

## 2 Schnittgrößenermittlung (EC 2, Abschnitt 2.5)

R. Elgehausen, E. Fabritius, J. Eibl und  
A. Bühler

### 2.1 Allgemeine Bemerkungen

Nach EC 2, Abschnitt 2.5.1, können für die Schnittgrößenermittlung, je nach untersuchtem Grenz Zustand und Art des Bauteils, vier verschiedene Methoden angewendet werden:

1. lineare Verfahren, basierend auf der Elastizitätstheorie
2. lineare Verfahren mit begrenzter Momentenumlagerung
3. nichtlineare Verfahren
4. Verfahren nach der Plastizitätstheorie.

Den Methoden 2, 3 und 4 ist gemeinsam, daß sie das nichtlineare Verformungsverhalten von Stahl- und Spannbeton berücksichtigen. Sie unterscheiden sich hauptsächlich im Ausnutzungsgrad des nichtlinearen Verformungsverhaltens.

Die Möglichkeit der Schnittgrößenbestimmung auf der Basis von Versuchen wird ebenfalls eingeräumt (Abschnitt 2.5.1.6).

Der im Vergleich zur reinen Elastizitätstheorie höhere Rechenaufwand der Verfahren, die ein plastisches Verformungsverhalten berücksichtigen, wird durch verschiedene Vorteile ausgeglichen, die dem Tragwerksplaner größeren Freiraum in Entwurf und Bemessung bieten. Neben den Querschnittsabmessungen kann auch das statische System in gewissen Grenzen frei gewählt werden. Bewehrungsanhäufungen in hoch beanspruchten Bereichen lassen sich dadurch vermeiden. Insbesondere bei der Bemessung nach den Momentengrenzlinien ist durch Ausnutzung von Tragreserven des Gesamtsystems eine Verringerung der Bewehrungsmenge möglich.

Neben der globalen Schnittgrößenermittlung am Gesamtsystem weist EC 2, Abschnitt 2.5.1, auch auf die Notwendigkeit einer lokalen Tragwerksanalyse hin. In diesen sogenannten Diskontinuitätsbereichen (Auflagerbereiche und Krafteinleitungszonen, Rahmenknoten und -ecken, Tragwerksbereiche mit Umlenkkraften sowie Verankerungen von Spanngliedern) kann nicht mehr von einer linearen Dehnungsverteilung über den Querschnitt ausgegangen werden. Die rechnerische Untersuchung dieser Tragwerksbereiche kann mittels der Fachwerkanalogie oder anderer geeigneter Verfahren (z. B. Finite Elemente) erfolgen. Die Modellierung mittels Stabwerken wird im Beitrag von SCHÄFER in diesem Heft erläutert.

Für die globale Schnittgrößenermittlung gelten nach EC 2 - wie auch nach DIN 1045 - die üblichen Vereinfachungen und Regelungen bezüglich der:

- Lastannahmen und Lastkombinationen (Abschnitt 2.5.1.2)
- Maßabweichungen des Tragsystems (Imperfektionen) (Abschnitt 2.5.1.3)
- Berücksichtigung von Verformungen nach der Theorie II. Ordnung (Abschnitt 2.5.1.4)
- Zeiteinflüsse auf die Steifigkeiten und damit auf den Schnittgrößenverlauf (Abschnitt 2.5.1.5)

Die Tragwerksidealisationen nach EC 2, Abschnitt 2.5.2, stimmen mit denen von DIN 1045 bis auf eine Ergänzung überein. Rippendecken können demnach bei der Schnittgrößenermittlung als Vollplatten betrachtet werden, wenn die Rippen eine entsprechende Torsionssteifigkeit aufweisen (Abschnitt 2.5.2.1 (5)).

Den Methoden zur Ermittlung der Schnittgrößen in den Grenzzuständen der Gebrauchstauglichkeit und der Tragfähigkeit sind in EC 2 vier Prinzipien vorangestellt (Abschnitt 2.5.3.1):

- Die Gleichgewichtsbedingungen müssen immer erfüllt sein.
- Wenn die Kompatibilität nicht gesondert überprüft wird, muß durch geeignete Maßnahmen sichergestellt werden, daß das Tragwerk über eine ausreichende Verformungs-

fähigkeit verfügt und ein unbefriedigendes Tragverhalten im Grenzzustand der Gebrauchstauglichkeit vermieden wird.

- Bei der Schnittgrößenermittlung ist im allgemeinen nach der Theorie I. Ordnung vorzugehen. Führen hingegen Verformungen zu einem signifikanten Anwachsen der Schnittgrößen, müssen diese nach der Theorie II. Ordnung ermittelt werden.
- Untersuchungen von Zwangseinwirkungen auf das Gesamttragwerk können unterbleiben, wenn das Tragwerk durch Gelenke in Abschnitte unterteilt wird, um Zwangverformungen auszugleichen. Diese Abschnitte sollten jedoch nicht größer als 30 m sein.

### 2.2 Grenz Zustand der Gebrauchstauglichkeit (EC 2, Abschnitt 2.5.3.2.1)

Die Schnittgrößen für Untersuchungen zum Nachweis der Gebrauchstauglichkeit werden üblicherweise nach der Elastizitätstheorie ermittelt. Hierbei reicht es im Normalfall aus, von den Steifigkeiten für den ungerissenen Zustand auszugehen. Zeitabhängige Einflüsse sollten berücksichtigt werden, sofern sie bedeutsam sind.

Eine mögliche Auswirkung der Ribbildung auf die Biege- und Torsionssteifigkeit muß berücksichtigt werden, sofern ihr Einfluß auf die Schnittgrößen ungünstig ist; wenn dieser Einfluß günstig ist und die Verträglichkeitsbedingungen eingehalten sind, darf die Ribbildung berücksichtigt werden. Diese Regelung läßt die Anwendung eines nichtlinearen Verfahrens zur Schnittgrößenermittlung auch im Grenzzustand der Gebrauchstauglichkeit sinnvoll erscheinen.

### 2.3 Grenz Zustand der Tragfähigkeit

#### 2.3.1 Allgemeines

Zur Schnittgrößenermittlung dürfen alle vier zuvor genannten Methoden herangezogen werden. Von besonderer praktischer Bedeutung sind das lineare Verfahren ohne bzw. mit begrenzter Momentenumlagerung sowie das nichtlineare Verfahren. Methoden auf der Grundlage der Plastizitätstheorie als konsequente Anwendung der Traglasttheorie stellen eher einen Sonderfall dar, weshalb in EC 2, Anhang 2, Abschnitt A.2.4, nur allgemeine Hinweise bezüglich dieser Verfahren aufgeführt sind.

Bei Anwendung der Elastizitätstheorie gilt die Duktilität des Tragwerks als ausreichend groß, wenn keine zu hohen Bewehrungsgrade in den kritischen Bereichen gewählt werden. Demgegenüber ist bei Anwendung anderer Verfahren ein Nachweis der ausreichenden Rotationskapazität erforderlich. Um diese zu gewährleisten, sind Stöße der Bewehrung wenn immer möglich außerhalb der kritischen (hochbeanspruchten) Bereiche anzuordnen. Falls dies nicht möglich ist, sollten das Verformungsverhalten und die Rotationskapazität unter Berücksichtigung der vorhandenen Gesamtbewehrung im kritischen Querschnitt untersucht werden.

Unabhängig vom gewählten Verfahren für die Schnittgrößenermittlung sollte das Bemessungsmoment in den Auflageranschnitten von durchlaufenden Feldern mindestens 65 % der Auflagermomente für volle Einspannung an den Auflageranschnitten betragen.

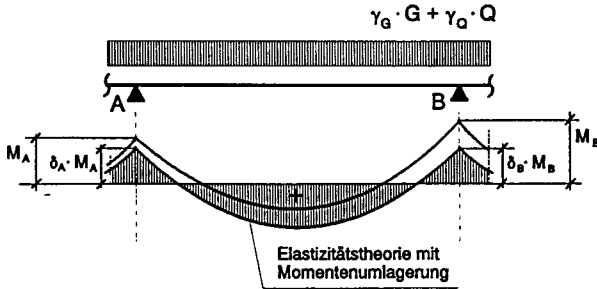
Die folgenden Ausführungen gelten für nicht vorgespannte Bauwerke. Die Schnittgrößenermittlung von vorgespannten Tragwerken wird in diesem Heft im Beitrag WÖLFEL/QUAST behandelt.

#### 2.3.2 Stabtragwerke (EC 2, Abschnitt 2.5.3.4)

Ein lineares Verfahren mit begrenzter Momentenumlagerung (Abschnitt 2.5.3.4.2) ist nur zulässig in Durchlaufträgern, bei denen das Stützweitenverhältnis benachbarter Felder weniger als 2 beträgt, in Riegeln nicht verschieblicher Rahmen sowie in Bauteilen, die vorwiegend auf Biegung beansprucht

werden. Eine Momentenumlagerung ist nicht zulässig in verschieblichen Rahmen.

Bei diesem Verfahren werden die sich nach der Elastizitätstheorie z. B. über einer Stütze einstellenden extremalen Biegemomente mit dem Faktor  $\delta$  abgemindert und zur Wahrung des Gleichgewichts die Bemessungsmomente im Feld entsprechend erhöht (Bild 2.1). Eine Erhöhung der Stützmomente ist zwar nicht ausdrücklich ausgeschlossen, sie ist jedoch aus wirtschaftlichen und technischen Gründen nicht sinnvoll.



**Bild 2.1:** Prinzip der Schnittgrößenermittlung nach der Elastizitätstheorie mit begrenzter Umlagerung für einen Durchlaufträger, nach [1]

Ein Nachweis der für die Kompatibilität erforderlichen plastischen Rotation im kritischen Bereich (i. a. Stützenbereich) kann entfallen, wenn die folgenden Grenzwerte für den Faktor  $\delta$  eingehalten werden. Dabei wird  $\delta$  in Abhängigkeit der Betonfestigkeitsklasse als Funktion der bezogenen Druckzonenhöhe definiert.

Für Betonfestigkeitsklassen bis C 35/45

$$\delta \geq 0,44 + 1,25 \cdot x/d \geq 0,85 \quad \text{Stahl Klasse N} \quad (2.1 \text{ a})$$

$$\geq 0,7 \quad \text{Stahl Klasse H}$$

für Betonfestigkeitsklassen C 40/50 und höher

$$\delta \geq 0,56 + 1,25 \cdot x/d \geq 0,85 \quad \text{Stahl Klasse N} \quad (2.1 \text{ b})$$

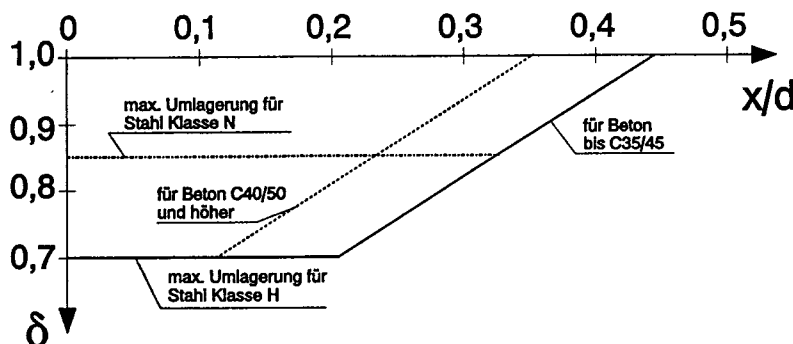
$$\geq 0,7 \quad \text{Stahl Klasse H}$$

mit

- $\delta$  Verhältnis des Moments nach Umlagerung zum Moment vor Umlagerung
- $x$  Druckzonenhöhe im Grenzzustand der Tragfähigkeit
- $d$  statische Nutzhöhe.

Spannglieder mit nachträglichem Verbund werden der Klasse H (hochduktil), Spannglieder mit sofortigem Verbund der Klasse N (normalduktil) zugerechnet. Damit wird dem Einfluß des Verbunds auf die Rotationskapazität von plastischen Gelenken Rechnung getragen.

In Bild 2.2 sind die Umlagerungsbeziehungen grafisch dargestellt.



**Bild 2.2:** Zulässige Momentenumlagerung nach EC 2, Abschnitt 2.5.4.4.2

Bei der Anwendung der Gl. (2.1) muß allerdings beachtet werden, daß für die Ermittlung der bezogenen Druckzonenhöhe  $x/d$  im maßgebenden Querschnitt für Beton das Parabel-Rechteckdiagramm und für Stahl die bilineare Spannungs-Dehnungslinie mit horizontalem Fließplateau bis zu einer Bruchdehnung von  $\epsilon_{su} = 10 \text{ ‰}$  angesetzt werden. Diese Bedingung ist zwar in EC 2 nicht explizit aufgeführt, sie folgt jedoch aus der Ableitung der Gl. (2.1) [6].

Im Bereich von geringen Bewehrungsgraden wird die Rotationskapazität wesentlich durch die Duktilität des Bewehrungsstahls bestimmt. Daher ist bei Verwendung von Betonstählen normaler Duktilität (Klasse N) die Umlagerung mit  $\delta \geq 0,85$  auf 15 % begrenzt. Bei Verwendung von Stahl hoher Duktilität (Klasse H) ist mit  $\delta \geq 0,70$  eine Momentenumlagerung bis zu 30 % möglich.

Im Bereich großer Bewehrungsgrade, bei denen Betonversagen auftritt, wird für Betone mit einer niedrigen Festigkeit eine größere Umlagerung zugelassen als bei Verwendung von Betonen höherer Festigkeit, womit der abnehmenden Verformungsfähigkeit des Betons bei zunehmender Festigkeit Rechnung getragen werden soll.

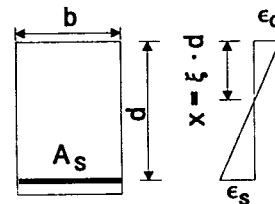
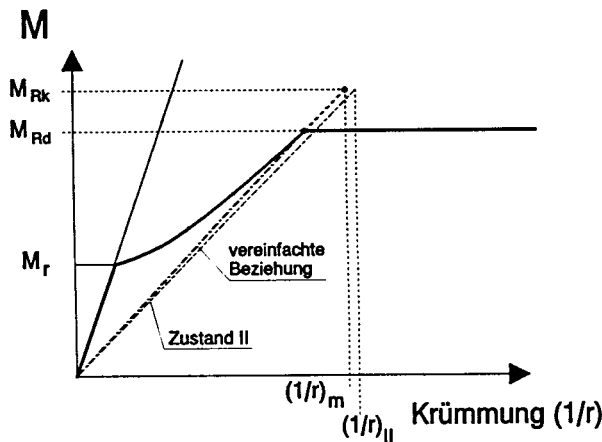
Die oben aufgeführten Umlagerungsbeziehungen sind bei einer Schnittgrößenermittlung unter Verwendung der Steifigkeiten nach Zustand I anzuwenden. Dabei sind die Momente aus Lasten und einer Behinderung der Verformung anzusetzen, allerdings dürfen nicht wesentliche Zwangbeanspruchungen hierbei vernachlässigt werden. Falls für die Schnittgrößenermittlung die Steifigkeiten im Zustand II herangezogen werden, sind die Umlagerungsbeziehungen nicht anzuwenden.

Bei Bauteilen, bei denen keine Momentenumlagerung durchgeführt wird ( $\delta = 1,0$ ), muß die bezogene Druckzonenhöhe i. a.  $x/d \leq 0,45$  (Betonfestigkeitsklassen bis C 35/45) bzw.  $x/d \leq 0,35$  (Betonfestigkeitsklassen ab C 40/50) betragen, sofern keine konstruktiven Maßnahmen zur Erhöhung der Verformungsfähigkeit der Betondruckzone (z. B. durch Umschnürring) vorgesehen werden. Bei Bauteilen mit Biegung und Normalkraft gilt nach der Richtlinie zur Anwendung von EC 2 des DAfStb als besondere konstruktive Maßnahme auch die Einhaltung der Bügelabstände nach EC 2, Abschnitt 5.4.1.2.2 (3).

