

ANALYTISCHE BEHANDLUNG VON AUFTRIEBSSTRAHLEN  
UNTER BERÜCKSICHTIGUNG DER BESONDERHEITEN  
VON LUFTBLASENSCHLEIERN

von

H. Honekamp und H. Kobus

SONDERFORSCHUNGSBEREICH 80  
AUSBREITUNGS- UND TRANSPORTVORGÄNGE IN STRÖMUNGEN  
UNIVERSITÄT KARLSRUHE

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	4
Verzeichnis der Bilder und Tabellen	3
1. Einleitung und Voraussetzungen	6
2. Strahlen in ruhendem, homogenem Medium	19
2.1 Allgemeines	19
2.2 Axialsymmetrischer Impulsstrahl	20
2.3 Axialsymmetrischer Auftriebsstrahl	22
2.4 Plansymmetrischer Impulsstrahl	27
2.5 Plansymmetrischer Auftriebsstrahl	29
3. Luftblasen in ruhendem, homogenem Medium	33
3.1 Berücksichtigung der Eigenschaften von Luftblasen	33
3.2 Luftblasen - Einzeldüse	34
3.3 Luftblasen - Düsenreihe	45
4. Auftriebsstrahlen in bewegtem, homogenem Medium	64
4.1 Vorbemerkungen	64
4.2 Axialsymmetrischer Auftriebsstrahl	66
4.3 Plansymmetrischer Auftriebsstrahl	71
5. Luftblasen in bewegtem, homogenem Medium	76
5.1 Vorbemerkungen	76
5.2 Luftblasen - Einzeldüse	78
5.3 Luftblasen - Düsenreihe	81
6. Rechenprogramm für den plansymmetrischen Auftriebsstrahl in einer Querströmung	84
7. Diskussion	94
8. Literaturangaben	99



Verzeichnis der Bilder

1.1	Schematische Darstellung des Anlaufbereiches von Impulsstrahlen	6
1.2	Einteilung von Auftriebsstrahlströmungen	8
1.3	Plansymmetrische Strömungsfelder für Impuls- und Auftriebsstrahl	9
2.1	Systemskizze für Strahlen in ruhendem Medium	20
3.1	Systemskizze für Luftblasen in ruhendem Medium	34
4.1	Bezugssystem für Luftblasen in bewegtem Medium	75
6.1	Flußdiagramm für Computerprogramm	85

Verzeichnis der Tabellen

2.1	Axialsymmetrische Strahlen in ruhendem Medium mit konstanter Dichte	26
2.2	Plansymmetrische Strahlen in ruhendem Medium mit konstanter Dichte	32
3.1	Übersicht über die rechnerischen Beziehungen für die Luftblasen-Einzeldüse	44
3.2	Übersicht über die rechnerischen Beziehungen für die Luftblasen-Düsenreihe	63
6.2	Algorithmus für das Modell JET 9	86
6.3	Computerprogramm JET 9	88

Vorwort

Eine Luftschleieranlage besteht aus einer mit Düsen versehenen Druckleitung, die am Boden eines Gewässers verlegt (oder an Schwimmkörpern in einer bestimmten Wassertiefe aufgehängt) und von einem Kompressor mit Druckluft gespeist wird. Aus den Düsen (gebräuchliche Durchmesser 0.5 bis 3 mm, übliche Düsenabstände 10 bis 50 cm) entströmt hierbei ein kontinuierlicher Luftstrahl, der nach seinem Eintritt in das Wasser alsbald in Luftblasen verschiedener Grössen zerfällt. Die infolge Auftriebs aufsteigenden Luftblasen erzeugen eine aufwärts gerichtete Wasserströmung, die der Auftriebsströmung über einer Temperaturquelle (Flamme) vergleichbar ist. In diesem Strömungsfeld wird mit zunehmender Höhe eine ständig wachsende Wassermenge in eine aufwärts gerichtete Bewegung gesetzt. An der Wasseroberfläche tritt die aufsteigende Luft aus, während der induzierte Wasserstrahl seitlich umgelenkt wird. Die Oberflächengeschwindigkeiten erreichen in einem gewissen seitlichen Abstand ein Maximum und nehmen dann wieder ab, wobei die Dicke des so erzeugten Oberflächenstrahls ständig zunimmt. Aus Kontinuitätsgründen muss gleichzeitig in den unteren Regionen Zuströmung zum Luftschleier hin herrschen, die wiederum in die Auftriebsströmung einmündet.

Untersuchungen an Luftschleiern in seitlich unbegrenztem Medium blieben bisher auf ruhendes Wasser beschränkt. Es hat sich jedoch gezeigt, dass dem Einfluss einer überlagerten Querströmung sehr grosse Bedeutung zukommt, da eine Horizontalströmung die Strömungsverhältnisse sehr viel stärker verändert, als eine direkte Superposition vermuten liesse.

Zur Klärung dieser Zusammenhänge wurde im Rahmen des Projekts A (Ausbreitungsvorgänge) des Sonderforschungsbereichs 80 an der Universität Karlsruhe ein Teilprojekt A 3 mit dem Titel "Luftschleier in einer Querströmung" in Angriff genommen und in den Jahren 1970 bis 1973 bearbeitet. Ziel dieser teils experimentellen, teils analytischen Arbeit ist es, den Einfluss einer Querströmung auf das Strömungsfeld eines Luftschleiers quantitativ zu erfassen. Als Ausgangsbasis für die analytische Behandlung dient ein vom Projektleiter erarbeitetes analytisches Modell für Luftschleier in

stehenden Gewässern, mit dem zum ersten Mal Modellversuche auf Verhältnisse in der Natur übertragen werden konnten. Dieses Modell soll auf Luftschleier in einer Querströmung erweitert und durch Experimente verifiziert werden. Die Untersuchungen haben zum Ziel, die Möglichkeiten und Grenzen des Einsatzes von Luftschleiern in Flüssen zur Steuerung von Ausbreitungs- und Transportvorgängen zu erkunden. Darüber hinaus können die hier gewonnenen Erkenntnisse als Entscheidungshilfen dienen, die es ermöglichen, Luftschleieranlagen betriebssicher und wirtschaftlich zu entwerfen und auszuliegen.

Die im Rahmen des Teilprojektes A 3 durchgeführten Arbeiten werden in zwei Berichten des Sonderforschungsbereichs 80 und einer Monografie dargestellt:

1. Bericht SFB 80/T/9: "Analytische Behandlung von Auftriebsstrahlen unter Berücksichtigung der Besonderheiten von Luftblasenschleiern" (H. Honekamp und H. Kobus, Juni 1973)
2. Bericht SFB 80/ET/18: "Experimentelle Ermittlung des von einem Luftschleier in einer Querströmung erzeugten Strömungsfeldes" (H. Kobus, H. Honekamp, B. Barczewski, März 1974)
3. H. Kobus: "Bemessungsgrundlagen und Anwendungen für Luftschleier im Wasserbau", Heft 7 der Schriftenreihe "Wasser und Abwasser in Forschung und Praxis", Erich Schmidt Verlag, Berlin 1973

Während im ersten Bericht die analytischen Vorarbeiten zur Behandlung des Luftschleier-Strömungsfeldes zusammengefaßt sind, enthält der zweite Bericht eine ausführliche Darstellung der experimentellen Untersuchungen. In der unter 3 genannten Monografie wurden die wesentlichen Erkenntnisse zusammengefaßt und in einer Form aufbereitet, die es erlaubt, die Einsatzmöglichkeiten und Anwendungsgrenzen von Luftschleieranlagen in Fließgewässern abzuschätzen.



## 1. Einleitung und Voraussetzungen

Die von Luftschleiern induzierten Strömungen kann man der Gruppe der Strahlströmungen zurechnen. Es erscheint deshalb angebracht, zunächst die Grundlagen für die Berechnung von Strahlen in ruhendem Medium darzustellen und dann die Betrachtung auf Luftblasenschleier in ruhendem und bewegtem Medium zu erweitern. Für den zweidimensionalen Luftschleier wird ein Computerprogramm aufgestellt.

Strahlen sind dadurch charakterisiert, dass sich im Strahl Fluid mit verhältnismässig grosser Geschwindigkeit relativ zum umgebenden Fluid bewegt. Sie entstehen durch lokale Einleitung von Fluid an Düsen oder Schlitzen, wobei die Differenzgeschwindigkeit eine Folge der Einleitungsgeschwindigkeit sein kann (Impulsstrahl), auf einer auftriebsbedingten Bewegung infolge eines Dichteunterschieds zwischen eingeleitetem und Trägerfluid beruhen kann (Auftriebstrahl), oder aus einer Kombination beider Ursachen resultiert (Auftriebstrahl mit Impuls).

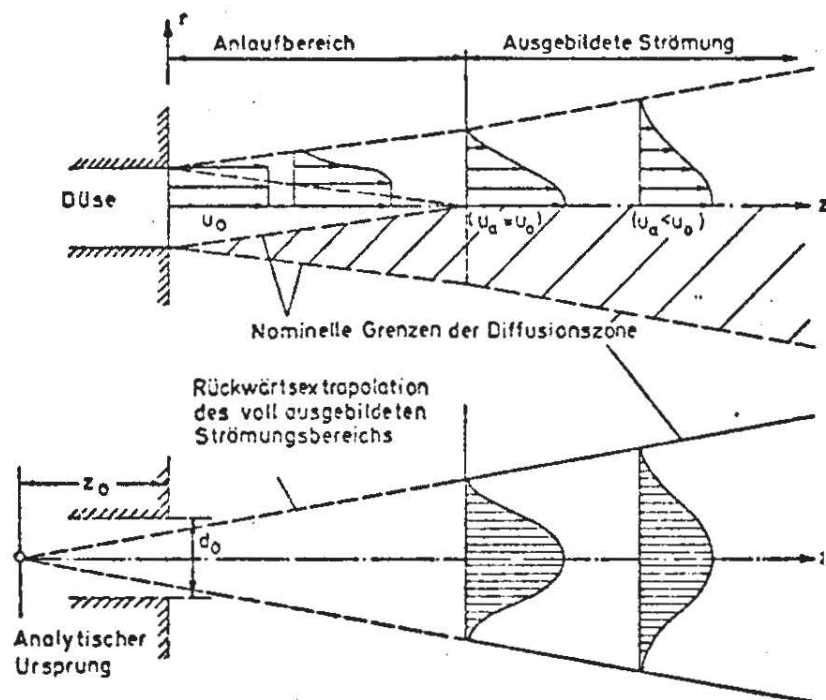


BILD 1.1 SCHEMATISCHE DARSTELLUNG DES ANLAUFBEREICHS FÜR IMPULSSTRAHLEN

Am Strahlrand entstehen aufgrund des Geschwindigkeitsgradienten hohe Scherspannungen, welche turbulente Wirbel erzeugen und somit eine Durchmischung in Querrichtung hervorrufen (Bild 1.1); hierdurch wird der Hauptströmung laufend Energie entzogen und der turbulenten Bewegung zugeführt (und schliesslich durch Zähigkeitseinwirkung dissipiert). In der Durchmischungszone wird der Geschwindigkeitsgradient abgemindert, sie breitet sich mit zunehmendem Abstand vom Eintrittsquerschnitt sowohl in das Trägerfluid als auch in den Strahlkern hinein aus, bis sie schliesslich am Ende des "Anlaufbereichs" die Strahlachse erreicht. Im anschliessenden Bereich der "voll ausgebildeten" Strahlströmung setzt sich die turbulente Strahldiffusion weiter fort und bewirkt, dass ständig Fluid aus der Umgebung in die Strahlströmung eingemischt wird und deshalb der Volumenstrom mit zunehmendem Abstand vom Eintrittsquerschnitt stetig wächst. Diese Einmischung von Trägerfluid in den Strahl bewirkt eine zunehmende "Verdünnung" des ursprünglichen Strahlfluids und somit auch eine Abnahme der Konzentration von Tracern oder Substanzen jeglicher Art, die der Strahl enthält, mit wachsender Entfernung von der Zugabestelle.

Das Verhalten des Strahls wird von verschiedenen Faktoren wesentlich beeinflusst, die durch das Empfängerfluid vorgegeben sind. Es sind dies hauptsächlich

- die Dichte des Empfängerfluids (konstante Dichte; lineare Stratifikation; nichtlineare Schichtungen; Dichtediskontinuitäten);
- eine Grundströmung des Empfängerfluids (ruhendes Medium; gleichförmige Grundströmung; Geschwindigkeitsgradient; nichtstationäre Strömungen; Turbulenz), und
- die Randbedingungen des Strömungsfeldes (endliche Wassertiefe; Einfluss benachbarter Strahlen; Strömungsbegrenzung).

In Bild 1.2 sind die möglichen Auswirkungen dieser Einflussgrössen auf das Strahlverhalten für einige Fälle schematisch dargestellt.

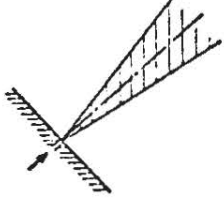
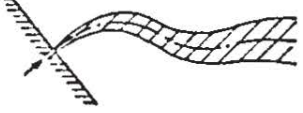
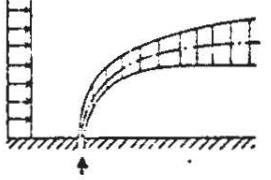

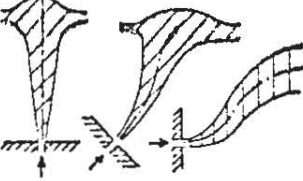
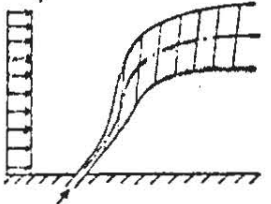

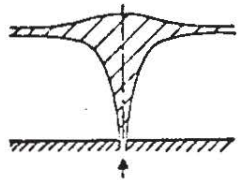
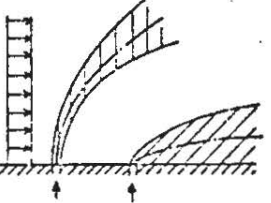
Empfänger- Fluid  Strahl	Homogenes, ruhendes Medium	Einfluß einer Dichteschichtung	Einfluß einer Grundströmung
	$\rho_e = \text{const}$ $U_H = 0$	Stabile Schichtung $\rho(z)$ $U_H = 0$	$\rho_e = \text{const}$ $U_H = \text{const}$
Impulsstrahl ( $M_0$ maßgebend)			
Auftriebstrahl mit Impuls ( $M_0$ und $W_0$ maßgebend)			
Auftriebstrahl ( $W_0$ maßgebend)			

BILD 1.2 · EINTEILUNG VON AUFTRIEBSTRAHLSTRÖMUNGEN

Auftriebstrahlströmungen in ruhendem, homogenem, unendlich ausgedehntem Medium sind charakterisiert durch die Austrittsgeschwindigkeit  $u_0$ , durch die Abmessungen des Austrittsquerschnitts ( $d_0$  bzw.  $b_0$ ) und durch den Unterschied  $\Delta\gamma_0$  im spezifischen Gewicht zum Empfängerfluid, sowie durch die Eigenschaften des Empfängerfluids. Das Geschwindigkeitsfeld eines in  $s$ -Richtung eingeleiteten Strahls ist daher ganz allgemein beschrieben durch

$$u = f(u_0; \frac{d_0}{b_0}; \Delta\gamma_0; \rho; \mu; s; \eta) \quad (1.1)$$

Mit den Definitionen

$$F_0 = \frac{u_0}{\sqrt{\frac{\Delta\rho_0}{\rho} g d_0}} \quad \text{bzw.} \quad \frac{u_0}{\sqrt{\frac{\Delta\rho_0}{\rho} g b_0}} \quad (1.2)$$

$$R_0 = \frac{\rho u_0 d_0}{\mu} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\rho u_0 b_0}{\mu}$$



ergibt sich hieraus die dimensionslose Beziehung

$$\frac{u}{u_0} = f \left( F_0; R_0; \frac{s/d_0}{s/b_0}; \frac{r/d_0}{r/b_0} \right) \quad (1.3)$$

Es hat sich gezeigt [12], dass in der Ingenieurpraxis auftretende Strahlströmungen in den meisten Fällen vollturbulent sind, so dass die Reynoldszahl keinen Einfluss auf das Strömungsfeld hat. Die relative Geschwindigkeit an jedem Punkt ist demnach eindeutig durch die relativen Positionskordinaten und den Parameter  $F_0$  (densimetrische Froudezahl) gekennzeichnet.

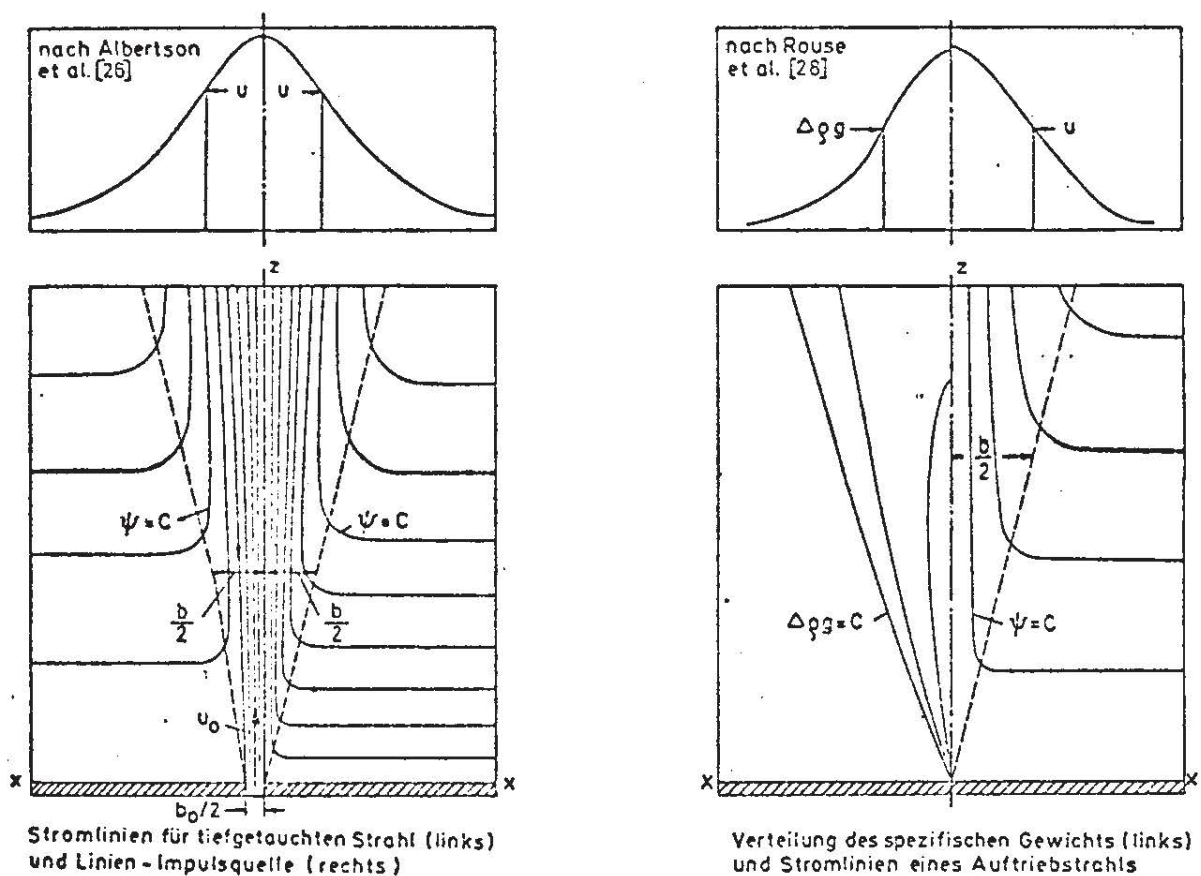


BILD 1.3 PLANSYMMETRISCHE STRÖMUNGSFELDER FÜR IMPULS-UND AUFTRIEBSTRAHL

Des weiteren lässt sich nachweisen [12], dass die Größen  $u_0$  bzw.  $b_0$  das Strömungsfeld nur in unmittelbarer Düsenähe beeinflussen; in einigem Abstand vom Austrittsquerschnitt wird das Geschwindigkeitsfeld eindeutig durch den Impulsfluss pro Massendichte ( $M_0/\rho$ ) und den Auftrieb pro Massen-

dichte ( $W_0/\rho$ ) charakterisiert, egal aus welcher Kombination von  $u_0$ ,  $d_0$  bzw.  $b_0$  oder  $\Delta\gamma_0$  diese resultieren. Das bedeutet, dass das Geschwindigkeitsfeld dem einer Impuls- oder Auftriebs-Punktquelle gleichgesetzt werden kann (Bild 1.3). Eine solche Annahme liefert gute Ergebnisse, wenn die fiktive Punktquelle wegen der endlichen Abmessungen von  $d_0$  oder  $b_0$  in einem Abstand  $s_0$  hinter dem tatsächlichen Austrittsquerschnitt angenommen wird (Bild 1.1). Abweichungen des tatsächlichen Geschwindigkeitsfeldes von der fiktiven Strömung bleiben im wesentlichen auf den Anlaufbereich beschränkt, welcher sich über einen Bereich von 6.2 Düsendurchmessern bzw. 5.2 Schlitzbreiten vom Austrittsquerschnitt stromab erstreckt [3; 20].

Beschreibt man die Ausgangsgrößen des Strahls statt durch  $u_0$ ,  $d_0$  bzw.  $b_0$  und  $\Delta\gamma_0$  durch die Größen

$$\begin{aligned} Q_0 &= \frac{\pi}{4} d_0^2 u_0 & \text{bzw.} & \quad q_0 = b_0 u_0 \\ M_0/\rho &= \frac{\pi}{4} d_0^2 u_0^2 & \text{bzw.} & \quad m_0/\rho = b_0 u_0^2 \\ W_0/\rho &= \frac{\pi}{4} d_0^2 u_0 \frac{\Delta p_0}{\rho} g & \text{bzw.} & \quad w_0/\rho = b_0 u_0 \frac{\Delta p_0}{\rho} g \end{aligned} \quad (1.4)$$

dann ergibt sich für das Strömungsfeld eines vollturbulenten axialsymmetrischen Strahls

$$u = f(s; r; Q_0; M_0/\rho; W_0/\rho) \quad (1.5)$$

Hieraus folgen die alternativen dimensionslosen Beziehungen

$$\left. \begin{aligned} \frac{u}{\sqrt{M_0/\rho s^2}} \\ \frac{u}{\sqrt[3]{W_0/\rho s}} \end{aligned} \right\} = f_{1,2} \left( \frac{r}{s}; \frac{Q_0}{\sqrt{M_0/\rho} s}; \frac{(M_0/\rho)^3}{(W_0/\rho)^2 s^4} \right) = f'_{1,2} \left( \frac{r}{s}; \frac{s}{d_0}; \frac{u_0}{\sqrt{\frac{\Delta p_0}{\rho} g d_0}} \right) \quad (1.6)$$

Die vereinfachende Annahme einer Strömung von einer Punktquelle ist gleichbedeutend mit einer Vernachlässigung des Einflusses des Volumenstroms  $Q_0$  oder des hieraus resultierenden Parameters  $(s/d_0)$ . Die Beziehung vereinfacht sich somit zu



$$\left. \begin{array}{l} \frac{u}{\sqrt{M_0/\rho s^2}} \\ \frac{u}{\sqrt[3]{W_0/\rho s}} \end{array} \right\} = f_{1,2} \left( \frac{r}{s}; F_0 \right) \quad (1.7)$$

Die densimetrische Froudezahl gibt das Verhältnis von Impulsfluss zu Antrieb an: die Grenzfälle des reinen Impulsstrahls und des reinen Auftriebstrahls sind demnach gekennzeichnet durch ( $F_0 = \infty$ ) bzw. ( $F_0 = 0$ ).

Für die Achsgeschwindigkeit  $u_a$  des Strahls ist stets ( $r = 0$ ). Für die beiden Grenzfälle folgt daher aus Gl. (1.7) (bzw. aus einer entsprechenden Betrachtung für den Volumenstrom  $Q$ ) direkt, dass für den Impulsstrahl ( $F_0 = \infty$ ) gelten muss

$$\frac{u_a}{\sqrt{M_0/\rho s^2}} = \text{const} ; \quad \frac{Q}{\sqrt{M_0/\rho} s} = \text{const} \quad (1.8)$$

und für den Auftriebstrahl ( $F_0 = 0$ )

$$\frac{u_a}{\sqrt[3]{W_0/\rho s}} = \text{const} ; \quad \frac{Q}{\sqrt[3]{(W_0/\rho) s^5}} = \text{const} \quad (1.9)$$

Für den plansymmetrischen Strahl lauten die Beziehungen

$$\left. \begin{array}{l} \frac{u}{\sqrt{m_0/\rho s}} \\ \frac{u}{\sqrt[3]{W_0/\rho}} \end{array} \right\} = f_{1,2} \left( \frac{r}{s}; F_0 \right) \quad (1.10)$$

mit den Grenzbedingungen für den Impulsstrahl ( $F_0 = \infty$ )

$$\frac{u_a}{\sqrt{m_0/\rho s}} = \text{const} ; \quad \frac{q}{\sqrt{(m_0/\rho) s}} = \text{const} \quad (1.11)$$

und für den Auftriebstrahl ( $F_0 = 0$ )

$$\frac{u_a}{\sqrt[3]{W_0/\rho}} = \text{const} ; \quad \frac{q}{\sqrt[3]{W_0/\rho s}} = \text{const} \quad (1.12)$$

Bei der Behandlung von (senkrecht nach oben gerichteten) Strahlen in einer Querströmung muss die Quergeschwindigkeit  $U_H$  als zusätzlicher

Parameter berücksichtigt werden, und die dimensionsanalytisch hergeleitete Beziehung lautet

für den axialsymmetrischen Fall

$$\left. \begin{array}{l} \frac{u}{\sqrt{M_0/\rho s^2}} \\ \frac{u}{\sqrt[3]{W_0/\rho s}} \end{array} \right\} = f_{1,2} \left( \frac{r}{s} ; F_0 ; \begin{array}{l} \frac{U_H}{\sqrt{M_0/\rho s^2}} \\ \frac{U_H}{\sqrt[3]{W_0/\rho s}} \end{array} \right) \quad (1.13)$$

und für den plansymmetrischen Fall

$$\left. \begin{array}{l} \frac{u}{\sqrt{m_0/\rho s}} \\ \frac{u}{\sqrt[3]{W_0/\rho}} \end{array} \right\} = f_{1,2} \left( \frac{n}{s} ; F_0 ; \begin{array}{l} \frac{U_H}{\sqrt{m_0/\rho s}} \\ \frac{U_H}{\sqrt[3]{W_0/\rho}} \end{array} \right) \quad (1.14)$$

Die theoretische Behandlung von Strahlströmungen wird dadurch erheblich vereinfacht, dass die mittleren Strömungsgeschwindigkeiten in Strahlrichtung sehr viel grösser sind als in Querrichtung, und dass alle Gradienten in Strahlrichtung sehr viel kleiner sind als in Querrichtung. Wenn man entsprechende (aus der Grenzschichttheorie geläufige) Vereinfachungen einführt, dann ergibt sich aus der reduzierten Bewegungsgleichung in Querrichtung, dass die Druckunterschiede quer zum Strahl vernachlässigbar klein sind. Der örtliche Druck im Strahl ist daher gleich dem Druck ausserhalb des Strahlbereichs und kann somit als bekannt vorausgesetzt werden. Für die Strahlen in ruhendem, unendlich ausgedehntem, homogenem Medium, deren Achse geradlinig unter einem konstanten Winkel  $\theta$  zur Horizontalen verläuft (z.B. Auftriebstrahlen ohne Impuls ( $\theta = 90^\circ$ ) oder Impulsstrahlen ohne Auftrieb ( $\theta$  beliebig), lässt sich die gemäss den Grenzschichtannahmen vereinfachte Bewegungsgleichung in Strahlrichtung  $s$  angeben zu

$$\rho \left( u \frac{\partial u}{\partial s} + v \frac{\partial u}{\partial n} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{sr}) - \Delta \rho g \sin \theta \quad (1.15)$$

bzw.

$$\rho \left( u \frac{\partial u}{\partial s} + v \frac{\partial u}{\partial n} \right) = \frac{\partial \tau_{sn}}{\partial n} - \Delta \rho g \sin \theta \quad (1.16)$$

Die Kontinuitätsgleichung lautet

$$\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{1}{r} \frac{\partial (rv)}{\partial r} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \quad (1.17)$$

Für einen vom Strahl transportierten Tracer der Konzentration  $c$  ergibt sich als Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial (uc)}{\partial s} + \frac{1}{r} \frac{\partial (rv c)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r F_r)}{\partial r} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial (uc)}{\partial s} + \frac{\partial (vc)}{\partial n} + \frac{\partial F_n}{\partial n} \quad (1.18)$$

wobei  $F_r$  und  $F_n$  den turbulenten Quertransport des Tracers angeben.

