Solaraufgang vs. Sonnenaufgang

Für K.Ch.T.

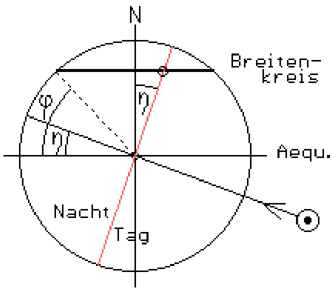
K.Förster

2.12.2011

Zusammenfassung

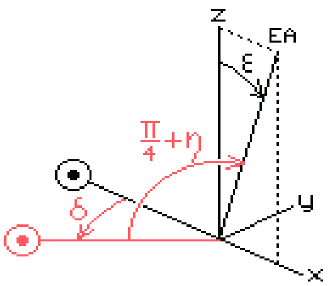
Der Bericht baut den in [1] entwickelten Gedankengang aus: aufbauend auf der Definition des Sonnenaufgangs in Abhängigkeit von Ort und Jahreszeit wird der entsprechende Vorgang für einen Solarkollektor gegebener Neigung und Orientierung berechnet.

1 Sonnenaufgang und Sonnenhöhe



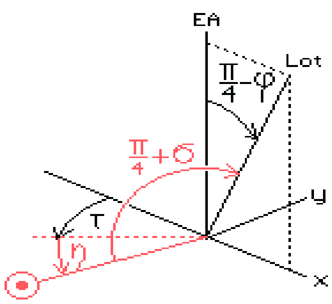
Wie die Skizze verdeutlicht, wird die Erde von der Sonne unter einem Winkel η gegen die Äquatorialebene angestrahlt; η schwankt auf der Nordhalbkugel zwischen $\eta = \epsilon$ zur Wintersonnenwende (22.Dezember = Beginn des meteorologischen Jahres: Kalendertag $d = 0$) und $\eta = -\epsilon$ zur Sommersonnenwende. Der Zahlenwert dieser sog. "Schiefe der Ekliptik" ist $\epsilon = 23.5^0$.
Die Längen von Tag und Nacht sind also abhängig von der Jahreszeit (definiert durch den Tagzähler d) und der geographischen Breite φ ($= 0^0$ am Äquator, 90^0 am Nordpol).

Zur Berechnung von η betrachten wir die Verhältnisse in einem erdfesten Koordinatensystem: die x, y-Ebene ist die Bahnebene der Sonne um die Erde: sie befindet sich für $d = 0$ am Ort $x = -\infty, y = z = 0$,



sodaß ihre Strahlen die Richtungskosinusse $\vec{St} = [1, 0, 0]$ haben.
Die Erdachse ist unter dem Winkel ϵ gegen die z-Achse geneigt und hat damit die Richtungskosinusse $\vec{EA} = [\sin\epsilon, 0, 0]$.
Am Tag d (rot gezeichnete Teile der Skizze) ist die Sonne um den Winkel $\delta = \frac{2\pi}{365} d$ weitergerückt; ihre Strahlen haben jetzt die Richtungskosinusse $\vec{St} = [\cos\delta, \sin\delta, 0]$, und damit bestimmt sich nach den Rechenregeln der Vektoralgebra der Winkel zwischen $\vec{EA}$ und $\vec{St}$ zu
$\cos(\frac{\pi}{4} + \eta) = \sin\epsilon \cdot \cos\delta + 0 \cdot \sin\delta + 0 \cdot 0 \;\rightsquigarrow\; \sin\eta = \sin\epsilon\cos\delta$.

Mit dem nun für den d. Tag bekannten (und während dieses Tages in guter Näherung als konstant zu betrachtenden) Winkel η berechnen wir jetzt in einem erdfesten Koordinatensystem mit der z-Achse in Erdachsrichtung die Sonnenhöhe σ: diese ist das Negative (Blickrichtung entgegen der Strahlrichtung!)



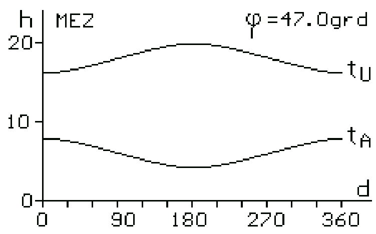
des Komplementwinkels zum Winkel zwischen dem Lot (mit den Richtungskosinussen $\vec{Lot} = [\cos\varphi, 0, \sin\varphi]$) und der Sonnenstrahlrichtung am Beobachtungsort zur Tageszeit t (rote Teile der unteren Skizze).
Zur Zeit t(in Stunden gemessen) ist die Sonne seit Mitternacht um den Winkel $\tau = \frac{2\pi}{24} t$ weitergerückt und die Strahlen haben jetzt die Richtungskosinusse $\vec{St} = [\cos\eta\cos\tau, \cos\eta\sin\tau, \sin\eta]$. Damit bestimmt sich der Winkel $\frac{\pi}{4} + \sigma$ zwischen $\vec{Lot}$ und $\vec{St}$ wegen $\cos(\frac{\pi}{4} + \sigma) = \sin(-\sigma)$ zu

$$\sin(\sigma) = -(\cos\varphi\cos\eta\cos\tau + \sin\varphi\sin\eta)$$
$$\rightsquigarrow \quad \sigma(\tau; \delta, \varphi) = \arcsin\left(\cos\varphi\cos\eta\cos\tau + \sin\varphi\sin\eta\right) \ .$$

