

Jochen Juskowiak

**Beanspruchungsgerechte Bestimmung
des Weibull-Formparameters für
Zuverlässigkeitsprognosen**

D 93
ISBN 978-3-936100-74-7

Institut für Maschinenelemente

Antriebs-, Dichtungs-, Schienenfahrzeug- u. Zuverlässigkeitstechnik

Universität Stuttgart
Pfaffenwaldring 9
70569 Stuttgart
Tel. (0711) 685 – 66170

Prof. Dr.-Ing. B. Bertsche, Ordinarius und Direktor

Beanspruchungsgerechte Bestimmung des Weibull-Formparameters für Zuverlässigkeitsprognosen

Von der Fakultät Konstruktions-, Produktions- und Fahrzeugtechnik
der Universität Stuttgart
zur Erlangung der Würde eines Doktors der Ingenieurwissenschaften (Dr.-Ing.)
genehmigte Abhandlung

Vorgelegt von

Dipl.-Ing. Jochen Juskowiak

geboren in Stuttgart

Hauptberichter: Prof. Dr.-Ing. Bernd Bertsche

Mitberichter: Prof. Dr. rer. nat. Uwe Jensen

Tag der mündlichen Prüfung: 14.06.2017

Institut für Maschinenelemente der Universität Stuttgart

2017

Meinen Eltern gewidmet

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als akademischer Mitarbeiter im Fachbereich Zuverlässigkeitstechnik am Institut für Maschinenelemente der Universität Stuttgart.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr.-Ing. Bernd Bertsche, Leiter des Instituts für Maschinenelemente, für die Ermöglichung dieser Arbeit, seine fachliche und wissenschaftliche Unterstützung und sein stets entgegengebrachtes uneingeschränktes Vertrauen.

Herrn Prof. Dr. rer. nat. Uwe Jensen, Institut für Angewandte Statistik der Universität Hohenheim, danke ich für die Übernahme des Mitberichts, die kritische Durchsicht und die konstruktiven Hinweise.

Allen Kolleginnen und Kollegen des Instituts für Maschinenelemente aus den Fachbereichen, Verwaltung und Werkstatt danke ich für ihre stetige Hilfsbereitschaft und die tollen ereignisreichen Jahre.

Für zahlreiche fachliche Diskussion geht mein herzlicher Dank an meinen langjährigen Bürokollegen, Dipl.-Ing. Volker Schweizer, Dipl.-Ing. Michael Bartholdt und Dipl.-Ing. Frank Jakob sowie Dipl.-Ing. Matthias Stohrer. Ebenso ein großes Dankeschön gilt meinen Lektoren, Dipl.-Ing. Frank Jakob, Dipl.-Ing. Mathias Botzler, Dipl.-Ing. Matthias Stohrer und Dr.-Ing. Axel Baumann. Durch ihre konstruktiven Anmerkungen und Hinweise haben sie entscheidend zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen.

Mein ganz besonderer Dank geht schließlich an meine Eltern Rosemarie und Uli sowie an meine Partnerin Antje für ihre stetige und uneingeschränkte Unterstützung.

Ludwigsburg, im Juni 2017

Jochen Juskowiak

Inhalt

Abkürzungen und Indizes	iv
Formelzeichen	vi
Abstract	xi
1 Einleitung.....	1
1.1 Ausgangssituation	1
1.2 Ziel der Arbeit.....	3
1.3 Aufbau der Arbeit	4
2 Stand der Forschung und Technik.....	7
2.1 Allgemeine Begriffe und Definitionen	7
2.2 Weibullverteilung.....	8
2.2.1 Formparameter	9
2.2.2 Charakteristische Lebensdauer und Skalenparameter	11
2.2.3 Ausfallfreie Zeit	11
2.2.4 Herkunft der Weibullverteilung.....	13
2.2.5 Anwendungen	14
2.2.6 Zusammenhang mit der Extremwertverteilung	14
2.2.7 Beziehung zur Log-Normalverteilung	15
2.3 Einflüsse auf den Formparameter	15
2.4 Beanspruchungsabhängige Modelle	19
2.5 Schätzverfahren und Vertrauensbereich	22
2.5.1 Maximum Likelihood Estimation	22
2.5.2 Fisher Matrix.....	27
2.6 Statistische Tests und Modellauswahl	28
2.6.1 Likelihood-Ratio Test	28
2.6.2 Informationskriterien	29
2.7 Nutzung von Vorwissen.....	30
2.7.1 Satz von Bayes	30
2.7.2 Arten von Vorwissen	31
2.7.3 Vorwissen aus nicht-identischen Grundgesamtheiten	32
2.7.4 Transformationsfaktor.....	33
3 Phänomen des beanspruchungsabhängigen Formparameters	35
3.1 Der Ermüdungsmechanismus	35
3.1.1 Phasen der Ermüdung	35
3.1.2 Szenarien des Ermüdungsrisssfortschritts	38
3.1.3 Risskeimanzahl und Streuung.....	39

3.2	Bereiche der Ermüdung im Wöhlerdiagramm	41
3.3	Wahrscheinlichkeitstheoretischer Ansatz	42
3.4	These zum beanspruchungsabhängigen Formparameter	45
4	Konzepte und Methoden zur Bestimmung eines Formparameters	48
4.1	Kriterien	49
4.2	Konzepte und Methoden	50
4.2.1	Lebensdauerversuch	50
4.2.2	Degradationsversuch	52
4.2.3	Beschleunigter Lebensdauerversuch	54
4.2.4	Beschleunigter Degradationsversuch	56
4.2.5	Cox-Proportional-Hazard-Modell	57
4.2.6	Felddatenanalyse	58
4.2.7	Literaturwissen	59
4.2.8	Expertenwissen.....	60
4.2.9	Streuende Werkstoffkennwerte	61
4.3	Einflüsse bei Verwendung von Lebensdauerdaten	62
4.3.1	Einfluss des Datenursprungs	63
4.3.2	Einfluss der Betrachtungsebene	63
4.3.3	Einfluss der Softwareunterstützung	64
4.4	Ableiten eines Formparameters.....	66
4.4.1	Transformation der Standardabweichung logarithmierter Merkmale.....	66
4.4.2	Korrelierende Streuungsmaße.....	67
4.5	Fazit.....	69
5	Entwicklung erweiterter und neuer Ansätze.....	72
5.1	Differenzierte Felddatenanalyse.....	72
5.1.1	Modifizierter Ansatz	73
5.1.2	Methode der Belastungserfassung von Henß	75
5.2	Weibull-Lebensdauermodell.....	77
5.2.1	Untersuchte Modelle	78
5.2.2	Schätzung der Hyperparameter	80
5.2.3	Berechnung des Vertrauensbereichs	82
5.2.4	Bewertungskriterien	84
5.2.5	Verwendete Daten	84
5.2.6	Modellanalyse	86
5.2.7	Simulationsstudie zur Einflussanalyse.....	93
5.3	Quantifizierter Experte.....	96
5.3.1	Verfahren basierend auf maschinellem Lernen.....	98
5.3.2	Anwendungsbeispiel	100
5.4	Fazit.....	103

6	Ganzheitliches Verfahren	104
6.1	Verwendetes Vorwissen.....	106
6.2	A priori Verteilungsfunktionen.....	107
6.2.1	Positiver Definitionsbereich.....	107
6.2.2	Definitionsbereich in $(0, 1)$	108
6.2.3	Näherungsweise normalverteilter Parameter	110
6.3	Integration von Informationen aus Daten	110
6.3.1	Szenarien und Ablauf.....	111
6.3.2	Perlenschnurverfahren für beanspruchungsabhängige Parameter	114
6.3.3	Transformation der a priori Daten	114
6.3.4	Transformation der aktuellen Beobachtungen	117
6.4	Integration von Informationen aus Erfahrung.....	118
6.4.1	Vorgehen bei gegebenen Randbedingungen.....	118
6.4.2	Kombination verschiedener Informationen aus Erfahrung.....	121
6.5	A posteriori Verteilung	123
6.5.1	Punktschätzung und Bayes'sche Region	123
6.5.2	Interpretation der a posteriori Verteilung	124
7	Anwendungsbeispiel	129
8	Zusammenfassung und Ausblick	136
9	Literatur	139
10	Anhang.....	155

Abkürzungen und Indizes

Abkürzung	Bedeutung
AIC	Akaike Informationskriterium
AICc	Korrigiertes Akaike Informationskriterium
ALT	Accelerated Life Test
BIC	Bayes'sches Informationskriterium
DIN	Deutsches Institut für Normung
GA	Genetischer Algorithmus
GV	Ganzheitliches Verfahren
HCF	High-Cycle-Fatigue
HPD	Highest Posterior Density
IPL	Inverse Power Law
KTK	Kudentypkombination
L-S Modell	Lebensdauermodell (engl.: Life-Stress Model)
LCF	Low-Cycle-Fatigue
LRT	Likelihood-Ratio Test
MAP	Maximum a posteriori Schätzer
MLE	Maximum Likelihood Estimation
ML	Maximum Likelihood
PC	Plausibilitätsprüfung
PSV	Perlenschnurverfahren
SP	Stichprobe
WLM	Weibull-Lebensdauermodell

Index	Bedeutung
0	Evaluiert
aB	Aktuelle Beobachtungen
Anf	Intervallanfang
app	Approximiert
E	Aus Expertenangaben
End	Intervallende
f	Ausfall (engl.: failure)
ges	Gesamt
<i>i</i>	Laufvariable
(<i>i</i>)	Label für <i>i</i> -ten Datensatz der Trainingsdaten
<i>j</i>	Laufvariable
max	Maximum
min	Minimum
mod	Modalwert, modifiziert
o	Obergrenze
<i>q</i>	Quantil
s	Zensierung (engl.: suspension)
soll	Gefordert
T	Transponiert
u	Untergrenze
V	Vorgängerdaten

Formelzeichen

(Im Text sind Formelzeichen für Skalare normal und für Vektoren bzw. Matrizen fett dargestellt)

Formelzeichen Bedeutung

\star	Platzhalter
\diamond	Platzhalter
Δ	Differenz
$\hat{\star}$	Schätzer von \star
$\bar{\star}$	Mittelwert von \star
a	Koeffizient
$B(a, b)$	Betafunktion mit den Parameter a und b
B_q	Lebensdauer bei q % Ausfallwahrscheinlichkeit
c	Modellkoeffizient
$\text{Cov}(\star)$	Kovarianz von \star
D	Absolute Differenz
D_i	Schadensanteil
\mathbf{E}	Einheitsmatrix
$f(\star)$	Funktion von \star
$f(t)$	Ausfalldichte
$f(\mathbf{x})$	Randverteilung
$f(\star \diamond)$	Funktion von \star bei gegebenem \diamond
f_{tB}	Faktor für ausfallfreie Zeit
\mathbf{F}	Fisher-Matrix
$F(\star)$	Verteilungsfunktion von \star

$F(\star \diamond)$	Verteilungsfunktion von \star bei gegebenem \diamond
$F_{\text{wbl}}(t)$	Weibullverteilung
$F_I^{\text{min}}(t)$	kleinste Extremwertverteilung vom Typ I
$F_{\text{III}}^{\text{min}}(t)$	kleinste Extremwertverteilung vom Typ III
$\hat{F}_A(x)$	Empirische Verteilungsfunktion der Stichprobe A
$\hat{F}_B(x)$	Empirische Verteilungsfunktion der Stichprobe B
FG	Anzahl der Freiheitsgrade
$g(X)$	Transformationsfunktion der Zufallsvariablen X
$g(z)$	Sigmoid-Funktion
$g(\theta)$	A priori Dichtefunktion von θ
$g(\theta x)$	A posteriori Dichtefunktion von θ bei gegebenen Daten x
g_i	Relatives Gewicht
$G_A(x)$	Grundgesamtheit der Stichprobe A
$G_B(x)$	Grundgesamtheit der Stichprobe B
$h_\theta(x)$	Hypothese
H	Hesse-Matrix
H_0	Nullhypothese
H_1	Alternativhypothese
J	Anzahl (gleich große Intervalle, Koeffizienten des allgemeinen Modells)
$J(\theta)$	Kostenfunktion
J'	Anzahl der Koeffizienten des angenommenen Modells
k	Lebensdauerexponent, Anzahl (zensierte Daten, Modellkoeffizienten/-parameter)
K_γ	Standardnormalperzentil
L	Likelihood
$L(\star)$	Likelihood von \star

$L(\star \diamond)$	Likelihood von \star bei gegebenen Daten \diamond
m	Exponent (Modulus), Anzahl (beobachtete Ausfälle, Bauteile, Datensätze)
n	Anzahl (Stichprobenumfang, Kettenglieder, Riskeime, Eingangsvariablen, Beanspruchungsniveaus, Dichtefunktionen)
n_{BK}	Anzahl der Beanspruchungsklassen
n_i	Zyklenanzahl einer Klasse i
n_{KTK}	Anzahl der Kundentypkombinationen
N	Zyklenzahl
$N(a, b)$	Normalverteilung mit den Parametern a und b
N_D	Zyklenzahl bei Dauerfestigkeit
p	p -Wert, Wissensfaktor
P	Wahrscheinlichkeit für einen kleineren Absolutbetrag
$P(y = 1)$	Wahrscheinlichkeit ein Experte zu sein
P_A	Aussagewahrscheinlichkeit
P_{BFR}	Güte der Betriebsfestigkeitsrechnung
P_i	Güte einer Vorwissensquelle
P_n	Ausfallwahrscheinlichkeit einer Kette mit n Gliedern
r	Stichprobenanzahl
$R(t)$	Zuverlässigkeit
$R(x \theta)$	Zuverlässigkeit von x bei gegebenem θ
s	Standardabweichung der Stichprobe
$s(\star)$	Standardabweichung von \star
s^2	Stichprobenvarianz
S	Beanspruchung
S_d	Feldbeanspruchung
S_x	Beliebige Beanspruchung

t	Lebensdauer
t^*	Transformierte Lebensdauer
t_i	i -te Ranggröße
T	Teststatistik
u	Hilfsvariable
V	Varianz-Kovarianz Matrix
V_0	Evaluierte Varianz-Kovarianz Matrix
$\text{Var}(\star)$	Varianz von \star
x	Realisierung der Zufallsvariablen, Belastung
\mathbf{x}	Vektor der Realisierung der Zufallsvariablen, Daten
$x^{(i)}$	Eingang des i -ten Datensatzes
$x_{j,\text{norm}}^{(i)}$	Normierter Eingang der j -ten Variablen des i -ten Datensatzes
\mathbf{x}_i	Datensatz i
x_i^*	i -te Realisierung der transformierten Zufallsvariablen
X	Zufallsvariable
y	Binäre Variable (Label)
$y^{(i)}$	Ausgang des i -ten Datensatzes
Z	Standardnormalverteilte Zufallsvariable
α	Irrtumswahrscheinlichkeit
β	Formparameter
β_j	Lösung für Formparameter bei gegebener ausfallfreier Zeit γ_j
γ	Ausfallfreie Zeit, Konfidenzniveau
γ_j	Ausfallfreie Zeit des j -ten Intervalls
γ^*	Lageparameter der kleinsten Extremwertverteilung vom Typ I
ε	Positive Zahl
η	Skalenparameter

η_j	Lösung für Skalenparameter bei gegebener ausfallfreier Zeit γ_j
η^*	Skalenparameter der kleinsten Extremwertverteilung vom Typ I
θ	Parametervektor
λ	Eigenwerte
$\lambda(t)$	Ausfallrate
Λ	Log-Likelihood
$\hat{\Lambda}$	Summe der Log-Likelihoods des allgemeinen Modells
$\hat{\Lambda}'$	Summe der Log-Likelihoods des angenommenen Modells
$\Lambda(\theta)$	Log-Likelihood von θ
$\Lambda(\mathbf{c} \mathbf{t})$	Log-Likelihood von \mathbf{c} bei gegebenem \mathbf{t}
$\Lambda(\eta_j, \beta_j, \gamma_j)$	Log-Likelihood im j -ten Intervall
$\Lambda^*(\gamma)$	Maximum der Profil-Log-Likelihoodfunktion
$\mu_{\ln v}$	Lageparameter der Log-Normalverteilung
ξ	Log-Pseudobeanspruchung
$\bar{\sigma}$	Mittlere schadensäquivalente Beanspruchung
σ_a	Spannungsamplitude
σ_D	Dauerfestigkeit
$\sigma_{\ln v}$	Standardabweichung der Log-Normalverteilung
σ_i	Spannung einer Klasse i
$\sigma_{OG,j}$	Beanspruchungsobergrenze einer Beanspruchungsklasse
$\varphi(x)$	Funktion
$\varphi(t_i)$	Dichtefunktion der i -ten Ranggröße
Φ	Transformationsfaktor
$\chi^2_{1-\alpha,FG}$	Quantil der χ^2 -Verteilung für Irrtumswahrscheinlichkeit α und Freiheitsgrade FG

Abstract

Stress-dependent determination of the Weibull shape parameter for reliability prediction

A reliability prediction is essential for developing reliable products. The manufacturer should know as early as possible if the current design of its product can achieve the reliability target in the field. If crucial changes are implemented too late, considerable unforeseen costs result. Thus a first assessment of the product's failure behavior, which describes the reliability at a given lifetime, is necessary in early development stages. For describing the failure behavior, the Weibull distribution is often used due to its flexibility. Usually, endurance-strength calculations and expert knowledge are available to derive the distribution parameters. If lifetime data from previous products is available or prototype tests have been conducted, a credible assessment is possible. However, a reoccurring problem is that existing lifetime data is not obtained at design stress of the actual development. They are rather obtained at various higher stress levels. Analyzing these data with existing models can result in inappropriate reliability predictions, especially for the failure mechanism fatigue, where the Weibull shape parameter is known to be stress-dependent. This dissertation aims to develop a methodical approach for a systematically stress-dependent determination of the Weibull shape parameter for reliability prediction considering all available sources of information.

First of all, the Weibull distribution is introduced in-depth. Known influences on the shape parameter are gathered with focus on the influence of load. Existing models which partly address the stress-dependency of the shape parameter are examined. Most of these models have an underlying two parametric extreme value, log-normal or Weibull distribution with a log-linear relationship for the spread. The fatigue mechanism is elaborated regarding the material and statistical aspects. The obtained results are combined and concisely summarized:

Due to the higher scatter, the higher number of cycles as well as the stronger growth rate increase of the crack initiation period – in contrast to the crack growth period –, an increasing stress leads to a higher shape parameter.

Known concepts and methods, which allow for the determination of a shape parameter, are analyzed. The optimization potential is identified, which lies in a stress-dependent modelling with respect to all three Weibull parameters, a differentiated field data analysis concerning actual stress and a quantified expert judgment concerning quality. Moreover, separate concepts and methods can be combined in order to in-

crease the overall quality of the determined failure behavior. Thus, extended and new approaches are developed which address these issues.

A differentiated field data approach yields a stress-dependent derivation of the Weibull shape parameter based on field data. In order to do so, simulations of the customer behavior and additional information from the customers themselves are used. As a result, linking the occurred failure with the corresponding stress-level is possible. Unknown stress-dependencies can be identified or differentiated data can be used for stress-dependent analyses.

Extended Weibull lifetime models are developed as a crucial part of these stress-dependent analyses. Stress-dependent models comprise all three Weibull parameters to enable an adequate reliability prediction at design stress. The models are validated by means of three data sets with different stress-dependencies. A conducted simulation study highlights the wide applicability of the developed models: In most cases the new developed models are favored. Only if the failure free time is much smaller than the scale parameter, the existing models are better assessed. The more the Weibull density is right-skewed at observed stress levels, the more favorable the performance of both developed models. One of the developed models is restricted to failure mechanisms with an increasing failure rate, as fatigue, whereas the other one is unrestricted.

Furthermore, a procedure is proposed based on machine learning, which empowers to quantify the probability to be an expert. This probability depends on defined attributes, e. g. work experience or publications, and is used as a measure of confidence. Finally, a confidence interval can be assigned systematically to the expert statement.

The existing and developed approaches are combined in a holistic procedure, based on a Bayesian approach. Various sources of information, such as lifetime data, calculation results or expert knowledge, are taken into account and are classified in data and experience. Different sources of lifetime data are transformed to actual design stress and then integrated in the likelihood function considering the non-identical population. Algorithms for different scenarios are illustrated. The independent prior distributions of the Weibull parameters depict the available information from experience. If no data is available the procedure simplifies to a consideration of information from experience and a subsequent Monte-Carlo simulation is needed. The pragmatically holistic procedure finally leads to a systematic and comprehensive stress-dependent reliability prediction with respect to a stress-dependent Weibull shape parameter.

A synthetic example substantiates the holistic procedure. The procedure is applied to various scenarios with different conditions regarding available information. The influence of parameters such as the transformation factor and expert performance is shown.

This study introduces an elementary procedure in order to take into account a stress-dependency on the one hand and to integrate parameter specific pre-knowledge on the other hand. New or extended approaches can be easily implemented. Further studies can focus on the determination of customer types, to ensure the adequate assignment of field data. A practical verification of the holistic procedure may be beneficial.

