

Universität Stuttgart

DIPLOMARBEIT

**Totalkrümmung geschlossener Hyperflächen
des euklidischen Raums**

Benjamin Pinzer

unter Betreuung von
PD. Dr. rer. nat. Andreas Kollross
am
Institut für Geometrie und Topologie
Fachbereich Mathematik

28.12.2015

Danksagungen

An dieser Stelle möchte ich all jenen danken, die durch ihre Unterstützung zum Gelingen dieser Diplom-Arbeit beigetragen haben.

Mein Dank gilt Herrn PD. Dr. rer. nat. Andreas Kollross für die kompetente Betreuung, konstruktive Kritik und die vielen hilfreichen Anregungen.

Frau Prof. Dr. Uta Renata Freiberg danke ich für die Übernahme der Begutachtung dieser Arbeit.

Weiterhin danke ich Herrn M.Sc. Alexander Thumm für die vielen Stunden, die er mir mit Rat und Tat zur Seite stand.

Zutiefst zu Dank verpflichtet bin ich meinen Eltern, Brigitte und Gerhard Pinzer, die mich immer ermutigt und an mich geglaubt haben, alle meine Entscheidungen unterstützt und mir mein Studium ermöglicht haben.

Schließlich danke ich meiner Freundin B.Sc. Nathalie Mandl für die liebevolle Unterstützung während des Studiums.

Auch all denen, die hier nicht namentlich genannt wurden, gilt mein herzlicher Dank.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Grundlagen	3
2.1	Differentialgeometrie	3
2.2	Differentialtopologie	6
2.3	Algebraische Topologie	7
3	Geschlossene Hyperflächen	13
3.1	Parallellflächen	13
3.2	Totalkrümmung in Abhängigkeit des topologischen Typs .	24
3.3	Konstruktion geeigneter Hyperflächen	35
4	Ausblick	45
5	Quellenverzeichnis	49

1 Einleitung

Der Satz von Gauß-Bonnet besagt, dass die integrierte Gauß-Krümmung invariant unter Homöomorphie ist. Dies kann man sich folgendermaßen vorstellen: Ein zwei dimensionales Flächenstück mit Randkurve kann man verformen, solange der Rand unverändert bleibt und dieser Vorgang ändert nichts an der Totalkrümmung, denn es kommt genau soviel positive Krümmung wie negative hinzu. Die Totalkrümmung einer kompakten zwei dimensional Fläche hängt also nicht von der Art der Einbettung ab, sondern ausschließlich von der topologischen Gestalt der Fläche, die die Eulercharakteristik festlegt.

Im vier dimensional euklidischen Raum gilt eine analoge Aussage zum Satz von Gauß-Bonnet jedoch nicht mehr. Dazu wird in Kapitel 3.1 ein Beispiel angegeben, in dem eine $S^1 \times S^2$ auf zwei unterschiedliche Arten in den \mathbb{R}^4 eingebettet wird, so dass die homöomorphen Hyperflächen unterschiedliche Totalkrümmungen besitzen. Das Beispiel zeigt, dass die Totalkrümmung im Allgemeinen nicht mehr durch die Eulercharakteristik festgelegt ist, sondern von der Art der Einbettung abhängt.

Diese Arbeit beschäftigt sich mit der Frage warum dieser Zusammenhang verloren geht und wie sich dennoch Aussagen über die Totalkrümmung eingebetteter, geschlossener Hyperflächen treffen lassen. In Kapitel 2 werden Definitionen und Sätze aus der Differentialgeometrie, Differentialtopologie und algebraischen Topologie wiederholt, die in dieser Arbeit häufig verwendet werden. Mit Hilfe des Satzes von Gauß-Bonnet-Hopf, der eine Art Verallgemeinerung des Satzes von Gauß-Bonnet darstellt, werden später in Kapitel 3.1 Parallelmengen von k -dimensionalen Sphären betrachtet. Lemma 3.5 liefert die Totalkrümmung unterschiedlich eingebetteter Parallelmengen. Dieses Resultat wird in Kapitel 3.3 zur Konstruktion geeigneter Hyperflächen benötigt.

Das Ziel dieser Arbeit ist einerseits Schranken für die Totalkrümmung geschlossener Hyperflächen des euklidischen Raums zu bestimmen und andererseits zu gegebener Totalkrümmung geschlossene Hyperflächen zu

konstruieren und diese dann so einzubetten, dass die gegebene Totalkrümmung angenommen wird. Der Satz von Gauß-Bonnet-Hopf besagt, dass die integrierte Gauß- Kronecker-Krümmung einer kompakten Hyperfläche im Wesentlichen durch die Eulercharakteristik des Inneren bestimmt ist. Eine Folgerung dieses Satzes besagt, dass die Totalkrümmung kompakter Hyperflächen in euklidischen Räumen ungerader Dimension, analog zum drei-dimensionalen Fall, schon allein durch die Eulercharakteristik der Hyperfläche bestimmt ist. Daher konzentrieren wir uns hauptsächlich auf den geraden Fall.

In Kapitel 3.2 wird das Innere geschlossener Hyperflächen untersucht. Der Zerlegungssatz von Jordan-Brouwer 2.4 besagt, dass eine geschlossene Hyperfläche den umgebenden Raum in zwei Zusammenhangskomponenten teilt. Nach der Einpunkt-Kompaktifizierung ist der $\mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ homöomorph zur Sphäre S^n . Bettet man nun eine Hyperfläche in die so erhaltenen S^n ein, sind Inneres und Äußeres gleichberechtigt (beide beschränkt und zusammenhängend). Daher kann man nun mit Hilfe der Mayer-Vietoris-Sequenz Zusammenhänge zwischen der Hyperfläche und dem Inneren bzw. Äußeren finden. Es zeigt sich, dass für die Eulercharakteristik des Inneren bzw. Äußeren nur bestimmte Werte in Frage kommen. Da die Eulercharakteristik des Inneren die Totalkrümmung bestimmt können wir nun ein Intervall angeben, indem alle möglichen Werte liegen, die die Totalkrümmung annehmen kann. Korollar 3.8 gibt dann Grenzen für die Totalkrümmung in Abhängigkeit der ersten $n/2$ Bettizahlen an und Theorem 3.13 zeigt, dass die so bestimmten Grenzen scharf sind und alle Wert aus dem Intervall auch tatsächlich angenommen werden.

Im Ausblick betrachten wir nicht-kompakte Hyperflächen. Basierend auf [9] *P. Wintgen, On total absolute curvature of nonclosed submanifolds* unterscheiden wir diese Hyperflächen durch die Anzahl ihrer Grenzrichtungen. Beispiel 4.2 zeigt wie sich die Totalkrümmung solcher Hyperflächen bestimmen lässt.

Die hauptsächlich Resultate dieser Arbeit sind also, dass zu gegebener geschlossener Hyperfläche die möglichen Werte für die Totalkrümmung eingeschränkt werden können, zu beliebig gewählten natürlichen Zahlen Hyperflächen konstruiert und diese dann so eingebettet werden, dass jeder in Korollar 3.8 bestimmte Wert für die Totalkrümmung angenommen wird.

2 Grundlagen

Um einen Überblick über die, in dieser Arbeit, verwendeten Begrifflichkeiten zu geben, werden im Folgenden einige Grundlagen genannt. Zuerst werden einige differentialgeometrische Definitionen und Sätze angegeben, die wir unter Anderem in Kapitel 3.1 benötigen. Desweiteren wird der Satz von Gauß-Bonnet-Hopf zitiert, der in dieser Arbeit sehr häufig zur Berechnung der Totalkrümmung angewandt wird. Anschließend werden differentialtopologische Grundlagen genannt. Zu guter Letzt findet sich eine kurze Übersicht zu Grundlagen der algebraischen Topologie, die vor allem in Kapitel 3.2 und 3.3 benötigt werden.

2.1 Differentialgeometrie

Eine Abbildung $f: U \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ heißt ein *reguläres Hyperflächenstück*, wenn $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und f eine Immersion ist. Dem Parameter $u = (u_1, \dots, u_n)$ wird dann der Punkt $f(u)$ zugeordnet mit $n + 1$ Koordinaten $f(u) = (f_1(u), \dots, f_{n+1}(u))$. Die *Tangentialhyperebene* $T_u f$ ist dann als das Bild von $T_u U$ unter der Abbildung $Df|_u$ erklärt, vgl. [6] S.39, 87.

Zur Berechnung der Totalkrümmung benötigen wir die *Gauß-Abbildung* $\nu: U \rightarrow S^n$, die durch die konsistente Wahl der Einheitsnormalenvektoren $\nu(u)$, die senkrecht auf $T_u f$ stehen, definiert ist. Für jedes $u \in U$ ist das Bild der linearen Abbildung $D\nu|_u: T_u U \rightarrow T_{\nu(u)}\mathbb{R}^{n+1}$ parallel zu $T_u f$. Durch kanonische Identifizierung von $T_{\nu(u)}\mathbb{R}^{n+1} \cong \mathbb{R}^{n+1} \cong T_{f(u)}\mathbb{R}^{n+1}$ können wir daher $D\nu$ in jedem Punkt auffassen als Abbildung $D\nu|_u: T_u U \rightarrow T_u f$. Desweiteren können wir durch die Einschränkung auf das Bild $Df|_u$ als einen linearen Isomorphismus $Df|_u: T_u U \rightarrow T_u f$ auffassen. Dann ist die inverse Abbildung $(Df|_u)^{-1}$ auf der Tangentialebene $T_u f$ erklärt und ebenfalls ein Isomorphismus, vgl. [6] S.87, 129.

Die Abbildung $L := -D\nu \circ (Df)^{-1}$, die punktweise durch $L_u := -(D\nu|_u) \circ (Df|_u)^{-1}: T_u f \rightarrow T_u f$ erklärt ist, heißt *Weingartenabbildung* von f . Für jeden Parameter u ist dies ein linearer Endomorphismus der Tangential-

ebene im zugehörigen Punkt $f(u)$. Er wirkt als $L\left(\frac{\partial f}{\partial u_i}\right) = -\frac{\partial \nu}{\partial u_i}$. L ist unabhängig von der Parametrisierung f (bis auf Wahl des Vorzeichens).

Die *erste* (I) und *zweite* (II) *Fundamentalform* sowie die *Gauß-Kronecker-Krümmung* von f sind definiert als

$$\begin{aligned} I &= (g_{ij})_{i,j=1,\dots,n} = \left(\left\langle \frac{\partial f}{\partial u_i}, \frac{\partial f}{\partial u_j} \right\rangle \right)_{ij} \\ II &= (h_{ij})_{i,j=1,\dots,n} = \left(\left\langle L \left(\frac{\partial f}{\partial u_i} \right), \frac{\partial f}{\partial u_j} \right\rangle \right)_{ij} = \left(\left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial u_i \partial u_j}, \nu \right\rangle \right)_{ij} \\ K &= \det(L) = \left(\frac{\det(II)}{\det(I)} \right) \end{aligned}$$

Wobei $\frac{\partial f}{\partial u_i}$ die partielle Ableitung von f nach u_i und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standard-Skalarprodukt auf dem \mathbb{R}^{n+1} bezeichnet, vgl. dazu [6] S. 48, 81, 87, 88.

Für $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f: U \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ definieren wir das *Volumenelement* dV , vgl. [6] S.68, 69, als

$$dV := \sqrt{\det(g_{ij})} du_1 \dots du_n$$

Damit können wir die *Totalkrümmung* eines regulären Hyperflächenstücks f definieren als

$$\tau(f) := \int_{f(U)} K dV$$

BEZEICHNUNG: Um die Übersichtlichkeit zu bewahren schreiben wir im Folgenden nur Hyperfläche und meinen damit eingebettete Hyperfläche. Insbesondere bezeichnen wir dann die Totalkrümmung einer eingebetteten Mannigfaltigkeit N mit $\tau(N) = \int_N K dV$.

In Kapitel 3.1 betrachten wir Parallellflächen und benötigen daher die folgenden Definitionen, vgl. [13] S.177. Sei $f: N \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ eine Immersion einer kompakten n -dimensionalen Mannigfaltigkeit N in den \mathbb{R}^{n+1} . Das zu N gehörige *Einheitsnormalenbündel* \mathfrak{N}_N ist definiert durch

$$\mathfrak{N}_N := \{(p, \nu) \in N \times S^n \mid \nu \text{ ist Einheitsnormalenvektor an } N \text{ in } p\}$$

Für $\varepsilon > 0$ hinreichend klein ist die zu ν gehörige *Parallelfläche* zu N im Abstand ε definiert durch

$$(N)_\varepsilon := \{p + \varepsilon \cdot \nu \in \mathbb{R}^{n+1} \mid (p, \nu) \in \mathfrak{N}_N\}.$$

Der folgende Satz liefert die Grundlage für die, in dieser Arbeit hauptsächlich verwendete, Berechnung der Totalkrümmung. Er besagt, dass die Totalkrümmung eingebetteter kompakter Hyperflächen im wesentlichen durch die Eulercharakteristik des Inneren bestimmt ist.

2.1 Satz (Gauß-Bonnet-Hopf)

Sei $N \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine geschlossene Hyperfläche, so dass N der Rand seines Inneren M ist. K sei die Gauss-Kronecker-Krümmung von N und $\chi(M)$ bezeichne die Eulercharakteristik von M . Dann gilt

$$\int_N K dV = c_n \cdot \chi(M)$$

Wobei c_n das Volumen der n -dimensionalen Einheitskugel bezeichnet.

Dieser Satz wird ausführlich in [13], S.7 (Theorem 3.1), ff diskutiert, auf die hier auch als Quelle verwiesen wird. Eine Folgerung aus diesem Satz besagt, dass die Totalkrümmung kompakter Hyperflächen in euklidischen Räumen ungerader Dimension nicht von der Einbettung abhängt, sondern schon durch die Eulercharakteristik der Hyperfläche festliegt. Das heißt in ungerader Dimension gilt eine analoge Aussage zum klassischen Satz von Gauß-Bonnet. In Kapitel 3.2 wird dieser Sachverhalt genauer diskutiert.

2.2 Korollar

Sei N wie in Satz 2.1 und n gerade. Dann gilt

$$\int_N K dV = \frac{c_n}{2} \cdot \chi(N)$$

BEWEIS:

Die Behauptung folgt aus $\chi(N) = 2 \cdot \chi(M)$ und anwenden von Gauß-Bonnet-Hopf. Sei $N \subset \mathbb{R}^{n+1}$ kompakt und n gerade. Wir zeigen, dass $2 \cdot \chi(M) = \chi(\partial M) = \chi(N)$ gilt.

Betrachte dazu $DM := M \cup_{\partial M} M$. Dann ist $\chi(DM) = 2 \cdot \chi(M) - \chi(\partial M)$.

Da DM geschlossen und $\dim(DM)$ ungerade ist folgt $\chi(DM) = 0$ und somit $\chi(\partial M) = 2 \cdot \chi(M)$. Anwenden von Gauß-Bonnet-Hopf liefert die Aussage.

