatte zurückzuführen. Die Einflüsse der Verkippungen und der Nichtlinearität des photographischen Mediums werden im nächsten Abschnitt untersucht.

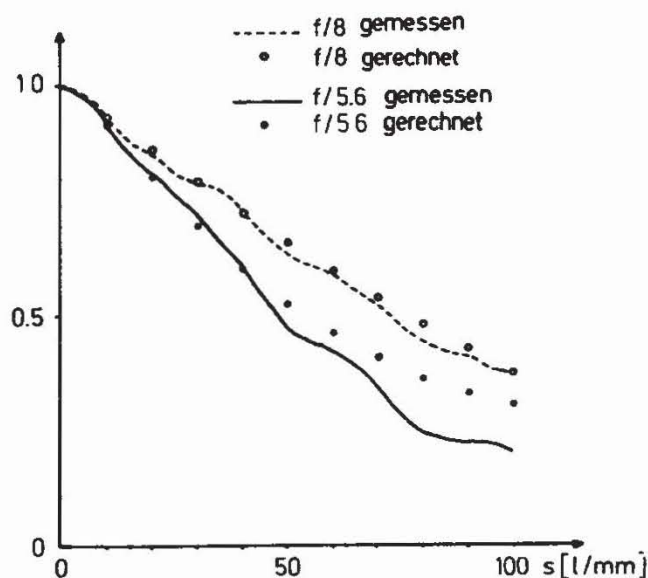


Abb. 4. Berechnete und gemessene Übertragungsfunktion auf der Achse, fokussiert für beste Übertragung bei 50 l/mm. Die Abweichungen sind vor allem auf Verkippungen der verschobenen Hologrammplatte zurückzuführen (vergl. Abschnitt 4).

4. Fehlerquellen

(i) Verkippungen

Bei der Verschiebung der einen Hologrammplatte relativ zur anderen treten vielfach kleine Verkippungen auf, die sich in der Pupillenfunktion als zusätzliche Phasenanteile äußern. Für die Verkippungswinkel $\Psi_x(s)$ und $\Psi_y(s)$ geht die Pupillenfunktion bzw. die Übertragungsfunktion in folgende Ausdrücke über:

$$f(x - s, y) \rightarrow f(x - s, y) \exp [ik(\Psi_x(s) \cdot x + \Psi_y(s) \cdot y)]$$

$$g(s) \rightarrow g(s, \Psi_x, \Psi_y) = \iint f(x, y) f^*(x - s, y) \exp [-ik(\Psi_x \cdot x + \Psi_y \cdot y)] dx dy.$$

Im Nullpunkt der Übertragungsfunktion läßt sich der Funktionswert unter dem Einfluß der Verkippung als geschlossener Ausdruck darstellen ($|f(x, y)|$ wird innerhalb der Pupille als konstant vorausgesetzt).

$$D(0, \Psi_x, \Psi_y) = (\pi R_p^2)^{-1} \iint_P \exp [ik(\Psi_x \cdot x + \Psi_y \cdot y)] dx dy$$

und in Polarkoordinaten

$$D(0, \Psi) = (\pi R_p^2)^{-1} \int_0^{R_p} \int_0^{2\pi} \exp [ikr\Psi \cos\varphi] d\varphi dr \quad \text{mit} \quad \Psi = (\Psi_x^2 + \Psi_y^2)^{1/2}.$$

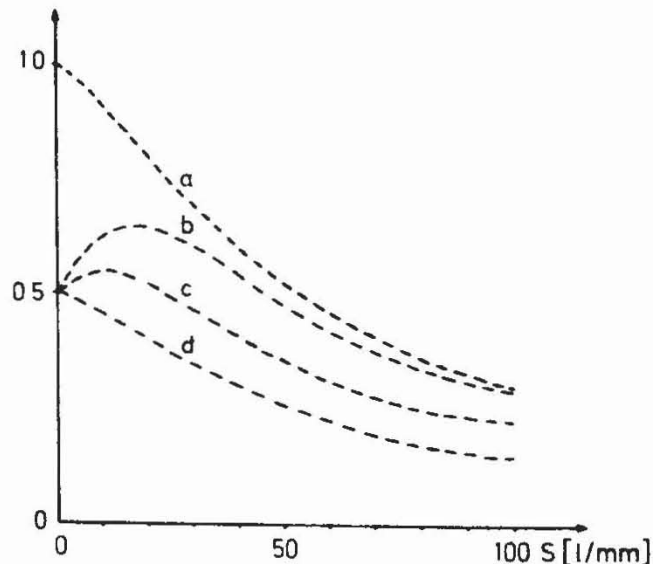


Abb. 5. Berechnete Funktionen mit Verkippungen (auf der Achse, Blende 5,6, Maximum bei 50 1/mm)