1 Einleitung

Die Zuverlässigkeit technischer Produkte wird nicht durch umfangreiche Tests festgelegt, sozusagen „in das Produkt hineingeprüft“, sondern muss entwickelt werden. Um Kosten für unvorhergesehene Garantie- und Kulanzfälle während der Produktnutzungsphase zu sparen, sollte der Aspekt der Zuverlässigkeit dabei möglichst frühzeitig in der Produktentwicklung beachtet werden. Wird erst zu einem späten Entwicklungszeitpunkt festgestellt, dass mit dem vorliegenden Produktentwurf das Zuverlässigkeitsziel nicht erreicht werden kann und grundlegende Änderungen durchgeführt werden müssen, führt dies zu hohen Kosten. Die bekannte Gesetzmäßigkeit „Rule of Ten“ nach [ClFu91] (zitiert in [EhMe13]) macht dabei den Nutzen einer frühen Änderung des Produktentwurfs deutlich. Heutige „Design for Reliability“-Ansätze tragen diesem Umstand Rechnung, siehe [RaGu12], [SJB13b]. Ist ein Entwurf in frühen Phasen festgelegt, kann eine Zuverlässigkeitsprognose für diesen Entwurf mit den Methoden der Zuverlässigkeitstechnik getroffen und ein Abgleich mit den Zuverlässigkeitszielen durchgeführt werden. Prototypen, welche für Zuverlässigkeitstests geeignet sind, stehen zu diesem Zeitpunkt für die Durchführung von Versuchen aus Kostengründen gewöhnlich nicht zur Verfügung. Somit ist eine Zuverlässigkeitsprognose auf Basis vorhandener Informationen in frühen Entwicklungsphasen unabdingbar.

Für eine Zuverlässigkeitsprognose eines Systems ist die Kenntnis der Ausfallverteilungsfunktionen der Systemelemente unerlässlich. Dazu zählen zum einen die Verteilungsfunktion selbst und zum anderen deren beschreibende Parameter. Sind diese für einzelne Systemelemente bekannt, kann mittels der Booleschen Systemtheorie, ausgehend von einzelnen Zuverlässigkeitsprognosen für die Systemelemente, die Zuverlässigkeit des gesamten Systems prognostiziert werden [BeLe04].

Eine typische Verteilung zur Beschreibung der Zuverlässigkeit bzw. des Ausfallverhaltens von Maschinenelementen ist die Weibullverteilung, welche wegen ihrer Flexibilität einen weiten Datenbereich abdecken kann [BeLe04], [DIN09]. Deren beschreibende Verteilungsparameter sind die charakteristische Lebensdauer, die ausfallfreie Zeit (im dreiparametrischen Fall) und der Formparameter.

1.1 Ausgangssituation

Die Einsatz- und Umweltbedingungen sind entscheidend für das vorherrschende Ausfallverhalten. Diese Bedingungen können allgemein als Belastung aufgefasst werden, welche zu einer bestimmten Beanspruchung führen. In einigen Fällen hat diese Bean-

spruchung nicht nur auf die charakteristische Lebensdauer und die ausfallfreie Zeit einen Einfluss, sondern kann auch den Formparameter beeinflussen, beispielsweise bei Zahnrädern oder Wellen. Dazu liegen verschiedene Beobachtungen in der Literatur vor. Die charakteristische Lebensdauer ist ein spezieller Lageparameter. Andere Lageparameter, wie die Lebensdauer bei einer bestimmten Ausfallwahrscheinlichkeit können mittels Berechnungsverfahren beanspruchungsabhängig ermittelt werden, siehe [Hai06], [Sch07] und [Sch09a]. Beispielsweise wird üblicherweise für Zahnräder nach DIN 3990 [DIN87] und für Lager nach DIN ISO 281 [DIN10] die Lebensdauer bei 1 % Ausfallwahrscheinlichkeit bzw. bei 10 % Ausfallwahrscheinlichkeit berechnet [BeLe04]. Die Beanspruchungsabhängigkeit des Formparameters hingegen wird – wenn berücksichtigt – lediglich qualitativ beschrieben, wie in [Ber89], [BeLe04]. Für eine mathematische Beschreibung dieser Beanspruchungsabhängigkeit des Formparameters existieren Ansätze [Nel04a], [MeEs98], jedoch sind hierfür meist keine nutzbaren Parametrisierungen bekannt. Somit kann quantitativ eine beanspruchungsgerechte Bestimmung des Formparameters zur Zuverlässigkeitsprognose nicht erfolgen.

Ist nun für die Zuverlässigkeitsprognose der Formparameter beanspruchungsgerecht zu bestimmen oder gegebenenfalls das Vorhandensein eines beanspruchungsabhängigen Formparameters zunächst zu identifizieren, sind nachfolgende Schwierigkeiten zu beachten:

- Vorhandene Versuchsdaten von Vorgängern in ausreichendem Umfang liegen meist nur für wenige Beanspruchungsniveaus vor. Versuchsniveaus sind gewöhnlich erhöht. Für eine im Betrieb vorliegende Beanspruchung liegen somit keine Daten vor.
- Liegen Versuche bei erhöhtem Beanspruchungsniveau vor, ist die Kenntnis des Zusammenhangs von Lebensdauer und Beanspruchung sowie der Korrelation von Versuch und Feld erforderlich.
- Zu einem frühen Zeitpunkt der Prognose stehen Versuche mit Komponenten des vorliegenden Produktentwurfs, welche zudem oft mit hohen Kosten verbunden sind, zur Bestimmung des Formparameters nicht zur Verfügung.
- Aufgetretene Ausfälle von Vorgängern im Feld ermöglichen eine Felddatenauswertung. Diese Felddaten sind in der Regel „einer“ Feldbeanspruchung zugeordnet. Werden nun gleiche Maschinenelemente in einem anderen Produkt verbaut, wird eine andere Belastung auftreten, was zu einer anderen Beanspruchung im Betrieb führt. Werden Maschinenelemente bezüglich Ihrer Geometrie skaliert, wird die gleiche Belastung ebenfalls zu einer anderen Beanspruchung führen. Bei vorliegender Beanspruchungsabhängigkeit werden sich in beiden Fällen ein anderes Ausfallverhalten und damit ein anderer Formparameter ergeben.

- Liegen keine Daten oder nicht ausreichend Daten vor, werden oftmals Experten gebeten, Abschätzungen zu treffen. In der Praxis wird hierfür meist Erfahrungswissen aus Versuchen oder dem Feld genutzt, welches im günstigsten Fall selbst aufgebaut wurde oder aus der Literatur, wie [BeLe04], [Abe06] und diversen Ausfallratenkatalogen, entnommen werden kann. Häufig sind jedoch konkrete Einsatz- und Umweltbedingungen beim Versuch oder im Feld unzureichend erfasst, so dass die Herkunft des Erfahrungswissens unklar bleibt.
- Zudem ist fraglich, inwieweit dieser Abschätzung vertraut werden kann.

Zusammenfassend lässt sich eine gewisse Unsicherheit vor dem Hintergrund einer anvisierten beanspruchungsgerechten Bestimmung des Formparameters für die Zuverlässigkeitsprognose feststellen. Erschwerend kommt hinzu, dass die einschlägige Fachliteratur sich über das Vorhandensein einer Beanspruchungsabhängigkeit in einigen Fällen, beispielsweise beim Formparameter von Wälzlagern, nicht einig zu sein scheint (siehe [BeLe04] und [Nel04a]). In diesem Fall muss der Hersteller selbst die Frage nach der Beanspruchungsabhängigkeit beantworten.

Mittels einer beanspruchungsgerechten Bestimmung des Formparameters können Zuverlässigkeitsprognosen für Systemelemente genauer durchgeführt werden. Dies kann bei größerer bzw. kleinerer Streuung des Ausfallverhaltens der Systemelemente die Identifizierung der kritischen Systemelemente für das Systemausfallverhalten beeinflussen. Gegebenenfalls führt dies zur Vermeidung unerwarteter Garantie- und Kulanzkosten bzw. zur Erkennung vorhandener Überdimensionierung, was wiederum Kosteneinsparpotential bedeuten würde. Zudem lassen sich durch die Kenntnis des richtigen Formparameters bei entsprechender Beanspruchung Zuverlässigkeitsnachweistests optimieren und somit unter Umständen weitere Kosten sparen. Häufig angewandt wird beispielsweise die Weibayes-Methode [DIN09], welche die Kenntnis des Formparameters voraussetzt. Ist dessen Annahme unzureichend bzw. falsch, kann es zu unerwarteten Kosten für das Produkt kommen, siehe [NiLe09].

1.2 Ziel der Arbeit

Das sich aus den oben beschriebenen Schwierigkeiten ergebende, übergeordnete Ziel ist die Entwicklung einer Methode zur systematischen, beanspruchungsgerechten Bestimmung des Weibull-Formparameters für die Zuverlässigkeitsprognose. Durch Verknüpfung verschiedener Informationen werden zum jeweiligen Entwicklungszeitpunkt auf Basis des beanspruchungsgerecht bestimmten Formparameters belastbare Zuverlässigkeitsprognosen ermöglicht.

Das Ziel unterteilt sich in folgende Teilziele:

- Einbindung verschiedener, zum Entwicklungszeitpunkt verfügbarer, Informationen.
- Situationsabhängige Bestimmung des Formparameters für verschiedene Randbedingungen.
- Differenzierte beanspruchungsabhängige Erfassung von Felddaten.
- Identifizierung unbekannter Beanspruchungsabhängigkeit im Betrieb.
- Flexibles Modell zur beanspruchungsgerechten Bestimmung des Formparameters aus Lebensdauerdaten.
- Berücksichtigung der Güte bei Abschätzungen, falls Lebensdauerdaten nur unzureichend zur Verfügung stehen.

Weitere Fragestellungen, die in dieser Arbeit beleuchtet werden, adressieren die Begründung der Beanspruchungsabhängigkeit und die Bedeutung ihrer Berücksichtigung:

- Warum kommt es in einigen Fällen zu einer signifikanten Beanspruchungsabhängigkeit des Formparameters?
- Und was macht die Berücksichtigung dieser Beanspruchungsabhängigkeit in Bezug auf die Anwendung aus?

1.3 Aufbau der Arbeit

Der schematische Aufbau der Arbeit in Bild 1.1 gibt einen Überblick über die Inhalte der Kapitel 2 bis Kapitel 7.

Die vorliegende Arbeit gibt in Kapitel 2 zunächst einen Überblick über den Stand der Forschung und Technik. Für das Verständnis notwendige Inhalte werden darin vermittelt. Die Weibullverteilung – als zentraler Bestandteil – sowie insbesondere der Formparameter als auch bestehende, beanspruchungsabhängige Modelle werden unter anderem eingeführt.

Da der Fokus auf dem beanspruchungsgerechten Formparameter liegt, wird im Kapitel 3 das Phänomen des beanspruchungsabhängigen Formparameters vor dem Hintergrund des Ermüdungsmechanismus ausführlich erklärt. Die Existenz des beanspruchungsabhängigen Formparameters wird begründet und abschließend eine These aufgestellt.

In Kapitel 4 werden bestehende Konzepte und Methoden zur Bestimmung eines Formparameters analysiert und anhand von definierten Kriterien beurteilt. Auf besondere Einflüsse bei Verwendung von Lebensdauerdaten wird gesondert hingewiesen. Das Ergebnis der Analyse wird zusammengefasst und Potential für erweiterte und neue Ansätze aufgezeigt.

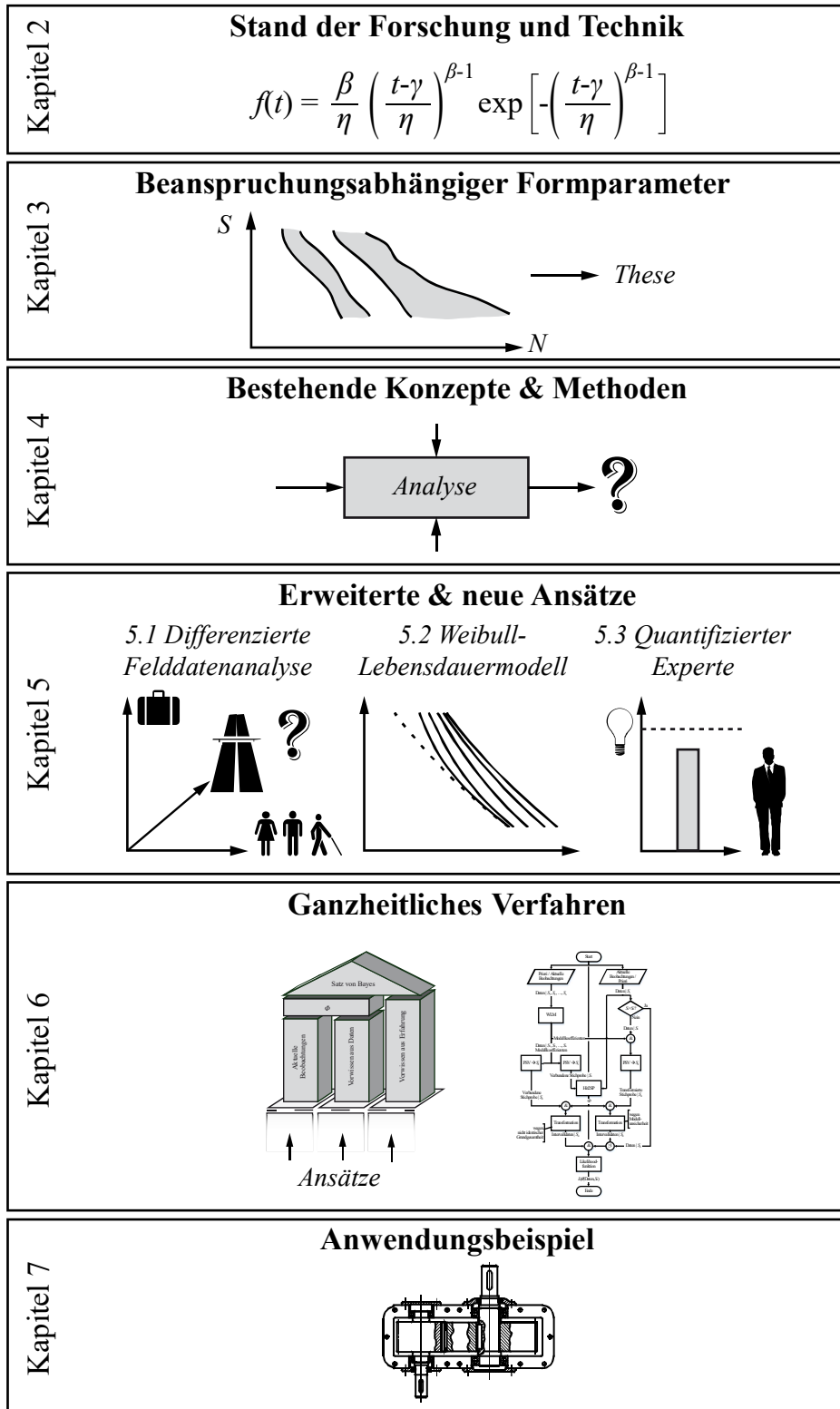


Bild 1.1: Aufbau der Arbeit

Daran anknüpfend stellt Kapitel 5 diese erweiterten und neuen Ansätze einzeln vor. Dazu zählt ein Verfahren, welches es ermöglicht, beanspruchungsabhängiges Ausfallverhalten aus Felddaten zu erkennen und folglich auch zu differenzieren. Um sowohl diese differenzierten Felddaten als auch generell Daten bei verschiedenen Beanspru-

chungs-niveaus treffend zu beschreiben, werden erweiterte Lebensdauermodelle entwickelt. Je nach Anwendungsfall stehen damit ein allgemeines oder ein speziell für Ermüdung angepasstes Modell zur Verfügung. Zur Beschreibung der Unsicherheit bei Informationen, die nicht direkt auf Lebensdauerdaten, zum Beispiel Expertenaussagen, beruhen, wird ein Verfahren vorgeschlagen, welches es erlaubt, die Güte dieser Informationen zu beurteilen.

Das entwickelte ganzheitliche Verfahren zur beanspruchungsgerechten Bestimmung des Weibull-Formparameters mit Berücksichtigung parameterspezifischen Vorwissens wird in Kapitel 6 vorgestellt. Die davor entwickelten Ansätze, wovon das erweiterte Lebensdauermodell von zentraler Bedeutung ist, werden hier zusammengeführt und die Vorgehensweise für verschiedene Szenarien aufgezeigt. Weitere hierfür notwendige Werkzeuge – wie eine geeignete Beschreibung der Verteilungsparameter, das Perlenschnurverfahren und die Integration von Daten nicht-identischer Grundgesamtheiten – werden situationsgerecht erläutert.

Kapitel 7 zeigt exemplarisch die Anwendung des neuen, ganzheitlichen Verfahrens zur beanspruchungsgerechten Bestimmung des Weibull-Formparameters für Zuverlässigkeitsprognosen.

Die Arbeit schließt mit einer Zusammenfassung.

2 Stand der Forschung und Technik

Im folgenden Kapitel werden zunächst die wichtigsten Begriffe und Definitionen, welche zum Verständnis der Arbeit notwendig sind, erläutert. Weiter werden die Weibullverteilung als zentraler Bestandteil beleuchtet, verwendete Methoden beschrieben und zuletzt ein Überblick über bekannte Einflüsse und Modelle, bezogen auf den Formparameter, gegeben.

2.1 Allgemeine Begriffe und Definitionen

Begriffe und Definitionen im Kontext der vorliegenden Arbeit:

Zuverlässigkeit und Zuverlässigkeitsprognose

Für den Begriff der Zuverlässigkeit existieren mehrere Definitionen, beispielsweise in [Ros81] (S. 1f), [Bir04] (S.2), [VDI06] (S. 54). Im Kontext dieser Arbeit ist der Begriff der Zuverlässigkeit wie folgt nach [BeLe04] (S. 20) definiert: „Zuverlässigkeit ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Produkt während einer definierten Zeitdauer unter gegebenen Funktions- und Umgebungsbedingungen nicht ausfällt.“ Sie entspricht dem Komplement der Ausfallwahrscheinlichkeit. Unter Zuverlässigkeitsprognose wird dahingehend die Vorhersage einer Produktzuverlässigkeit bei gegebenen zukünftigen Bedingungen verstanden.

Ausfall und Fehler

Nach [VDI06], [DIN94] ist ein Ausfall (engl. „failure“) die „Beendigung der Fähigkeit einer Einheit, eine geforderte Funktion zu erfüllen“. Dagegen ist ein Fehler im Kontext mechanischer Eigenschaften [DIN07](S.4) eine „Inhomogenität, Diskontinuität oder Gefügemerkmal in einem Werkstoff, wodurch bei Beanspruchung eine Spannungskonzentration aufgebaut und die Gefahr des mechanischen Versagens verursacht wird. Das kann z. B. eine Korngrenze, ein großes Korn, eine Pore, eine Verunreinigung oder ein Riss sein. Die Benennung ‚Fehler‘ sollte in diesem Falle nicht bedeuten, dass der Werkstoff funktionell fehlerhaft ist, sondern eher, dass er eine nicht vermeidbare Inhomogenität des Mikrogefüges enthält.“

Folglich ist ein Fehler bauteilinhärent und vor Inbetriebnahme des Produktes bereits vorhanden, während ein Ausfall den Zeitpunkt beschreibt. Beispielweise kann sich ein Ausfall nach einer bestimmten Zeit aufgrund eines bauteilinhärenten Fehlers ereignen.

Schadensart, Schadensmechanismus und Schadensursache

Bauelemente werden bei einer Zuverlässigkeitsanalyse unterteilt nach ihrer Schadensart (Bauelement je Schadensart = Systemelement) [BeLe04](S.94f). Beispielsweise können am Zahnrad verschiedene Schadensarten, wie Bruch, Grübchen, Fressen oder Verschleiß, auftreten. Eine Schadensart ist somit das sichtbare Ergebnis am Ende eines Prozesses. Dieser Prozess wird Schadensmechanismus genannt. Ein Mechanismus ist eine automatische Abfolge [Bib15], welche durch die Schadensursache ausgelöst wird.

Nach [VDI06], [DIN94] ist ein Ausfallmechanismus ein „physikalischer, chemischer oder sonstiger Prozess, der zu einem Ausfall geführt hat“. Für diese Arbeit wird dieser als Schadensmechanismus bezeichnet.

Zu beachten ist, dass in der Praxis die Begriffe Schadensmechanismus und Schadensart teilweise synonym verwendet werden.

Belastung, Beanspruchung und Beanspruchbarkeit

Nach [VDI06], [DIN94] ist die Belastung die „Einwirkung, der eine Betrachtungseinheit unterliegt“. Die Belastung kommt demnach von außen auf eine Betrachtungseinheit.

Die Beanspruchung hingegen ist die Wirkung an und in der Betrachtungseinheit. Sie resultiert aus der Belastung in Verbindung mit der vorliegenden Geometrie. Beispielsweise führt eine Zugkraft an einem Stab mit bestimmter Querschnittsfläche zu einer Spannung.

Die Beanspruchbarkeit ist die Beanspruchung, die bis zu einem bestimmten Zeitpunkt mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit ohne Ausfall ertragen werden kann.

2.2 Weibullverteilung

Die Verteilung eines Lebensdauermerkmals t lässt sich mit der Weibullverteilung, definiert durch ihre Parameter – charakteristische Lebensdauer T , Formparameter b und ausfallfreie Zeit t_0 – beschreiben. Im englischen Sprachgebrauch ist hingegen die Deklaration des Skalenparameters η , des Formparameters β und der ausfallfreien Zeit γ gebräuchlich, welche im Folgenden, auch wegen der besseren mathematischen Handhabung, weiter verwendet wird.

