

Grundlagen der Grundwasserströmung

Klaus Zipfel und Helmut Kobus

2.1 Einführung

Das vorliegende Kapitel soll einen kurzen Überblick über die hydraulischen Grundlagen geben, auf denen Grundwassermodelle aufgebaut sind. Dabei werden nur die wichtigsten Zusammenhänge aufgezeigt, die für das Verständnis der nachfolgenden Kapitel unbedingt erforderlich sind, und es wird im Hinblick auf den hier gesteckten Rahmen auf eine eingehende Darstellung verzichtet. Für weitergehende Ausführungen sei auf die einschlägigen Textbücher (siehe Literaturangaben) verwiesen.

Als «Sickerbewegung» wird ganz allgemein die Fortbewegung eines Fluids (Flüssigkeit oder Gas) in einem «porösen Medium» bezeichnet. Poröse Medien sind Körper, die aus festen Bestandteilen und aus Hohlräumen in der Art aufgebaut sind, daß zumindest ein Teil der Hohlräume (Poren) miteinander und durchgehend verbunden ist, so daß eine Durchströmung erfolgen kann.

Innerhalb des Porenraums können sich gleichzeitig verschiedene Fluide (z.B. Luft, Wasser und Öl) befinden, so daß im allgemeinen Fall Mehrphasenströmungen auftreten können. Ein Beispiel hierfür ist die Einsickerung von Niederschlagswasser in den Untergrund, bei der die Poren teils mit Sickerwasser, teils mit Luft gefüllt sind. In einer solchen Strömung können Kraft- und Druckwirkungen nicht direkt zwischen den einzelnen, getrennt strömenden Wasserteilmen gen übertragen werden. Solche Verhältnisse treten im nichtgesättigten Porenraum auf. Im Gegensatz hierzu steht der sogenannte gesättigte Porenraum, in dem der gesamte verfügbare Hohlraum vollständig mit Wasser ausgefüllt ist. Hier kann der Druck innerhalb des geschlossenen Flüssigkeitsvolumens direkt übertragen werden.

Als Grundwasserströmung wird definitionsgemäß eine Strömung im gesättigten Porenraum bezeichnet. Grundwasserströmungen erfolgen generell unter dem Einfluß der Schwerkraft, deren Wirkung zum Teil direkt für die Form der Ränder des wassergefüllten Porenbereichs (z.B. bei einer freien Oberfläche) maßgebend ist und die stets direkt oder indirekt die treibende Kraft für das Strömungsfeld darstellt. Im folgenden werden ausschließlich Grundwasserströmungen in dem hiermit abgegrenzten Sinn behandelt.

2.2 Der Boden als Strömungsträger

Bei Grundwasserströmungen tritt als Strömungsträger stets der natürliche Untergrund (Boden) auf, so daß dieser mit seinen Eigenschaften als poröses Medium beschrieben werden muß. Sieht man von bindigen Böden ab, weil sie als Träger einer Grundwasserströmung nur begrenzt in Frage kommen, dann lassen sich nichtbindige Böden im allgemeinen als ein Gemisch aus Einzelkörnern verschiedener Formen und Größen darstellen, die in unterschiedlichen La-

gerungen und unterschiedlich dichten Anordnungen vorliegen. Infolge der Form und Größe der Bodenkörner sowie ihrer unterschiedlichen Mischung und Lagerung im Untergrund können örtlich sehr verschiedene Kombinationen von Festanteilen und Poren auftreten. Natürliche Böden lassen sich daher im Detail mathematisch nicht exakt beschreiben. Hingegen lassen sich eine Reihe von statistischen Angaben machen, mit deren Hilfe sich das Bodenmaterial in seinem Verhalten insgesamt erfassen läßt.

Die wichtigste Größe zur Beschreibung eines porösen Mediums ist die Porosität, welche als prozentualer Anteil des Porenvolumens am Gesamtvolumen definiert ist:

$$n \text{ (Porenanteil)} = \frac{\text{Porenvolumen}}{\text{Gesamtvolumen}} = \text{Porosität}$$

Des weiteren ist für die Durchströmungscharakteristik wesentlich, aus welchen Einzelteilen sich das Porenvolumen zusammensetzt. Aufschluß darüber, ob der Boden sehr feinporig oder entsprechend grobporig ist, gibt die spezifische innere Oberfläche, die als das Verhältnis der inneren Oberfläche zum Porenvolumen definiert ist:

$$\text{spezifisch innere Oberfläche} = \frac{\text{innere Oberfläche}}{\text{Porenvolumen}}$$

Diese Größe charakterisiert die relative Bedeutung des Wandreibungseinflusses auf die Fortbewegung des Wassers im Boden; ihr Kehrwert ist somit in etwa dem hydraulischen Radius bei Rohr- und Gerinne-strömungen vergleichbar. So wesentlich dieser Parameter für die Grundwasserströmung ist, so schwer ist er allerdings in der Natur zu bestimmen. Im allgemeinen kann er nur aus Strömungsmessungen indirekt ermittelt werden, was in vielen Fällen unbefriedigend bleiben muß.

In der Natur wird nur ein bestimmter Teil des Porenraums tatsächlich durchströmt, während im Restanteil, der bei feinkörnigen oder festgelagerten Böden sehr hoch sein kann, keine oder nur eine sehr verzögerte Strömung stattfindet. In praktischen Fällen ist daher eine verminderte, sogenannte «effektive Porosität» des Bodens maßgebend. Sie ist im wesentlichen von der Kornform und der Korngrößenzusammensetzung abhängig.

Aus den bisherigen Ausführungen ist ersichtlich, daß allein aus der Kornanalyse einer Bodenprobe oder aus einer geologischen Ansprache des Bodenguts einer Bohrung im allgemeinen keine ausreichende und eindeutige Aussage über den für den Grundwasserströmungsvorgang maßgebenden inneren Bodenaufbau und die hydraulischen Eigenschaften des Untergrundes gemacht werden kann.

Stellt man sich den Boden als Zusammensetzung aus Körnern und Porenraum vor, welche beide von Ort zu Ort in Größe und Form verschieden sind, so er-

gibt sich der mögliche Weg eines durch den Boden hindurchfließenden Wasserteilchens als eine in allen Richtungen gekrümmte, ungleichmäßig verlaufende Linie (Bild 2.1). Die Strombahnen verschiedener Flüssigkeitsteilchen verlaufen dabei teilweise getrennt voneinander in unterschiedlichen Richtungen, teilweise parallel zueinander und teilweise miteinander verbunden. Außerdem ändert sich der durchflossene Querschnitt längs des Fließwegs häufig und abrupt. Eine Grundwasserströmung ist daher weder eine Kontinuumsströmung im engeren Sinn noch das Durchströmen eines Röhrensystems. Maßgebendes Kriterium für die Ausbildung der Strömung ist die Möglichkeit einer Druckfortpflanzung im gesamten Strömungsraum. Demgemäß kann die Strömung makroskopisch beschrieben werden, ohne hierbei die örtlichen Details des tatsächlichen Vorganges zu erfassen.

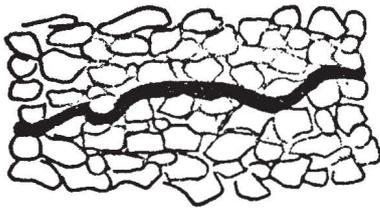


Bild 2.1 Bahn eines Wasserpartikels im Boden

Zur analytischen Beschreibung der Strömung in einem porösen Medium muß diese in eine Ersatzform eingepaßt werden, deren Randbedingungen angegeben werden können. Es gibt eine große Anzahl solcher Modellkonzeptionen zur physikalischen Beschreibung des Grundwasserströmungsvorganges, die sich mehr oder weniger gut bewährt haben, jedoch stets drastische Vernachlässigungen gegenüber den tatsächlichen Strömungsverhältnissen enthalten. Zahlreiche Modelle gehen von der Konzeption eines Röhrensystems aus, welches das poröse Medium simuliert. Im allgemeinen wird ein System von parallelen Röhren mit gleichem oder unterschiedlichem Querschnitt betrachtet, wobei Querschnittsveränderungen längs der Röhren zugelassen sind. Zum Teil werden auch Verzweigungen der Röhrenbündel untereinander eingeführt. Auch Kozenys theoretische Arbeiten (Kozeny, 1931), in denen ein wirksamer hydraulischer Radius als maßgebender Parameter für die Strömung in einem porösen Medium eingeführt wird, basieren auf einem solchen Röhrenmodell. Eine andere Gruppe von Modellvorstellungen geht von der Durchströmung eines Kugelhaufens aus, wobei als Grundelement die Umströmung einer Kugel in einem seitlich unbegrenzten Medium bei sehr kleinen Strömungsgeschwindigkeiten (Reynoldszahlen kleiner 1, Stokes'sches Gesetz für schleichende Bewegung) herangezogen wird. Man kann sich vereinfacht die Strömung in einem porösen Medium, das als Kornschüttung aufgebaut ist, als eine Vervielfachung solcher Kugelumströmungen (mit entsprechenden Wechselwirkungen) vorstellen, so daß bei dieser Konzeption das poröse Medium nicht als Strömungsberandung betrachtet wird, sondern als eine Vielzahl von umströmten Einzelkörpern, deren Einzelwiderstände im Innern des Strömungsbereichs sich zum

Gesamtwiderstand des porösen Mediums aufaddieren.

