

Wärmeübertragung in einem axial rotierenden, durchströmten Rohr im Bereich des thermischen Einlaufs

Teil 1: Einfluß der Rotation auf eine turbulente Strömung

B. Weigand und H. Beer, Darmstadt, BRD

Heat transfer in an axially rotating pipe in the thermal entrance region. Part 1: Effect of rotation on turbulent pipe flow

Abstract. The effects of rotation on the temperature distribution and the heat transfer to a fluid flowing inside a tube are examined by analysis in the thermal entrance region. The theoretical results are compared with experimental findings. The flow is assumed to have a fully developed velocity profile. Rotation was found to have a very marked influence on the suppression of the turbulent motion because of radially growing centrifugal forces. Therefore, a remarkable decrease in heat transfer with increasing rotational Reynolds number can be observed. The thermal entrance length increases remarkably with growing rotational Reynolds number.

Zusammenfassung. Der Einfluß der Rotation auf das Temperaturprofil und die Wärmeübergangszahl einer turbulenten Rohrströmung im Bereich des thermischen Einlaufs wird theoretisch untersucht und mit Meßwerten verglichen. Es wird angenommen, daß das Geschwindigkeitsprofil voll ausgebildet ist. Die Rotation hat aufgrund der radial ansteigenden Zentrifugalkräfte einen ausgeprägten Einfluß auf die Unterdrückung der turbulenten Bewegung. Dadurch verschlechtert sich die Wärmeübertragung mit steigender Rotations-Reynoldszahl und die thermische Einlaufänge nimmt beträchtlich zu.

Formelzeichen

a	Temperaturleitzahl
C_n, \bar{C}_n, C_1, C_3	Konstanten
c_p	spezifische Wärme bei konstantem Druck
D	Rohrdurchmesser
E	Funktion nach Gl. (30)
H_n	Eigenfunktionen
l	hydrodynamischer Mischungsweg
l_q	thermischer Mischungsweg
\dot{m}	Massenstrom
$N = Re_\varphi / Re$	Reynoldszahlenverhältnis
Nu	Nusseltzahl
Nu_∞	Nusseltzahl für die thermisch voll ausgebildete Strömung
Pr	Prandtlzahl
Pr_t	turbulente Prandtlzahl
\dot{q}	Wärmestromdichte
Re_*	Schubspannungsreynoldszahl
R_n	Eigenfunktionen
$Re = \bar{v}_z D / \nu$	Durchfluß-Reynoldszahl
$Re_\varphi = v_{\varphi\omega} D / \nu$	Rotations-Reynoldszahl
Ri	Richardsonzahl
R	Rohrradius

r	Koordinate in radialer Richtung
$\tilde{r} = r/R$	dimensionslose Koordinate in radialer Richtung
T	Temperatur
T'	Temperaturschwankung
T_b	“bulk temperature”
\bar{v}_z	mittlere Axialgeschwindigkeit
v	Geschwindigkeit
v'	Geschwindigkeitsschwankung
$\frac{\rho c_p v_r T'}{y^+} = (1 - \tilde{r}) Re_*$	turbulenter Wärmestrom
$\beta = 1/6$	dimensionsloser Wandabstand
η	Konstante
ξ	Integrationsvariable
$\theta, \theta_1, \theta_2, \bar{\theta}$	Integrationsvariable
λ	dimensionslose Temperaturen
λ_n	Wärmeleitzahl
ν	Eigenwerte
ϱ	kinematische Viskosität
φ	Dichte
$\psi, \tilde{\psi}$	tangentiale Koordinate
	Hilfsfunktionen

Indizes

m	in der Rohrmitte
r	radial
w	an der Rohrwand
z	axial
0	am Rohreintritt
0	ohne Rotation
φ	tangential

1 Einleitung

Strömung und Wärmeübertragung in axial rotierenden Rohren sind von großer praktischer und theoretischer Bedeutung. In der Verfahrenstechnik werden z. B. rotierende Wärmetauscher, Separatoren und Mischer verwendet. Bei Hochleistungs-Gasturbinen und Strahltriebwerken wird die Temperatur der thermisch und mechanisch hoch beanspruchten Bauteile, insbesondere der Turbinenschaufeln, durch Zufuhr von Kühlluft begrenzt. Die Luft wird hierzu durch Kanäle, die meist in der Rohrachse liegen, zugeführt und durch die Turbinenschaufeln geleitet.

Die Wechselwirkung zwischen Zentrifugalkräften und Turbulenz wurde schon recht frühzeitig experimentell und später auch theoretisch untersucht. Die wohl älteste Arbeit zu diesem Thema stammt von Levy [1]. Murakami und Kikuyama [2] ermittelten in einem von Wasser durchströmten, rotierenden Rohr den Druckverlust und die Geschwindigkeitsprofile in Abhängigkeit von der Durchfluß-Reynoldszahl, dem Reynoldszahlenverhältnis $N = Re_\phi / Re$ und der rotierenden Rohrlänge. Sie stellten fest, daß mit wachsender Rohrrotation eine immer stärkere Unterdrückung der Turbulenz auftrat. Kikuyama u. a. [3] berechneten für den Fall der voll ausgebildeten Strömungsgrenzschicht die Axialgeschwindigkeitsprofile mit Hilfe eines modifizierten Prandtl'schen Mischungswegansatzes nach Bradshaw [4]. Die Tangentialgeschwindigkeitskomponente wurde bei dieser Berechnung als $v_\phi / v_{\phi w} = (r/R)^2$ angenommen, was sehr gut mit den Meßwerten aus [3] und [2] übereinstimmt. Reich und Beer [5] erweiterten den Mischungswegansatz aus [3] und berechneten für den Fall der voll ausgebildeten hydrodynamischen und thermischen Grenzschicht das Axialgeschwindigkeitsprofil und die Temperaturverteilung im Fluid. Es zeigte sich, in Übereinstimmung mit den gemachten Messungen, daß die Wärmeübertragung im turbulent durchströmten Rohr mit wachsender Rohrrotation schlechter wird. Dies läßt sich auf die Relaminarisierung der Strömung aufgrund der wirkenden Zentrifugalkräfte zurückführen. Für sehr große Reynoldszahlenverhältnisse wird der turbulente Transportmechanismus durch das wirkende Kraftfeld so stark unterdrückt, daß das Axialgeschwindigkeitsprofil dem einer Hagen-Poiseuille-Strömung sehr ähnlich wird (Bild 1). Die Wärmeübertragung gleicht in diesem Fall der in einem laminar durchströmten, beheizten Rohr, obgleich die Durchfluß-Reynoldszahl viel größer ist als im laminaren Fall.

Bei dem Vergleich der in [5] berechneten Nusseltzahlen mit den Meßwerten stellte sich heraus, daß die Übereinstim-

mung zwischen Messung und Rechnung für kleine Reynoldszahlenverhältnisse sehr gut war, jedoch mit wachsendem Reynoldszahlenverhältnis schlechter wurde. Dies läßt sich auf die in [5] getroffene Annahme einer voll ausgebildeten Temperaturgrenzschicht zurückführen, die aufgrund der hohen Reynoldszahlenverhältnisse und der damit verbundenen Laminarisierung der Strömung nicht mehr gewährleistet werden konnte. Die bei den Versuchen in [5] benutzte beheizte Meßstrecke hatte nur eine Länge von 40 Durchmessern.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit besteht in der Berechnung der Wärmeübertragung für das axial rotierende, turbulent durchströmte Rohr, für den Bereich der thermischen Anlaufströmung. Es werden die beiden technisch wichtigen Randbedingungen

- konstanter Wärmestrom an der Rohrwand
- konstante Wandtemperatur

betrachtet. Für diese beiden Fälle wird die Temperaturverteilung im Fluid und der Verlauf der Nusseltzahl für beliebige Axialkoordinaten berechnet und mit Meßwerten aus [5] verglichen.