In Fällen, in denen der oben genannte indirekte Nachweis der Rotationsfähigkeit zu nicht zufriedenstellenden Ergebnissen führt, kann die Anwendung eines nichtlinearen Berechnungsverfahrens zweckmäßig sein.

Bei nichtlinearen Berechnungsverfahren (Abschnitt 2.5.3.4.3) wird die Rotationsfähigkeit in den kritischen Querschnitten explizit überprüft. Dies geschieht bei Verwendung elektronischer Rechner in der Regel programmgesteuert; für einfache Verhältnisse ist aber auch eine Handrechnung möglich. Dazu gibt der Anhang 2 von EC 2 entsprechende Hinweise.

Danach muß die für eine Umlagerung erforderliche Rotation  $\Theta_{pl,erf}$  kleiner sein als ein möglicher Winkel (Bemessungswert)  $\Theta_{pl,d}$ , der in Abhängigkeit von der Duktilität des verwendeten Bewehrungsstahls EC 2, Anhang 2, Bild A 2.2, entnommen wird. Die erforderliche plastische Rotation  $\Theta_{pl,erf}$  wird durch Integration der Krümmungen zwischen den plastischen Gelenken bestimmt, wobei vom Momentenverlauf im Grenzzustand der Tragfähigkeit ausgegangen wird. In Bild 2.3 ist eine Momenten-Krümmungsbeziehung bei reiner Momentenbeanspruchung dargestellt.



$$(1/r)_{II} = (\epsilon_{sy} - \epsilon_c) / d$$

$$(1/r)_m = (1/r)_{II} \cdot \epsilon_{sym} / \epsilon_{sy}$$

$M_r$  Rißmoment für  $f_{ctm}$

$M_{Rk}$  Moment bei Erreichen der Fließdehnung  $\epsilon_{sy}$  auf der Grundlage von charakteristischen Baustoffkennwerten ( $f_{ck}$ ,  $f_{yk}$ )

Bild 2.3: Momenten-Krümmungsdiagramm zur Ermittlung der erforderlichen plastischen Rotation  $\Theta_{pl,erf}$

Zur Ermittlung der Krümmungen werden Mittelwerte der Baustoffkennwerte ( $E_{cm}$ ,  $f_{cm}$ ,  $f_{ctm}$ ) angesetzt. Die Mitwirkung des Betons zwischen den Rissen wird nach Gl. (A 2.2) von EC 2, Anhang 2, berücksichtigt. Bei Erreichen des Bemessungsmoments  $M_{Rd}$  wird eine plastische Verformung bei konstant bleibendem Moment vorausgesetzt.

Vereinfachend darf eine lineare Momenten-Krümmungsbeziehung angenommen werden, die durch den Ursprung und die Koordinaten ( $M_{Rk}; (1/r)_m$ ) festgelegt ist. Dabei ist  $M_{Rk}$  das Biegemoment, das eine Stahlspannung  $f_{yk}$  hervorruft und  $(1/r)_m$  ist die zugehörige mittlere Krümmung, die wie folgt ermittelt wird:

$$(1/r)_m = (1/r)_{II} \cdot \epsilon_{sym} / \epsilon_{sy} \quad (2.2)$$

mit

$(1/r)_{II}$  Krümmung im nackten Zustand II für  $\epsilon_s = \epsilon_{sy}$   
 $\epsilon_{sym}$  mittlere Stahldehnung für  $\alpha_s = f_{yk}$  nach Gl. A 2.2, EC 2, Anhang 2

$\epsilon_{sy}$  Streckgrenzdehnung =  $f_{yk} / E_s$

Beispiele zur Berechnung der erforderlichen plastischen Rotation sind in Abschnitt 2.5.5 dieses Beitrags sowie im Beitrag von WÖLFEL/QUAST enthalten. Dort ist auch eine Momenten-Krümmungsbeziehung bei Vorhandensein einer Normalkraft (z. B. Vorspannkraft) dargestellt.

Verfahren auf der Grundlage der Plastizitätstheorie können entsprechend den Angaben in EC 2, Anhang 2, Abschnitt A 2.4, ohne direkten Nachweis der Rotationsfähigkeit angewendet werden, wenn sichergestellt ist, daß ausreichende Duktilität vorhanden ist und sonstige Einflußfaktoren, z. B. Unsicherheiten bei der Wahl des statischen Systems (Modellunsicherheiten), in Betracht gezogen werden. Weiterhin müssen die

Regeln für die Anwendung der Plastizitätstheorie bei Platten (Abschnitt 2.5.3.5.5) eingehalten werden. In der Regel ist Bewehrungsstahl mit hoher Duktilität (Betonstahl Klasse H oder Spannglieder mit nachträglichem Verbund) zu verwenden. Eine allzu große Abweichung des Schnittgrößenverlaufs von dem, der sich nach der Elastizitätstheorie einstellen würde, sollte vermieden werden, um die Gebrauchstauglichkeit des Tragwerks zu gewährleisten. Die Nachweise im Gebrauchszustand können maßgebend werden, wenn die Abweichung mehr als etwa 30 % beträgt [9].

### 2.3.3 Platten

Die Schnittgrößen in Platten und vergleichbaren Bauteilen dürfen ebenfalls nach den in EC 2, Abschnitt 2.5.1, angeführten vier Möglichkeiten ermittelt werden.

Bei Anwendung linearer Verfahren mit begrenzter Umlagerung gelten die Bedingungen für Stabtragwerke (Abschnitt 2.5.3.5.4). Für Fälle, in denen die (orthogonalen) Bewehrungsrichtungen erheblich von denen der Hauptmomente abweichen, sind in EC 2, Anhang 2, Abschnitt A2.8, Transformationsformeln zum Aufsuchen der maßgebenden Bemessungsmomente angegeben.

Unter den nichtlinearen Verfahren zur Schnittgrößenermittlung in Platten (Abschnitt 2.5.3.5.6) sind in EC 2, A 2.6, rechnergesteuerte Methoden aufgeführt, bei denen das Werkstoffverhalten von Stahlbeton und Spannbeton wirklickeitsnah nach EC 2, A 2.2, in den Gleichgewichts- und Verträglichkeitsbedingungen berücksichtigt wird. Zu den nichtlinearen Verfahren der Schnittgrößenermittlung sowie ihrer Anwendung werden im Abschnitt 2.5 dieses Beitrags weitere Ausführungen gemacht.

Die Schnittgrößenermittlung für Platten nach der Plastizitätstheorie wird in EC 2, Abschnitt 2.5.3.5.5, behandelt. Danach sind sowohl Methoden zugelassen, die auf dem *unteren* (statischen) Grenzwertsatz, als auch solche, die auf dem *oberen* (kinematischen) Grenzwertsatz der Plastizitätstheorie beruhen. Zu den ersteren gehört unter anderen das nach Hillerborg benannte Streifenverfahren [2], zu den zuletzt genannten die sogenannte Bruchlinientheorie [3].

Um eine ausreichende Rotationsfähigkeit der plastischen Gelenke zu gewährleisten, sollte die bezogene Druckzonenhöhe

$x/d \leq 0,25$  betragen und das Verhältnis der extremalen Feld- und Stützmomente zwischen den Werten 0,5 und 2 liegen. Ein Nachweis der Rotationsfähigkeit ist bei Platten mit beliebiger Grundrißform und statischem System schwierig. Daher darf auf diesen verzichtet werden, wenn Betonstahl mit hoher Duktilität (Klasse H) oder Spannglieder mit nachträglichem Verbund verwendet werden.

Methoden der Plastizitätstheorie sollten bei vorgespannten Platten mit sofortigem Verbund (Spannglieder mit normaler Duktilität) vermieden werden (Abschnitt 2.5.3.5.7).

Beispiele zur Anwendung der Plastizitätstheorie sind in Abschnitt 2.5.5 dieses Beitrags enthalten.

### 2.3.4 Scheiben und Wände

Für die Berechnung von Schnittgrößen von Scheiben und von in ihrer Mittelebene beanspruchten Wänden (Abschnitt 2.5.3.6.1) sind lineare und nichtlineare Verfahren zulässig sowie solche, die auf der Plastizitätstheorie beruhen.

Für die Anwendung linearer und nichtlinearer Methoden der Schnittgrößenermittlung sind nur allgemeine Hinweise enthalten. Für die Berechnung nach der Plastizitätstheorie wird die Anwendung zweckmäßiger, statisch bestimmter Fachwerkmodelle empfohlen. Die Grundlagen in EC 2 entsprechen weitgehend den Ausführungen in [4], besonders im Hinblick auf die Empfehlungen, die Zug- und Druckstreben des Fachwerks am Kraftfluß der Elastizitätstheorie zu orientieren, sowie auf den rechnerischen Nachweis der Beanspruchbarkeit der Druckstreben. Weitere Ausführungen zur Anwendung der Fachwerkmodelle sind im Beitrag von SCHÄFER in diesem Heft enthalten.

## 2.4 Rotationsfähigkeit

### 2.4.1 Allgemeines

Das Konstruieren mit Stahlbeton setzt gewisse Duktilitätsanforderungen an Beton- und Spannstahl voraus. Das plastische Verformungsverhalten ist nicht nur zwingend bei sogenannten „Nichtlinearen Berechnungsverfahren“ erforderlich, sondern wird auch bei der Verwendung der Elastizitätstheorie in Anspruch genommen. Soll sich bei einem Tragwerk der nach der Elastizitätstheorie ermittelte und für die Bemessung angenommene Momentenverlauf einstellen, ist nämlich eine plastische Verformungsfähigkeit Voraussetzung (siehe Bilder 2.4 und 2.5), da in gerissenen Bereichen (Zustand II) die Steifigkeiten von den jeweils vorhandenen Bewehrungsmengen bestimmt werden und nicht mehr mit denen im ungerissenen Bereich (Zustand I) übereinstimmen.

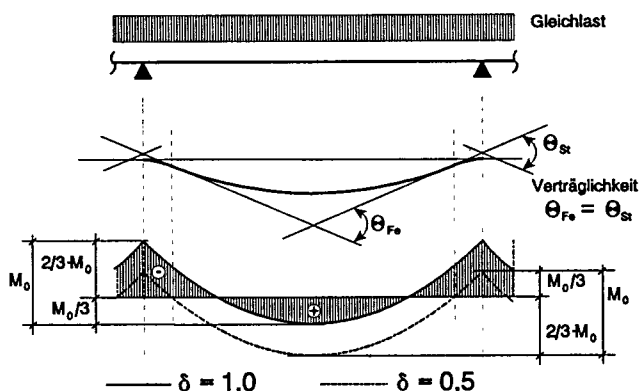
Außerdem werden die durch ungewollte Zwangsverformungen verursachten Schnittkräfte, die bei der Bemessung unberücksichtigt bleiben, bei Erreichen der Bruchlast durch die vorhandene plastische Verformungsfähigkeit abgebaut.

Einen weiteren positiven Aspekt des plastischen Dehnungsvermögens von Betonstahl stellt die mögliche Energiedissipation bei einer seismischen Beanspruchung dar. Allerdings ist hierbei zu beachten, daß nicht durch zu hohe Bewehrungsgrade Betonversagen provoziert wird, ohne daß sich dabei der Stahl im plastischen Beanspruchungsbereich befindet.

### 2.4.2 Erläuterung zum plastischen Verformungsverhalten am Durchlaufträger

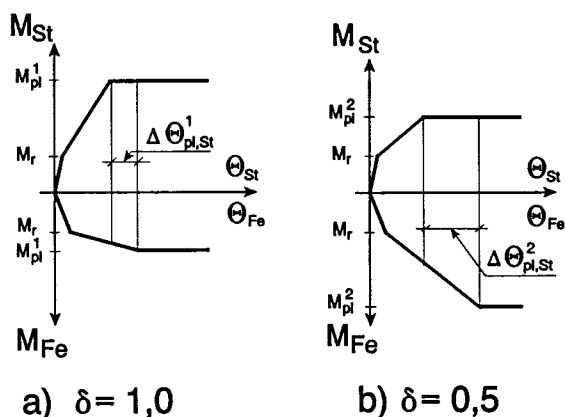
Das Verhalten eines Stahlbetontragwerks unter zunehmender Belastung wird am Beispiel des Durchlaufträgers mit Rechteckquerschnitt unter Gleichlast erläutert (Bild 2.4). Zum einen wird von einer Bemessung nach der Elastizitätstheorie ausgegangen (Verhältnis Stützmoment zu Feldmoment gleich 2 : 1) und zum anderen soll die Bemessung für den

Schnittkraftverlauf nach der Elastizitätstheorie mit nachträglicher 50%iger Momentenumlagerung erfolgen. Es sei darauf hingewiesen, daß eine Momentenumlagerung um 50% in der Regel nicht sinnvoll ist, weil die Nachweise zur Gewährleistung eines ausreichenden Verhaltens im Grenzzustand der Gebrauchstauglichkeit nur eine gewisse Umlagerung zulassen [9]. Das Beispiel wird jedoch gewählt, um das Tragverhalten im Bruchzustand besser zu veranschaulichen.



**Bild 2.4:** Momentenlinien für einen Durchlaufträger mit Gleichlast bei elastischer Berechnung und für 50%ige Momentenumlagerung, nach [5]

Bild 2.5 zeigt die sich mit zunehmender Belastung einstellenden Stütz- und Feldmomente in Abhängigkeit von der Verdrehung  $\Theta$ . Aus Verträglichkeitsgründen ist für das gewählte System die Verdrehung im Feld  $\Theta_{Fe}$  gleich der Verdrehung  $\Theta_{St}$  im Stützenbereich. Bis zum Erreichen des Rißmoments  $M_r$  ist die Steifigkeit entlang der Trägerachse praktisch konstant. Die Momente verteilen sich entsprechend der Elastizitätstheorie. Nach dem Überschreiten der Rißmomente ändern sich die Steifigkeiten zwischen Feld- und Stützenquerschnitt etwa im Verhältnis der vorhandenen Bewehrung.



**Bild 2.5:** Schematische Darstellung der zum Erreichen der Systemtraglast erforderlichen plastischen Rotation, nach [6]

Bei der Bemessung nach der Elastizitätstheorie ist die Steifigkeit im Zustand II über der Stütze etwa doppelt so hoch wie im Feld. Das Stützmoment nimmt daher nach der Rißbildung ge-

genüber der Rechnung nach Zustand I überproportional zu und erreicht vor dem Feldquerschnitt das plastische Moment  $M_{pl}$  (Moment bei Überschreiten der Streckgrenze des Stahls). Zu diesem Zeitpunkt entspricht die Last noch nicht der rechnerischen Traglast. Diese wird erreicht, wenn sich auch im Feld das plastische Moment einstellt. Dazu ist auch bei einer Bemessung für elastisch berechnete Schnittgrößen eine gewisse plastische Verdrehung über der Stütze  $\Delta\theta_{St}^1$  nötig (siehe Bild 2.5a).

Im Fall einer planmäßigen 50 %igen Umlagerung ist über der Stütze nur 50 % der Feldbewehrung vorhanden. Daher entspricht die Steifigkeit über der Stütze nach der Ribbildung nur etwa der Hälfte der Steifigkeit im Feld. Das Stützmoment nimmt deshalb gegenüber der Rechnung nach Zustand I unterproportional zu. Da jedoch das widerstehende Stützmoment jetzt nur halb so groß ist wie das widerstehende Moment im Feld, stellt sich trotzdem das plastische Stützmoment deutlich früher ein als im Feld. Das Erreichen der rechnerischen Traglast erfordert daher gegenüber einer Bemessung nach der Elastizitätstheorie eine wesentlich größere plastische Rotation über der Stütze  $\theta_{St}^2$  als im Fall a) (siehe Bild 2.5b). Die erforderliche plastische Rotationsfähigkeit eines Stahlbetontragwerks ist also direkt von der angestrebten Momentenumlagerung abhängig.