Bisher haben wir uns stillschweigend auf die Ortszeit t_{lok} bezogen. Auf die jeweilige Zeitzone (hier die mitteleuropäische) bezogen muß die Abweichung des lokalen Längengrads λ_{lok} von λ_{MEZ} berücksichtigt werden: es ist wegen $\lambda_{MEZ} = 15$ entsprechend der Zeitzonenlänge von 1 Stunde: $t_{MEZ} = t_{lok} + 1 - \lambda_{lok}/15$.

Zur Berechnung der Sonnenauf- bzw. -untergangszeit, die durch $\sigma = 0 \rightsquigarrow t = \frac{12}{\pi} \arccos(-\tan\varphi\tan\eta)$ charakterisiert ist, geht man aus Symmetriegründen am besten auf den arcsin über und erhält

$$t_A = 6 - \frac{12}{\pi} \arcsin(\tan\phi\tan\eta) \ , \ t_U = 18 + \frac{12}{\pi} \arcsin(\tan\phi\tan\eta).$$

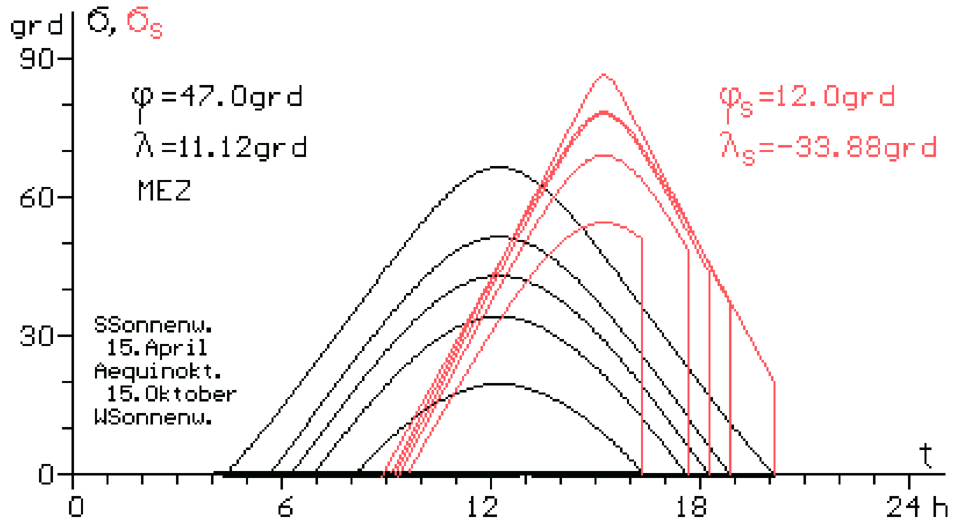


Jahresgang der Sonnenauf- und -untergangszeiten für die (nördliche) Breite $\varphi = 47.0^0$.

2 Der Solaraufgang

Der Zeitpunkt des *Sonnen*aufgangs ist dadurch gekennzeichnet, daß die *Sonnen*höhe σ null ist, die Sonnenstrahlen also streifend über eine horizontale Ebene am geographischen Ort φ, λ laufen; ab dann wird diese Ebene bestrahlt.
Wir definieren nun analog dazu den neuen Begriff *Solar*aufgang als den Zeitpunkt, an dem die Sonnenstrahlen streifend über die *Kollektor*ebene laufen; ab dann wird diese Kollektorebene bestrahlt: der Kollektor erfüllt seinen Zweck.
Dieser Kollektor an dem durch φ, λ bestimmten geographischen Ort ist nun durch zwei weitere Variable definiert: seine Elevation α gegen die Horizontalebene und den Schwenkwinkel β seiner Fußlinie gegen die Ost-West-Richtung (positiv in Uhrzeigerrichtung).
Um die *Solar*höhe σ_S zu berechnen, suchen wir jetzt denjenigen geographischen Ort φ_S, λ_S auf der Erdkugel, in dem die Horizontalebene parallel zur Kollektorebene an unserem Ort φ, λ ist; man sieht sofort, daß $\varphi_S = \varphi - \alpha$ und $\lambda_S = \lambda - \beta$ sind.