Die Dichtefunktion eines Lebensdauermerkmals t lässt sich mit den oben genannten Parametern mit

$$f(t) = \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{t - \gamma}{\eta} \right)^{\beta-1} \exp \left[- \left(\frac{t - \gamma}{\eta} \right)^{\beta} \right] \quad (2.1)$$

beschreiben [BeLe04]. Das Integral der Dichtefunktion führt zu der Ausfallwahrscheinlichkeit

$$F(t) = 1 - \exp \left[- \left(\frac{t - \gamma}{\eta} \right)^\beta \right]. \quad (2.2)$$

Die Zuverlässigkeit ist das Komplement davon und wird zu

$$R(t) = \exp \left[- \left(\frac{t - \gamma}{\eta} \right)^\beta \right]. \quad (2.3)$$

Die Ausfallrate ist definiert als die Dichte bezogen auf die Zuverlässigkeit, somit ist

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{t - \gamma}{\eta} \right)^{\beta-1}. \quad (2.4)$$

Für die Verteilungsparameter und die Lebensdauer gilt $\eta > 0$, $\beta > 0$, $-\infty < \gamma < \infty$ ¹ und $t \geq 0$ bzw. $t \geq \gamma$.

Manchmal werden für Gleichung (2.2) auch andere Schreibweisen verwendet, siehe [Nel04b]. Weitere Verallgemeinerungen und Modifizierungen der Weibullverteilung, die es beispielsweise ermöglichen, eine nicht monotone Ausfallrate zu modellieren, werden in [PhLa07] zusammengefasst. Pham [PhLa07] weist jedoch darauf hin, dass ein Weibullmodell mit mehr als drei Parametern nicht zielführend ist. Im Maschinenbau ist die zwei- sowie die dreiparametrische Weibullverteilung verbreitet [BeLe04]. Im zweiparametrischen Fall ist die ausfallfreie Zeit $\gamma = 0$. Die Gleichungen (2.1) bis (2.4) vereinfachen sich entsprechend. Für $\beta = 1$ vereinfacht sich die Weibullverteilung zur Exponentialverteilung und mit $\beta \approx 3,5$ kann näherungsweise eine Normalverteilung beschrieben werden, siehe Bild 2.1.

Die Form und Lage der Weibullverteilung sind von ihren Parametern abhängig. Diese wiederum sind als Funktion von verschiedenen Einflussgrößen wie Form, Werkstoff, Bearbeitung und Belastung eines Bauelementes zu verstehen [BeLe04]. Daher gelten die im Folgenden näher erläuterten Parameter streng genommen nur für einen spezifischen Fall dieser Einflussgrößen; zum Beispiel gilt eine Weibullverteilung nur für ein bestimmtes Belastungsniveau beziehungsweise -kollektiv. Bekannte Einflüsse auf den Formparameter werden in Kapitel 2.3 näher erläutert.

2.2.1 Formparameter

Bei Verwendung einer Weibullverteilung wird die Streuung des Lebensdauermerkmals durch den Formparameter beschrieben. Der Formparameter β charakterisiert somit die

¹ Eine negative ausfallfreie Zeit kann theoretisch auftreten, wenn das Produkt vor Inbetriebnahme altert, zum Beispiel während der Lagerung oder aufgrund Burn-In Tests bei elektronischen Produkten [Abe06] (S. 3-10).

Form der Weibullverteilung². Damit trägt dieser wesentlich zur Kennzeichnung des Ausfallverhaltens bei.

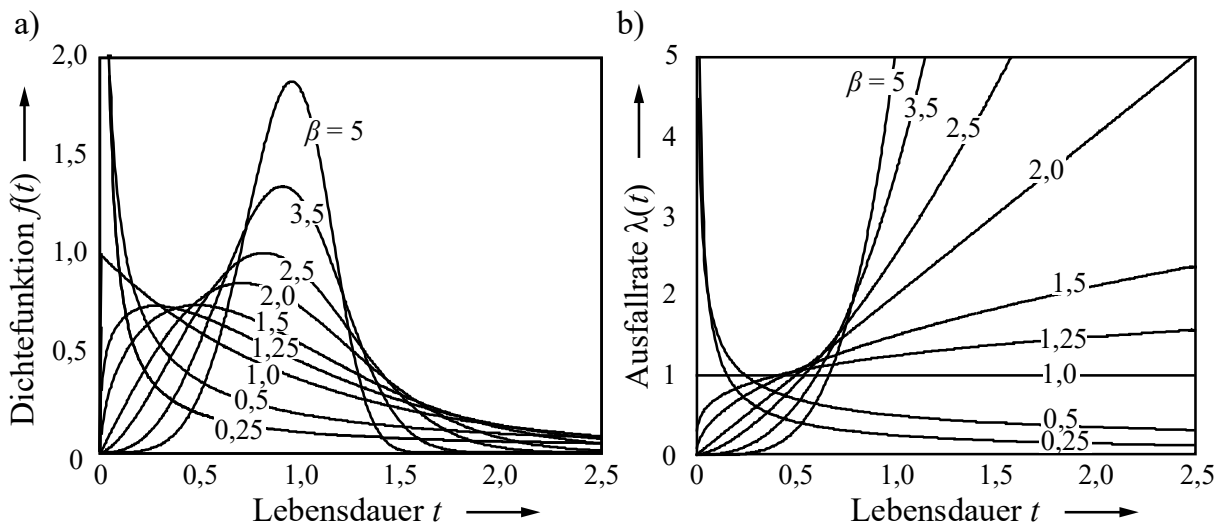


Bild 2.1: a) Dichtefunktion und b) Ausfallrate der Weibullverteilung für verschiedene Formparameter β (Skalenparameter $\eta = 1$, ausfallfreie Zeit $\gamma = 0$), nach [BeLe04]

Verschiedene „Formen“ ihrer Dichtefunktion und Ausfallrate sind in Bild 2.1 in Abhängigkeit vom Formparameter dargestellt. Der Formparameter prägt somit stark die Streuung der Weibullverteilung. Wie rechts in Bild 2.1 erkennbar ist, können mit der Weibullverteilung Frühausfälle mit fallender Ausfallrate ($\beta < 1$), Zufallsausfälle mit konstanter Ausfallrate ($\beta = 1$) und Verschleiß-/Ermüdungsausfälle mit steigender Ausfallrate ($\beta > 1$) beschrieben werden. Anhand des Formparameters kann somit eine Einteilung in verschiedene Ausfallarten getroffen werden. Treten in einem System all diese Ausfallverhalten auf, wird von einer Badewannenkurve gesprochen (Bild 2.2) [BeLe04], [Abe06]. Für die vorliegende Arbeit ist der Bereich der Verschleiß-/Ermüdungsausfälle mit steigender Ausfallrate ($\beta > 1$) von Bedeutung. Abernethy [Abe06] unterteilt diesen Bereich weiter in den Bereich $1 < \beta < 4$ für „early“ Verschleiß (Kugellager $\beta \approx 2$; Wälzlager $\beta \approx 1,5$; Korrosion und Erosion $\beta \approx 3 - 4$; Gummiriemen $\beta \approx 2,5$) und den Bereich mit $\beta > 4$ für „old age (rapid)“ Verschleiß (z. B.: Stresskorrosion, spröde Materialien wie Keramiken, Formen von Erosion). Ein Ausfallverhalten mit steigender Ausfallrate ist während der geplanten Lebensdauer unerwünscht und sollten möglichst erst nach Garantie- und Kulanzzeit auftreten oder mittels Instandhaltungsmaßnahmen (siehe [BeLe04]) vermieden werden. Generell gilt, je kleiner die Streuung der Daten – was für eine gute Qualität und Fertigung sprechen kann –, desto größer ist der Formparameter. So wird der Formparameter auch zur Qua-

² Weibull [Wei39] führte die Weibullverteilung ursprünglich ein, um die Verteilung der Festigkeit von spröden Werkstoffen zu beschreiben. In diesem Kontext wird in der Literatur anstelle des Formparameters eine weitere Bezeichnung, der Modulus, verwendet, wie in [DSPL07] (S. 2920).

litätskontrolle im Wareneingang genutzt [Abe06]. Bei großen Formparametern ($\beta > 6$) sollte jedoch einer genauere Verteilungsanalyse durchgeführt werden [Abe06], da sich beispielsweise eine Mischverteilung dahinter verbergen kann.

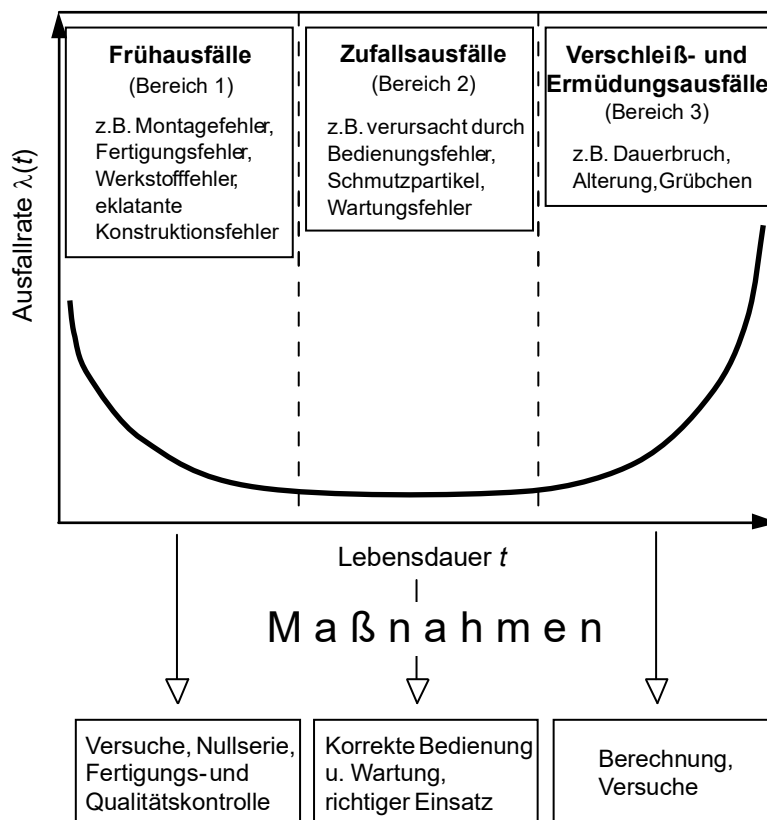


Bild 2.2: Badewannenkurve [BeLe04]

2.2.2 Charakteristische Lebensdauer und Skalenparameter

Die charakteristische Lebensdauer T bzw. der Skalenparameter η ist ein Lageparameter und entspricht exakt der Lebensdauer, bei der 63,2 % der Grundgesamtheit ausgefallen sind [BeLe04], [Ber08], [Nel04b], [Abe06]. Dieser Wert ergibt sich aus Gleichung (2.2) für $t - \gamma = \eta$. Zu beachten ist, dass der Skalenparameter die Differenz von charakteristischer Lebensdauer und ausfallfreier Zeit ist.

2.2.3 Ausfallfreie Zeit

Die ausfallfreie Zeit γ ist ein weiterer Lageparameter. Nach Gumbel [Gum58] ist sie im Kontext der Ermüdungsausfälle sogar der wichtigste Parameter. Ihre Berücksichtigung entspricht einer Transformation der Lebensdauerdaten t in $t^* = t - \gamma$. Dadurch ergibt sich ein Unterschied bei der Analyse derselben Lebensdauerdaten zum einen mit zwei- und zum anderen mit dreiparametrischer Weibullverteilung (siehe Bild 2.3). Die Berücksichtigung der ausfallfreien Zeit führt zu einer mehr linkssteilen bzw. rechtschiefen Dichtefunktion. Je kleiner die vorhandene ausfallfreie Zeit ist, desto kleiner

der Unterschied zwischen einer zwei- und dreiparametrischen Weibullanalyse. Brodbeck [Bro95] zeigt qualitativ die Wirkung einer Berücksichtigung der ausfallfreien Zeit sowohl auf den Formparameter als auch auf den Skalenparameter auf.

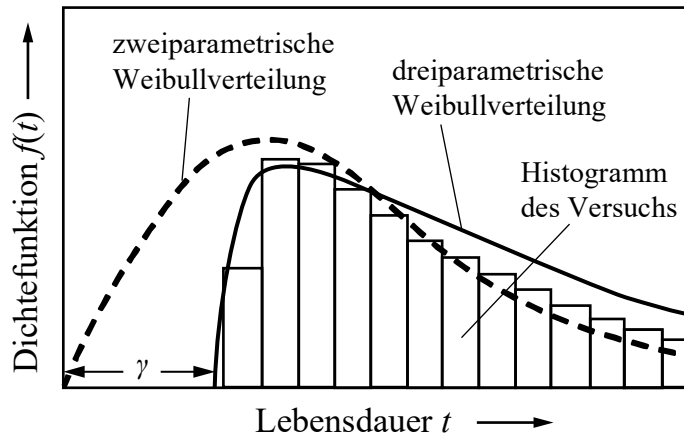


Bild 2.3: Histogramm von Versuchsdaten und qualitative Dichtefunktionen einer zwei- und dreiparametrischen Weibullverteilungsanalyse nach [BeLe04]

Hinweise auf die Existenz einer ausfallfreien Zeit, beispielsweise bei Ermüdung, zeigt Bertsche [Ber89]. Abernethy fasst Kriterien zusammen, welche es für die Annahme einer ausfallfreien Zeit zu prüfen gilt [Abe06]:

- Die Daten im Weibullplot weisen auf eine Krümmung (konkaver Kurvenverlauf) hin.
- Eine physikalische Erklärung, warum vor γ keine Ausfälle auftreten können, ist vorhanden.
- Ein großer Stichprobenumfang ($n > 20$) ist vorhanden; bei Vorwissen über eine ausfallfreie Zeit, können acht bis zehn ausreichend sein.
- Der Korrelationskoeffizient sollte größer sein als für die nächst beste Verteilung.

Die Berücksichtigung einer ausfallfreien Zeit, sprich die Schätzung einer dreiparametrischen Weibullverteilung, kann je nach Datenlage und angewandtem Schätzverfahren zu Problemen führen (siehe Kapitel 2.5). Zudem ist die Berücksichtigung einer ausfallfreien Zeit bei beschleunigten Versuchen nur selten der Fall [Nel04a](S. 65).

Aufgrund der Vergleichbarkeit ist es zweckmäßig die ausfallfreie Zeit bezogen auf die B_{10} -Lebensdauer als Faktor anzugeben [Ber89], [BeLe04]. Für den Faktor gilt

$$f_{tB} = \frac{\gamma}{B_{10}}. \quad (2.5)$$

2.2.4 Herkunft der Weibullverteilung

Weibull [Wei39] selbst führte in den 30er und 40er Jahren verschiedene Ermüdungsversuche durch und konnte diese mit den bis dato üblichen Verfahren nicht korrekt beschreiben [BeLe04]. Daher entwickelte er selbst empirisch eine universelle Verteilung und belegte diese an zahlreichen Anwendungen, siehe [Wei51]: Zunächst definierte er für eine Wahrscheinlichkeit $P(X \leq x) = F(x)$ eine Funktion

$$F(x) = 1 - \exp[-\varphi(x)] . \quad (2.6)$$

Der Vorteil bei dieser Funktion wird ersichtlich mit Bezug auf die Annahme, dass bei einer Belastung x das schwächste Glied einer Kette mit n Gliedern zuerst bricht. Sprich, die Wahrscheinlichkeit der Kette mit n Gliedern nicht auszufallen, ist $(1 - P_n) = (1 - P)^n$. Daraus folgt wiederum die Wahrscheinlichkeit auszufallen

$$P_n = 1 - \exp[-n\varphi(x)] . \quad (2.7)$$

Eine simple Funktion $\varphi(x)$, die flexibel genug ist verschiedenstes Ausfallverhalten darzustellen, muss nun folgende Anforderungen erfüllen: sie muss positiv sein, monoton steigen und für einen Wert x_u verschwinden. Weibull definiert dazu $\varphi(x) = [(x - x_u)/x_0]^m$. Eingesetzt in Gleichung (2.6) ergibt sich

$$F(x) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{x - x_u}{x_0}\right)^m\right] \quad (2.8)$$

wobei die Übereinstimmung mit Gleichung (2.2) zu erkennen ist; siehe auch [BeLe04].

Die später folgende wahrscheinlichkeitstheoretische Begründung dieser empirischen Entwicklung der Weibullverteilung fassen Bertsche & Lechner [BeLe04] wie folgt zusammen: Ein Bauteil wird gedanklich in n Teile zerlegt. Die Lebensdauer des Bauteils ist die kleinste Lebensdauer der n Teile, das schwächste Glied. Ein anderes gleichartiges Bauteil wird ebenfalls in n Teile zerlegt. Die Lebensdauer des Bauteils ist wiederum die kleinste Lebensdauer der n Teile, usw. Die kleinsten Lebensdauern, sprich die Lebensdauern der schwächsten Glieder, sind verschieden und unterliegen einer Verteilung. Die Verteilung der schwächsten Glieder ist folglich eine Verteilung von Extrema und entspricht für $n \rightarrow \infty$ einer asymptotischen Extremwertverteilung. Im Wesentlichen enthalten alle Quellen hierzu folgende Definition:

„Die Weibullverteilung entspricht einer asymptotischen Extremwertverteilung der kleinsten (ersten) Ranggröße einer Stichprobe vom Umfang n , falls n sehr groß wird ($n \rightarrow \infty$).“

2.2.5 Anwendungen

Die Weibullverteilung wird im Maschinenbau oft verwendet, um die Produktlebensdauer darzustellen. Wegen ihrer Eigenschaft eine fallende, eine konstante als auch eine steigende Ausfallrate beschreiben zu können, ist sie vielseitig bei der Modellierung von verschiedenen Ausfallverhalten einsetzbar. Wegen ihrer großen Flexibilität wird sie allein aus rein pragmatischen Gründen angewandt [BeLe04]. Zudem werden Weibullverteilungen beispielsweise genutzt um die Häufigkeitsverteilung der Windgeschwindigkeiten ($\beta \approx 2$) oder die Festigkeitsstreuung spröder Werkstoffe zu beschreiben, wie in [Hei05], [DSPL07].

2.2.6 Zusammenhang mit der Extremwertverteilung

Der natürliche Logarithmus einer weibullverteilten Lebensdauer hat eine Extremwertverteilung. Im Fall der Lebensdauerdatenanalyse ist dies die sogenannte „kleinste“ Extremwertverteilung; diese wird häufig genutzt um logarithmierte, weibullverteilte Daten zu analysieren, da diese einfacher zu handhaben sind – ähnlich einer Normalverteilung [Nel04b], [Nel04a]. Einfacher zu handhaben gilt jedoch nicht bei Berücksichtigung einer ausfallfreien Zeit (dreiparametrische Verteilung) und der Analyse beschleunigter Lebensdauerexperimente.

Der mathematische Zusammenhang ist nach [Rin09] wie folgt: Wenn t weibullverteilt (Weibullverteilung = kleinste³ Extremwertverteilung vom Typ III) ist mit

$$F_{wbl}(t) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{t - \gamma}{\eta}\right)^\beta\right], \quad (2.9)$$

dann folgt durch Umformung

$$F_{III}^{min}(t) = 1 - \exp\{-\exp[\beta\{\ln(t - \gamma) - \ln \eta\}]\}. \quad (2.10)$$

Mit der Transformation $t^* = \ln(t - \gamma)$, eingesetzt in die kleinste Extremwertverteilung vom Typ III, ergibt sich

$$F_{III}^{min}(t^*) = 1 - \exp\{-\exp[\beta(t^* - \ln \eta)]\}. \quad (2.11)$$

Mit einem Lageparameter $\gamma^* = \ln \eta$ und Skalenparameter $\eta^* = 1/\beta$ folgt

$$F_I^{min}(t^*) = 1 - \exp\left\{-\exp\left[\frac{t^* - \gamma^*}{\eta^*}\right]\right\}, \quad (2.12)$$

was einer kleinsten Extremwertverteilung Typ I entspricht; diese verwenden zum Beispiel [Nel04a] und [MeEs98] zur Analyse von beschleunigten Lebensdauerexperimenten.

³ Ein Beispiel für eine größte Extremwertverteilung ist von Bernoulli 1709 im Kontext der Lebensdauer von Männern gleichen Alters: „ n Punkte liegen zufällig auf einer geraden Linie der Länge t . Wie ist die mittlere größte Entfernung vom Ursprung?“. [Gum58] (S. 2)

Zur Vertiefung der Extremwertverteilung wird auf das Werk von Gumbel [Gum58] verwiesen, welches umfassend die Extremwertstatistik behandelt.

2.2.7 Beziehung zur Log-Normalverteilung

Die Log-Normalverteilung ist wie die Weibullverteilung zur Beschreibung für eine Vielzahl von Daten geeignet. Typische Anwendungsfälle der logarithmierten Normalverteilung sind: Beschreibung von Materialeigenschaften, Verteilung von Fehlergrößen, Wartungsintervalle, Risswachstum (Ermüdung), Ausfallverhalten (wenn physikalische Mechanismen eine progressive Degradation aufweisen) und elektrische Isolierungen [Abe06], [Nel04b].

Die Dichtefunktion der logarithmierten Normalverteilung lautet

$$f(t) = \frac{1}{t\sigma_{\ln v}\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln t - \mu_{\ln v}}{\sigma_{\ln v}}\right)^2\right] \quad (2.13)$$

[BeLe04] mit Lageparameter $\mu_{\ln v}$ und Standardabweichung $\sigma_{\ln v}$ des logarithmierten Lebensdauermerkmals $\ln t$.