□

2.2 Differentialtopologie

In diesem Teil werden kurz einige differentialtopologische Grundlagen wiederholt, die vor allem in Kapitel 3.1 zur Berechnung der Totalkrümmung von Parallellflächen und in Kapitel 3.2 zum Beweis von Theorem 3.7 benötigt werden. Folgende Bemerkung über eine Eigenschaft des Randes findet sich in Lehrbüchern wie beispielsweise [8] *M. Nakahara, Differentialgeometrie, Topologie und Physik*.

2.3 BEMERKUNG: Seien N_1, N_2 Mannigfaltigkeiten und bezeichne ∂N_i für $i = 1, 2$ den Rand von N_i , dann gilt

$$\partial(N_1 \times N_2) = (\partial N_1 \times N_2) \cup (N_1 \times \partial N_2)$$

Eine *Isotopie* zwischen zwei Einbettungen $\iota_0, \iota_1: N \rightarrow M$ ist eine glatte Abbildung $H: N \times [0, 1] \rightarrow M$ mit $H_0 = \iota_0$, $H_1 = \iota_1$ und H_t ist eine Einbettung für alle $t \in [0, 1]$.

Für den Beweis von Theorem 3.7 benötigen wir folgenden Satz, den man in Standard-Lehrbüchern wie beispielsweise [3] *Einführung in die Geometrie und Topologie* S.84 findet.

2.4 Satz (Zerlegungssatz von Jordan-Brouwer)

Sei N eine geschlossene $(n-1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit und $f: N \rightarrow S^n$ eine Einbettung. Dann zerfällt das Komplement $S^n \setminus f(N)$ des Bildes $f(N)$ in $z + 1$ Zusammenhangskomponenten, wobei z die Anzahl der Zusammenhangskomponenten von N bezeichnet. Jede Zusammenhangskomponente des Bildes $f(N)$ ist im Rand von genau zwei der Zusammenhangskomponenten von $S^n \setminus f(N)$ enthalten.

2.3 Algebraische Topologie

In Kapitel 3.2 verwenden wir einige Resultate der algebraischen Topologie. Dazu definieren wir mit Hilfe der *Eilenberg-Steenrod Axiome* möglichst knapp einige Grundlagen der algebraischen Topologie. Die hier beschriebenen Axiome findet man in ähnlicher Form in [2] *Hajime Sato, Algebraic Topology: An Intuitive Approach* S.29, ff.

2.5 DEFINITION UND FOLGERUNG:

Homologie-Axiome Sei R ein Ring. Wir nennen $h_* = \sum_{p=0}^{\infty} h_p$ eine *Homologietheorie*, falls h_* jedem topologischen Paar (X, A) eine Folge von R -Moduln $h_p(X, A)$ für $p = 0, 1, 2, \dots$ zuordnet, die folgende Eigenschaften erfüllen.

Zu einer stetigen Abbildung $f: (X, A) \rightarrow (X', A')$, dass heißt $f: X \rightarrow (X')$ stetig und $f(A) \subset A'$, gibt es für jedes p einen Homomorphismus von R -Moduln

$$f_*: h_p(X, A) \rightarrow h_p(X', A'),$$

mit den drei Eigenschaften:

- (a) Die Identität $i: (X, A) \rightarrow (X, A)$ bestimmt den identischen Homomorphismus

$$id_*: h_p(X, A) \rightarrow h_p(X, A).$$

- (b) Falls es eine Abbildung $g: (X', A') \rightarrow (X'', A'')$ gibt, dann gilt für die Komposition $(g \circ f)_*$, die durch $g \circ f: (X, A) \rightarrow (X'', A'')$ gegeben ist

$$(g \circ f)_* = g_* \circ f_*: h_p(X, A) \rightarrow h_p(X'', A'').$$

- (c) **Homotopie-Axiom** Falls zwei Abbildungen f und f' von (X, A) nach (X', A') homotop sind ($f \simeq f': (X, A) \rightarrow (X', A')$) dann gilt

$$f_* = f'_*: h_p(X, A) \rightarrow h_p(X', A').$$

Ausschneidungs-Axiom Für jedes p induziert die Inklusion

$i: (B, B \cap A) \rightarrow (A \cup B, A)$ einen Isomorphismus

$$i_*: h_p(B, B \cap A) \rightarrow h_p(A \cup B, A).$$

Rand-Axiom Zu einem Paar (X, A) und jedem p gibt es einen *natürlichen Rand-Homomorphismus* $\partial_p: h_p(X, A) \rightarrow h_{p-1}(A)$, so dass für jede stetige Abbildung $f: (X, A) \rightarrow (X', A')$ das folgende Diagramm kommutiert.

$$\begin{array}{ccc} h_p(X, A) & \xrightarrow{f_*} & h_p(X', A') \\ \partial_p \downarrow & & \downarrow \partial_p \\ h_{p-1}(A) & \xrightarrow{f|_{A_*}} & h_{p-1}(A') \end{array}$$

Exaktheits-Axiom Für ein topologisches Paar (X, A) mit den natürlichen Inklusionen $i: A \rightarrow X$ und $j: X = (X, \emptyset) \rightarrow (X, A)$ ist die folgende Sequenz exakt

$$\dots \longrightarrow h_{p+1}(A) \xrightarrow{i_*} h_{p+1}(X) \xrightarrow{j_*} h_{p+1}(X, A)$$

$$\xrightarrow{\partial_{p+1}} h_p(A) \xrightarrow{i_*} h_p(X) \longrightarrow \dots$$

wobei eine Folge von R -Moduln und Homomorphismen

$$\dots \longrightarrow G_{p+1} \xrightarrow{f_{p+1}} G_p \xrightarrow{f_p} G_{p-1} \xrightarrow{f_{p-1}} \dots$$

exakt ist, falls der Kern von f_p mit dem Bild von f_{p+1} übereinstimmt.

Für eine exakte Sequenz $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ gilt

- (S1) f ist die Nullabbildung genau dann wenn g injektiv ist
- (S2) g ist die Nullabbildung genau dann wenn f surjektiv ist

Dimensions-Axiom Für den Einpunktigen-Raum gilt

$$h_0(pt) = R \text{ und } h_p(pt) = 0 \text{ für } p \geq 1$$

Die Eilenberg-Steenrod Axiome legen die Homologietheorie für eine große Klasse topologischer Räume fest. Die direkte Summe $H_*(X; R) := h_*(X; R)$ ist die *Homologie* von X mit Koeffizienten in R und jeden Summanden $H_p(X; R) := h_p(X; R)$ nennen wir die p -te *Homologiegruppe* von X mit Koeffizienten in R .

Falls für ein p die p -te Homologiegruppe $H_p(X; R)$ und $H_p(X'; R)$ nicht isomorph sind, dann sind X und X' nicht vom selben Homotopietyp und daher auch nicht homöomorph. Die Homologiegruppen sind also topologische Invarianten.

Falls R ein Körper ist, bezeichnen wir $\beta_p(X, A; R) := \dim(H_p(X, A; R))$ als die p -te *Bettizahl* von (X, A) mit Koeffizienten in R .

Analog dazu erhalten wir die Kohomologie Axiome indem wir die Richtungen der Pfeile (der induzierten Homomorphismen und Randhomomorphismen) umdrehen. Wir nennen dann $H^* = \sum_{p=0}^{\infty} H^p$ *Kohomologietheorie*, $H^*(X; R) = \sum_{p=0}^{\infty} H^p(X; R)$ *Homologie* von X mit Koeffizienten in R und jeden Summanden $H^p(X; R)$ die p -te *Kohomologiegruppe* von X mit Koeffizienten in R .

Im Folgenden soll R ein nicht weiter spezifizierter Körper sein und wir schreiben einfach $H_p(X, A)$ statt $H_p(X, A; R)$. Anstelle von $H_p(X, \emptyset)$ schreiben wir $H_p(X)$.

Für Kohomologie- und Homologietheorien gilt nun der folgende Satz, der zur Berechnung algebraischer Invarianten topologischer Räume dient, vgl. [1] A. Hatcher, *Algebraic Topology* S.149, ff.

2.6 Satz (Mayer-Vietoris)

Seien A, B offene Teilmengen eines topologischen Raumes X , deren Vereinigung X überdeckt. Dann existiert eine lange exakte Sequenz von der Form

$$\begin{aligned} \rightarrow H_{k+1}(A \cap B) \rightarrow H_{k+1}(A) \oplus H_{k+1}(B) \rightarrow H_{k+1}(A \cup B) \rightarrow \\ \rightarrow H_k(A \cap B) \rightarrow H_k(A) \oplus H_k(B) \rightarrow H_k(A \cup B) \rightarrow \\ \rightarrow H_{k-1}(A \cap B) \rightarrow H_{k-1}(A) \oplus H_{k-1}(B) \rightarrow H_{k-1}(A \cup B) \rightarrow \end{aligned}$$

Wobei die Abbildung $H_k(A \cap B) \rightarrow H_k(A) \oplus H_k(B)$ die, durch die Inklusionen $H_k(A) \rightarrow H_k(A) \oplus H_k(B)$ und $H_k(B) \rightarrow H_k(A) \oplus H_k(B)$, induzierte Abbildung ist und $H_k(A) \oplus H_k(B) \rightarrow H_k(A \cup B)$ die Differenz der, durch die Inklusionen, induzierten Abbildungen ist.

Jetzt besitzen wir die notwendigen Grundlagen um die Eulercharakteristik zu definieren und deren Eigenschaften zu beweisen, vgl. [11] *T. Dieck, Topologie* S.125, 253.

Sei X ein topologischer Raum. Falls die Homologiegruppen von X endliche Dimension haben und nur endlich viele Bettizahlen ungleich null sind, ist die *Eulercharakteristik* von X definiert durch

$$\chi(X) = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \beta_p(X)$$

Diese Definition ist unabhängig von der Wahl des Koeffizienten-Körpers.

2.7 Lemma (Eigenschaften der Eulercharakteristik)

- (a) Sind A, B Unterräume eines topologischen Raums X mit einer Mayer-Vietoris-Sequenz, dann gilt:

$$\chi(A) + \chi(B) = \chi(A \cup B) + \chi(A \cap B)$$

- (b) Sind X, Y topologische Räume und \times bezeichne das kartesische Produkt, dann gilt

$$\chi(X \times Y) = \chi(X) \cdot \chi(Y)$$

BEWEIS:

Zu (a): Wir betrachten die Mayer-Vietoris Sequenz

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & \dots & \longrightarrow & H_{k+1}(A \cup B) \xrightarrow{\partial_{k+1}} \\ & & & & & & \\ \xrightarrow{\partial_{k+1}} & H_k(A \cap B) & \xrightarrow{i_k} & H_k(A) \oplus H_k(B) & \xrightarrow{j_k} & H_k(A \cup B) & \xrightarrow{\partial_k} \\ & & & & & & \\ \xrightarrow{\partial_k} & H_{k-1}(A \cap B) & \longrightarrow & \dots & & & \end{array}$$

Die Dimensionen der jeweiligen Homologiegruppen sind dann nach dem Homomorphiesatz gegeben durch:

$$\begin{aligned}
 \beta_k(A \cap B) &= \dim(H_k(A \cap B)) = \dim(\operatorname{im}(i_k)) + \dim(\operatorname{ker}(i_k)) \\
 &= \dim(\operatorname{ker}(j_k)) + \dim(\operatorname{ker}(i_k)) \\
 \beta_k(A) + \beta_k(B) &= \dim(H_k(A) \oplus H_k(B)) = \dim(\operatorname{im}(j_k)) + \dim(\operatorname{ker}(j_k)) \\
 &= \dim(\operatorname{ker}(\partial_k)) + \dim(\operatorname{ker}(j_k)) \\
 \beta_k(A \cup B) &= \dim(H_k(A \cup B)) = \dim(\operatorname{im}(\partial_k)) + \dim(\operatorname{ker}(\partial_k)) \\
 &= \dim(\operatorname{ker}(i_{k-1})) + \dim(\operatorname{ker}(\partial_k))
 \end{aligned}$$

Wobei wir die Exaktheit der Mayer-Vietoris Sequenz verwendet haben. Das Bilden der alternierenden Summe über k liefert jetzt die jeweiligen Eulercharakteristiken und folgende Rechnung liefert die Aussage.

$$\begin{aligned}
 \chi(A \cap B) + \chi(A \cup B) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \beta_k(A \cap B) + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \beta_k(A \cup B) \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\dim(\operatorname{ker}(j_k)) + \dim(\operatorname{ker}(i_k)) + \dim(\operatorname{ker}(i_{k-1})) + \dim(\operatorname{ker}(\partial_k)) \right) \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\dim(\operatorname{ker}(j_k)) + \dim(\operatorname{ker}(\partial_k)) \right) \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\beta_k(A) + \beta_k(B) \right) = \chi(A) + \chi(B)
 \end{aligned}$$

Zu (b): Vgl. [11] S.125

□

Für den Beweis von Theorem 3.7 benötigen wir noch wohlbekanntes Sätze der algebraischen Topologie. Die folgenden Sätze und Bemerkungen finden sich in ähnlicher Form in [1] *A. Hatcher, Algebraic Topology* S. 254, 336 sowie S.115.

2.8 Satz (Poincaré-Lefschetz Dualität)

Sei N eine kompakte orientierbare n -dimensionale Mannigfaltigkeit und $k \in \mathbb{Z}$. Dann gibt es einen Isomorphismus zwischen der k -ten Kohomo-

logiegruppe $H^k(N)$ und der $(n - k)$ -ten Homologiegruppe von N relativ dem Rand von N , in Zeichen $H_{n-k}(N, \partial N)$. Ebenso gibt es Isomorphismen zwischen $H_k(N)$ und $H^{n-k}(N, \partial N)$.

2.9 FOLGERUNG: (Poincaré Dualität)

Falls N keinen Rand besitzt folgt direkt aus Satz 2.8

$$\dim(H^k(N)) = \dim(H_{n-k}(N, \emptyset)) = \dim(H_{n-k}(N))$$

und somit

$$\beta^k(N) = \beta_{n-k}(N)$$

2.10 BEMERKUNG:

Eine Folgerung aus dem Universelle Koeffizienten Theorem besagt, dass es Isomorphismen zwischen $H^k(N)$ und $H_k(N)$ gibt, falls diese endlich dimensional sind. Insbesondere gilt dann

$$\beta^k(N) = \beta_k(N)$$

Vgl. [1] S.336, ff und [2] S.66, ff.

3 Geschlossene Hyperflächen

Die Totalkrümmung geschlossener Hyperflächen in n dimensionalen euklidischen Räumen lässt sich auf unterschiedliche Arten berechnen. Im Grundlagenteil wurden zwei Möglichkeiten vorgestellt. Zum einen lässt sich die Totalkrümmung als aufintegrierte Gauß-Kronecker Krümmung berechnen, vgl. Kapitel 2.1. Zum anderen lässt sich die Totalkrümmung nach dem Satz von Gauß-Bonnet-Hopf 2.1 bestimmen.