Im folgenden soll auf derartige Modellbeschreibungen des porösen Mediums nicht näher eingegangen werden, da sie zwar zum Verständnis der Strömungsvorgänge beitragen, jedoch bei der Formulierung der dargestellten makroskopischen Beziehungen nicht in Ansatz gebracht werden.

2.3 Beschreibung der Grundwasserströmung

Für Grundwasserströmungen lassen sich die elementaren Gesetzmäßigkeiten der Hydromechanik in Ansatz bringen. Dies sind im einzelnen:

1. Die Zustandsgleichung des Fluids, welche die Dichte ρ in Abhängigkeit vom Druck p und der Temperatur T beschreibt:

$$F(\rho; p; T) = 0 \quad (2.1)$$

2. Das Gesetz von der Erhaltung der Masse muß erfüllt sein; die Strömung muß also stets die Kontinuitätsbedingung erfüllen, welche für den Geschwindigkeitsvektor \vec{v} mit den Komponenten v_x , v_y und v_z in kartesischen Koordinaten in allgemeiner Form lautet:

$$\frac{\delta \rho}{\delta t} + \frac{\delta(\rho v_x)}{\delta x} + \frac{\delta(\rho v_y)}{\delta y} + \frac{\delta(\rho v_z)}{\delta z} = 0 \quad (2.2)$$

- 3.–5. Die Bewegungsgleichung der Grundwasserströmung, welche sich aus dem zweiten Newton'schen Gesetz ergeben, das den Zusammenhang zwischen der Beschleunigung eines Fluidpartikels nach Ort und Zeit und den jeweils wirksamen Kräften angibt. Die Bewegungsgleichungen für Fluidströmungen sind in allgemein gültiger Form als Navier-Stokes'sche Gleichungen bekannt. In einem kartesischen Koordinatensystem mit z-Richtung entgegen der Schwerkraft ergibt sich für jede der drei Raumkoordinaten jeweils eine Gleichung der Form

$$\frac{\delta v_x}{\delta t} + v_x \frac{\delta v_x}{\delta x} + v_y \frac{\delta v_x}{\delta y} + v_z \frac{\delta v_x}{\delta z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\delta p}{\delta x} + \nu \nabla^2 v_x \quad (2.3)$$

$$\frac{\delta v_y}{\delta t} + v_x \frac{\delta v_y}{\delta x} + v_y \frac{\delta v_y}{\delta y} + v_z \frac{\delta v_y}{\delta z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\delta p}{\delta y} + \nu \nabla^2 v_y \quad (2.4)$$

$$\frac{\delta v_z}{\delta t} + v_x \frac{\delta v_z}{\delta x} + v_y \frac{\delta v_z}{\delta y} + v_z \frac{\delta v_z}{\delta z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\delta p}{\delta z} + \nu \nabla^2 v_z \quad (2.5)$$

mit dem Operator

$$\nabla^2 = \frac{\delta^2}{\delta x^2} + \frac{\delta^2}{\delta y^2} + \frac{\delta^2}{\delta z^2} \quad (2.6)$$

wobei g die Erdbeschleunigung und ν die kinematische Viskosität ist. Mit den Gleichungen (2.1) bis (2.5) steht somit ein Gleichungssystem zur Beschreibung der fünf Unbekannten v_x , v_y , v_z (Geschwindigkeitskomponenten), des örtlichen Drucks p und der spezifischen Dichte ρ zur Verfügung, so daß für gegebene Anfangs- und Randbedingungen das Strömungsfeld hiermit vollständig beschrieben ist. Die (unüberwindliche) Schwierigkeit bei der Anwendung dieser theoretischen Beziehungen besteht jedoch in der Not-

wendigkeit, die Differentialgleichungen zur Lösung des jeweiligen Problemfalles zu integrieren. Dies erfordert eine Kenntnis des wirklichen Weges des Fluidpartikels im Porenraum und entsprechend auch detaillierte Angaben über den Porenaufbau. Solche Informationen sind im Fall der natürlichen Grundwasserströmung mit Sicherheit nicht verfügbar, so daß die Möglichkeit der vollständigen Beschreibung einer Fluidbewegung im Boden rein theoretischen Charakter annimmt. Man muß vielmehr vereinfachte Beschreibungsmöglichkeiten einführen, die trotzdem noch die Erscheinungsformen der Strömung makroskopisch richtig erfassen.

Bei der Behandlung von Grundwasserströmungen geht man davon aus, daß die Porengröße und Porenform über eine genügend große Ausschnittsfläche des betrachteten Bodens quer zur Strömungsrichtung oder über ein Ausschnittsvolumen im statistischen Sinne gleichmäßig verteilt sind. Die Grundwasserströmung wird nun als fiktive Strömung betrachtet, die sich über den gesamten Strömungsquerschnitt ausdehnt. Diese fiktive Strömung wird einem fiktiven porösen Medium überlagert, das allenfalls als Kontinuum gleichmäßig über den gesamten Querschnitt verteilt ist. Aus dieser Betrachtungsweise läßt sich eine fiktive Geschwindigkeit nach Größe und Richtung definieren, die mit der tatsächlich im Boden auftretenden Geschwindigkeit nicht übereinstimmt. Diese sogenannte Filtergeschwindigkeit ist definiert als der Quotient des Durchflusses Q und des gesamten durchströmten Querschnitts (Festanteil und Poren):

$$\text{Filtergeschwindigkeit } v_f = Q / F_{(p+f)} \quad (2.7)$$

Darin bedeutet Q den Durchfluß durch den Betrachtungsquerschnitt des porösen Mediums und F_f und F_p den Feststoff- bzw. Porenanteil der Querschnittsfläche. Die bildliche Darstellung zu dieser und den folgenden Geschwindigkeitsdefinitionen ist in Bild 2.2 gegeben.

Die Filtergeschwindigkeit v_f ist mit Sicherheit stets kleiner als die wirkliche Strömungsgeschwindigkeit durch einen Querschnitt des porösen Mediums, da bei der Definition von v_f die Verbauung des durchströmten Querschnitts durch den Strömungsträger außer acht gelassen wurde.

Aus der statistischen Verteilung von Porengröße und Porenform über den Querschnitt kann gefolgert werden, daß sich auch der Widerstand infolge der Umströmung der Feststoffanteile entsprechend kontinuierlich bzw. gleichmäßig über den gesamten Bereich verteilt. Damit kann dieser Widerstand als überall wirksamer Einfluß des porösen Mediums auf die Strömung im Vergleich zu einer Massenströmung gleichen Querschnitts betrachtet werden. Der Widerstand wird somit zu einer äußeren Kraft (Volumenkraft) auf die Strömung. Der detaillierte Strömungsweg des einzelnen Fluidpartikels hat für die Beschreibung des Strömungsvorganges keine Bedeutung mehr, maßgebend ist nur noch die statistische Verteilung. Als Randbedingungen sind nicht mehr die örtlichen (punktweisen) Verhältnisse, sondern nur noch die geometrischen Formen der Außenränder des Betrachtungsbereiches maßgebend. Von diesen aus wird entsprechend dem statistischen Aufbau des porösen Mediums die Druckverteilung im Innern des Strömungsbereiches bestimmt.

Eine weitere Definitionsgröße ist die sogenannte Porengeschwindigkeit v_p , welche als Quotient des Durchflusses Q und der durchflossenen Querschnittsfläche (Porenanteil) definiert ist:

$$\text{Porengeschwindigkeit } v_p = Q / F_p \quad (2.8)$$

Sie stellt einen Mittelwert der wirklichen Querschnittsgeschwindigkeit dar, welcher größer oder kleiner als die jeweils örtlich auftretende Geschwindigkeitskomponente rechtwinklig zur betrachteten Schnittfläche sein kann. Weder Filter- noch Porengeschwindigkeit sind jedoch direkt meßbar.