Für viele Daten ist die Anpassung der Weibull- und Log-Normalverteilungen gleich gut, besonders im mittleren Bereich; bei niedrigen Ausfallwahrscheinlichkeiten ist Weibull konservativer [Nel04a]. Nach [Abe06] ist die zweiparametrische Weibullverteilung bei kleinen Stichproben ($n < 21$) in der Praxis am besten geeignet, da sie konservativer ist als die Log-Normalverteilung. Liu's [Liu97] ausführlicher Vergleich beider Verteilungen zur Zuverlässigkeitsdatenanalyse führt zu den gleichen Erkenntnissen.

2.3 Einflüsse auf den Formparameter

Vorliegende Erkenntnisse zu den Einflüssen auf den Formparameter werden im Folgenden zusammengefasst und in den Kontext der Lebensdauerstreuung gebracht. Die hier beschriebenen Einflüsse beziehen sich auf den (wahren) Formparameter der Grundgesamtheit. Einflüsse der Stichprobe und des Schätzverfahrens sind somit keine vorhanden.

Allgemeine Einflüsse

Nach [BeLe04] ist der Formparameter – wie auch die charakteristische Lebensdauer und die ausfallfreie Zeit – abhängig von der Form, dem Werkstoff, der Bearbeitung und der Belastung (einen Überblick über die verschiedenen Ursachen für eine durch den Formparameter ausgedrückte und in der Praxis beobachtete Streuung gibt [Sch09b]). Form und Belastung wirken sich hierbei direkt auf die auftretende Beanspruchung aus, wohingegen Werkstoff und Bearbeitung die ertragbare Beanspruchung

definieren. Das Zusammenspiel von auftretender und ertragbarer Beanspruchung (engl.: „Stress-Strength Interference“, SSI) [BeLe04], [Ber08] beeinflusst das Ausfallverhalten, d. h. die Lage und die Streuung der Lebensdauern und somit auch den Formparameter, siehe Bild 2.4.

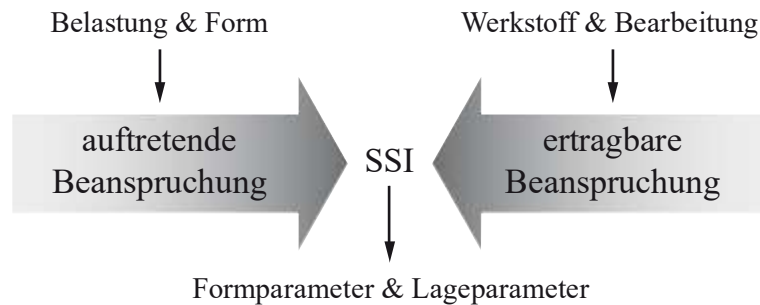


Bild 2.4: Allgemeine Einflüsse auf den Form- und die Lageparameter

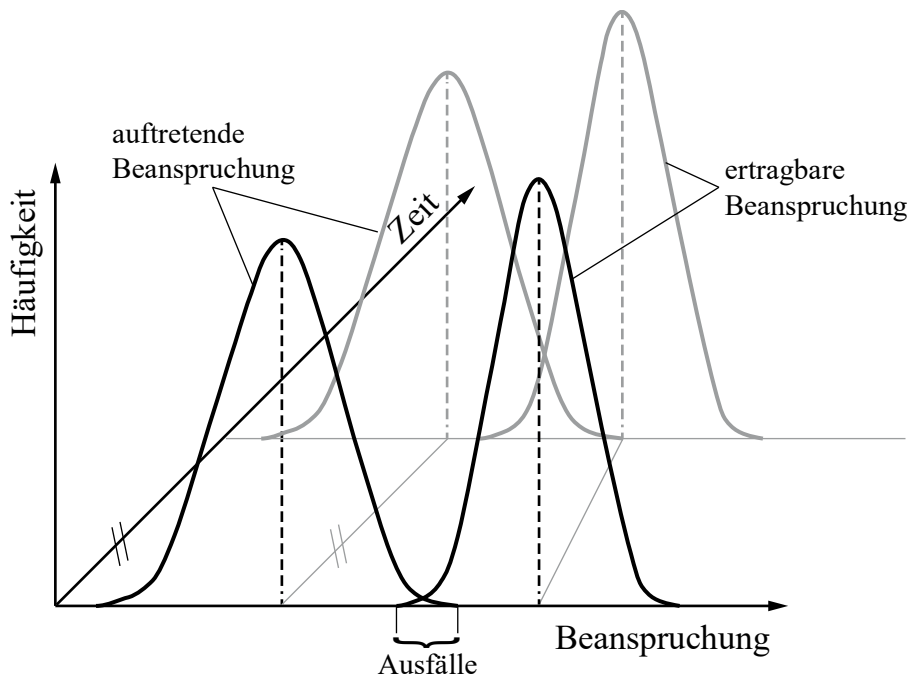


Bild 2.5: Zusammenhang zwischen auftretender und ertragbarer Beanspruchung in Abhängigkeit der Zeit (in Anlehnung an [BeLe04])

Bild 2.5 zeigt deren Zusammenhang in Abhängigkeit der Zeit. Bei zeitunabhängigem Ausfallverhalten bleibt der Zusammenhang auftretender und ertragbarer Beanspruchung konstant. Es kommt zum Ausfall, wenn „zufällig“ die auftretende die ertragbare Beanspruchung übersteigt. Die Ausfallrate bzw. das Ausfallrisiko ist konstant ($\beta = 1$). Im Fall von Verschleiß- und Ermüdungsausfällen ($\beta > 1$) ist die Ausfallrate zeitabhängig. Für eine länger anhaltende bzw. über der Zeit wiederholt auftretende Beanspruchung ist die ertragbare Beanspruchung reduziert. Die Verteilung der ertragbaren

Beanspruchung rückt näher an die Verteilung der auftretenden Beanspruchung heran. Das Ausfallrisiko nimmt zu.

Hall und Strutt [HaSt03] untersuchten allgemein den Einfluss streuender Eingangsparameter von „physics-of-failure“ Modellen auf den Formparameter. Sie zeigten, dass mit kleiner werdender Unsicherheit der Eingangsparameter – durch Materialeigenschaften, Fertigungsprozesse, Betriebs- oder Umgebungseinflüsse – der Formparameter größer wird. Weiter können die Eigenschaften Form, Werkstoff und Bearbeitung als Qualität zusammengefasst werden. Hier kann prinzipiell festgehalten werden, dass eine höhere Qualität, zu einem größeren Formparameter führt. Höhere Qualität heißt in diesem Sinne beispielsweise kleinere geometrische Toleranzen, hochwertigere Werkstoffe und feinere Oberflächen. Im Fall von Verschleiß- und Ermüdungsausfällen bedeutet eine hohe Qualität, dass die Verteilungen in Bild 2.5 schmaler werden und sobald Verschleiß und Ermüdung zeitlich vorangeschritten sind, viele Ausfälle innerhalb kürzester Zeit auftreten, was wiederum in einem großen Formparameter resultiert.

Brodbeck [Bro95] hat Einflüsse von Geometrie und Werkstoff innerhalb der Fertigungstoleranzen auf die Lebensdauer von Zahnrädern untersucht. Ein Zusammenhang von gemessenen Verzahnungsmerkmalen und Oberflächenhärte mit der Lebensdauer konnte nicht festgestellt werden. Somit ist keine Aussage über den Formparameter möglich.

Bei spröden Werkstoffen ist die Verteilung der Festigkeit abhängig von der Fehlergröße und deren Verteilung [DIN07]. Die Festigkeit steht im direkten Zusammenhang mit der Lebensdauer, welche folglich unterschiedlich streut. Ist der Werkstoff hochwertig, sind die vorhandenen Fehler im Material kleiner, die Streuung nimmt ab, der Formparameter wird größer. Ebenso zeigt sich bei Glasfasern, wie große Formparameter mit einer sehr homogenen Faseroberfläche korrelieren [SFM09].

Zudem weist [JiMu11] auf die Bedeutung des Datenursprungs hin; d. h. kommen die Daten aus dem Feld mit stark unterschiedlichen Beanspruchungen oder sind sie bei Versuchsbedingungen entstanden. Dieser Aspekt geht jedoch nicht auf den wahren Formparameter der Grundgesamtheit zurück und ist bei einer Analyse zu beachten.

Einfluss der Belastung

Bei Ermüdung metallischer Bauteile ist es nicht ungewöhnlich bei einer erhöhten Belastung größere Formparameter bei der Weibullanalyse zu erhalten. Beispiele bekannter Modelle, die dies berücksichtigen, finden sich in Kapitel 2.4 und Gründe für dieses Phänomen bei Ermüdung in Kapitel 3. Verschiedene Untersuchungen für wichtige Maschinenelemente sind in [BeLe04] zusammengefasst. Die sich dabei ergebenden typische Werte des Formparameters der dreiparametrischen Weibullverteilung für

Wellen, Wälzlager und Zahnräder sind in Bild 2.6 dargestellt. Höhere Werte stehen hierbei für eine höhere Belastung. Ergänzend bietet [JuBe14] einen Überblick zu Untersuchungen, die einen Belastungseinfluss belegen.

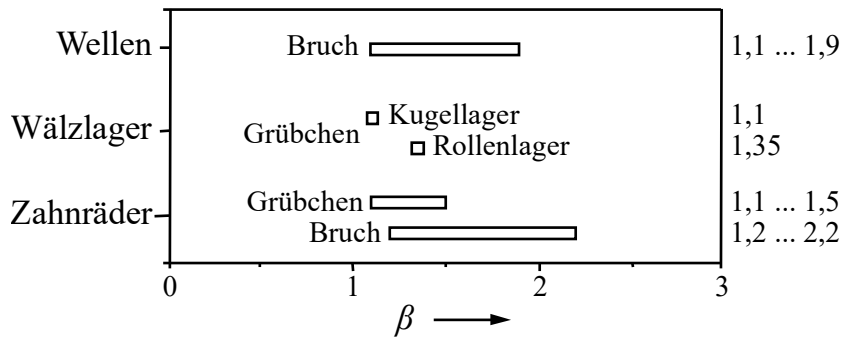


Bild 2.6: Ermittelte Formparameter β für einige Maschinenelemente nach [BeLe04]

Eine Beanspruchungsabhängigkeit bei Zahnrädern belegen Versuche von Brodbeck [Bro95], Groß [Gro74] und Beier [Bei10]. Brodbeck untersuchte Zahnräder aus Einsatzstahl 16MnCr5 auf Zahnbruch. Versuche mit je 100 Prüflingen wurden auf drei separaten Beanspruchungsniveaus durchgeführt, die allesamt über der Dauerfestigkeit und im high-cycle-fatigue (HCF) Bereich lagen. Eine Beanspruchungsabhängigkeit ist hierbei signifikant gegeben. Groß führte Versuche mit Zahnrädern aus Vergütungsstahl 42CrMo4V auf drei Beanspruchungsniveaus mit je 12 Prüflingen durch. Der Trend hin zu größeren Formparameter bei steigender Beanspruchung ist deutlich erkennbar⁴. Beier belegte eine Beanspruchungsabhängigkeit auch für Kunststoffzahnäder für Zahnbruch sowie Verschleiß. Umfangreiche Versuche mit Wellen haben Maenning [Mae67] und Kitschke [Kit83] durchgeführt. Der Formparameter bei Wälzlagern ist deutlich weniger abhängig von der Belastung. Während Bergling [Ber76] vereinfacht einen konstanten, von der Beanspruchung unabhängigen, Formparameter annimmt, weist Nelson in [Nel04b] darauf hin, dass auch hier eine Beanspruchungsabhängigkeit vorhanden ist.

Darüber hinaus wurde eine Beanspruchungsabhängigkeit bei der Ermüdung von Bauwerken aus Stahlbeton ([PSP01], [Oh91]) und bei dem zeitabhängige Spannungsdurchschlag elektrischer Isolatoren ([BoGe89], [LTK89], [HSR89]) beobachtet. Bei elektrischen Isolatoren ist aber auch eine negative Korrelation möglich ([Hir93], [Nel04a]). Ebenso wurde bei dem Phänomen der Elektromigration eine Beanspruchungsabhängigkeit als Funktion der Temperatur beobachtet ([ScFe85], [Sch87]).

⁴ Eine ausführlichere Diskussion der Daten von Brodbeck und Groß findet in Kapitel 5.2.5 statt.

2.4 Beanspruchungsabhängige Modelle

Ein Modell, welches die Lebensdauer bei einer bestimmten Ausfallwahrscheinlichkeit für ein bestimmtes Beanspruchungsniveau beschreibt, wird im Folgenden als beanspruchungsabhängiges Modell verstanden. Die Einbindung des Zusammenhangs von Beanspruchung und Lebensdauer in eine Lebensdauerverteilung, wie die Weibullverteilung, ermöglicht hierbei die Berücksichtigung der streuenden Ausfälle und folglich der Ausfallwahrscheinlichkeit. Beanspruchungsabhängig bedeutet in diesem Zusammenhang, dass im Falle der Weibullverteilung mindestens der Skalenparameter und gegebenenfalls auch der Formparameter und die ausfallfreie Zeit abhängig von der Beanspruchung sind (der Begriff beanspruchungsabhängiger Formparameter ist hierbei äquivalent mit nicht-konstanter Standardabweichung der logarithmierten Lebensdauer oder beanspruchungsabhängiger Streuung).

Beanspruchungsabhängige Modelle werden eingesetzt bei beschleunigten Lebensdauerexperimenten. Eine grundlegende Einführung in die Thematik und einen Überblick über verschiedenste Methoden zu beschleunigten Lebensdauerexperimenten, Materialien, entsprechende Performancemerkmale und Beanspruchungsarten sowie Anwendungsbeispiele sind ausführlich in [Nel04a] gegeben. Am weitesten verbreitet sind Modelle wie das „Inverse Power Law“ (IPL) oder das Arrheniusmodell für eine einzelne Beanspruchung, die in Verbindung mit einer geeigneten Lebensdauerverteilung beispielsweise auch „Power-Weibull Model“ oder „Arrhenius-Weibull Model“ genannt werden. Sind mehrere Beanspruchungsarten abzubilden, sind beispielsweise das „log-lineare Modell“, „Eyring Model“ oder „Proportional Hazard Model“ zu verwenden. Einen Überblick und Erläuterungen zu bekannten Modellen für beschleunigte Versuche finden sich in einschlägiger Literatur, wie [MeEs98], [Nel04a], [O'K112], [Els12].

Die meisten beanspruchungsabhängigen Modelle berücksichtigen lediglich den beanspruchungsabhängigen Skalenparameter. Modelle, die eine beanspruchungsabhängige Streuung bereits berücksichtigen können, werden von Nelson [Nel04a] und Meeker & Escobar [MeEs98] auf Basis der Log-Normalverteilung und der kleinsten Extremwertverteilung (siehe 2.2.6) vorgestellt. In allen Fällen ist die Plausibilität eines beanspruchungsabhängigen Modells abhängig vom beobachteten und extrapolierten Bereich, d. h. dem Anwendungsbereich des Modells. Je nachdem wie dieser gewählt ist, kann dies zu (physikalisch) nicht plausiblen Ergebnissen führen; andere Modelle wiederum können den Bereich plausibel abbilden, siehe [Nel04a], [Nel84]. Pascual & Meeker [PaMe97] stellen ein „Fatigue-Limit Model“ vor, welches durch Einbindung der Dauerfestigkeit eine bessere Anpassung bei vorhandener Beanspruchungsabhängigkeit erlaubt.

Die Implementierung einer beanspruchungsabhängigen Streuung kann in diskrete und kontinuierliche Modelle unterteilt werden:

Diskrete Modellierung

Takemoto & Arizono [TaAr03] verwenden bei der Gestaltung optimaler „step-stress“ Modelle explizit einen Formparameter für jedes Beanspruchungsniveau. Ebenso nutzt auch Hirose [Hir93] für jedes Beanspruchungsniveau einen Modellparameter als Formparameter und vergleicht Modelle mit konstantem Formparameter und mit individuellem Formparameter zur Schätzung der Durchschlagsspannung bei elektrischen Isolatoren.

Kontinuierliche Modellierung

Eine kontinuierliche Modellierung zeigen Meeter & Meeker [MeMe94]. Sie stellen optimale Testdesigns für beschleunigte Lebensdauerexperimente für verschieden ausgeprägte Beanspruchungsabhängigkeiten des Formparameters vor. Dazu verwenden sie die kleinste Extremwertverteilung. Übertragen auf die Weibullverteilung ist der Skalenparameter mittels IPL und der Formparameter mittels log-linearer Funktion modelliert. Wang & Kececioglu [WaKe00] stellen einen effektiven Algorithmus vor, um Modelle des „Weibull Log-Linear Models“ mit konstantem und beanspruchungsabhängigem Formparameter anzupassen. Für letzteres nutzen sie sowohl eine von Nelson [Nel90] vorgeschlagene log-lineare Funktion als auch eine von Joyce et al. [JLN+85] und Schwarz [Sch87] bevorzugte lineare Funktion. Das verwendete und weit verbreitete „Weibull Log-Linear Model“ ermöglicht es zudem multiple Beanspruchungen zu berücksichtigen. Droguett & Mosleh [DrMo07] verwenden das „Power Law Model“ für den Skalenparameter sowie eine lineare Funktion für den Formparameter und implementieren die entsprechenden Parameter in der kleinsten Extremwertverteilung. Zudem integrieren sie a priori Verteilungen der Parameter bzw. Koeffizienten um schließlich eine a posteriori Verteilung zu bestimmen. Seo et al. [SJK09] stellen einen optimalen beschleunigten Zuverlässigkeitsnachweistest auf Basis von Meeter & Meeker [MeMe94] vor, um Hersteller- bzw. Kundenrisiko zu minimieren. Skalen- und Formparameter sind beanspruchungsabhängig mit log-linearen Funktionen beschrieben. Kim & Bai [KiBa99] verwenden denselben funktionalen log-linearen Zusammenhang und implementieren diesen mit Berücksichtigung einer Schadensakkumulation in die Step-Stress-Methode für Typ I zensierte Daten. Koskulics & Elsayed [KoEl14] fassen verschiedene Modelle mit Berücksichtigung eines beanspruchungsabhängigen Formparameters als log-lineare Funktion zusammen, die in der Lage sind, Reihenfolgeeffekte zu beschreiben. Wang et al. [WNH15] stellen eine Methode vor, multiple Beanspruchungsfaktoren mit einem nicht-konstanten Formparameter, durch Anwendung von MLE und einer gewichteten kleinsten Fehlerquadratmethode, abzubilden.

Chan [Cha91] führt ein allgemeines Arrheniusmodell ein, welches der beanspruchungsabhängigen nicht-konstanten Standardabweichung Rechnung trägt.

Das parameterfreie „Proportional Hazard Model“ [Cox72] unterscheidet sich dahingehend, dass der Fokus auf der Ausfallrate über der Zeit liegt. Die Ausfallrate hängt von einer Basisausfallrate und Kovariablen ab. Die Kovariablen (wie Beanspruchung etc.) gehen dabei multiplikativ ein. Eine Verschiebung bezüglich der Zeit wird nicht berücksichtigt. Eine von Elsayed et al. [ELW06] vorgeschlagene Erweiterung auf Basis des „Proportional Hazard Model“, das „Extended Linear Hazard Regression Model“, inkludiert die Änderung auf der Zeitachse. Aufgrund der Verteilungsfreiheit lässt sich jedoch nicht direkt eine Weibullverteilung für ein bestimmtes Beanspruchungsniveau bestimmen.

Modellanwendung

Beispiele für das Vorhandensein einer beanspruchungsabhängigen Streuung sind in Kapitel 2.3 angeführt. Neben physikalischen Gründen, kann jedoch auch die Datenlage auf eine beanspruchungsabhängige Streuung hindeuten, auch wenn dies der Grundgesamtheit nicht inhärent ist. Der Einfluss der in diesem Fall versehentlich falschen Modellannahme wurde in [JJB15] vor dem Hintergrund einer nicht vorhandenen ausfallfreien Zeit untersucht. Im Fokus der zweiparametrischen Betrachtung stand die B_q -Lebensdauer. Der Fehler bei Anwendung eines Modells mit konstanter Streuung ist auch bei signifikant verschiedenen Formparametern in diesem Fall eher gering. Daraus lässt sich schließen, dass, solange keine Erklärung für eine beanspruchungsabhängige Streuung und eine ausfallfreie Zeit vorliegt, ein konstantes Modell adäquate Ergebnisse liefert.

Fazit

Zusammenfassend kann eine beanspruchungsabhängige Streuung in verschiedenen Modellen berücksichtigt werden. Hingegen ist ein beanspruchungsabhängiges Modell das eine Lebensdauerverteilung mit einer ausfallfreien Zeit – wie die dreiparametrische Weibullverteilung – berücksichtigt, derzeit nicht bekannt.

Der in den beschriebenen Modellen häufig verwendete einfache log-lineare Zusammenhang von Beanspruchung und Formparameter lautet

$$\ln[\sigma_{\ln v}(S)] = a_0 + a_1 S, \quad (2.14)$$

mit der Beanspruchung S , zwei Koeffizienten a_0 und a_1 , sowie der Standardabweichung der logarithmierter Lebensdauern $\sigma_{\ln v}$ [Nel04a].

2.5 Schätzverfahren und Vertrauensbereich

Für die vorliegende Arbeit von zentraler Bedeutung ist die Maximum Likelihood Estimation (MLE), welche im Folgenden ausführlich beleuchtet wird. Ebenso wird auf numerische Verfahren eingegangen, die bei beschleunigten Versuchen benötigt werden. Weitere bekannte Schätzverfahren in der Zuverlässigkeitstechnik sind die Regressionsanalyse sowie die Momentenmethode, siehe [BeLe04].