2 Analyse

Die Untersuchung der hydrodynamisch voll ausgebildeten Strömung mit noch nicht voll entwickeltem Temperaturprofil ist von praktischem Interesse, da bei den meisten technischen Problemstellungen die Anlaufstrecke bei weitem zu kurz ist, um eine thermisch voll ausgebildete Strömung zu gewährleisten. Unter den Annahmen der Inkompressibilität des Fluids und der Konstanz der Stoffwerte, entkoppeln sich Bewegungs- und Energiegleichung. Die Bewegungsgleichungen wurden in [5], für den Fall der hydrodynamisch voll ausgebildeten Strömung gelöst. Auf den Lösungsweg soll hier nicht weiter eingegangen werden, da dies den Rahmen der Arbeit bei weitem überschreiten würde. Die für die folgenden Berechnungen notwendigen Geschwindigkeitsprofile wurden analog zu [5] berechnet. Die Profile sind für die hydrodynamisch voll ausgebildete Strömung nur eine Funktion der Radialkoordinate. Auf den Bildern 1 und 2 sind die Axialgeschwindigkeitskomponente und die Tangentialgeschwindigkeitskomponente dargestellt. Die Radialkomponente der Geschwindigkeit ist gleich Null, da es sich um eine voll ausgebildete Strömung handelt. Bild 1 zeigt den Verlauf der Axialgeschwindigkeit für zwei verschiedene Durchfluß-Reynoldszahlen mit dem Reynoldszahlenverhältnis N als Parameter. Man erkennt deutlich den Einfluß der Rohrrotation auf das Axialgeschwindigkeitsprofil. Mit zunehmender Rotation wird die Strömung immer mehr laminarisiert. Bild 2 zeigt die Tangentialgeschwindigkeitsverteilung für verschiedene Reynoldszahlen mit N als Parameter. Für die hydrodynamisch voll ausgebildete Strömung ist kein Einfluß des Reynoldszahlenverhältnisses auf $v_\phi / v_{\phi w}$ erkennbar. Die

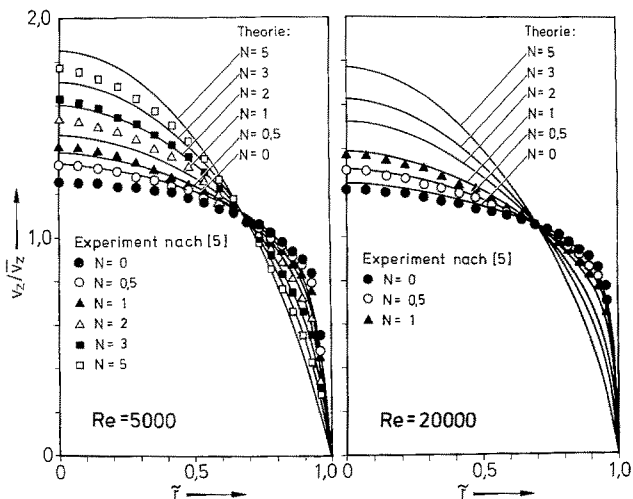


Bild 1. Einfluß des Reynoldszahlenverhältnisses N auf die Axialgeschwindigkeitsprofile

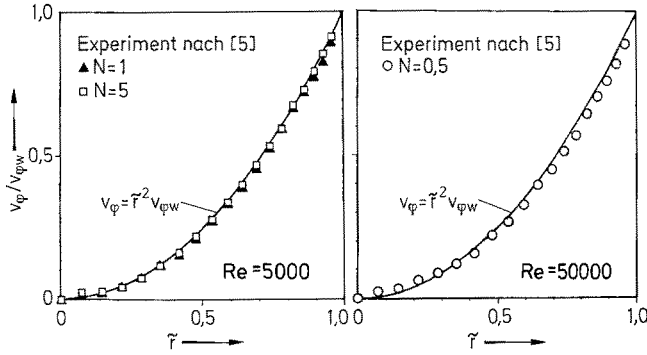


Bild 2. Einfluß des Reynoldszahlenverhältnisses N auf die Tangentialgeschwindigkeitsprofile

Tangentialgeschwindigkeitskomponente wurde wie in [2] durch

$$\frac{v_\varphi}{v_{\varphi w}} = \left(\frac{r}{R}\right)^2 \quad (1)$$

approximiert. In Bild 1 und 2 sind Meßwerte aus [5] eingetragen. Die Übereinstimmung zwischen Theorie und Messung ist gut.

Unter Vernachlässigung der Dissipationsterme und des Wärmeleitungsterms in z -Richtung erhält man, unter Beachtung der Rotationssymmetrie des Problems, die Energiegleichung in der folgenden Form

$$\varrho c_p v_z(r) \frac{\partial T}{\partial z} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \dot{q}_r). \quad (2)$$

Die Vernachlässigung des Wärmeleitungsterms in z -Richtung ist unbedenklich, wenn die Péclet-Zahl größer als 100 ist [6].

Die in Gl. (2) auftretenden Größen sind gemittelte Größen. Die radiale Komponente des Wärmestromvektors \dot{q}_r ist

$$\dot{q}_r = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r} + \varrho c_p v_r \overline{T'}. \quad (3)$$

Überträgt man die Prandtl'sche Mischungswegtheorie auf den Wärmetransport, so erhält man einen Zusammenhang zwischen den turbulenten Geschwindigkeits- und Temperaturschwankungen und den mittleren Strömungsgrößen [5]:

$$\dot{q}_r = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r} - \varrho c_p l l_q \left[\left(\frac{\partial v_z}{\partial r} \right)^2 + \left(r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\varphi}{r} \right) \right)^2 \right]^{1/2} \frac{\partial T}{\partial r}. \quad (4)$$

Die in Gl. (4) auftretenden Mischungswege l und l_q sind hierbei durch die folgenden Gleichungen gegeben:

$$\frac{l}{R} = (1 - \beta Ri)^2 \frac{l_0}{R} \quad (5)$$

$$\frac{l_q}{R} = \frac{1}{Pr_t} (1 - \beta Ri)^2 \frac{l_0}{R}. \quad (6)$$

Der hydrodynamische Mischungsweg l_0/R für das nicht rotierende Rohr ist durch die modifizierte Interpolationsformel nach Nikuradse [7] zu bestimmen.

$$\frac{l_0}{R} = (1 - e^{-\gamma^{+1/26}}) (0.14 - 0.08 \tilde{r}^2 - 0.06 \tilde{r}^4). \quad (7)$$

Die in Gl. (7) auftretende Größe $\tilde{r} = r/R$ ist der dimensionslose Radius. Die turbulente Prandtlzahl ist nach Messungen von Ludwig [7] bekannt und wurde als Polynom 4. Grades angenähert:

$$\frac{1}{Pr_t} = \frac{l_{q0}}{l_0} = 1.53 - 2.82 \tilde{r}^2 + 3.85 \tilde{r}^3 - 1.48 \tilde{r}^4. \quad (8)$$

Weiterhin tritt noch die Richardsonzahl Ri in den Mischungsweggleichungen auf. Sie stellt das Verhältnis der eingebrachten Energie durch die Zentrifugalkraft zur Turbulenzenergie dar.

$$Ri = \frac{2 \frac{v_\varphi}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (v_\varphi r)}{\left(\frac{\partial v_z}{\partial r} \right)^2 + \left(r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\varphi}{r} \right) \right)^2} = \frac{6 \tilde{r}^2 N^2}{\left(\frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left(\frac{v_z}{\tilde{r}} \right) \right)^2 + \tilde{r}^2 N^2}. \quad (9)$$

In Bild 3 ist die Veränderung des Mischungsweges und der Richardsonzahl über \tilde{r} für eine Durchfluß-Reynoldszahl, mit N als Parameter dargestellt. Mit wachsendem Reynoldszahlenverhältnis geht der Mischungsweg für alle \tilde{r} gegen Null, was einer vollständigen Laminarisierung der Strömung entspricht. Kikuyama [3] setzte Ri in der Rohrmitte gleich Null, mit der Begründung, daß die Zentrifugalkräfte für $\tilde{r} \rightarrow 0$ gegen Null gehen. Dies führt jedoch bei $\tilde{r} = 0$ zu einem Sprung in dem Verlauf der Richardsonzahl und des Mischungsweges. Für $\tilde{r} \rightarrow 0$ läßt sich der Grenzwert für Ri jedoch analytisch ermitteln. Entwickelt man v_z/\tilde{v}_z in eine Taylorreihe um $\tilde{r} = 0$, so erhält man

$$\frac{v_z}{\tilde{v}_z} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \tilde{r}^n \quad (10)$$

wobei, wegen der Rotationssymmetrie des Axialgeschwindigkeitsprofils $a_1 = 0$ ist. Damit läßt sich der folgende analytische Ausdruck für die Richardsonzahl in der Rohrmitte angeben

$$\lim_{\tilde{r} \rightarrow 0} Ri = \frac{6 N^2}{4 a_2^2 + N^2} \quad (11)$$

Verwendet man die Grenzwertbetrachtung (11), so kann man auch den Verlauf des Mischungsweges für $\tilde{r} \rightarrow 0$ analytisch berechnen.

$$\frac{l}{R} = \left(1 - \beta \frac{6 N^2}{(2 a_2)^2 + N^2} \right)^2 \frac{l_0}{R} \quad \text{für } \tilde{r} \rightarrow 0 \quad (12)$$

Mit den nun bekannten Geschwindigkeits- und Mischungswegverteilungen kann Gl. (2) weiter spezifiziert werden.