Wir verwenden nun in diesem einführenden Beispiel erstere Variante um die Totalkrümmung unterschiedlich eingebetteter Parallellflächen zu berechnen. Um die Übersichtlichkeit zu wahren verzichten wir in dieser Arbeit, in den meisten Fällen, auf den Zusatz eingebettet, wenn von Hyperflächen die Rede ist. Desweiteren betrachten wir ausschließlich Einbettungen in euklidische Räume.

3.1 Parallellflächen

Die *Parallelmenge* einer k dimensionalen Mannigfaltigkeit N im \mathbb{R}^n ist der ε -Schlauch um die Inklusion von N in \mathbb{R}^n . Die Parallelmenge einer k dimensionalen Mannigfaltigkeit ist dann eine Parallellfläche.

Wir betrachten für $0 < \varepsilon < 1$ die folgenden beiden Parallellflächen im \mathbb{R}^4 :

die Parallelmenge der S^1 im Abstand ε die wir mit $(S^1)_\varepsilon$ bezeichnen
die Parallelmenge der S^2 im Abstand ε die wir mit $(S^2)_\varepsilon$ bezeichnen

Parametrisierung der $(S^1)_\varepsilon$

Wir betrachten den ebenen Einheitskreis in der x_1x_2 -Ebene, gegeben durch $c(\varphi) = (\cos(\varphi), \sin(\varphi), 0, 0)^T$, $\varphi \in [0, 2\pi]$. Die Menge $\{c(\varphi), e_3, e_4\}$ bildet in jedem dem Punkt $p \in c(\varphi)$ eine Orthonormalbasis des Normalenraums.

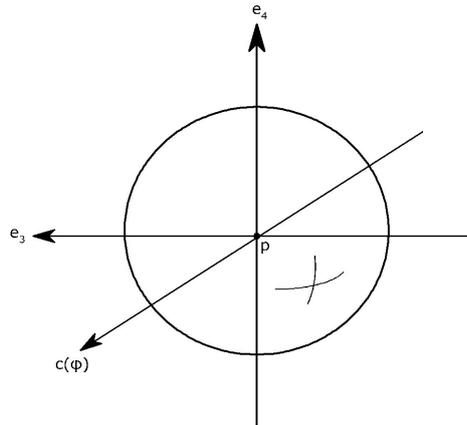


Bild 4.1: Normalenraum von $c(\varphi)$ im Punkt p
 Quelle: Eigene Darstellung mit Inkscape

Daher ist für $\varphi, \psi \in [0, 2\pi]$, $\theta \in [0, \pi]$ eine Parametrisierung von $(S^1)_\varepsilon$ gegeben durch

$$F(\varphi, \theta, \psi) = c(\varphi) + \varepsilon \cdot (\sin(\theta) \cos(\psi) \cdot c(\varphi) + \sin(\theta) \sin(\psi) \cdot e_3 + \cos(\theta) \cdot e_4)$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \varepsilon \cdot \begin{pmatrix} \sin(\theta) \cos(\psi) \cos(\varphi) \\ \sin(\theta) \cos(\psi) \sin(\varphi) \\ \sin(\theta) \sin(\psi) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Somit ergibt sich für die erste und zweite Fundamentalform, sowie die Gauß-Kronecker-Krümmung von $F(\varphi, \theta, \psi)$

$$I = \begin{pmatrix} (1 + \varepsilon \sin(\theta) \cos(\psi))^2 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon^2 \sin^2(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon^2 \end{pmatrix}$$

$$II = \begin{pmatrix} -\sin(\theta) \cos(\psi) (1 + \varepsilon \cdot \sin(\theta) \cos(\psi)) & 0 & 0 \\ 0 & -\varepsilon \cdot \sin^2(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & -\varepsilon \end{pmatrix}$$

$$K = \frac{\det(II)}{\det(I)} = \frac{-\sin(\theta) \cos(\psi)}{\varepsilon^2 (1 + \varepsilon \sin(\theta) \cos(\psi))}$$

Die Totalkrümung lässt sich wie folgt bestimmen, wobei

$$\perp^1 := \{(p, e) \mid \|e\| = 1, e \text{ Normalenvektor in } p, p \in M\}$$

das Einheitsnormalenbündel und dV_{\perp^1} das induzierte Volumenelement bezeichnet.

$$\begin{aligned} \int_{(S^1)_\varepsilon} K dV_{(S^1)_\varepsilon} &= \int_{\perp^1} K dV_{\perp^1} \\ &= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\psi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \frac{-\sin(\theta) \cos(\psi)}{\varepsilon^2(1 + \varepsilon \sin(\theta) \cos(\psi))} \cdot \varepsilon^2 \sin(\theta)(1 + \varepsilon \sin(\theta) \cos(\psi)) d\varphi d\psi d\theta \\ &= -2\pi \int_{\psi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \sin^2(\theta) \cos(\psi) = -2\pi \cdot 0 \end{aligned}$$

Wobei das letzte Gleichheitszeichen gilt, da das Integral von $\cos(\psi)$ von null bis zwei π gleich null ist.

Parametrisierung der $(S^2)_\varepsilon$

Wir betrachten eine zwei dimensionale Sphäre in der $x_1x_2x_3$ -Ebene, gegeben durch

$$c(\varphi, \theta) = \begin{pmatrix} \sin(\theta) \cos(\varphi) \\ \sin(\theta) \sin(\varphi) \\ \cos(\theta) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi \in [0, 2\pi] \quad \theta \in [0, \pi]$$

Die Menge $\{c(\varphi, \theta), e_4\}$ bildet in dem jedem Punkt $p \in c(\varphi, \theta)$ eine Orthonormalbasis des Normalenraums. Daher ist für $\varphi, \psi \in [0, 2\pi], \theta \in [0, \pi]$ eine Parametrisierung von $(S^2)_\varepsilon$ gegeben durch

$$\begin{aligned} F(\varphi, \theta, \psi) &= c(\varphi, \theta) + \varepsilon \cdot (\cos(\psi) \cdot c(\varphi, \theta) + \sin(\psi) \cdot e_4) \\ &= \begin{pmatrix} \sin(\theta) \cos(\varphi) \\ \sin(\theta) \sin(\varphi) \\ \cos(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} + \varepsilon \cdot \begin{pmatrix} \cos(\psi) \sin(\theta) \cos(\varphi) \\ \cos(\psi) \sin(\theta) \sin(\varphi) \\ \cos(\psi) \cos(\theta) \\ \sin(\psi) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Somit ergibt sich für die erste und zweite Fundamentalform, sowie die

Gauß-Kronecker-Krümmung von $F(\varphi, \theta)$

$$I = \begin{pmatrix} \sin^2(\theta)(1 + \varepsilon \cos(\psi))^2 & 0 & 0 \\ 0 & (1 + \varepsilon \cos(\psi))^2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon^2 \end{pmatrix}$$

$$II = \begin{pmatrix} -\cos(\psi) \sin^2(\theta)(1 + \varepsilon \cos(\psi)) & 0 & 0 \\ 0 & -\cos(\psi)(1 + \varepsilon \cos(\psi)) & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$$

$$K = \frac{\cos^2(\psi)}{\varepsilon(1 + \varepsilon \cos(\psi))^2}$$

Analoges Vorgehen wie im obigen Fall liefert

$$\begin{aligned} \int_{(S^2)_\varepsilon} K dV_{(S^2)_\varepsilon} &= \int_{\perp^1} K dV_{\perp^1} \\ &= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\psi=0}^{2\pi} \frac{\cos^2(\psi)}{\varepsilon(1 + \varepsilon \cos(\psi))^2} \cdot \varepsilon \sin(\theta)(1 + \varepsilon \cos(\psi))^2 d\varphi d\theta d\psi \\ &= 2\pi \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\psi=0}^{2\pi} \cos^2(\psi) \sin(\theta) = 4\pi^2 \end{aligned}$$

Im Folgenden bezeichne $(S^k)_{\leq \varepsilon}$ das Innere der Parallelfäche S^k . Der Normalenraum der $S^1 \subset \mathbb{R}^4$ in einem festen Punkt ist drei dimensional. Obige Konstruktion der Parametrisierung zeigt, dass wir die Parallelmenge der S^1 erhalten, indem wir bezüglich der oben angegebenen Basis einen drei dimensional Ball D^3 um jeden Punkt der S^1 legen. Daher gibt es eine Einbettung, so dass $\mathbb{R}^4 \supset (S^1)_{\leq \varepsilon} \cong S^1 \times D^3$. Analog ergibt sich wegen des zwei dimensional Normalenraums der S^2 , dass eine Einbettung existiert, so dass $\mathbb{R}^4 \supset (S^2)_{\leq \varepsilon} \cong S^2 \times D^2$. Mit Bemerkung 2.3 folgt

$$\begin{aligned} \partial((S^1)_{\leq \varepsilon}) &\cong \partial(S^1 \times D^3) \cong (\partial S^1 \times D^3) \cup (S^1 \times \partial D^3) \cong S^1 \times S^2 \\ \partial((S^2)_{\leq \varepsilon}) &\cong \partial(S^2 \times D^2) \cong (\partial S^2 \times D^2) \cup (S^2 \times \partial D^2) \cong S^2 \times S^1 \\ \partial((S^1)_{\leq \varepsilon}) &\cong S^1 \times S^2 \cong \partial((S^2)_{\leq \varepsilon}) \end{aligned}$$

Also sind die beiden Parallelfächen homöomorph, haben jedoch unterschiedliche Totalkrümmung. Im Gegensatz zu zwei dimensional Untermannigfaltigkeiten hängt die Totalkrümmung in diesem Fall also sehr wohl von der Art der Einbettung ab und nicht nur von der topologischen Ge-

stalt der Fläche. Die hier gewählte Vorgehensweise zur Bestimmung der Totalkrümmung kann sehr rechenintensiv sein und das Finden einer Parametrisierung kann sich als äußerst schwierig erweisen. Daher wird im Folgenden eine andere Vorgehensweise zur Berechnung der Totalkrümmung verwendet.

Berechnung der Totalkrümmung mit Gauß-Bonnet-Hopf

Seien $(S^1)_\varepsilon$ und $(S^2)_\varepsilon$ die Parallelmengen von S^1 und S^2 im \mathbb{R}^4 . Die Betrachtung des Normalenraumes liefert $(S^1)_{\leq\varepsilon} \cong S^1 \times D^3$ und $(S^2)_{\leq\varepsilon} \cong S^2 \times D^2$ (bezüglich der Standard-Einbettung). Damit ergibt sich für die Eulercharakteristik der beiden Parallellflächen mit Lemma 2.7 (b)

$$\begin{aligned}\chi\left((S^1)_{\leq\varepsilon}\right) &= \chi(S^1 \times D^3) = \chi(S^1) \cdot \chi(D^3) = 0 \cdot 1 = 0 \\ \chi\left((S^2)_{\leq\varepsilon}\right) &= \chi(S^2 \times D^2) = \chi(S^2) \cdot \chi(D^2) = 2 \cdot 1 = 2\end{aligned}$$

Mit Gauß-Bonnet-Hopf folgt

$$\begin{aligned}\int_{(S^1)_\varepsilon} K_{(S^1)_\varepsilon} dV_{(S^1)_\varepsilon} &= c_3 \cdot \chi\left((S^1)_{\leq\varepsilon}\right) = 2\pi^2 \cdot 0 \\ \int_{(S^2)_\varepsilon} K_{(S^2)_\varepsilon} dV_{(S^2)_\varepsilon} &= c_3 \cdot \chi\left((S^2)_{\leq\varepsilon}\right) = 2\pi^2 \cdot 2\end{aligned}$$

Trotz Homöomorphie der beiden betrachteten Parallellflächen ergeben sich unterschiedliche Totalkrümmungen. Dieses Phänomen tritt im drei-dimensionalen euklidischen Raum wegen der Gültigkeit des Satzes von Gauß-Bonnet nicht auf. Es stellt sich die Frage, wie sich dies in höherdimensionalen Räumen verhält. Dazu betrachten wir im Folgenden Parallellflächen im \mathbb{R}^n .

Die Konstruktion der Parallellflächen orientiert sich am vorangegangenen Beispiel. Zu einem festen n wird der Normalenraum der k dimensionalen Einheitssphäre mit $k \leq n - 2$ in einem beliebigen Punkt $p \in S^k \subset \mathbb{R}^n$ betrachtet. Alle Punkte, die von p den Abstand ε haben liegen auf einer $n - k - 1$ dimensionalen Sphäre (zumindest wenn man die Standard-Einbettung betrachtet). Für alle in diesem Abschnitt vorkommenden Hyperflächen betrachten wir die Standard-Einbettung.

Nach der Folgerung des Satzes von Gauß-Bonnet-Hopf (Korollar 2.2) ist die Totalkrümmung in euklidischen Räumen ungerader Dimension durch

die Eulercharakteristik der Hyperfläche festgelegt. Das heißt, in ungeraden Dimensionen besitzen homöomorphe Hyperfläche die selbe Totalkrümmung. Um dieses Korollar besser zu verstehen berechnen wir die Totalkrümmung von vier dimensional parallelen Hyperflächen (Parallellflächen mit Kodimension eins) und zeigen, dass diese mit der Aussage in Korollar 2.2 übereinstimmt.

Dazu betrachten wir die Parallelmenge der $S^1 \subset \mathbb{R}^5$. Der Normalenraum in einem festen Punkt ist dann vier dimensional. Daher können wir $(S^1)_\varepsilon$ so einbetten, dass das Innere der Parallelfläche homöomorph zum kartesischen Produkt aus S^1 und D^4 ist. Die Eulercharakteristik des Inneren $(S^1)_{\leq \varepsilon}$ ist dann nach Lemma 2.7 (b) gegeben durch

$$\chi\left((S^1)_{\leq \varepsilon}\right) = \chi(S^1 \times D^4) = \chi(S^1) \cdot \chi(D^4) = 0 \cdot 1$$

und die Totalkrümmung der $(S^1)_\varepsilon$ ist daher null. Mit derselben Vorgehensweise lässt sich die Eulercharakteristik des Inneren der $(S^2)_\varepsilon$ und $(S^3)_\varepsilon$ berechnen. Da der Normalenraum der S^2 bzw. S^3 im \mathbb{R}^5 drei dimensional bzw. zwei dimensional ist ergibt sich für die Eulercharakteristiken und den Homöomorphietyp

$$\begin{aligned} \chi\left((S^2)_{\leq \varepsilon}\right) &= \chi(S^2 \times D^3) = \chi(S^2) \cdot \chi(D^3) = 2 \\ \chi\left((S^3)_{\leq \varepsilon}\right) &= \chi(S^3 \times D^2) = \chi(S^3) \cdot \chi(D^2) = 0 \\ (S^2)_\varepsilon &\cong \partial\left((S^2)_{\leq \varepsilon}\right) \cong \partial(S^2 \times D^3) \cong S^2 \times S^2 \\ (S^3)_\varepsilon &\cong \partial\left((S^3)_{\leq \varepsilon}\right) \cong \partial(S^3 \times D^2) \cong S^3 \times S^1 \end{aligned}$$

Analog ergeben sich Homöomorphietyp, Eulercharakteristik des Inneren und Totalkrümmung der Parallelflächen zu S^k im \mathbb{R}^n , die in folgender Tabelle aufgelistet sind.