- | | |
|---|---|
| a) $\Psi_x = \Psi_y = 0$ | b) $\Psi_x = 5 \cdot 10^{-5}, \Psi_y = 0$ |
| c) $\Psi_x = \Psi_y = \frac{5}{\sqrt{2}} \cdot 10^{-5}$ | d) $\Psi_x = 0, \Psi_y = 5 \cdot 10^{-5}$ |

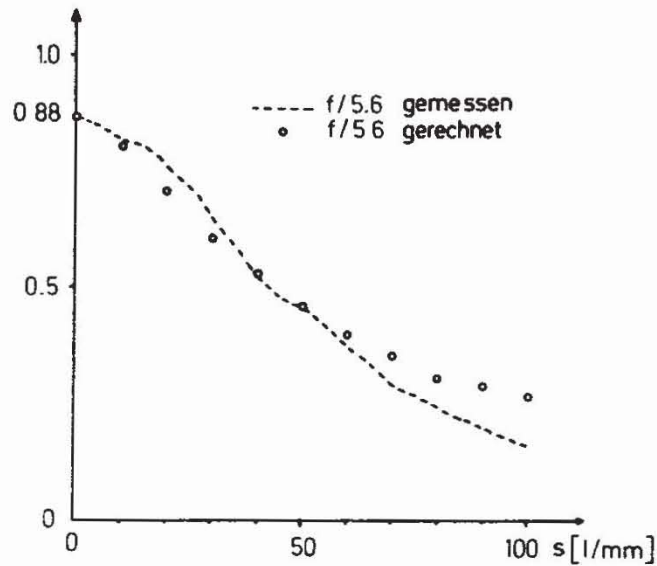


Abb. 6. Berechnete und gemessene Funktionen mit Verkippungen (auf der Achse, fokussiert bei 50 l/mm bei Blende 5,6) $\Psi_x = 0$, $\Psi_y = 2,25 \cdot 10^{-5}$.

Das Integral ergibt bekanntlich einen Ausdruck, der die Besselfunktion 1. Ordnung enthält:

$$D(0, \Psi) = 2 \frac{J_1(k \Psi R_p)}{k \Psi R_p} . \quad (8)$$

Der Einfluß von Verkippungen ist in Abb. 5 anhand berechneter Funktionen veranschaulicht, wobei wiederum auf die Bildebene mit bester MÜF bei 50 l/mm fokussiert wurde. Bereits eine sehr kleine Verkippung von $5 \cdot 10^{-5}$ zwischen dem beweglichen und dem stationären Hologramm bewirkt einen nicht vernachlässigbaren Fehler auf die MÜF. Zwischen den Platten wurde nun der Winkel $\Psi_y = 2,25 \cdot 10^{-5}$ fest eingestellt. Abb. 6 zeigt die relativ gute Übereinstimmung der gemessenen Resultate mit denjenigen Werten, die unter Einschluß des Verkippungsfehlers berechnet wurden.

(ii) Nichtlinearität des photographischen Mediums

Bisher wurde eine lineare Beziehung zwischen Amplitudentransparenz der Hologrammplatte und der registrierten Intensität vorausgesetzt:

$$t_A(I) = t_0 + t(I - I_0) \quad (9)$$

Mit diesem Ansatz erhält man als einzige nichtkonstante Glieder ff^*_s bzw. $f^* f_s$, die definitionsgemäß zur Übertragungsfunktion führen. Berücksichtigt man indessen höhere Glieder der Funktion $t_A(I)$, so treten bei der Rekonstruktion Potenzen von ff^*_s und $f^* f_s$ auf.