Eine weitere fiktive Geschwindigkeit ist die sogenannte Abstandsgeschwindigkeit v_a . Sie ist der Quotient aus dem Abstand L zweier paralleler Strömungsquerschnitte, die in Strömungsrichtung hintereinander angeordnet sind und der effektiven Fließzeit t eines Fluidpartikels zwischen diesen beiden Schnitten:

$$\text{Abstandsgeschwindigkeit } v_a = L / t \quad (2.9)$$

Diese Geschwindigkeit kann beispielsweise durch eine Tracermessung ermittelt werden und ist in jedem Fall geringer als die wirkliche Bahngeschwindigkeit v_w des Fluidpartikels, da bei der Definition von v_a von

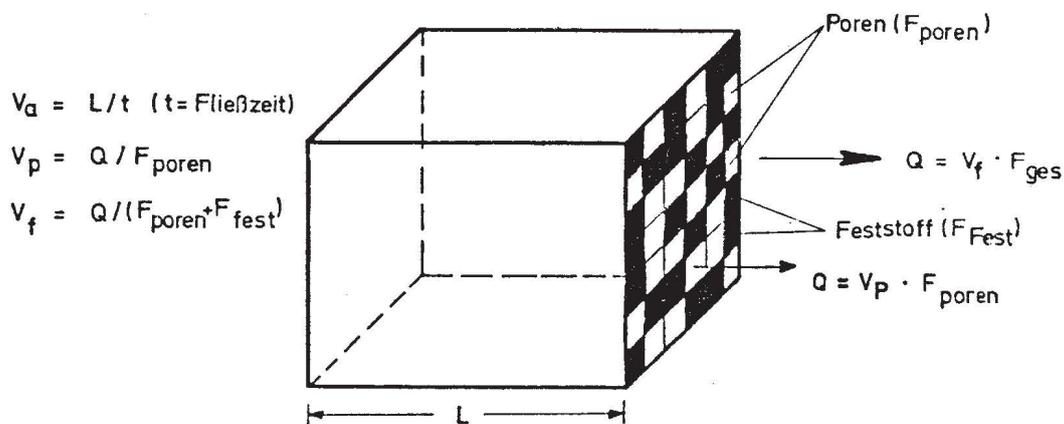


Bild 2.2 Schematische Darstellung eines porösen Mediums

einem geradlinigen Strömungsweg ausgegangen wird.

Der Zusammenhang der oben definierten Geschwindigkeiten mit der wirklichen Strömungsgeschwindigkeit v_w (Bahngeschwindigkeit) kann nicht angegeben werden, da die Bahngeschwindigkeit nicht direkt meßbar ist. Die Anwendbarkeit des Konzeptes der Filtergeschwindigkeit zur Beschreibung der Grundwasserströmung ist jedoch durch zahlreiche Untersuchungen belegt, deren erste der allgemein bekannte Darcy-Versuch darstellt. Er brachte bereits 1856 die empirische Entwicklung des Widerstandsgesetzes im Grundwasserströmungsvorgang auf der Basis des Filtergeschwindigkeitskonzeptes. Erst später wurde diese Beziehung theoretisch unterbaut durch eine Entwicklung des maßgebenden Kraft-Massen-Wirkungsgesetzes für die Filterströmung aufgrund eines Ansatzes der wirkenden Kräfte.

Bei Sickerströmungen wirken im allgemeinen Druck-, Trägheits-, Schwere-, Zähigkeits-, Haft- und Kapillarkräfte an der Oberfläche sowie Kräfte aus elastischer Verformung von Fluid und porösem Medium und thermische und elektrische Kräfte. Im Grundwasserbereich können nicht nur Haft- und Kapillarkräfte außer acht gelassen werden, sondern auch die meist unbedeutenden thermischen und elektrischen Einflüsse. Aufgrund der äußerst geringen Geschwindigkeitsänderungen können zudem Trägheitsreaktionen weitgehend ausgeschlossen werden. Läßt man außerdem Strömungen mit Dichteunterschieden (z.B. zufolge Salzgehalts- oder Temperaturunterschieden) außer Betracht, dann bleiben zur Aufstellung des Widerstandsgesetzes die Einflüsse aus Druck-, Schwere- und Zähigkeitskräften, die alle im vorliegenden Fall als Volumenkräfte in Ansatz gebracht werden können. Die noch zusätzlich zu berücksichti-

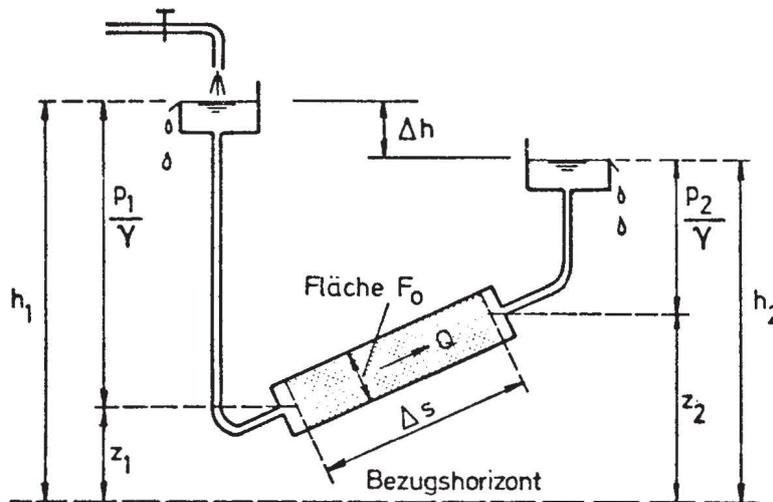


Bild 2.3 Versuchsanordnung nach Darcy

Die klassischen Experimente von Darcy wurden an einer Versuchsanordnung gemäß der Prinzipskizze in Bild 2.3 durchgeführt. Aus zahlreichen Messungen fand er eine Beziehung zwischen dem Durchfluß Q durch ein poröses Medium der Querschnittsfläche F_0 , der Länge Δs des durchströmten Filterkörpers und der Differenz Δh der Standrohrspiegelhöhen beiderseits des Filterkörpers. Die Standrohrspiegelhöhe h ist definiert zu

$$h = \frac{p}{\gamma} + z \quad (2.10)$$

wobei p der örtliche Druck, γ das spezifische Gewicht des Fluids und z die geodätische Höhe über einem Bezugshorizont ist. Sie stellt die Höhe des Wasserspiegels in einem Grundwasserpeilrohr über einem Bezugsniveau dar und ist nicht mit dem jeweiligen örtlichen Druck gleichzusetzen. Mit der Definition der Filtergeschwindigkeit v_f als Quotient aus dem Durchfluß Q und der Querschnittsfläche F_0 lautet die von Darcy ermittelte empirische Beziehung (Darcy-Gesetz)

$$\frac{Q}{F_0} = v_f = -k_f \frac{\Delta h}{\Delta s} = -k_f \frac{\delta h}{\delta s} \quad (2.11)$$

$k_f \left[\frac{m}{s} \right]$ = Durchlässigkeitsbeiwert (abhängig von Filtermedium und Fluid).

genden Auswirkungen elastischer Verformungen werden bei ihrem Auftreten im nichtstationären Fall als Faktor des zeitlichen Massenerhaltungsanteiles berücksichtigt.

2.4 Die Formulierung von Strömungsbeziehungen

2.4.1 Zustandsgleichung des Fluids. In Grundwasserleitern kann die Speicherung durch elastische Formänderung des Wassers und des Korngerüstes trotz der geringen Zusammendrückbarkeit des Wassers bei ausgedehnten Strömungsfeldern beträchtliche Mengen bringen. Die elastische Formänderung infolge Druck- bzw. Standrohrspiegeländerung läßt sich durch folgende Beziehung beschreiben:

$$\frac{\Delta \rho \cdot n}{\rho} = S_0 \cdot \Delta h \quad (2.12)$$

wobei n wiederum den Porenanteil und h die Standrohrspiegelhöhe bedeutet. Als Proportionalitätsfaktor tritt dabei die Größe $S_0 \left[m^{-1} \right]$ auf, der sogenannte «spezifische Speicherkoeffizient». Er gibt die Menge Wasser $[m^3]$ je Volumeneinheit $[m^3]$ an, die bei einer Standrohrspiegelhöhenänderung um eine Einheit $[m]$ frei bzw. gebunden wird. Die Größenordnung von

S_0 bei gespannten Grundwasserleitern liegt zwischen 10^{-3} und 10^{-5} [m^{-1}].

2.4.2 Kontinuitätsgleichung. Die Massenerhaltungsgleichung kann über eine Summierung aller durch die Ränder des betrachteten Volumenelements hindurchtretenden Durchflüsse hergeleitet werden; sie ist für den ebenen stationären Fall im Bild 2.4 entwickelt.