Bei einer einfachen Weibullanalyse wird in der Praxis häufig der Vertrauensbereich mittels einer rangbasierten und modifizierten Binomialverteilung [BeLe04], [Abe06] angegeben. Da die MLE das in dieser Arbeit verwendete Schätzverfahren darstellt, wird hier jedoch die Bestimmung der Vertrauensbereiche mit der Fisher-Matrix vorgenommen. Für weitere Verfahren, wie das Likelihood-Ratio, sei auf [Abe06] verwiesen.

2.5.1 Maximum Likelihood Estimation

Die Maximum Likelihood Estimation schätzt die zugrundeliegenden Parameter eines angenommenen Verteilungstyps durch Maximierung eines Likelihood bei gegebenen Daten. In anderen Worten wird die wahrscheinlichste Parameterkombination für einen Verteilungstyp gesucht, welche die gegebenen Daten realisiert hat und folglich am besten beschreibt. Die MLE hat große Bedeutung bei der Lebensdaueranalyse, da sie sehr vielfältig ist. Sie ist anwendbar für die meisten theoretischen Verteilungen und jeglicher Art von zensierten Daten [Nel04b], egal ob gruppiert⁵ oder nicht [Rin09]. Für Statistiker stellt sie die bevorzugte Methode dar [Abe06].

Der Maximum Likelihood (ML) Schätzer weist asymptotisch sehr gute statistische Eigenschaften auf. Die genaue Verteilung der ML Schätzer sind zwar meist nicht bekannt, jedoch können diese mit der large-sample Theorie näherungsweise unter Verwendung der Varianz-Kovarianz-Matrix und der Fisher Informationsmatrix bestimmt werden [Rin09]. D. h. besonders bei „großen“ Stichproben folgt die Verteilung eines ML Schätzers annähernd einer Normalverteilung, mit dem Erwartungswert als Mittelwert der Schätzung. Aber auch für kleine Stichproben hat der ML Schätzer gute Eigenschaften. [Nel04b]. Bei kleinen Stichproben und zugrundeliegender zweiparametrischer Weibullverteilung kann eine vorhandene Verzerrung (engl.: „bias“) der Schätzung für den Formparameter auch korrigiert werden, siehe [Hir99], [Ros96], [Abe06].

Likelihoodfunktion

Die Likelihoodfunktion hängt von der Verteilung, deren Parameter, den gegebenen Daten und der Art und Weise, wie diese gewonnen wurden, ab [Rin09]. Für eine Zu-

⁵ „Gruppiert“ bedeutet hier, innerhalb eines Zeitintervalls zusammengefasst [Rin09] (S. 403).

fallsvariable X mit zugehöriger Dichtefunktion $f(x|\boldsymbol{\theta})$, den Realisierungen x_1, x_2, \dots, x_n und dem Parametervektor $\boldsymbol{\theta}$ ist die Likelihoodfunktion einer gegebenen Stichprobe mit n Realisierungen definiert als die Funktion die jedem Parametervektor (innerhalb des Definitionsbereichs) den Wert

$$L = \prod_{i=1}^n f(x_1, x_2, \dots, x_n | \boldsymbol{\theta}), \quad (2.15)$$

also die gemeinsame Dichtefunktion, zuordnet [BeLe04], [Rin09]. Für L wird häufig auch $L(\boldsymbol{\theta})$ oder $L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x})$ geschrieben. Letztere Schreibweise zeigt an, dass die Likelihoodfunktion vielmehr als Funktion der Parameter bei gegebenen Daten zu verstehen ist und nicht als Funktion der Daten bei gegebenen Parametern. Gleichung (2.15) gilt für vollständige Daten, d. h. für $n = m$ beobachtete Ausfälle zum Ausfallzeitpunkt $x_i = x_1, x_2, \dots, x_m$. Für unvollständige, zeitzensierte Daten (Typ I-Zensierung) wird Gleichung (2.15) erweitert um einen Term, welcher die Zuverlässigkeit zum Zensierungszeitpunkt $x_j = x_1, x_2, \dots, x_k$ von k zensierten Daten beschreibt, zu

$$L = \prod_{i=1}^m f(x_i | \boldsymbol{\theta}) \prod_{j=1}^k R(x_j | \boldsymbol{\theta}). \quad (2.16)$$

Die ML Schätzer werden erreicht, wenn L maximal wird. Weitere Likelihoodfunktionen für verschiedene Szenarien finden sich in einschlägiger Literatur, wie [Rin09], [MeEs98], [Law03].

Maximierung der Likelihoodfunktion

Die Likelihoodfunktion hat ihr Maximum, wenn $\hat{\boldsymbol{\theta}} := \hat{\boldsymbol{\theta}}_{ML}$ gilt. Dieses Maximum kann prinzipiell auf verschiedene Arten erreicht werden. In seltenen Fällen wird eine Schätzung direkt durch Abtasten mittels einem systematischen Gitter konkreter Parameterkombination im Parameterraum durchgeführt. Normalerweise werden hierfür jedoch gradientenbasierte Methoden mit den partiellen Ableitungen der Likelihoodfunktion genutzt. Dafür ist es zweckmäßig die Log-Likelihoodfunktion zu verwenden [Rin09]. Mit Verwendung des logarithmierten Likelihood

$$\Lambda(\boldsymbol{\theta}) = \ln L(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^n \ln L_i(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^n \Lambda_i(\boldsymbol{\theta}) \quad (2.17)$$

mit $n = m + k$ und der partiellen Ableitung nach einem Parameter θ_i ergibt sich eine Likelihood Gleichung

$$\frac{\partial \Lambda(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i} = 0. \quad (2.18)$$

Die Lösung der partiellen Differentialgleichungen erfolgt iterativ; alternativ können im zweiparametrischen Fall der Weibullverteilung beide partielle Differentialgleichungen kombiniert werden, um η zu eliminieren und die entstehende Gleichung iterativ für β

zu lösen. Andernfalls muss die Likelihoodfunktion numerisch maximiert werden. [Nel04b]. Das globale Maximum ist gefunden für $\Lambda(\hat{\theta} = \hat{\theta}_{ML})$, siehe Bild 2.7.

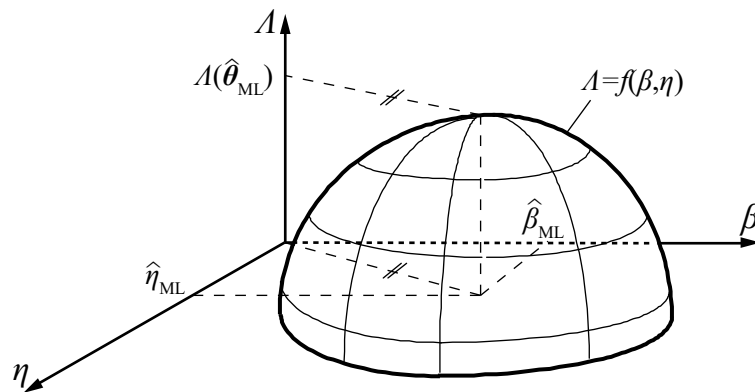


Bild 2.7: Schematische Darstellung der logarithmierten Likelihoodfunktion einer zweiparametrischen Weibullverteilung in Anlehnung an [BeLe04]

Für Verfahren zur Schätzung der zweiparametrischen Weibullverteilung mit MLE siehe beispielsweise [BeLe04], [Rin09] oder [Nel04b]. Für eine Schätzung bei Verteilungen mit mehreren Parametern und multipler Zensierung, siehe [Nel04b].

Bei Anwendung von MLE kann es je nach Datenlage und angenommener Verteilung zu Schwierigkeiten kommen. Im Fall der zweiparametrischen Weibullverteilung ist dies nicht so [Rin09], da in diesem Fall die Likelihoodfunktion eine strikt konkave Funktion ist und stets das globale Maximum gefunden wird. Dagegen können bei der dreiparametrischen Weibullverteilung bezüglich der asymptotischen Eigenschaften der ML Schätzer Probleme auftreten, siehe [Rin09].

Verfahren nach Panchang

Aufgrund von möglichen Problemen bei der Schätzung wird an dieser Stelle ein sogenanntes unfehlbares Verfahren vorgestellt. Ein Verfahren, welches bei Berücksichtigung einer ausfallfreien Zeit garantiert ML-Schätzer findet, wird in [PaGu89] vorgeschlagen und basiert auf Lawless (1982), siehe auch [Law03] (S. 185f) und [Rin09]. Dieses entspricht einem iterativen Prozess nach dem Newton-Raphson Verfahren und verwendet eine stetige Verfeinerung des Parameterraums für die ausfallfreie Zeit.

Die Philosophie des Verfahrens beruht auf der Einschränkung des Definitionsbereichs der ausfallfreien Zeit $0 \leq \gamma \leq x_{min} := \min\{x_i\}$ innerhalb dessen die Lösung gesucht wird. Um Schwierigkeiten zu vermeiden, wird eine kleine positive Zahl ε eingeführt; damit ist der Bereich der Lösungssuche auf das Intervall $[0, x_{min} - \varepsilon]$ begrenzt. Dieses Intervall wird eingeteilt in J gleich große Intervalle der Größe $\Delta\gamma$ und konkrete Werte $\gamma_j = (j - 1)\Delta\gamma$, mit $j = 1, 2, \dots, J$, werden berechnet. Für eine gegebene ausfallfreie Zeit $\gamma = \gamma_j$ wird die Transformation $x_i^* = x_i - \gamma_j$ durchgeführt. Iteratives Lösen der

partiellen Differentialgleichungen der daraus resultierenden zweiparametrischen Weibullverteilung

$$f(\beta|\gamma_j) = \frac{n}{\beta} + \sum_i \ln x_i^* - \frac{n \sum_i x_i^{*\beta} \ln x_i^*}{\sum_i x_i^{*\beta}} = 0 \quad (2.19)$$

und Einsetzen der Lösung für β_j in

$$\eta_j = \left(\frac{1}{n} \sum_i x_i^{*\beta_j} \right)^{1/\beta_j} \quad (2.20)$$

führt schließlich zum Likelihood im Punkt $(\eta_j, \beta_j, \gamma_j)$

$$\Lambda(\eta_j, \beta_j, \gamma_j) = n \left[\ln \left(\frac{\beta_j}{\eta_j^{\beta_j}} \right) - 1 \right] + (\gamma_j - 1) \sum_i \ln(x_i - \gamma_j). \quad (2.21)$$

Wiederholung dieser Schritte für alle γ_j ergibt eine Profil-Log-Likelihoodfunktion

$$\Lambda^*(\gamma) := \max_{\eta, \beta} \Lambda(\eta, \beta, \gamma). \quad (2.22)$$

Das Maximum dieser Funktion stellt die Lösung der MLE dar.

Der Rechenaufwand wird dahingehend optimiert, dass das begrenzende Intervall $[0, x_{min} - \varepsilon]$ zunächst in grobe Intervalle J eingeteilt und im Folgenden auf das Intervall, das das Maximum des Profil-Log-Likelihood enthält, fokussiert wird.

Die so durchgeführte MLE muss anschließend auf die Eckpunktlösung geprüft werden; diese kann bei $\beta < 2$ eintreten [Rin09]. Falls der Profil-Log-Likelihood im Intervall $[0, x_{min} - \varepsilon]$ monoton fällt, dann ist eine zweiparametrische Weibullverteilung zu bevorzugen [Rin09].

Numerische Verfahren zur Parameterschätzung bei beschleunigten Versuchen

Für die Parameterschätzung bei beschleunigten Versuchen mittels MLE existiert nach Wang & Kececioglu keine analytische Lösung der partiellen Ableitungen der Log-Likelihoodfunktion. Die Newton-Raphson Methode erweist sich hier als unpraktisch, da diese sehr vom Startwert abhängt. Dies ist besonders bei Modellen mit beanspruchungsabhängigem Formparameter der Fall. [WaKe00]

Wang & Kececioglu stellen daher einen Algorithmus vor, der nicht direkt die Likelihoodfunktion maximiert oder die ML Gleichungen löst, sondern die „least squares“ Methode nutzt [WaKe00]. Nelson fasst in [Nel04b] einige numerische Methoden zusammen. Darunter auch die „direct search“ Methode (siehe genetischer Algorithmus), welche direkt im gesamten Parameterraum die Likelihoodfunktion maximiert, und die Newton-Raphson Methode, welche mit den partiellen Differentialgleichungen arbeitet. Letztere ist startwertabhängig. Durch Modifizierung der Methode („method of scoring“, [Nel04b]) kann die Methode dennoch konvergieren.

Nachfolgend werden kurz die in der vorliegenden Arbeit verwendeten numerischen Verfahren vorgestellt.

Genetischer Algorithmus

Der genetische Algorithmus (GA) ist eine stochastische Methode für nichtlineare Probleme mit deren Hilfe Optimierungsaufgaben – mit oder ohne Nebenbedingungen – gelöst werden können. Sie basiert auf einem natürlichen Selektionsprozess, welcher der biologischen Evolution nachgeahmt ist. Eine Population individueller Lösungen wird wiederholt modifiziert. In jeder Generation wählt der GA zufällig Individuen der aktuellen Population aus und nutzt diese als Eltern für die nachfolgende Generation. Die Population bewegt sich sukzessive hin zur optimalen Lösung. Der GA unterscheidet sich von klassischen gradientenbasierten Verfahren darin, dass er nicht von einem einzelnen Punkt aus deterministisch zum nächsten gelangt, sondern dass er Populationen erzeugt, von der sich der beste Punkt unter Verwendung von Zufallsgeneratoren in Richtung Optimum bewegt. [Mat15]

Der GA ist in der „Global Optimization Toolbox“ von Matlab implementiert. Da er Populationen mit Zufallsgeneratoren erzeugt, benötigt er keine Startwerte. In [Jus08] wurde der GA bereits zur Auswertung geraffter Lebensdauerexperimente angewandt.

Innere-Punkte-Verfahren

Das Innere-Punkte-Verfahren löst näherungsweise Minimierungsprobleme mit Nebenbedingungen. Dazu verwendet es das Barriere-Verfahren. Dabei wird eine Ersatzaufgabe definiert, die nur Punkte innerhalb des von der Barriere eingeschlossenen Bereichs zulässt; dadurch können zur näherungsweisen Lösung des Problems Verfahren für Probleme ohne Nebenbedingungen angewandt werden [Ben03]. Um die Ersatzaufgabe zu lösen, wird in jeder Iteration – ausgehend von einem Punkt – entweder ein „Newton step“ oder ein „conjugate gradient step“ durchgeführt. In jeder Iteration minimiert der Algorithmus eine Anpassungsfunktion. Falls ein unternommener Schritt nicht zu einer Minimierung führt, wird er verworfen und ein anderer Schritt unternommen. [Mat15]

In Matlab ist das Verfahren in der Funktion „fmincon“ in der „Optimization Toolbox“ implementiert. Für weitere Erläuterungen des Verfahrens sei auf [Sch08] verwiesen.

Fazit

Die Momentenmethode kann nur vollständige Stichproben auswerten [BeLe04]. Dabei Versuchen nahe der Feldbeanspruchung wegen langer Laufzeiten oftmals auf Datenzensierung zurückgegriffen wird, scheidet die Momentenmethode für diesen Anwendungsfall bereits aus. Die Regressionsanalyse, welche wegen der Zuordnung der

Daten zum Median auch als Median-Rang-Regression bezeichnet wird, kann unvollständige Daten berücksichtigen. Sie ist direkt nur bei vollständigen Daten und Typ II (Ausfall) rechtszensierten Daten anwendbar [Nel04b]. Bei multipler Zensierung müssen zunächst andere Verfahren wie das analytische Sudden-Death Verfahren (siehe [BeLe04]) verwendet werden. Die MLE ist hingegen für jegliche Art von zensierte Daten geeignet. In einem umfangreichen Vergleich schlussfolgern Genschel & Meeker [GeMe10], dass ML-Schätzer, bis auf wenige Ausnahmen, besser sind als Median-Rang-Regression-Schätzer. Der Unterschied ist besonders deutlich bei Typ I zensierten Daten mit wenigen Ausfällen. Der ML-Schätzer berücksichtigt im Gegensatz zu dem Median-Rang-Regression-Schätzer das Lebensdauermerkmal der nicht ausgefallenen Prüflinge. Weitere Empfehlungen zur Rang-Regression und MLE finden sich in [O'K112].

2.5.2 Fisher Matrix

Der Vertrauensbereich verschiedener Zielgrößen – Parameter, Hyperparameter, Lebensdauer oder Zuverlässigkeit – kann mittels der Fisher-Matrix \mathbf{F} näherungsweise berechnet werden [Nel04a], [Nel04b], [LILi62]. Diese enthält die negativen, partiellen Ableitungen der Likelihoodfunktion und wird in die Varianz-Kovarianz-Matrix \mathbf{V} durch Invertierung $\mathbf{V} = \mathbf{F}^{-1}$ überführt. Damit können die Vertrauensbereiche der Zielgrößen abgeleitet werden. Dies ist möglich durch die Anwendung der asymptotischen Theorie, welche bei großem Stichprobenumfang gerechtfertigt ist [Nel04a]. Strebt der Stichprobenumfang gegen unendlich, nähert sich der Vertrauensbereich der Schätzer einer Normalverteilung an; d. h. eine Verteilung einer Parameterschätzung aus derselben Grundgesamtheit ist näherungsweise eine Normalverteilung [LILi62]. Aus der Varianz-Kovarianz-Matrix lässt sich die Standardabweichung bestimmen. Ein konkretes Vielfaches der Standardabweichung definiert den entsprechenden Vertrauensbereich. Die Abhängigkeit der Standardabweichung vom Stichprobenumfang für die Schätzung des Formparameters beim Fisher-Matrix Vertrauensbereich zeigt Bild 2.8. Mit zunehmendem Stichprobenumfang nimmt die Standardabweichung des geschätzten Formparameters ab. Mit größer werdendem Parameterschätzer nimmt die Standardabweichung zu.

Fazit

Da der Fisher-Matrix Vertrauensbereich auf der Likelihoodfunktion basiert, können mit entsprechender Likelihoodfunktion (siehe Kapitel 2.5.1) auch zensierte Daten berücksichtigt werden. Allgemein ist der Fisher-Matrix Vertrauensbereich optimistischer als die parameterfreien rangbasierten Vertrauensbereiche, wie der auf Basis der Binomialverteilung, was besonders bei kleinen Stichprobenumfängen zum Tragen kommt; für einen Stichprobenumfang $n \leq 10$ ist er gar zu optimistisch [Abe06]. Oft wird da-

her auch der Likelihood-Ratio Vertrauensbereich verwendet. Aufgrund seiner flexiblen Anwendbarkeit auf verschiedene Zielgrößen wird die Fisher-Matrix an dieser Stelle genutzt, um einen Vertrauensbereich bei der Auswertung der Daten anzugeben.

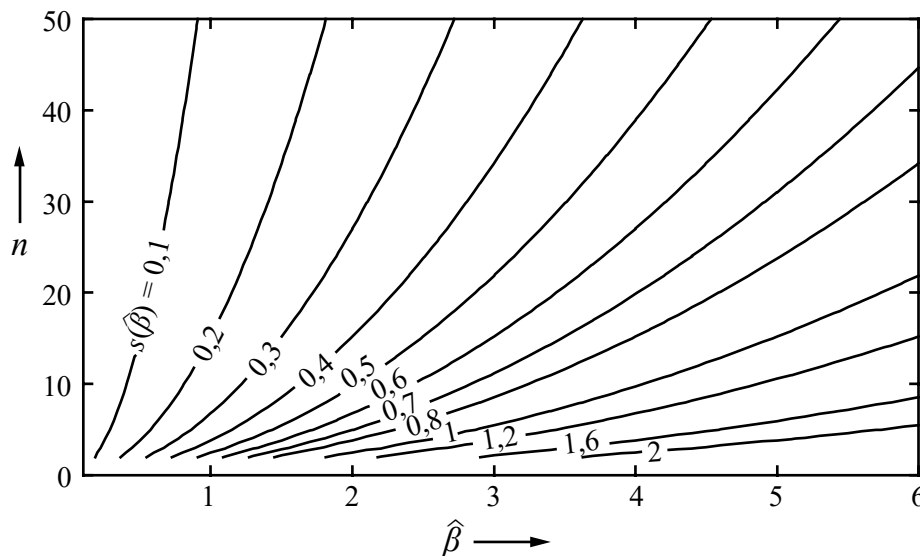


Bild 2.8: Asymptotische Standardabweichung als Funktion von Formparameter und Stichprobenumfang

2.6 Statistische Tests und Modellauswahl

Zur Beschreibung von Daten werden Modelle benötigt. Diese sollen auf Basis der Daten die Realität möglichst gut beschreiben. Prinzipiell kommt hierzu eine Vielzahl von Modellen in die engere Auswahl. Um das Modell zu identifizieren, welches die Daten bestmöglich beschreibt, gleichzeitig jedoch nur so komplex wie nötig ist, gibt es zum einen statistische Tests und zum anderen Informationskriterien, welche die Modellauswahl unterstützen. Schlussendlich bleibt es jedoch Aufgabe des Anwenders dies zu entscheiden.

Die in dieser Arbeit verwendeten Modelle sind teils hierarchisch, aber auch nicht hierarchisch aufgebaut. Zur Beurteilung der hierarchischen Modelle ist der Likelihood-Ratio Test (LRT) anerkannt [Nel04a]. Für beide Modellarten hingegen sind Informationskriterien geeignet.