$(S^k)_\varepsilon \subset \mathbb{R}^5$	Homöomorphietyp	Eulercharakteristik des Inneren	Totalkrümmung
$(S^1)_\varepsilon$	$S^1 \times S^3$	0	0
$(S^2)_\varepsilon$	$S^2 \times S^2$	2	$2 \cdot c_4$
$(S^3)_\varepsilon$	$S^3 \times S^1$	0	0

$(S^k)_\varepsilon \subset \mathbb{R}^6$	Homöomorphietyp	Eulercharakteristik des Inneren	Totalkrümmung
$(S^1)_\varepsilon$	$S^1 \times S^4$	0	0
$(S^2)_\varepsilon$	$S^2 \times S^3$	2	$2 \cdot c_5$
$(S^3)_\varepsilon$	$S^3 \times S^2$	0	0
$(S^4)_\varepsilon$	$S^4 \times S^1$	2	$2 \cdot c_5$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots

$(S^k)_\varepsilon \subset \mathbb{R}^{2n-1}$	Homöomorphietyp	Eulercharakteristik des Inneren	Totalkrümmung
$(S^1)_\varepsilon$	$S^1 \times S^{2n-3}$	0	0
$(S^2)_\varepsilon$	$S^2 \times S^{2n-4}$	2	$2 \cdot c_{2n-2}$
$(S^3)_\varepsilon$	$S^3 \times S^{2n-5}$	0	0
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
$(S^{2n-4})_\varepsilon$	$S^{2n-4} \times S^2$	2	$2 \cdot c_{2n-2}$
$(S^{2n-3})_\varepsilon$	$S^{2n-3} \times S^1$	0	0

$(S^k)_\varepsilon \subset \mathbb{R}^{2n}$	Homöomorphietyp	Eulercharakteristik des Inneren	Totalkrümmung
$(S^1)_\varepsilon$	$S^1 \times S^{2n-2}$	0	0
$(S^2)_\varepsilon$	$S^2 \times S^{2n-3}$	2	$2 \cdot c_{2n-1}$
$(S^3)_\varepsilon$	$S^3 \times S^{2n-4}$	0	0
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
$(S^{2n-3})_\varepsilon$	$S^{2n-3} \times S^2$	0	0
$(S^{2n-2})_\varepsilon$	$S^{2n-2} \times S^1$	2	$2 \cdot c_{2n-1}$

Die Tabelle zeigt, dass die Werte für die Totalkrümmung der Aussage von Korollar 2.2 entsprechen. Aus dem Korollar folgt insbesondere für Parallellflächen, dass in euklidischen Räumen ungerader Dimension die Totalkrümmung homöomorpher Parallellflächen unabhängig von der Einbettung immer dieselbe ist. Während homöomorphe Parallellflächen in gerader Dimension mit unterschiedlicher Totalkrümmung eingebettet werden können. Das folgende Lemma spezifiziert dies.

3.1 Lemma (Totalkrümmung von Parallelfächen)

Sei $(S^k)_\varepsilon$ die Parallelfäche zu S^k im \mathbb{R}^n für $n > 2$, $k = 1, \dots, n-2$ und $\tau((S^k)_\varepsilon)$ bezeichne die Totalkrümmung von $(S^k)_\varepsilon$. Dann gilt

- a) $(S^k)_\varepsilon \cong S^k \times S^{n-k-1} \cong (S^{n-k-1})_\varepsilon$
- b) $\tau((S^k)_\varepsilon) \neq \tau((S^{n-k-1})_\varepsilon)$ falls n gerade
 $\tau((S^k)_\varepsilon) = \tau((S^{n-k-1})_\varepsilon)$ falls n ungerade

BEWEIS: Aus der Dimensionsformel folgt

$$\begin{aligned} \dim(\mathbb{R}^n) &= \dim(T_p S^k \oplus N_p S^k) \\ &= \dim(T_p S^k) + \dim(N_p S^k) = k + \dim(N_p S^k) \end{aligned}$$

Folglich hat der Normalenraum $N_p S^k$ Dimension $n-k$. Nach oben verwendeten Konstruktion von Parallelfächen ist das Innere der Parallelfäche zu S^k im \mathbb{R}^n homöomorph zu $S^k \times D^{n-k}$. Somit ist die parallele Hyperfläche $(S^k)_\varepsilon$ homöomorph zu $S^k \times S^{n-k-1}$. Analog besitzt der Normalenraum von $S^{n-k-1} \subseteq \mathbb{R}^n$ die Dimension $k+1$, da

$$\begin{aligned} \dim(\mathbb{R}^n) &= \dim(T_p S^{n-k-1} \oplus N_p S^{n-k-1}) \\ &= \dim(T_p S^{n-k-1}) + \dim(N_p S^{n-k-1}) = n - k - 1 + \dim(N_p S^{n-k-1}) \end{aligned}$$

Das Innere $(S^{n-k-1})_{\leq \varepsilon}$ ist daher homöomorph zu $(S^{n-k-1}) \times D^{k+1}$ und somit ist $(S^{n-k-1})_\varepsilon$ homöomorph zu $S^{n-k-1} \times S^k$.

Die Eulercharakteristik der k -dimensionalen Sphäre ist nach bekannten Lehrbüchern $(-1)^k + 1$, also null falls k gerade und zwei falls k ungerade. Die Totalkrümmung der Parallelfäche ergibt sich nach Gauß-Bonnet-Hopf dann zu

$$\tau((S^k)_\varepsilon) = c_{n-1} \cdot \chi((S^k)_{\leq \varepsilon}) = c_{n-1} \cdot \chi(S^k \times D^{n-k}) = c_{n-1} \cdot \chi(S^k)$$

- Für n und k gerade:

$$\begin{aligned}\chi\left((S^k)_{\leq\varepsilon}\right) &= 2 \Rightarrow \tau\left((S^k)_\varepsilon\right) = 2 \cdot c_{n-1} \\ \chi\left((S^{n-k-1})_{\leq\varepsilon}\right) &= 0 \Rightarrow \tau\left((S^{n-k-1})_\varepsilon\right) = 0\end{aligned}$$

- Für n und k ungerade:

$$\begin{aligned}\chi\left((S^k)_{\leq\varepsilon}\right) &= 0 \Rightarrow \tau\left((S^k)_\varepsilon\right) = 0 \\ \chi\left((S^{n-k-1})_{\leq\varepsilon}\right) &= 2 \Rightarrow \tau\left((S^{n-k-1})_\varepsilon\right) = 2 \cdot c_{n-1}\end{aligned}$$

- Für n ungerade und k gerade

$$\begin{aligned}\chi\left((S^k)_{\leq\varepsilon}\right) &= 2 \Rightarrow \tau\left((S^k)_\varepsilon\right) = 2 \cdot c_{n-1} \\ \chi\left((S^{n-k-1})_{\leq\varepsilon}\right) &= 2 \Rightarrow \tau\left((S^{n-k-1})_\varepsilon\right) = 2 \cdot c_{n-1}\end{aligned}$$

- Für n ungerade und k ungerade

$$\begin{aligned}\chi\left((S^k)_{\leq\varepsilon}\right) &= 0 \Rightarrow \tau\left((S^k)_\varepsilon\right) = 0 \\ \chi\left((S^{n-k-1})_{\leq\varepsilon}\right) &= 0 \Rightarrow \tau\left((S^{n-k-1})_\varepsilon\right) = 0\end{aligned}$$

□

3.2 BEMERKUNG: Die Konstanz der Totalkrümmung in euklidischen Räumen ungerader Dimension folgt natürlich auch aus Korollar 2.2. Die Parallellflächen $(S^k)_\varepsilon$ und $(S^{n-k-1})_\varepsilon$ sind nach Teil (a) des letzten Lemmas, unabhängig von der Dimension des umgebenden Raums, homöomorph. Die Parallellflächen unterscheiden sich jedoch durch ihr Inneres. Im ungeraden Fall ist die Konstanz der Totalkrümmung sehr leicht nachzuvollziehen, denn die Eulercharakteristiken von S^k und S^{n-k-1} sind entweder beide gerade oder ungerade.

Wir suchen nun weiter nach Beispielen homöomorpher Hyperflächen mit unterschiedlicher Totalkrümmung und betrachten dazu Parallelmengen kartesischer Produkte k - und j dimensionaler Sphären und bezeichnen diese mit $(S^k \times S^j)_\varepsilon$.

3.3 BEISPIEL: Sei $(S^2 \times S^3)_\varepsilon$ die Parallellfläche zu $S^2 \times S^3$ im \mathbb{R}^{10} . Die bekannte Vorgehensweise zur Bestimmung des Homöomorphietyps liefert

$$\begin{aligned} \partial((S^2 \times S^3)_{\leq \varepsilon}) &\cong \partial(S^2 \times S^3 \times D^5) \cong S^2 \times S^3 \times S^4 \\ &\cong S^3 \times S^4 \times S^2 \cong \partial(S^3 \times S^4 \times D^3) \cong \partial((S^3 \times S^4)_{\leq \varepsilon}) \\ &\cong S^2 \times S^4 \times S^3 \cong \partial(S^2 \times S^4 \times D^4) \cong \partial((S^2 \times S^4)_{\leq \varepsilon}) \end{aligned}$$

Jedoch ergibt sich für die Totalkrümmung der drei homöomorphen Parallellflächen nach Gauß-Bonnet-Hopf

$$\begin{aligned} \tau((S^2 \times S^3)_\varepsilon) &= 2 \cdot 0 \cdot 1 \cdot c_9 \\ \tau((S^3 \times S^4)_\varepsilon) &= 0 \cdot 2 \cdot 1 \cdot c_9 \\ \tau((S^2 \times S^4)_\varepsilon) &= 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot c_9 \end{aligned}$$

3.4 BEMERKUNG: Eine analoge Aussage zu Lemma 3.1 lässt sich auch für Parallellflächen zu kartesischen Produkten von Sphären formulieren. Für $n \geq j + k + 2$ und $j, k \in \mathbb{N}$ gilt für Parallellflächen im \mathbb{R}^n

$$(S^j \times S^k)_\varepsilon \cong (S^j \times S^{n-j-k-1})_\varepsilon \cong (S^k \times S^{n-j-k-1})_\varepsilon \cong S^j \times S^k \times S^{n-j-k-1}$$

Wir betrachten nun die unterschiedlichen Fälle für die Exponenten $j, k, n - k - j - 1$ der Sphären. Falls

- alle drei ungerade oder zwei ungerade und einer gerade ist, ist die Totalkrümmung der drei homöomorphen Parallellflächen gleich null
- einer ungerade und zwei gerade sind, ist die Totalkrümmung gleich null, falls das Innere der Parallellfläche homöomorph zu $S^{g_1} \times S^u \times D^{g_2}$ und $4 \cdot c_{n-1}$ falls das Innere homöomorph zu $S^{g_1} \times S^{g_2} \times D^u$, wobei g_i gerade und u ungerade
- alle drei gerade sind, ist die Totalkrümmung $4 \cdot c_{n-1}$ ($n - 1$ ist die Summe der Exponenten und daher ist n in diesem Fall ungerade)

Analog liefert die Betrachtung von dreistelligen Produkten vom Typ $(S^j \times S^k \times S^l)_\varepsilon$ als Teilmenge des \mathbb{R}^n vier homöomorphe Parallellflächen. Um deren Totalkrümmung zu bestimmen untersuchen wir erneut die Exponenten. Falls

- mehr als einer ungerade ist, ist die Totalkrümmung aller vier Hyperflächen von diesem Typ gleich null
- einer ungerade und drei gerade sind, ist die Totalkrümmung gleich null, falls das Innere der Hyperfläche homöomorph zu $S^{g_1} \times S^{g_2} \times S^u \times D^{g_3}$ und $8 \cdot c_{n-1}$ falls das Innere homöomorph zu $S^{g_1} \times S^{g_2} \times S^{g_3} \times D^u$
- alle vier gerade sind, ist die Totalkrümmung $8 \cdot c_{n-1}$ (n ungerade, aus dem selben Grund wie oben)

Es zeigt sich, dass sich auch für mehrstellige Produkte von Sphären Beispiele für homöomorphe Parallellflächen mit unterschiedlicher Totalkrümmung finden lassen. Dieser Fall tritt anscheinend genau dann auf, wenn genau ein Exponent ungerade und alle anderen gerade sind und somit auch n gerade ist. Daher formulieren wir

3.5 Lemma

Für $j \in \mathbb{N}$, $n \geq \sum_{i=1}^j k_i + 2$, das Tupel $(k_1, \dots, k_j, n - \sum_{i=1}^j k_i - 1)$ und eine Permutation σ auf $\{1, \dots, j + 1\}$ gilt

$$(a) \quad \left(S^{k_1} \times \dots \times S^{k_j} \right)_\varepsilon \cong \left(S^{k_{\sigma(1)}} \times \dots \times S^{k_{\sigma(j)}} \right)_\varepsilon \\ \cong S^{k_1} \times \dots \times S^{k_j} \times S^{n - \sum_{i=1}^j k_i - 1}$$

(b) Falls genau ein Element des Tupels $(k_1, \dots, k_j, n - \sum_{i=1}^j k_i - 1)$ ungerade und n gerade ist, existiert (bis auf Reihenfolge) genau eine parallele Hyperflächen $\left(S^{k_{\sigma(1)}} \times \dots \times S^{k_{\sigma(j)}} \right)_\varepsilon$, die homöomorph zu allen anderen parallelen Hyperflächen dieses Typs ist (die sich bis auf Reihenfolge um genau einen Exponenten unterscheiden), jedoch unterschiedliche Totalkrümmung besitzt.

BEWEIS: Analoges Vorgehen wie im ersten Teil des letzten Beweises liefert Aussage (a). Die Eulercharakteristik des Inneren berechnet sich zu

$$\chi \left(S^{\sigma(k_1)} \times \dots \times S^{\sigma(k_j)} \right)_{\leq \varepsilon} = \chi(S^{\sigma(k_1)}) \cdot \dots \cdot \chi(S^{\sigma(k_j)}) \cdot \chi \left(D^{\sigma(n - \sum_{i=1}^j k_i)} \right)$$

- Sind alle Exponenten gerade ist die Totalkrümmung der Parallellflächen 2^j (n ungerade)

- Ist genau ein Exponent ungerade, so ist entweder ein $\sigma(k_i)$ ungerade für $i = 1, \dots, j$ und somit die Totalkrümmung gleich null, oder $\sigma(k_i)$ gerade für alle $i = 1, \dots, j$ und $\sigma(n - \sum_{i=1}^j k_i)$ ungerade und somit die Totalkrümmung gleich 2^j .
- Ist mehr als ein Exponent ungerade so ist die Totalkrümmung gleich null

□

3.2 Totalkrümmung in Abhängigkeit des topologischen Typs

In euklidischen Räumen gerader Dimension ist die Totalkrümmung geschlossener Hyperflächen also von der Art der Einbettung abhängig. In diesem Kapitel wird diese Abhängigkeit untersucht. In folgendem Theorem wird gezeigt, dass die in Frage kommenden Werte für die Totalkrümmung einer eingebetteten geschlossenen zusammenhängenden Hyperfläche N im \mathbb{R}^4 ausschließlich von der ersten Bettizahl von N abhängen. Damit können Schranken an die Totalkrümmung einer solchen Hyperfläche angegeben werden und in Kapitel 3.3 wird gezeigt, dass diese Grenzen scharf sind.