Für kleine Dichteunterschiede ( $\Delta \rho \ll \rho_e$ ) können die Dichteunterschiede in den Trägheitsgliedern der Gleichungen vernachlässigt werden und mit guter Näherung ( $\rho \approx \rho_e$ ) gesetzt werden; hingegen muss  $\Delta \rho$  im Auftriebsglied beibehalten bleiben, da die Auftriebskraft ausschliesslich durch den Dichteunterschied hervorgerufen wird. Diese Vereinfachung wurde von Boussinesq eingeführt und wird im folgenden stets beibehalten.

Die Bewegungsgleichung (1.15) kann mit  $2\pi r$  multipliziert und unter Heranziehung der Kontinuitätsgleichung über  $r$  integriert werden. Da auf der Strahlachse ( $r=0$ )  $v$  und  $\tau_{zr}$  aus Symmetriegründen gleich Null werden und bei ( $r=\infty$ ) sowohl  $u$  als auch  $\tau_{zr}$  verschwinden, ergibt dies

$$\frac{\partial}{\partial s} \int_0^{\infty} 2\pi r \rho u^2 dr = - \int_0^{\infty} 2\pi r \Delta \rho g \sin \theta dr \quad (1.19)$$

und aus Gleichung (1.16) entsprechend

$$\frac{\partial}{\partial s} \int_0^{\infty} \rho u^2 dn = - \int_0^{\infty} \Delta \rho g \sin \theta dn \quad (1.20)$$

Eine Integration der Kontinuitätsgleichung über einen Querschnitt liefert für den axialsymmetrischen Fall

$$\frac{\partial}{\partial s} \int_0^{\infty} 2\pi r u dr = - (2\pi r v)_{(r=\infty)} \equiv Q' \quad (1.21)$$

und für den plansymmetrischen Strahl

$$2 \frac{\partial}{\partial s} \int_0^{\infty} u \, dn = -(2v)_{(n=\infty)} \equiv q' \quad (1.22)$$

Die so definierten Grössen  $Q'$  und  $q'$  geben den jeweils pro Längeneinheit  $ds$  in den Strahl eingemischten Volumenstrom an. Aus der Kontinuitätsgleichung für einen Tracer folgt

$$\frac{\partial}{\partial s} \int_0^{\infty} 2\pi r u c \, dr = -(2\pi r v c)_{(r=\infty)} \equiv Q' \cdot c_e \quad (1.23)$$

und

$$2 \frac{\partial}{\partial s} \int_0^{\infty} u c \, dn = -(2vc)_{(n=\infty)} \equiv q \cdot c_e \quad (1.24)$$

wobei  $c_e$  die Tracerkonzentration im Empfängerfluid darstellt.

Es hat sich gezeigt [12], dass Geschwindigkeits- und Konzentrationsprofile in Strahlen, in denen die eigenerzeugte Turbulenz überwiegt, ausserhalb des Anlaufbereichs stets dieselbe funktionale Form aufweisen und daher durch Ähnlichkeitsprofile mit Hilfe des Maximalwertes auf der Strahlachse und eines Masses für die seitliche Ausdehnung beschrieben werden können. Gauss'sche Glockenkurven zeigen gute Übereinstimmung mit gemessenen Profilen; es kann daher angesetzt werden

$$\frac{u}{u_a} = e^{-(r/b)^2} \quad \text{bzw.} \quad \frac{u}{u_a} = e^{-(n/b)^2} \quad (1.25)$$

und

$$\frac{c}{c_a} = e^{-(r/\lambda b)^2} \quad \text{bzw.} \quad \frac{c}{c_a} = e^{-(n/\lambda b)^2} \quad (1.26)$$

wobei  $b$  ein Breitenmass für das Geschwindigkeitsprofil darstellt und  $\lambda$  als Verhältnis der Querausdehnung des Konzentrationsprofils zu der des Geschwindigkeitsprofils definiert ist.



Durch die Einführung von Ähnlichkeitsprofilen ist das gesamte Geschwindigkeits- und Konzentrationsfeld beschrieben durch die Achswerte  $u_a$  und  $c_a$  und die Breitenmasse  $b$  und  $\lambda$ . Für die Ermittlung dieser Grössen stehen die integrierten Gleichungen (1.19), (1.21) und (1.23) bzw. (1.20), (1.22) und (1.24) zur Verfügung, wobei in diesen als zusätzliche Unbekannte die Einmischrate  $Q'$  oder  $q'$  erscheint. (Bei Strahlkonfigurationen mit variablem Neigungswinkel  $\theta$  kann die Bewegungsgleichung in einer zweiten Richtung mit herangezogen werden). Das Gleichungssystem mit 3 Bestimmungsgleichungen für 5 Unbekannte (bzw. 4 Gleichungen für 6 Unbekannte) muss daher jeweils durch 2 experimentell bestimmte Koeffizienten ergänzt werden (je ein Beiwert für die Geschwindigkeits- und für die Konzentrationsverteilung).

Für die Einführung dieser beiden ergänzenden Beziehungen bestehen mehrere Möglichkeiten. Es können physikalisch plausible Annahmen für die örtlichen turbulenten Diffusionskoeffizienten  $\epsilon_0$  und  $\epsilon_m$  getroffen werden gemäss den Definitionen

$$\begin{aligned} T_{s,r} &= \epsilon_0 \rho u_a b \frac{\partial u}{\partial r} & \text{bzw.} & \quad T_{s,n} = \epsilon_0 \rho u_a b \frac{\partial u}{\partial n} \\ F_r &= \epsilon_m \rho u_a b \frac{\partial c}{\partial r} & \text{bzw.} & \quad F_n = \epsilon_m \rho u_a b \frac{\partial c}{\partial n} \end{aligned} \quad (1.27)$$

Setzt man lineare Ausbreitungsverhältnisse voraus, dann führen einfache Annahmen für die Ausbreitungsraten  $k$  und  $\mu$  entsprechend den Ansätzen

$$\begin{aligned} \frac{u}{u_a} &= e^{-k(r/s)^2} & \text{bzw.} & \quad \frac{u}{u_a} = e^{-k(n/s)^2} \\ \frac{c}{c_a} &= e^{-\mu k(r/s)^2} & \text{bzw.} & \quad \frac{c}{c_a} = e^{-\mu k(n/s)^2} \end{aligned} \quad (1.28)$$

zum Ziel: allerdings sind die hierbei implizierten linearen Ausbreitungsverhältnisse bei komplexeren Strömungskonfigurationen nicht notwendigerweise gegeben. Schliesslich können unter der Voraussetzung, dass die eigenerzeugte Turbulenz des Strahls die vorwiegende Ursache der Einmischung ist, Annahmen für das durch die Gleichungen (1.25) und (1.26) definierte Breitenverhältnis  $\lambda$  und einem Einmischkoeffizienten  $\alpha$  getroffen werden, welcher durch den Ansatz

$$\frac{dQ}{ds} = Q' = \alpha \cdot 2\pi b \cdot u_a \quad \text{bzw.} \quad \frac{dq}{ds} = q' = 2\alpha \cdot u_a \quad (1.29)$$

definiert wird. Eine Einmischhypothese dieser Art soll im folgenden dieser Arbeit zugrunde gelegt werden.

Trotz der Vielzahl von Untersuchungen über Auftriebsstrahlströmungen<sup>1</sup> gibt es nur wenige zuverlässige Messdaten, aus denen die experimentellen Beiwerte bestimmt werden können. Aus direkten Messungen wurde der Einmischkoeffizient  $\alpha$  für Impulsstrahlen und Auftriebsströmungen in ruhendem, homogenem Medium von Rouse et.al. [3; 6] und später von Ricou und Spalding [13] ermittelt. Es gibt keine derartigen Messungen in dichtegeschichteten oder strömenden Medien. Richards [14] hat den Einmischkoeffizienten für Thermale (eine Thermale ist ein horizontaler Fluidzylinder im gleichen Medium unterschiedlicher Dichte) experimentell bestimmt. Die Ergebnisse dieser Untersuchungen wurden durch spätere Arbeiten bestätigt [15]; sie liefern :

Axialsymmetrischer Impulsstrahl	:	$\alpha = 0.057$
Axialsymmetrischer Auftriebstrahl	:	$\alpha = 0.082$
Thermale	:	$\alpha = 0.50$
Plansymmetrischer Impulsstrahl	:	$\alpha = 0.069$
Plansymmetrischer Auftriebstrahl	:	$\alpha = 0.157$

Das Verhältnis  $\lambda$  der Breiten eines Tracer- und des Geschwindigkeitsprofils gibt die Relation des Massen- und Impulsaustauschs an. Für Impulsstrahlen wurde dieses Verhältnis von Forstall und Shapiro [4] und von Abraham [15] aus einem Vergleich verschiedener experimenteller Untersuchungen ermittelt. Für die Auftriebstrahlen wurde das Verhältnis  $\lambda$  der Breiten des Dichte- und des Geschwindigkeitsprofils von Schmidt [1] und von Rouse et.al. [6] experimentell bestimmt, wobei sich für den axialsymmetrischen Fall widersprüchliche Werte ergeben. Insgesamt ist somit bekannt :

---

<sup>1</sup> Ein Überblick über die diesbezügliche Literatur findet sich in [15] und [18]

Axialsymmetrischer Impulsstrahl	: $\lambda = 1.12$
Axialsymmetrischer Auftriebstrahl	: $\lambda = 0.91$ [1] bzw. 1.16 [6]
Plansymmetrischer Impulsstrahl	: $\lambda = 1.41$
Plansymmetrischer Auftriebstrahl	: $\lambda = 0.88$ [6]

Wenn entsprechende empirische Werte für  $\alpha$  und  $\lambda$  angenommen werden, dann ist das Geschwindigkeits- und Konzentrationsfeld eines vertikalen Auftriebstrahls oder eines beliebig orientierten Impulsstrahls in ruhendem Medium durch die Gleichungen (1.25) und (1.26) vollständig beschrieben. Zur Ermittlung der Achswerte  $u_a$  und  $c_a$  und der Strahlbreite  $b$  stehen die drei Bestimmungsgleichungen (1.15), (1.17) und (1.18) bzw. (1.16), (1.17) und (1.18) zur Verfügung.

Die Lösung dieser miteinander gekoppelten Differentialgleichungen müssen mit Hilfe von Randbedingungen an die Gegebenheiten des jeweils behandelten Falles angepasst werden. Hierfür wird angesetzt

$$b(s_0) = b_0 \quad (1.30)$$

$$u_a(s_1) = u_1 \quad (1.31)$$

$$\theta(s_2) = \theta_2 \quad (1.32)$$

wobei zwei oder alle drei Randbedingungen an ein und demselben Punkt gegeben sein können. Ferner wird definiert

$$\rho = \rho(s_0) = \text{Dichte des Strahlfluids}$$

$$u_0 = u(s_0) = \text{Austrittsgeschwindigkeit des Strahls}$$

$$Q_0 = Q(s_0) = \text{Volumenstrom an der Düse}$$

$$q_0 = q(s_0) = \text{Volumenstrom pro Breitereinheit am Düsenschlitz}$$

Wenn der Winkel  $\theta$  zwischen der Strahlachse  $s$  und der Horizontalen nicht konstant bleibt, dann muss ein an die Strahlachse gebundenes, bewegliches  $(s, r)$  bzw.  $(s, n)$  Koordinatensystem eingeführt werden. Dieses kann auf ein ortsfestes  $(z, x)$  Koordinatensystem, dessen  $z$ -Achse senkrecht nach oben gerichtet und dessen  $x$ -Achse horizontal gerichtet ist, bezogen werden (Bild 2.1), wobei gelten muss



$$\frac{dx}{ds} = \cos \Theta \quad (1.33)$$

$$\frac{dz}{ds} = \sin \Theta \quad (1.34)$$

Strahlen mit gekrümmter Achse treten beispielsweise auf, wenn ein Auftriebsstrahl nicht senkrecht, sondern unter einem Winkel zur Vertikalen in ein ruhendes Medium eingeleitet wird, oder wenn Strahlen in eine Querströmung eingeleitet werden. In diesen Fällen treten als zusätzliche Unbekannte der örtliche Neigungswinkel  $\Theta$  der Strahlachse und deren Positionskordinaten  $x_a$  und  $z_a$  auf. Für ihre Bestimmung stehen die geometrischen Bedingungen (1.33) und (1.34) sowie die zusätzliche Impulsgleichung in der zweiten Richtung zur Verfügung.

Im Falle eines Strahls in einer Querströmung kommt allerdings erschwerend hinzu, dass die Voraussetzung annähernd hydrostatischer Druckverteilung nicht mehr zutrifft und deshalb eine weitere empirische Annahme getroffen werden muss (siehe Kap. 4).



## 2 Strahlen in ruhendem Medium

### 2.1 Allgemeines

Die in diesem Abschnitt durchgeführten Untersuchungen beschränken sich auf folgende Fälle :

Axialsymmetrischer Impulsstrahl (  $\Theta$  beliebig)

Axialsymmetrischer Auftriebstrahl (  $\Theta \equiv 90^\circ$ )

Plansymmetrischer Impulsstrahl (  $\Theta$  beliebig)

Plansymmetrischer Auftriebstrahl (  $\Theta \equiv 90^\circ$ )

Entsprechend der Überlegungen im einleitenden Kapitel werden als Verteilungsfunktionen der Geschwindigkeit und des Dichtedefizits Gauss'sche Glockenkurven eingeführt. Für den axialsymmetrischen Fall gilt

$$u(r, s) = u_a(s) \cdot e^{-(r/b)^2} \quad (1.25)$$

$$\rho_e - \rho(r, s) = (\rho_e - \rho_a(s)) e^{-(r/(\lambda b))^2} \quad (2.1)$$

und für den plansymmetrischen Fall

$$u(n, s) = u_a(s) \cdot e^{-(n/b)^2} \quad (1.25)$$

$$\rho_e - \rho(n, s) = (\rho_e - \rho_a(s)) e^{-(n/(\lambda b))^2} \quad (2.2)$$

Als Randbedingungen werden angenommen

$$b(s_0) = b_0 \quad (1.30)$$

$$u_a(s_1) = u_1 \quad (1.31)$$

$$\Theta(s_2) = \Theta_2 = \begin{matrix} (\pi/2 \text{ für Auftriebstrahlen} \\ \text{beliebig für Impulsstrahlen}) \end{matrix} \quad (1.32)$$

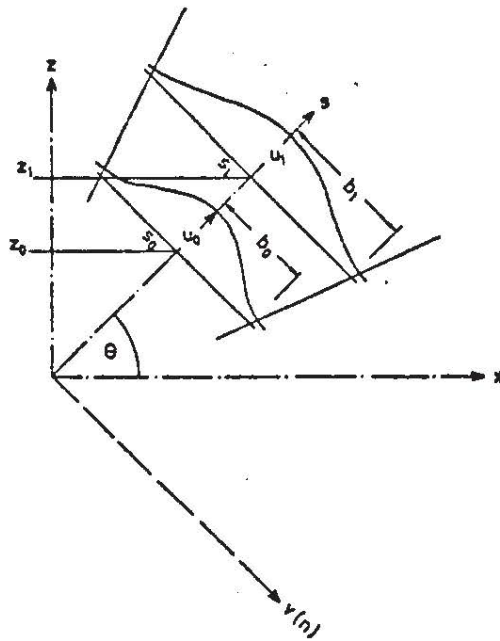


BILD 2.1 SYSTEMSKIZZE FÜR STRAHLEN IN RUHENDEM MEDIUM

### 2.2 Axialsymmetrischer Impulsstrahl

Aus der Tatsache, dass keine Dichteunterschiede bestehen und der Strahl somit keine Impulsänderung erfährt, leitet sich aus (1.19) die Gleichung (2.3) her.

$$\frac{d}{ds} \int_0^{\infty} 2\pi r u^2 dr = 0 \quad (2.3)$$

Die Kontinuität der Wasserströmung führt ausgehend von den Beziehungen (1.21) und (1.29) auf

$$\frac{d}{ds} \int_0^{\infty} 2\pi r u dr = 2\pi \alpha u_a b \quad (2.4)$$

Nach dem Einsetzen von (1.25) und der Ausführung der Integrationen erhält man ein System miteinander gekoppelter Differentialgleichungen

$$\frac{d(u_a^2 b^2)}{ds} = 0 \quad (2.5)$$

$$\frac{d(u_a b^2)}{ds} = 2 \alpha u_a b \quad (2.6)$$

mit den Randbedingungen

$$b(s_0) = b_0 \quad (1.30)$$

$$u_a(s_1) = u_1 \quad (1.31)$$

Aus der Gleichung (2.5) resultiert nach Ausführung der Differentiation

$$\frac{d(u_a b)}{ds} = b \frac{du_a}{ds} + u_a \frac{db}{ds} = 0 \quad (2.7)$$

während man aus der Gleichung (2.6) die Beziehung (2.8) herleiten kann.

$$b \frac{du_a}{ds} + 2 u_a \frac{db}{ds} = 2 \alpha u_a \quad (2.8)$$

Subtrahiert man nun (2.7) von (2.8), so findet man eine Gleichung, die es erlaubt, die Strahlenbreite  $b$  zu ermitteln

$$\frac{db}{ds} = 2 \alpha \quad (2.9)$$

Durch Integration und unter Beachtung der zugehörigen Randbedingungen (1.30) ergibt sich

$$b(s) = b_0 + 2 \alpha (s - s_0) \quad (2.10)$$

Setzt man (2.9) und (2.10) in die Gleichung (2.7) ein, dann kommt man zu einer Bestimmungsgleichung für die Achsgeschwindigkeit

$$\frac{1}{u_a} \cdot \frac{d u_a}{d s} + \frac{2 \alpha}{b_0 + 2 \alpha (s - s_0)} = 0 \quad (2.11)$$

Ihre an die zweite Randbedingung angepasste Lösung lautet

$$u_a(s) = \frac{b_0 + 2 \alpha (s_1 - s_0)}{b_0 + 2 \alpha (s - s_0)} \cdot u_1 \quad (2.12)$$

Wenn die Anfangsgeschwindigkeit im Punkte  $s = s_0 = s_1$  vorgegeben ist, vereinfacht sich die Beziehung (2.12) zu

$$u_a(s) = \frac{b_0}{b_0 + 2 \alpha (s - s_0)} \cdot u_1 \quad (2.13)$$

Setz man in den Gleichungen (2.10) und (2.12)  $b_0 = 0$ , so erhält man

$$b(s) = 2 \alpha (s - s_0) \quad (2.10a)$$

$$u_a(s) = \frac{s_1 - s_0}{s - s_0} \cdot u_1 \quad (2.12a)$$

## 2.2 Axialsymmetrischer Auftriebstrahl

Am Quellpunkt  $s = s_0$  wird ein Dichtedefizit erzeugt, das durch folgende Gleichung beschrieben wird.

$$B_0 = \frac{p_e - p_0}{\rho_e} \cdot g \cdot Q_0 \quad (2.14)$$

Die Kontinuität des Dichtedefizits, das durch die Gleichung

$$B(s) = \int_0^{\infty} 2 \pi r \frac{p_e - p}{\rho_e} \cdot g u \, dr \quad (2.15)$$

gegeben ist, führt unter Beachtung der Beziehungen (1.25) und (2.1) zu der Gleichung

$$\left( \frac{p_e - p_0}{\rho_e} \right) g Q_0 = \left( \frac{p_e - p_a}{\rho_e} \right) \pi g u_a \int_0^{\infty} 2 r e^{-\frac{r^2}{b^2}} \left( 1 + \frac{1}{\lambda^2} \right) dr \quad (2.16)$$

Aus der Impulsgleichung (1.19) ergibt sich unter Beachtung der Tatsache, dass für  $\theta = \pi/2$   $\sin \theta = 1$  ist,

$$\frac{d}{ds} \int_0^{\infty} 2 \pi r u^2 dr = \int_0^{\infty} 2 \pi r \frac{\rho_e - \rho}{\rho_e} \cdot g dr \quad (2.17)$$

Die Kontinuitätsgleichung des Wassers lautet ( mit (1.21) und (1.29) )

$$\frac{d}{ds} \int 2 \pi r u dr = 2 \pi \alpha u_a b \quad (2.4)$$

Wenn man die Integrationen für Gauss'sche Geschwindigkeits- und Dichtedefizitprofile ausführt und in der Impulsgleichung (2.17) den Quotienten  $(\rho_e - \rho_a) / \rho_e$ , der aus (2.16) isoliert werden kann, ersetzt, kommt man zu einem Satz miteinander gekoppelter Differentialgleichungen

$$\frac{d(u_a^2 b^2)}{ds} = \frac{2g Q_0}{\pi/(1+\lambda^2)} \cdot \frac{\rho_e - \rho_0}{\rho_e} \cdot \frac{1}{u_a} \quad (2.18)$$

$$\frac{d(u_a b^2)}{ds} = 2 \alpha u_a b \quad (2.19)$$

aus denen  $u_a$  und  $b$  berechnet werden können, wenn man die zugehörigen Randbedingungen

$$b(s_0) = b_0 \quad (1.30)$$

$$u_a(s_1) = u_1 \quad (1.31)$$

benutzt. Setzt man

$$E = \frac{2g Q_0}{\pi} \cdot \frac{\rho_e - \rho_0}{\rho_e} (1 + \lambda^2) \quad (2.20)$$

multipliziert die beiden Differentialgleichungen (2.18) und (2.19) miteinander und erweitert die neue Gleichung mit  $u_a^2 b^2$ , so erhält man

$$4 \alpha u_a^4 b^4 \frac{d u_a b}{ds} = E u_a b^2 \frac{d u_a b^2}{ds} \quad (2.21)$$

Die Integration dieser Gleichung liefert wegen  $\int f^n df/ds = c + f^{n+1}/(n+1)$  nach kurzer Umformung

$$u_a b^2 = \left( \frac{8\alpha}{5E} \cdot u_a^5 b^5 \right)^{1/2} \quad (2.22)$$

Die Integrationskonstante ist null, weil  $u_a b^2$  für  $(u_a b = 0)$  null wird.

Setzt man (2.22) in (2.19) ein, so ergibt sich eine Gleichung, die die Bestimmung von  $u_a b$  erlaubt.

$$\left( \frac{8\alpha}{5E} \right)^{1/2} \cdot \frac{1}{2} (u_a^5 b^5)^{-1/2} \cdot 5 u_a^4 b^4 \frac{d(u_a b)}{ds} = 2\alpha u_a b \quad (2.23)$$

$$(u_a b)^{1/2} \frac{d(u_a b)}{ds} = \left( \frac{2\alpha E}{5} \right)^{1/2} \quad (2.24)$$

$$(u_a b)^{3/2} = 3 \left( \frac{\alpha E}{10} \right)^{1/2} \cdot s + C \quad (2.25)$$

Die Integrationskonstante berechnet man mit Hilfe der Randbedingung  $b(s_0) = b_0$  bzw.  $u_a(s_0) \cdot b(s_0) = u_0 \cdot b_0$ .

$$u_a b = \left( (u_0 b_0)^{3/2} + 3 \left( \frac{\alpha E}{10} \right)^{1/2} (s - s_0) \right)^{2/3} \quad (2.26)$$

Wenn man den Ausdruck für  $u_a b$  in die Gleichung (2.22) einführt, ergibt sich

$$u_a b^2 = \left( \frac{8\alpha}{5E} \right)^{1/2} \cdot \left( (u_0 b_0)^{3/2} + 3 \left( \frac{\alpha E}{10} \right)^{1/2} (s - s_0) \right)^{5/3} \quad (2.27)$$

Die Gleichungen (2.26) und (2.27) bieten eine Möglichkeit, die gesuchten Grössen  $u_a$  und  $b$  zu isolieren.

$$b(s) = \left( \frac{8\alpha}{5E} \right)^{1/2} \cdot \left( (u_0 b_0)^{3/2} + 3 \left( \frac{\alpha E}{10} \right)^{1/2} (s - s_0) \right) \quad (2.28)$$

$$u_a(s) = \left( \frac{5E}{8\alpha} \right)^{1/2} \cdot \left( (u_0 b_0)^{3/2} + 3 \left( \frac{\alpha E}{10} \right)^{1/2} (s - s_0) \right)^{-1/3} \quad (2.29)$$



Die Auswertung der Randbedingungen  $b(s_0) = b_0$  ergibt

$$(u_0 b_0)^{3/2} = \left( \frac{5E}{8\alpha} \right)^{1/2} \cdot b_0 \quad (2.30)$$

Damit erhält man für die Strahlbreite und Achsgeschwindigkeit die Funktionen

$$b(s) = b_0 + \frac{6}{5} \alpha (s - s_0) \quad (2.31)$$

$$u_a(s) = \left( \frac{5E}{8\alpha} \right)^{1/3} \left( b_0 + \frac{6}{5} \alpha (s - s_0) \right)^{-1/3} \quad (2.32)$$

Wenn man die in (2.20) festgelegte Grösse E einsetzt, lautet die Funktion für die Achsgeschwindigkeit

$$u_a(s) = \left[ \frac{5g Q_0}{\pi 4\alpha} \cdot \frac{\rho_e - \rho_0}{\rho_e} (1 + \lambda^2) / \left( b_0 + \frac{6}{5} \alpha (s - s_0) \right) \right]^{1/3} \quad (2.33)$$

Die Anpassung von (2.33) an die Bedingung (1.31) ergibt die nachfolgende Gleichung

$$u_a(s) = \left[ \frac{5g Q_0}{\pi 4\alpha} \cdot \frac{\rho_e - \rho_0}{\rho_e} (1 + \lambda^2) / \left( \frac{6}{5} \alpha (s - s_1) + \frac{5g Q_0}{\pi 4\alpha} \cdot \frac{\rho_e - \rho_0}{\rho_e} \cdot \frac{1 + \lambda^2}{u_1^3} \right) \right]^{1/3} \quad (2.34)$$

Für den Sonderfall  $b_0 = 0$  erhält man aus den Gleichungen (2.31) und (2.33) die Beziehungen

$$b(s) = \frac{6}{5} \alpha (s - s_0) \quad (2.31a)$$

$$u_a(s) = \left[ \frac{25g Q_0 (1 + \lambda^2)}{24 \cdot \alpha^2 (s - s_0)} \cdot \frac{\rho_e - \rho_0}{\rho_e} \right]^{1/3} \quad (2.33a)$$

Die wesentlichen Gleichungen für axialsymmetrische Strahlen sind in der Tafel 2.1 zusammengestellt

Tafel 2.1 : Axialsymmetrische Strahlen in ruhendem Medium mit konstanter Dichte

	Reiner Impulsstrahl	Vertikaler Auftriebstrahl
Differentialgleichungen	$d(u_a b^2)/ds = 0$	$d(u_a b^2)/ds = 2 \alpha u_a b$
Randbedingungen	$b(s_0) = b_0$ , $u_a(s_1) = u_1$	
Hilfsgrösse	—	$E = (2g Q_0 / \pi) \cdot (1 + \lambda^2) \cdot (\rho_e - \rho_0) / \rho_e$
Achsgeschwindigkeit	$u_a = \frac{b_0 + 2\alpha(s_1 - s_0)}{b_0 + 2\alpha(s - s_0)} u_1$	$u_a = \left[ \frac{5E}{8\alpha} / \left( b_0 + \frac{6}{5}\alpha(s - s_0) \right) \right]^{1/3}$
Strahlbreite	$b = b_0 + 2\alpha(s - s_0)$	$b = b_0 + \frac{6}{5}\alpha(s - s_0)$