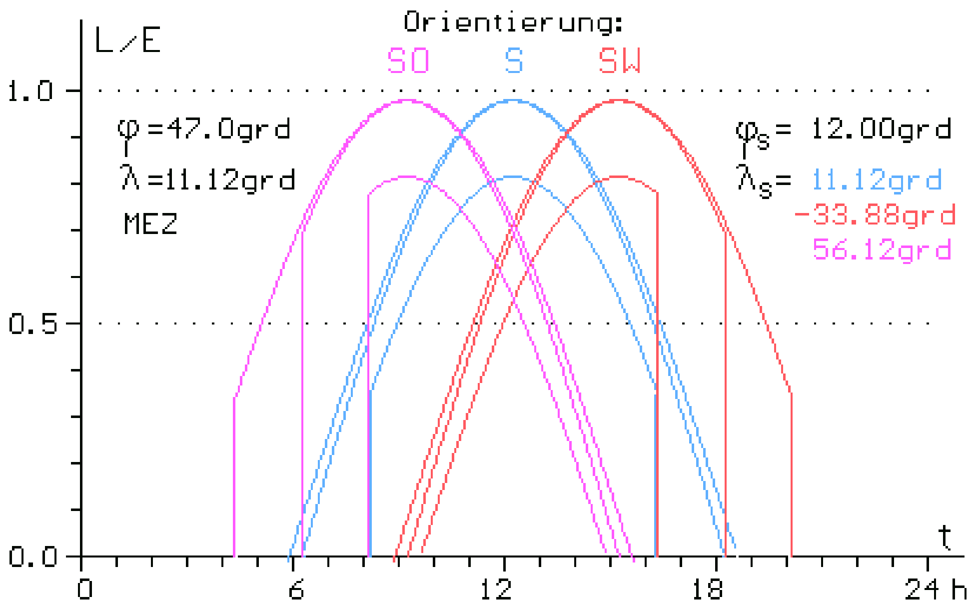
Ein Zahlenbeispiel:
In Polling/Oberbayern mit $\varphi = 47.0^0$nördl.Breite und $\lambda = 11.12^0$östl.Länge stehe ein mit $\alpha = 34^0$ gegen die Horizontalebene hochgekippter Kollektor, seine Fußlinie sei nach Südwesten orientiert: $\beta = 45^0$.
Daraus folgt $\varphi_S = 17^0$nördl.Breite und $\lambda_S = -33.88^0$östl.Länge $= 33.88^0$westl.Länge.
Auf dem Globus liegt dieser Referenzort westlich der Kanarischen Inseln, und die dortige *Sonnen*höhe σ ist genau gleich der *Solar*höhe σ_S des Kollektors in Polling, diese kann also nach der o.a. Formel mit den entsprechenden Parametern berechnet werden.
Zu beachten ist nur noch, daß die Kollektorebene nur dann bestrahlt wird, wenn in Polling Tag ist: $\sigma \geq 0$!
Die Kurven für die Solarhöhe σ_S brechen also in dem Moment auf null herunter, in dem in Polling die Sonne untergeht, auch wenn sie westlich der Kanaren noch am Himmel steht.
Bemerkung: Entsprechendes gilt, wenn die Fußlinie des Kollektors in Richtung Südosten geschwenkt wird; dann erfolgt diese Kappung der σ_S-Kurven am Morgen.
Die Abbildung zeigt das Rechenergebnis $\sigma(\varphi, \lambda)$ und $\sigma_S(\varphi_S, \lambda_S)$ für fünf charakteristische Tage (von oben nach unten): Sommersonnenwende, 15.April, Äquinoktien, 15.Oktober, Wintersonnenwende.



Tagesgang der Sonnen- und Solarhöhe für $\varphi = 47.0^0, \lambda = 11.12^0$öL; $\alpha = 35^0, \beta = 45^0$

Was die Nutzung solcher Berechnungen angeht, so ist es sinnvoller, statt der Solarhöhe den Prozentsatz der auf eine zur Strahlrichtung senkrechten Fläche treffenden Leistung anzugeben, die die Kollektorfläche trifft; dies ist einfach der Sinus der Solarhöhe: $L/E = \sin \sigma_S$.