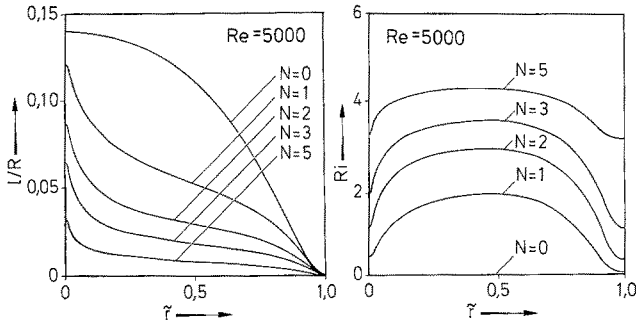


Bild 3. Einfluß des Reynoldszahlenverhältnisses N auf den hydrodynamischen Mischungsweg und auf die Richardsonzahl

Durch Einsetzen von Gl. (4) in (2) ergibt sich die Energiegleichung in der folgenden Form:

$$\rho c_p v_z \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\left\{ \lambda + \rho c_p l l_g \left[\left(\frac{\partial v_z}{\partial r} \right)^2 + \left(r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\varphi}{r} \right) \right)^2 \right]^{1/2} \right\} r \frac{\partial T}{\partial r} \right] \quad (13)$$

mit den Randbedingungen:

$$T(z=0, r) = T_0 \quad (14)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=0} = 0 \quad (15)$$

Als weitere Randbedingung tritt noch jene für $r=R$ hinzu. Es werden zwei verschiedene Fälle untersucht, in Abschn. 2.1 „Konstanter Wärmestrom an der Rohrwand“

$$-\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=R} = \dot{q}_{r,w} \quad (16)$$

und Abschn. 2.2 „Konstante Wandtemperatur“

$$T(z, r=R) = T_w \quad (17)$$

2.1 Konstanter Wärmestrom an der Rohrwand

Bei der Betrachtung eines konstanten Wärmestromes an der Wand, wird von der Energiegleichung (13) mit den Randbedingungen (14)–(16) ausgegangen.

Die Gln. (13)–(16) lassen sich durch das Einführen der folgenden dimensionslosen Größen umformen:

$$\theta = \frac{T - T_0}{\frac{\dot{q}_{r,w} R}{\lambda}} \quad (18)$$

$$\tilde{z} = \frac{z}{R} \frac{2}{Re Pr}; \quad Re = \frac{\bar{v}_z D}{\nu}; \quad Pr = \frac{\nu}{a}$$

$$\tilde{v}_z = \frac{v_z}{\bar{v}_z}; \quad \tilde{r} = \frac{r}{R}; \quad N = \frac{Re_\varphi}{Re}$$

Damit läßt sich Gl. (13) umschreiben:

$$\tilde{v}_z \tilde{r} \frac{\partial \theta}{\partial \tilde{z}} = \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left[\left\{ 1 + Pr Re \frac{l}{R} \frac{l_g}{R} \left[\left(\frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial \tilde{r}} \right)^2 + \left(\frac{1}{2} \tilde{r} N \right)^2 \right]^{1/2} \right\} \tilde{r} \frac{\partial \theta}{\partial \tilde{r}} \right] \quad (19)$$

mit den Randbedingungen:

$$\theta(\tilde{z}=0, \tilde{r}) = 0 \quad (20)$$

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial \tilde{r}} \right|_{\tilde{r}=0} = 0 \quad (21)$$

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial \tilde{r}} \right|_{\tilde{r}=1} = -1 \quad (22)$$

Gl. (19) stellt mit den Randbedingungen (20)–(22) eine Form des turbulenten Graetz-Problems dar.

Das Problem der thermischen Anlaufströmung für ein axial durchströmtes, nichtrotierendes Rohr mit konstantem Wärmestrom an der Rohrwand wurde ausführlich von Sparrow, Hallman und Siegel [8] behandelt. Für den Fall der Wärmeübertragung im axial durchströmten rotierenden Rohr mit konstantem Wärmestrom an der Rohrwand wurden von Reich [5] die Nusseltzahlen für die hydrodynamisch und thermisch voll ausgebildete Strömung angegeben. Der technisch weitaus bedeutsamere Fall der thermischen Anlaufströmung wurde noch nicht behandelt.

Zur Lösung der Energiegleichung (19) wird die Temperaturverteilung aufgeteilt:

$$\theta = \theta_1 + \theta_2 \quad (23)$$

Hierbei ist θ_1 die Temperaturverteilung der thermisch voll entwickelten Strömung, θ_2 stellt einen Anteil der Lösung dar, der weitgehend die Form des Temperaturprofils für kleine z bestimmt und für $z/D \gg 1$ gegen Null geht. Setzt man den Ansatz (23) in Gl. (19) und in die Randbedingungen (20)–(22) ein, so erhält man

$$\tilde{v}_z \tilde{r} \frac{\partial \theta_1}{\partial \tilde{z}} = \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left[E(\tilde{r}) \tilde{r} \frac{\partial \theta_1}{\partial \tilde{r}} \right] \quad (24)$$

$$\left. \frac{\partial \theta_1}{\partial \tilde{r}} \right|_{\tilde{z}, 1} = -1 \quad (25)$$

$$\left. \frac{\partial \theta_1}{\partial \tilde{r}} \right|_{\tilde{z}, 0} = 0 \quad (26)$$

$$\tilde{v}_z \tilde{r} \frac{\partial \theta_2}{\partial \tilde{z}} = \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left[E(\tilde{r}) \tilde{r} \frac{\partial \theta_2}{\partial \tilde{r}} \right] \quad (27)$$

$$\left. \frac{\partial \theta_2}{\partial \tilde{r}} \right|_{\tilde{z}, 1} = 0 \quad (28)$$

$$\left. \frac{\partial \theta_2}{\partial \tilde{r}} \right|_{\tilde{z}, 0} = 0 \quad (29)$$

mit der Funktion $E(\tilde{r})$

$$E(\tilde{r}) = 1 + Pr Re \frac{l}{R} \frac{l_g}{R} \left[\left(\frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial \tilde{r}} \right)^2 + \left(\frac{1}{2} \tilde{r} N \right)^2 \right]^{1/2} \quad (30)$$

und der Randbedingung

$$\tilde{z} = 0 : \theta_1 + \theta_2 = 0. \tag{20}$$

2.1.1 Die voll entwickelte Strömung

Für den Fall des voll ausgebildeten Temperaturprofils steigt die Temperatur des strömenden Mediums mit wachsendem \tilde{z} linear an. Es wird deshalb für θ_1 der Ansatz

$$\theta_1 = C_1 \tilde{z} + \psi(\tilde{r}) \tag{31}$$

gemacht [9]. Setzt man Gl. (31) in die Gln. (24) bis (26) ein, so ergibt sich:

$$\tilde{v}_z \tilde{r} C_1 = \frac{d}{d\tilde{r}} \left[E(\tilde{r}) \tilde{r} \frac{d\psi}{d\tilde{r}} \right] \tag{32}$$

$$\frac{d\psi}{d\tilde{r}}(\tilde{r}=1) = -1 \tag{33}$$

$$\frac{d\psi}{d\tilde{r}}(\tilde{r}=0) = 0. \tag{34}$$

In Gl. (31) und (32) treten insgesamt drei zu bestimmende Konstanten auf. Zwei sind durch die Randbedingungen (33) und (34) festgelegt. Die dritte Konstante erhält man aus einer Wärmebilanz. Die Wärmemenge, die über die Rohrmantelfläche dem Fluid zugeführt wird, muß sich in einer Enthalpieerhöhung des Fluids bemerkbar machen:

$$-2 \pi R z \dot{q}_{r,w} = \int_0^{2\pi} \int_0^R \rho c_p (T - T_0) v_z r dr d\varphi. \tag{35}$$

Gleichung (35) lautet in dimensionsloser Form nach Integration über φ :

$$-\tilde{z} = \int_0^1 \theta_1 \tilde{v}_z \tilde{r} d\tilde{r}. \tag{36}$$

Die Temperaturverteilung für die thermisch voll ausgebildete Strömung im axial rotierenden Rohr wurde schon unter [5] berechnet. Sie gilt nur für $z/D \gg 1$. Die Lösung lautet:

$$\theta_1(\tilde{r}, \tilde{z}) = -2 \tilde{z} + \bar{\psi}(\tilde{r}) + C_3 \tag{37}$$

mit der Konstanten C_3 :

$$C_3 = -2 \int_0^1 \bar{\psi}(\tilde{r}) \tilde{r} \tilde{v}_z d\tilde{r} \tag{38}$$

und der Funktion $\bar{\psi}(\tilde{r})$:

$$\bar{\psi}(\tilde{r}) = \int_0^{\tilde{r}} \left(\frac{-2}{\eta E(\eta)} \int_0^{\eta} \tilde{v}_z(\xi) \xi d\xi \right) d\eta. \tag{39}$$

Als Nusseltzahl für die thermisch voll ausgebildete Strömung im rotierenden Rohr erhält man [5]

$$Nu_\infty = \frac{D}{T_w - T_b} \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=R} = \frac{-2}{\bar{\psi}(1) + C_3}. \tag{40}$$

Es sei hier bemerkt, daß Nu_∞ für $N \rightarrow \infty$ gegen den Wert 4.36 geht, also gegen die Nusseltzahl der laminaren, thermisch voll entwickelten Strömung bei konstanter Wärmestromdichte an der Rohrwand. Die Lösung (37) gilt dann mit einer Abweichung von $\approx 2\%$ zur exakten Lösung [9] bereits für $\tilde{z} \approx 0.1$, d. h., wenn $z/D \approx 0.1 Re Pr/4$ ist. Aus diesem Grunde muß für $Re = 5000, Pr = 0.71, z/D \approx 89$ sein, bis die Strömung thermisch voll ausgebildet ist. Es wird deutlich, daß die Anlaufänge für große Reynoldszahlen aufgrund der Relaminarisierungseffekte sehr große Werte annimmt.