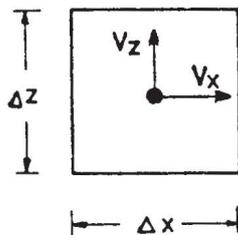
Hiermit lautet die Kontinuitätsbedingung

$$\frac{\delta v_{fx}}{\delta x} + \frac{\delta v_{fy}}{\delta y} + \frac{\delta v_{fz}}{\delta z} = -S_0 \frac{\delta h}{\delta t} \quad (2.16)$$

2.4.3 Die Bewegungsgleichung. Zur Herleitung der Bewegungsgleichung müssen die an einem Volumenelement angreifenden Kräfte zufolge Schwerkraft,

Stationärer Fall, (kartes. Koordinaten) vertikal ebene Strömung

Volumenelement der Breite $\Delta y = 1$



$$\sum q = 0 = (\rho \cdot v_x - \frac{1}{2} \frac{\partial(\rho \cdot v_x)}{\partial x} \Delta x) \Delta z - (\rho \cdot v_x + \frac{1}{2} \frac{\partial(\rho \cdot v_x)}{\partial x} \Delta x) \cdot \Delta z + (\rho \cdot v_z - \frac{1}{2} \frac{\partial(\rho \cdot v_z)}{\partial z} \Delta z) \Delta x - (\rho \cdot v_z + \frac{1}{2} \frac{\partial(\rho \cdot v_z)}{\partial z} \Delta z) \Delta x$$

$$\frac{\delta(\rho \cdot v_{fx})}{\delta x} + \frac{\delta(\rho \cdot v_{fz})}{\delta z} = 0$$

Bild 2.4 Massenerhaltungsbeziehung im Innern des Strömungsfeldes

Für den allgemeinen dreidimensionalen nichtstationären Strömungsfall ergibt sich in kartesischen Koordinaten:

$$\frac{\delta(\rho v_{fx})}{\delta x} + \frac{\delta(\rho v_{fy})}{\delta y} + \frac{\delta(\rho v_{fz})}{\delta z} = -\frac{\delta(\rho \cdot n)}{\delta t} \quad (2.13)$$

Wenn man voraussetzt, daß ρ keine Ortsfunktion ist, gilt

$$\frac{\delta v_{fx}}{\delta x} + \frac{\delta v_{fy}}{\delta y} + \frac{\delta v_{fz}}{\delta z} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\delta(\rho n)}{\delta t} \quad (2.14)$$

Die rechte Seite dieser Beziehung stellt den nichtstationären Anteil dar, welcher sich aus der Änderung der Fluidichte in der Zeit ergibt. Sie kommt infolge der elastischen Veränderungen bei der Änderung der wirksamen Drücke zustande und läßt sich unter Heranziehung der Zustandsgleichung ausdrücken zu

$$\frac{1}{\rho} \frac{\delta(\rho \cdot h)}{\delta t} = S_0 \frac{\delta h}{\delta t} \quad (2.15)$$

Druckunterschieden und innerer Reibung (Zähigkeit) ins Gleichgewicht gesetzt werden (Bild 2.5). Für die Reibungskräfte wird hierbei angesetzt, daß sie im laminaren Strömungsbereich der Filtergeschwindigkeit v_f proportional sind. In Analogie zum Stokes'schen Gesetz für die laminare Umströmung einer Kugel wird daher die Volumenkraft, welche die Zähigkeit der Sickerströmung entgegengesetzt, definiert zu

$$K = \left(\frac{1}{k_0}\right) \cdot \mu \cdot v_{fr} \cdot n \cdot \Delta r \cdot \Delta F_r \quad (2.17)$$

Hierbei ist die Proportionalitätskonstante ($1/k_0$) wegen des Ansatzens von K als Volumenkraft nicht dimensionslos. Der Parameter k_0 [m^2] wird als Permeabilität bezeichnet; seine Größe ist ausschließlich von den Eigenschaften des porösen Mediums abhängig und proportional dem Quadrat des jeweils wirksamen Korndurchmessers.

ausgeschnittenes Volumenelement für Gleichgewichtsansatz

wirkende Kräfte :

Schwerkraft : $\gamma \cdot n \cdot \Delta r \cdot \Delta F$

Druckkraft : $p \cdot n \cdot \Delta F$

Reibungskraft : $(\mu/k_0) v_{fr} \cdot n \cdot \Delta r \cdot \Delta F$
(als Volumenkraft)

Trägheitskraft : vernachlässigbar

Kraftgleichgewichtsansatz : $\sum P_r = 0$

r = beliebige Richtg.
 z = vertikale Richtg.
 n = Porenanteil
 k_0 = Permeabilität
 v_{fr} = Filtergeschwindigkeit in Richtung r
 p = Druck in der Querschnittsfläche
 μ = Zähigkeit

Bild 2.5 Gleichgewichtsansatz wirkender Kräfte

Für das in Bild 2.5 dargestellte Volumenelement der Seitenlänge Δr ergibt sich für die in einer beliebigen Richtung r angreifenden Schwere-, Druck- und Zähigkeitskräfte als Gleichgewichtsansatz

$$-\gamma \cdot n \cdot \Delta r \cdot \Delta F_r \cdot \frac{\delta z}{\delta r} + (p - p - \frac{\delta p}{\delta r} \Delta r) n \Delta F_r - \frac{\mu}{k_0} v_{fr} \cdot n \cdot \Delta r \cdot \Delta F_r = 0 \quad (2.18)$$

beziehungsweise

$$\gamma \cdot \frac{\delta z}{\delta r} + \frac{\delta p}{\delta r} + \frac{\mu}{k_0} v_{fr} = 0 \quad (2.19)$$

Die dynamische Widerstandsbeziehung für die Filtergeschwindigkeit lautet somit

$$v_{fr} = - \left(\frac{\gamma}{\mu} k_0 \right) \cdot \frac{\delta}{\delta r} \left(\frac{p}{\gamma} + z \right) = - k_f \frac{\delta h}{\delta r} \quad (2.20)$$

Es ergibt sich also aus dieser Herleitung wiederum das Darcy-Gesetz. Der Durchlässigkeitsbeiwert k_f ist demnach gegeben durch die Beziehung

$$k_f = \frac{\gamma}{\mu} k_0 \quad (2.21)$$

Dies verdeutlicht, daß die Durchlässigkeit k_f sowohl von den Eigenschaften des porösen Mediums (Permeabilität k_0) als auch vom spezifischen Gewicht γ und der Zähigkeit μ des Fluids abhängig ist. Dies bedingt eine Veränderung des Durchlässigkeitsbeiwerts k_f bei Strömungen verschiedenartiger Fluide oder bei Temperaturschwankungen im Untergrund, die oft fälschlicherweise als Änderungen der Eigenschaften des porösen Mediums selbst angesehen werden.

Die aufgestellte Bewegungsgleichung stellt ein lineares Widerstandsgesetz für die laminare Grundwasserbewegung dar. Der lineare Charakter des Widerstandsgesetzes von Darcy ist allerdings nur in einem begrenzten Bereich von Strömungsbedingungen gewährleistet. Darüber hinaus machen sich Trägheitseinflüsse stärker bemerkbar, die zu einer Abhängigkeit höherer Ordnung führen. Der Umschlag zu turbulenter Strömung, wie sie in sehr grobkörnigem Untergrund oder bei Klüftenströmung auftreten kann, erfolgt jedoch örtlich unterschiedlich und damit insgesamt sehr graduell und wesentlich allmählicher als bei der Massenströmung, da sich in den unterschiedlichen engen Porengängen ausgeprägt turbulente Bewegungen erst bei entsprechend hoher Energiezufuhr entwickeln können. Maßgebend für den Übergang vom laminaren zum turbulenten Strömungszustand ist das Überschreiten einer kritischen Reynolds'schen Zahl, welche definiert ist zu

$$Re = \frac{v \cdot d_w}{\nu} \quad (2.22)$$

mit ν als der kinematischen Zähigkeit des strömenden Fluids in $[m^2/s]$. Als Größe der kritischen Reynoldszahl für den Übergang von laminaren zu turbulenten Strömungsverhältnissen bei Grundwasserströmungen finden sich Literaturangaben, die zwischen Werten von 5 und 300 schwanken. In der weitaus überwiegenden Mehrzahl der praktisch auftretenden Grundwasserströmungen herrschen jedoch laminare Strömungsverhältnisse vor, so daß das lineare Darcy-Gesetz mit nur geringfügigen Ausnah-

men (unmittelbare Nähe von Brunnen, klüftige Felsgesteine, etc.) angesetzt werden kann. Für die in der Praxis typische Größenordnung von Filtergeschwindigkeiten (im Bereich von $10^{-3} - 10^{-5} m/s$) und maßgebende Korndurchmesser (im Bereich 10^{-2} bis $10^{-4} m$) liegen die typischen Reynoldszahlen der Grundwasserströmung im Bereich von 10^1 bis 10^{-3} .

2.4.4 Die Strömungsbeziehungen. Substituiert man die Darcy-Beziehung für die drei Geschwindigkeitskomponenten

$$v_{fx} = -k_f \frac{\delta h}{\delta x}; v_{fy} = -k_f \frac{\delta h}{\delta y}; v_{fz} = -k_f \frac{\delta h}{\delta z} \quad (2.23)$$

in die oben angegebene Kontinuitätsgleichung, dann erhält man folgende Beziehung

$$\frac{\delta^2 h}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 h}{\delta y^2} + \frac{\delta^2 h}{\delta z^2} = \frac{S_0}{k_f} \cdot \frac{\delta h}{\delta t} \quad (2.24)$$

Ein Grundwasserströmungsfeld läßt sich demnach ausschließlich durch die Verteilung der Feldgröße h beschreiben, aus welcher sich direkt die jeweiligen Geschwindigkeitskomponenten ableiten lassen. Die oben genannte Gleichung beschreibt die zeit- und ortsabhängige Verteilung dieser Feldgröße h . Die Behandlung von Grundwasserströmungen erfordert die Lösung dieser Differentialgleichung unter den jeweils vorgegebenen Rand- und Anfangsbedingungen. Eine generelle Lösung kann nicht angegeben werden, doch lassen sich für eine Vielzahl einfacher Randbedingungen geschlossene analytische Lösungen erarbeiten. Kompliziertere Strömungsfälle lassen sich mit Hilfe numerischer Methoden lösen, wie sie den in dieser Broschüre vorgestellten Grundwassermodellen zugrunde liegen.