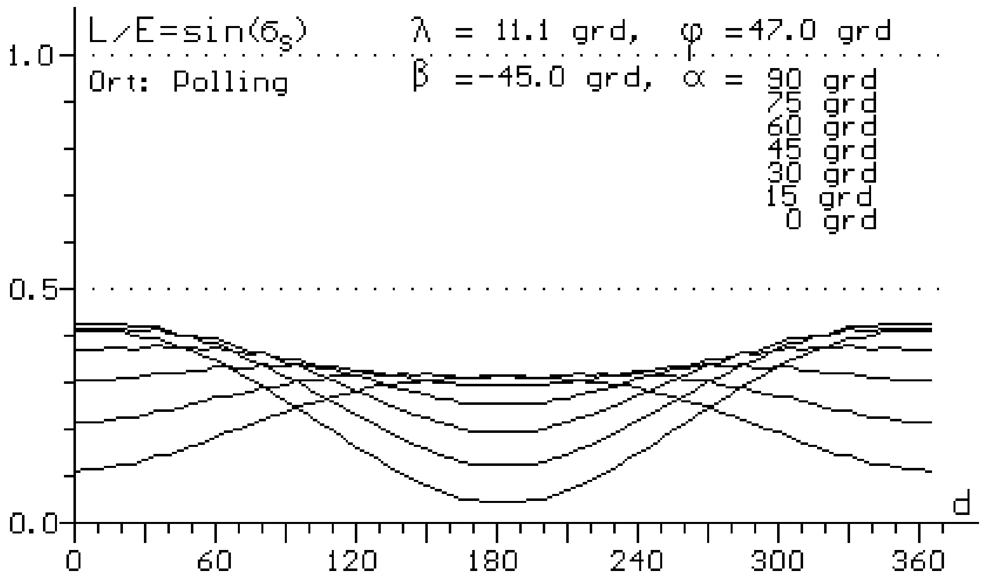
Die Abbildung zeigt dies für den gleichen Kollektor wie oben, und zwar für die Orientierungen SüdOst ($\beta = -45^0$), Süd ($\beta = 0^0$) und SüdWest ($\beta = 45^0$); die Referenzorte liegen für die Süd-Orientierung nördlich des Tschad-Sees, für die SüdOst-Orientierung $400km$ östlich des Horns von Afrika.



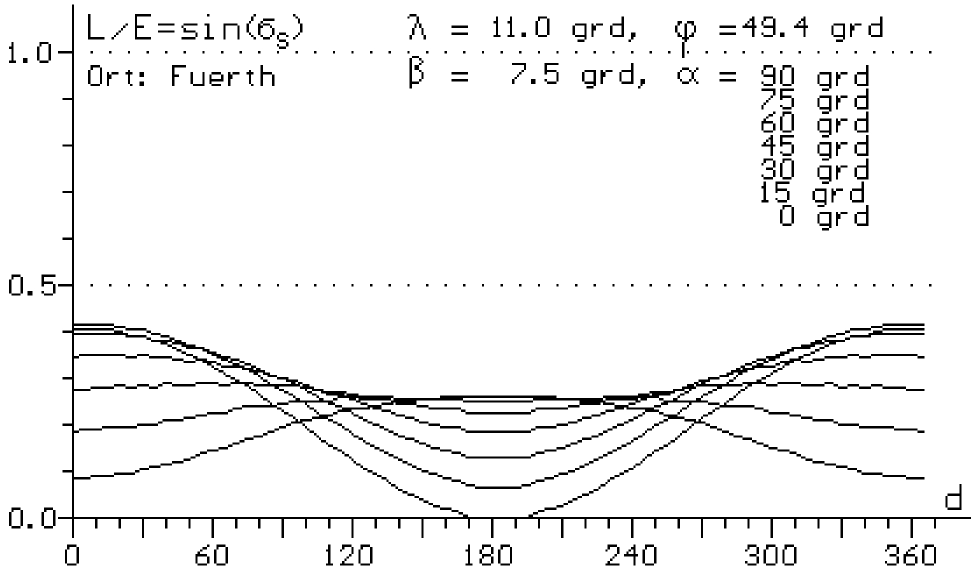
Tagesgang der Energienutzung für drei Orientierungsrichtungen

3 Jahresgang des Ertrags

Außer dem Tagesgang des Ertrags, $L/E(t)$, interessiert auch der Jahresgang, $L/E(d)$, insbesondere seine Abhängigkeit von den Auslegeparametern α und β.
Hierzu ist also L/E jeweils über einen Tag d zu integrieren, und zwar von $t_{Start} = max(t_A, t_{AS})$ bis $t_{Ende} = min(t_U, t_{US})$. Die beiden Abbildungen zeigen dies für zwei verschiedene geographische Orte φ, λ und Kollektor-Orientierungen α sowie einer Auswahl verschiedener Neigungen β.



Jahresgang der Erträge L/E für den Ort Polling



Jahresgang der Erträge L/E für den Ort Fürth

Literatur

[1] FÖRSTER,T., Auswertung meteorologischer und heiztechnischer Daten mit dem Ziel optimaler Sonnenenergienutzung. Bundeswettbewerb "Jugend forscht" 30.April-4-Mai 1977 in Berlin, Patenschaft IBM Deutschland /Stuttgart, Fachbereich Physik.

Adresse des Autors:
Prof.Dr.-Ing.K.Förster, Georg-Rückert-Str.51, D-82398 Polling
eMail: karl.foerster@gmx.net