Es ist jedoch zu beachten, daß eine Momentenumlagerung durch Umverteilung von Bewehrung aus hoch beanspruchten Tragwerksbereichen in weniger beanspruchte erreicht wird. Im Gebrauchszustand empfiehlt es sich im allgemeinen, dem wirklichen Tragverhalten entsprechend die Schnittgrößen nach der Elastizitätstheorie zu ermitteln. Für die Nachweise der Gebrauchstauglichkeit, insbesondere für den Nachweis der Spannung in der Bewehrung sowie den Nachweis der Begrenzung der Ribbreiten, wirkt sich daher eine Verringerung der Biegezugbewehrung über der Stütze ungünstig aus. Aus diesem Grund sollte eine Schnittgrößenumlagerung im allgemeinen auf 30 % begrenzt werden (vergl. Abschnitt 2.3.2 in diesem Beitrag).

Das plastische Rotationsvermögen über der Stütze eines Durchlaufträgers kann an einem „Ersatzträger“ – Balken unter Einzellast – untersucht werden (Bild 2.6). Dieser Ersatzträger (im Bild an der rechten Stütze dargestellt) stellt den Stützenbereich zwischen den Momentennullpunkten dar.

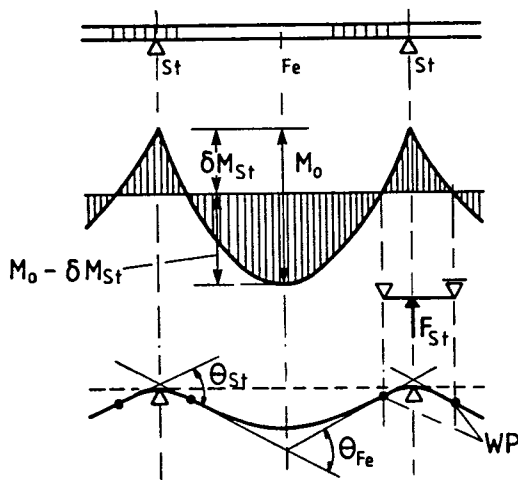


Bild 2.6: Ermittlung der Ersatzträgerlänge bei einem Durchlaufträger unter Gleichlast

Bei der Beurteilung des Verformungsverhaltens von Stahlbetontragwerken muß neben dem Spannungs-Dehnungsverhalten des Betons und Bewehrungsstahls vor allem der geometrische Bewehrungsgrad beachtet werden, der mit ausschlaggebend dafür ist, ob bei Erreichen der Traglast Stahl- oder Betonversagen auftritt [7].

Die Beschaffenheit der Stahloberfläche – glatt, profiliert bzw. gerippt – und damit das Verbundverhalten zwischen Stahl und Beton haben ebenfalls einen großen Einfluß auf das plastische Verformungsvermögen von Stahlbetontragwerken [7]. In den folgenden Betrachtungen wird von einem Betonstahl mit gerippter Oberfläche ausgegangen, der in der Bau Praxis am häufigsten verwendet wird.

2.4.3 Einfluß der Duktilität der Bewehrung

Versagt ein Bauteil durch Bruch des Betonstahls, wird die Verformungsfähigkeit des Stahlbetontragwerks hauptsächlich durch die Duktilität des Betonstahls bestimmt, die durch die Dehnung unter Höchstlast  $\epsilon_u$  bzw. die Gleichmaßdehnung  $\epsilon_g = \epsilon_u - \epsilon_y$  und durch das Verhältnis der Zugfestigkeit zur Streckgrenze  $f_t/f_y$  definiert wird.

In Bild 2.7 ist der Einfluß des Verhältnisses  $f_t/f_y$  (bei konstanter Zugfestigkeit  $f_t$  und konstanter Dehnung  $\epsilon_u$ ) und der Gleichmaßdehnung  $\epsilon_g$  (bei konstantem Verhältnis  $f_t/f_y$ ) auf das plastische Verformungsvermögen am Beispiel des Ersatzträgers dargestellt.

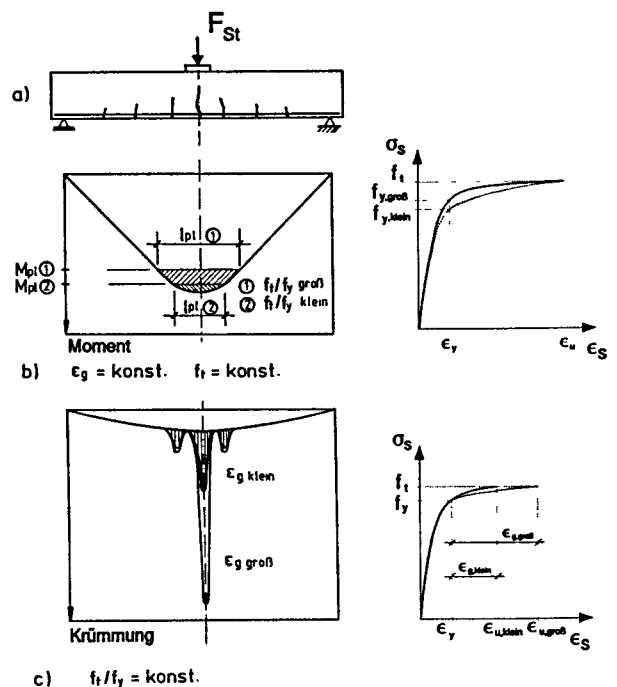


Bild 2.7: Einfluß der Spannungs-Dehnungslinie des Stahls auf das plastische Verformungsvermögen, nach [7]

Je größer das Verhältnis  $f_t/f_y$  ist, desto größer ist der Tragwerksbereich, in dem plastische Stahlverformungen bis zum Bruchzustand auftreten. Die Vergrößerung der Gleichmaßdehnung  $\epsilon_g$  erhöht die Querschnittsverformung. Beide Effekte bewirken ein Anwachsen der plastischen Verformungsfähigkeit.

EC 2, Abschnitt 3.2.4.2, unterscheidet hinsichtlich der Duktilität zwischen:

Klasse H mit  $f_{tk}/f_{yk} \geq 1,08$  und  $\epsilon_{uk} \geq 5\%$  (hohe Duktilität) sowie

Klasse N mit  $f_{tk}/f_{yk} \geq 1,05$  und  $\epsilon_{uk} \geq 2,5\%$  (normale Duktilität).

Die angegebenen Werte für das Verhältnis  $f_{tk}/f_{yk}$  und für die charakteristische Bruchdehnung unter Höchstlast  $\epsilon_{uk}$  sind als Mindestanforderungen zu verstehen und sollen den 5%-Fraktile der jeweiligen Grundgesamtheit entsprechen.

Zur Zeit laufen an verschiedenen Stellen in Europa Forschungsvorhaben, um die Richtigkeit dieser Festlegung zu überprüfen.

**2.4.4 Mögliche plastische Rotation**

Als plastische Rotation wird entsprechend Bild 2.8 die Differenz zwischen der Gesamtrotation bei maximaler Traglast und der sog. elastischen Rotation  $\theta_{el}$  bei Erreichen des plastischen Moments  $M_{pl}$  in Feldmitte bezeichnet.

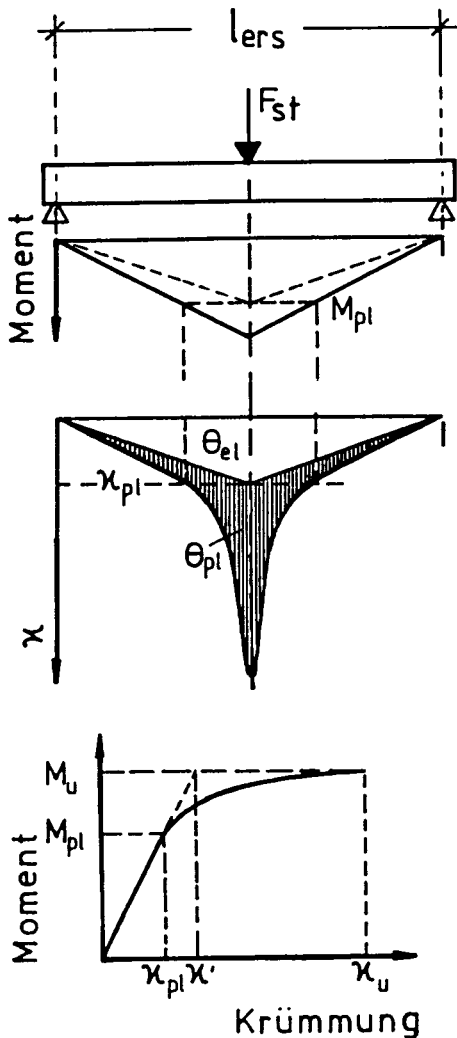


Bild 2.8: Definition der plastischen Rotation nach [8]

In Bild 2.9 ist die mögliche plastische Rotation bei Verwendung der o. g. Klassen unter Berücksichtigung des wirklichen Materialverhaltens des Stahls, des Betons und des Verbunds zwischen Stahl und Beton in Abhängigkeit von der bezogenen Druckzonenhöhe aufgetragen (gestrichelte Kurven) [10]. Dabei wurden folgende Rechenannahmen getroffen:

Es wurden Beton C 35/45 und gerippter Betonstahl mit einer Streckgrenze  $f_{yk} = 500 \text{ N/mm}^2$  angesetzt und für die Verhältniswerte  $f_{tk}/f_{yk}$  sowie für die Dehnung unter Höchstlast  $\epsilon_{uk}$  die o. g. Mindestanforderungen an die beiden Stahlklassen zugrunde gelegt. Die damit generierten Stahlkennlinien sind ebenfalls Bild 2.9 zu entnehmen. Die Schlankheit des Ersatzträgers betrug  $l_{ers}/d = 6$  (siehe Bilder 2.6 und 2.8), was einer Schlankheit eines Durchlaufträgers unter Gleichlast von  $l/d \approx 20$  bei einer Momentenumlagerung von etwa 20% entspricht. Es wurden mäßige Verbundbedingungen vorausgesetzt.

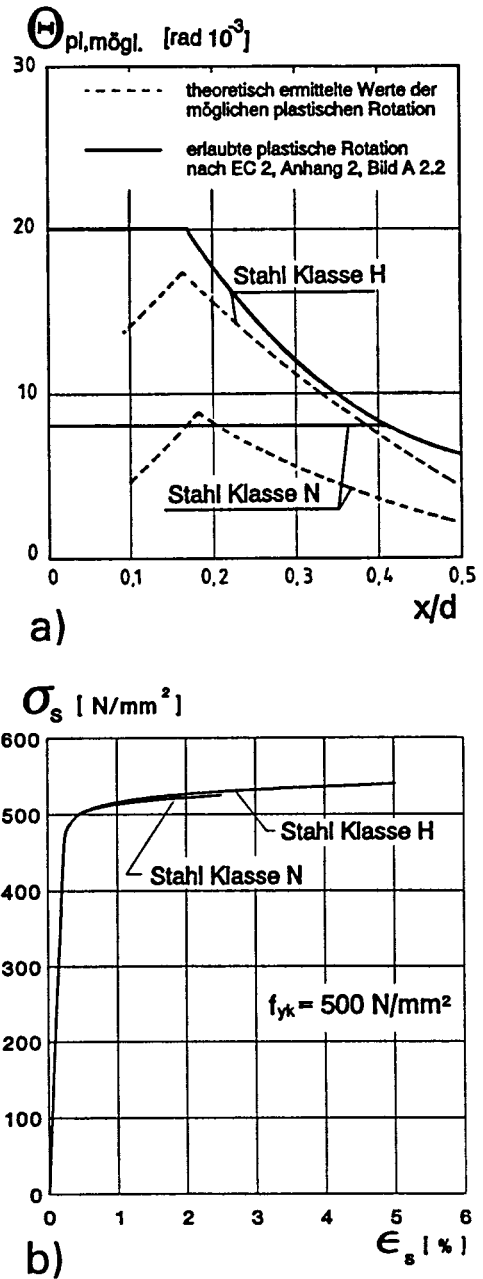


Bild 2.9: a) Theoretische Werte der mögliche plastische Rotation bei Verwendung der beiden Duktilitätsklassen H bzw. N, nach [10] und zulässige plastische Rotation nach EC 2, Anhang 2, Bild A 2.2  
b)  $\sigma$ - $\epsilon$ -Linie der Betonstähle

Bei der Bestimmung der bezogenen Druckzonenhöhe wurden die Bemessungswerte (design values)  $f_{cd}$  für Beton und  $f_{yd}$  für Stahl angesetzt. Weiterhin wurden für den Beton das Parabel-Rechteckdiagramm mit  $\alpha_{c,max} = \alpha \cdot f_{cd}$  ( $\alpha = 0,85$ ) und für Betonstahl eine bilineare Spannungs-Dehnungslinie mit horizontalem Plateau und einer Stahldehnung  $\epsilon_s \leq 10\%$  angenommen.

Der dachförmige Verlauf der Rotationskurven ist typisch und stellt den Übergangspunkt vom Stahlversagen zum Betonversagen dar.

Die Abnahme der möglichen plastischen Rotation  $\Theta_{pl,m\ddot{o}gl}$  mit abnehmender bezogener Druckzonenhöhe  $x/d$  – im Bereich des Stahlversagens – ist auf die Verbundwirkung, d. h. auf die Mitwirkung des Betons zwischen den Rissen, zurückzuführen.

Der Abfall der möglichen plastischen Rotation  $\Theta_{pl,m\ddot{o}gl}$  für größere bezogene Druckzonenhöhen – im Bereich des Betonversagens – ist damit zu erklären, daß mit ansteigendem Bewehrungsgrad die beim Erreichen der maximalen Betondruckkraft aktivierten Stahldehnungen immer kleiner werden.

Bei dem Wert der bezogenen Druckzonenhöhe, bei dem der Stahl im Bruchzustand nur bis zur Streckgrenze beansprucht wird, laufen die beiden Kurven zusammen, wobei die mögliche plastische Rotation dann laut Definition zu Null wird.

Zum Vergleich sind in Bild 2.9 die zulässigen plastischen Rotationen nach EC 2, Anhang 2, Bild A 2.2, eingetragen (gestrichelte Linien). Die Kurve für hochduktilen Stahl (Klasse H) stimmt gut mit den theoretischen Werten überein. Allerdings wurde für kleine Werte  $x/d$  eine konstante plastische Rotation angegeben. Dieses stimmt mit den Regeln für den zulässigen Grad der Momentenumlagerung überein, wonach für kleine Werte  $x/d$  der Momentendeckungsgrad  $\delta$  konstant ist. Die in EC 2 angegebene Kurve für die zulässige plastische Rotation von normalduktilen Stahl (Klasse N) weicht stärker von dem theoretischen Verlauf ab. Sie wurde in Anlehnung an den zulässigen Grad der Momentenumlagerung gewählt. Darin wird jedoch kein Sicherheitsrisiko gesehen, weil in Platten, in denen diese Stahlart bevorzugt eingebaut wird, hohe Bewehrungsgrade selten sind. Weiterhin ist zu berücksichtigen, daß in den Rechnungen für alle Stäbe das gleiche Spannungs-Dehnungsverhalten vorausgesetzt wurde. In Wirklichkeit weisen die im Querschnitt vorhandenen Stäbe jedoch unterschiedliche Spannungs-Dehnungslinien auf, wodurch die Rotationsfähigkeit ansteigt.