2.6.1 Likelihood-Ratio Test

Der Likelihood-Ratio Test ist ein Hypothesentest. Es wird überprüft, ob eine Nullhypothese H_0 beibehalten werden kann oder ob sie zugunsten der Alternativhypothese H_1 verworfen werden muss. Um dies zu beurteilen, verwendet er Quantile der χ^2 -Verteilung in Abhängigkeit einer Irrtumswahrscheinlichkeit α und vorhandener Freiheitsgrade FG .

Zur Durchführung des Tests wird eine Teststatistik T definiert mit

$$T = 2(\hat{\Lambda} - \hat{\Lambda}'). \quad (2.23)$$

Für die Entscheidung gilt, wenn $T \leq \chi_{1-\alpha, FG}^2$, dann behalte H_0 bei und wenn $T > \chi_{1-\alpha, FG}^2$, dann verwerfe H_0 zugunsten H_1 . Für die Irrtumswahrscheinlichkeit α wird üblicherweise 0,1, 0,05 oder 0,01 gewählt, je nach Schwere der Entscheidung [Sa-He06]. Je nach Anwendungsfall sind die Variablen unterschiedlich zu definieren:

Eine häufige Anwendung ist der Test auf gleichen Formparameter β bei r Stichproben. Die Nullhypothese lautet $H_0: \beta_1 = \dots = \beta_r$. Hierzu sei $\hat{\Lambda}$ die Summe der Log-Likelihoods aller r Stichproben mit separaten β_i für $i = 1 \dots r$ und $\hat{\Lambda}'$ die Summe der Log-Likelihoods aller r Stichproben mit gemeinsamen β . Die Anzahl der Freiheitsgrade sei $FG = r - 1$. [Nel04b]

Zur Bewertung, ob zwei hierarchische Modelle signifikant unterschiedlich sind, wird geprüft, wie sich ein angenommenes Modell von einem allgemeinen Modell unterscheidet. In der Regel entspricht das angenommene Modell dem allgemeinen Modell, bei welchem ein bestimmter Modellkoeffizient gleich 0 gesetzt ist. Hierzu sei $\hat{\Lambda}$ der Log-Likelihood des allgemeinen Modells und $\hat{\Lambda}'$ der Log-Likelihood des angenommenen Modells. Die Anzahl der Freiheitsgrade sei $FG = J - J'$ und entspricht der Differenz der Anzahl der Modellkoeffizienten. [Nel04a]

2.6.2 Informationskriterien

Eine Zusammenstellung verschiedener Informationskriterien ist in [Rei15] gegeben. Die bekanntesten davon sind das Akaike Informationskriterium (AIC), das korrigierte Akaike Informationskriterium (AICc) und das Bayes'sche Informationskriterium (BIC). Diese haben gemeinsam, dass sie den Log-Likelihood Λ und die Anzahl der Modellparameter k berücksichtigen. AICc und BIC beachten zusätzlich noch den Stichprobenumfang n . Eine Aussage zu den Modellen ist erst möglich wenn zwei Modelle miteinander verglichen werden. Die Kriterien sind wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} AIC &= -2\Lambda + 2k \\ AICc &= -2\Lambda + 2k + \frac{2k(k+1)}{n-k-1} \\ BIC &= -2\Lambda + \ln(n)k \end{aligned} \quad (2.24)$$

Die Aussagen der Kriterien sind ähnlich. Eine Untersuchung von [Rei15] zeigt, dass das AIC und AICc gegenüber dem BIC Modelle mit mehreren Modellparametern bevorzugt; des Weiteren ist das BIC nicht nur für große, sondern auch für kleine Stichproben geeignet. Zudem tendiert das BIC dazu, einfachere Modelle bei großen Datensätzen eher zu bevorzugen als das Kriterium des p -Werts, welcher beispielsweise vom LRT genutzt wird [Raf95]. Zusammengefasst wird daher im weiteren Verlauf das

BIC zur Bewertung der Modelle herangezogen. Nach Raftery [Raf95] kann die Differenz Δ_{ij} zwischen den BIC-Werten zweier Modelle i und j mit Hilfe der Einteilung in Tabelle 2.1 beurteilt werden. Mit größer werdenden Differenz wird der Beweis, dass das Modell mit dem kleineren Wert eher dem wahren Modell entspricht, stärker.

Tabelle 2.1: Einteilung zur Beurteilung bei Anwendung des BIC zur Modellauswahl

Δ_{ij}	Beweis
0 – 2	Schwach
2 – 6	Positiv
6 – 10	Stark
> 10	Sehr stark

2.7 Nutzung von Vorwissen

Die Nutzung von Vorkenntnissen oder auch Vorwissen in der Zuverlässigkeitstechnik ist von großer Bedeutung. Heutzutage geht es in den meisten Projekten um Weiterentwicklungen oder Anpassungen von ähnlichen, bewährten Konzepten und nur in wenigen Fällen um etwas völlig neues. Dieser Umstand führt zu einem großen Vorwissen, welches bei aktuellen Entwicklungsaufgaben aufgrund der Erfahrung der Ingenieure bereits Berücksichtigung findet. Bezüglich der Berücksichtigung von Vorwissen weist die klassische Statistik verschiedene Nachteile auf [MaWa82], wohingegen die Bayes'sche Modellvorstellung dahingehend Vorteile bietet⁶. Jenes Vorwissen kann auch bei Aussagen über Kenngrößen der Zuverlässigkeit mittels des Satzes von Bayes integriert werden. [MaWa82]

2.7.1 Satz von Bayes

In Anlehnung an [MaWa82] gilt mit dem Parametervektor $\boldsymbol{\theta}$ und den Daten \boldsymbol{x}

$$g(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{x}) = \frac{[\prod_{i=1}^n f(x_i|\boldsymbol{\theta})]g(\boldsymbol{\theta})}{f(\boldsymbol{x})}. \quad (2.25)$$

Mit der Randverteilung $f(\boldsymbol{x})$ für kontinuierliche Zufallsvariablen

$$f(\boldsymbol{x}) = \int_{\Omega} f(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\theta})g(\boldsymbol{\theta}) d\boldsymbol{\theta}, \quad (2.26)$$

welche mit Hilfe des Integrals über den Parameterraum Ω des Parametervektors $\boldsymbol{\theta}$ berechnet wird. Die gemeinsame a priori Verteilung $g(\boldsymbol{\theta})$ beschreibt das Modell, bevor

⁶ Eine generelle Gegenüberstellung der Ansätze und deren charakteristischen Merkmale der klassischen Statistik (Stichprobentheorie) und der Bayes'schen Theorie sind in [MaWa82] (S. 169) und [BoTi73] (S. 1-10) zusammengefasst.

die Daten bekannt sind. Die vorhandenen Daten \mathbf{x} stellen unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen dar. Die gemeinsame bedingte Verteilung $f(\mathbf{x}|\boldsymbol{\theta})$ ist das Produkt der Wahrscheinlichkeiten dieser unabhängigen Zufallsvariablen bei gegebenem Parametervektor $\boldsymbol{\theta}$. Es gilt

$$f(\mathbf{x}|\boldsymbol{\theta}) = \prod_{i=1}^n f(x_i|\boldsymbol{\theta}) \quad (2.27)$$

mit \mathbf{x} als Vektor der Zufallsvariablen [MaWa82]. Bei gegebenen Daten \mathbf{x} kann $f(\mathbf{x}|\boldsymbol{\theta})$ nicht als Funktion von \mathbf{x} , sondern als Funktion der Parameter $\boldsymbol{\theta}$ betrachtet werden. Fisher definierte hierfür die Likelihoodfunktion der Parameter $\boldsymbol{\theta}$ bei gegebenen Daten \mathbf{x} ([Law03], [MaWa82], [HWRM08], [BoTi73])

$$L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}|\boldsymbol{\theta}). \quad (2.28)$$

Gleichungen (2.26) bis (2.28) in (2.25) eingesetzt liefert die a posteriori Dichtefunktion

$$g(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x}) = \frac{L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x})g(\boldsymbol{\theta})}{\int_{\Omega} L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x})g(\boldsymbol{\theta}) d\boldsymbol{\theta}}. \quad (2.29)$$

Die a posteriori Verteilung hängt folglich von der a priori Verteilung und dem Ergebnis der gegebenen Daten \mathbf{x} ab. Der Modalwert der a posteriori Verteilung ist ein Schätzwert des Parametervektors.

2.7.2 Arten von Vorwissen

Die Art von Vorwissen kann generell informativ oder diffus sein. Ist spezifische Information verfügbar, wird das Vorwissen informativ genannt. Das informative Vorwissen kann wiederum objektiver (beispielsweise basierend auf bereits vorhandenen Daten) oder subjektiver Art (beispielsweise Ingenieurserfahrung, Expertenwissen) sein [Rin09]. Liegt keine spezifische Information vor, wird das Vorwissen als diffus [HWRM08] oder näherungsweise nicht-informativ [MeEs98]. Nicht-informativ bedeutet in diesem Kontext, dass die a priori Verteilung gegenüber den verfügbaren Daten lediglich grob beschrieben werden kann [MaWa82]. Die verfügbaren Daten bekommen hierbei mehr Gewicht. Wenn keine informative a priori Verteilung vorhanden ist, ist zumindest eine nicht-informative a priori Verteilung über einen weiten Bereich anwendbar [MeEs98]. Die korrekte Bezeichnung ist somit abhängig von den verfügbaren Informationen der Daten [BoTi73]. Ist im Extremfall der Parameter sogar bekannt – oder als bekannt angenommen –, so wäre die a priori Verteilung bedeutungslos [MeEs98].

2.7.3 Vorwissen aus nicht-identischen Grundgesamtheiten

Die Bayes'sche Statistik geht von identischen Gegebenheiten aus. In der praktischen Anwendung wird dieser Umstand oft vernachlässigt. Beispielsweise wenn es sich um Vorwissen eines veränderten bzw. nur ähnlichen Produktes handelt oder wenn Vorwissen bei Prüfstandsbedingungen gewonnen wurden, welche in der Regel nicht vollständig die realen Betriebsbedingungen abdecken, und mit Beobachtungen aus realen Betriebsbedingungen verknüpft werden.

Krolo [Kro04] und Hitziger [Hit07] untersuchten die Übertragung von Vorwissen im Kontext der Planung von Zuverlässigkeitstests. Streuende Zufallsvariable ist hier die Zuverlässigkeit, welche im Intervall $[0, 1]$ definiert ist. Sie ist das Komplement zur Ausfallwahrscheinlichkeit, deren Streubereich sich mit der zweiparametrischen Beta-Verteilung beschreiben lässt [Kro04]. Folglich lässt sich auch die Zuverlässigkeit mit der Beta-Verteilung beschreiben:

Krolo [Kro04] hat einen Transformationsfaktor eingeführt, um nicht-identische Gegebenheiten zu berücksichtigen. Dieser ermöglicht es nur einen gewissen Anteil des Vorwissens zu nutzen. Hierbei wird Vorwissen bei der Planung von Zuverlässigkeitstests mittels Beta-Verteilung beschrieben. Der Parameter a der Beta-Verteilung entspricht den Gutteilen. Je größer dieser ist, desto besser ist das Produkt. Durch den Transformationsfaktor wird der Parameter a – und damit auch der Parameter b der Beta-Verteilung – durch Multiplikation korrigiert. Ist der Transformationsfaktor gleich 1 wird das Vorwissen vollständig übertragen. Vorwissen aus unterschiedlichen Quellen (Vorgänger, Vorversuch, Berechnung) wird durch Addition der Beta-Verteilungsparameter berücksichtigt. In [Kro04] wird gezeigt, wie zum einen für Vorwissen aus ähnlichen Produkten bzw. Vorgängern und zum anderen für Vorwissen aus vorangegangenen Testläufen der Transformationsfaktor bestimmt werden kann. Dies geschieht zum einen auf Basis einer Fehler-, Möglichkeiten- und Einflussanalyse – genauer gesagt auf Basis der Topfunktionen beider Produkte – und zum anderen durch Bewertung der Umweltbedingungen. Die Schätzung des Transformationsfaktors wird verifiziert. Dies geschieht präventiv durch Abgleich der modifizierten a priori Dichtefunktion mit aktuellen Tests oder auch mittels Feldbeobachtung im Nachhinein. Des Weiteren wird ein Maß für die Beurteilung der Schätzung des Transformationsfaktors vorgeschlagen.

Vorschläge für weitere Verfahren, welche die Übertragung von Vorwissen aus nicht-identischen Grundgesamtheiten berücksichtigen, sind von Kleyner et al., Savchuck/Martz sowie Guida/Pulcini:

Kleyner et al. [KBG+97] führen einen Wissensfaktor p ein. Dieser gibt an, wie sehr das neue Produkt dem alten Produkt entspricht. Das Komplement $1 - p$ definiert

Kleyner als Innovationsfaktor, der den Neuheitsanteil des neuen Produkts ausdrückt. Praktisch wird das Vorwissen – die vorhandene Dichtefunktion – mit p und einer Gleichverteilung mit $1 - p$ gewichtet. Wie der Wissensfaktor bestimmt wird, ist nicht beschrieben. Es ist lediglich eine Verteilung des Vorwissens direkt integrierbar.

Savchuck & Martz [SaMa94] verwenden Gewichtungsfaktoren für mehrere Dichtefunktionen (hier: Betaverteilung), die beispielsweise unterschiedliche Expertenmeinungen oder auch unterschiedliche Quellen für das Vorwissen repräsentieren können. Laut Literatur werden diese Faktoren durch einen Verantwortlichen bestimmt. Die Gewichtungsfaktoren ergeben kumuliert 1 und die einzelnen Dichtefunktionen in Summe die a priori Dichtefunktion. Die Übertragbarkeit der unterschiedlichen Quellen wird durch die unterschiedliche Gewichtung abgeschwächt. Eine methodische oder systematische Bestimmung der Gewichtungsfaktoren ist nicht beschrieben.

In [GuPu02] werden Ausfalldaten von vorherigen Versionen von Komponenten als Vorwissen genutzt, mit Berücksichtigung eines Verbesserungsfaktors der das Wissen über die Effektivität von Modifikationen, entweder pauschal oder die kritischsten Schadensmechanismen des Vorgängers betreffend, präsentiert. Die Übertragung des Vorwissens hängt von der Definition einer unteren und oberen Grenze für den Verbesserungsfaktor ab. Eine methodische oder systematische Bestimmung dieser Grenzen ist nicht beschrieben.

2.7.4 Transformationsfaktor

Der Transformationsfaktor ist nach [Hit07] definiert als der Grad der Ähnlichkeit zweier Grundgesamtheiten im Intervall $[0, 1]$. Hitziger entwickelte eine Methodik, um unter Berücksichtigung der Datensituation den Transformationsfaktor zu bestimmen. Er beschreibt ergänzend zu den Verfahren von Krolo [Kro04] zwei Methoden im Detail:

Das Ergebnis der Fuzzy-Technik (qualitativ & quantitativer Ansatz) baut auf subjektiven Erfahrungen von Experten auf. Der Transformationsfaktor ist mit Unsicherheit behaftet, jedoch als erste grobe Abschätzung anwendbar.

Wenn dagegen Daten vorliegen, kann ein deutlich aussagekräftigerer Anpassungstest (quantitativer Ansatz) durchgeführt werden. Für das in dieser Abhandlung vorgestellte Verfahren ist die Bestimmung des Transformationsfaktors bei zwei vorliegenden Stichproben von Bedeutung. Das Verfahren basiert auf dem Kolmogorov-Smirnov-Test für zwei Stichproben und ist ausführlich von Hitziger in [Hit07] beschrieben. Der Kolmogorov-Smirnov-Test zeigt, ob sich die Grundgesamtheit der beiden vorliegenden Stichproben $G_A(x)$ und $G_B(x)$ signifikant voneinander unterscheiden. Geprüft wird die Nullhypothese $H_0: G_A(x) = G_B(x)$ gegen die Alternativhypothese

$H_1: G_A(x) \neq G_B(x)$ mit einer zweiseitigen Fragestellung [SaHe06]. D. h. der maximale Absolutbetrag der Abweichung der empirischen Verteilungsfunktionen beider Stichproben $\hat{F}_A(x)$ und $\hat{F}_B(x)$ mit Stichprobenumfang n_A und n_B $D_{\max} = \max|\hat{F}_A(x) - \hat{F}_B(x)|$ ist von Interesse. Ist dieser ermittelt, kann die Wahrscheinlichkeit $P(D \leq D_{\max})$ angegeben werden. Diese gibt an, wie wahrscheinlich es ist, dass sich bei vorliegenden Stichprobenumfängen n_A und n_B sowie der Voraussetzung einer gültigen Nullhypothese ein kleinerer maximaler Absolutbetrag D als der vorliegende maximale Absolutbetrag D_{\max} ergibt. Eine exakte Berechnung der Wahrscheinlichkeit P nach Hajek [HáŠi67] ist lediglich für kleine Stichprobenumfänge n_A und n_B rechnerisch in angemessener Zeit möglich. Daher wird ein „Random-Walk Model“ [HáŠi67] verwendet, mit dessen Hilfe in kürzester Zeit die Wahrscheinlichkeit auch für große Stichprobenumfänge sehr gut approximiert werden kann. Nach Hitziger resultiert daraus der Transformationsfaktor

$$\Phi = 1 - P. \quad (2.30)$$

3 Phänomen des beanspruchungsabhängigen Formparameters

Grundsätzlich tritt ein Versagen oder ein Ausfall immer dann auf, wenn die Beanspruchung größer als die Beanspruchbarkeit ist (siehe Kapitel 2.3). Je nach Beanspruchung kann dies zu unterschiedlichen Schadensarten führen. Zum Beispiel führt bei Zahnrädern eine Überschreitung der ertragbaren Maximalbeanspruchung zum Gewaltbruch, wohingegen eine permanente Überschreitung der Dauerfestigkeit zu einem Ermüdungsbruch führt [Sch09a]. Generell jedoch können die Ursachen, welche schließlich zu einem Ermüdungsbruch führen, unterschiedlicher Art sein. Diese Ursachen werden je nach Beanspruchung wiederum unterschiedlich angesprochen.

Im folgenden Kapitel werden diese Ursachen, welche zu einem beanspruchungsabhängigen Formparameter führen, aus werkstoffmechanischer und statistischer Sicht erläutert.

3.1 Der Ermüdungsmechanismus

Zunächst werden die Phasen der Ermüdung, dann die Szenarien des Ermüdungsfortschritts und schließlich der Zusammenhang von Riskeimanzahl und Streuung beleuchtet.

3.1.1 Phasen der Ermüdung

Der Ermüdungsmechanismus kann in die Phasen Risseinleitung und Rissfortschritt eingeteilt werden. Die einzelnen Vorgänge sind ausführlich von Schijve [Sch01] beschrieben und sind im Folgenden darauf basierend knapp zusammengefasst. In Bild 3.1 sind die wesentlichen Vorgänge schrittweise dargestellt und den Phasen zugeordnet. Ausgangspunkt der Ermüdung ist eine zyklische Beanspruchungsamplitude, deren Wert unterhalb der Streckgrenze und oberhalb der Dauerfestigkeit liegt.

Risseinleitung

Die Risseinleitungsphase ist geprägt vom Spannungskonzentrationsfaktor. Bei der Initiierung eines Risses ist es bezüglich der Schwingfestigkeit nach [LiZe93] zu unterscheiden, ob es sich um einen „fehlerfreien duktilen Werkstoff“ oder um einen „fehlerbehafteten duktilen oder spröden Werkstoff“ handelt. Die Kristallgitter technischer Werkstoffe sind real nie fehlerfrei, so dass in einem realen Kristall verschiedene Git-

terfehler⁷ vorhanden sind. Das Vorhandensein dieser Fehler bestimmt in Abhängigkeit der Beanspruchung nun das Werkstoffverhalten. Bei „fehlerbehafteten“ Werkstoffen sind rissähnliche Fehler und kleine Defekte, wie Einschlüsse oder Erstarrungslunker [RHB12], werkstoff- und fertigungsbedingt bereits vorhanden und stellen meist den Ausgangspunkt für Schwinganrisse dar. In diesem Fall ist die Risseinleitung verkürzt. Bei „fehlerfreien“ Werkstoffen raut sich die Oberfläche mit der Zeit selbst auf [RHB12].