2.1.2 Die Temperaturfunktion θ_2

Mit Hilfe der bereits berechneten Funktion θ_1 läßt sich die Randbedingung für $\tilde{z}=0$ für θ_2 formulieren.

$$\theta(\tilde{z}=0, \tilde{r}) = 0 = \theta_1 + \theta_2 = \psi(\tilde{r}) + \theta_2 \tag{41}$$

$$\theta_2(\tilde{z}=0, \tilde{r}) = -\psi(\tilde{r}). \tag{42}$$

Die Funktion θ_2 bestimmt sich somit aus der folgenden Differentialgleichung und den Randbedingungen (28), (29) und (42)

$$\tilde{v}_z \tilde{r} \frac{\partial \theta_2}{\partial \tilde{z}} = \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left[E(\tilde{r}) \tilde{r} \frac{\partial \theta_2}{\partial \tilde{r}} \right] \tag{27}$$

$$\frac{\partial \theta_2}{\partial \tilde{r}}(\tilde{z}, 1) = 0 \tag{28}$$

$$\frac{\partial \theta_2}{\partial \tilde{r}}(\tilde{z}, 0) = 0 \tag{29}$$

$$\theta_2(0, \tilde{r}) = -\psi(\tilde{r}) = \int_0^{\tilde{r}} \left(\frac{2}{\eta E(\eta)} \int_0^{\eta} \tilde{v}_z(\xi) \xi d\xi \right) d\eta + 2 \int_0^1 \bar{\psi}(\tilde{r}) \tilde{r} \tilde{v}_z d\tilde{r}. \tag{42}$$

Diese parabolische Differentialgleichung läßt sich mit Hilfe eines Separationsansatzes der Form

$$\theta_2 = F(\tilde{z}) R(\tilde{r}) \tag{43}$$

lösen. Man erhält das folgende Sturm-Liouville'sche Eigenwertproblem

$$\frac{d}{d\tilde{r}} [E(\tilde{r}) \tilde{r} R'_n(\tilde{r})] + \lambda_n^2 \tilde{v}_z(\tilde{r}) \tilde{r} R_n(\tilde{r}) = 0 \tag{44}$$

mit den beiden Randbedingungen

$$R'_n(1) = 0 \tag{45}$$

$$R'_n(0) = 0 \tag{46}$$

und einer angenommenen Normierungsbedingung

$$R_n(0) = 1. \tag{47}$$

Die Funktionen $F_n(\tilde{z})$ lassen sich sofort angeben:

$$F_n(\tilde{z}) = A_n e^{-\lambda_n^2 \tilde{z}}.$$

Damit kann auch die Gesamtlösung von (27) angegeben werden:

$$\theta_2 = \sum_{n=0}^{\infty} C_n R_n(\tilde{r}) e^{-\lambda_n^2 \tilde{z}}. \tag{48}$$

Tabelle 1. Eigenwerte und Konstanten für verschiedene Durchfluß-Reynoldszahlen ($Pr=0.71$). Konstanter Wärmestrom an der Rohrwand

N	λ_0^2	λ_1^2	λ_2^2	λ_3^2	λ_4^2	$C_0 R_0(1)$	$C_1 R_1(1)$	$C_2 R_2(1)$	$C_3 R_3(1)$	$C_4 R_4(1)$	Nu_∞
<i>Re = 5000</i>											
0.0	0.00	152.95	436.18	850.68	1402.43	0.00	0.0287	0.0156	0.0100	0.0068	19.44
1.0	0.00	80.76	250.74	502.90	837.43	0.00	0.0409	0.0183	0.0110	0.0080	15.17
2.0	0.00	46.13	146.25	297.66	500.30	0.00	0.0654	0.0259	0.0152	0.0103	10.84
3.0	0.00	30.56	97.52	199.53	336.65	0.00	0.0946	0.0358	0.0201	0.0133	8.09
5.0	0.00	18.62	59.73	122.80	207.94	0.00	0.1467	0.0537	0.0292	0.0187	5.59
20.0	0.00	12.87	41.91	87.11	148.35	0.00	0.1984	0.0691	0.0365	0.0231	4.36
<i>Re = 10,000</i>											
0.0	0.00	279.41	803.45	1554.39	2544.80	0.00	0.0148	0.0086	0.0061	0.0044	31.59
1.0	0.00	130.62	410.72	826.65	1376.02	0.00	0.0241	0.0105	0.0069	0.0051	23.54
2.0	0.00	69.38	221.51	451.83	759.58	0.00	0.0425	0.0165	0.0098	0.0068	15.88
3.0	0.00	42.65	136.70	279.94	472.32	0.00	0.0672	0.0252	0.0143	0.0096	11.01
5.0	0.00	22.44	71.96	147.97	250.37	0.00	0.1221	0.0447	0.0245	0.0159	6.57
20.0	0.00	12.87	42.01	87.18	148.35	0.00	0.1984	0.0694	0.0366	0.0231	4.37
<i>Re = 20,000</i>											
0.0	0.00	505.25	1476.01	2865.89	4676.89	0.00	0.0077	0.0044	0.0033	0.0026	52.57
1.0	0.00	216.04	687.15	1392.03	2324.21	0.00	0.0140	0.0058	0.0037	0.0028	37.89
2.0	0.00	108.93	350.64	717.64	1208.68	0.00	0.0266	0.0100	0.0058	0.0041	24.54
3.0	0.00	63.24	203.82	418.39	706.46	0.00	0.0450	0.0165	0.0093	0.0062	16.09
5.0	0.00	28.57	92.04	189.37	320.56	0.00	0.0960	0.0349	0.0192	0.0125	8.23
20.0	0.00	12.87	42.01	87.25	148.55	0.00	0.1980	0.0692	0.0365	0.0231	4.37
<i>Re = 50,000</i>											
0.0	0.00	1115.14	3281.90	6428.25	10541.09	0.00	0.0034	0.0018	0.0013	0.0011	105.54
1.0	0.00	436.34	1396.90	2846.20	4775.51	0.00	0.0068	0.0027	0.0016	0.0012	74.00
2.0	0.00	210.11	679.36	1395.30	2356.11	0.00	0.0136	0.0048	0.0028	0.0019	46.34
3.0	0.00	115.92	375.17	772.10	1306.02	0.00	0.0246	0.0088	0.0049	0.0032	28.98
5.0	0.00	44.17	142.76	294.02	497.86	0.00	0.0630	0.0225	0.0123	0.0080	12.45
20.0	0.00	12.92	42.10	87.47	148.93	0.00	0.1975	0.0689	0.0363	0.0229	4.38

Die Konstanten C_n erhält man aus der Anfangsbedingung (42) mit Hilfe der Orthogonalitätseigenschaften der Eigenfunktionen $R_n(\tilde{r})$ [10]:

$$C_n = \frac{\int_0^1 -\psi(\tilde{r}) \tilde{v}_z(\tilde{r}) \tilde{r} R_n(\tilde{r}) d\tilde{r}}{\int_0^1 \tilde{v}_z(\tilde{r}) \tilde{r} R_n^2(\tilde{r}) d\tilde{r}} \tag{49}$$

Der Ausdruck (49) läßt sich stark vereinfachen (siehe Anhang) und man erhält:

$$C_n = \frac{R_n(1)}{\lambda_n^2} \cdot \frac{1}{\int_0^1 \tilde{v}_z(\tilde{r}) \tilde{r} R_n^2(\tilde{r}) d\tilde{r}} \tag{50}$$

Die Eigenwerte λ_n wurden numerisch berechnet. Hierzu wurde die Differentialgleichung (44) mit den Randbedingungen (45), (46) und der Normierungsbedingung (47) für einen angenommenen Eigenwert $\tilde{\lambda}$ von der Rohrmitte aus integriert. Durch Überprüfen der Randbedingung (45) wurde festgestellt, ob $\tilde{\lambda}$ ein Eigenwert von (44) war. Traf dies nicht zu, so wurde ein neues $\tilde{\lambda}$ gewählt und mit diesem die Rech-

nung durchgeführt, bis ein Vorzeichenwechsel bei $R'_n(1)$ auftrat. War dies der Fall, so konnte der Eigenwert, der im Intervall $[\tilde{\lambda}, \hat{\lambda}]$ lag, leicht durch Intervallschachtelung gefunden werden. Die Eigenwerte λ_n sind in Tabelle 1 für verschiedene Reynoldszahlenverhältnisse N und verschiedene Reynoldszahlen angegeben.