Aus der oben angegebenen Gleichung für einen Punkt des Strömungsfeldes bzw. für ein dreidimensionales gespanntes Strömungsfeld lassen sich sehr einfach die Beziehungen für horizontal ebene Strömungsfelder herleiten. Für den Fall einer gespannten Grundwasserströmung der Mächtigkeit D des Grundwasserleiters gilt folgende Beziehung:

$$\frac{\delta^2 h}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 h}{\delta y^2} = \frac{S_0}{k_f} \frac{\delta h}{\delta t} = \frac{S}{T} \frac{\delta h}{\delta t} \quad (2.25)$$

Hierbei ist die Transmissivität T definiert als das Integral des Durchlässigkeitsbeiwerts k_f über die Mächtigkeit D zu

$$T = \int_0^D k_f dz = k_m \cdot D \quad [m^2/s] \quad (2.26)$$

und der Speicherkoeffizient S entsprechend zu

$$S = \int_0^D S_0 dz = S_{0m} \cdot D \quad [-] \quad (2.27)$$

Im Falle einer Grundwasserströmung mit freier Oberfläche ist eine Beschreibung des Strömungsvorganges durch eine einzige Feldgleichung (Massenerhaltungsgleichung) nicht mehr möglich. Die bisher abgeleiteten Beziehungen gelten zwar im Innern des Grundwasserbereiches, jedoch muß für den Randbereich der Oberfläche ein zusätzlicher Ansatz aufgestellt werden, der die besonderen Bedingungen dieses freien Randes berücksichtigt. In Bild 2.6 ist die

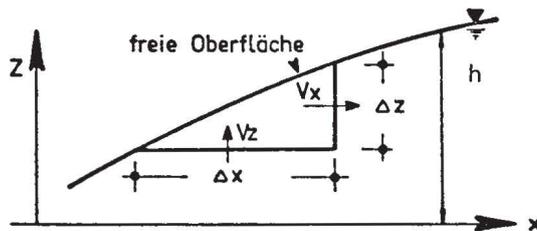
Massenerhaltungsbeziehung für ein solches Ausschnittelement für den stationären Fall entwickelt.

Bei dem allgemeineren, nichtstationären Strömungsvorgang steht auf der rechten Seite wiederum ein Ausdruck, der die zeitliche Veränderung des Volumens berücksichtigt. Diese Änderung erfolgt im Bereich der freien Oberfläche vor allem durch deren Lageänderung, wobei eine Füllung oder Entleerung von Porenraum auftritt. Der um Größenordnungen geringere Mengenanteil aus der Dichteänderung im Innern

Ausdehnungen aufweisen als über die Tiefe und in Fällen, wo die örtlichen und zeitlichen Veränderungen der Oberfläche eine Größenordnung kleiner bleiben als die Mächtigkeit des Grundwasserfeldes.

Die Strömungsbeziehungen nehmen eine besonders einfache Form an, wenn die Strömung einen weitgehend radialsymmetrischen Charakter aufweist. Das ist beispielsweise in der Nähe von Brunnenanlagen der Fall. Unter Einführung von Polarkoordinaten kann bei Beachtung der gegebenen Radialsym-

STATIONÄRE, VERTIKAL EBENE STRÖMUNG



$$\Sigma q = 0 :$$

$$\rho V_{fz} \Delta x - \rho V_{fx} \Delta z = 0$$

$$V_{fz} = V_{fx} \frac{\Delta z}{\Delta x}$$

$$\boxed{V_{fz} = V_{fx} \frac{dh}{dx}}$$

Bild 2.6 Massenerhaltungsbeziehung im Bereich der freien Oberfläche

des Flüssigkeitskörpers kann hier vernachlässigt werden. Mit n_0 als dem effektiv gefüllten oder entwässerten Porenanteil bei einer vertikalen Verschiebung in z-Richtung der Oberfläche um δh in der Zeit δt ergibt sich für den dreidimensionalen nichtstationären Strömungsfall folgende Beziehung im betrachteten Randbereich:

$$\left(\frac{\delta h}{\delta x}\right)^2 + \left(\frac{\delta h}{\delta y}\right)^2 + \frac{\delta h}{\delta z} = \frac{n_0}{k_f} \frac{\delta h}{\delta t} \quad (2.28)$$

Die Behandlung des Strömungsfalles mit freier Oberfläche über die Beziehungen für den Randbereich und für das Innere der Strömung ist sehr aufwendig und bei einer Reihe von Lösungsmethoden überhaupt nicht durchführbar. Entsprechend der oben angegebenen Beziehung für horizontale ebene Strömungen im gespannten Grundwasser kann in vielen Fällen mit genügender Genauigkeit auch eine zweidimensionale Näherungslösung des dreidimensionalen Strömungsfeldes mit freier Oberfläche verwendet werden. Dabei wird das Grundwasserfeld über die gesamte Tiefe von der Oberfläche bis zur Sohle strömungsmäßig als Einheit angesehen, indem die Standrohrspiegelhöhe h auf einer Vertikalen als konstant angesetzt wird. Diese vereinfachende Annahme geht ursprünglich auf Dupuit (1863) zurück. Sie wurde von Forchheimer (1914) erstmals auch zur näherungsweise Beschreibung des dreidimensionalen Strömungsfalles mit freier Oberfläche über horizontaler dichter Sohle angewandt. Gemäß Bild 2.7 ergibt sich dafür eine Beziehung der Form.

$$\frac{\delta^2 h^2}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 h^2}{\delta y^2} = \frac{n_0}{k_f} \frac{\delta h}{\delta t} \quad (2.29)$$

Die Anwendung dieser Näherung ist bei Strömungen möglich, die in der Horizontalen wesentlich weitere

metrie das Gleichungssystem zur Beschreibung des gespannten Strömungsvorganges auf eine eindimensionale Beziehung reduziert werden, welche folgendermaßen lautet:

$$\frac{\delta^2 h}{\delta r^2} + \frac{1}{r} \frac{\delta h}{\delta r} = \frac{S}{T} \frac{\delta h}{\delta t} \quad (2.30)$$

wobei r der Radialabstand vom Zuströmpunkt (Pol) ist. Eine entsprechende Beziehung läßt sich auch mit der Forchheimer-Annahme für den Fall mit freier Oberfläche aufstellen.

2.5 Die Grundwasserbewegung als Potentialströmung

Die spezielle Form der Grundbeziehung als lineare Differentialgleichung und das Darcy-Gesetz selbst geben Anlaß zur Einführung eines Potentialbegriffes in die Grundwasserströmung, wie er aus der allgemeinen Strömungsmechanik und aus zahlreichen anderen physikalischen Vorgängen bekannt ist. Hierbei wird ein Geschwindigkeitspotential Φ als Erzeugende der Strömung in der Form eingeführt, daß

$$\vec{v}_f = \text{grad } \Phi \quad (2.31)$$

Die besondere Form der vorliegenden dynamischen Beziehung mit dem linearen Zusammenhang zwischen der Filtergeschwindigkeit \vec{v}_f und der an gleicher Stelle auftretenden Standrohrspiegelhöhe h macht die Einführung des Potentialbegriffes bei der Grundwasserströmung definitionsgemäß besonders vorteilhaft, da ($\Phi = k_f \cdot h$) gelten muß, so daß der Feldwert Φ direkt ein Maß für die Standrohrspiegelhöhe abgibt. Das Geschwindigkeitspotential Φ kann von Ort und Zeit abhängig definiert werden, so daß die Potentialtheorie generell auf stationäre und nicht-

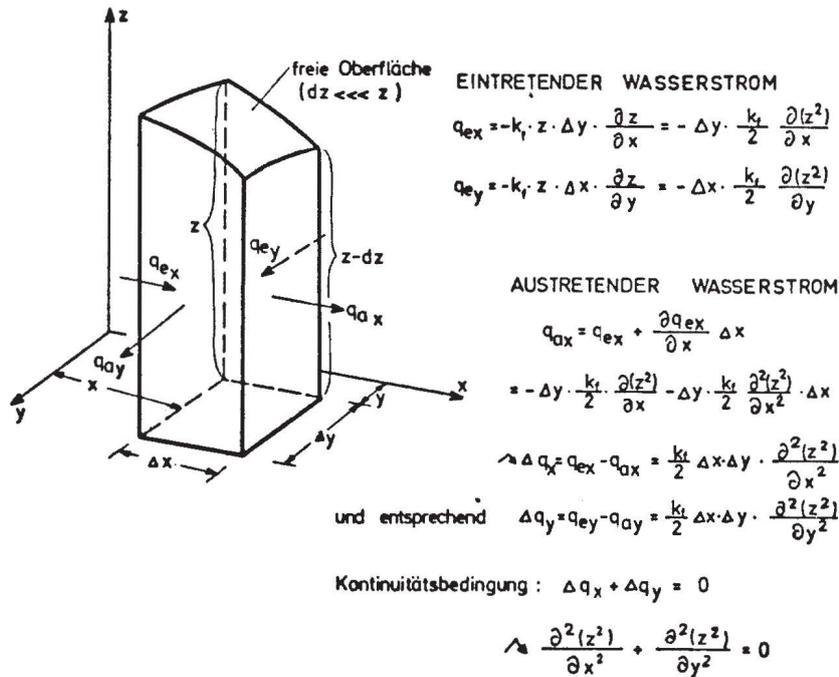


Bild 2.7 Horizontal-ebenes Strömungssystem mit freier Oberfläche (Dupuit-Forchheimer)