Faktor	Spannungskonzentrationsfaktor	Spannungsintensitätsfaktor	Bruchzähigkeit	
Phase	Zyklisches Gleiten → Risskeimbildung → Mikrorisswachstum → Makrorisswachstum → Totaler Ausfall			
	Risseinleitungsphase (Materialoberflächenphänomen)		Rissfortschrittsphase (abhängig vom Vollmaterial)	
Vorgang	(0) Zyklische Spannungsamplitude führt zu inhomogen verteilten Schubspannungen auf kristallografischen Gleitebenen (1) Mikroskopische plastische Verformungen aufgrund Versetzungsbewegungen (2) Oxidschichtbildung und Verfestigung im Gleitband führt zu Gleiten in benachbarter Gleitebene (Intrusion/Extrusion) (3) Risskeimbildung an Gleitbändern (4) Inhomogene Spannungsverteilung (5) Spannungskonzentration an Mikrorisspitze (6) Aktivierung weiterer Gleitsysteme (7) Unregelmäßiges Risswachstum entlang der Gleitbänder (8) Regelmäßiges Risswachstum aufgrund zusammenhängender Rissfront (9) Risswachstumsgeschwindigkeit abhängig vom Risswachstumswiderstand des Materials (10) Beanspruchung übersteigt Beanspruchbarkeit			

Bild 3.1: Phasen des Ermüdungsmechanismus und relevante Faktoren (in Anlehnung an [Sch01])

Die stets vorliegende mikroskopische Inhomogenität im Werkstoff (Fehler im Kristallgitter, s. o.) sorgt für inhomogen verteilte Schubspannungen auf den kristallografischen Gleitebenen (0). Die zyklische Spannungsamplitude verursacht Versetzungsbewegungen welche zu mikroskopischen, irreversiblen und plastischen Verformungen führen (1). Erreicht die Versetzungsbewegung die Korngrenzen, muss sie diese überwinden und im Nachbarkorn fortsetzen. Schafft sie dies nicht, kommt es zum Verset-

⁷ Punktfehler (=Leerstellen): nicht besetzte Gitterplätze; Linienfehler (=Versetzungen): Versetzung entlang einer Linie durch fehlende halbe Gitterebene; Flächenfehler (=Korngrenzen): ungeordnete Übergangszone am Übergang von Korn zu Korn.

zungsstau und folglich zu einem Risskeim. An der Oberfläche ist die Mikro-Plastizität durch eine einseitige Kornbindung, Spannungskonzentration aufgrund geometrischer Diskontinuitäten und Oberflächenrauheit begünstigt. In Folge dessen kommt es dort in den meisten Fällen zu Oxidschichtbildung auf freigelegtem Material und Verfestigung im Gleitband. Beides resultiert wiederum in erhöhten Schubspannungen und, durch den Übergang auf benachbarte Gleitebenen, schließlich in der Entstehung von Intrusionen und Extrusionen (2). Die Risskeimbildung setzt teils sehr früh ein, wenn die Spannungsamplitude über der Dauerfestigkeit liegt. Spannungsamplituden unterhalb der Dauerfestigkeit können auch zur Risskeimbildung führen. Diese Risskeime schreiten aber nicht zum Riss fort (3), da ungünstige Bedingungen deren Fortschritt verlangsamten oder eben bei fehlender Lasterhöhung sogar stoppen [RHB12]. Die am Risskeim verschärfte inhomogene Spannungsverteilung (4) führt zu einer Spannungskonzentration an der Mikrorisspitze (5). Mehr und mehr Gleitsystemen werden dadurch aktiviert (6). Das Wachstum an Korngrenzen wird jedoch immer wieder gebremst. Folglich wächst der Mikroriss zunächst mit unregelmäßiger Rate an (7). Diese Phase wird auch als instabiles Risswachstum bezeichnet.

Der Ermüdungsmechanismus ist in dieser ersten Phase ein Materialoberflächenphänomen. Dazu gehört insbesondere die Oberflächenrauheit, jedoch auch die Oberflächenbehandlung (wie Anodisierung, Nitrierung oder Kugelstrahlen) und die Oberflächenschichten [Sch94]. Wie in Kapitel 2.3 erläutert, können diese Eigenschaften und Verfahren der Bearbeitung zugeordnet werden und haben somit Einfluss auf die ertragbare Beanspruchung und schließlich auf den Formparameter. Der besonders bei „fehlerfreien“ Werkstoffen vorhandene große Einfluss der ursprünglichen Oberflächenstruktur nimmt mit zunehmender Risslänge ab. Ist der Oberflächeneinfluss nicht mehr vorhanden, beginnt die Rissfortschrittsphase. Ein Richtwert für die Risslänge am Übergang ist ca. 0,05 mm bis 2 mm [RHB12].

Rissfortschritt

Das instabile Risswachstum stabilisiert sich in Abhängigkeit vom Material nach einigen Korngrenzen, da die Rissfront zusammenhängt und bei Vergrößerung dadurch quasi permanent Korngrenzen passiert (8). Der Riss breitet sich fortan regelmäßig aus. Diese stabile Risswachstumsphase ist bestimmt durch den Spannungsintensitätsfaktor (9). Das Fortschreiten der Ermüdung ist geprägt durch die Eigenschaften des Vollmaterials. Der bei wiederholter zyklischer Spannungsamplitude anschließende totale Ausfall setzt ein, sobald die auftretende Beanspruchung die noch ertragbare Beanspruchung übersteigt (10). Hierfür kennzeichnend ist die Bruchzähigkeit.

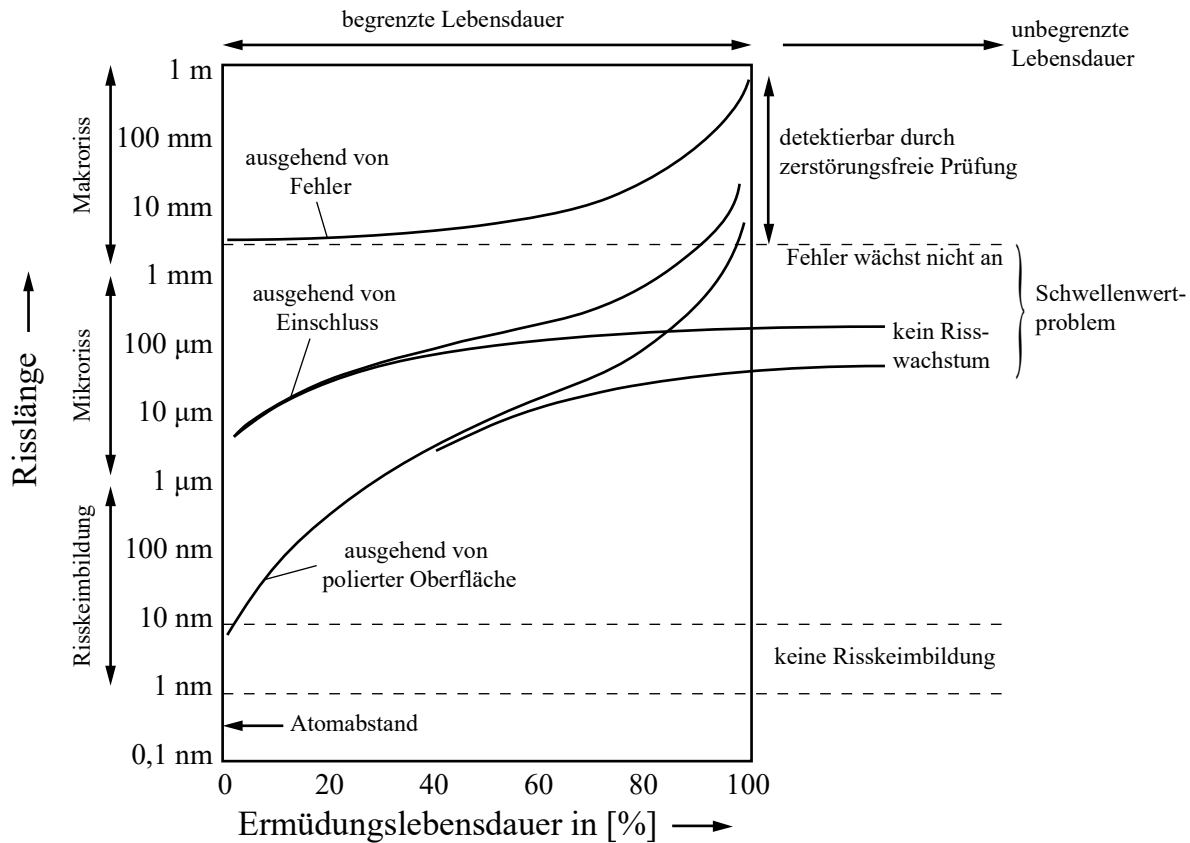


Bild 3.2: Szenarien des Risswachstums, nach [Sch01], [Sch77]

3.1.2 Szenarien des Ermüdungsrissfortschritts

In Bild 3.2 sind verschiedene Szenarien des Risswachstums über der prozentualen Lebensdauer (100 % = Lebensdauerende) in Abhängigkeit von der initialen Risslänge dargestellt. Die unterste Kurve repräsentiert den Fall eines sogenannten „fehlerfreien“ duktilen Werkstoffs. Die Riskeimbildung beginnt bei einer polierten Oberfläche an der schwächsten Stelle. Hierbei sind Intrusionen und Extrusionen an der Oberfläche von Bedeutung. Der Riskeim benötigt knapp die Hälfte der prozentualen Lebensdauer, um die Risslänge eines Materialeinschlusses zu erreichen. Die mittlere Kurve zeigt ein Risswachstum ausgehend von einem bereits vorhandenen Materialeinschluss im Bereich von Mikrometern. Dies geschieht bevorzugt auch knapp unter der Oberfläche, da auch dort der geringe Widerstand der Gleitbänder wirksam ist. In beiden Fällen muss der anfängliche Riss nicht zum Makroriss anwachsen, da der Widerstand gegen zyklisches Gleiten von der Riskeimbildung an der Oberfläche hin zum Vollmaterial zunimmt und an einer Korngrenze stoppen kann. Das heißt, bei gegebenem Spannungskonzentrationsfaktor kann sich zwar ein Mikroriss bilden, jedoch reicht die maximale Spannungsamplitude an dieser Stelle nicht für weiteres Risswachstum aus. Diese maximale Spannungsamplitude ist ein Schwellenwert der auch als Dauerfestigkeit bezeichnet wird. Die Dauerfestigkeit ist somit die höchste Spannungsamplitude für die ein Riskeim nicht bis zum Ausfall wächst. Setzt sich der Riss weiter fort bis

zum totalen Versagen, sind bereits über 80 % der prozentualen Lebensdauer vorbei. Die oberste Kurve zeigt das Risswachstum eines von Beginn an „fehlerbehafteten“ Werkstoffs – beispielsweise aufgrund von Schlackeeinschlüssen, Schweißfehlern oder größeren Poren. Diese sind von Beginn an erkennbar und sollten generell nicht vorhanden sein.

Festzuhalten ist, dass, wenn es zum Rissfortschritt und schließlich bis zum totalen Versagen kommen soll, muss die höchste zyklisch auftretende Spannungsamplitude den Widerstand im Vollmaterial überwinden. Der prozentuale Anteil der Lebensdauer für die Risseinleitung entspricht dabei einem Vielfachen des prozentualen Anteils für den Rissfortschritt. Wird der Riss sichtbar, steht das Lebensdauerende unmittelbar bevor.

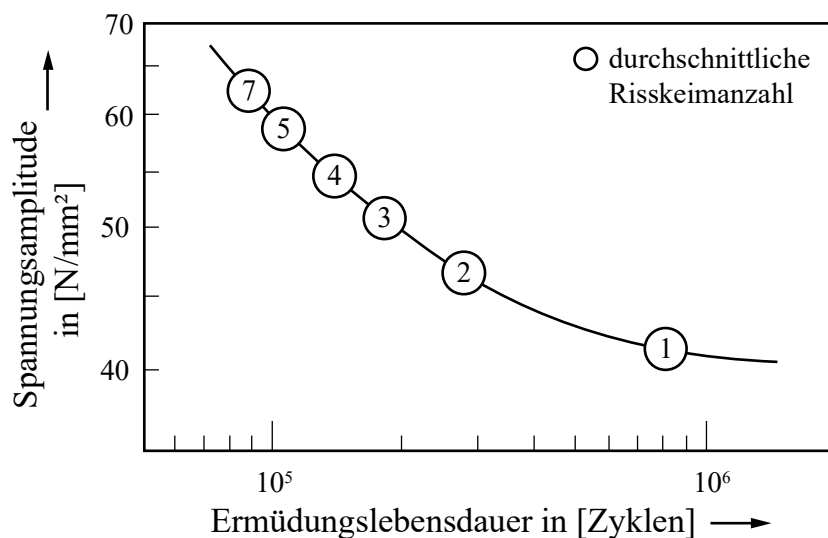


Bild 3.3: Beispiel für den Einfluss der Spannungsamplitude auf die Riskeimanzahl bei $77 \text{ N}/\text{mm}^2$ Mittelspannung nach [Sch77], [Sch94], [Sch01]

3.1.3 Riskeimanzahl und Streuung

Wie die Vorgänge (0) bis (3) in Bild 3.1 erläutern, kommt es infolge einer zyklischen Spannungsamplitude schließlich zu einem Riskeim. Die Bildung des Riskeims – die Anzahl und Dauer – ist abhängig von der Oberflächenbeschaffenheit und der Höhe der zyklischen Spannungsamplitude. Den Zusammenhang von Spannungsamplitude, Riskeimanzahl und Ermüdungslebensdauer zeigt Bild 3.3. Ist die Spannungsamplitude klein, nahe der Dauerfestigkeit, entsteht nur ein Riskeim aufgrund des nahenden zu überwindenden Schwellenwerts (siehe Kapitel 3.1.2). Ebenso dauert es ein Vielfaches an Schwingspielen bis bei kleiner Spannungsamplitude ein Riskeim bis zum Ausfall fortschreitet. Ist die Spannungsamplitude hoch bilden sich Riskeime an verschiedenen Stellen relativ einfach [Sch77](S. 6) und es kommt deutlich schneller zum Ausfall. Der Schwellenwert spielt keine Rolle mehr.

Im Folgenden wird die Streuung der Schwingspiele beider Phasen Risseinleitung (Zyklenzahl bei 0,5 mm Risslänge) und Rissfortschritt betrachtet. Schijve fasst in [Sch94] Versuchsreihen zusammen, die belegen, dass die Streuung der Rissfortschrittsphase nahezu unverändert über den Zeitfestigkeitsbereich ist. In Bild 3.4 ist der Streubereich beider Phasen durch einhüllende Kurven angedeutet. Es zeigt sich eine konstante Streuung der Rissfortschrittsphase unabhängig von der Spannung. Grund hierfür ist, dass sich der durchschnittliche Rissfortschrittswiderstand kaum ändert, wenn sich die zusammenhängende Rissfront durch mehrere Korngrenzen ausbreitet [Sch94], siehe Kapitel 3.1.1. Dagegen nimmt die Streuung der Risseinleitungsphase mit abnehmender Spannung zu – der angedeutete Streubereich weitet sich auf.

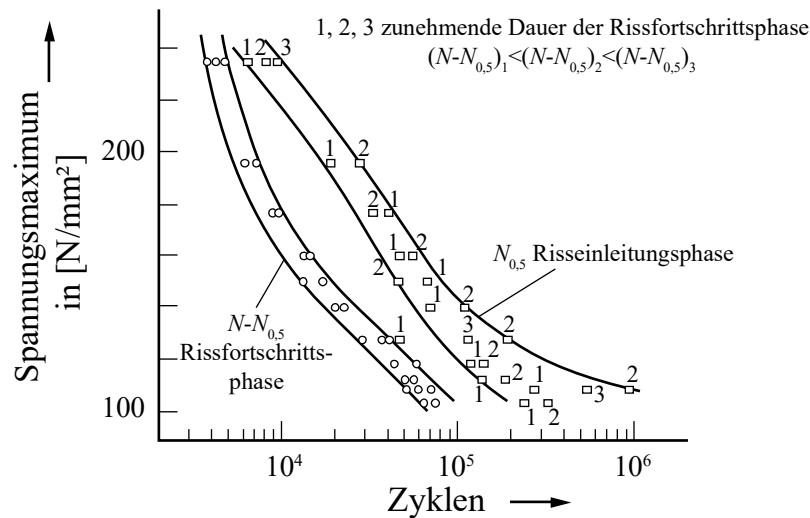


Bild 3.4: Beispiel für die Streuung der Risseinleitungs- und Rissfortschrittsphase bei Ermüdung nach [Sch94] (Fig.5)

Die zunehmende Streuung bei niedriger Spannung lässt sich mit weniger vorhandenen Risskeimen begründen, die dann auch tatsächlich zum Ausfall führen. Ist nur ein Risskeim A vorhanden, kann auch nur dieser bis zum Ausfall fortschreiten. In Abhängigkeit von den beeinflussenden Größen in Risseinleitungs- und Rissfortschrittsphase führt dies zu einer großen Streuung. Sind bei großer Spannung amplitude mehrere Risskeime X, Y und Z vorhanden, so ist mit einer wesentlich kleineren Streuung der Schwingspielanzahl für das Erreichen der Rissfortschrittsphase zu rechnen. Dies wird wie folgt begründet: Die Lebensdauer ist nicht nur absolut aufgrund größerer Spannung amplitude verkürzt, sondern mindestens einer der Risskeime X, Y oder Z erreicht, bei mehrfacher Replikation, stets vor der mittleren Lebensdauer – eines einzelnen repräsentativen Risskeims – das Ende der Risseinleitungsphase.

Zudem ist auch in diesem Beispiel zu erkennen, dass die Risseinleitung generell bis zu einer Zehnerpotenz länger dauert als die Rissfortschrittsphase.

3.2 Bereiche der Ermüdung im Wöhlerdiagramm

Im Wöhlerdiagramm dargestellt werden die Versagenszyklenzahlen N_f von Ermüdungsversuchen in Abhängigkeit der Spannungsamplitude σ_A , siehe Bild 3.5. Der Bereich bis ca. 10^4 Zyklen wird „Low-Cycle-Fatigue“ (LCF) bezeichnet⁸. Die Spannungsamplituden liegen im Bereich der Kurzzeitfestigkeit. Der daran anschließende Bereich heißt „High-Cycle-Fatigue“ (HCF). Die Belastung im HCF ist der Bereich der Zeitfestigkeit. Ein exakter Übergang vom LCF in den HCF ist nicht definiert. Einige Werkstoffe weisen eine Dauerfestigkeit σ_D auf (Definition der Grenzlastspielzahl N_D ca. $2 \cdot 10^6$ bis 10^7), viele hingegen zeigen keine echte Dauerfestigkeit. Die Werkstoffe ohne echte Dauerfestigkeit (kubisch-flächenzentrierte Metalle, gehärtete Stähle) weisen jedoch ebenfalls eine deutlich geringere Steigung ab einer bestimmten Zyklenzahl auf (Definition N_D ca. 10^7 bis 10^8).

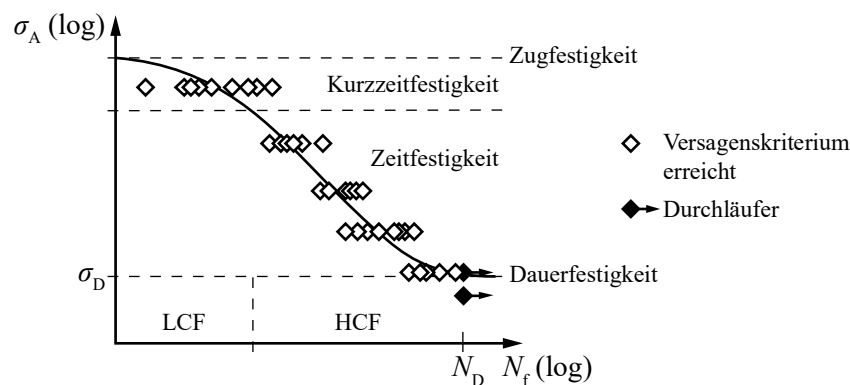


Bild 3.5: Beispiel für ein typisches Wöhlerdiagramm mit eingezeichneten Messpunkten nach [RHB12]

Unabhängig vom geprüften Material ist die Streuung der Versagensschwingspielzahl üblicherweise sehr groß, da bereits kleine Material- und Oberflächenfehler erheblichen Einfluss auf die Lebensdauer haben. Mehrere Versuche auf einem Niveau erlauben die Beschreibung eines Streubandes und folglich eine Anpassung der Wöhlerkurve für eine gegebene Ausfallwahrscheinlichkeit.

In der Regel werden Belastungen im HCF-Bereich spannungskontrolliert aufgebracht, da dies mit geringerem Versuchsaufwand verbunden ist. Im LCF-Bereich hingegen ist die ertragbare Zyklenzahl stark abhängig von der Spannung. Daher sind im LCF-Bereich dehnungskontrollierte Versuche sinnvoller, da bei kontrollierter Dehnungsamplitude aufgrund streuender Werkstoffeigenschaften nur kleine Streuungen in der zugehörigen Spannungsamplitude auftreten und, nach [Hai06], im Kurzzeitfestigkeitsbereich vorrangig der plastische Dehnungsanteil schwingfestigkeitsbestimmend ist. Bei kraft geregelter Versuchsdurchführung würde auch die bei fortschreitendem Riss

⁸ Groß [Gro74] bezeichnet den Bereich bis zu $5 \cdot 10^4$ Zyklen als LCF.

vorhandene Lasterhöhung nicht beachtet, so dass es zu verfrühtem Bruch kommen würde.