3.6 BEMERKUNG: Wir betrachten n -dimensionale geschlossene zusammenhängende Mannigfaltigkeiten N mit einer Einbettung $\iota: N \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$. Bisher haben wir einfach sowohl die Mannigfaltigkeit, wie auch die Hyperfläche mit N bezeichnet. Um die Abhängigkeit der Totalkrümmung von der Art der Einbettung auszudrücken und die Totalkrümmung unterschiedlich eingebetteter Hyperflächen besser unterscheiden zu können bezeichnen wir ab jetzt die Totalkrümmung einer eingebetteten, geschlossenen, zusammenhängenden Hyperfläche mit $\tau(\iota(N))$.

Um die Übersichtlichkeit zu bewahren betrachten wir in den folgenden Kapiteln immer die normierte Totalkrümmung, das heißt

$$\tau(\iota(N)) := \frac{1}{c_n} \int_N K dV_N = \chi(N_{int})$$

und schreiben Totalkrümmung anstatt normierte Totalkrümmung.

3.7 Theorem (Einschränkung der Totalkrümmung im \mathbb{R}^4)

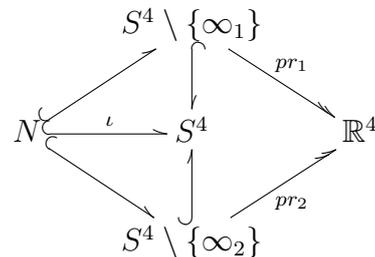
Sei N eine geschlossene, zusammenhängende Hyperfläche im \mathbb{R}^4 und $\iota(N) \subset \mathbb{R}^4$ eine Einbettung von N in den \mathbb{R}^4 . Dann gilt für die Totalkrümmung

$$\tau(\iota(N)) \in [1 - \beta_1(N), 1 + \beta_1(N)] \cap \mathbb{Z} \quad (i)$$

$$\tau(\iota(N)) \equiv 1 + \beta_1(N) \pmod{2} \quad (ii)$$

BEWEIS: Sei N wie oben. Die Totalkrümmung von N ist nach Gauß-Bonnet-Hopf die Eulercharakteristik des Inneren. Daher reicht es im folgenden die Eulercharakteristik des Inneren zu bestimmen.

Wir betrachten jetzt die Einpunktkompaktifizierung des \mathbb{R}^4 und betten N in darin ein. Die Einbettung von N in den \mathbb{R}^4 lässt sich auf die Einpunktkompaktifizierung $\mathbb{R}^4 \cup \{\infty\}$ fortsetzen. Wir erhalten so eine Einbettung $\iota: N \rightarrow S^4$. Der Zerlegungssatz von Jordan-Brouwer besagt nun, dass eine geschlossene, zusammenhängende Hyperfläche den umgebenden Raum in zwei Zusammenhangskomponenten zerlegt. Mit M_1, M_2 bezeichnen wir die Abschlüsse der Zusammenhangskomponenten von $S^4 \setminus N$, die nun beide beschränkt sind. Folgendes Diagramm soll dies veranschaulichen.



Nach Mayer-Vietoris 2.6 existiert dann eine lange exakte Sequenz, wobei $M_1 \cap M_2 = N$ und $M_1 \cup M_2 = S^4$

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow H_{k+1}(N) &\rightarrow H_{k+1}(M_1) \oplus H_{k+1}(M_2) \rightarrow H_{k+1}(S^4) \rightarrow \\ &\rightarrow H_k(N) \rightarrow H_k(M_1) \oplus H_k(M_2) \rightarrow H_k(S^4) \rightarrow \\ &\rightarrow H_{k-1}(N) \rightarrow H_{k-1}(M_1) \oplus H_{k-1}(M_2) \rightarrow H_{k-1}(S^4) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

Da N und S^4 zusammenhängend sind, gilt $\beta_0(N) = 1$ und $\beta_0(S^4) = 1$. N bzw. S^4 ist eine drei- bzw. vier-Mannigfaltigkeit. Dann gibt es auf Grund der Poincaré-Dualität und Bemerkung 2.10 Isomorphismen zwischen $H_k(N)$ und $H_{3-k}(N)$ sowie zwischen $H_k(S^4)$ und $H_{4-k}(S^4)$. Dann gilt $\beta_3(N) = 1$ und $\beta_4(S^4) = 1$. Also besteht zwischen den Bettizahlen von N bzw. S^4 die Beziehung

$$\begin{aligned} \beta_k(N) &= \beta_{3-k}(N) \\ \beta_k(S^4) &= \beta_{4-k}(S^4) \end{aligned}$$

Wobei $\beta_k(N) = 0$ für $k < 0$ und $k > 3$, $\beta_k(S^4) = 0$ für $k < 0$ und $k > 4$. Allgemein gilt für die Bettizahlen der n -Sphäre $\beta_k(S^n) = 1$ für $k = 0, n$ und $\beta_k(S^n) = 0$ sonst. Diese Aussage findet man beispielsweise in [2] S.34, ff. Somit erhalten wir folgende Tabelle für die Dimensionen der Homologiegruppen der langen exakten Sequenz

k	$\beta_k(N)$	$\beta_k(M_1) + \beta_k(M_2)$	$\beta_k(S^4)$
4	0	$\beta_4(M_1) + \beta_4(M_2)$	1
3	1	$\beta_3(M_1) + \beta_3(M_2)$	0
2	$\beta_1(N)$	$\beta_2(M_1) + \beta_2(M_2)$	0
1	$\beta_1(N)$	$\beta_1(M_1) + \beta_1(M_2)$	0
0	1	$\beta_0(M_1) + \beta_0(M_2)$	1

Das Ziel ist jetzt mit Hilfe dieser langen exakten Sequenz Zusammenhänge zwischen den Homologiegruppen $H_k(N)$ und $H_k(M_1) \oplus H_k(M_2)$ zu finden.

BEZEICHNUNG: Im Folgenden werden injektive Abbildungen durch \hookrightarrow , surjektive Abbildungen \twoheadrightarrow und folglich bijektive Abbildungen $\xrightarrow{\cong}$ dargestellt.

Weiter im Beweis: Wir wählen nun Koeffizienten in \mathbb{R} für die Homologie-

gruppen $H_k(N)$, $H_k(M_1) \oplus H_k(M_2)$ und $H_k(S^4)$ und betrachten Ausschnitte der Mayer-Vietoris Sequenz.

- Für $k = 0$ betrachten wir

$$\begin{array}{ccccccccc}
 H_1(S^4) & \longrightarrow & H_0(N) & \longrightarrow & H_0(M_1 \oplus M_2) & \longrightarrow & H_0(S^4) & \longrightarrow & H_{-1}(N) \\
 \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\
 0 & \longrightarrow & \mathbb{R} & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^{\beta_0(M_1) + \beta_0(M_2)} & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} & \xrightarrow{h} & 0
 \end{array}$$

Injektivität von f gilt nach (S1) und Surjektivität von g nach (S2). Es gilt $\text{im}(g) = \ker(h) = \mathbb{R}$ und $\ker(g) = \text{im}(f) = \mathbb{R}$. Mit der Dimensionsformel für endlich dimensionale Vektorräume folgt

$$\begin{aligned}
 \beta_0(M_1) + \beta_0(M_2) &= \dim(H_0(M_1) \oplus H_0(M_2)) \\
 &= \dim(\text{im}(g)) + \dim(\ker(g)) = 2
 \end{aligned}$$

Im Folgenden verzichten wir darauf die Homologiegruppen aufzuschreiben und betrachten direkt die Koeffizientenkörper.

- Für $1 \leq k \leq 2$ betrachten wir

$$0 \longrightarrow \mathbb{R}^{\beta_k(N)} \xrightarrow{f} \mathbb{R}^{\beta_k(M_1) + \beta_k(M_2)} \longrightarrow 0$$

Bijektivität von f folgt aus (S1) und (S2). Für $k = 1, 2$ gilt also

$$\begin{aligned}
 \dim(H_k(M_1) \oplus H_k(M_2)) &= \dim(H_k(M_1)) + \dim(H_k(M_2)) \\
 &= \beta_k(M_1) + \beta_k(M_2) = \beta_k(N) = \dim(H_k(N))
 \end{aligned}$$

- Für $3 \leq k \leq 4$ betrachten wir

$$0 \longrightarrow \mathbb{R}^{\beta_4(M_1) + \beta_4(M_2)} \xrightarrow{f} \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R} \xrightarrow{h} \mathbb{R}^{\beta_3(M_1) + \beta_3(M_2)} \longrightarrow 0$$

Injektivität von f nach (S1) und Surjektivität von h nach (S2). Da f injektiv ist, gilt $\dim(\mathbb{R}^{\beta_4(M_1) + \beta_4(M_2)}) \leq \dim(\mathbb{R}) = 1$. Angenommen $\beta_4(M_1) + \beta_4(M_2) = 1$. Dann ist f bijektiv und nach (S2) wäre $\dim(H_3(N)) = \dim(\mathbb{R}) = 0$ (Widerspruch). Also ist $\beta_4(M_1) + \beta_4(M_2)$ gleich null. (Alternativ folgt $\beta_4(M_1) + \beta_4(M_2) = 0$ auch aus einer Folgerung von Satz 2.8 und dem Universellen Koeffiziententheorem.

Die besagt, dass für n -dimensional zusammenhängende Mannigfaltigkeiten M_1, M_2 mit Rand gilt $\beta_n(M_1) = \beta_n(M_2) = 0$.

Aus der Surjektivität von h folgt $\dim(\mathbb{R}^{\beta_3(M_1)+\beta_3(M_2)}) \leq \dim(\mathbb{R}) = 1$. Angenommen $\beta_3(M_1) + \beta_3(M_2) = 1$. Dann ist g bijektiv und nach (S1) wäre $\dim(H_4(S^4)) = \dim(\mathbb{R}) = 0$ (Widerspruch). Also ist $\beta_3(M_1) + \beta_3(M_2)$ gleich null. Zusammengefasst ergibt sich also für die Bettizahlen der Summe von M_1 und M_2 :

$$\beta_k(M_1) + \beta_k(M_2) = \begin{cases} 2 & \text{falls } k = 0 \\ \beta_k(N) & \text{falls } k = 1, 2 \\ 0 & \text{falls } k > 2 \end{cases}$$

Wir wissen jetzt, wie die Bettizahlen von N und dessen Innerem und Äußerem M_1 und M_2 zusammenhängen. Um das Theorem zu beweisen betrachten wir noch eine weitere lange exakte Sequenz. Da N der Rand von M_1 ist gibt es nach dem Exaktheitsaxiom aus Definition und Folgerung 2.5 für das Paar (M_1, N) eine lange exakte Sequenz

$$\rightarrow H_{k+1}(M_1, N) \rightarrow H_k(N) \rightarrow H_k(M_1) \rightarrow H_k(M_1, N) \rightarrow H_{k-1}(N) \rightarrow$$

Analog könnten wir auch die lange exakte Sequenz des Paares (M_2, N) betrachten, da in S^4 die beiden Zusammenhangskomponenten M_1 und M_2 gleichberechtigt sind. Wir erhalten wieder eine Tabelle für die Dimensionen der Homologiegruppen

k	$\beta_k(N)$	$\beta_k(M_1)$	$\beta_k(M_1, N)$
4	0	0	$\beta_4(M_1, N)$
3	1	0	$\beta_3(M_1, N)$
2	$\beta_2(N)$	$\beta_2(M_1)$	$\beta_2(M_1, N)$
1	$\beta_1(N)$	$\beta_1(M_1)$	$\beta_1(M_1, N)$
0	1	$\beta_0(M_1)$	$\beta_0(M_1, N)$

Die Bettizahlen von N wurden bereits berechnet. Die dritte und vierte Bettizahl $\beta_3(M_1)$ und $\beta_4(M_1)$ von M_1 sind null, da die Summe von $\beta_k(M_1)$ und $\beta_k(M_2)$ für $k = 3, 4$ gleich null ist und die Bettizahlen nicht negativ sind. Da N der Rand von M_1 ist folgt direkt aus der Poincaré-Lefschetz Dualität

$$\beta_k(M_1) = \beta^{4-k}(M_1, N) = \beta_{4-k}(M_1, N)$$

Für $0 < k < 4$ liefert die oben betrachtete Mayer-Vietoris Sequenz, die

Surjektivität von f (in unterem Diagramm). Die Projektion pr_1 auf die erste Komponente ist surjektiv. Da die Hintereinanderausführung surjektiver Abbildungen wieder surjektiv ist, ist die Inklusion i_1 ebenfalls surjektiv und das Diagramm kommutiert für $0 < k < 4$

$$\begin{array}{ccc}
 & H_k(M_1) \oplus H_k(M_2) & \\
 f \nearrow & & \searrow pr_1 \\
 H_k(N) & \xrightarrow{i_1} & H_k(M_1)
 \end{array}$$

Die Eigenschaft (S2) besagt, dass auf eine surjektive Abbildung in einer kurzen exakten Sequenz immer die Nullabbildung folgt. Nach (S1) folgt auf eine Nullabbildung eine injektive Abbildung. Also ist für $0 < k < 4$ die Abbildung von $H_k(N)$ nach $H_k(M_1)$ surjektiv und die Abbildung von $H_{k+1}(M_1, N)$ nach $H_k(N)$ injektiv. Daher können wir für $0 < k < 4$ folgende kurze exakte Sequenz betrachten:

$$0 \longrightarrow H_{k+1}(M_1, N) \xrightarrow{f} H_k(N) \xrightarrow{g} H_k(M_1) \longrightarrow 0$$

Für $k = 3$ ist die Abbildung von $\mathbb{R}^{\beta_4(M_1, N)} = \mathbb{R}^{\beta_0(M_1)}$ nach \mathbb{R} bijektiv ((S1) + (S2)) und $\beta_4(M_1, N) = \beta_0(M_1)$ somit gleich eins.