Damit ist die Gesamtlösung für den Temperaturverlauf im Bereich des thermischen Anlaufs bekannt:

$$\theta(\tilde{r}, \tilde{z}) = -2 \tilde{z} + \psi(\tilde{r}) + \sum_{n=0}^{\infty} C_n R_n(\tilde{r}) e^{-\lambda_n^2 \tilde{z}} \tag{51}$$

Mit dem Temperaturgradienten an der Wand kann die lokale Nusseltzahl berechnet werden

$$Nu = \frac{D \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_w}{T_w - T_b} = \frac{-\frac{\dot{q}_{r,w} D}{\lambda}}{T_w - T_b} \tag{52}$$

Hierin stellt T_w die Wandtemperatur dar. T_b ist die „bulk-temperature“:

$$T_b = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^R T(r, z) v_z r dr d\varphi}{\int_0^{2\pi} \int_0^R v_z r dr d\varphi} \tag{53}$$

Macht man die Gln. (52) und (53) in gewohnter Weise dimensionslos, so erhält man:

$$Nu = \frac{-2}{\theta(1, \bar{z}) - \theta_b(\bar{z})} \quad (54)$$

$$\theta_b = \frac{\int_0^1 \theta(\bar{r}, \bar{z}) \bar{v}_z \bar{r} d\bar{r}}{\int_0^1 \bar{v}_z \bar{r} d\bar{r}} \quad (55)$$

Aus der Voraussetzung eines konstanten Massenstroms

$$\dot{m} = \rho \bar{v}_z \pi R^2 = \rho \int_0^{2\pi} \int_0^R v_z r dr d\varphi \quad (56)$$

folgt

$$\int_0^1 \bar{v}_z \bar{r} d\bar{r} = \frac{1}{2} \quad (57)$$

Damit ergibt sich θ_b zu

$$\theta_b = 2 \int_0^1 \theta(\bar{r}, \bar{z}) \bar{v}_z \bar{r} d\bar{r} \quad (58)$$

Setzt man Gl. (23) und Gl. (58) in Gl. (54) ein, so führt dies zu folgendem Ausdruck für die lokale Nusseltzahl:

$$Nu = \frac{-2}{\theta_1(1, \bar{z}) - \theta_{b_1}(\bar{z}) + \theta_2(1, \bar{z}) - \theta_{b_2}(\bar{z})} \quad (59)$$

$\theta_1(1, \bar{z}) - \theta_{b_1}(\bar{z})$ wurde von Reich [5] berechnet

$$\theta_1(1, \bar{z}) - \theta_{b_1}(\bar{z}) = \bar{\psi}(1) + C_3 \quad (60)$$

Der zweite Ausdruck im Nenner von (59) läßt sich einfach bestimmen. Die Temperaturverteilung θ_2 an der Rohrwand ist durch Gl. (48) gegeben. Setzt man diese in Gl. (58) ein, so ergibt sich:

$$\theta_{b_2} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} C_n e^{-\lambda_n^2 \bar{z}} \int_0^1 R_n(\bar{r}) \bar{v}_z(\bar{r}) \bar{r} d\bar{r} \quad (61)$$

Das in diesem Ausdruck auftauchende Integral läßt sich mit Hilfe der Differentialgleichung (44) berechnen:

$$\begin{aligned} \int_0^1 R_n(\bar{r}) \bar{v}_z(\bar{r}) \bar{r} d\bar{r} &= -\frac{1}{\lambda_n^2} \int_0^1 \frac{d}{d\bar{r}} \left[\bar{r} E(\bar{r}) \frac{dR_n}{d\bar{r}} \right] d\bar{r} \\ &= -\frac{1}{\lambda_n^2} \left(\bar{r} E(\bar{r}) \frac{dR_n}{d\bar{r}} \right) \Big|_0^1 = 0 \end{aligned} \quad (62)$$

Damit ergibt sich für die Nusseltzahl

$$Nu = \frac{-2}{\bar{\psi}(1) + C_3 + \sum_{n=0}^{\infty} C_n R_n(1) e^{-\lambda_n^2 \bar{z}}} \quad (63)$$

Unter Verwendung von Gl. (40) für Nu_{∞} erhält man außerdem:

$$\frac{Nu}{Nu_{\infty}} = \frac{1}{1 + \sum_{n=0}^{\infty} B_n e^{-\lambda_n^2 \bar{z}}} \quad (64)$$

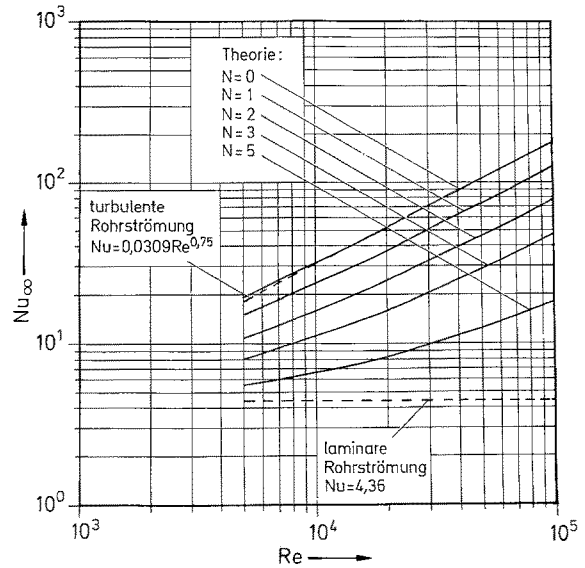


Bild 4. Verlauf der Nusseltzahl für die hydrodynamisch und thermisch ausgebildete Strömung über der Durchfluß-Reynoldszahl Re mit dem Reynoldszahlenverhältnis N als Parameter. Konstante Wärmestromdichte an der Rohrwand

In Tabelle 1 sind die Werte $C_n R_n(1)$ sowie die Eigenwerte λ_n für verschiedene Durchfluß-Reynoldszahlen und verschiedene Reynoldszahlenverhältnisse N angegeben. Zur Bestimmung der örtlichen Nusseltzahl liest man zunächst die Nusseltzahl für die voll ausgebildete Strömung aus Bild 4 ab oder entnimmt sie Tabelle 1. Damit ist nach Gl. (40) $\bar{\psi}(1) + C_3$ bekannt. Mit Hilfe der gegebenen Eigenwerte λ_n und $C_n R_n(1)$ ist es dann möglich, die Nusseltzahl als Funktion von \bar{z} aus Gl. (63) zu berechnen.

Die Ergebnisse der analytischen Betrachtung sind in den folgenden Abbildungen für Luft ($Pr = 0.71$) graphisch dargestellt. In Bild 4 ist für konstante Wärmestromdichten an der Wand die Nusseltzahl Nu_{∞} der ausgebildeten Strömung über der Durchfluß-Reynoldszahl aufgetragen, mit dem Reynoldszahlenverhältnis N als Parameter. Der Laminarisierungseffekt durch die Rotation ist deutlich erkennbar. Für $N \rightarrow \infty$ strebt Nu gegen den Wert $Nu = 4.36$ der laminaren Rohrströmung.

In Bild 5 sind die Gegebenheiten des thermischen Anlaufs dargestellt. Aufgetragen ist der Verlauf von Nu/Nu_{∞} als Funktion von z/D für verschiedene Reynoldszahlen. Man erkennt deutlich wie die Einlaufänge für wachsende Reynoldszahlenverhältnisse N beträchtlich anwächst. Für $N \rightarrow \infty$ ($N = 20.0$) geht die Anlaufänge gegen die einer laminaren Strömung:

$$\frac{L_a}{D} \approx 0.05 Re Pr \quad (65)$$

Dieser Einfluß wird besonders für große Reynoldszahlen spürbar. Bei einer Durchfluß-Reynoldszahl von $Re = 50,000$ ist die Strömung auch für kleine Reynoldszahlenverhältnisse (z.B. $N = 1$) selbst nach 80 Rohrdurchmessern noch nicht thermisch voll ausgebildet.