## 2.4 Plansymmetrischer Impulsstrahl

Da kein Dichteunterschied vorhanden ist und der eingeführte Impuls sich nicht ändert, kann man aus der Gleichung (1.20) herleiten

$$2 \frac{d}{ds} \int_0^{\infty} u^2 dn = 0 \quad (2.35)$$

Die Kontinuität des Wasserstromes führt über (1.16) und (1.24) auf

$$2 \frac{d}{ds} \int_0^{\infty} u dn = 2 \alpha u_a \quad (2.36)$$

Setzt man (1.25) ein und bestimmt die Integrale, so erhält man zwei miteinander gekoppelte Differentialgleichungen für die Strahlbreite und die Achsgeschwindigkeit.

$$\frac{d(u_a^2 b)}{ds} = 0 \quad (2.37)$$

$$\frac{d(u_a b)}{ds} = \frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}} u_a \quad (2.38)$$

Die zugehörigen Randbedingungen lauten

$$b(s_0) = b_0 \quad (1.30)$$

$$u_a(s_1) = u_1 \quad (1.31)$$

Führt man in (2.37) die Differentiation aus und dividiert durch das Produkt  $u_a^2 b$ , so bekommt man die Gleichung

$$\frac{2}{u_a} \cdot \frac{du_a}{ds} + \frac{1}{b} \cdot \frac{db}{ds} = 0 \quad (2.39)$$

Aus ihr kann nach Durchführung der Integration hergeleitet werden :

$$u_a^2 = C/b \quad (2.40)$$

Die Erfüllung der Forderung (1.31) mit  $s_1 = s_0$  unter Beachtung von

(1.30) liefert die Integrationskonstante

$$C = b_0 \cdot u_0^2 \quad (2.41)$$

Damit besteht zwischen Achsgeschwindigkeit und Strahlbreite die Relation

$$u_a^2 = u_0^2 \cdot b_0/b \quad (2.42)$$

Die Kombination von (2.38) und (2.42) ergibt eine Differentialgleichung für b

$$b^{1/2} \cdot \frac{d(b^{1/2})}{ds} = \frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}} \quad (2.43)$$

Die an die Bedingung (1.30) angepasste Lösung ist

$$b(s) = b_0 + \frac{4\alpha}{\sqrt{\pi}} (s - s_0) \quad (2.43)$$

Damit findet man für die Achsgeschwindigkeit den Ausdruck

$$u_a(s) = u_0 \frac{1}{\left(1 + \frac{4\alpha}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{s - s_0}{b_0}\right)^{1/2}} \quad (2.44)$$

Die Beachtung der Randbedingung (1.26) erbringt als Funktion für die Achsgeschwindigkeit

$$u_a(s) = u_1 \cdot \left( \frac{1 + \frac{4\alpha}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{s_1 - s_0}{b_0}}{1 + \frac{4\alpha}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{s - s_0}{b_0}} \right)^{1/2} \quad (2.45)$$

Für den Sonderfall  $b_0 = 0$  findet man aus den Beziehungen (2.43) und (2.45) vereinfachte Gleichungen

$$b(s) = \frac{4\alpha}{\sqrt{\pi}} \cdot (s - s_0) \quad (2.43a)$$

$$u_a(s) = \left( \frac{s_1 - s_0}{s - s_0} \right)^{1/2} \cdot u_1 \quad (2.45a)$$

## 2.5 Plansymmetrischer Auftriebstrahl

Man kann das bei  $s = s_0$  erzeugte Dichtedefizit durch folgende Gleichung beschreiben

$$B_0 = \frac{\rho_e - \rho_0}{\rho_e} g \cdot q_0 \quad (2.46)$$

Die Kontinuität des Dichtedefizites, das durch die Beziehung

$$B(s) = 2 \int_0^{\infty} \frac{\rho_e - \rho}{\rho_e} g u \, dn \quad (2.47)$$

beschrieben wird, fordert  $B_0 = B(s)$ . Mit Hilfe der Beziehungen (1.25) und (2.2) kommt man zur Gleichung

$$\frac{\rho_e - \rho_0}{\rho_e} \cdot g q = \frac{\rho_e - \rho_a}{\rho_e} g u_a \int_0^{\infty} 2 \cdot e^{-\frac{n^2}{b^2} \left(1 + \frac{1}{\lambda^2}\right)} \cdot dn \quad (2.48)$$

Die Impulsgleichung (1.20) liefert mit  $\Theta = \pi/2$  die Beziehung

$$2 \frac{d}{ds} \int_0^{\infty} u^2 \, dn = 2 \int_0^{\infty} \frac{\rho_e - \rho}{\rho_e} g \, dn \quad (2.49)$$

Die Kontinuität des Wasserstromes führt über die Gleichungen (1.22) und (1.29) auf

$$2 \frac{d}{ds} \int u \, dn = 2 \alpha u_a \quad (2.50)$$

Nach der Berechnung der Integrale und Kombination der Beziehungen (2.48) und (2.49) stehen für die gesuchten Größen  $b$  und  $u_a$  zwei miteinander gekoppelte Differentialgleichungen zur Verfügung.

$$\frac{d(u_a^2 b)}{ds} = \frac{q_0 (\rho_e - \rho_0) \sqrt{1 + \lambda^2}}{\sqrt{\pi} \cdot \rho_e} \cdot \frac{1}{u_a} \quad (2.51)$$

$$\frac{d(u_a b)}{ds} = \frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}} \cdot u_a \quad (2.52)$$

Die zugehörigen Randbedingungen lauten

$$b(s_0) = b_0 \quad (1.30)$$

$$u(s_1) = u_1 \quad (1.31)$$

Setzt man zur Abkürzung

$$K = \frac{q_0 (p_e - p_0) \sqrt{1 + \lambda^2}}{\sqrt{\pi} \cdot p_e} \quad (2.53)$$

und multipliziert (2.51) mit  $u_a^2 b$  und (2.52) mit  $u_a b$ , so bekommt man durch eine Multiplikation der beiden erweiterten Gleichungen die Beziehung (2.54), die nach Integration und weiterer Umformung  $u_a b$  als Funktion von  $u_a^2 b$  hervorbringt.

$$(u_a^2 b)^2 \cdot \frac{d(u_a^2 b)}{ds} = \frac{K \sqrt{\pi}}{2 \alpha} (u_a b)^2 \cdot \frac{d(u_a b)}{ds} \quad (2.54)$$

$$u_a^2 b = \left( \frac{K \sqrt{\pi}}{2 \alpha} \right)^{1/3} u_a b \quad (2.55)$$

Die Integrationskonstante in (2.55) ist null, da für  $u_a b = 0$  auch  $u_a^2 b = 0$  ist. Aus (2.53) und (2.55) ergibt sich für die Achsgeschwindigkeit ein konstanter Wert

$$u_a(s) = \left( \frac{q_0 (p_e - p_0) \cdot (1 + \lambda^2)}{2 \alpha \cdot p_e} \right)^{1/3} = \text{const} \quad (2.56)$$

Unter Beachtung von (2.56) findet man in (2.52) eine Gleichung für die Strahlbreite

$$\frac{db}{ds} = \frac{2 \alpha}{\sqrt{\pi}} \quad (2.57)$$

Die Integration liefert, wenn man die Gleichung (1.30) als Randbedingung berücksichtigt,

$$b(s) = b_0 + \frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}} (s - s_0) \quad (2.58)$$

Kann man  $b_0 = 0$  setzen, so ergibt sich

$$b(s) = \frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}} (s - s_0) \quad (2.59)$$

Die Tafel 2.2 enthält alle wesentlichen Beziehungen für plansymmetrische Strahlen.

Tafel 2.2 : Plansymmetrische Strahlen in ruhendem Medium mit konstanter Dichte

	Reiner Impulsstrahl	Vertikaler Auftriebstrahl
Differentialgleichungen	$d(u_a b)/ds = 0$	$d(u_a b)/ds = 2 \alpha u_a / \sqrt{\pi}$ $d(u_a b)/ds = \frac{q_0}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\rho_0 - \rho_0}{\rho_e} \cdot \frac{\sqrt{1+\lambda^2}}{u_a}$
Randbedingungen	$b(s_0) = b_0$	$u_a(s_1) = u_1$
Hilfsgrösse	$K = \frac{q_0}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\rho_0 - \rho_0}{\rho_e} \cdot \sqrt{1+\lambda^2}$	$K = \frac{q_0}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\rho_0 - \rho_0}{\rho_e} \cdot \sqrt{1+\lambda^2}$
Achsgeschwindigkeit	$u_a = \left[ \left( 1 + \frac{4\alpha}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{s_1 - s_0}{b_0} \right) / \left( 1 + \frac{4\alpha}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{s - s_0}{b_0} \right) \right]^{1/2} \cdot u_1$	$u_a = \left[ K \sqrt{\pi} / (2\alpha) \right]^{1/3} = \text{const}$
Strahlbreite	$b = b_0 + \frac{4\alpha}{\sqrt{\pi}} (s - s_0)$	$b = b_0 + \frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}} (s - s_0)$



### 3. Luftblasen in ruhendem, homogenem Medium

#### 3.1 Berücksichtigung der Eigenschaften von Luftblasen

In Anlehnung an [4] wird die örtliche Steiggeschwindigkeit  $u_b$  der Luftblasen als Summe aus der örtlichen Wassergeschwindigkeit  $u$  und der Relativgeschwindigkeit der Blase  $\Delta u_b$  darstellt :

$$u_b = u + \Delta u_b \quad (3.1)$$

Für sehr grosse Luftmengen kann man die Relativgeschwindigkeit  $\Delta u_b$  der Blasen, gegenüber der vom Luftstrom induzierten Wassergeschwindigkeit  $u$  vernachlässigen. Verwendet man hingegen nur sehr kleine Luftmengen, dann überwiegt in (3.1) die Relativgeschwindigkeit  $\Delta u_b$ , und im Grenzfall der Einzelblase (Luftdurchsatz  $\rightarrow 0$ ) wird  $u_b \equiv \Delta u_b$ . Den allgemeinen Fall und die beiden Grenzfälle kann man damit erfassen, dass man beide Summanden in (3.1) mit einem Faktor versieht, den man je nach vorliegendem Fall gleich 1 oder gleich 0 setzt. Man kann also setzen

$$u_b = A \cdot u + B \cdot \Delta u_b \quad (3.2)$$

Die Gleichung (3.2) stellt dar

- mit  $A = B = 1$  den allgemeinen Fall
- mit  $A = 1$  und  $B = 0$  den Grenzfall sehr grosser Luftmengen
- mit  $A = 0$  und  $B = 1$  den Grenzfall sehr kleiner Luftmengen

Das Druckfeld ist wegen der hydrostatischen Druckverteilung beschrieben (mit  $H_0 = P_{atm} / \rho_w g$ ) durch

$$p(s) = \rho_w g \cdot (H_0 + H - s) \quad (3.3)$$

Die Zustandsgleichung idealer Gase sagt aus, dass bei gleichbleibender Temperatur das Produkt aus Luftdichte und örtlichem Absolutdruck konstant sein muss. Hieraus folgt

$$\rho_L(s) = \rho_L(H) \cdot (H_0 + H - s) / H_0 \quad (3.4)$$

Die Beziehung (3.4), die die Kompressibilität der Luft berücksichtigt, findet Verwendung bei der Berechnung der Auftriebskraft. Im übrigen kann,

da die Luftkonzentration im Strömungsfeld mit Ausnahme des Bereichs in unmittelbarer Düsennähe stets klein ist, die Dichte des Wasserluftgemisches der Dichte des Wassers gleichgesetzt werden.

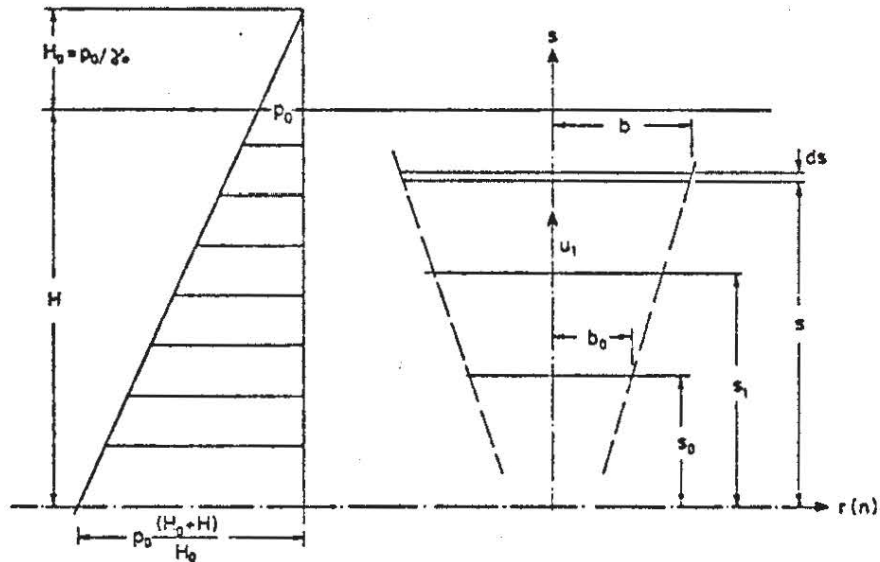


BILD 3.1 SYSTEMSKIZZE FÜR LUFTBLASEN IN RUHENDEM MEDIUM

### 3.2 Luftblasen-Einzeldüse

An der Düse erzeugt die einströmende Luft ein Dichtedefizit, das mit (3.5) beschrieben wird.

$$B_0 = \frac{\rho_e - \rho_l}{\rho_e} \cdot g Q_0 \approx g Q_0 \quad (3.5)$$

Im Abstand  $s$  über der Düse lautet die entsprechende Gleichung

$$B(s) = \int_0^{\infty} 2\pi r \frac{\rho_e - \rho}{\rho_e} g u_b dr \quad (3.6)$$

Beachtet man die Beziehungen (1.25) und (2.1), so liefert die Integration von (3.6)



$$B(s) = \frac{p_e - p_a(s)}{p_e} \lambda^2 b^2 \left( A \frac{u_a}{1 + \lambda^2} + B \Delta u_b \right) \pi g \quad (3.7)$$

### 3.2.1 System bei Vernachlässigung der Kompressibilität der Luft

Die Vernachlässigung der Kompressibilität bedeutet, dass das Dichtedefizit für alle Querschnitte konstant bleibt. An die Stelle der Gleichung (3.4) tritt nun

$$\rho_L(s) = \rho_L = \text{const} \quad (3.8)$$

Mit dieser Beziehung erhält man für das Dichtedefizit

$$B(s) = B_0 = \frac{p_e - p_L}{p_e} g Q_0 \approx g Q_0 \quad (3.9)$$

#### 3.2.1.1 Allgemeiner Fall

Wenn in (3.2) die induzierte Wassergeschwindigkeit und die Relativgeschwindigkeit von gleicher Größenordnung sind, ergibt sich folgendes Gleichungssystem

$$\frac{d(u_a b^2)}{ds} = 2 \alpha u_a b \quad (3.10)$$

$$\frac{d(u_a^2 b^2)}{ds} = \frac{p_e - p_L}{p_e} \cdot \frac{2 Q_0 g}{\pi} \cdot \frac{1 + \lambda^2}{A u_a + B \Delta u_b (1 + \lambda^2)} \quad (3.11)$$

Zusammen mit den Randbedingungen (1.30) und (1.31) ist das Problem vollständig beschrieben.

Mit Hilfe der Transformationsgleichungen

$$E = \frac{2g Q_0}{\pi} \cdot \frac{p_e - p_L}{p_e} (1 + \lambda^2) \quad (3.12)$$

$$V = u_a b^2 = (2\alpha)^{-2} E^2 \Delta u_b^{-5} (1 + \lambda^2)^{-5} \cdot v \quad (3.13)$$

$$W = u_a b = (2\alpha)^{-1} E \Delta u_b^{-2} (1 + \lambda^2)^{-2} w \quad (3.14)$$

$$X = H_0 + H - s = (2\alpha)^{-2} E \Delta u_b^{-3} (1 + \lambda^2)^{-3} x \quad (3.15)$$

lassen sich die Gleichungen (3.10) und (3.11) wie folgt normalisieren:

$$\frac{dv}{dx} = -w \quad (3.16)$$

$$\frac{dw}{dx} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{v}{Aw^3 + Bvw} \quad (3.17)$$

Die entsprechenden Randwerte sind

$$v(x_0) = v_0 = u_0 b_0^2 (2\alpha)^2 E^{-2} \Delta u_b^5 (1 + \lambda^2)^5 \quad (3.18)$$

$$w(x_1) = w_1 = u_1 b_1 2\alpha E^{-1} \Delta u_b^2 (1 + \lambda^2)^2 \quad (3.19)$$

Das Differentialgleichungssystem ist für den allgemeinen Fall  $A = 1$  und  $B = 1$  nichtlinear. Eine geschlossene Lösung kann nicht angegeben werden. Bei Vorliegen entsprechender Anfangsbedingungen  $v_0$  und  $w_0$  kann man eine numerische Lösung berechnen.

### 3.2.1.2 Grenzfall sehr grosser Luftmengen

In der Gleichung (3.2) darf die Relativgeschwindigkeit der Blasen gegenüber der induzierten Wassergeschwindigkeit vernachlässigt werden. Mit  $A = 1$  und  $B = 0$  erhält man ein System von gekoppelten Differentialgleichungen, das geschlossen lösbar ist. Unter Beachtung der Randbedingungen (1.30) und (1.31) hat das System

$$\frac{d(u_a b^2)}{ds} = 2 \alpha u_a b \quad (3.10)$$

$$\frac{d(u_a^2 b^2)}{ds} = \frac{p_e - p_k}{p_e} \cdot \frac{2 Q_0 g (1 + \lambda^2)}{\pi u_a} \quad (3.20)$$

die im Kapitel 2.3 entwickelte Lösung

$$b(s) = b_0 + \frac{6\alpha}{5} (s - s_0) \quad (2.31)$$

$$u_a(s) = \left[ \frac{p_e - p_k}{p_e} \cdot \frac{5 g Q_0}{4 \alpha \pi} \cdot \frac{1 + \lambda^2}{b_0 + \frac{6\alpha}{5} (s - s_0)} \right]^{1/3} \quad (2.33)$$

Mit  $b_0 = 0$  erhält man

$$b(s) = \frac{6}{5} \alpha (s - s_0) \quad (2.31a)$$

$$u_a(s) = \left[ \frac{25 g Q_0 (1 + \lambda^2)}{24 \pi \alpha^2 (s - s_0)} \cdot \frac{p_e - p_k}{p_e} \right]^{1/3} \quad (2.33a)$$

### 3.2.1.3 Grenzfall sehr kleiner Luftmengen

Die Relativgeschwindigkeit der Blasen ist wesentlich grösser als die induzierte Wassergeschwindigkeit. Die letztere darf deshalb vernachlässigt werden. Das Wertepaar  $A = 0$  und  $B = 1$  vereinfacht den Differentialgleichungssatz (3.12) und (3.29) zu

$$\frac{d(u_a b^2)}{ds} = 2 \alpha u_a b \quad (3.10)$$

$$\frac{d(u_a^2 b^2)}{ds} = \frac{p_e - p_u}{p_e} \cdot \frac{2g Q_0}{\Delta u_b} \quad (3.21)$$

Setzt man zur Abkürzung

$$K = \frac{p_e - p_u}{p_e} \cdot \frac{2g Q_0}{\Delta u_b} \quad (3.22)$$

und integriert (3.21), so erhält man unter Beachtung von (1.30) und  $u(s_0) = u_0$

$$u_a^2 b^2 = K(s - s_0) + u_0^2 b_0^2 \quad (3.23)$$

Die Kombination von (3.10) und (3.23) liefert die lineare Differentialgleichung

$$\frac{d(u_a b^2)}{ds} = 2\alpha [K(s - s_0) + u_0^2 b_0^2]^{1/2} \quad (3.24)$$

mit der (1.30) und (1.31) angepassten Lösung

$$u_a b^2 = \frac{4\alpha}{3K} \left\{ [K(s - s_0) + u_0^2 b_0^2]^{3/2} - [K(s_1 - s_0) + u_0^2 b_0^2]^{3/2} \right\} + u_1 b_1^2 \quad (3.25)$$

Aus den Gleichungen (3.23) und (3.25) kann man die Strahlbreite und die Achsgeschwindigkeit berechnen

$$u_a(s) = \frac{K(s - s_0) + u_0^2 b_0^2}{\frac{4\alpha}{3K} \left\{ [K(s - s_0) + u_0^2 b_0^2]^{3/2} - [K(s_1 - s_0) + u_0^2 b_0^2]^{3/2} \right\} + u_1 b_1^2} \quad (3.26)$$

$$b(s) = \frac{\frac{4\alpha}{3K} \left\{ [K(s - s_0) + u_0^2 b_0^2]^{3/2} - [K(s_1 - s_0) + u_0^2 b_0^2]^{3/2} \right\} + u_1 b_1^2}{[K(s - s_0) + u_0^2 b_0^2]^{1/2}} \quad (3.27)$$

Aus (3.27) ergibt sich für  $s = s_1$  die Beziehung

$$u_1 b_1 = [K(s_1 - s_0) + u_0^2 b_0^2]^{1/2} \quad (3.28)$$



während aus (3.26) mit  $s = s_0$

$$u_1 b_1^2 = u_0 b_0^2 + \frac{4\alpha}{3K} \left\{ [K(s_1 - s_0) + u_0^2 b_0^2]^{3/2} - u_0^3 b_0^3 \right\} \quad (3.29)$$

hervorgeht. Unter Beachtung von (3.28) und (3.29) erhält man als Lösung

$$u_\alpha(s) = \frac{u_1^2 b_1^2 + K(s - s_1)}{\frac{4\alpha}{3K} \left\{ [K(s - s_0) + u_0^2 b_0^2]^{3/2} - [K(s_1 - s_0) + u_0^2 b_0^2]^{3/2} \right\} + u_1 b_1^2} \quad (3.30)$$

$$b(s) = \frac{\frac{4\alpha}{3K} \left\{ [K(s - s_0) + u_0^2 b_0^2]^{3/2} - u_0^3 b_0^3 \right\} + u_0 b_0^2}{[K(s - s_0) + u_0^2 b_0^2]^{1/2}} \quad (3.31)$$

Dabei ist  $K$  gemäss (3.22) definiert. Für den Sonderfall  $b_0 = 0$  und  $s_1 = s_0$  vereinfachen sich die Gleichungen (3.30) und (3.31) zu

$$u_\alpha(s) = \frac{3K^{1/2}}{4\alpha(s - s_0)^{1/2}} = \left[ \frac{g g Q_0 \cdot (p_e - p_L)}{8\alpha \Delta u_b (s - s_0) p_e} \right]^{1/2} \quad (3.30a)$$

$$b(s) = \frac{4}{3} \alpha (s - s_0) \quad (3.31a)$$

### 3.2.2 System mit Berücksichtigung der Kompressibilität der Luft

Unter Beachtung von (3.4) kann man für den Luftstrom pro Zeiteinheit im Querschnitt  $s$  schreiben

$$Q(s) = Q_0 \cdot H_0 / (H_0 + H - s) \quad (3.32)$$

Damit ist das Dichtedefizit an der Stelle  $s$  gegeben durch

$$B(s) = \frac{p_e - p_L}{p_e} \cdot \frac{H_0}{H_0 + H - s} g Q_0 \quad (3.33)$$

### 3.2.2.1 Allgemeiner Fall

Die in der Definition für die örtliche Blasensteiggeschwindigkeit (3.2) eingeführten Faktoren A und B werden zunächst als dimensionslose konstante Größen mitgeführt. Sie haben den Wert 1, wenn die induzierte Wassergeschwindigkeit und die Relativgeschwindigkeit der Blasen von derselben Größenordnung sind. Setzt man (3.6) und (3.33) gleich, so erhält man nach kurzer Umformung die folgende Beziehung für das Dichtedefizit  $\rho_e - \rho_a(s)$  auf der Strahlachse :

$$\frac{\rho_e - \rho_a(s)}{\rho_e} = \frac{\rho_a - \rho_l}{\rho_e} \cdot \frac{(1 + \lambda^2)}{\pi \lambda^2 b^2} \cdot \frac{H_0}{H_0 + H - s} Q_0 \frac{1}{A u_a + B \Delta u_b (1 + \lambda^2)} \quad (3.34)$$

Die Kontinuität der Wasserströmung führt unter Verwendung der Beziehungen (1.21) und (1.29) zur Gleichung

$$\frac{d}{ds} \int_0^{\infty} 2 \pi r u dr = 2 \pi \alpha u_a b \quad (2.4)$$

Durch Berücksichtigung von (1.25) und anschließende Integration erhält man daraus

$$\frac{d(u_a \cdot b^2)}{ds} = 2 \alpha u_a b \quad (3.10)$$

Die Impulsgleichung lautet

$$\frac{d}{ds} \int_0^{\infty} 2 \pi r u^2 dr = \int_0^{\infty} 2 \pi r \frac{\rho_e - \rho}{\rho_e} g dr \quad (2.17)$$

Wenn man die Beziehungen (1.25) und (2.1) einführt, ergibt sich nach Durchführung der Integration die Gleichung

$$\frac{d(u_a^2 b^2)}{ds} = \frac{\rho_e - \rho_a(s)}{\rho_e} 2 g \lambda^2 b^2 \quad (3.35)$$

Setzt man nun (3.34) und (3.35) ein, dann wird

$$\frac{d(u_a^2 b^2)}{ds} = \frac{\rho_e - \rho_l}{\rho_e} \cdot \frac{H_0}{H_0 + H - s} \cdot \frac{2 g Q_0}{\pi} \cdot \frac{1 + \lambda^2}{A \cdot u_a + B \Delta u_b (1 + \lambda^2)} \quad (3.36)$$

Mit den Gleichungen (3.10) und (3.36) hat man ein System miteinander gekoppelter Differentialgleichungen für die gesuchten Grössen  $u_a$  und  $b$  erhalten. Zusammen mit den Randbedingungen (1.30) und (1.31) ist das Problem damit formuliert.

Die Differentialgleichungen (3.10) und (3.36) sowie die Randbedingungen (1.30) und (1.31) werden mit Hilfe folgender Transformationsgleichungen normalisiert

$$E = \frac{2g Q_0 H_0}{\pi} \frac{\rho_e - \rho_L}{\rho_e} (1 + \lambda^2) \quad (3.37)$$

$$V = u_a \cdot b^2 = E \Delta u_b^{-2} (1 + \lambda^2)^{-2} \cdot v \quad (3.38)$$

$$W = u_a b = E^{1/2} \Delta u_b^{-1/2} (1 + \lambda^2)^{-1/2} \cdot w \quad (3.39)$$

$$X = H_0 + H - s = (2\alpha)^{-1} \cdot E^{1/2} \Delta u_b^{-3/2} (1 + \lambda^2)^{-3/2} \cdot x \quad (3.40)$$

Die transformierten Gleichungen lauten

$$\frac{dv}{dx} = -w \quad (3.41)$$

$$\frac{dw}{dx} = -\frac{1}{2x} \cdot \frac{v}{Aw^3 + Bwv} \quad (3.42)$$

Die zugehörigen Randbedingungen haben die Form

$$v(x_0) = v_0 = u_0 b^2 \Delta u_b^2 (1 + \lambda^2)^2 E^{-1} \quad (3.43)$$

$$w(x_1) = w_1 = u_1 b_1 \Delta u_b^{1/2} (1 + \lambda^2)^{1/2} E^{-1/2} \quad (3.44)$$

Für das vorliegende System der miteinander gekoppelten, nichtlinearen Differentialgleichungen ist eine geschlossene Lösung nicht bekannt. Man kann jedoch eine numerische Lösung berechnen, wenn die erforderlichen Anfangswerte vorliegen.