stationäre Strömungsfälle Anwendung finden kann. Aus der Beziehung

$$\frac{\delta^2 h}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 h}{\delta y^2} + \frac{\delta^2 h}{\delta z^2} - \frac{S_o}{k_f} \frac{\delta h}{\delta t} = 0 \quad (2.32)$$

ergibt sich mit der Definition des Potentials

$$\Phi = k_f \cdot h; \quad v_{fx} = \frac{\delta \Phi}{\delta x}; \quad v_{fy} = \frac{\delta \Phi}{\delta y}; \quad v_{fz} = \frac{\delta \Phi}{\delta z}$$

die Differentialgleichung

$$\frac{\delta^2 \Phi}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 \Phi}{\delta y^2} + \frac{\delta^2 \Phi}{\delta z^2} - \frac{S_o}{k_f} \frac{\delta \Phi}{\delta t} = 0 \quad (2.33)$$

Diese Beziehung gilt für alle Punkte des kontinuierlichen Strömungsfeldes mit Ausnahme von Singularpunkten (z. B. Quellen oder Senken), in denen die eingangs getroffenen Annahmen nicht zutreffen.

Die vorliegende Einführung soll der besseren Übersichtlichkeit wegen auf den stationären, horizontal ebenen Strömungsfall beschränkt werden. In diesem Fall entfällt die Variabilität der Potentialfunktion mit der Zeit und mit der Vertikalkoordinate z, und die oben angegebene Grundbeziehung reduziert sich zu

$$\frac{\delta^2 \Phi}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 \Phi}{\delta y^2} = 0 \quad (2.34)$$

Mit der Lösung dieser «Laplace'schen Differentialgleichung» befassen sich die mathematischen Verfahren der Potentialtheorie. Für den betrachteten ebenen Fall läßt sich eine zur Potentialfunktion Φ stets orthogonale Stromfunktion Ψ definieren, die entsprechend zu behandeln ist. Beide Funktionen Φ und Ψ stellen jeweils eine Schar von Kurven dar, die rechtwinklig zueinander verlaufen und somit ein Netz bilden (das sogenannte Potentialnetz), mit des-

sen Hilfe die örtlichen Geschwindigkeiten in einem Strömungsbereich nach Größe und Richtung angegeben werden können.

Eine wesentliche Voraussetzung für die Anwendbarkeit der Potentialtheorie ist die Forderung nach Wirbelfreiheit der Strömung. Dieser Nachweis kann hier jedoch unterbleiben, da die formale Bedingung für die Anwendung des Potentialbegriffes durch die besondere Form des Widerstandsgesetzes gegeben ist. Physikalisch hätte der Nachweis der Wirbelfreiheit keinen Sinn, da er sich nur auf die fiktive Filtergeschwindigkeit bezieht und bei der durch Zähigkeitskräfte hauptsächlich beeinflussten tatsächlichen Grundwasserströmung mit Sicherheit nicht erfüllt ist. Die Anwendbarkeit der Potentialtheorie auf Grundwasserströmungen ist somit allein auf das Darcy-Gesetz gegründet und auf den experimentellen Nachweis der Zulässigkeit des Konzeptes der Filterströmung anhand der Übereinstimmung von Rechnung und Versuch (Breitenöder, 1942). Die Einführung des Potentialbegriffes bringt den Vorteil mit sich, die umfangreichen mathematischen Hilfsmittel der Potentialtheorie auf die Behandlung von Grundwasserströmungsproblemen anwenden zu können.

In einem Potentialströmungsfeld gilt sowohl die Orthogonalität der beiden Tangentialvektoren $\text{grad } \Phi$ und $\text{grad } \Psi$ an die Kurvenscharen als auch die Bedingung $|\text{grad } \Phi| = |\text{grad } \Psi|$. Dies bedeutet, daß das Maß der Änderung der Potentialfunktion Φ an einer Stelle gleich dem der Änderung der Stromfunktion Ψ an der gleichen Stelle ist. Somit ergibt eine Netzdarstellung aus Linien gleichen Potentials des genügend kleinen Unterschieds $\Delta \Phi$ und aus entsprechenden Linien gleicher Stromfunktion mit dem Unterschied $\Delta \Psi = \Delta \Phi$ ein Netz aus verzerrten Quadraten.

Diese Tatsache gestattet die Behandlung von Potentialströmungen und im vorliegenden Fall der Grund-

wasserströmung auf graphischem Weg über eine Quadratnetzdarstellung. Aus der Netzdarstellung lassen sich die gesuchten Feldgrößen der örtlichen Filtergeschwindigkeit nach Größe und Richtung und die Höhe des Standrohrspiegels auf einfache Weise ermitteln. In vielen Fällen bringt der Einsatz konformer Abbildungen, die in der Anwendbarkeit der Funktionentheorie begründet sind, bei der Behandlung der Strömungsfelder wesentliche Vorteile. Allerdings kann die Methode konformer Abbildungen nur auf zweidimensionalen Strömungen angewandt werden, für die auch nur die mathematische Definition einer Stromfunktion möglich ist. Das Grundprinzip des Geschwindigkeitspotentials und der Orthogonalität von Strömungsrichtung und Potentialfläche bleibt aber auch bei räumlichen Strömungen erhalten.

Das Bild des Potentialnetzes im Strömungsfeld und damit die maßgebenden Feldwerte werden sowohl durch die geometrische Form der Ränder als auch durch die Art der Randbedingungen bestimmt. Für vorgegebene Randbedingungen liefert die Potentialtheorie stets nur eine einzige, eindeutige Lösung. Als erstes Anschauungsbeispiel kann hierzu Bild 2.8 dienen.

Man erkennt, daß bei Unterschieden in der Form der Gebietsränder auch die Potentialnetze im Feldinnern wesentlich verschieden sind. Obwohl jedes Potentialnetz aus einer Schar von rechtwinklig aufeinanderstehenden Kurven gebildet wird, die unter den oben

erwähnten Voraussetzungen krummlinig und bei unendlicher Verkleinerung exakte Quadrate ergeben, sind doch die Bilder dieser Netze und damit die Werte der maßgebenden Feldgrößen verschieden. Als maßgebende Feldgröße ist die örtliche Filtergeschwindigkeit an jedem Punkt nach Größe und Richtung anzusehen. Definitionsgemäß verläuft die Filtergeschwindigkeit an jedem Punkt des Feldes rechtwinklig zu den Linien gleichen Potentials (Potentiallinien, Grundwassergleichen) oder tangential zu den Stromlinien. Die Größe der Filtergeschwindigkeit drückt sich durch die Dichte des Netzes, d.h. durch den Abstand Δs von je zwei Potentiallinien in Strömungsrichtung aus, wenn der jeweilige Potentialhöhenunterschied $\Delta \phi$ konstant ist. Den Bereich zwischen je zwei benachbarten Stromlinien bezeichnet man als Stromröhre. Innerhalb einer Stromröhre fließt jeweils ein konstanter Anteil Δq des Gesamtdurchflusses, so daß eine Verengung der Stromröhren eine Beschleunigung und eine Erweiterung eine Verzögerung anzeigt. Die Größe des Stromröhrendurchflusses hängt wiederum von den Verhältnissen längs der Bereichsgrenzen (Randbedingungen) ab.

2.6 Randbedingungen

Bisher wurden die Verhältnisse im Innern eines beliebigen Potentialfeldes (Grundwasserströmungsfeldes) und ihre Beschreibung durch eine generelle Netzdarstellung erläutert. Um vom allgemeinen Fall