Für $0 < k < 3$ gilt nach der oben betrachteten Mayer-Vietoris Sequenz und der Poincaré-Dualität $\beta_{4-k-1}(N) = \beta_k(N) = \beta_k(M_1) + \beta_k(M_2)$. Da g surjektiv ist, gilt $\ker(g) = H_k(M_2)$. Das Bild von f ist gleich dem Kern von g und f besitzt auf Grund der Injektivität trivialen Kern. Zusammen ergibt sich daher $\dim(H_{k+1}(M_1, N)) = \dim(\text{im}(f)) + \dim(\ker(f)) = \dim(H_k(M_2))$. Mit der Poincaré-Lefschetz Dualität ergibt sich also folgender Zusammenhang für die Bettizahlen von $H_k(M_1)$ und $H_k(M_2)$

$$\beta_k(M_1) = \beta_{4-k}(M_1, N) = \beta_{3-k}(M_2)$$

Die Eulercharakteristik von M_1 ist definiert als die alternierende Summe der Bettizahlen $\beta_k(M_1)$. Somit ergibt sich

$$\begin{aligned}
 \tau(\iota(N)) &= \chi(M_1) \\
 &= \sum_{0 \leq k \leq 4} (-1)^k \dim(H_k(M_1)) \\
 &= 1 - \beta_1(M_1) + \beta_2(M_1) = 1 - \beta_1(M_1) + \beta_1(M_2)
 \end{aligned}$$

Da $\beta_k(N) = \beta_k(M_1) + \beta_k(M_2)$ gilt $\chi(M_1) = 1 - \beta_1(N)$ falls $\beta_1(M_2) = 0$ und $\chi(M_1) = 1 + \beta_1(N)$ falls $\beta_1(M_1) = 0$.

□

Dieses Theorem lässt sich nun auch auf euklidische Räume beliebiger Dimension verallgemeinern. Daher formulieren wir in folgendem Korollar Schranken für die Totalkrümmung geschlossener zusammenhängender Hyperflächen im \mathbb{R}^{2n} und diskutieren anschließend Folgerungen daraus und Beispiele dazu.

3.8 Korollar (Einschränkung der Totalkrümmung im \mathbb{R}^{2n})

Sei N eine geschlossene, zusammenhängende Hyperfläche im \mathbb{R}^{2n} und $\iota(N) \subset \mathbb{R}^{2n}$ eine Einbettung von N in den \mathbb{R}^{2n} . Dann gilt für die Totalkrümmung

$$\tau(\iota(N)) \in \left[1 - \sum_{k=1}^{n-1} \beta_k(N), 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \beta_k(N) \right] \cap \mathbb{Z} \quad (i)$$

$$\tau(\iota(N)) \equiv 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \beta_k(N) \pmod{2} \quad (ii)$$

BEWEIS: Wir betrachten analog zum Beweis von Theorem 3.7 die Einpunktkompaktifizierung des \mathbb{R}^{2n} . Die Einbettung $\iota: N \rightarrow S^{2n}$ liefert dann zwei beschränkte Zusammenhangskomponenten M_1 und M_2 mit $M_1 \cap M_2 \cong N$ und $M_1 \cup M_2 \cong S^{2n}$. Für das Paar (M_1, M_2) gibt es dann nach Mayer-

Vietoris wieder eine lange exakte Sequenz

$$\begin{aligned} & \dots \rightarrow H_{k+1}(S^{2n}) \rightarrow \\ & \rightarrow H_k(N) \rightarrow H_k(M_1) \oplus H_k(M_2) \rightarrow H_k(S^{2n}) \rightarrow \\ & \rightarrow H_{k-1}(N) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

Mit denselben Argumenten wie im obigen Beweis gilt für die Bettizahlen von N bzw. S^{2n}

$$\begin{aligned} \beta_k(N) &= \beta_{2n-1-k}(N) \\ \beta_k(S^{2n}) &= \beta_{2n-k}(S^{2n}) \end{aligned}$$

Die Dimensionen der Homologiegruppen von N bzw. S^{2n} sind dann gegeben durch $\beta_k(N) = 0$ falls $k < 0$ oder $k > n - 1$ bzw. $\beta_k(S^{2n}) = 0$ falls $k < 0$ oder $k > n$. Da N bzw. S^{2n} zusammenhängend ist sind $\beta_0(N) = 1$ und $\beta_0(S^{2n}) = 1$. Wegen der Poincaré-Lefschetz Dualität ist dann $\beta_{2n-1}(N) = 1$ und $\beta_{2n}(S^{2n}) = 1$. Somit erhalten wir folgende Tabelle für die Dimensionen der Homologiegruppen der langen exakten Sequenz

k	$\beta_k(N)$	$\beta_k(M_1) + \beta_k(M_2)$	$\beta_k(S^{2n})$
2n	0	$\beta_{2n}(M_1) + \beta_{2n}(M_2)$	1
2n-1	1	$\beta_{2n-1}(M_1) + \beta_{2n-1}(M_2)$	0
2n-2	$\beta_1(N)$	$\beta_{2n-2}(M_1) + \beta_{2n-2}(M_2)$	0
2n-3	$\beta_2(N)$	$\beta_{2n-3}(M_1) + \beta_{2n-3}(M_2)$	0
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
2	$\beta_2(N)$	$\beta_2(M_1) + \beta_2(M_2)$	0
1	$\beta_1(N)$	$\beta_1(M_1) + \beta_1(M_2)$	0
0	1	$\beta_0(M_1) + \beta_0(M_2)$	1

Wir wollen jetzt wieder Zusammenhänge zwischen den Homologiegruppen $H_k(N)$ und $H_k(M_1) \oplus H_k(M_2)$ finden.

- Der Fall $k = 0$ ist identisch zum obigen Fall und liefert

$$\beta_0(M_1) + \beta_0(M_2) = 2$$

- Für $1 \leq k \leq 2n - 2$ betrachten wir

$$0 \longrightarrow \mathbb{R}^{\beta_k(N)} \xrightarrow{f} \mathbb{R}^{\beta_k(M_1) + \beta_k(M_2)} \longrightarrow 0$$

Aus der Bijektivität von f folgt $\beta_k(M_1) + \beta_k(M_2) = \beta_k(N)$.

- Für $2n - 1 \leq k \leq 2n$ betrachten wir

$$0 \longrightarrow \mathbb{R}^{\beta_{2n}(M_1) + \beta_{2n}(M_2)} \xrightarrow{f} \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R} \xrightarrow{h} \mathbb{R}^{\beta_{2n-1}(M_1) + \beta_{2n-1}(M_2)} \longrightarrow 0$$

und analog zu dem Vorgehen in obigem Beweis (für $k = 3, 4$) ergibt sich $\beta_{2n}(M_1) + \beta_{2n}(M_2) = \beta_{2n-1}(M_1) + \beta_{2n-1}(M_2) = 0$.

Zusammengefasst lässt sich folgende Aussage für die Dimensionen der Homologiegruppen $H_k(M_1) \oplus H_k(M_2)$ treffen

$$\beta_k(M_1) + \beta_k(M_2) = \begin{cases} 2 & \text{falls } k = 0 \\ \beta_k(N) & \text{falls } 1 \leq k \leq 2n - 2 \\ 0 & \text{falls } k > 2n - 2 \end{cases}$$

Nach dem Exaktheitsaxiom von Definition und Folgerung 2.5 gibt es für das Paar (M_1, N) dann wieder eine lange exakte Sequenz

$$\rightarrow H_{k+1}(M_1, N) \rightarrow H_k(N) \rightarrow H_k(M_1) \rightarrow H_k(M_1, N) \rightarrow H_{k-1}(N) \rightarrow$$

Und wir erhalten eine Tabelle für die Dimensionen der Homologiegruppen

k	$\beta_k(N)$	$\beta_k(M_1)$	$\beta_k(M_1, N)$
2n	0	0	$\beta_{2n}(M_1, N)$
2n-1	1	0	$\beta_{2n-1}(M_1, N)$
2n-2	$\beta_1(N)$	$\beta_{2n-2}(M_1)$	$\beta_{2n-2}(M_1, N)$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
2	$\beta_2(N)$	$\beta_2(M_1)$	$\beta_2(M_1, N)$
1	$\beta_1(N)$	$\beta_1(M_1)$	$\beta_1(M_1, N)$
0	1	1	$\beta_0(M_1, N)$

Die Bettizahlen von N wurden bereits berechnet. Die $(2n)$ -te und $(2n-1)$ -te Bettizahl $\beta_{2n}(M_1)$ und $\beta_{2n-1}(M_1)$ von M_1 sind null, da die Dimensionen

von $H_k(M_1) \oplus H_k(M_2)$ für $k = 2n - 1, 2n$ gleich null sind und Bettizahlen nicht negativ sind. Da N der Rand von M_1 ist folgt direkt aus der Poincaré-Lefschetz Dualität

$$\beta_k(M_1) = \beta^{2n-k}(M_1, N) = \beta_{2n-k}(M_1, N)$$

Für $0 < k < 2n$ liefert die oben betrachtete Mayer-Vietoris Sequenz nach (S2) wieder die Surjektivität von f (in unterem Diagramm). Die Abbildung i_1 ist als Komposition surjektiver Abbildungen wieder surjektiv und das Diagramm kommutiert für $0 < k < 2n$

$$\begin{array}{ccc} & H_k(M_1) \oplus H_k(M_2) & \\ f \nearrow & & \searrow pr_1 \\ H_k(N) & \xrightarrow{i_1} & H_k(M_1) \end{array}$$

Für k größer null sind die Abbildungen von $H_k(N)$ nach $H_k(M_1)$ surjektiv und der Kern der Abbildung von $H_k(M_1)$ nach $H_k(M_1, N)$ der ganze $H_k(M_1)$. Also ist letztere Abbildung die Nullabbildung. Daher folgt aber mit (S1), dass alle Abbildungen von $H_{k+1}(M_1, N)$ nach $H_k(N)$ injektiv sind. Daher können wir folgende kurze exakte Sequenz betrachten

$$0 \longrightarrow H_{k+1}(M_1, N) \xrightarrow{f} H_k(N) \xrightarrow{g} H_k(M_1) \longrightarrow 0$$

Für $k = 2n - 1$ ist die Abbildung von $H_{2n}(M_1, N)$ nach $H_{2n-1}(N)$ nach (S1) und (S2) bijektiv. Also gilt $\beta_{2n-1}(M_1, N) = \beta_0(M_1) = \beta_{2n-1}(N) = 1$.

Für $0 < k < 2n - 1$ gilt nach der oben betrachteten Mayer-Vietoris Sequenz und der Poincaré-Dualität $\beta_{2n-k-1}(N) = \beta_k(N) = \beta_k(M_1) + \beta_k(M_2)$. Da g surjektiv ist, gilt $\ker(g) = H_k(M_2)$. Das Bild von f ist gleich dem Kern von g und f besitzt auf Grund der Injektivität trivialen Kern. Zusammen ergibt sich daher $\dim(H_{k+1}(M_1, N)) = \dim(\text{im}(f)) + \dim(\ker(f)) = \dim(H_k(M_2))$. Mit der Poincaré-Lefschetz Dualität ergibt sich also folgender Zusammenhang für die Dimensionen von $H_k(M_1)$ und $H_k(M_2)$

$$\beta_k(M_1) = \beta_{2n-k}(M_1, N) = \beta_{2n-k-1}(M_2)$$

Die Totalkrümmung von N ergibt sich nun wieder nach Gauß-Bonnet-Hopf als Eulercharakteristik von M_1 , die als die alternierende Summe der

Bettizahlen $\beta_k(M_1)$ definiert ist. Somit ergibt sich

$$\begin{aligned}
 \chi(M_1) &= \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \beta_k(M_1) \\
 &= 1 - \beta_1(M_1) + \beta_2(M_1) \mp \dots \pm \beta_{n-1}(M_1) \mp \\
 &\quad \beta_n(M_1) \pm \beta_{n+1}(M_1) \mp \dots + \beta_{2n-2}(M_1) \\
 &= 1 - \beta_1(M_1) + \beta_2(M_1) \mp \dots \pm \beta_{n-1}(M_1) \mp \\
 &\quad \beta_{n-1}(M_2) \pm \beta_{n-2}(M_2) \mp \dots + \beta_1(M_2) \\
 &= 1 - \beta_1(M_1) + \beta_2(M_1) \mp \dots \pm \beta_{n-1}(M_1) \mp (\beta_{n-1}(N) - \beta_{n-1}(M_1)) \pm \\
 &\quad (\beta_{n-2}(N) - \beta_{n-2}(M_1)) \mp \dots + (\beta_1(N) - \beta_1(M_1)) \\
 &= 1 + \beta_1(N) - \beta_2(N) \pm \dots \pm \beta_{2n-1}(N) - 2\beta_1(M_1) + \\
 &\quad 2\beta_2(M_1) \mp \dots \mp 2\beta_{n-1}(M_1) \\
 &= 1 - \beta_1(M_1) + \beta_1(M_2) + \beta_2(M_1) - \beta_2(M_2) \mp \dots - \beta_{n-1}(M_1) + \beta_{n-1}(M_2)
 \end{aligned}$$

Da Bettizahlen nicht negative ganze Zahlen sind wird die Eulercharakteristik maximal, falls alle Bettizahlen in der untersten Zeile, die negatives Vorzeichen besitzen, gleich null sind und die Eulercharakteristik wird minimal, falls alle Bettizahlen mit positivem Vorzeichen gleich null sind. Somit gilt

$$1 + \sum_{k=1}^{2n-1} \beta_k(N) \geq \chi(M_1) \geq 1 - \sum_{k=1}^{2n-1} \beta_k(N)$$

□

Der Beweis liefert also Schranken für die Totalkrümmung geschlossener zusammenhängender Hyperflächen. Das heißt, wir wissen nun wie sehr sich solch eine geschlossene Hyperfläche mindestens bzw. höchstens krümmen kann. Außerdem liefert der Beweis alle in Frage kommenden Werte für die Totalkrümmung. Im Folgenden Abschnitt werden wir sehen, dass die Schranken scharf sind und dass sich, zu beliebig vorgegebenen Werten für die Totalkrümmung (innerhalb dieser Schranken) geschlossene zusammenhängende Hyperflächen konstruieren lassen, die diese Totalkrümmung besitzen.

3.3 Konstruktion geeigneter Hyperflächen

Die *verbundene Summe* $N_1 \# N_2$ geschlossener, zusammenhängender Hyperflächen $N_1, N_2 \subset \mathbb{R}^{2n}$ entsteht, indem aus N_1 und N_2 jeweils eine Kreisscheibe D^{2n-1} entfernt wird und die so entstandenen Ränder, die homöomorph zu S^{2n-2} sind, entlang eines Zylinders $Z := S^{2n-2} \times [0, 1]$ verklebt werden. Da wir an der Totalkrümmung interessiert sind benötigen wir nach Gauß-Bonnet-Hopf die Eulercharakteristik des Inneren. Seien M_1, M_2 die Inneren von N_1, N_2 . Die verbundene Summe des Inneren der beiden Hyperflächen lässt sich konstruieren, indem wir M_1 mit M_2 entlang eines vollen Zylinders $Z := D^{2n-1} \times [0, 1]$ verkleben.