### 3.2.2.2 Grenzfall sehr grosser Luftmengen

Wenn die induzierte Wassergeschwindigkeit so gross ist, dass die Relativgeschwindigkeit der Blasen vernachlässigt werden darf, entstehen die folgenden Gleichungen aus dem allgemeinen System, indem man  $A = 1$  und  $B = 0$  setzt.

$$\frac{d(u_a b^2)}{ds} = 2 \alpha u_a b \quad (3.10)$$

$$\frac{d(u_a^2 b^2)}{ds} = \frac{p_e - p_i}{p_e} \cdot \frac{H_0}{H_0 + H - s} \cdot \frac{2 g Q_0 (1 + \lambda^2)}{u_a} \quad (3.45)$$

oder in normalisierter Form

$$\frac{dv}{dx} = -w \quad (3.46)$$

$$\frac{dw}{dx} = -\frac{1}{2x} \cdot \frac{v}{w^3} \quad (3.47)$$

Die Randwerte sind durch (1.30) und (1.31) bzw. durch (3.43) und (3.44) gegeben. Für das System der nichtlinearen Gleichungen ist eine geschlossene Lösung nicht bekannt.

### 3.2.2.3 Grenzfall sehr kleiner Luftmengen

Wenn die induzierte Geschwindigkeit des Wassers gegenüber der Relativgeschwindigkeit der Blasen vernachlässigbar klein ist, ergeben sich



mit  $A = 0$  und  $B = 1$  aus dem allgemeinen Fall die Gleichungen

$$\frac{d(u_a b^2)}{ds} = 2 \alpha u_a b \quad (3.48)$$

$$\frac{d(u_a^2 b^2)}{ds} = \frac{p_e - p_i}{p_e} \cdot \frac{H_0}{H_0 + H - s} \cdot \frac{2 Q_0}{\Delta u_b} \quad (3.49)$$

bzw. in normalisierter Form

$$\frac{dv}{dx} = -w \quad (3.50)$$

$$\frac{dw}{dx} = -\frac{1}{2x} \cdot \frac{1}{w} \quad (3.51)$$

Die zugehörigen Randwerte sind durch (1.30) und (1.31) bzw. (3.43) und (3.44) festgelegt. Eine geschlossene Lösung des nichtlinearen Systems ist nicht bekannt.

Kompressibilität der Luft	
beachtet: $\frac{H_0}{H_0 + H - s} \neq 1$	vernachlässigt: $\frac{H_0}{H_0 + H - s} \stackrel{!}{=} 1$
$\frac{d(u_a b^2)}{ds} = 2 \alpha u_a b$	
$\frac{d(u_a b)^2}{ds} = \frac{\rho_e - \rho_e}{\rho_e} \cdot \frac{H_0}{H_0 + H - s} \cdot \frac{2Q}{\pi} \cdot \frac{1 + \lambda^2}{A u_a + \Delta u_b (1 + \lambda^2)} \cdot \frac{2Q}{\pi} \cdot \frac{1 + \lambda^2}{A u_a + \Delta u_b (1 + \lambda^2)}$	
$s = s_0 : b = b_0 \quad , \quad s = s_1 : u_a = u_1$	
Transformationsgleichungen für die Normalisierung des Systems	
$E = \frac{2g Q_0 H_0}{\pi} \cdot \frac{\rho_e - \rho_e}{\rho_e} (1 + \lambda^2)$	$E = \frac{2 Q_0 g}{\pi} \cdot \frac{\rho_e - \rho_e}{\rho_e} (1 + \lambda^2)$
$V = u_a b^2 = E \Delta u_b^{-2} (1 + \lambda^2)^{-2} \cdot v$	$V = u_a b^2 = (2\alpha)^{-2} \cdot E^2 \Delta u_b^{-5} (1 + \lambda^2)^{-5} \cdot v$
$W = u_a b = E^{1/2} \Delta u_b^{-1/2} (1 + \lambda^2)^{-1/2} \cdot w$	$W = u_a b = (2\alpha)^{-2} \cdot E \Delta u_b^{-2} (1 + \lambda^2)^{-2} \cdot w$
$X = H_0 + H - s = (2\alpha)^{-1} E^{1/2} \Delta u_b^{-3/2} (1 + \lambda^2)^{-3/2} \cdot x$	$X = H_0 + H - s = (2\alpha)^{-2} E \Delta u_b^{-3} (1 + \lambda^2)^{-3} \cdot x$
$\frac{dv}{dx} = -w$	
Differentialgleichungen	
Normalisierte	
$\frac{dw}{dx} = -\frac{1}{2x} \cdot \frac{V}{A w^3 + B w v}$	$\frac{dw}{dx} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{v}{A w^3 + B w v}$
Randbedingungen	
$v(x_0) = u_0 b_0^2 E^{-1} \Delta u_b^2 (1 + \lambda^2)^2$	$v(x_0) = u_0 b_0^2 (2\alpha)^2 E^{-2} \Delta u_b^5 (1 + \lambda^2)^5$
$w(x_0) = u_1 b_1 E^{-1/2} \Delta u_b^{1/2} (1 + \lambda^2)^{1/2}$	$w(x_1) = u_1 b_1 E^{-1} \Delta u_b^2 (1 + \lambda^2)^2$

### 3.3 Luftblasen - Düsenreihe

Eine Reihe von Einzeldüsen wirkt mit Ausnahme des Bereichs in unmittelbarer Düsennähe wie ein Düsen Schlitz, sodass praktisch ein plansymmetrisches Problem vorliegt. Die durch eine Düsenreihe einströmende Luftmenge pro Breitereinheit  $q_0$  erzeugt das Dichtedefizit

$$B_0 = \frac{\rho_0 - \rho_L}{\rho_e} g q_0 \quad (3.52)$$

Das Dichtedefizit im Abstand  $s$  oberhalb des Schlitzes wird durch die Funktion (3.53) beschrieben.

$$B(s) = 2 \int_0^{\infty} \frac{\rho_e - \rho}{\rho_e} g u_b dn \quad (3.53)$$

Verwendet man die Gleichungen (1.21), (2.2) und (3.2), so erhält man nach der Ausführung der Integration

$$B(s) = \frac{\rho_e - \rho_a(s)}{\rho_e} g \lambda b \sqrt{\pi} \left( A \frac{u_a}{\sqrt{1+\lambda^2}} + B \Delta u_b \right) \quad (3.54)$$

#### 3.3.1 System bei Vernachlässigung der Kompressibilität der Luft

Die Vernachlässigung der Kompressibilität der Luft führt über die Gleichung

$$\rho_L(s) = \rho_L = \text{const} \quad (3.55)$$

auf ein konstantes Dichtedefizit von

$$B(s) = \frac{\rho_e - \rho_L}{\rho_e} g q_0 \quad (3.56)$$

##### 3.3.1.1 Allgemeiner Fall

Die induzierte Geschwindigkeit des Wassers und die Relativgeschwindigkeit der Luftblasen sind von gleicher Grössenordnung. Unter Beachtung von

(1.25), (2.2) und (3.2) liefern die Gleichungen (1.20) und (1.22) das Differentialgleichungssystem (3.57) und (3.58)

$$\frac{d(u_a b)}{ds} = \frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}} u_a \quad (3.57)$$

$$\frac{d(u_a^2 b)}{ds} = \frac{\sqrt{2} g q_0}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{p_e - p_L}{p_e} \cdot \frac{1}{A \frac{u_a}{\sqrt{1+\lambda^2}} + B \Delta u_b} \quad (3.58)$$

Zu diesem Gleichungssystem gehören die Randbedingungen (1.30) und (1.31)

$$b(s_0) = b_0 \quad (1.30)$$

$$u_a(s_1) = u_1 \quad (1.31)$$

Das System der beiden Differentialgleichungen wird mit Hilfe der folgenden Transformationsgleichungen normalisiert. Dabei sei  $L_0$  eine Bezugslänge, z.B.  $(H_0 + H)$ .

$$F_0 = \frac{g q_0 (p_e - p_L)}{\sqrt{2} \alpha p_e} \quad (3.59)$$

$$V = u_a^2 b = \frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}} F_0 \Delta u_b^{-1} \cdot L_0 \cdot v \quad (3.60)$$

$$W = u_a b = \frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}} F_0 (1 + \lambda^2)^{-1/2} \Delta u_b^{-2} \cdot L_0 \cdot w \quad (3.61)$$

$$X = H_0 + H - s = L_0 \cdot x \quad (3.62)$$

$$G = \frac{\sqrt{2} \alpha (1 + \lambda^2) \Delta u_b^3}{g q} \cdot \frac{p_e}{p_e - p_L} \quad (3.63)$$

Als Ergebnis der Transformation erhält man das normalisierte System



$$\frac{dw}{dx} = -G \frac{v}{w} \quad (3.64)$$

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{w}{Av + Bw} \quad (3.65)$$

mit den Randbedingungen

$$v_0(x_0) = v_0 = u_0^2 b_0 \left( \frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}} \right)^{-1} F_0^{-1} \Delta u_b L_0^{-1} \quad (3.66)$$

$$w_1(x_1) = w_1 = u_1 b_1 \left( \frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}} \right)^{-1} F_0^{-1} (1 + \lambda^2)^{1/2} \Delta u_b^2 L \quad (3.67)$$

Das neuformulierte Differentialgleichungssystem (3.57) und (3.58) bzw. (3.64) und (3.65) ist geschlossen nicht lösbar.

### 3.3.1.2 Grenzfall sehr grosser Luftmengen

Wenn die Relativgeschwindigkeit der Blasen gegenüber der induzierten Achsgeschwindigkeit vernachlässigt werden darf, kann  $A = 1$  und  $B = 0$  gesetzt werden, und man bekommt das folgende System von Differentialgleichungen

$$\frac{d(u_a b)}{ds} = \frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}} u_a \quad (3.57)$$

$$\frac{d(u_a^2 b)}{ds} = \frac{\sqrt{2} g q_0}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\rho_e - \rho_i}{\rho_e} \cdot \frac{(1 + \lambda^2)^{1/2}}{u_a} \quad (3.68)$$

oder unter Beachtung der Transformationsgleichungen

$$C = \frac{\sqrt{2} g q_0 (1 + \lambda^2)^{1/2}}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\rho_e - \rho_i}{\rho_e} \quad (3.69)$$

$$V = \left( \frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}} \right)^{1/3} C^{2/3} L_0 v \quad (3.70)$$

$$W = u_a b = \left( \frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}} \right)^{2/3} C^{1/3} L_0 w \quad (3.71)$$

$$\chi = H_0 + H - s = L_0 x \quad (3.62)$$

in normalisierter Form

$$\frac{dv}{dx} = \frac{w}{v} \quad (3.72)$$

$$\frac{dw}{dx} = \frac{v}{w} \quad (3.73)$$

Die zugehörigen Randbedingungen sind für das System (3.57) und (3.68) durch die Beziehungen (1.30) und (1.31) gegeben. Transformiert lauten sie

$$v(x_0) = v_0 = u_0^2 b_0^2 \left( \frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}} \right)^{-1/3} C^{-2/3} L_0^{-1} \quad (3.74)$$

$$w(x_1) = w_1 = u_1 b_1 \left( \frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}} \right)^{-2/3} C^{-1/3} L_0^{-1} \quad (3.75)$$

Es sei darauf hingewiesen, dass die Transformationsgleichungen (3.69) bis (3.71) so gewählt wurden, dass die Grösse  $G$ , die in den Gleichungen (3.63) und (3.64) vorkommt in den transformierten Gleichungen nicht mehr auftritt. Eine Transformation mit Hilfe der Gleichungen (3.59) bis (3.63) ist grundsätzlich ebenfalls möglich. Statt der Gleichungen (3.73) bis (3.75) ergeben sich dann die Gleichungen (3.64), (3.66) und (3.67) mit  $A = 1$  und  $B = 0$ .

Zunächst wird für das System (3.57) und (3.58) ein Lösungsweg aufgezeigt. Wenn man (3.57) mit  $u_a b$  und (3.68) mit  $u_a^2 b$  multipliziert, kann man aus den so erweiterten Gleichungen durch Multiplikation die Differentialgleichung

$$\frac{d(u_a b)^3}{ds} = \frac{2\alpha}{C\sqrt{\pi}} \cdot \frac{d(u_a^2 b)^3}{ds} \quad (3.76)$$

herleiten. Ihre Integration liefert eine Beziehung zwischen  $u_a^2 b$  und  $u_a b$

$$(u_a b)^3 = \frac{2\alpha}{C\sqrt{\pi}} (u_a^2 b)^3 + C_1 \quad (3.77)$$

Die Integrationskonstante  $C_1$  lässt sich aus den Bedingungen (1.31) und  $b(s_1) = b_1$  berechnen, so dass man die Gleichung (3.78) erhält

$$(u_a b)^3 = (u_1 b_1)^3 + \frac{2\alpha}{C\sqrt{\pi}} [(u_a^2 b)^3 - (u_1^2 b_1)^3] \quad (3.78)$$

Setzt man  $u_a$  aus (3.65) in (3.54) ein, dann ergibt sich die Differentialgleichung

$$\frac{d(u_a b)}{ds} \cdot \frac{d(u_a^2 b)}{ds} = \frac{2\alpha C}{\sqrt{\pi}} \quad (3.79)$$

Führt man  $u_a b$  aus (3.78) in (3.79) ein, so findet man eine Differentialgleichung für  $u_a^2 b$

$$\frac{u_a^2 b}{\left\{ (u_1^2 b_1)^3 + \frac{2\alpha}{C\sqrt{\pi}} [(u_a^2 b)^3 - (u_1^2 b_1)^3] \right\}^{1/3}} \cdot \frac{d(u_a^2 b)}{ds} = C \quad (3.80)$$

Die Behandlung von (3.80) liefert das nichttriviale Integral

$$Cs + C_2 = \int \frac{u_a^2 b}{\left\{ (u_1^2 b_1)^3 + \frac{2\alpha}{C\sqrt{\pi}} [(u_a^2 b)^3 - (u_1^2 b_1)^3] \right\}^{1/3}} d(u_a^2 b) \quad (3.81)$$

Für den Sonderfall  $b(s_0) = b_0 = 0$  ergeben sich wesentliche Vereinfachungen. So wird, da die in (3.77) auftretende Integrationskonstante  $C_1$  gleich 0 wird, die Achsgeschwindigkeit

$$u_a = [C\sqrt{\pi}/2\alpha]^{1/3} = \text{const} \quad (3.82)$$

Gleichzeitig liefert (3.54) unter Beachtung von (3.82)

$$b = \frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}} (s - s_0) \quad (3.83)$$

Das Aufsuchen der entsprechenden Lösungen für das normalisierte System (3.72) und (3.73) kann auf folgende Weise geschehen. Man isoliert in (3.72)  $w$  und in (3.73)  $v$  und multipliziert die beiden neuen Gleichungen. Das Ergebnis ist die Differentialgleichung

$$w^2 \frac{dw}{dz} = v^2 \frac{dv}{dz} \quad (3.84)$$

die sich integrieren lässt zu

$$w^3 = v^3 + C_3 \quad (3.85)$$

Die Integrationskonstante ist aus den Bedingungen (3.74) und (3.75) zu bestimmen. So ergibt sich die Funktion

$$w = [w_1^3 + v^3 - v_1^3]^{1/3} \quad (3.86)$$

Setzt man (3.86) in (3.72) ein, so kommt man auf eine Differentialgleichung für  $v$

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{1}{v} [w_1^3 + v^3 - v_1^3]^{1/3} \quad (3.87)$$

die nach Trennung der Variablen wie in Gleichung (3.81) auf ein nicht-triviales Integral führt.

Im Sonderfall  $b(s_0) = b_0 = 0$  ist  $v_0 = 0$ . Mit  $C_3 = 0$  wird dann

$$v = w \quad (3.88)$$

und über (3.72) oder (3.73)

$$v = w = -x + C_4 \quad (3.89)$$



Mit  $v_o = 0$  gilt  $C_4 = x_o$  und damit

$$v = w = x_o - x \quad (3.90)$$

Die Transformationsgleichungen (3.70) und (3.71) lauten unter Beachtung von (3.90)

$$V = u_a^2 b = \left( \frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}} \right)^{1/3} C^{2/3} L_o (x_o - x) \quad (3.91)$$

$$W = u_a b = \left( \frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}} \right)^{2/3} C^{1/3} L_o (x_o - x) \quad (3.92)$$

Der Quotient  $V/W$  liefert die Achsgeschwindigkeit.

$$u_a = [C \sqrt{\pi} / 2\alpha]^{1/3} \quad (3.93)$$

während der Quotient  $W^2/V$  unter Beachtung von (3.62) die Strahbreite ergibt

$$b = \frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}} (s - s_o) \quad (3.94)$$

Setzt man in (3.82) den Ausdruck  $C$  gemäss (3.69) ein, so findet man

$$u_a = \left[ \frac{g q_o (1 + \lambda^2)^{1/2}}{\sqrt{2} \alpha} \cdot \frac{\rho_e - \rho_L}{\rho_e} \right]^{1/3} \quad (3.95)$$

### 3.3.1.3 Grenzfall sehr kleiner Luftmengen

Die Vernachlässigung der induzierten Wassergeschwindigkeiten gegenüber der Relativ geschwindigkeit der Blasen ( $A = 0$ ,  $B = 1$ ) führt auf das folgende Gleichungssystem

$$\frac{d(u_a b)}{ds} = \frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}} u_a \quad (3.57)$$

$$\frac{d(u_a^2 b)}{ds} = \frac{\sqrt{2} g q_o}{\sqrt{\pi} \Delta u_b} \cdot \frac{\rho_e - \rho_L}{\rho_e} = \text{const} \quad (3.96)$$

mit den Randbedingungen (1.30) und (1.31).

Setzt man zur Abkürzung

$$E = \frac{\sqrt{2} g q_0}{\sqrt{\pi} \Delta u_b} \cdot \frac{p_e - p_i}{p_e} \quad (3.97)$$

so kann man aus (3.96) herleiten :

$$u_a^2 b = E s + C_5 \quad (3.98)$$

Aus (1.30) und  $u_a(s_0) = u_0$  lässt sich die Integrationskonstante  $C_5$  berechnen. Damit ergibt sich aus (3.98)

$$u_a^2 b = u_0^2 b_0 + E (s - s_0) \quad (3.99)$$

Multipliziert man (3.57) mit  $u_a b$ , so erhält man unter Berücksichtigung von (3.99) eine Gleichung für  $u_a b$

$$u_a b \frac{d(u_a b)}{dz} = \frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}} [u_0^2 b_0 + E (s - s_0)] \quad (3.100)$$

Durch Integration findet man

$$(u_a b)^2 / 2 = C_6 + \frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}} [u_0^2 b_0 s + E (s - s_0)^2 / 2] \quad (3.101)$$

Die Randbedingungen (1.31) und  $b(s_1) = b_1$  geben die Möglichkeit, die Integrationskonstante  $C_6$  zu ermitteln. Damit erhält man

$$u_a b = \left\{ (u_1 b_1)^2 + \frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}} \left\{ 2 u_a^2 b_0 (s - s_1) + E [(s - s_0)^2 - (s_1 - s_0)^2] \right\} \right\}^{1/2} \quad (3.102)$$

Dividiert man (3.99) durch (3.102), so ergibt sich ein Ausdruck für die Achsgeschwindigkeit

$$u_a = \frac{u_1^2 b_1 + E (s - s_1)}{\left\{ (u_1 b_1)^2 + \frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}} \left\{ 2 u_a^2 b_0 (s - s_1) + E [(s - s_0)^2 - (s_1 - s_0)^2] \right\} \right\}^{1/2}} \quad (3.103)$$

Die Strahlbreite erhält man ähnlich zu

$$b = \frac{(u_0 b_0)^2 + [2 u_0^2 b_0 (s - s_0) + E (s - s_0)^2] \frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}}}{u_0^2 b_0 + E (s - s_0)} \quad (3.104)$$

Im Sonderfall  $b(s_0) = b_0 = 0$  gelten die vereinfachten Gleichungen (3.105) und (3.106)

$$u_a = \frac{u_1^2 b_1 + E (s - s_1)}{\left\{ (u_1 b_1)^2 + \frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}} \left\{ E [(s - s_0)^2 - (s_1 - s_0)^2] \right\} \right\}^{1/2}} \quad (3.105)$$

$$b = \frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}} (s - s_0) \quad (3.106)$$

Ersetzt man in der Gleichung für die induzierte Achsgeschwindigkeit  $u_1 \cdot b_1$  als Funktion von  $u_0 b_0$ , so erhält man

$$u_a = \frac{u_0^2 b_0 + E (s - s_0)}{\left\{ u_0^2 b_0^2 + \frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}} \left\{ 2 u_0^2 b_0 (s - s_0) + E (s - s_0)^2 \right\} \right\}^{1/2}} \quad (3.107)$$

Für den vorliegenden Fall kommt man wegen  $b_0 = 0$  zu einer vereinfachten Gleichung

$$u_a = [E \sqrt{\pi} / 2\alpha]^{1/2} = \text{const} \quad (3.108)$$

Dieselben Lösungen ergeben sich, wenn man von dem normalisierten System (3.64) und (3.65) ausgeht, das wegen  $A = 0$  und  $B = 1$  nun folgendes Aussehen hat :

$$\frac{dw}{dx} = -G \frac{v}{w} \quad (3.64) \quad = \quad (3.109)$$

$$\frac{dv}{dw} = -1 \quad (3.110)$$

Die transformierten Randbedingungen sind in (3.66) und (3.67) angeschrieben. Die Gleichung (3.110) liefert nach Integration und Beachtung von (3.66)

$$v = v_0 + x_0 - x \quad (3.111)$$

Geht man mit  $v$  in die Gleichung (3.64), so erhält man eine Differentialgleichung für  $w$

$$\frac{dw^2}{dx} = -2G(v_0 + x_0 - x) \quad (3.112)$$

deren an (3.67) angepasste Lösung wie folgt lautet :

$$w = [w_1^2 + G\{(v_0 + x_0 - x)^2 - (v_0 + x_0 - x_1)^2\}]^{1/2} \quad (3.113)$$

Ersetzt man in der letzten Gleichung  $w_1$  durch  $w_0$ , so erhält man

$$w = [w_0^2 + G(2v_0 + x_0 - x)(x_0 - x)]^{1/2} \quad (3.114)$$

Die Transformationsgleichungen (3.60) und (3.61) nehmen nun folgende Formen an

$$V = u_a^2 b = \frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}} F_{\Delta} u_b^{-1} L_0 (v_0 + x_0 - x) \quad (3.115)$$

$$W = u_a b = \frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}} F_{\Delta} u_b^{-2} L_0 (1 + \lambda^2)^{-1/2} [w_1^2 + G\{(v_0 + x_0 - x)^2 - (v_0 + x_0 - x_1)^2\}]^{1/2} \quad (3.116)$$

Die Quotienten  $V/W$  und  $W^2/V$  liefern die gesuchten Größen  $u_a$  und  $b$ . Unter Beachtung von (3.114) erhält man

$$u_a = u_b (1 + \lambda^2)^{1/2} \frac{v_0 + x_0 - x}{[w_0^2 + G(2v_0 + x_0 - x)(x_0 - x)]^{1/2}} \quad (3.117)$$

als Ausdruck für die induzierte Achsgeschwindigkeit. Die Strahlbreite ist

$$b = \frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}} F_{\Delta} u_b^{-3} L_0 (1 + \lambda^2)^{-1} \frac{w_0^2 + G(2v_0 + x_0 - x)(x_0 - x)}{v_0 + x_0 - x} \quad (3.118)$$

Für  $b_{(s)} = b_0 = 0$  ist von  $v_0 = w_0 = 0$ . Beachtet man noch (3.62), dann erhält man die in (3.106) und (3.108) aufgezeigten Lösungsgleichungen.

### 3.3.2 System mit Berücksichtigung der Kompressibilität der Luft

Unter Beachtung von (3.4) kann man die im Abstand  $s$  oberhalb des Schlitzes pro Zeiteinheit ankommende Luftmenge wie folgt beschreiben

$$q(s) = q_0 H_0 / (H_0 + H - s) \quad (3.119)$$

Für das Dichtedefizit an derselben Stelle gilt die Gleichung

$$B(s) = \frac{p_e - p_L}{p_e} \cdot \frac{g \cdot q_0 \cdot H_0}{H_0 + H - s} \quad (3.120)$$

#### 3.3.2.1 Allgemeiner Fall

Falls in der Gleichung (3.2) beide Summanden von derselben Größenordnung sind ( $A = B = 1$ ), kommt man durch Gleichsetzung der beiden Ausdrücke (3.54) und (3.120) zur Beziehung

$$\frac{p_e - p_a(s)}{p_e} = \frac{\sqrt{2} g q}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{p_e - p_L}{p_e} \cdot \frac{H_0}{H_0 + H - z} \cdot \frac{1}{A \frac{u_a}{\sqrt{1+\lambda^2}} + B \Delta u_b} \quad (3.121)$$

Die Kontinuität des Wassers führt, wenn man von den Beziehungen (1.22) und (1.29) ausgeht, zu der Gleichung

$$\frac{d}{ds} \int_0^\infty 2u \, dn = 2\alpha u_a \quad (3.122)$$

aus der sich durch Integration (3.57) unter Beachtung von (1.19)

$$\frac{d(u_{ab})}{ds} = \frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}} u_a \quad (3.57)$$

ergibt. Eine zweite Gleichung liefert der Satz von der Erhaltung des Impulses. Für  $\theta = \pi/2$  ergibt sich aus der Beziehung (1.20)



$$\frac{d}{ds} \left( \int_0^{\infty} 2 u^2 dn \right) = \int_0^{\infty} 2 \frac{\rho_e - \rho}{\rho_e} g dn \quad (3.123)$$

Setzt man  $u$  gemäss (1.25) ein, so kann man die linke Seite der Gleichung (3.123) integrieren. Das Integral auf der rechten Seite dieser Gleichung lässt sich unter Beachtung von (2.2) berechnen. Aus der Beziehung (3.123) bekommt man nun die Gleichung

$$\frac{d(u_a^2 b)}{ds} = \frac{\sqrt{2} g q}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\rho_e - \rho_L}{\rho_e} \cdot \frac{H_0}{H_0 + H - s} \cdot \frac{1}{A \frac{u_a}{\sqrt{1+\lambda^2}} + B \Delta u_b} \quad (3.124)$$

Die beiden Gleichungen (3.57) und (3.124) stellen ein System miteinander gekoppelter Differentialgleichungen für die Strahlbreite  $b$  und die Achsgeschwindigkeit  $u_a$  dar. Dabei sind die vorgeschriebenen Randbedingungen

$$b(s_0) = b_0 \quad (1.30)$$

$$u(s_1) = u_1 \quad (1.31)$$

zu beachten, mit deren Hilfe die gefundenen Lösungen bestimmten Fällen anzupassen sind.

Die Differentialgleichungen (3.57) und (3.124) sowie die Randbedingungen (1.30) und (1.31) werden mit Hilfe der folgenden vier Transformationsgleichungen normalisiert

$$F = \sqrt{2} g q H_0 (\rho_e - \rho_L) / (\sqrt{\pi} \rho_e) \quad (3.125)$$

$$V = u_a^2 b = F \Delta u_b^{-1} v \quad (3.126)$$

$$W = u_a b = F \Delta u_b^{-2} (1 + \lambda^2)^{-1/2} w \quad (3.127)$$

$$X = H_0 + H - s = \left( \frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}} \right)^{-1} F \Delta u_b^{-3} (1 + \lambda^2)^{-1} x \quad (3.128)$$

Die normalisierten Gleichungen lauten

$$\frac{dw}{dx} = - \frac{v}{w} \quad (3.73)$$

$$\frac{dv}{dx} = - \frac{1}{x} \cdot \frac{w}{Av + Bw} \quad (3.129)$$

$$v(x_0) = v_0 = u_0^2 b_0 F^{-1} \Delta u_b \quad (3.130)$$

$$w(x_1) = w_1 = u_1 b_1 F^{-1} \Delta u_b^2 (1 + \lambda^2)^{1/2} \quad (3.131)$$

Das vorliegende nichtlineare Differentialgleichungssystem ist geschlossen nicht lösbar.