$$t_A(I) = t_0 + \sum_{n=1}^{\infty} t_n (I - I_0)^n \quad (10)$$

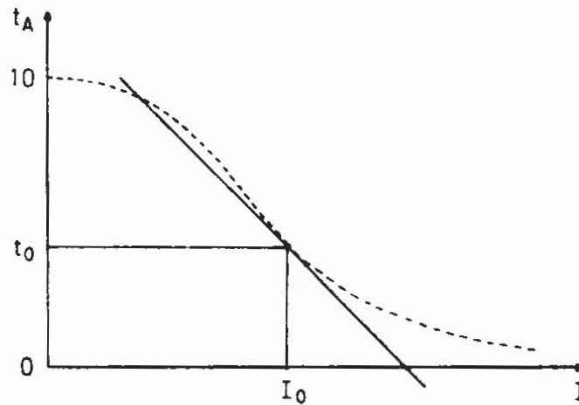


Abb. 7. Typische Amplitudentransparenzfunktion von photographischen Medien. Linearisierung in einem willkürlichen Arbeitspunkt I_0 .

Eine ausführliche Behandlung des Einflusses des photographischen Mediums findet der Leser in der Literatur. In [6] wird die photographische Aufzeichnung von räumlich moduliertem, kohärentem Licht mit einem nichtlinearen Ansatz der $t_A(I)$ -Funktion betrachtet und in [7] wird explizit die holographische Meßmethode der Übertragungsfunktion mit linearem Ansatz analysiert. I_0 im obigen Ausdruck ist im wesentlichen durch die Intensität der Referenzwelle $I_0 = r_0^2$ gegeben und die gesamte Intensität ist

$$I = (r + f)(r + f)^*$$

somit ergibt sich für die Amplitudentransparenz

$$t_A = t_0 + \sum_{n=1}^{\infty} t_n [rf^* + r^*f + |f|^2]^n \quad (11)$$

Bei der Rekonstruktion erscheinen unter dem Winkel Φ_0 Terme höherer Potenzen von ff^*_s und f^*f_s , bzw. Terme ganzzahliger Vielfache der Aberrationen $W(x, y)$

$$I_R = K_0 + \sum_{n=1}^{\infty} K_n [(ff^*_s \exp[-i k \sin \Phi \cdot s])^n + (f^*f_s \exp[i k \sin \Phi \cdot s])^n]$$

$$= \begin{cases} K_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} K_n \cos [nk (W(x, y) - W(x - s, y) + \sin \Phi \cdot s)] & \text{innerhalb} \\ 0 & \text{der Pupille} \\ & \text{außerhalb} \end{cases} \quad (12)$$

wobei $f(x, y) = a(x, y) e^{-ikW(x,y)}$.

$a(x, y)$ wird innerhalb der Pupille als konstant vorausgesetzt und verschwindet außerhalb.

Der Ausdruck für die rekonstruierte Intensität (12) wird nun mit dem Ansatz der Transparenzfunktion (10) bis zur zweiten Ordnung entwickelt:

$$t_A(I) = t_0 + t_1(I - I_0) + t_2(I - I_0)^2 + \dots$$

Für die Amplitude der rekonstruierten Welle unter dem Winkel Φ_0 ergibt sich

$$a_R = c_1(f + f_s \exp [i k \sin \Phi \cdot s]) + c_2(f^* f_s f_s \exp [2 i k \sin \Phi \cdot s] + f f f_s^* \exp [-i k \sin \Phi \cdot s]) + \dots$$

wobei

$$c_1 = r_0^2(t_1 + 2 t_2 f_0^2)(t_0 + t_1 f_0^2 + 2 t_2 r_0^2 f_0^2), \quad f_0^2 = |f|^2$$

$$c_2 = 2 r_0^4 t_2(t_1 + 2 t_2 f_0^2)$$

und die Intensität der rekonstruierten Welle ist

$$i_R = K_0 + K_1(ff_s^* \exp [-i k \sin \Phi \cdot s] + f^* f_s \exp [i k \sin \Phi \cdot s]) + K_2((ff_s^*)^2 \exp [-2 i k \sin \Phi \cdot s] + (f^* f_s)^2 \exp [2 i k \sin \Phi \cdot s]) + \dots$$

$$K_0 = 2 c_1 f_0^2$$

$$K_1 = c_1(c_1 + 2 f_0^2 c_2)$$

$$K_2 = 2 c_1 c_2$$

Wie erwartet verschwindet der zweite Term, falls der Ansatz der Funktion $t_A(I)$ nach dem linearen Glied abgebrochen wird.