3.9 Lemma (Eulercharakteristik verbundener Summen)

Seien N_1, N_2 und $N := N_1 \# N_2$ geschlossene Hyperflächen des \mathbb{R}^{2n} . Ferner seien M_1, M_2 und M die zugehörigen Inneren, dann gilt

$$\chi(M) = \chi(M_1) + \chi(M_2) - 1$$

BEWEIS: Anwenden der Additivität der Eulercharakteristik 2.7 (a) liefert

$$\begin{aligned} \chi(M_1 \cup Z) + \chi(M_1 \cap Z) &= \chi(M_1) + \chi(Z) \\ \iff \chi(M_1 \cup Z) + \chi(D^{2n-1}) &= \chi(M_1) + 1 \\ \implies \chi(M_1 \cup Z) &= \chi(M_1) \end{aligned}$$

Aufsetzen eines vollen Zylinders auf M_1 ändert also nichts an der Eulercharakteristik. Ankleben von M_2 an $(M_1 \cup Z)$ liefert

$$\begin{aligned} \chi((M_1 \cup Z) \cup M_2) + \chi((M_1 \cap Z) \cap M_2) &= \chi(M_1 \cup Z) + \chi(M_2) \\ \iff \chi(M_1 \cup Z \cup M_2) + \chi(D^{2n-1}) &= \chi(M_1) + \chi(M_2) \\ \implies \chi(M_1 \# M_2) &= \chi(M_1) + \chi(M_2) - 1 \end{aligned}$$

□

Also ergibt sich die Eulercharakteristik des Inneren von verbundenen Summen geschlossener zusammenhängender Hyperflächen aus der Summe der Eulercharakteristiken der einzelnen Hyperflächen minus eins.

3.10 FOLGERUNG: Für die verbundene Summe $N_1 \# \dots \# N_k$ mit Innerem $M_1 \# \dots \# M_k$ gilt

$$\chi(M_1 \# \dots \# M_k) = \sum_{i=1}^k \chi(M_i) - k + 1$$

Wir wollen nun zeigen, dass die in Korollar 3.2 bestimmten Grenzen scharf sind und die in Frage kommenden Werte für die Totalkrümmung auch wirklich angenommen werden. Dazu benötigen wir jetzt noch ein Lemma und eine Bemerkung um die Bettizahlen von verbundenen Summen und Produkten von Sphären bestimmen zu können.

3.11 Lemma (Bettizahlen verbundener Summen)

Seien N_1, N_2 geschlossene zusammenhängende orientierbare n -dimensionale Mannigfaltigkeiten. Dann gilt

$$\beta_i(N_1 \# N_2) = \begin{cases} \beta_i(N_1) + \beta_i(N_2) - 1 & i = 0, n \\ \beta_i(N_1) + \beta_i(N_2) & \text{sonst} \end{cases}$$

BEWEISSKIZZE: Seien N_1, N_2 wie oben. Wir betrachten für $k = 1, 2$

$$N_k = \underbrace{N_k \setminus D^n}_{\tilde{N}_k} \cup_{S^{n-1}} D^n$$

Mayer Vietoris für das Paar (\tilde{N}_k, D^n) liefert

$$\beta_i(\tilde{N}_k) = \begin{cases} \beta_i(N_k) & \text{für } i \neq n - 1 \\ \beta_i(N_k) - 1 & \text{für } i = n - 1 \end{cases}$$

Erneutes Anwenden von Mayer-Vietoris für $N_1 \# N_2 = \tilde{N}_1 \cup_{S^{n-1}} \tilde{N}_2$ liefert die Aussage.

3.12 BEMERKUNG:

Jede Parallellfläche vom Typ $S^k \times S^{2n-1-k}$ zerlegt nach Jordan-Brouwer den umgebenden Raum in zwei Zusammenhangskomponenten. Die Mayer-Vietoris Sequenz für diese Zusammenhangskomponenten liefert folgende

Aussage über die Bettizahlen von Produkten von Sphären

$$\beta_i(S^k \times S^{2n-1-k}) = \begin{cases} 1 & \text{für } i = 0, k, 2n-1-k, 2n-1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Folgendes Theorem besagt, dass zu beliebig vorgegeben natürlichen Zahlen $\beta_1, \dots, \beta_{n-1} \in \mathbb{N}_0$ eine zusammenhängende geschlossene Hyperfläche N existiert, deren Bettizahlen mit den beliebig gewählten natürlichen Zahlen übereinstimmt, wobei $\beta_0(N) = 1$ da N zusammenhängend und $\beta_n(N), \dots, \beta_{2n-1}(N)$ liegen nach der Poincare Dualität fest. Desweiteren besagt das folgende Theorem, dass zu einer ganzen Zahl τ mit den Eigenschaften (i), (ii) aus Korollar 3.8 eine Einbettung $\iota : N \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ existiert, so dass τ die Totalkrümmung der eingebetteten Hyperfläche $\iota(N)$ ist.

3.13 Theorem (Konstruktion geeigneter Hyperflächen)

Seien $n, \beta_0, \dots, \beta_{2n-1} \in \mathbb{N}_0$ gegeben mit $n \geq 2$, $\beta_0 = 1$, $\beta_i = \beta_{2n-1-i}$ für $i \in \{1, \dots, n-1\}$. Dann existiert eine zusammenhängende, geschlossene Hyperfläche N mit $\beta_i(N) = \beta_i$ für $i \in \{0, \dots, 2n-1\}$, so dass für alle $\tau \in \mathbb{Z}$ mit den Eigenschaften (i) und (ii) aus Korollar 3.13 eine Einbettung $\iota : N \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ existiert mit $\tau(\iota(N)) = \tau$.

BEWEIS: Wir wählen N folgendermaßen

$$N \cong (S^1 \times S^{2n-2})^{\# \beta_1} \# (S^2 \times S^{2n-3})^{\# \beta_2} \# \dots \# (S^{n-1} \times S^n)^{\# \beta_{n-1}}$$

Wobei $(S^k \times S^{2n-1-k})^{\# \beta_i}$ die verbundene Summe von β_i Summanden vom Typ $(S^k \times S^{2n-1-k})$ bezeichnet. N ist als verbundene Summe zusammenhängender geschlossener Hyperflächen wieder zusammenhängend und geschlossen. Also gilt $\beta_i(N) = \beta_{2n-1-i}(N)$ und insbesondere $\beta_0(N) = \beta_{2n-1}(N) = 1$. Für $i = 1, \dots, n-1$ gilt

$$\begin{aligned} \beta_i(N) &= \beta_i\left((S^1 \times S^{2n-2})^{\# \beta_1} \# \dots \# (S^{n-1} \times S^n)^{\# \beta_{n-1}}\right) \\ &\stackrel{3.11}{=} \beta_i\left((S^1 \times S^{2n-2})^{\# \beta_1}\right) + \dots + \beta_i\left((S^{n-1} \times S^n)^{\# \beta_{n-1}}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \underbrace{\beta_i \left((S^1 \times S^{2n-2}) \# \dots \# (S^1 \times S^{2n-2}) \right)}_{\beta_1 \text{ mal}} + \dots + \\
 &\quad \underbrace{\beta_i \left((S^{n-1} \times S^n) \# \dots \# (S^{n-1} \times S^n) \right)}_{\beta_{n-1} \text{ mal}} \\
 &\stackrel{3.11}{=} \beta_1 \cdot \beta_i (S^1 \times S^{2n-2}) + \dots + \beta_{n-1} \cdot \beta_i (S^{n-1} \times S^n) \\
 &\stackrel{3.12}{=} \delta_{ij} \cdot \beta_j = \beta_i
 \end{aligned}$$

Das heißt, die Bettizahlen von N stimmen mit den gegebenen β_i überein. Sei τ mit den Eigenschaften (i), (ii) gegeben. Wir wählen $k, l \in \mathbb{N}_0$ so, dass $\tau = k - l + 1$ und $k + l = \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i$. Dann betten wir zunächst die einzelnen Summanden von N , die wir mit N_i bezeichnen, in den \mathbb{R}^{2n} ein, so dass

- die Summanden disjunkt sind und für jeden Summanden N_i liegt jeder andere Summand N_j in der unbeschränkten Komponente von $\mathbb{R}^{2n} \setminus N_i$
- k Summanden mit Totalkrümmung zwei und die übrigen l Summanden mit Totalkrümmung null eingebettet werden (in Lemma 3.5 wurde gezeigt, dass Hyperflächen vom Typ $S^k \times S^{2n-1-k}$ mit Totalkrümmung null oder zwei in den \mathbb{R}^{2n} eingebettet werden können)

Wobei $k = \sum_{i=1}^{n-1} k_i$, $l = \sum_{i=1}^{n-1} l_i$ und k_i die Anzahl an $S^i \times S^{2n-1-i}$ mit Totalkrümmung zwei und l_i die Anzahl an $S^i \times S^{2n-1-i}$ mit Totalkrümmung null bezeichnet. Zur Veranschaulichung dieser Konstruktion betrachten wir den Fall $i = 3$ und lassen alle anderen Summanden weg

$$\begin{aligned}
 (S^3 \times S^{2n-4})^{\# \beta_3} &= (S^3 \times S^{2n-4})^{\# k_3} \# (S^3 \times S^{2n-4})^{\# l_3} \\
 &= \underbrace{(S^3 \times S^{2n-4}) \# \dots \# (S^3 \times S^{2n-4})}_{k_3 \text{ mal}} \# \underbrace{(S^3 \times S^{2n-4}) \# \dots \# (S^3 \times S^{2n-4})}_{l_3 \text{ mal}}
 \end{aligned}$$

Wir bezeichnen im Folgenden das Innere einer eingebetteten $S^i \times S^{2n-1-i}$ mit $(S^i \times S^{2n-1-i})_{int}$. Für die Totalkrümmung ergibt sich nun mit Gauß-Bonnet-Hopf [2.1]

$$\begin{aligned}
 \tau(\iota(N)) &= \chi(\iota(N)_{int}) \\
 &= \chi \left((S^1 \times S^{2n-2})_{int}^{\# \beta_1} \# \dots \# (S^{n-1} \times S^n)_{int}^{\# \beta_{n-1}} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\stackrel{3.11}{=} \chi\left((S^1 \times S^{2n-2})_{int}^{\#\beta_1}\right) + \dots + \chi\left((S^{n-1} \times S^n)_{int}^{\#\beta_{n-1}}\right) - (n-1) + 1 \\
&\stackrel{3.11}{=} \beta_1 \cdot \chi\left(S^1 \times S^{2n-2}\right) - \beta_1 + 1 + \dots + \\
&\quad \beta_{n-1} \cdot \chi\left(S^{n-1} \times S^n\right) - \beta_{n-1} + 1 - (n-1) + 1 \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \left(\beta_i \cdot \chi\left(S^i \times S^{2n-1-i}\right)\right) - \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i + (n-1) \cdot 1 - (n-1) + 1 \\
&= (k+l) \cdot \sum_{i=1}^{n-1} \chi\left(S^i \times S^{2n-1-i}\right) - (k+l) + 1 \\
&= k \cdot \sum_{i=1}^{n-1} \chi\left(S^i \times S^{2n-1-i}\right) + l \cdot \sum_{i=1}^{n-1} \chi\left(S^i \times S^{2n-1-i}\right) - k - l + 1 \\
&= k \cdot 2 + l \cdot 0 - k - l + 1 = k - l + 1 = \tau
\end{aligned}$$

$$\text{Für } l = 0 : \quad \tau(\iota(N)) = 1 + k = 1 + \beta_1 + \dots + \beta_{n-1}$$

$$\text{Für } k = 0 : \quad \tau(\iota(N)) = 1 - l = 1 - \beta_1 - \dots - \beta_{n-1}$$

Falls k gleich null ist und somit $l = \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i$, besitzen sämtliche $S^i \times S^{n-1-i}$ Totalkrümmung null und das Minimum aus Korollar [3.2] wird angenommen. Wählt man nun ein k_i gleich eins und alle anderen k_j gleich null, wobei $i, j \in \{1, \dots, n-1\}$, so ist die Totalkrümmung genau um zwei größer als im minimalen Fall. Erhöht man nun sukzessive ein beliebiges k_i um eins, wobei die Summen der k_i und l_i selbstverständlich gleich bleiben müssen, da β_i fest, erhöht sich die Totalkrümmung jedesmal um zwei. Dies funktioniert solange, bis $k_i = \beta_i$ für alle $i \in \{1, \dots, n-1\}$ und somit l gleich null ist. Dann wird das Maximum aus Korollar 3.8 angenommen. Dies zeigt, dass die Totalkrümmung tatsächlich jede zweite ganze Zahl aus dem in 3.8 bestimmten Intervalls angenommen werden. Das heißt $\tau(\iota(N)) \equiv 1 + \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i \pmod{2}$.

□

Um dieses Theorem zu Veranschaulichen betrachten wir nun ein konkretes Beispiel, indem wir zu beliebig gewählten $\beta_1, \dots, \beta_{n-1} \in \mathbb{N}_0$ eine Hyperfläche N konstruieren mit $\beta_i(N) = \beta_i$ für $i \in \{1, \dots, n-1\}$. Und diese dann so in den \mathbb{R}^{2n} einbetten, dass deren Totalkrümmung einen beliebigen Wert $\tau \in \mathbb{Z}$ mit den Eigenschaften (i) und (ii) annimmt.

3.14 Beispiel (Konstruktion einer Hyperfläche zu gegebenen β_i)

Wir wählen im \mathbb{R}^8 also für $n = 4$: $\beta_1 = 3$, $\beta_2 = 4$, $\beta_3 = 2$

Zu diesen vorgegebenen Werten konstruieren wir nun eine zusammenhängende, geschlossene Hyperfläche N , deren Bettizahlen $\beta_i(N)$ mit den eben frei gewählten natürlichen Zahlen β_1, \dots, β_3 übereinstimmen. Die nullte Bettizahl von N ist eins, da N zusammenhängend ist. Die weiteren Bettizahlen $\beta_4(N), \beta_5(N), \beta_6(N)$ liegen nach der Poincaré-Dualität fest. Wir wählen

$$N \cong (S^1 \times S^6)^{\#3} \# (S^2 \times S^5)^{\#4} \# (S^3 \times S^4)^{\#2}$$

Die Bettizahlen von N stimmen dann nach Theorem 3.13 mit β_i für $i = 1, 2, 3$ überein. Die ganze Zahl τ muss nach Korollar [3.2] die Eigenschaften (i) und (ii) erfüllen. Dann gilt

$$\tau_{min} = 1 - \sum_{i=1}^3 \beta_i(N) = -8 \quad \text{und} \quad \tau_{max} = 1 + \sum_{i=1}^3 \beta_i(N) = 10$$

Zu jeder ganzen Zahl $\tau \in \{-8, -6, \dots, 10\}$ können wir N so einbetten, dass die Totalkrümmung von $\iota(N)$ mit τ übereinstimmt.