### 3.3.2.2 Grenzfall sehr grosser Luftmengen

Für den Fall, dass die Relativgeschwindigkeit der Blasen gegenüber der induzierten Achsgeschwindigkeit des Wassers vernachlässigbar klein ist, kann  $A = 1$ ,  $B = 0$  gesetzt werden, und es ergeben sich die folgenden Gleichungen

$$\frac{d(uab)}{ds} = \frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}} u_a \quad (3.57)$$

$$\frac{d(u_0^2 b)}{ds} = \frac{\sqrt{2} g q}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\rho_e - \rho_L}{\rho_e} \cdot \frac{H_0}{H_0 + H - s} \cdot \frac{(1 + \lambda^2)^{1/2}}{u_a} \quad (3.132)$$

oder in normalisierter Form

$$\frac{dw}{dx} = - \frac{v}{w} \quad (3.73)$$

$$\frac{dv}{dx} = - \frac{1}{x} \cdot \frac{w}{v} \quad (3.133)$$

Die Randbedingungen sind wieder durch (1.30) und (1.31) bzw. (3.130) und (3.131) gegeben. Eine geschlossene Lösung des Systems ist nicht bekannt.

### 3.3.2.3 Grenzfall sehr kleiner Luftmengen

Wenn man die induzierte Achsgeschwindigkeit des Wassers gegenüber der Relativgeschwindigkeit der Blasen vernachlässigen kann, erhält man das Gleichungssystem

$$\frac{d(u_{\alpha}b)}{ds} = \frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}} u_{\alpha} \quad (3.57)$$

$$\frac{d(u_{\alpha}^2b)}{ds} = \frac{\sqrt{2} g q_0}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{p_e - p_L}{\rho_e} \cdot \frac{H_0}{H_0 + H - s} \cdot \frac{1}{\Delta u_b} \quad (3.79)$$

welches mit Hilfe von (3.125) bis (3.128) in das normalisierte System

$$\frac{dw}{dx} = - \frac{v}{w} \quad (3.73)$$

$$\frac{dv}{dx} = - \frac{1}{x} \quad (3.134)$$

transformiert werden kann. Das System der Differentialgleichungen lässt sich geschlossen lösen. Dabei sind die Randbedingungen (1.30) und (1.31) zu beachten. Setzt man zur Abkürzung

$$A = \frac{\sqrt{2} g q_0 H_0}{\sqrt{\pi} \Delta u_b} \cdot \frac{p_e - p_L}{\rho_e} \quad (3.135)$$

so liefert die Integration von (3.79) den Ausdruck

$$u_{\alpha}^2 b = C_1 - A \ln(H_0 + H - s) \quad (3.136)$$

Aus der Randbedingung (1.30) und mit  $u_0 = u(s_0)$  lässt sich die Integrationskonstante  $C_1$  berechnen.

$$C_1 = u_0^2 b_0 + A \ln(H_0 + H - s_0) \quad (3.137)$$

Setzt man nun (3.137) in (3.136) ein, dann ist

$$u_a^2 b = u_o^2 b_o + A \ln \frac{H_o + H - s_o}{H_o + H - s} \quad (3.138)$$

Multipliziert man (3.57) mit  $u_o b$ , so ergibt sich bei Beachtung von (3.138) eine Gleichung für  $u_o b$ .

$$\frac{d(u_a b)^2}{ds} = \frac{4\alpha}{\sqrt{\pi}} \left( u_o^2 b_o + A \ln \frac{H_o + H - s_o}{H_o + H - s} \right) \quad (3.139)$$

Durch Integration erhält man daraus

$$(u_a b)^2 = \frac{4\alpha}{\sqrt{\pi}} \left( s [u_o^2 b_o + A \ln (H_o + H - s_o)] + A (H_o + H - s) [\ln (H_o + H - s) - 1] \right) + C_2 \quad (3.140)$$

Mit Hilfe der Randbedingungen (1.31) und  $b(s_1) = b_1$  wird die Integrationskonstante  $C_2$  ermittelt.

$$C_2 = (u_1 b_1)^2 - \frac{4\alpha}{\sqrt{\pi}} \left( s_1 [u_o^2 b_o + A \ln (H_o + H - s_o)] + A (H_o + H - s_1) [\ln (H_o + H - s) - 1] \right) \quad (3.141)$$

Durch Einsetzen von  $C_2$  in (3.140) findet man

$$(u_a b)^2 = (u_1 b_1)^2 + \frac{4\alpha}{\sqrt{\pi}} \left( [s - s_1] [u_o^2 b_o + A + A \ln (H_o + H - s_o)] - A \{ (H_o + H - s_1) \ln (H_o + H - s_1) - (H_o + H - s) \ln (H_o + H - s) \} \right) \quad (3.142)$$

Dividiert man (3.142) durch (3.138), so bekommt man als Strahlbreite

$$b = \left\{ (u_1 b_1)^2 + \frac{4\alpha}{\sqrt{\pi}} \left( [s - s_1] [u_o^2 b_o + A + A \ln (H_o + H - s_o)] - A (H_o + H - s_1) \ln (H_o + H - s_1) + A (H_o + H - s) \ln (H_o + H - s) \right) \right\} / \left[ u_o^2 b_o + A \ln (H_o + H - s_o) - A \ln (H_o + H - s) \right] \quad (3.143)$$

Die Bedingung (1.30) bietet eine Möglichkeit, aus (3.143)  $u_1^2 b_1^2$  zu berechnen.

$$u_1^2 b_1^2 = u_0^2 b_0^2 - \frac{4\alpha}{\sqrt{\pi}} \left( [s_0 - s_1] [u_0^2 b_0^2 + A] + A (H_0 + H - s_1) \left[ \ln (H_0 + H - s_0) - \ln (H_0 + H - s_1) \right] \right) \quad (3.144)$$

Ersetzt man in (3.143)  $u_1 b_1$  entsprechend der Gleichung (3.144), dann nimmt die Funktion für die Strahlbreite folgende Form an :

$$b = \left\{ u_0^2 b_0^2 + \frac{4\alpha}{\sqrt{\pi}} \left( [s - s_0] [u_0^2 b_0 + A] (H_0 + H - s) \left[ \ln (H_0 + H - s_0) - \ln (H_0 + H - s) \right] \right) \right\} / \left[ u_0^2 b_0 + A \left\{ \ln (H_0 + H - s_0) - \ln (H_0 + H - s) \right\} \right] \quad (3.145)$$

Für den Sonderfall  $b_0 = 0$  findet man die Gleichung

$$b = \frac{4\alpha}{\sqrt{\pi}} \left( s - (H_0 + H) + \frac{s_0 - s}{\ln \frac{H_0 + H - s}{H_0 + H - s_0}} \right) \quad (3.146)$$

Wenn man aus den Gleichungen (3.138) und (3.145) einen Quotienten bildet, ergibt sich das Quadrat der induzierten Achsgeschwindigkeit

$$u_a^2 = \frac{\left[ u_0 b_0 + A \ln \frac{H_0 + H - s_0}{H_0 + H - s} \right]^2}{u_0^2 b_0^2 + \frac{4\alpha}{\sqrt{\pi}} \left( [s - s_0] [u_0^2 b_0 + A] - A (H_0 + H - s) \ln \frac{H_0 + H - s_0}{H_0 + H - s} \right)} \quad (3.147)$$

Ersetzt man  $u_0^2 b_0^2$  unter Beachtung von  $b(s_1) = b_1$  und (1.31) sowie  $u_0^2 b_0^2$  aus (3.144), dann erhält man für die Achsgeschwindigkeit den nachfolgenden Ausdruck

$$u_a = \left[ u_1^2 b_1 + A \ln \frac{H_0 + H - s_1}{H_0 + H - s} \right] / \left[ u_1^2 b_1^2 + \frac{4\alpha}{\sqrt{\pi}} \left( [s - s_1] [u_1^2 b_1 + A \left\{ 1 - \ln \frac{H_0 + H - s_0}{H_0 + H - s_1} \right\}] - A (H_0 + H - s) \ln \frac{H_0 + H - s_0}{H_0 + H - s} + A (H_0 + H - s) \ln \frac{H_0 + H - s_0}{H_0 + H - s_1} \right) \right]^{1/2} \quad (3.148)$$



Wenn in der Randbedingung (1.30)  $b_0 = 0$  ist, dann kann man aus (3.147) eine einfachere Beziehung für die Achsgeschwindigkeit herleiten.

$$u_a = \frac{\sqrt{A} \ln \frac{H_0 + H - s_0}{H_0 + H - s}}{\left\{ \frac{4\alpha}{\sqrt{\pi}} \left( s - s_0 - (H_0 + H - s) \ln \frac{H_0 + H - s_0}{H_0 + H - s} \right) \right\}^{1/2}} \quad (3.149)$$

Berücksichtigt man noch (3.146), dann findet man für den Sonderfall  $b_0 = 0$

$$u_a = \left[ \frac{A}{b} \ln \frac{H_0 + H - s_0}{H_0 + H - s} \right]^{1/2} \quad (3.150)$$

Bei der Auflösung des entsprechenden normalisierten Systems (3.73) und (3.134) lässt sich wie folgt verfahren. Aus (3.134) erhält man durch Integration unter Beachtung von (3.130)

$$v = v_0 + \ln \frac{x_0}{x} \quad (3.151)$$

Setzt man (3.151) in (3.73) ein, dann führt eine kurze Umformung auf die Differentialgleichung

$$\frac{dw^2}{dx} = -2 \left( v_0 + \ln x_0 - \ln x \right) \quad (3.152)$$

Ihre Lösung unter Berücksichtigung der Randbedingung (3.131) ist

$$w = \left[ w_1^2 + 2 \left[ (1 + v_0) (x_1 - x) + x \ln \frac{x}{x_0} + x_1 \ln \frac{x_0}{x_1} \right] \right]^{1/2} \quad (3.153)$$

Die Transformationsgleichung (3.126) und (3.127) lauten unter Beachtung von (3.151) und (3.152)

$$V = u_a^2 b = F_{\Delta} u_b^{-1} \left( v_0 + \ln \frac{x_0}{x} \right) \quad (3.154)$$

$$W = u_0^2 b = F_{\Delta} u_b^{-2} (1 + \lambda^2)^{-1/2} \left[ w_1^2 + 2 \left[ (1 + v_0) (x_1 - x) + x \ln \frac{x}{x_0} + x_1 \ln \frac{x_0}{x_1} \right] \right] \quad (3.155)$$

Für die weitere Rechnung werden noch zwei Beziehungen bereitgestellt

$$v_0 = u_1^2 b_1 F^{-1} \Delta u_b - \ln \frac{x_0}{x_1} \quad (3.156)$$

$$w_1^2 = u_0^2 b_0^2 F^{-2} \Delta u_b^4 (1 + \lambda^2) - 2 \left[ (1 + v_0)(x_1 - x_0) + x_1 \ln \frac{x_0}{x_1} \right] \quad (3.157)$$

Der Quotient  $W^2/V$  ergibt eine Gleichung für die Strahlbreite

$$b = \left[ u_0^2 b_0^2 + \frac{4\alpha}{\sqrt{\pi}} \left( [s - s_0] [u_0^2 b_0 + F \Delta u_b^{-1}] - (H_0 + H - s) F \Delta u_b^{-1} \ln \frac{H_0 + H - s_0}{H_0 + H - s} \right) \right] / \left[ u_0^2 b_0 + F \Delta u_b^{-1} \ln \frac{H_0 + H - s_0}{H_0 + H - s} \right] \quad (3.158)$$

Die Gleichung für die induzierte Achsgeschwindigkeit liefert der Quotient  $V/W$ .

$$u_a = \left( u_1^2 b_1 + F \Delta u_b^{-1} \ln \frac{H_0 + H - s_1}{H_0 + H - s} \right) / \left[ u_1^2 b_1^2 + \frac{4\alpha}{\sqrt{\pi}} \left[ \left( u_1^2 b_1 + F \Delta u_b^{-1} \left\{ 1 - \ln \frac{H_0 + H - s_0}{H_0 + H - s_1} \right\} \right) (s - s_1) - F u_b^{-1} (H_0 + H - s) \ln \frac{H_0 + H - s_0}{H_0 + H - s} + F u_b^{-1} (H_0 + H - s_1) \ln \frac{H_0 + H - s}{H_0 + H - s_1} \right] \right]^{1/2} \quad (3.159)$$

Wenn man in den Beziehungen (3.158) und (3.159)  $F u_b^{-1} = A$  setzt, gehen sie in die Gleichungen (3.145) und (3.148) über. Im Sonderfall  $b_0 = 0$  gelten die entsprechenden Ausdrücke (3.146) und (3.150).

Übersicht über die rechnerischen Beziehungen für die Luftblasen-Düsenreihe

	Kompressibilität der Luft	
Luftschleier	beachtet: $\frac{H_0}{H_0 + H - s} \neq 1$	vernachlässigt: $\frac{H_0}{H_0 + H - s} \stackrel{!}{=} 1$
Ausgangs -  Differential- gleichungen  Randbedingungen	$\frac{d(u_a^2 b)}{ds} = \frac{\rho_a - \rho_e}{\rho_e} \cdot \frac{\sqrt{2} g q_0}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{H_0}{H_0 + H - s} \cdot \frac{\sqrt{1 + \lambda^2}}{A u_a + \Delta u_b \sqrt{1 + \lambda^2}}$	$\frac{d(u_a^2 b)}{ds} = \frac{\rho_a - \rho_e}{\rho_e} \cdot \frac{\sqrt{2} g q_0}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{1 + \lambda^2}}{A u_a + \Delta u_b \sqrt{1 + \lambda^2}}$
Transformationsgleichungen für die Normalisierung des Systems	$F = \sqrt{2} g q_0 \frac{H_0}{\rho_e} \cdot \frac{\rho_e - \rho_e}{\rho_e} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}}$ $V = u_a^2 b = F \Delta u_b^{-1} v$ $W = u_a b = F \Delta u_b^{-2} (1 + \lambda^2)^{-1/2} w$ $X = H_0 + H - s = \left( \frac{2 \rho_a}{\sqrt{\pi}} \right)^{-1} F u_b^{-3} (1 + \lambda^2)^{-1} x$	$S = s_0 : b = b_0$ $S = s_1 : u_a = u_1$ $F = \frac{g q_0}{\sqrt{2} \alpha} \frac{\rho_e - \rho_e}{\rho_e} ; G = \frac{1 + \lambda^2}{F} u_b^3$ $V = u_a b = \frac{2 \alpha}{\sqrt{\pi}} F \Delta u_b^{-1} L_0 v$ $W = u_a b = \frac{2 \alpha}{\sqrt{\pi}} F \Delta u_b^{-2} L_0 (1 + \lambda^2)^{-1/2} w$ $X = H_0 + H - s = L_0 x$
Differential- gleichungen  Randbedingungen	$\frac{dW}{dx} = - \frac{V}{W}$ $\frac{dV}{dx} = - \frac{1}{x} \cdot \frac{V}{A V + B W}$ $V(x_0) = u_a^2 b F \Delta u_b$ $W(x_1) = u_1 b_1 F^{-1} \Delta u_{b_1}^2 (1 + \lambda^2)^{1/2}$	$\frac{dW}{dx} = - G \frac{V}{W}$ $\frac{dV}{dx} = - \frac{W}{A V + B V}$ $V(x_0) = u_a^2 b_0 \left( \frac{2 \rho_a}{\sqrt{\pi}} \right)^{-1} F^{-1} \Delta u_{b_0} L_0^{-1}$ $W(x_1) = u_{1b_1} \left( \frac{2 \rho_a}{\sqrt{\pi}} \right)^{-1} F^{-1} \Delta u_{b_1}^2 L_0^{-1} (1 + \lambda^2)^{1/2}$

#### 4. Auftriebstrahlen in bewegtem, homogenem Medium

##### 4.1 Vorbemerkungen

Eine Querströmung des Empfängermediums bewirkt eine Umlenkung des Auftriebstrahls aus der vertikalen in Richtung der Querströmung. Infolge der "Umströmung" des Auftriebstrahls im axialsymmetrischen Fall bzw. der Durchströmung des ebenen Auftriebstrahls ist die Voraussetzung einer hydrostatischen Druckverteilung im Strahl nicht mehr erfüllt: dieser Tatsache wird in den Ansätzen global durch Einführen eines Widerstandsbeiwertes Rechnung getragen.

Die analytische Behandlung des Strahls in einer Querströmung erfolgt so, daß für den Strahl entlang seiner nunmehr gekrümmten Achse  $(s, \Theta)$  die in den früheren Kapiteln hergeleiteten Beziehungen in entsprechend modifizierter Form gelten. Der Krümmungsradius der Strahlachse wird hierbei stets als sehr groß im Vergleich zu den Strahlabmessungen angenommen, so daß der Einfluß der Richtungsänderung unberücksichtigt bleiben kann.

Das Geschwindigkeitsfeld wird nun in Anlehnung an die Gleichungen (1.28) beschrieben durch

$$u(s, r, \Theta) = U_H \cos \Theta + u_a(s) e^{-\frac{r^2}{b^2}} \quad (4.1)$$

Als Randbedingungen kann man für bestimmte Punkte  $(x_1, z_1)$  den Einleitungswinkel  $\Theta$ , die Strahlbreite  $b$  und die Achsgeschwindigkeit  $u_a$  vorgeben:

$$\Theta(x_0, z_0) = \Theta_0 \quad (4.2)$$

$$b(x_1, z_1) = b_1 \quad (4.3)$$

$$u_a(x_2, z_2) = u_2 \quad (4.4)$$

Für die hier zu untersuchenden Fälle wird  $x_i = x_0$  und  $z_i = z_0$  für  $i = 1, 2$  angenommen. Damit ist es möglich, von den "Anfangswerten"  $x_0, z_0, \Theta_0, b_0$  und  $u_0$  zu sprechen.

Für die Vertikal- und Horizontalkomponente der Geschwindigkeit

$$u_v = u(s, r, \Theta) \sin \Theta \quad (4.5)$$

$$u_h = u(s, r, \Theta) \cos \Theta \quad (4.6)$$

erhält man mit Gl. (4.1)

$$u_v = \frac{U_H}{2} \sin(2\Theta) + u_a(s) e^{-r^2/b^2} \sin \Theta \quad (4.7)$$

und

$$u_h = U_H \cos^2 \Theta + u_a(s) e^{-r^2/b^2} \cos \Theta \quad (4.8)$$

In Ermanglung besserer Information wird für das Dichtedefizit ebenso wie für das Geschwindigkeitsprofil als erste Näherung eine Gauss'sche Verteilung angenommen gemäß

$$g_e - g(s, r, \Theta) = (g_e - g_a(s)) e^{-r^2/(\lambda b)^2} \quad (4.9)$$

Als Einmischhypothese wird im vorliegenden Fall angesetzt, daß die Menge des pro Längeneinheit der Strahlachse eingemischten Fluids proportional dem Einmischquerschnitt am nominellen Strahlrand und dem Betrag der Differenz der Geschwindigkeitsvektoren  $\underline{U}_j$  und  $\underline{U}_H$  ist:

$$\frac{dQ}{ds} = |\underline{U}_j - \underline{U}_H| 2\pi b \alpha = Q' \quad (4.10)$$



Für den zweidimensionalen Fall gelten die folgenden Beziehungen

$$u(s, n, \theta) = U_H \cos \theta + u_a(s) e^{-n^2/b^2} \quad (4.11)$$

$$u_v = u(s, n, \theta) \sin \theta \quad (4.12)$$

$$u_h = u(s, n, \theta) \cos \theta \quad (4.13)$$

$$u_v = \frac{U_H}{2} \sin(2\theta) + u_a(s) e^{-n^2/b^2} \sin \theta \quad (4.14)$$

$$u_h = U_H \cos^2 \theta + u_a(s) e^{-n^2/b^2} \cos \theta \quad (4.15)$$

$$\rho_e - \rho(s, n, \theta) = (\rho_e - \rho_a(s)) e^{-n^2/(\lambda b)^2} \quad (4.16)$$

$$\frac{dq}{ds} = q' = |U_j - U_H| \cdot 2\alpha \quad (4.17)$$

Aus der Geometrie ergeben sich die beiden Gleichungen

$$\frac{dx}{ds} = \cos \theta \quad (4.18)$$

$$\frac{dz}{ds} = \sin \theta \quad (4.19)$$

#### 4.2 Axialsymmetrischer Auftriebstrahl

Das Dichtedefizit des Auftriebstrahls ist gegeben durch

$$B_0 = \frac{\rho_e - \rho_0}{\rho_e} g Q_0 \quad (4.20)$$

Im Abstand  $z$  oberhalb des Austrittsquerschnitts ergibt sich aus der Definition

$$B(z) = \int_0^\infty 2\pi r \left( \frac{\rho_e - \rho}{\rho_e} \right) g \cdot u_v dr \quad (4.21)$$

unter Beachtung von (4.7) und (4.10) nach Ausführung

der Integration die Beziehung

$$B(z) = \pi g \lambda^2 b^2 \left( \frac{\rho_e - \rho_a(s)}{\rho_e} \right) \left[ U_H \cos \theta \sin \theta + \frac{u_a(s)}{1 + \lambda^2} \sin \theta \right] \quad (4.22)$$

Zu beachten ist, daß hier die Integrationsgrenze nach wie vor zu Unendlich angenommen werden kann, da das Dichtedefizit mit zunehmendem Radialabstand gegen Null geht.

Aus der Kontinuitätsbedingung... für das Dichtedefizit folgt, daß sich dieses mit  $z$  nicht ändern kann und somit ( $B(z) = B_0$ ) sein muß. Aus den Gleichungen (4.20) und (4.22) folgt somit

$$\frac{\rho_e - \rho_a(s)}{\rho_e} = \left( \frac{\rho_e - \rho_0}{\rho_e} \right) \frac{Q_0}{\pi \lambda^2 b^2 \sin \theta \left[ U_H \cos \theta + \frac{u_a(s)}{1 + \lambda^2} \right]} \quad (4.23)$$

Die Kontinuität der Wasserströmung führt gemäß Gl. (4.10) auf die Beziehung

$$\frac{d}{ds} \int_0^{r_0} 2 \pi r u dr = 2 \pi \alpha b | \underline{U}_j - \underline{U}_H | \quad (4.24)$$

wobei gemäß Bild 4.1 gilt

$$| \underline{U}_j - \underline{U}_H | = ( U_H^2 \cdot \sin^2 \theta + u_a^2 )^{1/2} \quad (4.25)$$

Unter Beachtung von (4.1) ergibt sich somit

$$\frac{d}{ds} \int_0^{r_0} 2 \pi r ( U_H \cos \theta + u_a(s) e^{-r^2/b^2} ) dr = 2 \pi \alpha b ( U_H^2 \sin^2 \theta + u_a^2(s) )^{1/2} \quad (4.26)$$

Bei der Integration der linken Seite ist zu beachten, daß der erste Integrand für sehr große Werte von  $r$  nicht gegen Null geht und deshalb nicht bis ( $r_0 = \infty$ ) integriert werden kann. Für das erste Integral wird daher als obere Integrationsgrenze ein Vielfaches der nominellen Strahlbreite  $b$  gewählt,

$$r_0 = \beta \cdot b \quad (4.27)$$

während für das zweite Integral ( $r_0 = \infty$ ) angesetzt werden kann.  
Nach Ausführung der Integration ergibt sich hiermit

$$\frac{d}{ds} [(\beta^2 U_H \cos \theta + u_a(s)) b^2] = 2\alpha b (U_H^2 \sin^2 \theta + u_a^2(s))^{1/2} \quad (4.28)$$

Dadurch, daß der Faktor  $\beta$  als Variable beibehalten wird, ist es möglich, den Einfluß der veränderlichen Integrationsgrenze im ersten Integral weiter zu verfolgen.

Definiert man die je Einheit der Bogenlänge auf den Strahl wirkende Druckkraft infolge der Querströmung zu

$$F_D = C_D \cdot g_e \frac{U_H^2}{2} \cdot \sin^2 \theta \cdot 2b \quad (4.29)$$

dann lassen sich nunmehr die Impulsgleichungen in x- und z - Richtung angeben.

Der Impulsfluß in x - Richtung erfährt eine Änderung aufgrund der Tatsache, daß das eingemischte Fluid bereits Impuls in x - Richtung besitzt, und aufgrund der Druckkraft der Querströmung :

$$\frac{d}{ds} \int_0^{r_0} 2\pi r g_e u^2 \cos \theta dr = 2\pi \alpha g_e b | \underbrace{U_j}_{\sim} - \underbrace{U_H}_{\sim} | U_H + F_D \sin \theta \quad (4.30)$$

Entsprechend ändert sich der Impulsfluß in vertikaler Richtung infolge des Auftriebs und der Druckkraft:

$$\frac{d}{ds} \int_0^{r_0} 2\pi r g_e u^2 \sin \theta dr = \int_0^{r_0} (g_e - g) g 2\pi r dr - F_D \cos \theta \quad (4.31)$$

Aus den Gleichungen (4.30) und (4.31) folgt nach Einsetzen der Beziehungen (4.1), (4.9), (4.23), (4.25) und (4.29), Ausführung der Integrationen ( mit Integrationsgrenzen entsprechend der Behandlung von Gl. (4.26)) und einigem Umformen

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left\{ \pi b^2 \cos \theta \left[ \beta^2 U_H^2 \cos^2 \theta + 2 U_H u_a(s) \cos \theta + \frac{1}{2} u_a^2(s) \right] \right\} = \\ = 2 \pi \alpha b U_H \left[ U_H^2 \sin^2 \theta + u_a^2(s) \right]^{1/2} + C_D \cdot b \cdot U_H^2 \sin^3 \theta \end{aligned} \quad (4.32)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left\{ \pi b^2 \sin \theta \left[ \beta^2 U_H^2 \cos^2 \theta + 2 U_H u_a(s) \cos \theta + \frac{1}{2} u_a^2(s) \right] \right\} = \\ = \left( \frac{\rho_e - \rho_o}{\rho_o} \right) \frac{g Q_o}{\sin \theta \left( U_H \cos \theta + \frac{u_a(s)}{1 + \lambda^2} \right)} - U_H^2 b \cdot \sin^2 \theta \cos \theta \end{aligned} \quad (4.33)$$

Mit den Gleichungen (4.18), (4.19), (4.28), (4.32) und (4.33) stehen nun 5 miteinander gekoppelte Differentialgleichungen für die Berechnung der fünf Unbekannten  $x_a$ ,  $z_a$ ,  $\theta$ ,  $u_a$  und  $b$  zur Verfügung. Als unbekannte Beiwerte sind in den Gleichungen die Variablen  $\alpha, \lambda, C_D$  (sowie  $\beta$  für die Integrationsgrenze) enthalten.

Durch Einführen einer Bezugslänge

$$L_o = H_o + H_w ; H_o \equiv \frac{\rho_{atm}}{\rho_w g} ; H_w = \text{Wassertiefe} \quad (4.34)$$

und einer Bezugsgeschwindigkeit

$$u_o = (g^2 Q_o)^{1/5} \quad (4.35)$$

können folgende dimensionslose Größen definiert werden:

$$\bar{x} = x / L_o \quad (4.36)$$

$$\bar{z} = z / L_o \quad (4.37)$$

$$\bar{s} = s / L_o \quad (4.38)$$

$$\bar{b} = b / L_o \quad (4.39)$$

$$\bar{u}_a = u_a / u_o \quad (4.40)$$

$$\bar{U}_H = U_H / u_o \quad (4.41)$$

Die Substitutionen

$$v = [\beta^2 \bar{U}_H^2 \cos \theta + \bar{u}_a(\bar{s})] \bar{b}^2 \quad (4.42)$$

$$w = [\beta^2 \bar{U}_H^2 \cdot \cos^2 \theta + 2 \bar{U}_H \bar{u}_a(\bar{s}) \cos \theta + \frac{1}{2} \bar{u}_a^2(\bar{s})] \pi \bar{b}^2 \quad (4.43)$$

$$w_h = w \cos \theta \quad (4.44)$$

$$w_v = w \sin \theta \quad (4.45)$$

geben dem Differentialgleichungssystem eine übersichtliche Form:

$$\frac{d\bar{x}}{d\bar{s}} = \cos \theta \quad (4.46)$$

$$\frac{d\bar{z}}{d\bar{s}} = \sin \theta \quad (4.47)$$

$$\frac{dv}{d\bar{s}} = 2\alpha \bar{b} [\bar{U}_H^2 \sin^2 \theta + \bar{u}_a^2(\bar{s})]^{1/2} \quad (4.48)$$

$$\frac{dw_h}{d\bar{s}} = 2\pi\alpha \bar{b} \bar{U}_H [\bar{U}_H^2 \sin^2 \theta + \bar{u}_a^2(\bar{s})]^{1/2} + \bar{b} \bar{U}_H^2 c_D \sin^3 \theta \quad (4.49)$$

$$\frac{dw_v}{d\bar{s}} = \left( \frac{g_e - g_0}{g_e} \right) \frac{u_0^2}{L_0 g \sin \theta \left( \bar{U}_H \cos \theta + \frac{\bar{u}_a(\bar{s})}{1 + \lambda^2} \right)} - \bar{b} \bar{U}_H^2 \sin^2 \theta \cos \theta \quad (4.50)$$

Die zugehörigen Randbedingungen müssen ebenfalls entsprechend normalisiert werden. Das vorliegende System läßt sich geschlossen nicht lösen. Bei bekannten Anfangswerten kann das System jedoch numerisch z.B. nach Runge - Kutta berechnet werden.