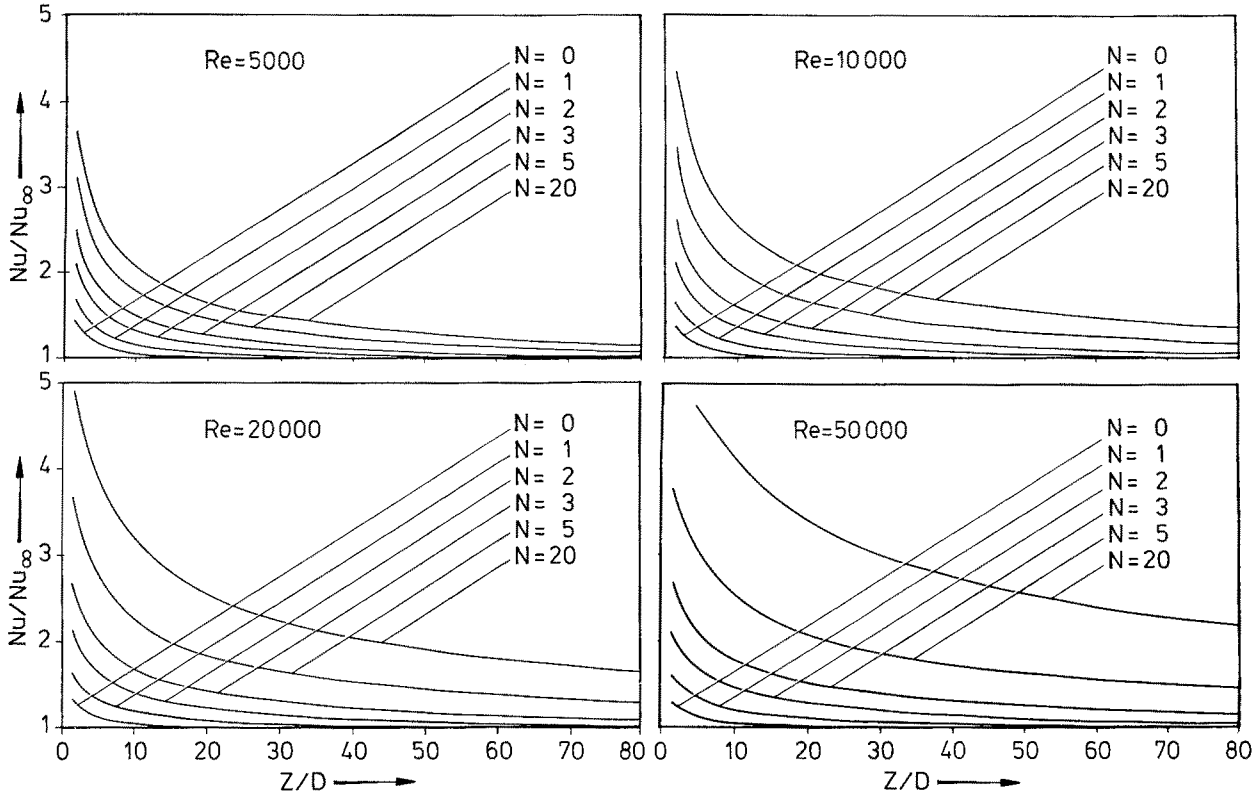


Bild 5. Verlauf von Nu/Nu_8 über der Rohrlänge mit N als Parameter. Konstante Wärmestromdichte an der Rohrwand

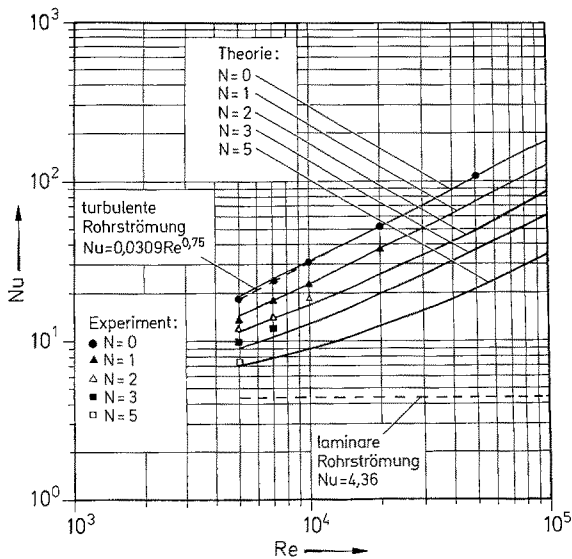


Bild 6. Einfluß des Reynoldszahlenverhältnisses N auf die Nusseltzahl für $z/D = 40$. Konstante Wärmestromdichte an der Rohrwand

In Bild 6 ist die Nusseltzahl für $z/D = 40$ über der Reynoldszahl mit N als Parameter dargestellt. Genau wie in Bild 4 ist die Laminarisierung der Strömung aufgrund des wirkenden Kraftfeldes zu erkennen. Zum Vergleich wurden Meßwerte von Reich [5] eingetragen. Messung und Rechnung stimmen gut überein.

2.2 Konstante Wandtemperatur

Für den Fall der konstanten Rohrwandtemperatur tritt zur Energiegleichung (13) und den beiden Randbedingungen (14) und (15) noch die geänderte Randbedingung (17) hinzu. Damit lautet die Energiegleichung

$$\rho c_p v_z \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \left[\lambda + \rho c_p l l_q \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} \right)^2 + \left(r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\varphi}{r} \right) \right)^2 \right]^{1/2} \right\} r \frac{\partial T}{\partial r} \quad (13)$$

und die Randbedingungen

$$T(z=0, r) = T_0 \quad (14)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=0} = 0 \quad (15)$$

$$T(z, r=R) = T_w \quad (17)$$

Cannon und Kays [11] untersuchten experimentell den Einfluß der Rotation auf die Wärmeübertragung in einem axial rotierenden Rohr mit konstanter Wandtemperatur bei gleichzeitigem hydrodynamischen und thermischen Einlauf. Der Fall der Wärmeübertragung in einem axial rotierenden Rohr mit konstanter Wandtemperatur ist bislang theoretisch noch nicht behandelt worden.

Gleichung (13) und die Randbedingungen (14), (15) und (17) werden nun auf die gleiche Art dimensionslos gemacht wie in Abschn. 2.1. Der einzige Unterschied besteht im Einführen einer neuen dimensionslosen Temperatur und der geänderten Randbedingung (17)

$$\tilde{\theta} = \frac{T - T_w}{T_0 - T_w} \tag{66}$$

Mit den dimensionslosen Größen ergibt sich

$$\tilde{v}_z \tilde{r} \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \tilde{z}} = \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left[\left\{ 1 + Pr Re \frac{l}{R} \frac{l_q}{R} \left[\left(\frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial \tilde{r}} \right)^2 + \left(\frac{1}{2} \tilde{r} N \right)^2 \right]^{1/2} \right\} \tilde{r} \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \tilde{r}} \right] \tag{67}$$

$$\tilde{\theta}(\tilde{z}=0, \tilde{r}) = 1 \tag{68}$$

$$\left. \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \tilde{r}} \right|_{\tilde{r}=0} = 0 \tag{69}$$

$$\tilde{\theta}(\tilde{z}, \tilde{r}=1) = 0. \tag{70}$$

Die lineare, parabolische Differentialgleichung (67) mit der Anfangsbedingung (68) und den beiden Randbedingungen (69) und (70) läßt sich mit Hilfe eines Separationsansatzes

$$\tilde{\theta} = Z(\tilde{z}) H(\tilde{r}) \tag{71}$$

lösen.

Das zugehörige Sturm-Liouville'sche Eigenwertproblem lautet:

$$\frac{d}{d\tilde{r}} \left[E(\tilde{r}) \tilde{r} \frac{dH_n}{d\tilde{r}} \right] + \lambda_n^2 \tilde{v}_z(\tilde{r}) \tilde{r} H_n(\tilde{r}) = 0 \tag{72}$$

$$\tilde{r} = 0 : H_n(0) = 1, \quad dH_n/d\tilde{r} = 0 \tag{73}$$

$$\tilde{r} = 1 : H_n(1) = 0. \tag{74}$$

Die Eigenwerte λ_n wurden genauso berechnet, wie unter 2.1 beschrieben. Die Temperaturverteilung ist somit bekannt. Sie lautet:

$$\tilde{\theta}(\tilde{r}, \tilde{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{C}_n H_n e^{-\lambda_n^2 \tilde{z}}. \tag{75}$$

Die Konstanten \bar{C}_n berechnen sich mit Hilfe der Orthogonalitätseigenschaften der Eigenfunktionen H_n zu:

$$\bar{C}_n = \frac{\int_0^1 \tilde{v}_z \tilde{r} H_n d\tilde{r}}{\int_0^1 \tilde{v}_z \tilde{r} H_n^2 d\tilde{r}}. \tag{76}$$

Das Integral im Zähler von Gl. (76) läßt sich mit Hilfe der Gln. (72) bis (74) umschreiben. Es ergibt sich:

$$\bar{C}_n = \frac{-H'_n(1)}{\lambda_n^2 \int_0^1 \tilde{v}_z \tilde{r} H_n^2 d\tilde{r}}. \tag{77}$$

Die Eigenwerte λ_n sind in Tabelle 2 für verschiedene Reynoldszahlenverhältnisse N und für verschiedene Reynoldszahlen angegeben. Die lokale Nusseltzahl $Nu = D \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_w / (T_w - T_b)$ läßt sich mit Hilfe der dimensionslosen Variablen umschreiben:

$$Nu = \frac{2 \left. \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \tilde{r}} \right|_{1, \tilde{z}}}{-\tilde{\theta}_b} \tag{78}$$

wobei $\tilde{\theta}_b$ die dimensionslose „bulk temperature“ ist.

$$\tilde{\theta}_b = \frac{\int_0^1 \tilde{\theta}(\tilde{r}, \tilde{z}) \tilde{v}_z \tilde{r} d\tilde{r}}{\int_0^1 \tilde{v}_z \tilde{r} d\tilde{r}}. \tag{79}$$