- Wir wählen $\tau = \tau_{min}$:
Wir müssen k und l so wählen, dass $\tau = k - l + 1$ und $k + l = \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i$ ist. Einsetzen von τ_{min} und β_i liefert $k = 0$, $l = 9$. Wir betten N nun so ein, dass alle Summanden Totalkrümmung null besitzen. Die so eingebettete Hyperfläche besitzt tatsächlich Totalkrümmung -8 . Denn nach Folgerung 3.10 gilt

$$\tau(\iota_{\tau_{min}}(N)) = l \cdot 0 - 9 + 1$$

- Wir wählen jetzt $\tau = \tau_{max}$:
Einsetzen von τ_{max} und β_i in $\tau = k - l + 1$ und $k + l = \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i$ liefert $k = 9$ und $l = 0$. Wir betten N nun so ein, dass alle Summanden Totalkrümmung zwei besitzen. Für die Totalkrümmung der so eingebetteten Hyperfläche gilt

$$\tau(\iota_{\tau_{max}}(N)) = k \cdot 2 - 9 + 1$$

- Wir wählen jetzt $\tau = 4$:

Einsetzen liefert $k = 6$ und $l = 3$. Es gibt jetzt im Gegensatz zu vorherigen beiden Fällen mehrere Möglichkeiten N mit den gewünschten Eigenschaften einzubetten. Wir wählen jetzt beliebig $k_1 = 3$. Dann ist $l_1 = 0$ (nach Definition von k, l). Wir wählen weiter $k_2 = 1$. Dann ist $l_2 = 3$, $k_3 = 2$ und $l_3 = 0$. Eine Möglichkeit N mit Totalkrümmung vier einzubetten ist also

$$\begin{aligned} \iota_4(N) \cong & \underbrace{(S^1 \times S^6)}_{\tau=2} \# \underbrace{(S^1 \times S^6)}_{\tau=2} \# \underbrace{(S^1 \times S^6)}_{\tau=2} \\ & \# \underbrace{(S^2 \times S^5)}_{\tau=2} \# \underbrace{(S^2 \times S^5)}_{\tau=0} \# \underbrace{(S^2 \times S^5)}_{\tau=0} \# \underbrace{(S^2 \times S^5)}_{\tau=0} \\ & \# \underbrace{(S^3 \times S^4)}_{\tau=2} \# \underbrace{(S^3 \times S^4)}_{\tau=2} \end{aligned}$$

Und für die Totalkrümmung ergibt sich

$$\tau(\iota_4(N)) = 6 \cdot 2 + 3 \cdot 0 - 9 + 1$$

Wir hätten aber beispielsweise auch $k_1 = 2$ wählen können und somit $l_1 = 1$. Dann wählen wir wieder beliebig $k_2 = 4$ und somit $l_2 = 0$, $k_3 = 0$ und $l_3 = 2$. Eine weitere Möglichkeit N mit Totalkrümmung vier einzubetten ist daher

$$\begin{aligned} \tilde{\iota}_4(N) \cong & \underbrace{(S^1 \times S^6)}_{\tau=2} \# \underbrace{(S^1 \times S^6)}_{\tau=2} \# \underbrace{(S^1 \times S^6)}_{\tau=0} \\ & \# \underbrace{(S^2 \times S^5)}_{\tau=2} \# \underbrace{(S^2 \times S^5)}_{\tau=2} \# \underbrace{(S^2 \times S^5)}_{\tau=2} \# \underbrace{(S^2 \times S^5)}_{\tau=2} \\ & \# \underbrace{(S^3 \times S^4)}_{\tau=0} \# \underbrace{(S^3 \times S^4)}_{\tau=0} \end{aligned}$$

Die Totalkrümmung ändert sich offensichtlich nicht

$$\tau(\tilde{\iota}_4(N)) = 6 \cdot 2 + 3 \cdot 0 - 9 + 1$$

Es gibt also unterschiedliche Möglichkeiten N mit Totalkrümmung vier einzubetten. Eine interessante Frage ist nun ob die beiden unterschiedlich eingebetteten Hyperflächen isotop sind. Wir untersuchen im Folgenden wie sich diese Hyperflächen mit identischer Totalkrümmung unterscheiden.

- Die k_i und l_i bleiben gleich und es wird lediglich die Reihenfolge einzelner Summanden vom Typ $S^i \times S^{2n-1-i}$ mit unterschiedlicher Totalkrümmung vertauscht. Beispielsweise im Fall $\tau = 4$ vertauschen wir zwei Einbettungen der $S^1 \times S^6$ mit unterschiedlicher Totalkrümmung. Für die einzelnen Summanden gilt dann beispielsweise

$$\begin{aligned} \hat{l}_4(N) \cong & \underbrace{(S^1 \times S^6)}_{\tau=2} \# \underbrace{(S^1 \times S^6)}_{\tau=0} \# \underbrace{(S^1 \times S^6)}_{\tau=2} \\ & \# \underbrace{(S^2 \times S^5)}_{\tau=2} \# \underbrace{(S^2 \times S^5)}_{\tau=2} \# \underbrace{(S^2 \times S^5)}_{\tau=2} \# \underbrace{(S^2 \times S^5)}_{\tau=2} \\ & \# \underbrace{(S^3 \times S^4)}_{\tau=0} \# \underbrace{(S^3 \times S^4)}_{\tau=0} \end{aligned}$$

Da in diesem Fall nur Summanden vom selben Typ unterschiedlich eingebettet werden gibt es eine Homotopie $H_t : N \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ mit $H_0 = \tilde{l}_4(N)$, $H_1 = \hat{l}_4(N)$ und $H_t(N, t)$ ist für alle $t \in [0, 1]$ ein Diffeomorphismus auf das Bild. Also sind $\tilde{l}_4(N)$ und $\hat{l}_4(N)$ isotop. Anschaulich kann man sich vorstellen, dass das Verbindungsstück zwischen der ersten und zweiten $S^1 \times S^6$ in die dritte $S^1 \times S^6$ homotopiert wird. Dann sind jetzt die erste und dritte $S^1 \times S^6$ verbunden. Analog wird das Verbindungsstück zwischen der dritten $S^1 \times S^6$ und der ersten $S^2 \times S^5$ in die zweite $S^1 \times S^6$ homotopiert. Vergleiche dazu *Bild 3.1* und *Bild 3.2*. Das Verschieben der Verbindungsstücke lässt sich sicherlich glatt realisieren, also ist H_t für alle $t \in [0, 1]$ ein Diffeomorphismus. Das bedeutet, das Ändern der Reihenfolge einzelner Summanden vom selben Typ $S^i \times S^{2n-1-i}$ liefert isotope Hyperflächen.

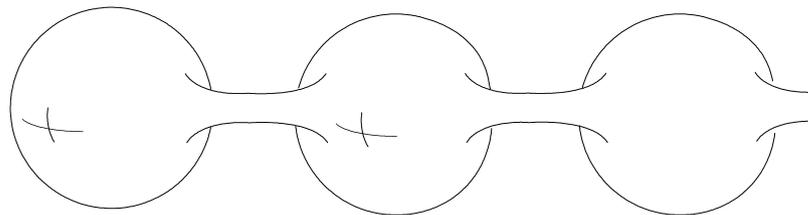


Bild 3.1: Darstellung der ersten drei Summanden von N für $t = 0$
Quelle: Eigene Darstellung mit Inkscape

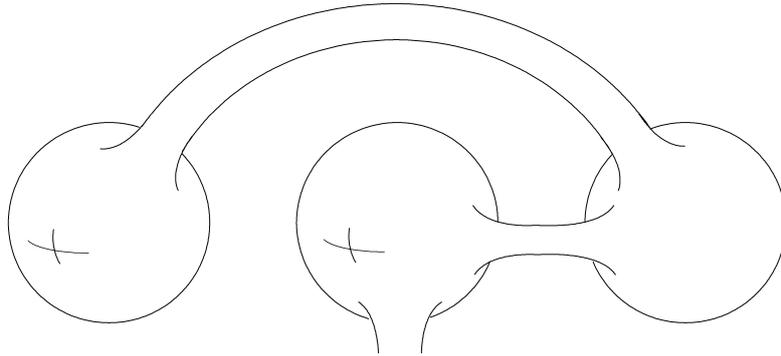


Bild 3.2: Darstellung der ersten drei Summanden von N für $t = 1$
 Quelle: Eigene Darstellung mit Inkscape

- Die k_i und l_i ändern sich, wie beispielsweise bei $\iota_4(N)$ und $\tilde{\iota}_4(N)$. Wir betrachten die Homotopie $\tilde{H}_t : N \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ mit $\tilde{H}_0 = \iota_4(N)$ und $\tilde{H}_1 = \tilde{\iota}_4(N)$. In diesem Fall reicht das Verschieben von Verbindungsstücken nicht aus. Einzelne Summanden müssen die Totalkrümmung ändern. Dieser Vorgang lässt sich jedoch vermutlich nicht glatt realisieren und daher werden $\iota_4(N)$ und $\tilde{\iota}_4(N)$ auch nicht isotop sein.

4 Ausblick

Im letzten Kapitel dieser Arbeit betrachten wir nicht-kompakte Hyperflächen und unterscheiden diese durch die Anzahl ihrer Grenzrichtungen. Anschließend wird ein Beispiel dazu betrachtet.

4.1 Definition (Grenzrichtung)

Sei $f: U \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ ein reguläres Hyperflächenstück. Ein Punkt $e \in S^n$ heißt *Grenzrichtung* von f , falls

$$e = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{f(x_i)}{\|f(x_i)\|}$$

wobei x_i eine Folge in U ist, die gegen ∞ konvergiert (bzgl. der Ein-Punkt-Kompaktifizierung von $U \cup \{\infty\}$).

4.2 Beispiel

Sei N eine zwei-dimensionale Hyperfläche mit zwei Grenzrichtungen e_1, e_2 . N entsteht indem wir zwei Punkte der S^2 ins Unendliche ziehen.

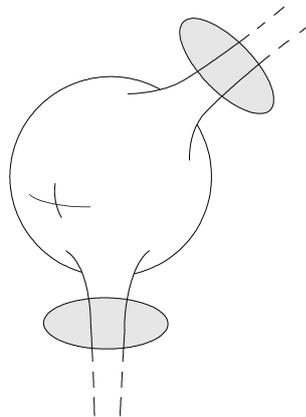


Bild 4.1: Nicht-kompakte Hyperfläche mit zwei Grenzrichtungen
Quelle: Eigene Darstellung mit Inkscape

Um die Totalkrümmung dieser Hyperfläche zu bestimmen kompaktifizieren wir diese und wenden dann die Additivität der Eulercharakteristik an. Seien D_1, D_2 zwei-dimensionale Kreisscheiben. Wir setzen N für jede Grenzrichtung eine "Kappe" (D_1, D_2) auf und können dann die Eulercharakteristik berechnen. Vergleiche dazu Bild 4.1.

$$\begin{aligned}\chi(N) + \chi(D_1) &= \chi(N \cap D_1) + \chi(N \cup D_1) \\ \chi(N) + \chi(D_1) &= \chi(S^1) + \chi(N \cup D_1)\end{aligned}$$

Erneutes anwenden der Additivitätseigenschaft auf $N \cup D_1$ und D_2 liefert

$$\begin{aligned}\chi(N \cup D_1) + \chi(D_2) &= \chi((N \cup D_1) \cap D_2) + \chi((N \cup D_1) \cup D_2) \\ \chi(N \cup D_1) + \chi(D_2) &= \chi(S^1) + \chi(S^2) \\ \chi(N \cup D_1) + 1 &= 0 + 2\end{aligned}$$

Da $\chi(D_i) = 1$, $\chi(S^1) = 0$ und $\chi(S^2) = 2$. In die oberste Gleichung eingesetzt ergibt sich $\chi(N) = 0$. Somit ist N homöomorph zu einem Zylinder und die Totalkrümmung ist nach Gauß-Bonnet gegeben durch $2\pi \cdot \chi(N) = 0$.

Analog lässt sich dieses Vorgehen auch für bestimmte Hyperflächen mit endlich vielen Grenzrichtungen anwenden. In beliebiger Dimension n setzen wir dann $n - 1$ dimensionale "Kappen" (D^{n-1}) auf. Genauereres hierzu findet sich in [9] *P. Wintgen, On total absolute curvature of nonclosed submanifolds*, S.62 ff.

In euklidischen Räumen ungerader Dimension können wir mit diesem Verfahren für bestimmte Typen nicht-kompakter Hyperflächen mit endlich vielen Grenzrichtungen die Totalkrümmung bestimmen, indem wir die Hyperfläche kompaktifizieren und mit der Additivitätseigenschaft die Eulercharakteristik der nicht-kompakten Hyperfläche berechnen. Gauß-Bonnet-Hopf liefert dann die Totalkrümmung. In Räumen mit gerader Dimension benötigen wir nach Gauß-Bonnet-Hopf jedoch die Eulercharakteristik des Inneren. Für bestimmte Flächen kann das Innere auf eine ähnliche Art und Weise kompaktifiziert und somit die Eulercharakteristik des Inneren bestimmt werden. In den Fällen in denen dies möglich ist stellt sich die Frage ob es analog zu Korollar 3.8 Grenzen für die Totalkrümmung gibt.

Selbstständigkeitserklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Diplomarbeit selbstständig verfasst habe. Es wurden keine anderen als die in der Arbeit angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt. Die wörtlichen oder sinngemäß übernommenen Zitate habe ich als solche kenntlich gemacht.

Ort, Datum

Unterschrift

5 Quellenverzeichnis

1. A. Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press 2002 [ISBN 0-521-79160]
2. H. Sato, *Algebraic Topology: An Intuitive Approach*, American Mathematical Society 1999 [ISBN 0821810464]
3. W. Ballmann, *Einführung in die Geometrie und Topologie*, Springer Basel 2015 [ISBN 978-3-0348-0901-6]
4. C. Bär, *Elementare Differentialgeometrie*, de Gruyter 2001 [ISBN 3-11-015519-2]
5. S. Eilenberg and N. Steenrod, *Foundations of algebraic topology*, Princeton University Press 1957
6. W. Kühnel, *Differentialgeometrie*, Friedr. Vieweg & Sohn Verlag 2005 [ISBN 3-8348-0023-6]
7. K. Köhler, *Differentialgeometrie und homogene Räume*, Springer Fachmedien Wiesbaden 2014 [ISBN 978-3-8348-1569-9]
8. M. Nakahara, *Differentialgeometrie, Topologie und Physik*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2015 [ISBN 978-3-662-45299-8]
9. P. Wintgen, *On total absolute curvature of nonclosed submanifolds*, American Mathematical Society 1996, Vol. 348, No. 6
10. K. Shiohama, T. Shioya and M. Tanaka, *The Geometry of total curvature on complete open surfaces*, Pacific Journal of Mathematics, Vol. 143, No. 2
11. T. Dieck, *Topologie*, European Mathematical Society 2008 [ISBN 978-3-03719-048-7]
12. D. Ferus, *Totale Absolutkrümmung in Differentialgeometrie und -topologie*, Springer 1968

13. F. Dillen and W. Kühnel, *Total curvature of complete submanifolds of Euclidean space*, Tohoku Math. J. (2) Volume 57, Number 2 (2005), 171-200