In der totalen Intensität

$$I_R = \iint i_R(x, y) dx dy$$

tritt zusätzlich zum Autokorrelationsglied das Integral mit den Quadraten der Autokorrelation ff_s^* und $f^* f_s$ auf. Dieser Term oszilliert – abgesehen von Frequenzvariationen, bedingt durch die Änderung der Phase – mit doppelter Frequenz

$$I_R = K_0 g_0 + 2 K_1 T_1(s) \cos [\theta_1(s) + k \sin \Phi \cdot s] + 2 K_2 T_2(s) \cos [\theta_2(s) + 2 k \sin \Phi \cdot s] + \dots$$

mit $g_0 = \iint_P dx dy$

$$g_1(s) = T_1(s) \exp [i \theta_1(s)] = \iint f(x, y) f^*(x - s, y) dx dy$$

$$g_2(s) = T_2(s) \exp [i \theta_2(s)] = \iint [f(x, y) f^*(x - s, y)]^2 dx dy$$

In Abb. 8 ist die Funktionsfolge $T_n(s)$, $n = 1, 2, \dots$ am Beispiel der SIRA-Testlinse dargestellt.

Die Funktionen $g_2(s)$, $g_3(s)$, \dots fallen rascher ab als die Übertragungsfunktion $g_1(s)$, d. h. ihr Einfluß beschränkt sich im wesentlichen auf die Umgebung des Nullpunktes. In diesem Gebiet bewirken die Terme höherer Ordnung eine systematische Abweichung; der zu messende Anteil $K_1 g_1(s)$ wird von $K_2 g_2(s)$, $K_3 g_3(s)$, \dots überlagert. Durch geeignete Wahl der Objekt- und Referenzstrahlintensitäten können die Quotienten K_2/K_1 , K_3/K_1 , \dots minimalisiert werden:

1. Der „Arbeitspunkt“ $I_0 = r_0^2$ ist in das annähernd lineare Gebiet der Transparenzkurve $t_A(I)$ zu legen. Im besonderen verschwindet der zweite

Term, der die größte Störung bewirkt, falls der Wendepunkt von $t_A(I)$ gewählt wird.

2. Prinzipiell können die höheren Koeffizienten unterdrückt werden, indem die Objektwellen- relativ zur Referenzwellenintensität klein gehalten wird.

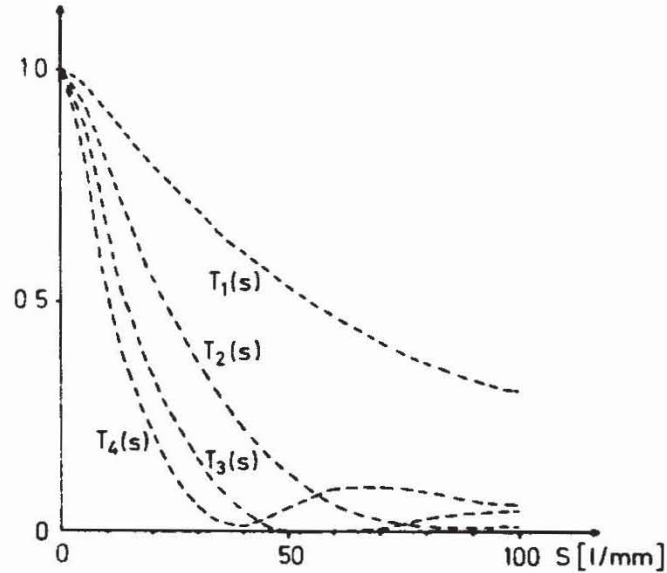


Abb. 8. Funktionen $T_1(s)$, $T_2(s)$, ... auf der Achse der Testlinse, fokussiert bei 50 l/mm und Blende $f/5,6$