Gleichung (79) wird mit Hilfe von Gl. (57) umgeformt und man erhält:

$$\tilde{\theta}_b = 2 \int_0^1 \tilde{\theta}(\tilde{r}, \tilde{z}) \tilde{v}_z \tilde{r} d\tilde{r}. \tag{80}$$

Setzt man Gl. (75) in Gl. (80) ein und verwendet wieder die Gln. (72) bis (74), so gewinnt man den folgenden Ausdruck für $\tilde{\theta}_b$:

$$\tilde{\theta}_b = -2 \sum_{n=0}^{\infty} \bar{C}_n \frac{H'_n(1)}{\lambda_n^2} e^{-\lambda_n^2 \tilde{z}}. \tag{81}$$

Damit erhält man die Nusseltzahl in der für nichtrotierende Rohre schon oft angegebenen Form:

$$Nu = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \bar{C}_n H'_n(1) e^{-\lambda_n^2 \tilde{z}}}{\sum_{n=0}^{\infty} \bar{C}_n \frac{H'_n(1)}{\lambda_n^2} e^{-\lambda_n^2 \tilde{z}}}. \tag{82}$$

Die Nusseltzahl für die hydrodynamisch und thermisch voll ausgebildete Strömung ergibt sich aus dem Grenzübergang

$\tilde{z} \rightarrow \infty$:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} Nu = Nu_{\infty} = \lambda_0^2. \tag{83}$$

Die Konstanten $\bar{C}_n H'_n(1)$ sind ebenfalls in Tabelle 2 für verschiedene Reynoldszahlen und Reynoldszahlenverhältnisse N angegeben. Mit Hilfe der Tabelle 2 und Gl. (82) kann somit die lokale Nusseltzahl an jeder gewünschten Stelle \tilde{z} berechnet werden.

Die Ergebnisse der analytischen Betrachtungen sind in den folgenden Abbildungen, für Luft als Strömungsmedium ($Pr=0.71$), graphisch dargestellt. In Bild 7 ist für die ausgebildete Strömung Nu_{∞} über Re mit N als Parameter aufgetragen. Man erkennt deutlich, daß sich die Wärmeübertragung mit wachsender Rohrrotation infolge des Laminarisierungseffektes verschlechtert. Für den Grenzfall $N \rightarrow \infty$ strebt die Nusseltzahl gegen 3.65, also gegen die Nusseltzahl

Tabelle 2. Eigenwerte und Konstanten für verschiedene Durchfluß-Reynoldszahlen ($Pr = 0.71$). Konstante Wandtemperatur

N	λ_0^2	λ_1^2	λ_2^2	λ_3^2	λ_4^2	$-\bar{C}_0 H_0'(1)$	$-\bar{C}_1 H_1'(1)$	$-\bar{C}_2 H_2'(1)$	$-\bar{C}_3 H_3'(1)$	$-\bar{C}_4 H_4'(1)$
<i>Re = 5000</i>										
0.0	18.56	205.16	535.58	1001.77	1605.46	8.82	2.68	2.24	2.11	2.02
1.0	14.10	115.33	308.16	588.08	953.22	6.49	2.69	1.95	1.69	1.58
2.0	9.79	70.61	185.02	352.17	571.59	4.35	2.27	1.70	1.45	1.31
3.0	7.15	48.76	126.32	239.45	388.08	3.11	1.81	1.42	1.23	1.16
5.0	4.81	31.01	79.39	149.98	242.62	2.03	1.32	1.09	0.96	0.88
20.0	3.64	22.29	57.01	107.65	174.36	1.50	1.09	0.93	0.83	0.77
<i>Re = 10,000</i>										
0.0	30.47	356.94	951.42	1790.03	2872.88	14.65	3.74	2.92	2.73	2.64
1.0	22.07	181.29	490.82	944.03	1537.44	10.25	3.97	2.65	2.19	1.98
2.0	14.39	104.20	274.97	525.58	855.43	6.46	3.21	2.33	1.91	1.68
3.0	9.79	67.13	174.62	331.88	538.76	4.29	2.45	1.86	1.57	1.40
5.0	5.72	36.93	94.86	179.33	290.45	2.43	1.54	1.25	1.09	0.99
20.0	3.64	22.29	57.01	107.73	174.41	1.50	1.09	0.93	0.83	0.77
<i>Re = 20,000</i>										
0.0	51.07	626.53	1694.74	3216.99	5183.61	24.74	5.64	4.01	3.60	3.46
1.0	35.69	294.83	804.66	1557.61	2548.73	16.69	6.23	3.87	3.01	2.61
2.0	22.37	162.08	429.04	822.83	1342.84	10.09	5.05	3.46	2.72	2.31
3.0	14.39	98.82	257.62	490.65	797.88	6.33	3.59	2.66	2.19	1.90
5.0	7.15	46.81	120.37	227.89	369.31	3.06	1.93	1.54	1.33	1.19
20.0	3.64	22.37	57.07	107.81	174.56	1.50	1.09	0.93	0.83	0.77
<i>Re = 50,000</i>										
0.0	103.16	1351.74	3679.56	7030.28	11396.02	50.30	10.38	6.86	5.68	5.16
1.0	70.09	587.26	1610.65	3130.91	5143.33	32.98	11.90	7.02	5.13	4.19
2.0	42.49	310.03	822.22	1579.93	2583.70	19.26	9.53	6.35	4.81	3.92
3.0	25.94	180.36	470.45	896.89	1460.10	11.47	6.53	4.76	3.82	3.23
5.0	10.90	72.09	185.61	351.66	570.29	4.68	2.95	2.32	1.98	1.76
20.0	3.70	22.44	57.25	108.13	175.08	1.51	1.09	0.93	0.83	0.77

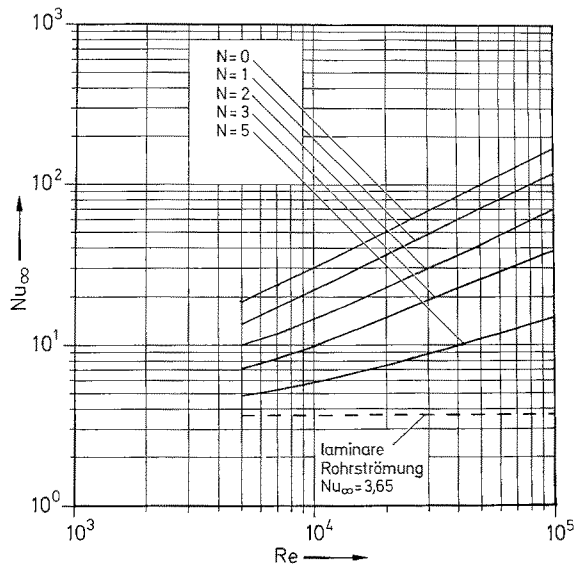


Bild 7. Einfluß des Reynoldszahlenverhältnisses N auf die Nusseltzahl der voll ausgebildeten Strömung. Konstante Wandtemperatur

für die laminare Rohrströmung mit konstanter Wandtemperatur. In Bild 8 ist für verschiedene Durchfluß-Reynoldszahlen der Verlauf der Nusseltzahl über z/D mit N als Parameter für den thermischen Anlauf dargestellt. Genau wie im Fall der konstanten Beheizung der Rohrwand wird deutlich, daß die Rohrrotation zu einer sehr starken Verlängerung des Anlaufbereichs führt. Allerdings ist der thermische Einlaufbereich im Fall der konstanten Rohrwandtemperatur stets kleiner als bei konstantem Wärmestrom an der Wand. Dies ist eine Folge des Temperatursprungs, den man im Fall konstanter Wandtemperatur an der Stelle $\tilde{z}=0$ aufprägt. Dadurch wird der Temperaturgradient an der Stelle $\tilde{z}=0$ unendlich groß, was eine sehr große Temperaturänderung in \tilde{z} -Richtung für kleine \tilde{z} zur Folge hat. Damit nimmt jedoch auch die Nusseltzahl schneller ab, als im Fall des konstanten Wärmestroms an der Wand, bei dem der Temperaturgradient für $\tilde{z}=0$ einen definierten Wert zugewiesen bekommen hat.