#### 4.3 Plansymmetrischer Auftriebstrahl

Für das Dichtedefizit des plansymmetrischen Auftriebstrahls gilt am Austrittsquerschnitt

$$B_0 = \frac{\rho_e - \rho_0}{\rho_e} g q_0 \quad (4.51)$$

und im Abstand z

$$B(z) = 2 \int_0^{\infty} \left( \frac{\rho_e - \rho}{\rho_e} \right) g u_v \, dn \quad (4.52)$$

oder, unter Beachtung von (4.11), (4.12) und (4.16) nach Durchführung der Integration

$$B(z) = \left( \frac{\rho_e - \rho_a(s)}{\rho_e} \right) \sqrt{\pi} g \lambda b \left( \frac{U_H}{2} \sin(2\theta) + \frac{u_a(s) \sin \theta}{\sqrt{1+\lambda^2}} \right) \quad (4.53)$$

Aus der Kontinuitätsbedingung ( $B(z) = \text{const} = B_0$ ) folgt

$$\frac{\rho_e - \rho_a(s)}{\rho_e} = \left( \frac{\rho_e - \rho_0}{\rho_e} \right) \frac{q_0}{\sqrt{\pi} \lambda b} \cdot \frac{1}{\left( \frac{U_H}{2} \sin(2\theta) + \frac{u_a(s) \sin \theta}{\sqrt{1+\lambda^2}} \right)} \quad (4.54)$$

Die Kontinuitätsgleichung der Wasserströmung

$$\frac{d}{ds} \int_0^{r_0} 2 u \, dn = 2 \alpha | \underline{U}_j - \underline{U}_H | \quad (4.55)$$

liefert mit Hilfe von (4.11)

$$\frac{d}{ds} \int_0^{r_0} 2 \left( U_H \cos \theta + u_a(s) e^{-n^2/b^2} \right) dn = 2 \alpha [U_H^2 \sin^2 \theta + u_a^2(s)]^{1/2} \quad (4.56)$$

unter Beachtung der Integrationsgrenzen entsprechend Gl. (4.26)

$$\frac{d}{ds} \left[ \left( \frac{2\beta}{\sqrt{\pi}} \cdot U_H \cos \theta + u_a(s) \right) b \right] = \frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}} [U_H^2 \sin^2 \theta + u_a^2(s)]^{1/2} \quad (4.57)$$

Die Impulsgleichung in x - Richtung lautet

$$\frac{d}{ds} \int_0^{r_0} \rho_e u^2 \cos \theta \, dn = 2\alpha \rho_e [U_H^2 \sin^2 \theta + u_a^2(s)]^{1/2} \cdot U_H + F_D \sin \theta \quad (4.58)$$

und in z - Richtung ergibt sie

$$\frac{d}{ds} \int_0^{r_0} \rho_e u^2 \sin \theta \, dn = \int_0^{r_0} g(\rho_e - \rho) \, dn - F_D \cos \theta \quad (4.59)$$

wobei die Druckkraft infolge Querströmung formal wiederum definiert wird zu

$$F_D = \frac{C_D}{2} \cdot \rho_e U_H^2 \sin^2 \theta \quad (4.60)$$

Nach Einsetzen der Beziehungen (4.11), (4.16), (4.54) und (4.60) in die Impulsgleichungen (4.58) und (4.59) und Ausführung der Integrationen ergeben sich folgende Beziehungen

$$\frac{d}{ds} \left[ \left( \frac{2\beta}{\sqrt{\pi/2}} U_H^2 \cos^2 \theta + 2\sqrt{2} U_H u_a(s) \cos \theta + u_a^2(s) \right) b \cos \theta \right] = \quad (4.61)$$

$$= \frac{2\alpha}{\sqrt{\pi/2}} U_H [U_H^2 \sin^2 \theta + u_a^2(s)]^{1/2} + \frac{C_D}{\sqrt{2\pi}} \cdot U_H^2 \sin^3 \theta \quad (4.62)$$

$$\frac{d}{ds} \left[ \left( \frac{2\beta}{\sqrt{\pi/2}} U_H^2 \cos^2 \theta + 2\sqrt{2} U_H u_a(s) \cos \theta + u_a^2(s) \right) b \sin \theta \right] =$$

$$= \left( \frac{\rho_e - \rho_0}{\rho_e} \right) \frac{\sqrt{2/\pi} \cdot g \rho_0}{\sin \theta \left( U_H \cos \theta + \frac{u_a(s)}{\sqrt{1+\lambda^2}} \right)} - \frac{C_D}{\sqrt{2\pi}} U_H^2 \sin^2 \theta \cos \theta$$

Mit den Gleichungen (4.18), (4.19), (4.57), (4.61) und (4.62) stehen fünf miteinander gekoppelte Differentialgleichungen für die fünf Unbekannten  $x_a$ ,  $z_a$ ,  $\theta$ ,  $u_a$  und  $b$  zur Verfügung, in denen die empirischen Beiwerte  $\alpha$ ,  $\lambda$  und  $C_D$  enthalten sind.

Unter Verwendung der Bezugslänge

$$L_0 = H_0 + H_w \quad (4.34)$$

und der Bezugsgeschwindigkeit

$$u_0 = (g q_0)^{1/3} \quad (4.63)$$

wird das Gleichungssystem mit Hilfe der Gleichungen (4.36) bis (4.41) dimensionslos gemacht. Mit den Substitutionen

$$v = \left[ \frac{2\beta}{\sqrt{\pi}} \bar{U}_H \cos \theta + \bar{u}_a(\bar{s}) \right] \bar{b} \quad (4.64)$$

$$w = \left[ \frac{2\beta}{\sqrt{\pi}} \bar{U}_H^2 \cos^2 \theta + 2\sqrt{2} \bar{U}_H \bar{u}_a \cos \theta + \bar{u}_a^2(\bar{s}) \right] \bar{b} \quad (4.65)$$

$$w_h = w \cos \theta \quad (4.66)$$

$$w_v = w \sin \theta \quad (4.67)$$

bekommt das Differentialgleichungssystem folgende Form:

$$\frac{d\bar{x}}{d\bar{s}} = \cos \theta \quad (4.46)$$

$$\frac{d\bar{z}}{d\bar{s}} = \sin \theta \quad (4.47)$$

$$\frac{d\bar{v}}{d\bar{s}} = \frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}} [\bar{U}_H^2 \sin^2 \theta + \bar{u}_a^2(\bar{s})]^{1/2} \quad (4.68)$$

$$\frac{dw_h}{d\bar{s}} = \frac{2\alpha}{\sqrt{\pi/2}} \bar{U}_H [\bar{U}_H^2 \sin^2 \theta + \bar{u}_a^2(\bar{s})]^{1/2} + \frac{C_D}{\sqrt{2\pi}} \bar{U}_H^2 \sin^3 \theta \quad (4.69)$$

$$\frac{dw_v}{d\bar{s}} = \left( \frac{s_e - s_0}{s_e} \right) \frac{\sqrt{2/\pi}}{\left( \bar{U}_H \cos \theta + \frac{\bar{u}_a(\bar{s})}{\sqrt{1+\lambda^2}} \right) \sin \theta} - \frac{C_D}{\sqrt{2\pi}} \bar{U}_H^2 \sin^2 \theta \cos \theta \quad (4.70)$$

Die Randbedingungen (4.2), (4.3) und (4.4) liefern für den Ursprung ( $x_0 = z_0 = 0$  für  $s = 0$ ) nach der Transformation folgende dimensionslose Beziehungen:

$$\bar{x}_0 = \bar{z}_0 = 0 \quad (4.71)$$

$$\theta_0 = \pi/2 \quad (4.72)$$

Als Anfangsachsgeschwindigkeit wird gemäß [8] in Anlehnung an [24] die Achsgeschwindigkeit des klassischen Auftriebstrahls in ruhendem Medium eingesetzt:

$$\bar{u}_{a0} = \left[ \frac{\sqrt{1+\lambda^2}}{\sqrt{2} \alpha} \right]^{1/3} \quad (4.73)$$

Die Strahlbreite  $\bar{b}_0$  im Ursprung wird als endlich und von null verschieden angenommen; sie wird aus dem (empirisch ermittelten) Abstand  $z_0$  zwischen "analytischem Ursprung" - d. h. dem Ort, an dem bei Rückwärtsextrapolation des voll ausgebildeten Strömungsfeldes die Strahlbreite  $b$  gleich Null werden würde - und tatsächlichem Austrittsquerschnitt bestimmt gemäß der Beziehung

$$\bar{b}_0 = \frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}} \cdot z_0^* \quad (4.74)$$

Aus den Definitionsgleichungen (4.64) und (4.65) ergeben sich hiermit die Anfangswerte für  $v$  und  $w$ :

$$v_0 = \left[ \frac{2\beta}{\sqrt{\pi}} \bar{U}_H \cos \theta_0 + \bar{u}_{a0} \right] \bar{b}_0 \quad (4.75)$$

$$w_0 = \left[ \frac{2\beta}{\sqrt{\pi/2}} \bar{U}_H^2 \cos^2 \theta_0 + 2\sqrt{2} \bar{U}_H \cdot \bar{u}_{a0} \cos \theta_0 + \bar{u}_{a0}^2 \right] \bar{b}_0 \quad (4.76)$$

Es sei hier noch angemerkt, daß sich nach Gl. (4.64) die dimensionslose Breite  $\bar{b}$  angeben läßt als

$$\bar{b} = v / \left[ \frac{2\beta}{\sqrt{\pi}} \bar{U}_H \cos \theta + \bar{u}_a(s) \right] \quad (4.77)$$

Substituiert man (4.77) in (4.65), so erhält man eine quadratische Gleichung für  $\bar{u}_a$  mit der Lösung

$$\begin{aligned} \bar{u}_a = & \frac{w}{2v} - \bar{U}_H \sqrt{2} \cos \theta \pm \left[ \left( \frac{w}{2v} - \bar{U}_H \sqrt{2} \cos \theta \right)^2 + \right. \\ & \left. + \frac{2\beta}{\sqrt{\pi}} \cdot \bar{U}_H \cos \theta \left( \frac{w}{v} - \bar{U}_H \sqrt{2} \cdot \cos \theta \right) \right]^{1/2} \end{aligned} \quad (4.78)$$

Das Differentialgleichungssystem (4.46), (4.47), (4.68), (4.69) und (4.70) ist geschlossen nicht lösbar, kann jedoch bei Vorliegen entsprechender Anfangswerte numerisch gelöst werden.

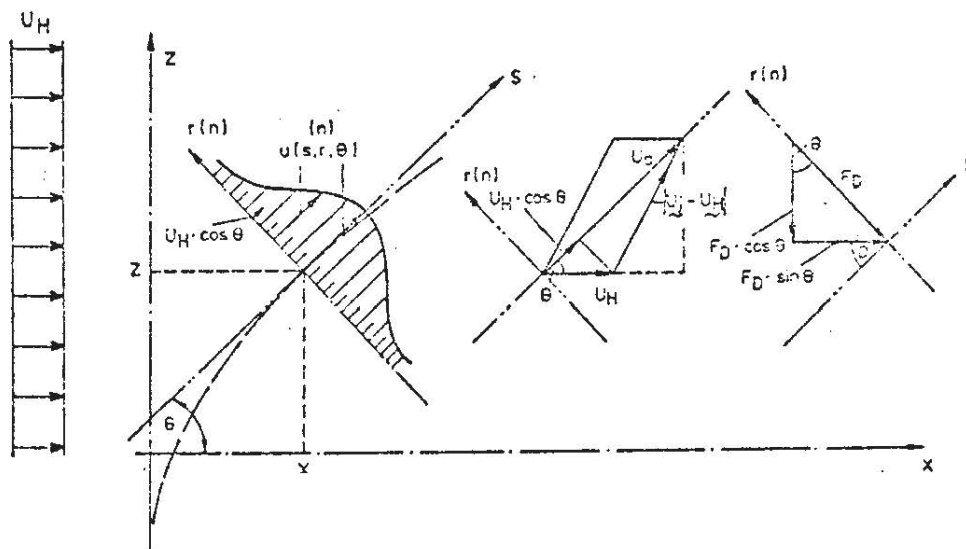


BILD 4.1 BEZUGSYSTEM FÜR LUFTSTRAHLEN IN BEWEGTEM MEDIUM



## 5. Luftblasen in bewegtem, homogenem Medium

### 5.1 Vorbemerkungen

Das Strömungsfeld eines Luftblasenschleiers unterscheidet sich von dem im vorhergehenden Kapitel behandelten Auftriebstrahl in zwei wesentlichen Punkten : infolge der Kompressibilität der Luft ist der Auftrieb über die Wassertiefe nicht konstant, sondern wächst mit abnehmendem Druck, und infolge der endlichen Blasengröße steigt die Luft nicht mit derselben Geschwindigkeit auf wie das umgebende Wasser, sondern weist gegenüber diesem eine Schlupfgeschwindigkeit in vertikaler Richtung auf.

Diese Besonderheiten können in der analytischen Behandlung gemäß Kap.4 formal berücksichtigt werden, wobei jedoch einige konzeptionelle Schwierigkeiten entstehen :

- bei der Berücksichtigung der Kompressibilität der Luft wird stets eine hydrostatische Druckverteilung im gesamten Gewässerkörper vorausgesetzt, während in Kap.4 gezeigt wurde, daß diese Voraussetzung für Strahlen in einer Querströmung nicht zutrifft. Allerdings dürften die Konsequenzen der nicht - hydrostatischen Druckverteilung auf den Auftrieb relativ klein sein, so daß der vereinfachte " hydrostatische" Ansatz vermutlich ausreichend ist.
- die Achse eines Strahls in einer Grundströmung ist gegen die Vertikale geneigt, wohingegen die Relativgeschwindigkeit der Luftblasen gegenüber dem Wasser stets entgegen der Richtung der Schwerkraft gerichtet ist. Dies bedeutet, daß die Horizontal-  
komponenten von Wasser- und Luftgeschwindigkeit gleich sind und sich nur die Vertikalkomponenten um den Schlupf  $\Delta u_b$  unterscheiden.

- wenn die Schlupfgeschwindigkeit der Blasen einen Winkel gegenüber der Strahlachse aufweist, dann ist denkbar, daß der Ort der maximalen Geschwindigkeit nicht notwendigerweise mit dem Ort des größten Dichtedefizits identisch ist, sondern daß sich Geschwindigkeits- und Konzentrationsmaxima mit zunehmendem Abstand vom Ursprung immer weiter voneinander trennen. Eine solche Trennung ist in dem in Kap.4 konzipierten Modell des Strömungsfeldes nicht möglich.

Trotz dieser Bedenken erscheint es gerechtfertigt, das in Kap.4 entwickelte Modell entsprechend zu erweitern, um somit eine Näherungslösung für das Strömungsfeld von Luftblasenschleiern zu erhalten, deren man sich solange bedienen kann, bis ein besseres Verfahren entwickelt ist, das die vorgenannten Schwierigkeiten berücksichtigt.

Die Berücksichtigung der Kompressibilität der Luft bedeutet, daß die Kontinuitätsgleichung für die Luft bei hydrostatischer Druckverteilung lautet

$$B(z) = \frac{\rho_e - \rho_L}{\rho_e} \cdot \frac{g Q_0 H_0}{H_0 + H - z} \quad (5.1)$$

wobei der Luftstrom  $Q_0$  als Volumenstrom unter Atmosphärendruck definiert ist. Im plansymmetrischen Fall ergibt sich

$$B(z) = \frac{\rho_e - \rho_L}{\rho_e} \cdot \frac{g q_0 H_0}{H_0 + H - z} \quad (5.2)$$

Bei Berücksichtigung des Schlupfs  $\Delta u_b$  lauten die örtlichen Luftgeschwindigkeitskomponenten für den axialsymmetrischen Fall

$$u_{bv} = (U_H \cos \theta + u_d(s) e^{-r^2/b^2}) \sin \theta + \Delta u_b \quad (5.3)$$

$$u_{bh} = (U_H \cos \theta + u_d(s) e^{-r^2/b^2}) \cos \theta \quad (5.4)$$

und im plansymmetrischen Fall

$$u_{b,v} = \left[ U_H \cos \theta + u_a(s) e^{-n^2/b^2} \right] \sin \theta + \Delta u_b \quad (5.5)$$

$$u_{b,h} = \left[ U_H \cos \theta + u_a(s) e^{-n^2/b^2} \right] \cos \theta \quad (5.6)$$

Mit diesen Beziehungen können die in Kap. 4 hergeleiteten Gleichungssysteme modifiziert werden, um Kompressibilität und Schlupf entsprechend zu berücksichtigen.

## 5.2 Luftblasen - Einzeldüse

Die Kontinuität der Luftströmung (oder des Dichtedefizits) liefert die Beziehung

$$B(z) = \int_0^{\infty} 2\pi r \left( \frac{\rho_e - \rho}{\rho_e} \right) g u_{bv} dr \quad (5.7)$$

Nach Einsetzen der Gleichungen (4.9) und (5.3) und Ausführung der Integration folgt hieraus

$$B(z) = \pi g \lambda^2 b^2 \left( \frac{\rho_e - \rho_a(s)}{\rho_e} \right) \left[ U_H \cos \theta \sin \theta + \frac{u_a(s)}{1+\lambda^2} \sin \theta + \Delta u_b \right] \quad (5.8)$$

Durch Gleichsetzen der Beziehungen (5.8) und (5.1) ergibt sich folgender Ausdruck für das Dichtedefizit auf der Strahlachse :

$$\frac{\rho_e - \rho_a(s)}{\rho_e} = \left( \frac{\rho_e - \rho_L}{\rho_e} \right) \left( \frac{H_0}{H_0 + H - z} \right) \frac{Q_0}{U_H \cos \theta + \frac{u_a(s)}{1+\lambda^2} \sin \theta + \Delta u_b} \quad (5.9)$$

Die Kontinuitätsgleichung des Wassers lautet gemäß der Herleitung in Kap. 4 unverändert

$$\frac{d}{ds} \left[ (\beta^2 U_H \cos \theta + u_a(s)) b^2 \right] = 2\alpha b (U_H^2 \sin^2 \theta + u_a^2(s))^{1/2} \quad (4.28)$$

und für die Impulsgleichung in x - Richtung ergibt

sich die in Kap. 4 hergeleitete Beziehung (4.32) in unveränderter Form:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left\{ \pi b^2 \cos \theta \left[ \beta^2 U_H^2 \cos^2 \theta + 2 U_H u_a(s) \cos \theta + \frac{1}{2} u_a^2(s) \right] \right\} \\ = 2\pi \alpha b U_H \left[ U_H^2 \sin^2 \theta + u_a^2(s) \right]^{1/2} + C_D \cdot b \cdot U_H^2 \cdot \sin^3 \theta \end{aligned} \quad (4.32)$$

Die Impulsgleichung in z - Richtung lautet

$$\frac{d}{ds} \int_0^{r_0} \rho_e \cdot 2\pi r u^2 \sin \theta \, dr = \int_0^{r_0} (\rho_e - \rho) g \, 2\pi r \, dr - F_D \cos \theta \quad (4.31)$$

wobei das Dichtedefizit im ersten Glied auf der rechten Seite, welches die Auftriebskraft angibt, jetzt ausgedrückt wird durch Einsetzen der Gleichungen (4.9) und (5.9), in welchen die Kompressibilität und der Schlupf der Luftblasen berücksichtigt ist. Unter Zuhilfenahme der Gleichungen (4.1) und (4.29) ergibt sich nach Ausführung der Integrationen die Gleichung

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left\{ \pi b^2 \sin \theta \left[ \beta^2 U_H^2 \cos^2 \theta + 2 U_H u_a(s) \cos \theta + \frac{1}{2} u_a^2(s) \right] \right\} = \\ = \left( \frac{\rho_e - \rho_L}{\rho_e} \right) \left( \frac{H_0}{H_0 + H - z} \right) \frac{g Q_0}{\sin \theta \left( U_H \cos \theta + \frac{u_a(s)}{1 + \lambda^2} \right) + \Delta u_b} - C_D \cdot b \cdot U_H^2 \sin^2 \theta \cos \theta \end{aligned} \quad (5.10)$$

Das Gleichungssystem zur Beschreibung der Unbekannten  $x_a$ ,  $z_a$ ,

$\theta$ ,  $u_a$  und  $b$  ist nun gegeben durch die fünf Gleichungen

(4.18), (4.19), (4.23), (4.32) und (5.10), in welchen die empirischen

Beiwerte  $\alpha$ ,  $\lambda$ ,  $\Delta u_b$  und  $C_D$  enthalten sind.



Mit den Bezugsgrößen  $L_0$  und  $u_0$ , gegeben durch die Gleichungen (4.34) und (4.35), kann das Gleichungssystem in dimensionsloser Form dargestellt werden. Mit den Definitionen (4.36) bis (4.45) sowie

$$\overline{\Delta u_b} = \Delta u_b / u_0 \quad (5.11)$$

lautet das Gleichungssystem

$$\frac{d\bar{x}}{d\bar{s}} = \cos \theta \quad (5.12)$$

$$\frac{d\bar{z}}{d\bar{s}} = \sin \theta \quad (5.13)$$

$$\frac{dv}{d\bar{s}} = 2 \alpha \bar{b} [\bar{U}_H^2 \sin^2 \theta + \bar{u}_a^2(s)]^{1/2} \quad (5.14)$$

$$\frac{dw_h}{d\bar{s}} = 2 \pi \alpha \bar{b} \bar{U}_h (\bar{U}_H^2 \sin^2 \theta + \bar{u}_a^2(s))^{1/2} + C_D \bar{b} \bar{U}_H^2 \sin^3 \theta \quad (5.15)$$

$$(5.16)$$

$$\frac{dw_v}{d\bar{s}} = \left( \frac{\rho_e - \rho_L}{\rho_e} \right) \left( \frac{\bar{H}_0}{1 - \bar{z}} \right) \frac{U_0^2}{g L_0} \cdot \frac{1}{(\bar{U}_H \cos \theta + \frac{u_a(s)}{1 + \lambda^2}) \sin \theta + \overline{\Delta u_b}} - C_D \bar{b} \bar{U}_H^2 \sin^2 \theta \cos \theta$$

Das Gleichungssystem (5.12) bis (5.16) kann für vorgegebene, entsprechend normalisierte Randbedingungen numerisch gelöst werden.

Für den Fall, daß das auftrieberzeugende Medium inkompressibel ist (Näherungslösung für geringe Wassertiefen, bzw. Lösung für den Fall des Aufsteigens spezifisch leichter Feststoffe oder Flüssigkeitstropfen), gelten nach wie vor die Gleichungen (4.18), (4.19), (4.28), (4.32) und (5.10) bzw. (5.12) bis (5.16), wenn in Gl. (5.10) der Quotient  $(H_0 / H_0 + H - z)$  und in Gl. (5.16) der Quotient  $(\bar{H}_0 / 1 - \bar{z})$  jeweils gleich Eins gesetzt wird.



### 5.3 Luftblasen - Düsenreihe

Der Auftrieb der Luftblasen ist gegeben durch

$$B(z) = 2 \int_0^{\infty} \left( \frac{\rho_e - \rho}{\rho} \right) g u_{bv} \, dn \quad (5.17)$$

oder, nach Einsetzen von (4.16) und (5.5) und Integration, durch

$$B(z) = \frac{\rho_e - \rho_a(s)}{\rho_e} \cdot \sqrt{\pi} g \lambda b \left( \frac{U_H}{2} \sin(2\theta) + \frac{u_a(s) \sin \theta}{\sqrt{1+\lambda^2}} + \Delta u_b \right) \quad (5.18)$$

Durch Gleichsetzen von (5.18) und (5.2) erhält man für das Dichtedefizit auf der Strahlachse den Ausdruck

$$\frac{\rho_e - \rho_a(s)}{\rho_e} = \left( \frac{\rho_e - \rho_L}{\rho_e} \right) \left( \frac{H_0}{H_0 + H - z} \right) \frac{q_0}{\sqrt{\pi} \lambda b} \cdot \frac{1}{\left[ \frac{U_H}{2} \sin(2\theta) + \frac{u_a \sin \theta}{\sqrt{1+\lambda^2}} + \Delta u_b \right]} \quad (5.19)$$

Gemäß den Herleitungen in Kap. 4 gilt für die Kontinuität des Wassers

$$\frac{d}{ds} \left[ \left( \frac{2\beta}{\sqrt{\pi}} U_H \cos \theta + u_a(s) \right) b \right] = \frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}} \left[ U_H^2 \sin^2 \theta + u_a^2(s) \right]^{1/2} \quad (4.57)$$

und für die Impulsgleichung in x - Richtung

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left[ \left( \frac{2\beta}{\sqrt{\pi/2}} U_H^2 \cos^2 \theta + 2\sqrt{2} U_H u_a(s) \cos \theta + u_a^2(s) \right) b \cos \theta \right] = \\ = \frac{2\alpha}{\sqrt{\pi/2}} U_H \left[ U_H^2 \sin^2 \theta + u_a^2(s) \right]^{1/2} + \frac{C_D}{\sqrt{2\pi}} U_H^2 \sin^3 \theta \end{aligned} \quad (4.61)$$

Aus der Impulsgleichung in z - Richtung

$$\frac{d}{ds} \int_0^{r_0} \rho_e u^2 \sin \theta \, dn = \int_0^{r_0} g (\rho_e - \rho) \, dn - F_D \cos \theta \quad (4.59)$$

erhält man nach Einsetzen von (4.16) und (5.19) - womit die Kompressibilität und der Schlupf der Luft berücksichtigt ist - sowie der Gleichungen (4.11) und (4.60) und Ausführen

der Integration die Beziehung

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left[ \left( \frac{2\beta}{\sqrt{\pi/2}} U_H^2 \cos^2 \theta + 2\sqrt{2} U_H u_a(s) \cos \theta + u_a^2(s) \right) b \sin \theta \right] = & \quad (5.20) \\ = \left( \frac{\rho_e - \rho_L}{\rho_e} \right) \left( \frac{H_0}{H_0 + H - z} \right) \frac{\sqrt{2/\pi} g q_0}{\left[ (U_H \cos \theta + \frac{u_a(s)}{\sqrt{1+\lambda^2}}) \sin \theta + \Delta u_b \right]} - \frac{C_D}{\sqrt{2\pi}} U_H^2 \sin^2 \theta \cos \theta \end{aligned}$$

Die fünf miteinander gekoppelten Differentialgleichungen (4.18), (4.19), (4.57), (4.61) und (5.20) können zur Bestimmung der Unbekannten  $x_a$ ,  $z_a$ ,  $\theta$ ,  $u_a$  und  $b$  verwendet werden, wenn die empirischen Beiwerte  $\alpha, \lambda, \Delta u_b$  und  $C_D$  bekannt sind.