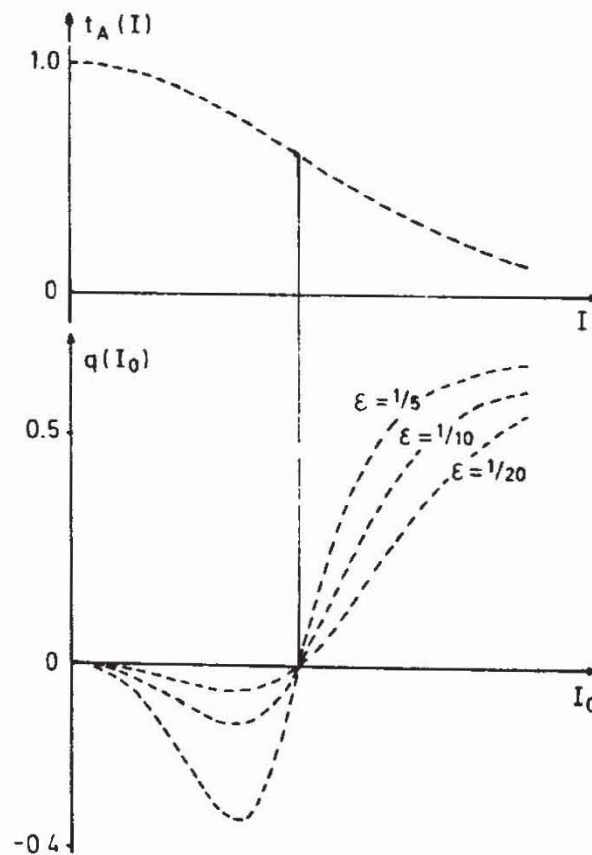


Abb. 9. Transparenzfunktion $t_A(I)$; Quotient $q(I_0)$ in Funktion des Arbeitspunktes I_0 für verschiedene Parameter $\epsilon = (f_0/r_0)^2$.

Allerdings wird damit die Intensität der rekonstruierten Welle im gleichen Maße erniedrigt.

Als Beispiel wird der Koeffizient K_2 mit K_1 verglichen, unter der Annahme, daß die Transparenzkurve von der Form einer Gaußfunktion ist:

$$t_A(I) = \exp[-cI^2]$$

Der Quotient $q(I_0) = K_2(I_0)/K_1(I_0)$ ist eine Funktion des Arbeitspunktes I_0 und wird parametrisiert durch das Verhältnis der Objekt- und Referenzstrahlintensitäten ($\varepsilon = (f_0/r_0)^2$). In Abb. 9 ist die Transparenzfunktion und der Quotient $q(I_0)$, der aus dem speziellen Ansatz $t_A(I) = \exp[-cI^2]$ resultiert, für verschiedene Parameter ε dargestellt.

Schlußfolgerung

Die Untersuchungen, die nicht über das Laborstadium hinaus geführt wurden, haben bestätigt, daß unter Berücksichtigung der auftretenden Fehlerquellen die Methode für spezielle Anwendungen in der Praxis durchaus geeignet ist. Der experimentelle Aufwand ist im Prinzip nicht sehr groß, wenn auch nicht übersehen werden kann, daß die hohen Anforderungen an mechanischer Stabilität und die Schwierigkeit der Unterdrückung unerwünschter Effekte der Methode eine breite Anwendung voraussichtlich verwehren werden. Hinzu kommt, daß im allgemeinen verschiedene Laser eingesetzt werden müßten, um das optische System im gesamten sichtbaren Spektrum auszumessen.

Untersuchungen mit Objektpunkten außerhalb der optischen Achse sind bisher nicht ausgeführt worden, prinzipiell steht dieser erweiterten Anwendung jedoch nichts im Wege.

Die Autoren danken dem Vorstand des Institutes für Technische Physik und Direktor der Abteilung für industrielle Forschung an der ETH-Z, Prof. Dr. E. Baumann, für die wohlwollende Unterstützung während der Ausführung der Versuche.

Literatur

- [1] H. H. Hopkins, Proc. Phys. Soc. 79 (1962) 889.
- [2] M. Françon, S. Lowenthal, M. May, R. Prat, C. R. Acad. Sci. Paris 263 (1966) 237.
- [3] K. Matsumoto, T. Ose, Japan. J. Appl. Phys. 7 (1968) 621.
- [4] M. May, Opt. Acta 5 (1969) 569.
- [5] T. L. Williams, A. Ashton, Appl. Opt. 10 (1969) 2007.
- [6] A. Kozma, J. Opt. Soc. Am. 57 (1966) 493.
- [7] J. Pospíšil, Optik 33 (1971) 78/137.