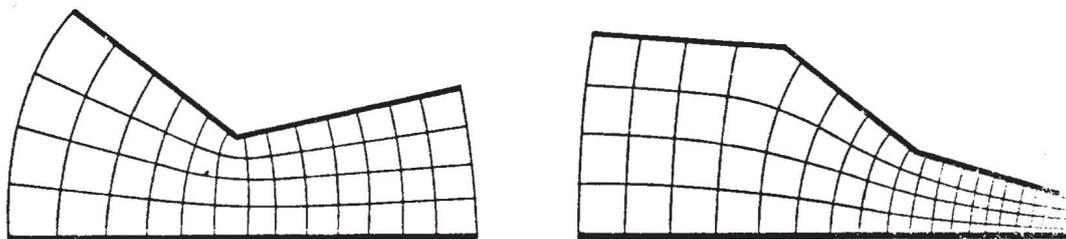


Bild 2.8 Potentialnetze in Strömungsfeldern unterschiedlicher Berandung

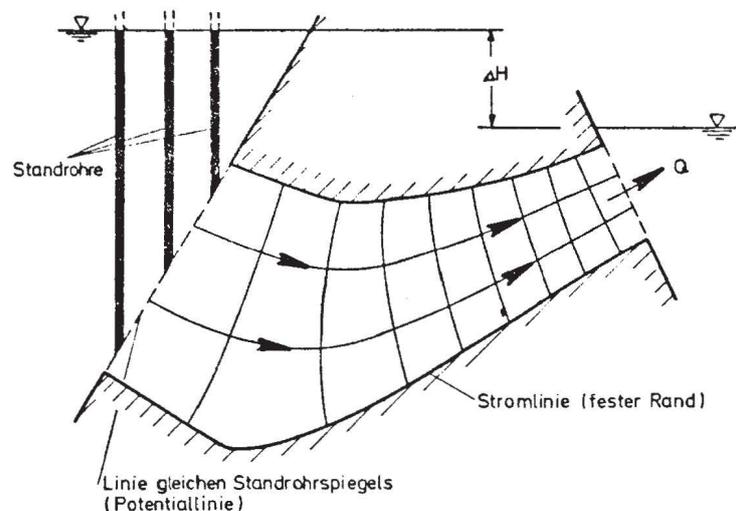


Bild 2.9 Einfache Randbedingungen

auf die quantitative Ermittlung von Feldgrößen und Strömungsbedingungen in einem tatsächlichen System überzugehen, muß der Einfluß der Grenzen (Ränder) berücksichtigt werden. Jeder Strömungsbereich, in dem Strömungsrichtungen, Geschwindigkeiten und Potentialhöhen ermittelt werden sollen, ist in irgendeiner Weise begrenzt, sei es durch geologische oder hydrologische Bedingungen oder auch nur durch eine vorgegebene räumliche Einschränkung des Betrachtungsgebietes. Die Verhältnisse längs dieser Grenzen (Ränder) in strömungsmäßiger Hinsicht, die Randbedingungen, sind maßgebend für die Ausbildung der Strömung im Innern des Gebietes.

Die einfachsten Verhältnisse liegen dann vor, wenn Gebietsränder entweder Linien gleicher Potentialhöhe oder Stromlinien sind. In Bild 2.9 ist ein einfaches Beispiel mit solchen Randbedingungen dargestellt. Es wird hieraus ersichtlich, daß eine Grenze des durchströmten porösen Mediums (Grundwasserleiter) gegen ein ruhendes offenes Gewässer einen Rand konstanten Potentials darstellt, da die Höhenlage des Standrohrspiegels an jedem Punkt dieses Randes gleich ist. Dagegen stellen die Grenzen des Strömungsbereiches gegen ein undurchlässiges Medium Stromlinien dar. Für sie gilt die Bedingung, daß ein Ein- oder Austreten von Wasser nicht möglich ist, was wiederum erfordert, daß die Strömung tangential zu diesen Grenzen verläuft. Für den Einfluß der hier dargestellten Ränder auf das Strömungsgeschehen im Feldinnern ist noch zu beachten, daß die Strömung (d.h. die Richtung der Stromlinien) längs der Ränder konstanten Potentials rechtwinklig zu diesen verlaufen muß. Andererseits stehen die Linien gleichen Potentials im Feldinnern rechtwinklig auf den Randstromlinien.

Der gesamte Potentialhöhenunterschied ist hierbei der Höhenunterschied ΔH zwischen den Wasserspiegeln, die die Standrohrspiegel der beiden Ränder konstanten Potentials bestimmen. Der Potentialunterschied $\Delta\phi$ zwischen je zwei benachbarten Potentiallinien im Feldinnern ergibt sich über eine Aufteilung von ΔH auf eine festzulegende Anzahl von Potentialschritten im Feld. Aus der Quadratnetzbedingung $\Delta\Psi = \Delta\phi$ ist danach der Durchflußanteil $\Delta\Psi$ in einer Stromröhre festgelegt: aus der Zahl der Stromröhren, die sich bei der Netzkonstruktion ergibt, ist hieraus der Gesamtdurchfluß ermittelbar. Andererseits beträgt nach dem Darcy-Gesetz die Filtergeschwindigkeit an jedem Punkt des Feldes

$$v_f = k_f \cdot \frac{\Delta\phi}{\Delta s} \quad (2.35)$$

wobei Δs die Seitenlänge des Netzquadrates an der jeweiligen Betrachtungsstelle bedeutet.

Man erkennt hieraus den Zusammenhang zwischen der Größe der Feldwerte und den wirksamen Randbedingungen. Die Verhältnisse im Feldinnern sind vollständig durch die Bedingungen längs der Ränder bestimmt.

Viele praktische Strömungsfälle weisen Randbedingungen auf, wie sie dem dargestellten einfachen Fall entsprechen. Denkt man z.B. an die Grundwasserströmung von einem langgestreckten Gebirgsrand durch ein weites Flußtal zu einem breiten Fluß, so

kann man den Fluß und den Gebirgsrand gemäß Bild 2.10 unter Umständen (bei unverdichteter Flußsohle) als Linien konstanter Potentialhöhen ansehen, während die seitlichen Ränder des Betrachtungsbereiches natürliche Stromlinien darstellen.

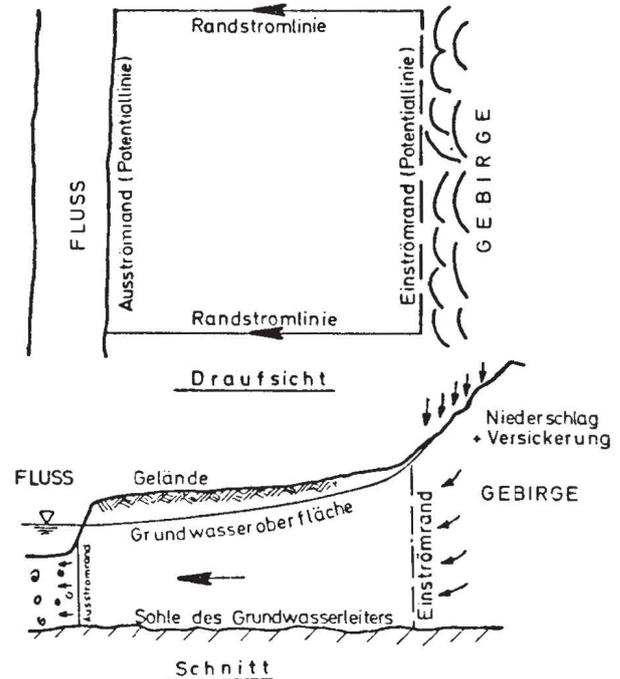


Bild 2.10 Beispiel zur Berandung eines Strömungsbereiches in der Natur

Die bisher beschriebenen einfachen Arten von Rändern haben den Vorteil, daß sie Potentiallinien oder Stromlinien sind und gleichzeitig in ihrer Form durch die gegebene geometrische Begrenzung des Strömungsbereiches festgelegt sind. In vielen Fällen sind diese Bedingungen nicht gleichzeitig erfüllt. So brauchen geometrisch festliegende Ränder keine Strom- oder Potentiallinien zu sein, oder Strom- oder Potentiallinienränder sind in ihrer geometrischen Form noch von zusätzlichen Bedingungen abhängig. Dazu sollen zwei weitere Fälle typischer Randbedingungen dargestellt werden, bei denen jeweils nur eines der genannten Kriterien erfüllt ist.

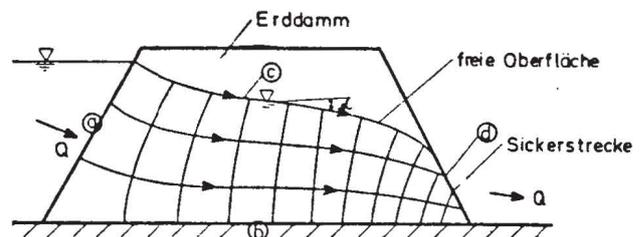


Bild 2.11 Randbedingungen bei der Durchsickerung eines Dammes

In Bild 2.11 ist als Beispielfall die Durchströmung eines homogenen Erddammes dargestellt, der auf undurchlässigem Untergrund geschüttet ist. Zwei der Ränder des durchströmten Bereiches weisen ent-

sprechend einfache Bedingungen auf, wie sie in den vorhergehenden Beispielfällen gezeigt wurden. Es handelt sich um den Einströmungsrand a an der Wassenseite, der eine Linie konstanter Potentialhöhe ist, und den Rand b längs der undurchlässigen Sohle, der eine Stromlinie ergibt. Dagegen ist der Rand c, die obere Begrenzung des Strömungsbereichs, eine sogenannte freie Oberfläche. Sie ist die Grenze des durchströmten Bereichs des porösen Mediums gegen den nicht durchströmten, luftgefüllten Bereich. Diese Grenze stellt sich aufgrund der übrigen Ränder und Randbedingungen des Systems nach der Schwerkraft ein. Die vorgegebene Bedingung ist hier, daß längs dieses Randes Atmosphärendruck herrscht. Da sich die freie Oberfläche im stationären Strömungsfall mit der Zeit nicht verändert, findet auch keine Strömung quer zu ihr statt. Das bedeutet, daß die Strömung tangential zu diesem Rand verläuft, d. h., daß er eine Stromlinie ist. Der Unterschied gegenüber einer Randstromlinie der oben beschriebenen Art (z. B. Rand b) liegt darin, daß längs der freien Oberfläche konstanter Druck herrscht (keine konstante Standrohrspiegelhöhe) und daß sie nicht durch eine natürliche Grenze des porösen Mediums festgelegt ist, so daß ihre Lage nicht von vorneherein bekannt ist. Allerdings läßt sich angeben, daß die Filtergeschwindigkeit längs der freien Oberfläche direkt gekoppelt ist mit dem Neigungswinkel α der Oberfläche gegen die Horizontale. Nach dem Darcy-Gesetz muß hier gelten

$$v_f = k_f \cdot \frac{\Delta h}{\Delta s} = k_f \cdot \sin \alpha \quad (2.36)$$

Ähnliche Randbedingungen wie bei einer freien Oberfläche treten innerhalb eines Strömungsbereiches an Grenzen zwischen Flüssigkeiten verschiedener Dichte auf. Eine freie Oberfläche stellt als Grenze zwischen den Strömungsmedien Wasser und Luft nur einen Sonderfall eines derartigen Randes dar.