Mit Einführung der Bezugsgrößen  $L_0$  und  $u_0$  gemäß Gleichung (4.34) und (4.63) kann das Gleichungssystem dimensionslos gemacht werden. Unter Verwendung der Definitionsgleichungen (4.36) bis (4.41) und (4.64) bis (4.67) sowie (5.11) lautet es

$$\frac{d\bar{x}}{d\bar{s}} = \cos \theta \quad (5.21)$$

$$\frac{d\bar{z}}{d\bar{s}} = \sin \theta \quad (5.22)$$

$$\frac{d\bar{v}}{d\bar{s}} = \frac{2\alpha}{\sqrt{\pi/2}} \left[ \bar{U}_H^2 \sin^2 \theta + \bar{u}_a^2(\bar{s}) \right]^{1/2} \quad (5.23)$$

$$\frac{d\bar{w}_h}{d\bar{s}} = \frac{2\alpha}{\sqrt{\pi/2}} \bar{U}_H \left[ \bar{U}_H^2 \sin^2 \theta + \bar{u}_a^2(\bar{s}) \right]^{1/2} + \frac{C_D}{\sqrt{2\pi}} \bar{U}_H^2 \sin^3 \theta \quad (5.24)$$

$$\frac{d\bar{w}_v}{d\bar{s}} = \left( \frac{\rho_e - \rho_L}{\rho_e} \right) \left( \frac{\bar{H}_0}{1 - \bar{z}} \right) \frac{\sqrt{2/\pi}}{\left( \bar{U}_H \cos \theta + \frac{\bar{u}_a(\bar{s})}{\sqrt{1+\lambda^2}} \right) \sin \theta + \Delta u_b} - \frac{C_D}{\sqrt{2\pi}} \bar{U}_H^2 \sin^2 \theta \cos \theta \quad (5.25)$$

Die Randbedingungen sind identisch mit den in Kap. 4.3 hergeleiteten Beziehungen (Gleichungen (4.71) bis (4.76)).

Die Kompressibilität der Luft und die damit verbundene Änderung der Auftriebskraft mit der Höhe  $z$  kommt in dem Quotienten  $(H_0 / H_0 + H - z)$  in Gl. (5.20) bzw. in dem Quotienten  $(H_0 / 1 - \bar{z})$  in Gl.(5.25) zum Ausdruck. Die Gleichungssysteme (4.18), (4.19), (4.57), (4.61) und (5.20) bzw. (5.21) bis (5.25) können daher auch zur Beschreibung von Auftriebstrahlen mit Schlupf, aber ohne Kompressibilität verwendet werden, wenn die beiden Quotienten in den Gl.(5.20) bzw.(5.25) jeweils gleich Eins gesetzt werden.

6. Rechenprogramm für den plansymmetrischen Auftriebsstrahl  
in einer Querströmung

Das angegebene Programm liefert numerische Lösungen für die in den Kapiteln 2.3, 2.4, 3.3, 4.3 und 5.3 abgeleiteten Differentialgleichungssysteme. Die Grundlage für das Programm bildet das Verfahren von Runge - Kutta. Bekannt sein müssen alle Anfangswerte. Die gesamte numerische Rechnung wird in einem Unterprogramm zusammengefaßt, das noch von neun Parametern abhängt. Diese Parameter sind die vier experimentell zu ermittelnden Größen  $\alpha$ ,  $C_D$ ,  $\Delta u_b$  und  $z_o^*$ , die noch wählbare dimensionslose Integrationsgrenze  $\beta$  im ersten Integral der Gleichungen (4.56), (4.58) und (4.59), die numerische Schrittweite  $d_z$  der Berechnung, sowie die vorgegebenen äusseren Bedingungen Wassertiefe  $H_w$ , Luftmenge  $Q_L$  und Horizontalgeschwindigkeit  $U_H$ . Das Programm wird ausgeführt, nachdem die vorgenannten Parameter im Programmaufruf durch aktuelle Werte ersetzt worden sind, wobei die Reihenfolge der aktuellen Parameter mit der Reihenfolge der Platzhalteparameter übereinstimmen muß. Der generelle Aufbau des Programms ist in dem folgenden Flussdiagramm skizziert, während die Details der Rechnung aus dem aufgeschriebenen Algorithmus und dem angefügten Rechnerprotokoll zu entnehmen sind.

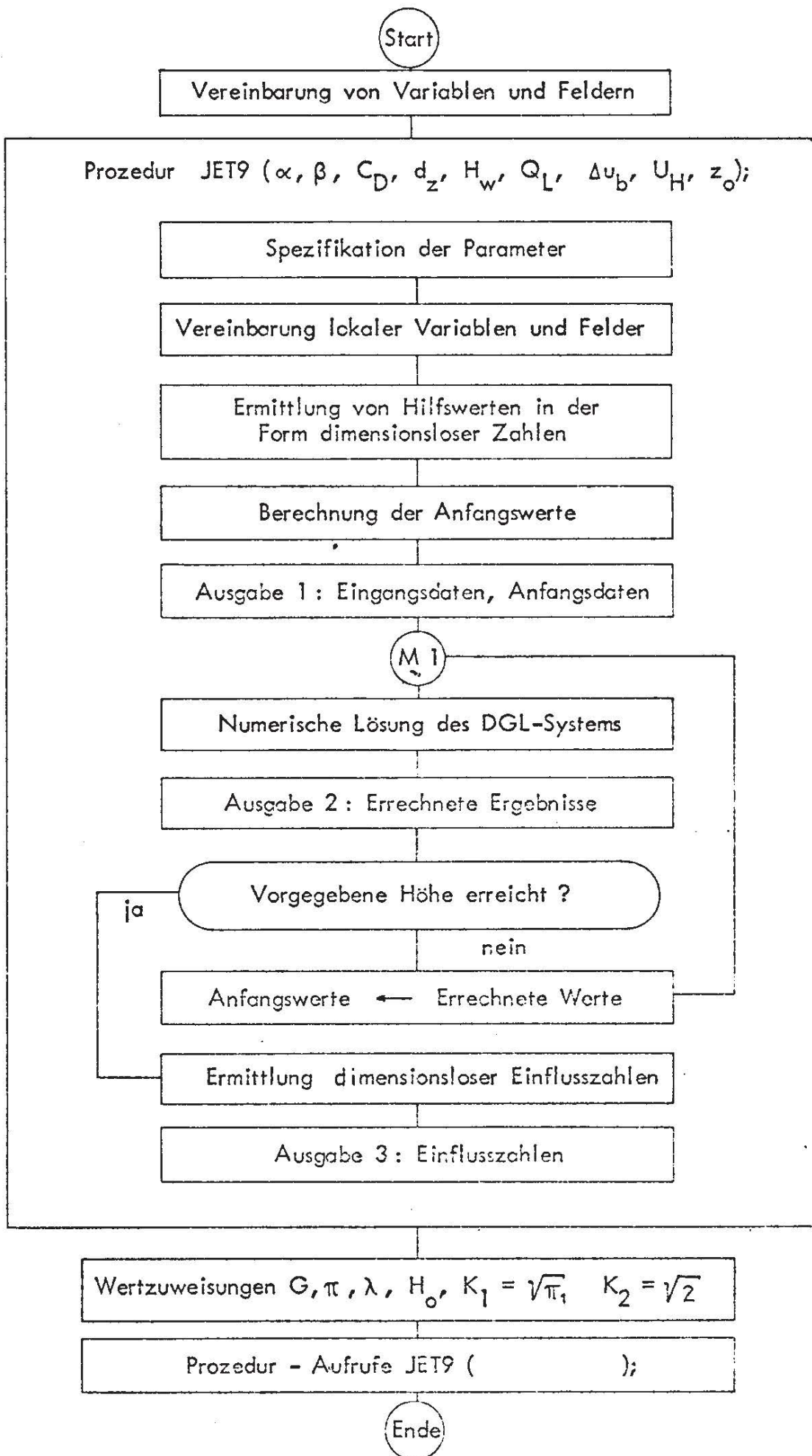


Bild 6.1 : Flussdiagramm für Computerprogramm



Kontinuität

$$\frac{d}{ds} [(2 \frac{\beta}{\sqrt{\pi}} U_H \cos \theta + u_a) b] = \frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}} \sqrt{U_H^2 \sin^2 \theta + u_a^2}$$

X-Impuls

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} [(2 \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \beta U_H^2 \cos^2 \theta + 2\sqrt{2} U_H u_a \cos \theta + u_a^2) b \cos \theta] \\ = \frac{2\sqrt{2}\alpha}{\sqrt{\pi}} U_H \sqrt{U_H^2 \sin^2 \theta + u_a^2} + \frac{C_D}{\sqrt{2\pi}} U_H^2 \sin^3 \theta \end{aligned}$$

Z-Impuls

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} [(2 \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \beta U_H^2 \cos^2 \theta + 2\sqrt{2} U_H u_a \cos \theta + u_a^2) b \sin \theta] \\ = \frac{g q_0 H_0}{\sqrt{\frac{4}{3}} (H_0 + H - z) ((U_H \cos \theta + u_a / \sqrt{1 + \lambda^2}) \sin \theta + \Delta u_b)} - \frac{C_D}{\sqrt{2\pi}} U_H^2 \sin^2 \theta \cos \theta \end{aligned}$$

Geometrie

$$dx/ds = \cos \theta \quad ; \quad dz/ds = \sin \theta$$

Normalisierung der DGL durch Einführung der Bezugsgrößen  $H_0 + H_w$  und  $\sqrt[3]{g q_0}$

$$\bar{x} = x / (H_0 + H_w) \quad ; \quad \bar{z} = z / (H_0 + H_w) \quad ; \quad \bar{s} = s / (H_0 + H_w) \quad ;$$

$$\bar{U}_H = U_H / \sqrt[3]{g q_0} \quad ; \quad \bar{U}_B = \Delta u_b / \sqrt[3]{g q_0} \quad ; \quad \bar{U}_A = u_a / \sqrt[3]{g q_0}$$

Substitution

$$\left. \begin{aligned} v &= (2 \frac{\beta}{\sqrt{\pi}} \bar{U}_H \cos \theta + \bar{U}_A) \bar{b} \\ w &= (2\sqrt{2} \frac{\beta}{\sqrt{\pi}} \bar{U}_H^2 \cos^2 \theta + 2\sqrt{2} \bar{U}_H \bar{U}_A \cos \theta + \bar{U}_A^2) \bar{b} \end{aligned} \right\} \wedge \begin{aligned} \bar{U}_A &= f(v, w, \bar{U}_H, \theta) \\ \bar{b} &= f(\bar{U}_A) \end{aligned}$$

$$\frac{dv}{d\bar{s}} = \frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\bar{U}_H^2 \sin^2 \theta + \bar{U}_A^2}$$

$$\frac{d(w \cdot \cos \theta)}{d\bar{s}} = \frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}} \sqrt{2} \bar{U}_H \sqrt{\bar{U}_H^2 \sin^2 \theta + \bar{U}_A^2} + \frac{C_D}{\sqrt{2\pi}} \bar{U}_H^2 \sin^3 \theta$$

$$\frac{d(w \cdot \sin \theta)}{d\bar{s}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi} (1 - z) ((\bar{U}_H \cos \theta + \bar{U}_A / \sqrt{1 + \lambda^2}) \sin \theta + \Delta u_b)} - \frac{C_D}{\sqrt{2\pi}} \bar{U}_H^2 \sin^2 \theta \cos \theta$$

$$d\bar{x}/d\bar{s} = \cos \theta \quad ; \quad d\bar{z}/d\bar{s} = \sin \theta$$

$$\bar{U}_A = \frac{w}{2v} - \sqrt{2} \bar{U}_H \cos \theta + \sqrt{(\frac{w}{2v} - \bar{U}_H \sqrt{2} \cos \theta)^2 + \frac{2\beta}{\sqrt{\pi}} \bar{U}_H \cos \theta (\frac{w}{v} - \bar{U}_H \sqrt{2} \cos \theta)}$$

$$\bar{b} = \frac{v}{(2\beta/\sqrt{\pi}) \bar{U}_H \cos \theta + \bar{U}_A}$$

Substitutionen für Programmierung

$$R12 = \sqrt[3]{g q_0} \quad ; \quad R11 = 2\alpha / K1 \quad ;$$

$$R1H = H_0 + H_w \quad ; \quad R21 = 2\alpha K2 / K1 \quad ;$$

$$K1 = \sqrt{\pi} \quad ; \quad R22 = C_D / (K1 K2) \quad ;$$

$$K2 = \sqrt{2} \quad ; \quad R31 = \bar{H}_0 K2 / K1 \quad ;$$

$$K3 = 1 / \sqrt{1 + \lambda^2} \quad ; \quad R71 = 2\beta / K1 \quad ;$$

$$K4 = \frac{w}{2v} - \sqrt{2} \bar{U}_H \cos \theta \quad ; \quad K5 = \frac{w}{v} - \bar{U}_H \sqrt{2} \cos \theta \quad ; \quad K6 = \bar{U}_H \sin \theta$$

$$F7 = \bar{U}_A = K4 + \sqrt{K4 K4 + R71 \bar{U}_H \cos \theta K5} ;$$

$$F1 = \sqrt{\bar{U}_H^2 \sin^2 \theta + F7^2} ; \quad w_H = w \cos \theta ;$$

$$F2 = R22 \sin^3 \theta \bar{U}_H^2 ; \quad w_v = w \sin \theta ;$$

$$F3 = 1 / [(1-\bar{z}) ((\bar{U}_H \cos \theta + F7 K3) \sin \theta + \bar{u}_B)]$$

OGL-System :

$$dw/d\bar{s} = R11 \cdot F1$$

$$dw_H/d\bar{s} = R21 \cdot F1 \cdot \bar{U}_H + F2$$

$$dw_v/d\bar{s} = R31 \cdot F3 - R22 \cdot K6 \cdot K6 \cos \theta$$

$$dx/d\bar{s} = \cos \theta$$

$$dz/d\bar{s} = \sin \theta$$

$$\bar{s} = \frac{v}{R71 \cdot \bar{U}_H \cdot \cos \theta + F7}$$

$$\bar{x}_A = F7$$

Anfangswerte :

$$\bar{t}_0 = x_0/BH = 0 ;$$

$$\bar{z}_0 = z_0/BH = 0 ;$$

$$\bar{s}_0 = s_0/BH = 0 ;$$

$$\theta_0 = \pi/2 ; \quad \wedge \cos \theta_0 = 0 !$$

$$\bar{s}_0 = \frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{z_0}{BH} = R11 \cdot \bar{z}_0 ;$$

$$\bar{x}_{A0} = \sqrt[3]{\frac{H_0(1+\lambda^2)^{1/2}}{(H_0+H_w)\alpha\sqrt{2}}} = \sqrt[3]{H_0/(\alpha \cdot K2 \cdot K3)}$$

$$w_0 = (R71 \cdot \bar{U}_H \cos \theta_0 + \bar{u}_{A0}) \bar{B}_0 ;$$

$$w_H = (R71 \cdot K2 \cdot \bar{U}_H^2 \cdot \cos \theta_0 + 2K2 \cdot \bar{U}_H \cdot \bar{u}_{A0} \cdot \cos \theta_0 + \bar{u}_{A0}^2) \bar{B}_0 ;$$

$$w_{H0} = w_0 \cdot \cos \theta_0 ;$$

$$w_v = w_0 \cdot \sin \theta_0 ;$$

Einmischung :

$$\bar{E} = \int u dn = \int_{-\beta b}^{+\beta b} U_H \cdot \cos \theta dn + \int_{-\infty}^{+\infty} u_a e^{-\frac{n^2}{b^2}} dn$$

$$= (2\beta b \cdot U_H \cdot \cos \theta / \sqrt{\pi} + u_a \cdot b) \sqrt{\pi}$$

$$\bar{E} = (2\beta \bar{B} \cdot \bar{U}_H \cdot \cos \theta / \sqrt{\pi} + \bar{u}_A \cdot \bar{B}) \sqrt{\pi}$$

$$= v \cdot K1$$

## 6.3 Computerprogramm JET 9

ALGOL TSV

```

CYCLE 0 COMPILED BY NII ALGOL LEVFL 4.2/030173 ON 27 OCT 73 AT 10:40:54
B1 1 'BEGIN'
2 'COMMENT' LUFTSCHLEIFER IN QUERSTROMUNG $
3 'INTEGER' I, N, H0, HW, UH, UB, QL, Z0, DZ $
4 'REAL' K1, K2, K3, K4, K5, K6, ALPHA, BETA, R0, CD, G, PI, LAMBDA, L, R11, R12, R22,
5 R31 $
6 'ARRAY' V, WH, WV, W, X, S, Z, THETA, UA, SN, CS, UJ,
7 UE, UA1, UJ1, X1, Z1, UE1, F1, F2, F3, F4, F5, F6, F7, B, B1, S1, Q(0:5), K(0:5,0:5) $
8
9
10
11 'PROCEDURE' JET9(ALPHA, BETA, CD, DZ, HW, QL, UB, UH, Z0) $
12
13 'INTEGER' HW, QL, UB, UH, Z0, DZ $
14 'REAL' ALPHA, BETA, CD $
15 'BEGIN'
16 'INTEGER' NN, T $
17 'REAL' MAXI, H01, UH1, UB1, DZ1, R01, Z01, H, BH, UA0, A1, A2, A3, A4, A5, A6, R21, R71,
18 UA01, HILF $
19 'ARRAY' F1, F2, F3, F4, F5, F6, F7, DS1(0:5) $
20 'FORMAT' FF1(R16.13, X4) $
21 'FORMAT' FF2(I5, X2) $
22 'FORMAT' FF3(R10.4) $
23 'FORMAT' FF4(D10.4, X3) $
24 'FORMAT' FF5(I5, X3) $
25 BH:=H0+HW $
26 H01:=H0/BH $
27 MAXI:=HW/DZ $
28 NN:=ENTIFR(MAXI) $
29 R11:=2*ALPHA/K1 $
30 R12:=(G*QL)'POWER'(1/3) $
31 R21:=R11*K2 $
32 R22:=CD/(K1*K2) $
33 R31:=H01*K2/K1 $
34 R71:=2*BETA/K1 $
35 DZ1:=DZ/BH $
36 UB1:=UB/R12 $
37 UH1:=UH/R12 $
38 Z01:=Z0/BH $
39
40
41 'COMMENT' ANFANGSWERTE $
42 X1(0):=Z1(0):=S1(0):=0 $
43 THETA(0):=PI/2 $
44 SN(0):=SIN(THETA(0)) $ CS(0):=COS(THETA(0)) $
45 R01:=R11*Z01 $
46 UA01:=(H01/(ALPHA*K2*K3))'POWER'(1/3) $
47 W(0):=UA01+UA01*R01 $
48 WV(0):=W(0)*SN(0) $ WH(0):=W(0)*CS(0) $
49 V(0):=UA01*R01 $ R0:=R01*BH $ UA0:=UA01*R12 $
50
51
52 'COMMENT' RUNGE KUTTA START $
53 WRITE(CKE1, 'EINGABEPARAMETER', A1, 'ALPHA=', FF1, ALPHA, '<<' BETA='>>',
54 FF1, BETA, '<<' CD='>>', FF1, CD, '<<A1>>') $
55 WRITE(CKE1, 'DZ=', FF2, DZ, '<<' CM, HW='>>', FF2, HW, '<<' CM, QL='>>',
56 FF2, QL) $
57 WRITE(CKE1, 'CM*CM/S, UB=', FF2, UB, '<<' CM/S, A1, 'UH = '>>',
58 FF2, UH) $
59 WRITE(CKE1, 'CM/S, Z0=', FF2, Z0, '<<' CM, A1.1>>') $
60 WRITE(CKE1, 'BEZUGSGROESSEN: H0 UND (G*QL)'POWER'(1/3)', A1>>) $
61 WRITE(CKE1, 'ANFANGSWERTE: R0=', FF1, R0, '<<' CM, UA0='>>', FF1, UA0,

```

B2

100

```

62 <<'CM/S, X=0,7=0,S=0'>>) $
63 WRITE(<<' UND THETA=PI/2',A1.2>>) $
64 WRITE(<<'REIENFOLGE DER AUSGEDRUCKTEN WERTE:',A1,'PUN
65 KT-NR. T, 7-KOORD (CM), X-KOORD (CM), S-BOGENLAENGE (CM), THETA-WINKEL
66 (ALTGRAD),',A1>>) $
67 WRITE(<<'UA - IND.ACHSGESCHWINDIGKEIT (CM/S),UJ-RFS. ACHSGESCHWINDIGKEIT
68 IT(CM/S),',A1,'R - BREITE (CM).DE - FINMISCHUNG (CM*CM/S),',A1.2>>)$
69 WRITE(<<' T Z X S THETA
70 UA UJ R DE',A1.1>>) $
71 I:=T:=1 $
72 X(1):=X1(0) $ Z(1):=Z1(0) $ S(1):=S1(0) $
73 V(1):=V(0) $ WH(1):=WH(0) $ WV(1):=WV(0) $
74 'COMMENT' ALLE ANFANGSWERTE SIND DIMENSIONSLOS $
75
76
77 M1:'COMMENT' ANFANG SCHLEIFE $
78
79
80 'COMMENT' HILFSEUNKTION - SCHRITT 1 $
81 W(1):=SQRT(WH(1)*WH(1)+WV(1)*WV(1)) $
82 SN(1):=WV(1)/W(1) $
83 CS(1):=WH(1)/W(1) $
84 H:=DS1(1):=DZ1/SN(1) $
85 K4:=W(1)/(2*V(1))-UH1*K2*CS(1) $
86 K5:=W(1)/V(1)-UH1*K2*CS(1) $
87 F7(1):=K4+SQRT(K4*K4+R71*UH1*CS(1)*K5) $
88 F1(1):=SQRT(UH1*SN(1)*UH1*SN(1)+F7(1)*F7(1)) $
89 F2(1):=R22*(SN(1)**POWER'3)*UH1*UH1 $
90 F3(1):=1/((1-7(1))*((UH1*CS(1)+K3 *F7(1))*SN(1)+UR1))$
91 K(1,1):=H*R11*F1(1) $
92 K(1,2):=H*(R21*F1(1)*UH1+F2(1)) $
93 K6:=UH1*SN(1) $
94 K(1,3):=H*(R31*F3(1)-R22*K6*K6*CS(1)) $
95 K(1,4):=H*CS(1) $
96 K(1,5):=H*SN(1) $
97 S(2):=S(1)+H/2 $
98 V(2):=V(1)+K(1,1)/2 $
99 WH(2):=WH(1)+K(1,2)/2 $
100 WV(2):=WV(1)+K(1,3)/2 $
101 X(2):=X(1)+K(1,4)/2 $
102 Z(2):=Z(1)+K(1,5)/2 $
103
104
105 'COMMENT' HILFSEUNKTION - SCHRITT 2 $
106 W(2):=SQRT(WH(2)*WH(2)+WV(2)*WV(2)) $
107 SN(2):=WV(2)/W(2) $
108 CS(2):=WH(2)/W(2) $
109 H:=DS1(2):=DZ1/SN(2) $
110 K4:=W(2)/(2*V(2))-UH1*K2*CS(2) $
111 K5:=W(2)/V(2)-UH1*K2*CS(2) $
112 F7(2):=K4+SQRT(K4*K4+R71*UH1*CS(2)*K5) $
113 F1(2):=SQRT(UH1*SN(2)*UH1*SN(2)+F7(2)*F7(2)) $
114 F2(2):=R22*(SN(2)**POWER'3)*UH1*UH1 $
115 F3(2):=1/((1-7(2))*((UH1*CS(2)+K3 *F7(2))*SN(2)+UR1)) $
116 K(2,1):=H*R11*F1(2) $
117 K(2,2):=H*(R21*F1(2)*UH1+F2(2)) $
118 K6:=UH1*SN(2) $
119 K(2,3):=H*(R31*F3(2)-R22*K6*K6*CS(2)) $
120 K(2,4):=H*CS(2) $
121 K(2,5):=H*SN(2) $
122 S(3):=S(1)+H/2 $
123 V(3):=V(1)+K(2,1)/2 $
124 WH(3):=WH(1)+K(2,2)/2 $

```



```

125 WV(3):=WV(1)+K(2,3)/2 $
126 X(3):=X(1)+K(2,4)/2 $
127 Z(3):=Z(1)+K(2,5)/2 $
128
129
130 'COMMENT' HILFSFUNKTION - SCHRITT 3 $
131 W(3):=SQRT(WH(3)*WH(3)+WV(3)*WV(3)) $
132 SN(3):=WV(3)/W(3) $
133 CS(3):=WH(3)/W(3) $
134 H:=DS1(3):=DZ1/SN(3) $
135 K4:=W(3)/(2*V(3))-UH1*K2*CS(3) $
136 K5:=W(3)/V(3)-UH1*K2*CS(3) $
137 F7(3):=K4+SQRT(K4*K4+R71*UH1*CS(3)*K5) $
138 F1(3):=SQRT(UH1*SN(3)*UH1*SN(3)+F7(3)*F7(3)) $
139 F2(3):=R22*(SN(3)^POWER*3)*UH1*UH1 $
140 F3(3):=1/((1-Z(3))*((UH1*CS(3)+K3 *F7(3))*SN(3)+UR1))$
141 K(3,1):=H*R11*F1(3) $
142 K(3,2):=H*(R21*F1(3)*UH1+F2(3)) $
143 K6:=UH1*SN(3) $
144 K(3,3):=H*(R31*F3(3)-R22*K6*K6*CS(3)) $
145 K(3,4):=H*CS(3) $
146 K(3,5):=H*SN(3) $
147 WV(4):=WV(1)+K(3,3) $
148 V(4):=V(1)+K(3,1) $
149 WH(4):=WH(1)+K(3,2) $
150 S(4):=S(1)+H $
151 X(4):=X(1)+K(3,4) $
152 Z(4):=Z(1)+K(3,5) $
153
154
155 'COMMENT' HILFSFUNKTION - SCHRITT 4 $
156 W(4):=SQRT(WH(4)*WH(4)+WV(4)*WV(4)) $
157 SN(4):=WV(4)/W(4) $
158 H:=DS1(4):=DZ1/SN(4) $
159 K4:=W(4)/(2*V(4))-UH1*K2*CS(4) $
160 K5:=W(4)/V(4)-UH1*K2*CS(4) $
161 F7(4):=K4+SQRT(K4*K4+R71*UH1*CS(4)*K5) $
162 F1(4):=SQRT(UH1*SN(4)*UH1*SN(4)+F7(4)*F7(4)) $
163 F2(4):=R22*(SN(4)^POWER*3)*UH1*UH1 $
164 F3(4):=1/((1-Z(4))*((UH1*CS(4)+K3 *F7(4))*SN(4)+UR1))$
165 K(4,1):=H*R11*F1(4) $
166 K(4,2):=H*(R21*F1(4)*UH1+F2(4)) $
167 K6:=UH1*SN(4) $
168 K(4,3):=H*(R31*F3(4)-R22*K6*K6*CS(4)) $
169 K(4,4):=H*CS(4) $
170 K(4,5):=H*SN(4) $
171
172
173 'COMMENT' MITTELWERTBILDUNG $
174 K(5,1):=(K(1,1)+2*K(2,1)+2*K(3,1)+K(4,1))/6 $
175 K(5,2):=(K(1,2)+2*K(2,2)+2*K(3,2)+K(4,2))/6 $
176 K(5,3):=(K(1,3)+2*K(2,3)+2*K(3,3)+K(4,3))/6 $
177 K(5,4):=(K(1,4)+2*K(2,4)+2*K(3,4)+K(4,4))/6 $
178 K(5,5):=(K(1,5)+2*K(2,5)+2*K(3,5)+K(4,5))/6 $
179
180
181 'COMMENT' ENDGUELTIGE WERTE $
182 V(5):=V(1)+K(5,1) $
183 WH(5):=WH(1)+K(5,2) $
184 WV(5):=WV(1)+K(5,3) $
185 X(5):=X(1)+K(5,4) $
186 Z(5):=Z(1)+K(5,5) $
187 W(5):=SQRT(WH(5)*WH(5)+WV(5)*WV(5)) $