**2.5 Nichtlineare Schnittgrößenermittlung**

**2.5.1 Einführung**

Derzeit erfolgt nach DIN 1045 die Bemessung einer Stahlbetonstruktur im Bruchzustand, indem zunächst (Bild 2.10) in einem ersten Schritt Schnittgrößen nach einem ideal elastischen Stoffgesetz A ermittelt werden. In einem zweiten Schritt wird sodann jeder Querschnitt mit einem anderen nichtlinearen Stoffgesetz B für die Werkstoffe Stahl und Beton unter Verwendung von Grenzdehnungen bemessen (Bild 2.11).

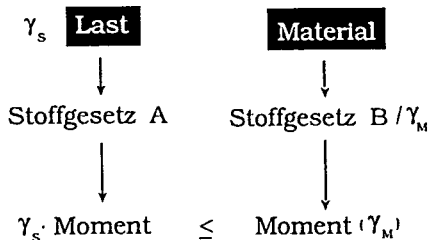


Bild 2.10: Schema der Bemessung nach DIN 1045

Da mit zwei unterschiedlichen Stoffgesetzen gearbeitet wird, kann nach erfolgter Schnittgrößenermittlung bei der Querschnittsbemessung beliebig hinsichtlich Stahlmenge, Stahlquerschnitt und Betongüte etc. iteriert werden. Die Schnittgrößen sind davon nicht mehr betroffen.

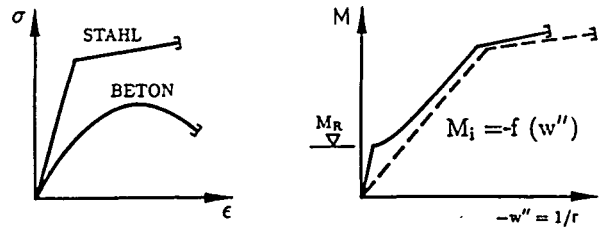


Bild 2.11: Stoffgesetz B für die Bemessung und Momenten-Krümmungsbeziehung

Wie in Bild 2.12a dargestellt, gilt dabei für das innere Moment  $M_i$ , d. h. den inneren Widerstand, die Momenten-Krümmungsbeziehung  $M_i = -w'' \cdot EI$  und für das äußere Moment  $M_a$  die Gleichgewichtsbedingung  $M_a' = Q$  bzw.  $M_a'' = -p$ , woraus die angegebene bekannte Differentialgleichung des elastischen Balkens resultiert. Grundlage für die Momenten-Krümmungsbeziehung ist dabei das ideal elastische, lineare Stoffgesetz, welches materialunabhängig ist.

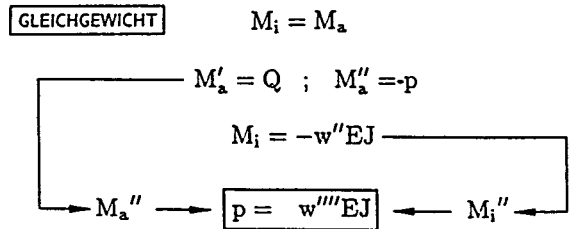


Bild 2.12a: Lineare Ermittlung der System-Schnittgrößen

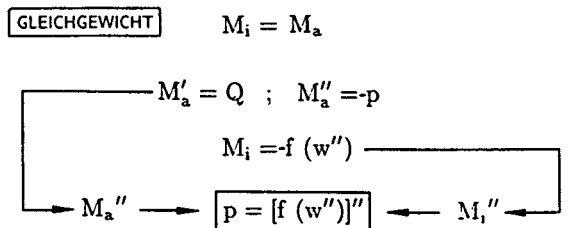


Bild 2.12b: Nichtlineare Ermittlung der System-Schnittgrößen

Diese Differentialgleichung des Balkens ist die Grundlage der Balkenstatik im Rahmen der Elastizitätstheorie. Sie bildet die Basis sowohl für das Kraftgrößenverfahren als auch für das Drehwinkel- bzw. Verschiebungsverfahren, welche dazu dienen, die Integration der obigen Differentialgleichung mittels eines einfach handhabbaren Berechnungsverfahrens durchzuführen. Danach erfolgt die Bemessung der einzelnen Querschnitte mit neuen, möglichst wirklichkeitsnahen Stoffgesetzen für die Werkstoffe Stahl und Beton, wobei davon ausgegangen wird, daß das Versagen eines Querschnitts das Versagen der jeweiligen Struktur bestimmt. Maßgebende Kriterien sind dabei vorgegebene Grenzdehnungen.

### 2.5.2 Das Verfahren der nichtlinearen Traglasttheorie

Die Schnittgrößen können natürlich auch mit den gleichen Stoffgesetzen, die der Bemessung zugrunde gelegt werden, ermittelt werden (Bild 2.11), so daß dann Schnittgrößenermittlung und Bemessung konsistent sind. Es gilt

$$\begin{aligned}\sigma_s &= f_1(\epsilon_s) \\ \sigma_c &= f_2(\epsilon_c)\end{aligned}\quad (2.3)$$

Dazu sind lediglich bei vorgegebenen Dehnungen die Spannungen, wie sie sich aus den Stoffgesetzen für Stahl und Beton ergeben, zu Momenten-Krümmungslinien (Bild 2.11) über den jeweiligen Querschnitt zu integrieren. Man erhält so für verschiedene Längskräfte  $N$  jeweils unterschiedliche, nun weitgehend realistische Momenten-Krümmungsbeziehungen  $M_i = -f(w'')$ , die nach Bild 2.12b wie für ein ideal elastisches Stoffgesetz in den Gleichgewichtsbeziehungen berücksichtigt werden können.

Der einzige Unterschied besteht darin, daß nun auch bei einfachen Lastbildern die Balken-Differentialgleichung nicht mehr analytisch integriert werden kann, da es sich nunmehr um eine komplexere nichtlineare Differentialgleichung handelt.

Da das Superpositionsgesetz wegen der Nichtlinearität nicht mehr gültig ist, versagen die üblichen baustatischen Methoden.

Eine Integration kann aber z. B. mit Hilfe der FE-Technik bei Stab- und Flächentragwerken, gegebenenfalls sogar bei dreidimensionalen Strukturen, in prinzipiell gleicher Weise wie bei linearem Ansatz erfolgen. Die entsprechenden einfachen Gleichgewichtsbedingungen des Verschiebungsverfahrens

$$[K] \cdot \vec{u} = \vec{R} \quad (2.4)$$

gehen dann in die nichtlineare Form

$$[K(\vec{u}_k)] \cdot \vec{u}_k = \vec{R} \quad (2.5)$$

über mit:

$K$  = Steifigkeitsmatrix,

$k$  = Knoten,

$\vec{u}$  = Vektor der Verschiebung an ausgezeichneten Knotenstellen,

$\vec{R}$  = Lastvektor an den Knotenstellen,

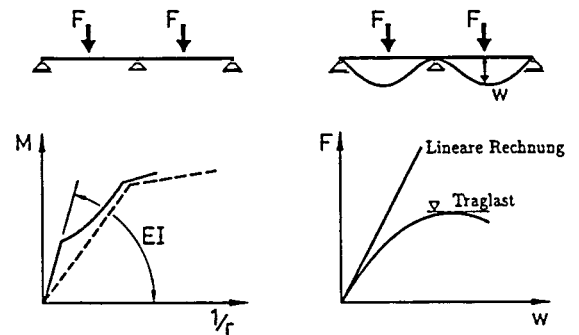
d. h., die Steifigkeit ist beanspruchungsabhängig. Die äußere Last wird deshalb üblicherweise in Inkrementen  $\Delta R^i$  aufgebracht, so daß z. B. beginnend mit  $[K(u_k = 0)]$  zu einem ersten  $\Delta R^1$  ein  $u^1$  ermittelt werden kann, damit sodann ein  $[K(u_k^1)]$ , und so fort.

Damit lassen sich inkrementell die Schnittgrößen für jeden erreichten Lastzustand eines Systems – natürlich bei vorgegebener Geometrie, Bewehrung etc. – ermitteln, wozu allerdings entsprechende EDV-Hilfsmittel erforderlich sind. Gibt man Grenzen der Beanspruchbarkeit, wie z. B. Grenzdehnungen vor, so kann auch die zugehörige Systemtraglast mit den jeweiligen Verformungen ausgegeben werden. Dabei werden vom Zustand I bis zum Versagen alle Belastungsphasen einschließlich des Gebrauchszustandes durchlaufen, so daß u. a. auch die jeweils erreichte Rißbreite angezeigt und verfolgt werden kann.

### 2.5.3 Gegenüberstellung der Verfahren

Die bisher übliche Methode der Bemessung unter Zuhilfenahme der Elastizitätstheorie hat zwei entscheidende Nachteile:

Zunächst weichen die Dehnungen bei Annahme eines ideal elastischen Stoffgesetzes und die zugehörigen Spannungen in den einzelnen Laststufen mehr oder weniger von den Dehnungen und Spannungen ab, die sich in den Werkstoffen und damit im Tragwerk tatsächlich ergeben. Mit zunehmender Annäherung an den Bruchzustand weichen auch die tatsächlichen Schnittgrößen von den berechneten (Bild 2.13) ab. Die anschließende Bemessung geht mithin von nicht zutreffend verteilten Schnittgrößen aus.



**Bild 2.13:** Momenten-Krümmungs- und Last-Verformungsbeziehungen

Die Schnittgrößen nach der Elastizitätstheorie stellen lediglich einen Gleichgewichtszustand dar, der nur in der Nähe des Gebrauchszustandes ohne nennenswerte Rißbildung mit der Wirklichkeit übereinstimmt, solange die elastische Momenten-Krümmungslinie (Bild 2.13) hinreichend der tatsächlichen gleicht.

Trotzdem liefert aber eine solche Dimensionierung nach den Grenzwertsätzen der Plastizitätstheorie mit gewissen Einschränkungen, wie später noch auszuführen ist, zunächst ein sicheres, wengleich in der Regel überdimensioniertes Tragwerk.

Ein weiterer Nachteil liegt darin begründet, daß bei einer derartigen Querschnittsbemessung davon ausgegangen wird, daß das gesamte System im Bruchzustand versagt, wenn ein Querschnitt versagt, z. B. die Fließgrenze in der Bewehrung erreicht wird. Damit werden u. a. ein statisch bestimmter und ein statisch unbestimmter Träger hinsichtlich ihrer Sicherheit gleich und somit unzutreffend beurteilt, da die Umlagerungsmöglichkeiten des letzteren außer Acht bleiben.

Gleiches gilt für Flächentragwerke, wenn z. B. bei einer Platte mit singulärem Moment davon ausgegangen wird, daß beim lokalen Erreichen der Streckgrenze in der Bewehrung das gesamte Tragwerk versagt. In aller Regel wird jedoch diese lokale Gefährdung der Tragfähigkeit durch entsprechende Umlagerungen verhindert.

Demgegenüber ermöglichen es nichtlineare Berechnungsverfahren, das Verhalten einer Struktur weit realistischer in einer Berechnung bis zum Versagen nachzuvollziehen. Nachteilig ist der größere Rechenaufwand und die Unmöglichkeit der Superposition, die es prinzipiell notwendig macht, mehrere Lastkombinationen unabhängig voneinander zu untersuchen.



## 2.5.4 Die Anwendung nichtlinearer Berechnungsverfahren

### 2.5.4.1 Näherungen

Für Zwecke eines ersten Entwurfs, aber auch für die endgültige Bemessung einfacher Tragwerke müssen Näherungsverfahren zur Verfügung stehen, die einfach zu handhaben sind.

Eine wesentliche Grundlage hierfür bilden Erkenntnisse der Plastizitätstheorie, die als Sonderfall einer allgemeinen nichtlinearen Theorie zu betrachten sind. Nach EC 2, Abschnitt 2.3, ist es ausdrücklich erlaubt, die im allgemeinen komplexe Momenten-Krümmungslinie einer Stahlbetonstruktur bilinear zu approximieren (Bild 2.13) und damit den Rahmen der klassischen Plastizitätstheorie bzw. Traglasttheorie zu nutzen.

In der Plastizitätstheorie [12, 13] werden zwei Grenzwertsätze abgeleitet, die es erlauben, eine obere und untere Schranke zu bestimmen, die von der tatsächlichen Traglast höchstens erreicht, jedoch nie überschritten bzw. unterschritten werden. Diese lauten:

**Statischer Grenzwertsatz (untere Schranke):**

„Ein Belastungssystem  $F(S)$ , welches zu einem statisch zulässigen Spannungszustand gehört, der die Fließbedingungen nicht verletzt, ist ein unterer Grenzwert der Traglast  $F(R)$ .“

**Kinematischer Grenzwertsatz (obere Schranke):**

„Ein Belastungssystem  $F(K)$ , welches in einem kinematisch zulässigen Bewegungszustand ein Gleichgewichtssystem bildet, ist ein oberer Grenzwert der Traglast  $F(R)$ .“

In konkreter Anwendung auf die vorliegenden Probleme heißt dies, daß jeder Gleichgewichtszustand eines Systems, dessen Momente die Fließmomente der Querschnitte nicht überschreiten und das eine hinreichende Duktilität (Rotationsfähigkeit) hat, eine sichere Traglast liefert. Hingegen ergibt ein im Gleichgewicht befindlicher beliebig Mechanismus mit hinreichender Rotationsfähigkeit eine rechnerische Traglast, die größer, höchstens gleich der tatsächlichen ist; es ergibt sich also i. a. eine unsichere Lösung.

Von den möglichen Näherungsverfahren wurde das der elastischen Schnittgrößenermittlung mit begrenzter Umlagerung bereits im Abschnitt 2.3 erläutert. Diese Möglichkeit kann auch dahingehend genutzt werden, indem z. B. bei einem Durchlaufträger die Stützmomente geschätzt und sodann die Feldmomente aus den Gleichgewichtsbedingungen bestimmt werden. Daran anschließend wird die Rotationsfähigkeit an den Stützen nachgewiesen und die einzelnen Querschnitte werden bemessen. Dieses Vorgehen wird anhand eines Beispiels im folgenden Abschnitt 2.5.5.2 demonstriert.

Es bleibt natürlich der bei dem bisherigen Vorgehen existierende Mangel, daß keine Sytemtraglast bestimmt wird und durch die Bemessung an allen Querschnitten mit Fraktilwerten der Materialfestigkeit - d. h. unter näherungsweise Berücksichtigung lokaler Fehler - bei statisch bestimmten und statisch unbestimmten Konstruktionen kein gleiches Sicherheitsniveau gewährleistet ist.

Von prinzipiell gleicher Art ist die sogenannte Hillerborg-Streifen-Methode [2], bei der Plattenschnittgrößen ebenfalls ausschließlich auf der Basis eines beliebig gewählten Gleichgewichtszustandes bestimmt werden (siehe Beispiel im Abschnitt 2.5.5.1). Daran schließt sich sodann wieder eine von der Schnittgrößenermittlung unabhängige Querschnittsbemessung an, ähnlich wie bei der beschriebenen Bemessung mit Hilfe der Elastizitätstheorie. Es fehlt jedoch die an sich notwendige Kontrolle einer hinreichenden Rotationsfähigkeit. Man glaubt, daß diese bei den grundsätzlich kleineren Rotationen in Platten weitestgehend entfallen kann, ohne daß hierfür nach Wissen des Verfassers entsprechende Nachweise vorliegen.

Weiter steht für Platten das Verfahren der Bruchlinientheorie [15] zur Verfügung (Beispiel in Abschnitt 2.5.5.3), das ein sicheres Ergebnis jedoch nur liefert, wenn ein geeignetes Bruchlinienschema zur Traglastermittlung benutzt wird. Wird dieses willkürlich gewählt, kann es aufgrund des kinematischen Grenzwertsatzes der Plastizitätstheorie [12, 13] zu einer unsicheren Lösung kommen. Für die meisten interessierenden Plattenberandungen und Lastkonfigurationen stehen jedoch diesbezüglich überprüfte Bruchlinienschemata zur Verfügung, so daß in der Praxis meist langwierige Untersuchungen entfallen können. Eine Kontrolle der Rotationsfähigkeit ist prinzipiell auch hier notwendig, kann aber aus den bereits genannten Gründen in der Regel wahrscheinlich unterbleiben.