Bild 9 zeigt einen Vergleich der örtlichen Nusseltzahl mit Experimenten von Abbrecht und Churchill [12] für das nicht

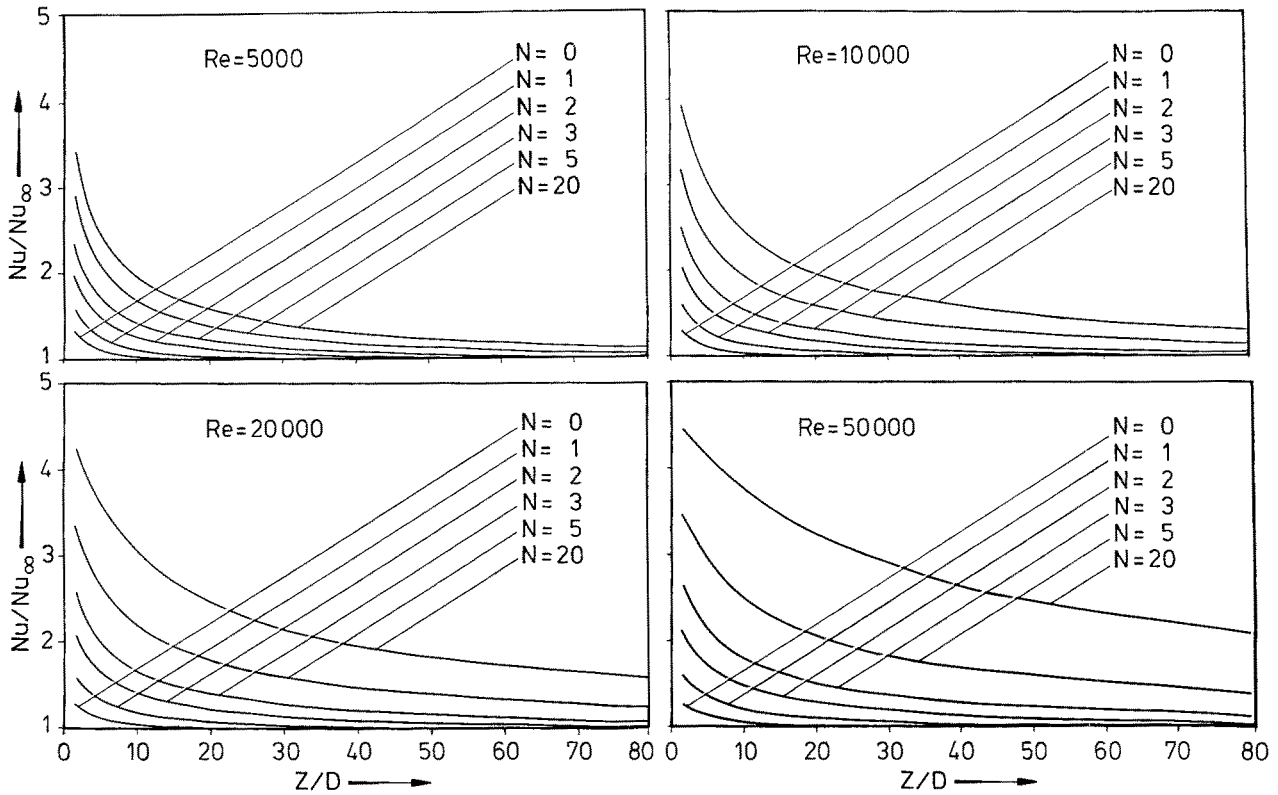


Bild 8. Verlauf der bezogenen Nusseltzahl Nu/Nu_∞ über der Rohrlänge mit dem Reynoldszahlenverhältnis N als Parameter. Konstante Wandtemperatur

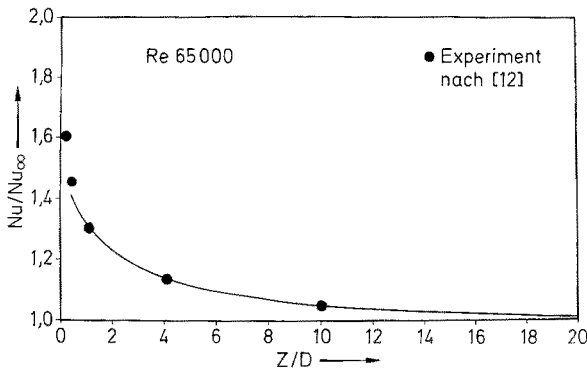


Bild 9. Verlauf der Nusseltzahl über der Durchfluß-Reynoldszahl für das nichtrotierende Rohr. Konstante Wandtemperatur

rotierende Rohr. Es ist eine sehr gute Übereinstimmung zwischen Theorie und Messung feststellbar. Für den Fall des rotierenden Rohres mit konstanter Wandtemperatur und hydrodynamisch voll ausgebildeter Strömung sind keine Messungen bekannt.

3 Schlußfolgerungen

Durch die Rohrrotation und die damit verbundene Lamina- risierung der Strömung verschlechtert sich der Wärmeüber-

gang. Gleichzeitig wird die thermische Einlaufänge mit steigendem Reynoldszahlenverhältnis stark vergrößert. Es erscheint deshalb ratsam gerade bei größeren Durchfluß-Reynoldszahlen den Effekt der Rotation auf die Vergröße- rung der thermischen Einlaufänge nicht zu vernachlässigen, da dies unter Umständen zu großen Abweichungen führen kann.

Anhang

Vereinfachung der Gl. (49):

$$C_n = \frac{-\int_0^1 \psi(\tilde{r}) \tilde{v}_z(\tilde{r}) \tilde{r} R_n(\tilde{r}) d\tilde{r}}{\int_0^1 \tilde{v}_z(\tilde{r}) \tilde{r} R_n^2(\tilde{r}) d\tilde{r}} \quad (49)$$

Das Integral im Zähler von Gl. (49) läßt sich explizit berechnen. Ersetzt man $\tilde{v}_z \tilde{r} R_n$ mit Hilfe von Gl. (44), so erhält man

$$-\int_0^1 \psi(\tilde{r}) \tilde{v}_z(\tilde{r}) \tilde{r} R_n(\tilde{r}) d\tilde{r} = \frac{1}{\lambda_n^2} \int_0^1 \psi(\tilde{r}) \frac{d}{d\tilde{r}} [E(\tilde{r}) \tilde{r}] R_n' d\tilde{r} \quad (A)$$

Aus (A) ergibt sich durch partielle Integration

$$\frac{1}{\lambda_n^2} \psi(\tilde{r}) E(\tilde{r}) \tilde{r} R_n'(\tilde{r}) \Big|_0^1 - \frac{1}{\lambda_n^2} \int_0^1 \frac{d\psi}{d\tilde{r}} E(\tilde{r}) \tilde{r} R_n' d\tilde{r} \quad (B)$$

Der erste Ausdruck in (B) ist Null wegen der Randbedingung (45). Das Integral in (B) läßt sich durch erneute partielle Integration, unter Beachtung der Gl. (32), berechnen

$$-\frac{1}{\lambda_n^2} \int_0^1 \frac{d\psi}{d\tilde{r}} E(\tilde{r}) \tilde{r} R_n' d\tilde{r} = \frac{R_n(1)}{\lambda_n^2} + \frac{1}{\lambda_n^2} \int_0^1 R_n \tilde{v}_z \tilde{r} d\tilde{r} \quad (C)$$

Das Integral in (C) ist Null, was aus Gl. (44) mit Hilfe der Randbedingungen (45) und (46) sofort ersichtlich ist. Setzt man (C) in Gl. (49) ein, so erhält man Gl. (50)

$$C_n = \frac{R_n(1)}{\lambda_n^2 \int_0^1 \tilde{v}_z(\tilde{r}) \tilde{r} R_n^2(\tilde{r}) d\tilde{r}} \quad (50)$$

Literatur

1. Levy, F.: Strömungserscheinungen in rotierenden Rohren. VDI Forschungsarbeiten auf dem Gebiet des Ingenieurwesens 322 (1929) 18–45
2. Murakami, M.; Kikuyama, K.: Turbulent flow in axially rotating pipes. J Fluids Engi. 102 (1980) 97–103
3. Kikuyama, K.; Murakami, M.; Nishibori, K.; Maeda, K.: Flow in an axially rotating pipe. Bull. JSME 26 (1983) 506–513
4. Bradshaw, P.: The analogy between streamline curvature and buoyancy in turbulent shear flow. J Fluid Mech. 36 (1969) 177–191
5. Reich, G.; Beer, H.: Fluid flow and heat transfer in an axially rotating pipe – 1. Effect of rotation on turbulent pipe flow. Int. J. Heat Mass Transfer 32 (1989) 551–562, 563–574
6. Hennecke, D.: Heat transfer by Hagen-Poiseuille flow in the thermal development region with axial conduction. Wärme-Stoffübertrag. 1 (1968) 177–184
7. Schlichting, H.: Grenzschichttheorie. Karlsruhe: G. Braun 1982
8. Sparrow, E.; Hallman, T.; Siegel, R.: Turbulent heat transfer in the thermal entrance region of a pipe with uniform heat flux. Appl. Sci. Res. A7 (1957) 37–52
9. Bird, B.; Stewart, W.; Lightfoot, E.: Transport Phenomena. New York: John Wiley 1976
10. Myint-U, T.; Bebnath, L.: Partial differential equations for scientists and engineers. New York: North Holland 1987
11. Cannon, J.; Kays, W.: Heat transfer to a fluid flowing inside a pipe rotating about its longitudinal axis. J. Heat Transfer 91 (1969) 135–139
12. Abbrecht, P. H.; Churchill, S. W.: The thermal entrance region in fully developed turbulent flow. Aiche J. 6 (1960) 268–273

Prof. Dr.-Ing. H. Beer
 Dipl.-Ing. B. Weigand
 Institut für Technische Thermodynamik
 Petersenstraße 30
 6100 Darmstadt

Eingegangen am 7. November 1988