Die zweite typische Randbedingung in Bild 2.11 ist durch die Begrenzung d des Strömungsbereiches dargestellt. Er ist eine Grenze des durchströmten porösen Mediums gegen die freie Atmosphäre, wie sie praktisch häufig auftritt. Im Gegensatz zur freien Oberfläche liegt hier eine vorgegebene geometrische Begrenzung vor, jedoch kann sie im allgemeinen weder eine Strom- noch eine Potentiallinie sein. Man nennt eine solche Grenze, an der das Wasser aus dem porösen Medium direkt an die freie Atmosphäre austritt, eine Sickerstrecke (Hangquelle). Eine Sickerstrecke tritt grundsätzlich überall dort auf, wo ein

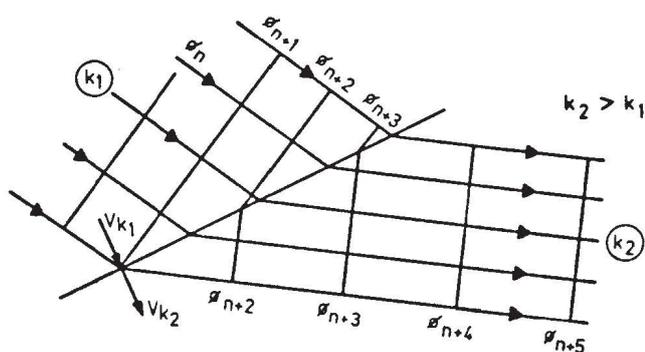


Bild 2.12 Strömungsbedingungen an einer Schichtgrenze

Grundwasserstrom mit freier Oberfläche aus dem Untergrund ausfließt, z. B. beim Austritt in ein offenes Gewässer. Als Kriterium einer Sickerstrecke kann nach den obigen Überlegungen weder ein rechtwinkliges Auftreffen von Strom- noch von Potentiallinien angegeben werden. Dagegen herrscht längs dieser Grenze konstanter Druck (Atmosphärendruck). Hieraus läßt sich ableiten, daß (entsprechend der Geschwindigkeit längs einer freien Oberfläche) die Filtergeschwindigkeitskomponente tangential zur Sickerstrecke dem Böschungswinkel proportional ist.

Auch die Sickerstrecke stellt einen Sonderfall einer allgemeinen Grenze von Strömungsbereichen dar, wie sie in vielfacher Variation in praktischen Fällen auftreten, nämlich Grenzen zwischen Teilbereichen verschiedener Bodeneigenschaften (Durchlässigkeit). Im allgemeinen Fall eines plötzlichen Wechsels der Durchlässigkeit, tritt allerdings kein konstanter Druck längs dieser Grenze auf (wenngleich der Druck an jedem Punkt beiderseits der Grenze gleich sein muß). Einzige Bedingung für diesen Rand, der weder Strom- noch Potentiallinie ist, ist die Tatsache, daß nur ein Durchfluß auftreten kann (gemessen auf beiden Seiten), d. h., daß die Komponente der Filtergeschwindigkeit rechtwinklig zur Grenzlinie beiderseits des Randes von gleicher Größe sein muß. Beim Auftreten einer solchen Grenze ist zu beachten, daß Strom- und Potentiallinien einen Knick aufweisen, der vom Größenverhältnis der beiden Durchlässigkeiten abhängt. Infolge dieser Bedingungen kann unter gleichen Voraussetzungen ($\Delta \Phi = \text{konst} = \Delta \Psi$) nicht in beiden Teilbereichen unterschiedlicher Durchlässigkeit ein quadratisches Potentialnetz konstruiert werden, sondern auf einer Seite ergibt sich eine der Durchlässigkeitsänderung entsprechende Verzerrung zu einem Rechtecknetz.

Anhand der erläuterten Grundfälle von Rändern bzw. Randbedingungen lassen sich alle tatsächlich auftretenden Ränder beschreiben, wenngleich sie bei praktischen Aufgabenstellungen oft nicht in der dargestellten eindeutigen Art auftreten. Meistens ist der Verlauf der Ränder durch natürliche Grenzen oder auch geologische und hydrologische Voraussetzungen vorgeschrieben. Längs dieser Ränder kann dann als Bedingung entweder die Verteilung der Potentiale (Standrohrspiegelhöhe) oder auch der Stromfunktion (Durchfluß) oder abschnittsweise die eine oder andere Größe zugrundegelegt werden.

Weiterhin ist zu erwähnen, daß bei den bisherigen Überlegungen zur Bestimmung der Feldwerte in einem Potentialströmungsfeld über die Randbedingungen stillschweigend vorausgesetzt wurde, daß innerhalb des Feldes selbst keine Quellen und Senken (Zugabe oder Entnahme) auftreten bzw., daß diese als zusätzliche Randbedingung bereits einbezogen wurden. Solche Bedingungen treten sehr häufig auf z. B. bei Wasserförderung durch Brunnen innerhalb des Betrachtungsgebietes oder bei Einsickern von Niederschlag oder Infiltration aus Oberflächengewässern (Grundwasserneubildung). Diese Verhältnisse müssen entsprechend als Randbedingung nach Lage und Größe direkt oder über Ersatzbeziehungen (z. B. leaky-aquifer-Prinzip bei Infiltration aus Oberflächengewässern) eingeführt werden.

Wenn die Abgrenzungen eines betrachteten Strömungsbereichs und die Randbedingungen längs dieser Grenzen in einer der beschriebenen Formen größtmäßig bekannt sind, stehen der Lösung der Aufgabe der Ermittlung der Strömungsverhältnisse im Feldinneren theoretisch keine Schwierigkeiten mehr entgegen. Die Differentialgleichung für den Strömungsvorgang ergibt bei Einsetzen der Randbedingungen die Lösung für jeden Punkt innerhalb des Feldes. Tatsächlich ist diese Lösung allerdings meist nicht einfach, da eine geschlossene Behandlung, die auch eine exakte mathematische Formulierung der Randbedingungen erfordert, nur in wenigen Grenzfällen möglich ist. Generell bleibt aber die Möglichkeit einer graphischen, analogen oder numerischen Lösung, wobei letztere durch den möglichen Einsatz von Großrechenanlagen heute immer mehr in den Vordergrund tritt und im Rahmen dieser Broschüre vorwiegend behandelt werden soll.

Literaturangaben

- Bear, M. E., «Dynamics of Flow in Porous Media», American Elsevier Publishing Co., Inc. New York, 1972.
- Breitenöder, M., «Ebene Grundwasserströmungen mit freier Oberfläche», Springer-Verlag Berlin, 1942.
- Busch, K.-F. und Luckner, L., «Geohydraulik», Verlag für Grundstoffindustrie, Leipzig, 1972.
- Dachler, R., «Grundwasserströmungen», Springer-Verlag, Wien, 1936.
- Jacob, C. E., «Flow of Ground Water», Kapitel V in «Engineering Hydraulics», Herausgeber: Hunter Rouse, 1949.
- Kozeny, J., «Grundwasserbewegung bei freiem Spiegel, Fluß- und Kanalversickerung», Wasserkraft und Wasserwirtschaft H.3, 1931.
- Muskat, M., «The Flow of Homogeneous Fluids Through Porous Media», McGraw-Hill, New York, 1946.
- Scheidegger, A. E., «The Physics of Flow Through Porous Media», 3rd ed., University of Toronto Press, Toronto, 1963.
- Verruitt, A., «Theory of Groundwater Flow», McMillan & Co., Ltd., London, 1970.
- De Wiest, R. J. M. (Hrsg.), «Flow Through Porous Media», Academic Press, New York und London, 1969.

Anschrift der Verfasser:

Dr.-Ing. Klaus Zipfel, Ingenieurbüro Dr.-Ing. G. Björnsen,
Koblenz

Prof. Dr. Helmut Kobus, Institut für Hydromechanik der Uni-
versität Karlsruhe