Die Gebrauchsfähigkeit muß bei allen hier genannten Verfahren zusätzlich unter Zuhilfenahme der Elastizitätstheorie überprüft werden, sofern nicht entsprechende Erfahrungen vorliegen. Man kann davon ausgehen, daß für die Schnittgrößenermittlung notwendige große Rotationen i. a. eine Rißgefährdung anzeigen.

### 2.5.4.2 Eine generell nichtlineare Berechnung

Das Konzept einer nichtlinearen Berechnung ist auch im bisher maßgebenden Rahmen der deutschen Normen keinesfalls neu. So wird z. B. bei Knickberechnungen von Stahlbetonstützen die Last schrittweise von Null bis zum Versagen gesteigert, d. h. auch der Gebrauchszustand wird wegen der Bedeutung der Verformung bei einer Berechnung nach Theorie II. Ordnung unter genauer Berücksichtigung der Rißbildung und gegebenenfalls des Verbunds z. B. durch eine reduzierte Stahldehnung vollständig bestimmt (siehe auch EC 2, Bild A 2.1).

Auf gleicher Grundlage lassen sich natürlich auch EDV-Programme für Durchlaufträger entwickeln, die jedoch erst allmählich Eingang in die Baupraxis finden. Sie bieten neben anderen hier zu diskutierenden Vorteilen auch die Möglichkeit, Zwangbeanspruchungen infolge eingepprägter Verformungen wie Setzungen oder Temperaturbeanspruchungen in realistischer Weise, d. h. mit richtig abgeminderter Steifigkeit, ohne zusätzlichen Aufwand zu ermitteln. Eine Überprüfung der Rotationsfähigkeit, wie sie im Abschnitt 2.4 erläutert wurde, ist hier nicht notwendig, weil bei einer derart „vollständigen Berechnung“ Momenten-Krümmungsbeziehungen mit den zugehörigen relevanten Grenzdehnungen wirklichkeitsnah berücksichtigt werden.

Da damit, wie inzwischen viele Vergleiche gezeigt haben, das tatsächliche Verhalten z. B. im Versuch erstaunlich genau beschrieben werden kann, wird eine solche nichtlineare Berechnung auch im CEB-FIP Model Code '90 [11] ausdrücklich zur Basis für die rechnerische Verifizierung aller anderen Rechenverfahren erklärt.

Solche Programme werden zukünftig wohl die endgültige Bemessung bestimmen. Hierfür müssen konsistente Grundlagen vorgegeben werden, die für Stabwerke und Flächentragwerke in gleicher Weise gelten.

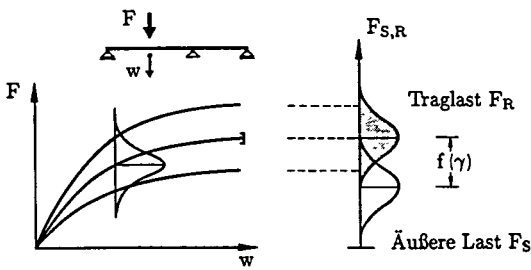
EC 2 sieht vor, daß zunächst Schnittgrößen nichtlinear für Bruchlastkombinationen auf der Basis wirklichkeitsnaher Stoffgesetze in der beschriebenen Weise ermittelt werden. Dabei sind die einzelnen Lastanteile oder die Gesamlast mit Sicherheitsfaktoren  $\gamma_G$  bzw.  $\gamma_Q > 1$ , gegebenenfalls unter Berücksichtigung von Kombinationsbeiwerten, zu erhöhen.

Der Schnittgrößenermittlung sind Mittelwerte der Materialparameter zugrunde zu legen, da diese vorwiegend durch integrale Verformungsgrößen über größere Tragwerksbereiche bestimmt werden.

Daran anschließend werden alle Querschnitte einzeln bemessen, wobei nun Fraktilwerte der Materialparameter von Beton und Stahl durch Sicherheitsfaktoren  $\gamma_c$  bzw.  $\gamma_s > 1$  geteilt, d. h. reduziert werden, bevor die Integration der Spannungen über den Querschnitt zu resultierenden, widerstehenden Schnittgrößen, erfolgt (Bild 2.10). Der Vergleich von Einwirkungen und Widerständen erfolgt auf der Ebene von Schnittgrößen.

Mithin kommen zwei unterschiedliche, nicht konsistente Stoffgesetze zur Anwendung, das eine basierend auf Mittelwerten, das andere basierend auf Fraktilwerten, modifiziert mit Material-Sicherheitsbeiwerten.

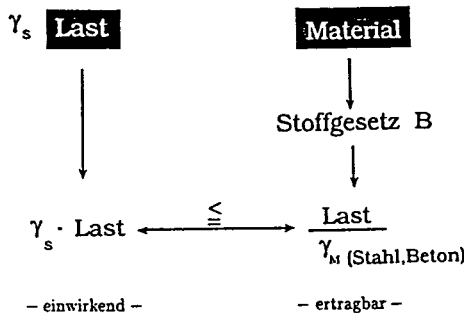
Es müssen zunächst Bewehrungen vorgegeben werden, die für die Schnittgrößenermittlung mit den Mittelwerten ihrer Materialeigenschaften in die Rechnung eingehen. Bei der nachfolgenden Querschnittsbemessung mit geringerer Ausnutzung der Baustoffe als Folge der anzusetzenden Fraktilwerte der Materialparameter werden sich dann in der Regel abweichende Bewehrungen ergeben.



**Bild 2.14:** Last-Verformungsbeziehungen aufgrund von Mittel- und Fraktilwerten

Es wird i. a. nicht möglich sein, mit einer Bewehrung Schnittgrößen zu errechnen und sie bei unterschiedlicher Ausnutzung auch im Sinne einer Querschnittsbemessung mit dieser Bewehrung abzudecken.

Die zunächst ermittelte Schnittgrößenverteilung hat also den Charakter eines näherungsweise bestimmten Gleichgewichtszustandes, der i. a. dann auf der sicheren Seite liegen wird, wenn durch eine vernünftige Erstwahl der Bewehrung die evtl. notwendige Rotationsfähigkeit gegeben ist. Es bleibt zu fragen, ob sich im Sinne der Plastizitätstheorie für einen solchen fiktiven Gleichgewichtszustand der Aufwand einer nichtlinearen Berechnung lohnt. Bei komplexen Flächentragwerken läßt sich im übrigen auf diesem Wege das tatsächliche Sicherheitsniveau wohl nicht zutreffend beurteilen.



**Bild 2.15:** Schema einer generell nichtlinearen Bemessung

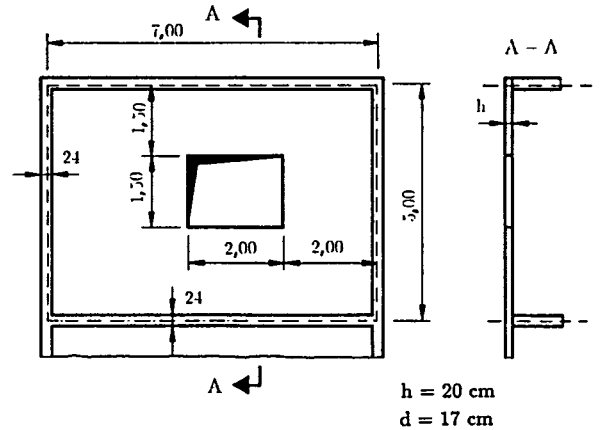
Das in der Regel unterschiedliche Sicherheitsniveau statisch bestimmter und statisch unbestimmter Systeme wird nicht erfaßt.

Wie in [17, 18] im einzelnen ausgeführt, dürfte es sinnvoller sein, bei vorgegebener Bewehrung stattdessen von den um einen Material Sicherheitsfaktor  $\gamma_M \geq 1$  reduzierten Fraktilwerten der System-Traglast auszugehen, die allein den notwendigen Aufwand einer nichtlinearen Berechnung rechtfertigt, und diese sodann der um einen Sicherheitsbeiwert  $\gamma_F$  erhöhten einwirkenden äußeren Last gegenüber zu stellen (Bilder 2.14 und 2.15).

**2.5.5 Beispiele**

**2.5.5.1 Plattenberechnung nach der Hillerborg-Streifen-Methode**

Die Streifen-Methode läßt dem Anwender relativ weiten Spielraum in der Bewehrungsanordnung, da sie davon ausgeht, daß nach dem statischen Grenzwertsatz der Plastizitätstheorie ein beliebiges Gleichgewichtssystem der Bemessung zugrunde gelegt werden darf, wenn hinreichende Duktilität gewährleistet ist. Durch die weitgehend willkürliche Aufteilung in Streifen einschließlich der zugehörigen Belastung sind für eine gegebene Platte verschiedene Lösungen möglich, die allerdings von unterschiedlicher Wirtschaftlichkeit sein können. Da eine genaue Überprüfung der Rotationsfähigkeit nicht zwingend gefordert wird, muß auf eine einigermaßen verträgliche Aufteilung geachtet werden.



**Bild 2.16:** Plattengeometrie

Belastung:  
 Eigengewicht:  $G_k = 5,5 \text{ kN/m}^2$   
 Verkehrslast:  $Q_k = 7,0 \text{ kN/m}^2$   
 $q_d = \gamma_G \cdot G_k + \gamma_Q \cdot Q_k = 1,35 \cdot 5,5 + 1,5 \cdot 7,0 = 17,93 \text{ kN/m}^2$

Baustoffe:  
 – Beton C 30/37:  $f_{ck} = 30 \text{ N/mm}^2$   
 $f_{cd} = 20 \text{ N/mm}^2$   
 – Baustahl S 500:  $f_{yk} = 500 \text{ N/mm}^2$   
 $f_{yd} = 435 \text{ N/mm}^2$

Im vorliegenden Beispiel wird die zunächst ungestörte Platte, d. h. unter Vernachlässigung der Öffnung, in Zonen unterschiedlicher Lastabtragung unterteilt. In den Zonen mit Lastabtragung in beide Richtungen (Plattenecken) kann die Last beliebig auf die Richtungen aufgeteilt werden. Hier soll z. B. gelten:

$q_x = q_y = q/2$

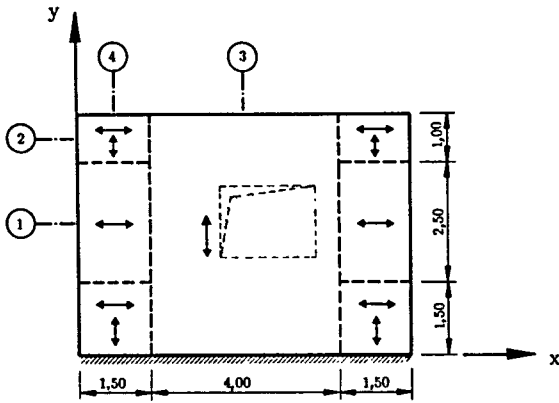
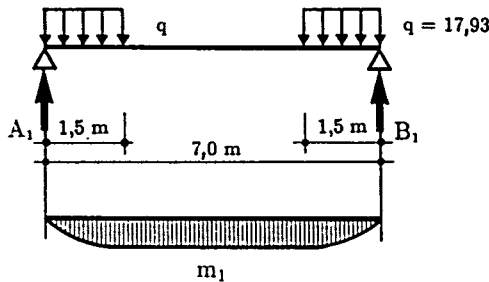


Bild 2.17: Zonen der Lastabtragung

Für die einzelnen Streifen werden im folgenden die Schnittgrößen ermittelt.

Streifen 1:



$$A_1 = B_1 = 17,93 \cdot 1,50 = 26,90 \text{ kN/m}$$

$$m_1 = 17,93 \cdot 1,50^2 / 2 = 20,17 \text{ kNm/m}$$

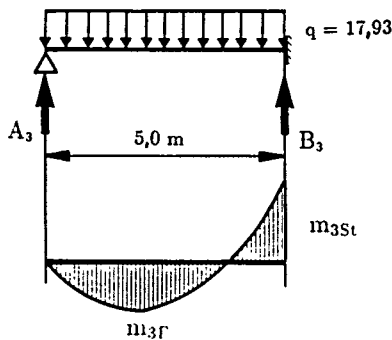
Streifen 2: (siehe Streifen 1)

$$q = 17,93 \text{ kN/m}$$

$$A_2 = B_2 = 26,90 / 2 = 13,45 \text{ kN/m}$$

$$m_2 = 20,17 / 2 = 10,09 \text{ kNm/m}$$

Streifen 3:



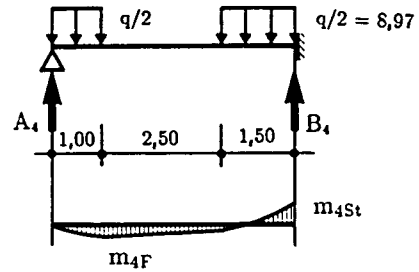
$$A_3 = 3/8 \cdot 17,93 \cdot 5,0 = 33,62 \text{ kN/m}$$

$$B_3 = 5/8 \cdot 17,93 \cdot 5,0 = 56,03 \text{ kN/m}$$

$$m_{3F} = 9/128 \cdot 17,93 \cdot 5,0^2 = 31,52 \text{ kNm/m}$$

$$m_{3St} = -1/8 \cdot 17,93 \cdot 5,0^2 = -56,03 \text{ kNm/m}$$

Streifen 4:



Vereinfachend wird angenommen, daß die Lastblöcke vollständig zu ihrer jeweiligen Seite hin abgetragen werden.

$$A_4 = 8,97 \cdot 1,0 = 8,97 \text{ kN/m}$$

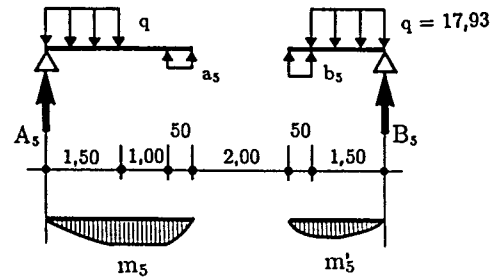
$$B_4 = 8,97 \cdot 1,5 = 13,45 \text{ kN/m}$$

$$m_{4F} \approx 8,97 \cdot 1,0^2 = 4,48 \text{ kNm/m}$$

$$m_{4St} = -8,97 \cdot 1,0 \cdot 4,5 + 8,97 \cdot 5,0 - 8,97 \cdot 1,5^2 / 2 = -5,61 \text{ kNm/m}$$

In einem zweiten Schritt wird der Einfluß der Öffnung berücksichtigt. Die Streifen entlang der Achsen 5 und 6 werden durch die Öffnung unterbrochen. Zur Auflagerung der abgeschnittenen Enden werden Streifen entlang der Öffnung definiert, deren Breite willkürlich zu 0,5m gewählt wird. Da die Streifen entlang der Achse 7 und 8 zu lang würden, wird eine Unterstützung durch die Streifen 9 und 10 angenommen.