```



```

188 SN(5):=WV(5)/W(5) $
189 CS(5):=WH(5)/W(5) $
190 S(5):=S(1)+DZ1/SN(5) $
191 'IF'WH(5)'LFSS'.0.0001'THEN'
192 THETA(5):=PI/2 'ELSE'
193 THETA(5):=ARCTAN(WV(5)/WH(5)) $
194 K4:=W(5)/(2*V(5))-UH1*K2*CS(5) $
195 K5:=W(5)/V(5)-UH1*K2*CS(5) $
196 F7(5):=K4+SQRT(K4*K4+R71*UH1*CS(5)) $
197 UA1(0):=F7(5) $
198 UJ1(0):=UA1(0)+UH1*CS(5) $
199 R1(0):=V(5)/(R71*UH1*CS(5)+UA1(0)) $
200 QE1(0):=K1+V(5) $
201
202
203 'COMMENT' UFBERGANG ZU DIMENSIONBEHAFTETEN GROSSEN $
204 Z(0):=RH*Z(5) $
205 X(0):=RH*X(5) $ S(0):=RH*S(5) $
206 R(0):=RH*R1(0) $ THETA(0):=THETA(5)*180/PI $
207 UA(0):=R12*UA1(0) $
208 UJ(0):=R12*UJ1(0) $
209 QE(0):=RH*R12*QE1(0) $
210
211
212 'COMMENT' AUSGABE $
213 'IF' T 'NOTGREATER' ENTIER(NN/4) 'THEN'
214 'BEGIN'
215 WRITE(FF5,T) $
216 WRITE(FF4,Z(0),FF4,X(0),FF4,S(0),FF4,THETA(0),FF4,UA(0),FF4,UJ(0)) $
217 WRITE(FF4,R(0),FF4,QE(0),<<A1>>) $
218 'IF' T 'EQUAL' 5*ENTIER((T+1)/5)-1 'THEN'
219 WRITE(<<A1>>) $
220 'IF' T 'EQUAL' 5*ENTIER(T/5) 'THEN'
221 WRITE(<<A1>>) $
222 'END' $
223 'IF' T 'GREATER' ENTIER(NN/4) 'THEN'
224 'BEGIN'
225 'IF' T 'EQUAL' 10*ENTIER(T/10) 'THEN'
226 'BEGIN'
227 WRITE(FF5,T) $
228 WRITE(FF4,Z(0),FF4,X(0),FF4,S(0),FF4,THETA(0),FF4,UA(0),FF4,UJ(0))
229 WRITE(FF4,R(0),FF4,QE(0),<<A1>>) $
230 'IF' T 'EQUAL' 50*ENTIER(((T+10)/50)-10) 'THEN'
231 WRITE(<<A1>>) $
232 'IF' T 'EQUAL' 50*ENTIER(T/50) 'THEN'
233 WRITE(<<A1>>) $
234 'END' $
235 'END' $
236
237
238 T:=T+1 $
239 'IF' T 'GREATER' NN 'THEN' 'GOTO' M2 'ELSE' .
240 'BEGIN'
241 A1:=Z(5) $ Z(1):=A1 $
242 A2:=S(5) $ S(1):=A2 $
243 A3:=X(5) $ X(1):=A3 $
244 A4:=WV(5) $ WV(1):=A4 $
245 A5:=WH(5) $ WH(1):=A5 $
246 A6:=V(5) $ V(1):=A6 $
247 'END' $
248 'GOTO' M1 $
249 'COMMENT' ENDE SCHLEIFE $
250 'COMMENT' RINGE KUITTA ENDE $

```

```

251
252
B7 253 M2: 'BEGIN'
254 'COMMENT' EINFLUSSGRÖSSEN $
255 'REAL' Q7,CQ,F0,FH $
256 Q7:=U4*HW $
257 'IF' Q7 'GREATER' n 'THEN'
258 CQ:=QE(0)/Q7 $
259 F0:=G*RH/(R12*R12) $
260 FH:=UH1 $
261 WRITE(⟨⟨A3⟩⟩) $
262 WRITE(⟨⟨'ETNMISCHUNG QE = '⟩⟩,FF3,QE(0),⟨⟨' CM*CM/S','A1⟩⟩) $
263 WRITE(⟨⟨'ZUFLUSS Q7 = '⟩⟩,FF3,Q7,⟨⟨' CM*CM/S','A1⟩⟩) $
264 WRITE(⟨⟨'VERHAELTNIS QE/Q7 = '⟩⟩,FF3,CQ,⟨⟨A1⟩⟩) $
265 WRITE(⟨⟨'ETNFLUSSGRÖSSE F0 = '⟩⟩,FF3,F0,
266 ⟨⟨A1⟩⟩,⟨⟨'ETNFLUSSGRÖSSE FH = '⟩⟩,FF3,FH,⟨⟨A1.0⟩⟩) $
E7 267 'END' $
268
269
E2 270 'END'PROCEDURE JET9 $
271
272
273
274 G:=980.665 $ 'COMMENT' CM/(S*S) $
275 PI:=3.141592 $
276 K1:=SQRT(PI) $
277 K2:=SQRT(2) $
278 LAMBDA:=1.16 $
279 K3:=1/SQRT(1+LAMBDA*LAMBDA) $
280 HO:=1033 $ 'COMMENT' CM. $
281
281
284 'COMMENT' PROCEDURE - AUFRUF $
285 JET9(0.057,1.253,0.3,1,180,80,30, 0,80) $
286 JET9(0.057,1.253,0.3,1,180,80,30, 10,80) $
287 JET9(0.057,1.253,0.3,1,180,80,30, 20,80) $
288 JET9(0.057,1.253,0.3,1,180,80,30, 30,80) $
289 JET9(0.057,1.253,0.3,1,180,80,30, 40,80) $
290 JET9(0.057,1.253,0.3,1,180,80,30, 50,80) $
291 JET9(0.057,1.253,0.3,1,180,80,30, 60,80) $
292 JET9(0.057,1.253,0.3,1,180,80,30, 70,80) $
293 JET9(0.057,1.253,0.3,1,180,80,30, 80,80) $
294 JET9(0.057,1.253,0.3,1,180,80,30, 90,80) $
295 JET9(0.057,1.253,0.3,1,180,80,30,100,80) $
296
297
E1 298 'END' $

```

EINGABEPARAMETER  
 ALPHA= 5.633333333, -02 BETA= 1.252000000, +00 CDE= 2.000000000, -01  
 DZ= 1 CM, HW= 100 CM, QI= 00 CM\*CM/S, UR= 30 CM/S  
 UM= 90 CM/S, ZD= 00 CM

BEZUGSGRÖSSEN: U0 (U0) (G0) (P0) (I1/3)  
 ANFANGSWERT: U0= 5.145000000, +00 CM, U00= 1.002752190, +02 CM/S, X=0, Z=0, S=0 UND THETA=PI/2

REIHFOLGE DER AUSGEDRUCKTEN WERTE:  
 PUNKT-NR. T, Z-KOORD. (CM), X-KOORD. (CM), S-BEGENLAFENGE (CM), THETA-WINKEL (ALTRAD),  
 UA - IND. ACHSGESCHWINDIGKEIT (CM/S), UJ - RES. ACHSGESCHWINDIGKEIT (CM)  
 R - REITTE (CM), QF - EINMISCHUNG (CM\*CM/S).

T	Z	X	S	THETA	UA	UJ	R	QF
1	1.0000	0.0114	1.0000	88.0137	100.5962	103.7157	5.3900	1003.3602
2	2.0000	0.0518	2.0029	86.0901	93.5612	99.6991	5.5226	1018.8913
3	3.0000	0.1197	3.0080	84.2289	87.1655	96.2154	5.8366	1034.0998
4	4.0000	0.2145	4.0168	82.4295	81.3970	93.2542	6.0293	1049.0188
5	5.0000	0.3356	5.0302	80.6911	76.2350	90.7932	6.1984	1063.6777
6	6.0000	0.4822	6.0488	79.0129	71.6490	88.8029	6.3425	1078.1031
7	7.0000	0.6538	7.0735	77.3936	67.6041	87.2469	6.4615	1092.3190
8	8.0000	0.8497	8.1049	75.8320	64.0537	86.0826	6.5567	1106.3471
9	9.0000	1.0694	9.1435	74.3270	60.9513	85.2646	6.6299	1120.2071
10	10.0000	1.3123	10.1899	72.8769	58.2481	84.7465	6.6940	1133.9167
11	11.0000	1.5779	11.2445	71.4803	55.9966	84.4834	6.7218	1147.4922
12	12.0000	1.8658	12.3078	70.1358	53.8521	84.4335	6.7463	1160.9484
13	13.0000	2.1754	13.3801	68.8416	52.0737	84.5589	6.7603	1174.2986
14	14.0000	2.5062	14.4617	67.5963	50.5249	84.8265	6.7662	1187.5552
15	15.0000	2.8579	15.5530	66.3993	49.1738	85.2077	6.7662	1200.7294
16	16.0000	3.2300	16.6542	65.2459	47.9928	85.6781	6.7621	1213.8314
17	17.0000	3.6220	17.7655	64.1375	46.9582	86.2173	6.7554	1226.8705
18	18.0000	4.0336	18.8871	63.0717	46.0498	86.8086	6.7470	1239.8554
19	19.0000	4.4644	20.0192	62.0468	45.2505	87.4380	6.7381	1252.7939
20	20.0000	4.9139	21.1619	61.0613	44.5455	88.0941	6.7293	1265.6932
21	21.0000	5.3819	22.3152	60.1138	43.9226	88.7677	6.7210	1278.5600
22	22.0000	5.8678	23.4794	59.2028	43.3712	89.4513	6.7138	1291.4003
23	23.0000	6.3714	24.6544	58.3268	42.8824	90.1390	6.7078	1304.2198
24	24.0000	6.8922	25.8403	57.4886	42.4484	90.8258	6.7034	1317.0235
25	25.0000	7.4300	27.0371	56.6747	42.0628	91.5081	6.7005	1329.8163
26	26.0000	7.9844	28.2448	55.8959	41.7199	92.1827	6.6994	1342.6024
27	27.0000	8.5550	29.4634	55.1470	41.4149	92.8475	6.7000	1355.3858
28	28.0000	9.1415	30.6928	54.4267	41.1435	93.5005	6.7024	1368.1704
29	29.0000	9.7436	31.9331	53.7338	40.9022	94.1405	6.7065	1380.9595
30	30.0000	10.3609	33.1841	53.0674	40.6877	94.7665	6.7120	1393.7553
31	31.0000	10.9931	34.4459	52.4261	40.4973	95.3778	6.7200	1406.5636
32	32.0000	11.6392	35.7182	51.8092	40.3285	95.9739	6.7292	1419.3843
33	33.0000	12.3000	37.0011	51.2154	40.1793	96.5547	6.7401	1432.2207
34	34.0000	12.9750	38.2943	50.6440	40.0477	97.1200	6.7525	1445.0753
35	35.0000	13.6647	39.5980	50.0939	39.9320	97.6699	6.7664	1457.9500
36	36.0000	14.3688	40.9118	49.5642	39.8308	98.2044	6.7818	1470.8470
37	37.0000	15.0872	42.2357	49.0542	39.7428	98.7238	6.7985	1483.7681
38	38.0000	15.8209	43.5696	48.5630	39.6658	99.2284	6.8166	1496.7149
39	39.0000	16.5694	44.9134	48.0898	39.6017	99.7185	6.8360	1509.6891
40	40.0000	17.3330	46.2668	47.6339	39.5466	100.1944	6.8566	1522.6920
41	41.0000	18.1116	47.6298	47.1946	39.5006	100.6565	6.8783	1535.7252
42	42.0000	18.9053	49.0023	46.7711	39.4630	101.1053	6.9012	1548.7898
43	43.0000	19.7136	50.3840	46.3629	39.4330	101.5410	6.9252	1561.8870
44	44.0000	20.5365	51.7749	45.9692	39.4100	101.9641	6.9503	1575.0179
45	45.0000	21.3743	53.1748	45.5895	39.3936	102.3750	6.9763	1588.1836
50	50.0000	25.8440	60.3040	43.8815	39.3914	104.2611	7.1200	1654.5629
60	60.0000	34.5367	75.1522	41.2331	39.6531	107.3362	7.4629	1720.3325
70	70.0000	44.3422	90.6699	39.3179	40.0291	109.7259	7.8513	1790.4250
80	80.0000	54.2626	106.7342	37.4984	40.5166	111.6357	8.3010	2874.0633
90	90.0000	65.2934	123.2437	36.8216	41.1536	113.1921	8.7731	2223.8865
100	100.0000	77.0463	140.1175	35.9876	41.8910	114.5040	9.2718	2377.0227
110	110.0000	88.6614	157.2908	35.3299	42.7849	115.6101	9.7928	2534.1340
120	120.0000	100.5323	174.7121	34.8033	42.6591	116.5596	10.3332	2694.2598
130	130.0000	112.6164	192.3400	34.3765	43.1018	117.3829	10.8900	2850.2184
140	140.0000	124.8768	210.1408	34.0273	43.5136	118.1030	11.4625	3026.6412
150	150.0000	137.2841	228.0868	33.7394	43.8962	118.7377	12.0478	3196.9705
160	159.4929	149.8157	246.1551	33.5109	44.2518	119.3008	12.6449	3369.9657
170	159.4999	162.4514	264.3264	33.3027	44.5830	119.8034	13.2527	3545.4057
180	179.4999	175.1746	282.5084	33.1380	44.8924	120.2545	13.8700	3723.0886

EINMISCHUNG OF = 3.723, +03 CM\*CM/S  
 ZUFUSS OF = 1.620, +04 CM\*CM/S  
 VERHÄLTNIS OF/OZ = 2.299, -01  
 EINFLUSSGRÖSSE FO = 6.491, +02  
 EINFLUSSGRÖSSE FM = 2.102, +00



## 7. Diskussion

Die Gleichungssysteme zur Beschreibung des Strömungsfeldes von Impuls- und Auftriebstrahlen wurden mit Hilfe integraler Ansätze unter Zugrundelegung der üblichen Grenzschichtvereinfachungen aufgestellt. Es wurden sowohl axialsymmetrische als auch plansymmetrische Strahlen in ruhendem Medium sowie in einer Querströmung untersucht, wobei auch die Fälle behandelt wurden, in denen das auftrieberzeugende Medium eine Schlupfgeschwindigkeit aufweist (beispielsweise spezifisch leichte Feststoffteilchen oder Tropfen einer nicht mischbaren Flüssigkeit) und/oder kompressibel ist (beispielsweise Gasblasen in Flüssigkeiten).

Den analytischen Ansätzen liegen folgende Annahmen zugrunde:

1. Die Profile für Geschwindigkeit und Dichtedefizit oder Tracerkonzentration sind einander ähnlich und werden stets als Gauss'sche Glockenkurven angenommen.
2. Nach Boussinesq wird angenommen, daß Dichteunterschiede nur im Auftriebsglied von Bedeutung sind, während sie in den konvektiven Gliedern vernachlässigt werden können.
3. Der pro Längeneinheit in den Strahl eingemischte Volumenstrom wird mit Hilfe einer Einmischhypothese beschrieben. Hierbei wird angesetzt, daß der Volumenstromzuwachs proportional ist zum nominalen Strahlumfang und zur Achsgeschwindigkeit (bzw. zur Vektordifferenz zwischen Achs- und Aussenströmungsgeschwindigkeit). Der Proportionalitätsfaktor wird als Einmischkoeffizient  $\alpha$  bezeichnet.
4. Es wird angenommen, daß die Breite des Dichtedefizit- Profils stets in einem konstanten Verhältnis  $\lambda$  zur Breite des Geschwindigkeitsprofils steht.
5. Die Abweichungen der Strömung in Düsennähe von der analytisch beschriebenen "voll ausgebildeten" Strömung können global

dadurch erfaßt werden, daß der analytische Ursprung (Punkt - bzw. Linienquelle ) um ein Maß  $z_0$  gegenüber dem tatsächlichen verschoben angenommen wird.

6. Für Strahlen in einer Querströmung wird die Abweichung der Druckverteilung von der hydrostatischen global durch Ansetzen einer Widerstandskraft ( in Analogie zur Umströmung von Körpern) in Rechnung gestellt.
7. Es wird angenommen, daß die Orte des maximalen Dichtedefizits und der größten Geschwindigkeit stets zusammenfallen und somit eine eindeutig definierte Strahlachse bilden.
8. Auch für Blasengemische wird angenommen, daß der Effekt der Schlupfgeschwindigkeit stets durch einen mittleren oder repräsentativen Wert  $\Delta \bar{u}_b$  beschrieben werden kann.
9. Die Herleitungen beschränken sich auf den Fall von Strahlen in unendlich ausgedehntem Medium - d.h. in Gewässerkörpern sehr großer seitlicher Abmessungen und großer Wassertiefe.

Zur Anwendung der Lösungen auf praktische Fälle müssen Zahlenwerte für folgende Parameter aus Experimenten bestimmt bzw. angenommen werden :

- Einmischkoeffizient  $\alpha$  . Dieser hat für die Grenzfälle des Impuls - und des Auftriebstrahls in ruhendem, homogenem Medium jeweils einen konstanten Zahlenwert, der durch eine Reihe von Experimenten belegt ist (siehe Kap. I). Für den Luftschleier wird in Übereinstimmung mit den Messungen ein Ansatz gemacht, demzufolge der Einmischkoeffizient für (  $\Delta \bar{u}_b \rightarrow 0$  ) - d.h. für sehr große Luftmengen pro Zeiteinheit - asymptotisch dem Zahlenwert für den klassischen Auftriebstrahl zustrebt, mit zunehmendem relativem Schlupf  $\Delta \bar{u}_b$  kleiner wird und im Limit



gegen Null geht. Für Strahlen in einer Querströmung ist nicht bekannt, wie sich der örtliche Einmischkoeffizient entlang der Strahlachse ändert.

- Das Verhältnis der Ausbreitungsraten  $\lambda$  für das Dichtedefizit (oder Konzentrationsprofil) und das Geschwindigkeitsprofil : hierfür liegen für den Impulsstrahl einigermaßen gesicherte Zahlenwerte vor, während die Angaben für den Auftriebstrahl in Frage gestellt werden müssen. Für den Luftschleier wird ein konstanter Zahlenwert angenommen, der allerdings im Experiment nicht direkt verifiziert werden kann.
- Die Schlupfgeschwindigkeit  $\Delta u_B$  zwischen Luftblasenstrom und umgebendem Wasser. Dieser Wert kann aus Versuchen nicht direkt ermittelt werden ; deshalb wird ein Wert für  $\Delta u_B$  gewählt, der der Steiggeschwindigkeit von Einzelblasen des repräsentativen Durchmessers entspricht.
- Das Maß  $z_0$ , um das der virtuelle Ursprung gegenüber dem tatsächlichen verschoben ist. Dies ergibt sich für die klassischen Fälle aus der Literatur und für Luftblasenschleier aus dem Experiment.
- Der Widerstandsbeiwert  $C_D$  für Strahlen in einer Querströmung, welcher global die Abweichung der Druckverteilung von der hydrostatischen beschreibt. Hierfür können im axialsymmetrischen Fall Annahmen in Anlehnung an die turbulente Umströmung eines Zylinders vom nominalen Strahldurchmesser getroffen werden, während im plansymmetrischen Fall, in dem der Strahl nicht umströmt, sondern durchströmt wird, eine solche Bezugsbasis nicht gegeben ist.

Die verschiedenen, hier behandelten Strömungskonfigurationen sind zu jeweils unterschiedlichen Graden experimentell untersucht worden. Die Aussagekraft und Zuverlässigkeit der mathematischen Modelle ist daher unterschiedlich und wird in erster Linie dadurch bestimmt, mit welcher Genauigkeit die jeweiligen empirischen Beiwerte bekannt sind.

Die Beschreibung der klassischen Fälle des Impuls- und des Auftriebstrahls in ruhendem, homogenem Medium kann als zuverlässig und experimentell abgesichert bezeichnet werden, obwohl bezüglich des Einmischkoeffizienten  $\alpha$  für plansymmetrische Auftriebstrahlen sowie bezüglich des Verhältnisses  $\lambda$  von Dichtedefizit- und Geschwindigkeitsprofil bei Auftriebstrahlen allgemein noch einige Fragen offen sind. Dennoch dürften Voraussagen mit circa  $\pm 10\%$  Genauigkeit möglich sein.

Weniger genau sind die Vorhersagen für das Luftschleier-Strömungsfeld in ruhendem, homogenem Medium, da man hier für die Schlupfgeschwindigkeit  $\Delta u_b$  und für das Verhältnis  $\lambda$  zur Zeit noch auf Schätzwerte angewiesen ist. Mit Hilfe der im experimentellen Teil dieser Arbeit gewonnenen Ergebnisse läßt sich das Strömungsfeld für Wassertiefen von mehr als 1 m und Luftströme von mehr als  $100 \text{ cm}^3/\text{s}$  bzw.  $1000 \text{ cm}^3/\text{s}\cdot\text{m}$  auf schätzungsweise  $\pm 30\%$  genau vorhersagen.

Bei der Behandlung eines Strahls in einer Querströmung müssen zusätzliche Annahmen getroffen werden. Im Fall eines axialsymmetrischen Auftriebstrahls muß der Einmischkoeffizient  $\alpha$  vom Anfangswert des Auftriebsstrahls schliesslich übergehen in den (circa 10 mal größeren) Wert für eine Thermale, wobei für die Form des Übergangs eine plausible Annahme getroffen werden muß. Der Widerstandsbeiwert  $C_D$  wird in diesem Fall demjenigen eines turbulent umströmten Kreiszyllinders des nominellen Strahldurchmessers gleichgesetzt.

Derlei Ansätze haben zufriedenstellende Vorhersagen für das Strömungsfeld des axialsymmetrischen Auftriebstrahls in einer Querströmung geliefert.

Für den plansymmetrischen Auftriebstrahl ist es sehr viel schwieriger, plausible Annahmen für den Einmischkoeffizienten  $\alpha$  oder den Widerstandsbeiwert  $C_D$  zu treffen. Das mathematische Modell für diese Konfiguration bedarf noch der experimentellen Überprüfung.

Beim Luftschleier in einer Querströmung taucht neben den vorgenannten Schwierigkeiten die Frage auf, inwiefern der vertikale Schlupf der Luftblasen eine Trennung der Achse des maximalen Dichtedefizits von der Achse der Geschwindigkeitsprofile bewirkt - eine Erscheinung, die im mathematischen Modell nicht erfasst wird. Es läßt sich erwarten, daß eine solche Trennung am ehesten bei kleinen Luftströmen in einer starken Querströmung auftritt; dementsprechend sollte das mathematische Modell am ehesten brauchbar sein für große Luftströme und/oder kleine Quergeschwindigkeiten.

Des Weiteren ist zu beachten, daß die hier abgeleiteten Beziehungen für seitlich unbegrenzte Gewässer großer Tiefe gelten. Die Anwesenheit einer freien Oberfläche wird das Strömungsfeld sehr stark beeinflussen. Für den Fall eines ruhenden Mediums liefern die hier erarbeiteten Modelle auch in diesem Fall Ergebnisse, die - mit entsprechenden Ergänzungen - das resultierende Strömungsfeld zufriedenstellend beschreiben. Dies trifft allerdings für die Modelle mit Querströmung nicht mehr zu, da in diesen Fällen eine freie Oberfläche eine starke Rückkoppelung zwischen Auftrieb- und Grundströmung bewirkt. Der Fall eines Auftriebstrahls oder Luftschleiers in einer Querströmung in flachem Wasser bedarf daher einer gesonderten Behandlung.



8. Literaturangaben

- [1] W. Schmidt : "Turbulente Ausbreitung eines Stromes erhitzter Luft". Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik 21, 1941
- [2] H. Rouse : "Gravitational Diffusion from a Boundary Source in Two-Dimensional Flow". Journal of Applied Mechanics, September 1947.
- [3] M.L. Albertson, Y.B. Dai, R.A. Jensen und H. Rouse : "Diffusion of Submerged Jets". Trans. ASCE 115, pp. 639 - 97, 1950
- [4] W. Forstall und A. Shapiro : "Momentum and Mass Transfer in Coaxial Gas Jets." Journal of Applied Mechanics, December 1950
- [5] H. Schlichting : "Grenzschicht-Theorie", 3. Auflage, G. Braun Verlag, Karlsruhe, 1951
- [6] H. Rouse, C.S. Yih und H.W. Humphreys : "Gravitational Convection from a Boundary Source." Tellus 4, pp. 201 - 10, 1952
- [7] L. Alexander, T. Baron und E. Comings : "Transport of Momentum, Mass and Heat in Turbulent Jets." University of Illinois Eng. Exp. Station, Bulletin Series No. 413, 1953
- [8] H. Rouse, W.D. Baines und H.W. Humphreys : "Free Convection over Parallel Sources of Heat". Proceedings of the Physical Society, B, Vol. LXVI, p. 393, 1953.
- [9] B.R. Morton, Sir G. Taylor und J.S. Turner : "Turbulent Gravitational Convection from Maintained and Instantaneous Sources." Proc., Royal Society, London, A 234, pp. 1 - 23, 1956
- [10] H. Rouse : "Diffusion in the Lee of a Two-Dimensional Jet." Vol. 1, Proc. 9th International Congress on Applied Mechanics, Université de Bruxelles, 1957
- [11] J.O. Hinze : "Turbulence". Mc Graw Hill, Series in Mechanical Engineering, 1959
- [12] H. Rouse, Ed. : "Advanced Mechanics of Fluids". John Wiley and Sons, New York, 1959
- [13] F.P. Ricou und D.B. Spalding : "Measurements of Entrainment by Axisymmetrical Turbulent Jets". Journal of Fluid Mechanics, 11, pp. 21 - 32, 1961

- [14] J.M. Richards : "Experiments on the Motion of Isolated Cylindrical Thermals Through Unstratified Surroundings." Intern. Journal of Air and Water Pollution, 7, pp. 17 - 34, 1963.
- [15] G. Abraham : "Jet Diffusion in Stagnant Ambient Fluid." Delft Hydraulics Laboratory, Publ. No. 29, 1963
- [16] R.B. Banks und A. Bhavamai : "Experimental Study of the Impingement of a Liquid Jet on the Surface of a Heavier Liquid." Journal of Fluid Mechanics, Vol. 23, part 2, 1965.
- [17] B. Hunt und S.T. Hsu : "Configuration of the Free Surface Above a Vertical Jet." La Houille Blanche 6, 1965
- [18] L.N. Fan : "Turbulent Buoyant Jets into Stratified or Flowing Ambient Fluids." W.M. Keck Laboratory of Hydraulics and Water Resources, California Institute of Technology, Report No. KH-R-15, June 1967.
- [19] E. Naudascher : "On a General Similarity Analysis for Turbulent Jet and Wake Flows." Iowa Institute of Hydraulic Research, Report No. 106, December 1967
- [20] S. Sami, T. Carmody und H. Rouse : "Jet Diffusion in the Region of Flow Establishment." Journal of Fluid Mechanics 23, pp. 231 - 52, 1967
- [21] E. Naudascher : "On the Distribution and Development of Mean-Flow and Turbulence Characteristics in Jet and Wake Flows." Iowa Institute of Hydraulic Research, Report No. 110, August 1968
- [22] L.N. Fan und N.H. Brooks : "Numerical Solutions of Turbulent Buoyant Jet Problems." W.M. Keck Laboratory of Hydraulics and Water Resources, California Institute of Technology, Report No. KH-R-18, January 1969
- [23] J.S. Turner : "Buoyant Plumes and Thermals." Annual Review of Fluid Mechanics, USA, 1969
- [24] K. Cederwall und J. Ditmars : "Analysis of Air-Bubble Plumes." W.M. Keck Laboratory of Hydraulics and Water Resources, California Institute of Technology, Report No. KH-R-24, September 1970
- [25] P. Liseth : "Mixing of Merging Buoyant Jets from a Manifold in Stagnant Receiving Water of Uniform Density." Hydraulic Engineering Laboratory, University of California, Berkeley, Report No. HEL-23-1, November 1970



- [26] K. Cederwall : "Buoyant Slot Jets into Stagnant or Flowing Environments." W.M. Keck Laboratory of Hydraulics and Water Resources, California Institute of Technology, Report No. KH-R-25, April 1971
- [27] C.Y. Koh : "On Buoyant Jets." Paper A 18, Proc., 14th Congress of the IAHR, Paris 1971
- [28] G. Abraham : "Jets and Plumes Issuing into Stratified Fluid." Lecture Notes of a short course held at the University of Karlsruhe in March 1972
- [29] G. Abraham : "Jets and Plumes Issuing into Stratified Fluid." Proceedings, International Symposium on Stratified Flows, Novosibirsk 1972
- [30] H. Kobus : "Bemessungsgrundlagen und Anwendungen für Luftschleier im Wasserbau." Habilitationsschrift, Universität Karlsruhe, 1973