Streifen 5:



$$a_5 = \frac{17,93 \cdot 1,50^2}{2 \cdot 2,75 \cdot 0,5} = 14,67 \text{ kN/m}^2$$

$$b_5 = \frac{17,93 \cdot 1,50^2}{2 \cdot 1,75 \cdot 0,5} = 23,05 \text{ kN/m}^2$$

$$A_5 = 17,93 \cdot 1,50 - 14,67 \cdot 0,5 = 19,56 \text{ kN/m}$$

$$A_5' = 17,93 \cdot 1,50 - 23,05 \cdot 0,5 = 15,37 \text{ kN/m}$$

$$m_5 \leq m_1 = 20,17 \text{ kNm/m}$$

$$m_5' \leq m_1 = 20,17 \text{ kNm/m}$$

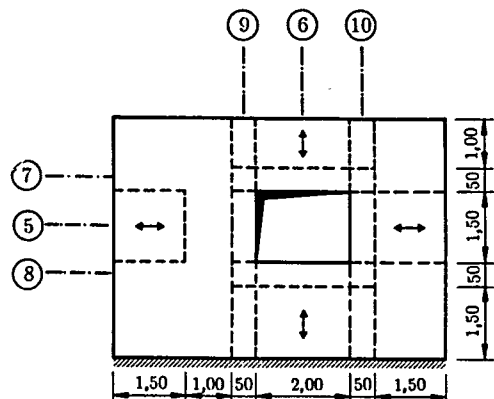
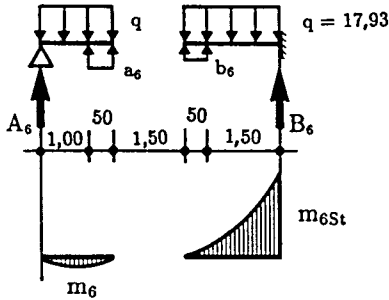


Bild 2.18: Lastabtragung im Bereich der Öffnung

Für die Streifen 7 bis 10 werden nur die durch die Öffnung induzierten Lasten berücksichtigt. Die Ermittlung der Schnittgrößen geschieht sodann durch Überlagerung mit dem ungestörten System.

Streifen 6:



$$a_6 = \frac{17,93 \cdot 1,50^2}{2 \cdot 1,25 \cdot 0,5} = 32,27 \text{ kN/m}^2$$

$$A_6 = 17,93 \cdot 1,50 - 32,27 \cdot 0,5 = 10,76 \text{ kN/m}$$

$$m_6 \leq 17,93 \cdot 1,50^2 / 8 = 5,04 \text{ kNm/m}$$

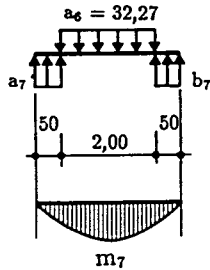
Es wird angenommen, daß sich das Stützmoment durch die Öffnung nicht verändert.

$$m_{6St} \approx m_{3St} = -56,03 \text{ kNm/m}$$

$$b_6 = \frac{17,93 \cdot 2,0 \cdot 1,0 - 56,03}{1,75 \cdot 0,5} = -23,05 \text{ kN/m}^2$$

$$B_6 = 17,93 \cdot 2,0 + 23,05 \cdot 0,5 = 47,39 \text{ kN/m}$$

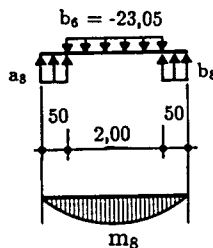
Streifen 7:



$$a_7 = b_7 = 32,27 \cdot 2 = 64,54 \text{ kN/m}^2$$

$$m_7 = 64,54 \cdot 0,5 \cdot 1,25 - 32,27 \cdot 1,0^2 / 2 = 24,20 \text{ kNm/m}$$

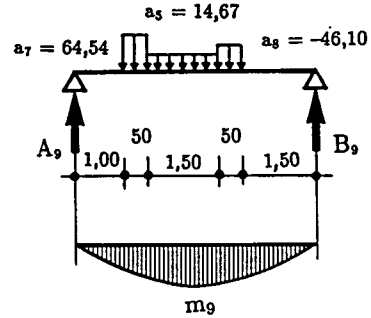
Streifen 8:



$$a_8 = b_8 = -23,05 \cdot 2 = -46,10 \text{ kN/m}^2$$

$$m_8 = -46,10 \cdot 0,5 \cdot 1,25 + 23,05 \cdot 1,0^2 / 2 = -17,29 \text{ kNm/m}$$

Streifen 9:



Wie zuvor bei Streifen 7 wird angenommen, daß das am ungestörten System berechnete Stützmoment durch die Öffnung nicht verändert wird. D. h., es wird ein zu überlagernder Lastfall gerechnet an einem System, bei dem beide Enden gelenkig gelagert sind.

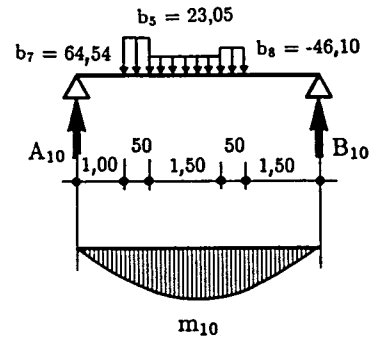
$$B_9 = \frac{-46,10 \cdot 0,5 \cdot 3,25 + 14,67 \cdot 1,5 \cdot 2,25 + 64,54 \cdot 0,5 \cdot 1,25}{5,0} = 2,99 \text{ kN/m}$$

$$A_9 = -46,10 \cdot 0,5 + 14,67 \cdot 1,5 + 64,54 \cdot 0,5 - 2,99 = 28,24 \text{ kN/m}$$

$$x(\max M) = 1,0 + 28,24 / 64,54 = 1,44 \text{ m}$$

$$m_9 = 28,24 \cdot 1,44 - 64,54 \cdot 0,44^2 / 2 = 34,42 \text{ kNm/m}$$

Streifen 10:



$$B_{10} = \frac{-46,10 \cdot 0,5 \cdot 3,25 + 23,05 \cdot 1,5 \cdot 2,25 + 64,54 \cdot 0,5 \cdot 1,25}{5,0} = 8,64 \text{ kN/m}$$

$$A_{10} = -46,10 \cdot 0,5 + 23,05 \cdot 1,5 + 64,54 \cdot 0,5 - 8,64 = 35,16 \text{ kN/m}$$

$$x(\max M) = 1,5 + \frac{35,16 - 64,54 \cdot 0,5}{23,05} = 1,63 \text{ m}$$

$$m_{10} = 35,16 \cdot 1,63 - 64,54 \cdot 0,5 \cdot 0,38 - 23,05 \cdot 0,13^2 / 2 = 44,85 \text{ kNm/m}$$

Die Momentenverteilung kann nun wie folgt dargestellt werden:

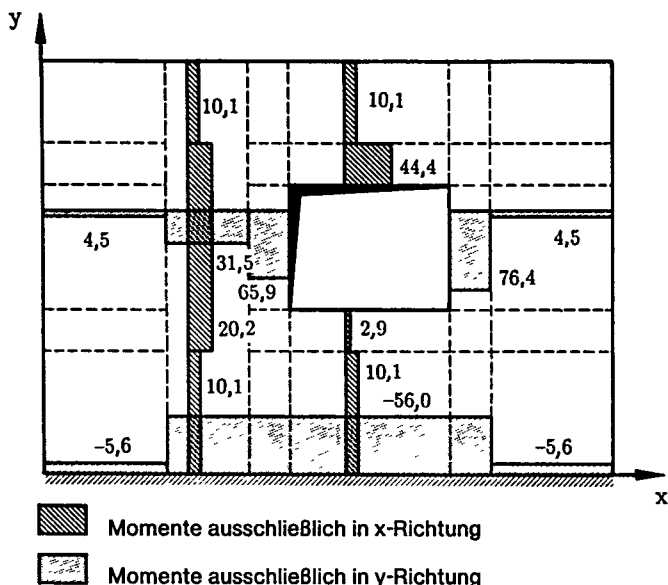


Bild 2.19: Momentenverteilung

Kontrolle der Höhe der Druckzone:

Nach EC 2, Abschnitt 2.5.3.5.5, soll bei der Anwendung plastischer Verfahren  $x/d$  den Wert 0,25 nicht überschreiten. Nach Tafel 2a (siehe Beitrag von GRASSER) folgt für  $x/d = 0,25$ :

$zul \mu_{Sd} = 0,154$   
 $zul M_{Sd} = \mu \cdot b \cdot d^2 \cdot f_{cd} = 0,154 \cdot 1,0 \cdot 0,17^2 \cdot 20 = 0,0890 \text{ MNm}$   
 $vorh M_{Sd} = 76,4 \text{ kNm} \leq zul M_{Sd} = 89,0 \text{ kNm}$

Anmerkung: Die Bewehrung kann prinzipiell anhand der so ermittelten Schnittgrößen bestimmt werden. Ergänzend wird auf die Bestimmungen des EC 2, Abschnitt 5.4.3, hingewiesen. Die Grenzzustände der Gebrauchstauglichkeit wurden mit Hilfe eines FE-Programmes überprüft und sind im vorliegenden Beispiel eingehalten.

2.5.5.2 Durchlaufträger

2.5.5.2.1 Schnittgrößenermittlung

System/Belastung:

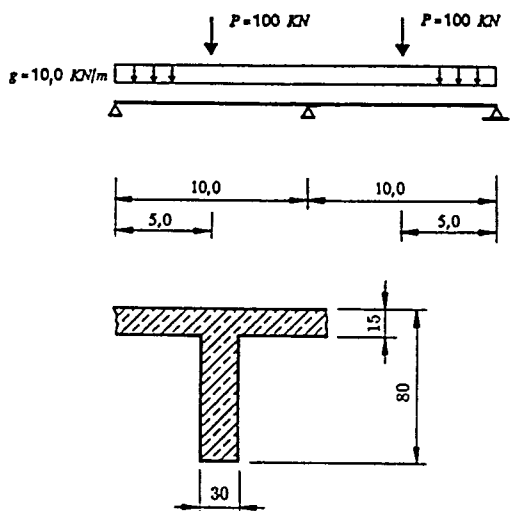


Bild 2.20: Zweifeldträger - Geometrie und Belastung

Mitwirkende Plattenbreite (EC 2, Abschnitt 2.5.2.2):

$b_{eff} = b_w + 1/5 \cdot l_0$   
 Feld:  
 $l_0 = 0,85 \cdot l_1 = 0,85 \cdot 10,0 = 8,50 \text{ m}$   
 $b_w = 0,30 \text{ m}$   
 $b_{eff} = 0,30 + 1/5 \cdot 8,50 = 2,00 \text{ m}$

Stütze:  
 $l_0 = 0,15 \cdot (l_1 + l_2) = 0,15 \cdot 2 \cdot 10,00 = 3,00 \text{ m}$   
 $b_w = 0,30 \text{ m}$   
 $b_{eff} = 0,30 + 1/5 \cdot 3,00 = 0,90 \text{ m}$

Teilsicherheitsbeiwerte (EC 2, Abschnitt 2.3.2, siehe auch Beitrag von KÖNIG und FISCHER in diesem Heft):

- Belastung:  
 Eigengewicht  $\gamma_G = 1,35$  (EC 2, Tab. 2.2)  
 Verkehrslast  $\gamma_Q = 1,50$
- Baustoff:  
 Beton  $\gamma_c = 1,50$  (EC 2, Tab. 2.3)  
 Stahl  $\gamma_s = 1,15$

Schnittgrößen:

Das Stützmoment über dem Auflager B soll auf  $M_B = 270 \text{ kNm}$  begrenzt werden. Aus der angegebenen Belastung ergibt sich dann folgende Momentenverteilung im Grenzzustand der Tragfähigkeit:

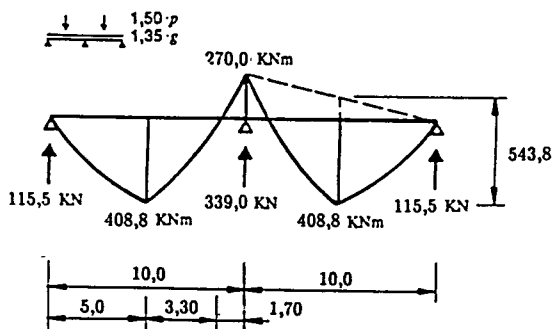


Bild 2.21: Der Bemessung zugrundeliegende Momentenverteilung

2.5.5.2.2 Bemessung

Die Ermittlung der notwendigen Bewehrung erfolgt nach Tafel 2a der Bemessungshilfsmittel für Biegung und Längskraft (siehe Beitrag von GRASSER/FEIX).

Baustoffkennwerte für die Bemessung:

- Beton C 20/25:  $f_{ck} = 20,0 \text{ N/mm}^2$   
 $f_{cd} = f_{ck}/\gamma_c = 20,0/1,5 = 13,3 \text{ N/mm}^2$
- Stahl BSt 500/550:  $f_{yk} = 500,0 \text{ N/mm}^2$   
 $f_{yd} = f_{yk}/\gamma_s = 500,0/1,15 = 434,8 \text{ N/mm}^2$

Bemessung Stütze B:

$M_{Sd} = 270 \text{ kNm}$   
 $\mu_{Sd} = \frac{0,270}{0,75^2 \cdot 0,30 \cdot 13,3} = 0,120$   
 $\zeta = z/d = 0,921$   
 $z = 0,69 \text{ m}$   
 $\xi = x/d = 0,189$   
 $x = 0,14 \text{ m}$   
 $\omega = 0,1303$   
 $A_s = 0,1303 \cdot 30 \cdot 75 \cdot 13,3/434,8 = 9,00 \text{ cm}^2$

**Bemessung Feld:**

$M_{Sd} = 408,8 \text{ kNm}$

$\mu_{Sd} = \frac{0,409}{0,75^2 \cdot 2,00 \cdot 13,3} = 0,027$

$\zeta = z/d = 0,977$

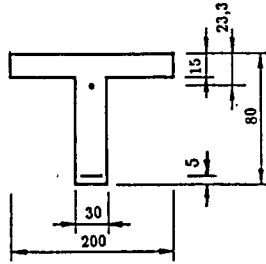
$z = 0,73 \text{ m}$

$\xi = x/d = 0,063$

$x = 0,05 \text{ m}$

$\omega = 0,0286$

$A_s = 0,0286 \cdot 200 \cdot 75 \cdot 13,3/434,8 = 13,12 \text{ cm}^2$



**2.5.5.2.3 Momenten-Krümmungsbeziehung**

Nach EC 2, Anhang 2, wird in jedem Querschnitt mit der gewählten Bewehrung die Momenten-Krümmungsbeziehung erstellt. Dabei werden mittlere Baustoffkennwerte verwendet und die Teilsicherheitsbeiwerte  $\gamma_s$  und  $\gamma_c$  für Stahl und Beton zu „1“ gesetzt.

- Beton:  $f_{cm} = f_{ck} + 8 = 28,0 \text{ N/mm}^2$   
 $f_{ctm} = 2,20 \text{ N/mm}^2$   
 $E_{cm} = 29000 \text{ N/mm}^2$
- Stahl:  $f_y = f_{ym} = 500 \text{ N/mm}^2$   
 $E_{sm} = E_s = 200000 \text{ N/mm}^2$

Mit einer mittleren Stahldehnung nach Gleichung A.2.2 (EC 2, Anhang 2)

$\epsilon_{sm} = \epsilon_{smr} + \frac{\alpha_s}{E_s} [1 - \beta_1 \cdot \beta_2 \cdot (\alpha_{sr}/\alpha_s)^2]$

ergibt sich die Krümmung aus Gleichung A.2.1 zu:

$(1/r)_m = (\epsilon_{sm} - \epsilon_c)/d$

Stütze B:

$A_c = 3300 \text{ cm}^2$

$y_s = 31,1 \text{ cm}$  (aus Nebenrechnung)

$I_y = 1,988 \cdot 10^6 \text{ cm}^4$

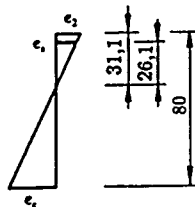
$A_s = 9,00 \text{ cm}^2$

Rißmoment:

$M_r = \frac{f_{ctm}}{y_s} \cdot I_y = \frac{2,2 \cdot 10^{-3}}{31,1} \cdot 1,988 \cdot 10^6$   
 $= 140,6 \text{ kNm}$

$\epsilon_2 = f_{ctm}/E_{cm} = 2,2/(29 \cdot 10^3) = 7,59 \cdot 10^{-5}$

$\epsilon_{smr} = 7,59 \cdot 10^{-5} \cdot 26,1/31,1$   
 $= 6,37 \cdot 10^{-5}$



Das Rißmoment  $M_R = 140,6 \text{ kNm}$  wird bei folgender iterativ ermittelten Dehnungsverteilung vom Querschnitt aufgenommen:

$\epsilon_c = -0,313 \cdot 10^{-3}$

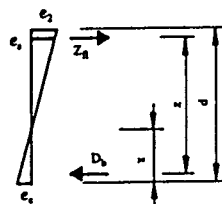
$\epsilon_s = 1,125 \cdot 10^{-3}$

$x = 16,32 \text{ cm}$

$z = 69,43 \text{ cm}$

$D_b = Z = 140,6/0,694 = 202,5 \text{ kN}$

$\sigma_{sr} = \frac{202,5 \cdot 10^3}{9,00 \cdot 10^2} = 225,0 \text{ N/mm}^2$



Fließmoment:

Mit  $\beta_1 = \beta_2 = 1,0$  (EC 2, 2.2 (3)) folgt:

$\epsilon_{sm} = 6,37 \cdot 10^{-5} + \frac{500}{200 \cdot 10^3} \left[ 1 - \left( \frac{225,0}{500} \right)^2 \right] = 2,057 \cdot 10^{-3}$

$Z_{Fl} = 9,00 \cdot 500 \cdot 10^{-1} = 450,0 \text{ kN}$

$\epsilon_c = -0,724 \cdot 10^{-3}$

$\epsilon_s = 2,500 \cdot 10^{-3}$

$x = 16,84 \text{ cm}$

$z = 69,20 \text{ cm}$

$M_{Fl} = 450,0 \cdot 0,692 = 311,4 \text{ kNm}$

$(1/r)_m = (2,057 \cdot 10^{-3} + 0,724 \cdot 10^{-3})/0,75 = 3,71 \cdot 10^{-3} \text{ m}^{-1}$

Dem Stützmoment  $M_B = 270 \text{ kNm}$  (bei Ausnutzung der Rotationsfähigkeit) entspricht damit eine mittlere Krümmung von

$(1/r)_m = 3,71 \cdot 10^{-3} \cdot 270,0/311,4 = 3,22 \cdot 10^{-3} \text{ m}^{-1}$

Feld:

$A_c = 4950 \text{ cm}^2$

$y_s = 23,3 \text{ cm}$

$I_y = 2,634 \cdot 10^6 \text{ cm}^4$

$A_s = 13,12 \text{ cm}^2$

Rißmoment:

$M_r = \frac{2,2 \cdot 10^{-3}}{56,7} \cdot 2,634 \cdot 10^6 = 102,2 \text{ kNm}$

$\epsilon_2 = f_{ctm}/E_{cm} = 2,2/(29 \cdot 10^3) = 7,59 \cdot 10^{-5}$

$\epsilon_{smr} = 7,59 \cdot 10^{-5} \cdot 51,7/56,7 = 6,92 \cdot 10^{-5}$

$\epsilon_c = -0,065 \cdot 10^{-3}$

$\epsilon_s = 0,539 \cdot 10^{-3}$

$x = 8,07 \text{ cm}$

$z = 72,28 \text{ cm}$

$D_b = Z = 102,2/0,723 = 141,4 \text{ kN}$

$\sigma_{sr} = 141,4 \cdot 10^3/(13,12 \cdot 10^2) = 107,8 \text{ N/mm}^2$

$\epsilon_{sm} = 6,92 \cdot 10^{-5} + \frac{500}{200 \cdot 10^3} \left[ 1 - \left( \frac{107,8}{500} \right)^2 \right] = 2,453 \cdot 10^{-3}$

Fließmoment:

$Z_{Fl} = 13,12 \cdot 500 \cdot 10^{-1} = 656,0 \text{ kN}$

$\epsilon_c = -0,304 \cdot 10^{-3}$

$\epsilon_s = 2,500 \cdot 10^{-3}$

$x = 8,13 \text{ cm}$

$z = 72,26 \text{ cm}$

$M_{Fl} = 656,0 \cdot 0,723 = 474,0 \text{ kNm}$

$(1/r)_m = (2,453 \cdot 10^{-3} + 0,304 \cdot 10^{-3})/0,75 = 3,68 \cdot 10^{-3} \text{ m}^{-1}$

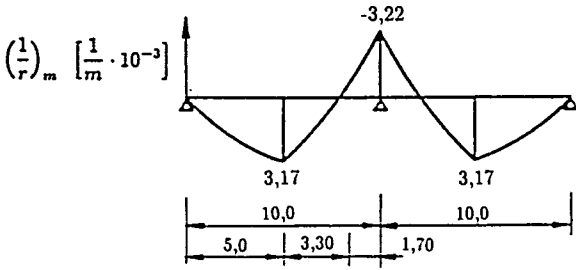
Damit ergibt sich für das Bemessungsmoment von 408,8 kNm eine mittlere Krümmung von

$(1/r)_m = 3,68 \cdot 10^{-3} \cdot 408,8/474,0 = 3,17 \cdot 10^{-3} \text{ m}^{-1}$

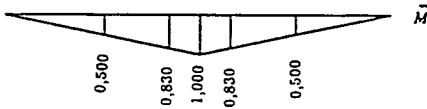
**2.5.5.2.4 Nachweis der Rotationsfähigkeit über der Stütze B**

Der Nachweis der Verdrehung über dem Auflager wird mittels der  $\delta_{ik}$ -Tafeln (Integrationstabellen) geführt, wobei vereinfachend nur Dreiecksanteile berücksichtigt werden.

– Rotation aus der Belastung:



– Einheitsmoment  $\bar{M}$



$$\begin{aligned} 1/2 \cdot \Theta_B \cdot 10^3 &= 1/3 \cdot 3,17 \cdot 0,50 \cdot 5,00 &= 2,64 \\ &+ 1/6 \cdot 3,17 \cdot (2 \cdot 0,50 + 0,830) \cdot 3,30 &= 3,19 \\ &- 1/6 \cdot 3,22 \cdot (0,830 + 2 \cdot 1,00) \cdot 1,70 &= -2,58 \\ &\Sigma &= 3,25 \end{aligned}$$

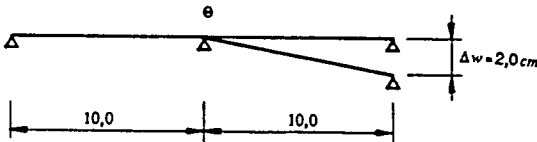
$$\Theta_B = 2 \cdot 3,25 \cdot 10^{-3} = 6,50 \cdot 10^{-3} \text{ [rad]}$$

– zulässige Rotation: (EC 2, Anhang 2, Bild A 2.2 ) für  $x/d = 0,189$ :

$$\Theta_{Bzul} = 18,2 \cdot 10^{-3} > \Theta_{Bvoh} = 6,50 \cdot 10^{-3}$$

Tritt eine Rotation aus der Verschiebung eines Auflagers auf, muß diese im Grenzzustand der Tragfähigkeit nur beim Nachweis der zulässigen Rotation berücksichtigt werden. Die Schnittgrößen werden davon nicht beeinflusst.

– Rotation aus der Verschiebung am Auflager



$$\Theta_B = 0,02/10,0 = 2,00 \cdot 10^{-3} \text{ [rad]}$$

– Gesamtverdrehung:

$$\Theta_B = 6,50 \cdot 10^{-3} + 2,00 \cdot 10^{-3} = 8,50 \cdot 10^{-3} \text{ [rad]}$$

$$\Theta_{Bzul} = 18,2 \cdot 10^{-3} > \Theta_{Bvoh} = 8,50 \cdot 10^{-3}$$

Anmerkung: Bei der hier gewählten 40%igen Momentenumlagerung sind nach EC 2, Abschnitt 4.4.1.2, Nachweise der Spannungen unter Gebrauchsbedingungen zu führen. Dabei zeigt sich, daß diese mit den vorgegebenen Begrenzungen nach EC 2, Abschnitte 4.4.1.1 (1) bis (5), für die Druckspannungen erfüllt sind, vorausgesetzt das Bauteil ist nicht den extremen Umweltklassen 3 und 4 nach EC 2, Tabelle 4.1, ausgesetzt.

Der Nachweis zur Begrenzung der Stahlspannungen unter der seltenen Lastkombination nach EC 2, Abschnitt 4.4.1.1 (7), hingegen, ist bei der vorliegenden Bewehrungsmenge nicht eingehalten. Allerdings hat eine eingehendere Untersuchung der Tragfähigkeit unter Berücksichtigung des nichtlinearen Materialverhaltens und mittleren Materialfestigkeiten ergeben, daß unter der genannten Lastkombination, bei einem angenommenen Rißabstand von 15 cm, maximale Rißbreiten von 0,3 mm im Stützbereich und 0,15 mm im Feldbereich des Durchlaufträgers auftreten. Eine Rißbreite, die nach EC 2, Abschnitt 4.4.2.1 (6), schon unter quasi-ständiger Lastkombination zulässig ist.

### 2.5.5.3 Plattenberechnung nach der Bruchlinientheorie

#### 2.5.5.3.1 Einführung

Zur Anwendung der Bruchlinientheorie ist ein eingehendes Studium der einschlägigen Literatur unumgänglich. Im folgenden werden nur einige prinzipielle Bemerkungen, die in unmittelbarem Zusammenhang mit dem nachstehenden Beispiel stehen, gegeben.

Zur Bestimmung der Traglast werden ähnlich wie bei der Fließgelenkmethode Gelenke – hier Bruchlinien – definiert, in denen sich die Relativverdrehung der plastischen Zone konzentrieren und ein Maximalmoment – das Fließmoment – übertragen wird. Die Platte wird somit in ein kinematisches System von Plattenteilen zerlegt. Die Bruchlinien werden zu Rotationsachsen, die eine Relativverdrehung der angrenzenden Plattenteile ermöglichen. Bei Annahme einer inkrementellen Senkung eines Punktes und somit einer inkrementellen Verdrehung der einzelnen Plattenteile  $\Theta_i$ ,  $i = A, B, C$  (siehe Prinzipskizze Bild 2.23) – die Auflager bestimmen die Rotationsachsen der jeweiligen Plattenteile – wird virtuelle innere Arbeit

$$\delta W_i = \Sigma m_i \cdot \delta \Theta_i$$

und äußere Arbeit

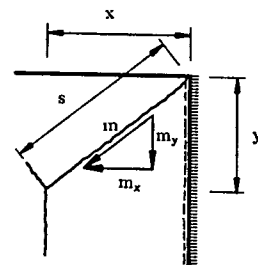
$$\delta W_a = \int_A q \cdot \delta w \, dA$$

verrichtet, die dem Betrag nach gleich sein muß:

$$\delta W_a = \delta W_i$$

In der Literatur, z. B. [14, 15, 16], werden für verschiedene Lagerungsbedingungen, Plattengeometrien und Bewehrungsarten Musterlösungen für die Lage der Bruchlinien angegeben. Daraus kann für den jeweiligen Anwendungsfall durch 'Trial and Error' relativ einfach und schnell das maßgebende Bruchlinienschema gefunden werden, wobei jenes maßgebend ist, das entweder bei vorgegebener Belastung aus der Arbeitsgleichung das maximale Moment für die Bemessung erfordert oder bei vorhandenen Querschnittswerten das Minimum für die Traglast liefert. Diese kann sowohl direkt durch Extremwertuntersuchung anhand der Arbeitsgleichung als auch durch Bildung des Momentengleichgewichtes aus Belastung und Fließmomenten an jedem Teilstück erfolgen. Die Fließfigur ist dann erreicht, wenn das erforderliche Moment für alle Plattenteile gleich ist.

Momente entlang der Bruchlinien, die schräg zur Drehachse von Plattenteilen oder schräg zu der eingelegten Bewehrung verlaufen, können vektoriell aus den Komponenten in x- und y-Richtung addiert werden. Auf diese Weise läßt sich eine beliebige orthotrope, selbst schrägliegende Bewehrung berücksichtigen. Vereinfachend wird in diesem Beispiel jedoch gleicher Bewehrungsgrad in beiden Richtungen angenommen.



Aus  $m_x = m_y = m$  folgt:

$$\sqrt{(m_x \cdot x)^2 + (m_y \cdot y)^2} = \sqrt{m_x^2 \cdot (x^2 + y^2)} = \sqrt{m_x^2 \cdot s^2} = m \cdot s$$

2.5.5.3.2 Ausgangswerte

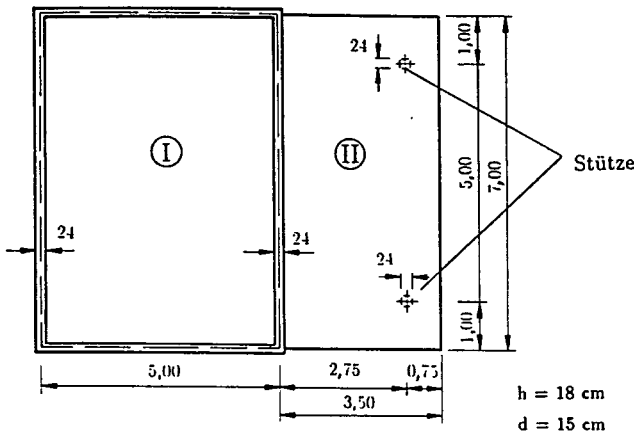


Bild 2.22: Plattengeometrie

Belastung:

Eigengewicht:

$$G_k = 5,5 \text{ kN/m}^2$$

Verkehrslast:

$$Q_k = 7,0 \text{ kN/m}^2$$

$$q_d = \gamma_G \cdot G_k + \gamma_Q \cdot Q_k = 1,35 \cdot 5,5 + 1,5 \cdot 7,0 = 17,93 \text{ kN/m}^2$$

Baustoffe:

- Beton C 30/37:  $f_{ck} = 30 \text{ N/mm}^2$   
 $f_{cd} = 20 \text{ N/mm}^2$
- Baustahl S 500:  $f_{yk} = 500 \text{ N/mm}^2$   
 $f_{yd} = 435 \text{ N/mm}^2$

2.5.5.3.3 Schnittgrößenermittlung für Plattenteil I

Zunächst wird anhand des aus der Literatur entnommenen Bruchlinienschemas (Bild 2.23) mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingungen für die einzelnen Plattenteile das erforderliche Fließmoment ermittelt. Das negative Moment über der Stütze wird willkürlich zum 1,5fachen des Feldmoments gewählt. Eine Kontrolle erfolgt durch die Arbeitsgleichung.

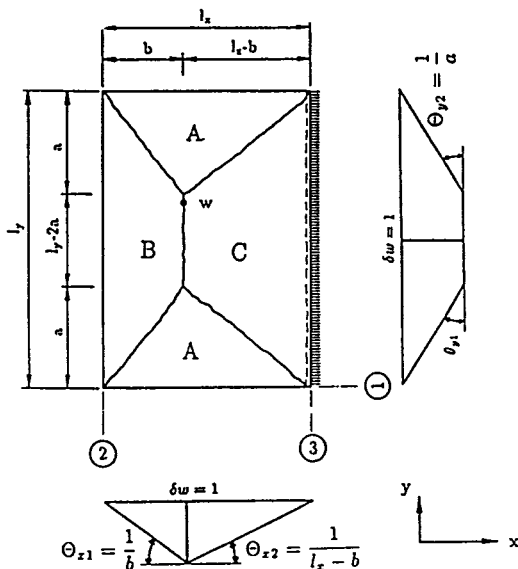


Bild 2.23: Bruchlinienschema am Plattenteil I

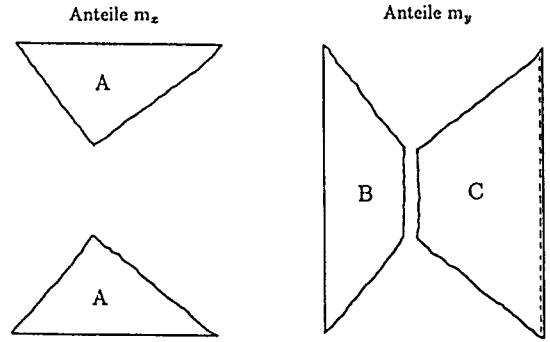


Bild 2.24: Aufteilung der Flächen bzw. Momente entlang der Bruchlinien in x- und y-Richtung

Der erste Versuch wird mit den Werten für  $a = 2,50 \text{ m}$  und  $b = 1,80 \text{ m}$  durchgeführt ( $m_1 =$  Fließmoment für Plattenteil I).

– Momentengleichgewicht an Teil A um Achse 1

$$\begin{aligned} \Sigma M_{1-1} &\stackrel{!}{=} 0 \\ 5,0 \cdot m_1 &= 5,0 \cdot 2,50^2 \cdot 1/6 \cdot q \\ m_1 &= 1,04 \cdot q \end{aligned}$$

– Momentengleichgewicht an Teil B um Achse 2

$$\begin{aligned} \Sigma M_{2-2} &\stackrel{!}{=} 0 \\ 7,0 \cdot m_1 &= (2,0 \cdot 1,8^2/2 + 2 \cdot 2,5 \cdot 1,8^2/6) \cdot q \\ m_1 &= 0,85 \cdot q \end{aligned}$$

– Momentengleichgewicht an Teil C um Achse 3

$$\begin{aligned} \Sigma M_{3-3} &\stackrel{!}{=} 0 \\ (1 + 1,5) \cdot 7,0 \cdot m_1 &= (2,0 \cdot 3,2^2/2 + 2 \cdot 2,5 \cdot 3,2^2/6) \cdot q \\ 17,5 \cdot m_1 &= (10,24 + 8,53) \cdot q \\ m_1 &= 1,07 \cdot q \end{aligned}$$

– Arbeitsgleichung ( $\delta_w = 1$ )

$$\begin{aligned} \delta W_1 &= \delta W_a \\ \left( 2 \cdot \frac{5,0}{2,5} + \frac{(1 + 1,5) \cdot 7,0}{3,2} + \frac{7,0}{1,8} \right) \cdot m_1 &= \\ &= (2 \cdot 2,5 \cdot 5,0/3 + 2,0 \cdot 5,0/2) \cdot q \\ 13,36 \cdot m_1 &= (8,33 + 5,0) \cdot q \\ m_1 &= 0,998 \cdot q \end{aligned}$$

Im zweiten Versuch wird nun der Wert  $a$  auf  $a = 2,45 \text{ m}$  verkleinert und derjenige für  $b$  auf  $b = 1,93 \text{ m}$  vergrößert, entsprechend ergibt sich:

$$\begin{aligned} \Sigma M_{1-1} &\stackrel{!}{=} 0: m_1 = 1,00 \cdot q \\ \Sigma M_{2-2} &\stackrel{!}{=} 0: m_1 = 0,99 \cdot q \\ \Sigma M_{3-3} &\stackrel{!}{=} 0: m_1 = 1,00 \cdot q \\ \delta W_1 &= \delta W_a: m_1 = 1,00 \cdot q \end{aligned}$$

Somit ist das Feld in beide Richtungen für ein Moment von  $m_1 = 1,0 \cdot 17,93 = 17,93 \text{ kNm/m}$  zu bemessen. Das Moment über der Stütze beträgt  $m' = -1,5 \cdot 17,93 = -26,90 \text{ kNm/m}$ .

2.5.5.3.4 Schnittgrößenermittlung für Plattenteil II

Das Fließmoment im Feld soll so bestimmt werden, daß sich die gleiche Traglast wie in Teil I ergibt. Auch hier wird gleiche Bewehrung in x- und y-Richtung angenommen, so daß die Größe des Fließmoments richtungsunabhängig wird.



Das Stützmoment entlang Achse 3 ist durch die Wahl im Plattenteil I festgelegt. Die Rotationsachse, d. h. die Durchsenknulllinie von Teil A, verläuft durch die Stütze, die genaue Richtung muß jedoch iterativ durch die Wahl der Achsabstände  $a$  und  $b$  bestimmt werden. Im vorliegenden Beispiel ergibt sich so das dargestellte Bruchlinienbild.

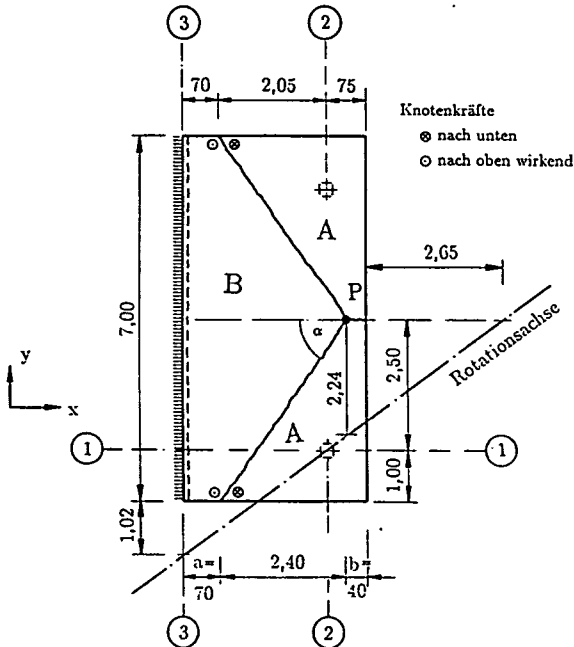


Bild 2.25: Bruchlinienschema am Plattenteil II

Am nicht rechtwinkligen Schnitt einer Bruchlinie mit dem freien Rand ist für die Gleichgewichtsbetrachtung die Berücksichtigung von sog. Knotenkräften notwendig. Eine ausführliche Herleitung dieser Knotenkräfte  $Q$  findet sich in [13] oder in [14].

$$Q = m_{II} \cdot \cotan \alpha = 2,40/3,50 \cdot m_{II} = 0,69 \cdot m_{II}$$

Im spitzen Winkel ist diese Kraft nach unten und im stumpfen Winkel nach oben gerichtet. Für die Arbeitsgleichung spielen diese Kräfte keine Rolle, da sie paarweise mit unterschiedlichen Vorzeichen auftreten und somit in einem Knoten gilt:

$$\sum Q_i = 0$$

Da für Teil A die Lage der Rotationsachse nicht eindeutig definiert ist, werden an diesem Teil die Gleichgewichtsbedingungen sowohl um Achse 1 als auch um Achse 2 ermittelt:

– Momentengleichgewicht an Teil A um Achse 1

$$\sum M_{1-1} \stackrel{!}{=} 0$$

$$(2,8 + 0,69 \cdot 1,0) \cdot m_{II} = (3,5 \cdot 2,40 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,17 + 3,5 \cdot 0,4 \cdot 0,75) \cdot q$$

$$3,49 \cdot m_{II} = 1,76 \cdot q$$

$$m_{II} = 0,51 \cdot q$$

– Momentengleichgewicht an Teil A um Achse 2

$$\sum M_{2-2} \stackrel{!}{=} 0$$

$$(3,5 - 0,69 \cdot 2,05) \cdot m_{II} = (3,5 \cdot 2,40 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,45 - 3,5 \cdot 0,4 \cdot 0,55) \cdot q$$

$$2,09 \cdot m_{II} = 1,12 \cdot q$$

$$m_{II} = 0,54 \cdot q$$

– Momentengleichgewicht an Teil B um Achse 3

$$\sum M_{3-3} \stackrel{!}{=} 0$$

$$(7,0 + 2 \cdot 0,69 \cdot 0,7) \cdot m_{II} = (-1,5 \cdot 7,0 + 0,7^2 \cdot 7,0 \cdot \frac{1}{2} + 2,4 \cdot 7,0 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1,5) \cdot q$$

$$7,97 \cdot m_{II} = 3,82 \cdot q$$

$$m_{II} = 0,48 \cdot q$$

– Arbeitsgleichung (PVV,  $\delta_p = 1$ )

$$\delta W_i = \delta W_a$$

$$\left( \frac{7,0}{3,10} + 2 \cdot \frac{2,8}{2,24} + 2 \cdot \frac{3,5}{3,05} \right) \cdot m_{II}$$

$$= (2 \cdot 1,12/3,05 + 2 \cdot 1,764/2,24 + 3,815/3,10) \cdot q$$

$$7,05 \cdot m_{II} = 3,54 \cdot q$$

$$m_{II} = 0,50 \cdot q$$

Im Folgenden wird mit ausreichender Genauigkeit für das Moment  $m_{II}$  der Wert  $0,51 \cdot q$  verwendet.

### 2.5.5.3.5 Bemessung

Die Ermittlung der notwendigen Bewehrung erfolgt nach Tafel 2a (siehe Beitrag von GRASSER/FEIX in diesem Heft).

– Feld Platte I

$$m_{Sd} = m_{I,x} = m_{I,y} = 1,0 \cdot 17,93 = 17,93 \text{ kNm/m}$$

$$\mu_{Sd} = \frac{17,93 \cdot 10^{-3}}{0,15^2 \cdot 1,0 \cdot 20} = 0,040$$

$$\omega = 0,0412$$

$$A_s = 0,0412 \cdot 100 \cdot 15 \cdot 20 / 434,8 = 2,84 \text{ cm}^2/\text{m}$$

gewählt: Matte Q 377,  $A_s = 3,77 \text{ cm}^2/\text{m}$

– Stütze

$$m_{Sd} = -1,5 \cdot 17,93 = -26,90 \text{ kNm/m}$$

$$\mu_{Sd} = \frac{26,90 \cdot 10^{-3}}{0,15^2 \cdot 1,0 \cdot 20} = 0,060$$

$$\xi = x/d = 0,103 \leq \text{zul } x/d = 0,25$$

$$\omega = 0,0625$$

$$A_s = 0,0625 \cdot 100 \cdot 15 \cdot 20 / 434,8 = 4,31 \text{ cm}^2/\text{m}$$

gewählt: Matte R 589,  $A_s = 5,89 \text{ cm}^2/\text{m}$

– Feld Platte II

$$m_{Sd} = m_{II,x} = m_{II,y} = 0,51 \cdot 17,93 = 9,14 \text{ kNm/m}$$

$$\mu_{Sd} = \frac{9,14 \cdot 10^{-3}}{0,15^2 \cdot 1,0 \cdot 20} = 0,020$$

$$\omega = 0,0204$$

$$A_s = 0,0204 \cdot 100 \cdot 15 \cdot 20 / 434,8 = 1,41 \text{ cm}^2/\text{m}$$

gewählt: Matte Q 221,  $A_s = 2,21 \text{ cm}^2/\text{m}$

Anmerkung: Eine Wippenbildung in den Ecken von Plattenteil I blieb unter der Voraussetzung ausreichender oberer Bewehrung unberücksichtigt (vgl. die einschlägige Literatur). Negative Momente über den Stützen aus der Kragplatte können mit dieser Methode nicht ermittelt werden und sind gesondert zu bestimmen.

Gemäß Richtlinie des DAfStb zur Anwendung von EC 2, Ausgabe November 1991, Tabelle R2, sind Betonstahlmatten in Deutschland in die Duktilitätsklasse „normale Duktilität“ einzustufen. D. h. nach EC 2, Abschnitt 2.5.3.5.5 (3), ist ein genauerer Nachweis des Rotationsvermögens notwendig. Da dies mit einfachen Mitteln nicht möglich ist, kann die Mattenbewehrung durch eine entsprechende Menge Stabstahl ersetzt werden.

Ergänzend wurde der Nachweis unter Gebrauchsbedingungen mit Hilfe eines FE-Programmes geführt, dieser ist jedoch im vorliegenden Beispiel nicht maßgebend.

#### Literatur

- [1] Litzner, H.-U.: Grundlagen der Bemessung nach EC 2 - Vergleich mit DIN 1045 und DIN 4227; Betonkalender 1992, Teil II, Seite 281-448
- [2] Hillerborg, A.: Dimensionering av armerade betongplattor enligt strimlemetoden; Stockholm, Alquist O Wiksell, 1974
- [3] Nielsen, M. P.: The theory of plasticity for reinforced concrete slabs; IVBH-Kolloquium Kopenhagen 1979, Einführungsbericht, Seite 93 bis 114. Berichte der IVBH-Arbeitskommission, Band 28, Zürich 1979
- [4] Schlaich, J.; Schäfer, K.: Konstruieren im Stahlbetonbau; Betonkalender 1989, Teil II, Seiten 563 bis 715
- [5] Kreller, H.: Zum nichtlinearen Trag- und Verformungsverhalten von Stahlbetontragwerken unter Last und Zwangseinwirkung; Dissertation, Universität Stuttgart, Stuttgart 1989
- [6] Macchi, G.: Ductility conditions for simplified design without check of compatibility; CEB-Bulletin d'Information No. 105, Februar 1976
- [7] Langer, P.: Verdrehfähigkeit plastizierter Tragwerksbereiche im Stahlbetonbau; Dissertation, Universität Stuttgart, Stuttgart 1987
- [8] Baker, A. L. L.; Guyon, Y.; Macchi, G.: Rapport de la Commission C.E.B. „Hyperstatique“; CEB-Bulletin d'Information No. 30, 1961
- [9] Kupfer, H. B.: Auswirkung der begrenzten Plastizität im Betonbau; Bauingenieur 61 (1986) Seite 155 bis 160
- [10] Eligehausen, R.; Fabritius, E.: Erforderliches Dehnvermögen von Bewehrungsstäben bei Anwendung der Plastizitätstheorie; Institut für Werkstoffe im Bauwesen, Universität Stuttgart; Schlußbericht zum Forschungsauftrag V 254 des Deutschen Ausschusses für Stahlbeton, 1992
- [11] CEB: Euro-Internationales Beton-Komitee (CEB): CEB-FIP Model Code 1990. Final - Draft. CEB-Bulletins d'Information No. 203 bis 205, Lausanne März 1990
- [12] Thürlimann, B.: Plastizitätstheorie im Stahlbetonbau; Skriptum - Vorlesung am Institut f. Massivbau, Stuttgart, 1985
- [13] Thürlimann, B.; Marti, P.; Pralong; Zimmerli, B.: Anwendung der Plastizitätstheorie auf Stahlbeton; Institut für Baustatik und Konstruktion; ETH – Zürich, 1983
- [14] Sobotka, Z.: Theory of Plasticity and Limit Design of Plates, Czechoslovak Academy of Science, Prague 1989
- [15] Johansen, K.-W.: Yield-line Theory, William Clowes & Sons, Limited, London 1962
- [16] Haase, H.: Bruchlinientheorie von Platten, Grundlagen und Anwendungen, Werner Verlag Düsseldorf, 1962
- [17] Eibl, J.; Stempniewski, L.: Fragen zum Nachweis der Trag-sicherheit bei Berücksichtigung nichtlinearer Stoffgesetze. Tagung 'Sicherheit von Bauwerken – Günter Breitschaft Symposium', Eigenverlag des IfBt, Berlin, März, 1989
- [18] Eibl, J.: Safety Considerations for Nonlinear Analysis; IVBH-Colloquium Report „Structural Concrete“; Stuttgart, 1991