Im LCF-Bereich wird die Streckgrenze überschritten. Damit einher geht eine deutliche Zunahme der Dehnung. Die gesamte Dehnungsamplitude ist die Überlagerung des elastischen und des plastischen Anteils, wobei der plastische im LCF-Bereich und der elastische im HCF-Bereich überwiegt, siehe Bild 3.6a. Die einzelnen linearen Bereiche sind zum einen durch die Basquin-Gleichung (HCF, elastischer Anteil) und zum anderen mittels der Coffin-Manson-Gleichung (LCF, plastischer Anteil) zu beschreiben, Bild 3.6b. [RHB12]

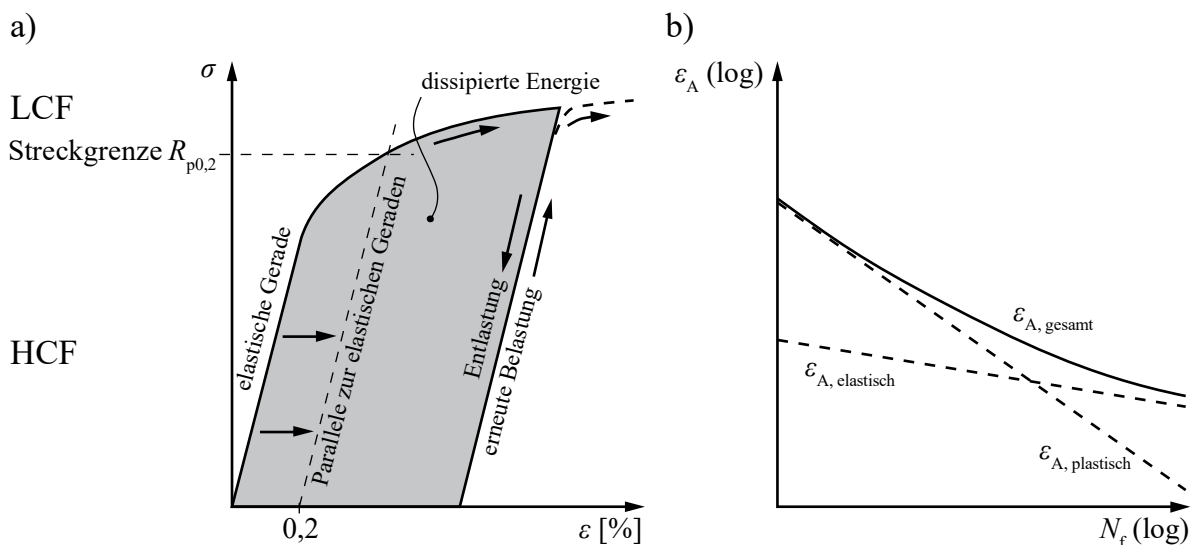


Bild 3.6: a) Sensitivität im LCF- und HCF-Bereich und b) Dehnungsamplituden-Schwingspielzahl-Diagramm (Dehnungswöhlerdiagramm) in Anlehnung an [RHB12]

Dynamisch belastete Maschinenelemente werden normalerweise entweder dauerfest oder zeitfest ausgelegt (z. B. ist üblicherweise bei Pkw die Kurbelwelle dauerfest und der erste Gang hingegen zeitfest ausgelegt, siehe [RHB12]). Zeitfeste Bauteile werden folglich so dimensioniert, dass die Beanspruchung im Bereich oberhalb der Dauerfestigkeit – im HCF – liegt. Nur im beschleunigten Versuch sollten höhere Beanspruchungen nahe der Kurzzeitfestigkeit (LCF) auftreten.

3.3 Wahrscheinlichkeitstheoretischer Ansatz

Bei einer zweiparametrischen Weibullverteilung lässt sich eine Beanspruchungsabhängigkeit des Formparameters statistisch zunächst nicht erklären. Wäre dieser beanspruchungsabhängig, würden sich die Weibullgeraden zweier Beanspruchungsniveaus schneiden, was auch physikalisch nicht begründbar ist (siehe [Gum58] und [Nel04a]). Das würde beispielsweise bedeuten, dass bei kleinen Ausfallwahrscheinlichkeiten die Lebensdauer bei größerer Beanspruchung und somit größerem Formparameter höher

ist als bei kleinerer Beanspruchung und somit kleinerem Formparameter. Dies gilt jedoch nur bezogen auf eine zweiparametrische Weibullverteilung, wie sie zur Beschreibung der Bruchfestigkeit bei statischer Belastung verwendet wird.

Im Kontext von Verschleiß- und Ermüdungsausfällen, die aufgrund dynamischer Belastung auftreten, sind die Aussagen für den Fall statischer Belastung nicht zutreffend. Für diese Ausfallarten ist eine ausfallfreie Zeit begründbar, siehe Kapitel 2.2.3. Da die ausfallfreie Zeit ebenfalls ein Lageparameter ist, ist sie folglich auch abhängig von der Beanspruchung [Gum58]. Durch Berücksichtigung einer beanspruchungsabhängigen ausfallfreien Zeit kann das oben beschriebene mathematische Problem vermieden werden; dies wird in Kapitel 5.2.6 veranschaulicht.

Statistische Überlegung

Es werden folgende Annahmen getroffen: Die Lebensdauer eines Bauteils bei vorliegender dynamischer Belastung ist aufgrund Ermüdung beendet, wenn sich mindestens ein Risskeim bildet, fortschreitet und bis zum definierten Ausfallkriterium (spätestens Restbruch) anwächst. Einzelne Risskeime sind voneinander unabhängig.

Aus Kapitel 3.1.3 ist bekannt, dass die Zahl der detektierten Risskeime beim Ausfall mit abnehmender Beanspruchung ebenfalls abnimmt. Ist die Beanspruchung höher, werden mehr Risskeime erkannt, von denen sich mindestens einer, und zwar der an der kritischsten Stelle, durchsetzt und zum Ausfall führt. Die kritischste Stelle ist gegeben durch das Zusammenwirken der Beanspruchung und der Beanspruchbarkeit (siehe Kapitel 2.3). Die Lebensdauer bei Ausfall entspricht der ersten Ranggröße. Liegen mehrere ausgefallene Bauteile vor, so streut die kritischste Stelle, da in der Realität mikroskopisch kein Bauteil wie das andere ist. Es liegt damit eine Verteilung der ersten Ranggröße vor. Diese kann nach Bertsche & Lechner [BeLe04] mit Hilfe der kleinsten Extremwertverteilung vom Typ III [Gum58] beschrieben werden. Zum Verständnis der Ranggröße und ihrer Verteilung wird auf Kapitel 6.2 in [BeLe04] verwiesen.

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein bestimmter Risskeim i von n vorhandenen Risskeimen zum Ausfall führen könnte, ist

$$\varphi(t_i) = F(t_i)^{i-1} f(t_i) [1 - F(t_i)]^{n-i}. \quad (3.1)$$

Da jeder der n Risskeime derjenige sein kann, welcher an der kritischsten Stelle – und zufällig die günstigsten Verhältnisse zum Fortschreiten antrifft [RHB12] – ist, müssen noch sämtliche Kombinationsmöglichkeiten berücksichtigt werden. Dies geschieht mittels dem Multinomialkoeffizienten und führt zu

$$\varphi(t_i) = \frac{n!}{(i-1)! 1! (n-i)!} F(t_i)^{i-1} f(t_i) [1 - F(t_i)]^{n-i}. \quad (3.2)$$

Da sich der Risskeim an der kritischsten Stelle durchsetzt und dessen Ausfall das Lebensdauerende des einen Bauteils bedeutet, ist $i = 1$ und Gleichung (3.2) vereinfacht sich zu

$$\varphi(t_1) = n f(t_1) [1 - F(t_1)]^{n-1}. \quad (3.3)$$

Die Verteilung der ersten Ranggröße ist in Bild 3.7 dargestellt. Anschaulich entspricht sie der Verteilung der Schwingenspielzahl bei Ausfall in Abhängigkeit der Risskeimanzahl n , welche proportional der Spannungsamplitude ist. Für das Beispiel ist angenommen, dass die Lebensdauer nach Gleichung (2.9) weibullverteilt ist, mit den Parametern $\eta = 72.135$, $\beta = 2$ und $\gamma = 0$. Diese theoretische Weibulldichtefunktion $f(t)$ ist hierbei zusätzlich als schwarze gepunktete Linie eingezeichnet. Sie entspricht exakt der Verteilung der ersten Ranggröße, wenn nur ein Risskeim vorhanden ist. Eine Verschiebung der Lageparameter infolge der veränderten Spannungsamplitude ist aus Darstellungsgründen nicht berücksichtigt; der Fokus liegt auf der Streuung.

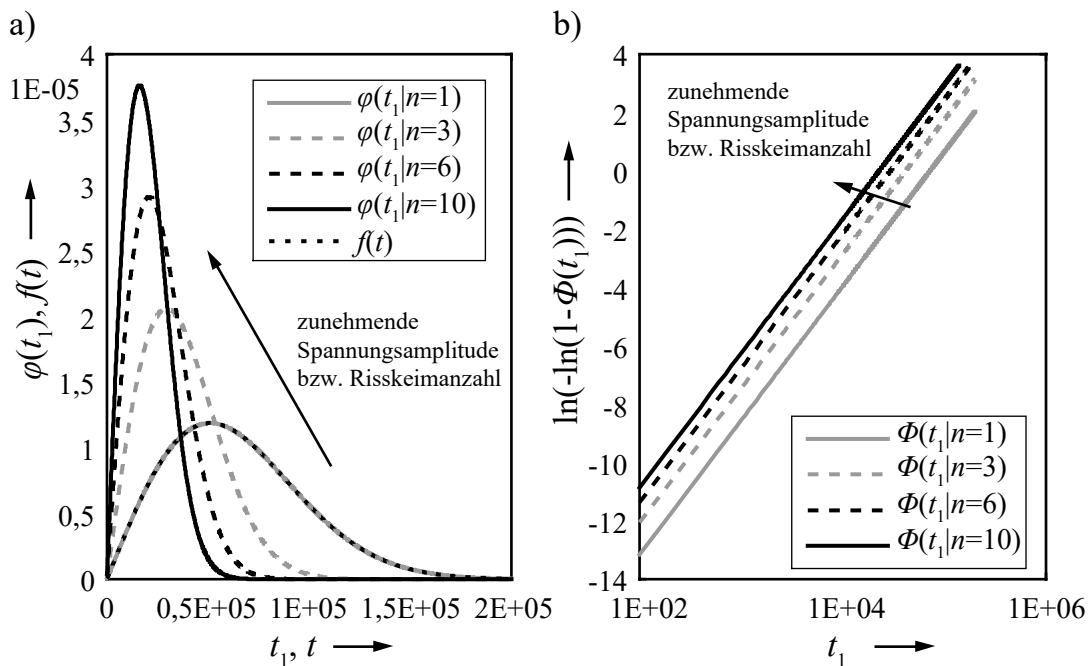


Bild 3.7: a) Einfluss der Risskeimanzahl auf die Streuung der Schwingenspielanzahl bei Risseinleitungsphasenende und b) die Ranggrößenverteilungen im Weibullplot bei unabhängigen Mikrorissen

Unabhängig von der Risskeimanzahl n zeigt sich, dass die Weibullgeraden lediglich parallel zueinander verschoben sind, siehe Bild 3.7b. Folglich führt die hier durchgeführte Betrachtung bis Risseinleitungsphase zunächst zu einer unveränderten Streuung.

Eine zur Spannungsamplitude proportional erhöhte Anzahl der Riskeime alleine erklärt den beanspruchungsabhängigen Formparameter noch nicht.

Werden darauf aufbauend die werkstofftechnischen Erkenntnisse aus Kapitel 3.1 berücksichtigt, die neben der Risseinleitungs- auch die Rissfortschrittsphase einschließen, lässt sich jedoch eine These zum beanspruchungsabhängigen Formparameter formulieren.

3.4 These zum beanspruchungsabhängigen Formparameter

Die bisherigen physikalischen und experimentell gewonnenen Erkenntnisse lassen sich zwei Aspekten, dem Verhältnis der Dauer der Risseinleitungs- und Rissfortschrittsphase (A) und der sowohl beanspruchungsabhängigen als auch größeren Streuung der Risseinleitungsphase (B), zuordnen. Zusammengefasst ermöglicht dies, das Aufstellen einer These zur Beanspruchungsabhängigkeit des Formparameters, welche mittels einem synthetischen Beispiel validiert wird.

Aspekt A:

- Die Schwingenspielzahl der Risseinleitungsphase ist um ein Vielfaches höher als die der Rissfortschrittsphase (ca. eine Zehnerpotenz) [Sch77], [Sch94], [For36] (zitiert in [Sch01]).
- Das Verhältnis der Dauern beider Phasen vergrößert sich bei besserer Oberfläche [RHB12], [Sch77].
- Der Oberflächeneffekt lässt mit zunehmender Beanspruchung nach und ist in der Rissfortschrittsphase nicht vorhanden, siehe [For36] (zitiert in [Sch01]).
- Die Risseinleitungsphase dauert wesentlich länger, wenn sich die Beanspruchung der Dauerfestigkeit nähert, was die Idee des Schwellenwerts unter dem kein Makroriss entsteht, bestätigt; die Rissfortschrittsphase verlängert sich bei kleinerer Beanspruchung ebenso, jedoch ist der Effekt deutlich kleiner, siehe [For36] (zitiert in [Sch01]). Sprich, bei Beanspruchungserhöhung nimmt die Wachstumsgeschwindigkeit makroskopischer Risse nicht im selben Maße zu, wie die Risseinleitung beschleunigt wird [RHB12].

Aspekt B:

- Die Streuung der Risseinleitungsphase ist abhängig von der Beanspruchung. Nimmt die Beanspruchung hin zur Dauerfestigkeit ab, zeigen Versuche, wie das Streuband in der logarithmischen Darstellung größer wird [Sch94].
- Dagegen erscheint die Streuung der Rissfortschrittsphase konstant für verschiedene Beanspruchungsniveaus.

- Zudem ist bekannt, dass die Streuung größer ist, wenn die Ausfälle von Oberflächenfehlern ausgehen, als wenn Materialfehler im Innern bzw. unter der Oberfläche ursächlich sind [Nel84].
- Die Einflussfaktoren auf die Risseinleitungsphase, wie insbesondere die Oberfläche, sind vielfältiger als die auf das Vollmaterial und führen somit zu einer größeren Streuung [Sch01]. Oberflächeninduzierte Ausfälle stehen daher in Zusammenhang mit einer vorhandenen Risseinleitungsphase, wodurch auf eine größere Streuung von letzterer geschlossen werden kann.

Die Zusammenfassung führt zu folgender These:

Bei *abnehmender* Beanspruchung
führen die größere Streuung, größere Schwingspielanzahl
und die stärkere *Abnahme* der Wachstumsgeschwindigkeit
der Risseinleitungsphase gegenüber der Rissfortschrittsphase
zu einem *verkleinerten* Weibull-Formparameter.

oder

Bei *zunehmender* Beanspruchung
führen die größere Streuung, größere Schwingspielanzahl
und die stärkere *Zunahme* der Wachstumsgeschwindigkeit
der Risseinleitungsphase gegenüber der Rissfortschrittsphase
zu einem *vergrößerten* Weibull-Formparameter.

Diese These wird anhand eines synthetischen Beispiels validiert.

Synthetisches Beispiel

Die Schwingspielanzahlen beider Phasen, welche jeweils log-normalverteilt sind, und die Beachtung der in der These genannten Merkmale der größeren Streuung, Schwingspielanzahl und Wachstumsgeschwindigkeit der Risseinleitungsphase, führen zu dem Ergebnis in Tabelle 3.1. Das Beispiel zeigt zum einen den Fall ohne und zum anderen den Fall mit Berücksichtigung des Aspekts B. In beiden Fällen und in beiden Phasen werden für alle drei Beanspruchungsniveaus auf Basis der jeweiligen Annahmen je 1000 Pseudo-Zufallszahlen gezogen, separat geschätzt, anschließend die Schwingspielanzahlen beider Phasen addiert und erneut geschätzt. Schließlich werden die somit ermittelten geschätzten Standardabweichungen $s_{\text{Inv,gesamt}}$ zum Formparameter transformiert (siehe Kapitel 4.4.1). Die kleinere Streuung der logarithmierten Lebensdauer bei zunehmender Beanspruchung geht einher mit einem größeren Formparameter. Dies ist in beiden Fällen zu beobachten, wobei der Effekt mit Aspekt B größer ist.

Tabelle 3.1: Validierungsbeispiel – Annahmen (Werte in Anlehnung an [For36] (zitiert in [Sch01]) und [Sch94]) und Ergebnis

Ohne angenommene beanspruchungsabhängiger Streuung in Risseinleitungsphase (ohne Aspekt B)					
		S [N/mm ²]	275	310	345
Risseinleitungsphase (Phase I)	Annahme	Median	2.000.000	500.000	200.000
		$\mu_{Inv,I}$	14,509	13,122	12,206
		Faktor für Streuung	1,000	1,000	1,000
		$\sigma_{Inv,I}$	0,300	0,300	0,300
	Zwischen- ergebnis	$\bar{x}_{Inv,I}$	14,488	13,124	12,229
		$s_{Inv,I}$	0,303	0,300	0,303
Rissfortschrittsphase (Phase II)	Annahme	Median	100.000	70.000	50.000
		$\mu_{Inv,II}$	11,513	11,156	10,820
		Faktor für Streuung	1,000	1,000	1,000
		$\sigma_{Inv,II}$	0,300	0,300	0,300
	Zwischen- ergebnis	$\bar{x}_{Inv,II}$	11,509	11,167	10,814
		$s_{Inv,II}$	0,297	0,306	0,303
Phase I & II	Ergebnis	$s_{Inv,gesamt}$	0,284	0,270	0,238
		β_{mod}	3,533	3,722	4,211
Mit angenommener beanspruchungsabhängiger Streuung in Risseinleitungsphase (mit Aspekt B)					
		S [N/mm ²]	275	310	345
Risseinleitungsphase (Phase I)	Annahme	Median	2.000.000	500.000	200.000
		$\mu_{Inv,I}$	14,509	13,122	12,206
		Faktor für Streuung	3,000	2,000	1,250
		$\sigma_{Inv,I}$	0,900	0,600	0,375
	Zwischen- ergebnis	$\bar{x}_{Inv,I}$	14,538	13,083	12,183
		$s_{Inv,I}$	0,892	0,617	0,372
Rissfortschrittsphase (Phase II)	Annahme	Median	100.000	70.000	50.000
		$\mu_{Inv,II}$	11,513	11,156	10,820
		Faktor für Streuung	1,000	1,000	1,000
		$\sigma_{Inv,II}$	0,300	0,300	0,300
	Zwischen- ergebnis	$\bar{x}_{Inv,II}$	11,516	11,144	10,815
		$s_{Inv,II}$	0,291	0,299	0,294
Phase I & II	Ergebnis	$s_{Inv,gesamt}$	0,849	0,501	0,311
		β_{mod}	1,183	2,003	3,228

4 Konzepte und Methoden zur Bestimmung eines Formparameters

Der Formparameter, sowie auch der Lageparameter und in vielen Fällen die ausfallfreie Zeit, kann je nach Situation mit verschiedenen Konzepten und Methoden (nachfolgend allgemein als „Ansatz“ bezeichnet) ermittelt werden. Neben den grundlegenden, auf Daten beruhenden, werden nachfolgend auch alternative Ansätze kurz vorgestellt und bezüglich definierter Kriterien analysiert. Auf weitere Einflüsse auf den Formparameter wird hingewiesen. Im abschließenden Fazit werden Schwachstellen der Ansätze aufgezeigt und Optimierungspotential identifiziert.

Die analysierten Ansätze lassen sich grob in drei Kategorien unterteilen:

- a) Ansätze auf Basis von Versuchsdaten
 - Lebensdauerversuch
 - Degradationsversuch
 - Beschleunigter Lebensdauerversuch
 - Beschleunigter Degradationsversuch
 - Cox-Proportional-Hazard-Modell
- b) Ansätze auf Basis von Ausfallstatistiken
 - Felddatenanalyse
- c) Ansätze auf Basis von Literatur, Experten oder Materialeigenschaften
 - Literatur
 - Experten
 - Streuende Werkstoffkennwerte

Speziell von den Ansätzen (beschleunigter) Lebensdauer- bzw. Degradationsversuch sind Abwandlungen oder spezielle Varianten vorhanden, welche hier nicht weiter betrachtet werden. Diese Ansätze werden in ihrer Standardvariante erfasst, wie sie in einschlägiger Literatur zu finden sind.

Als Modell zur Analyse wird ein sogenanntes P-Diagramm genutzt, mit welchem gewöhnlich Prozesse oder auch Produkte in ihre wirkenden Elemente zerlegt werden. In Anlehnung an [YaEl03] werden die wirkenden Elemente in die Bereiche Information, Einstellfaktoren und Störfaktoren sowie Ergebnis unterteilt (Bild 4.1). Information umfasst sämtliche Informationen die vom Ansatz berücksichtigt werden können. Einstellfaktoren sind durch den Anwender definierbar und beeinflussen das Ergebnis. Störfaktoren beeinflussen ebenfalls das Ergebnis, sind dagegen aber inhärent und kön-

nen nicht direkt vom Anwender beeinflusst werden. Das Ergebnis fasst alle Erkenntnisse zusammen, die der Ansatz hervorbringt.

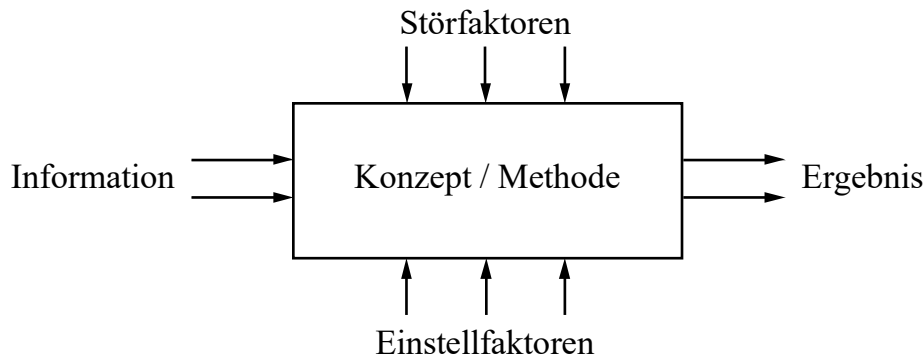


Bild 4.1: Analysemodell (in Anlehnung an [YaEl03])

Im Fokus der Analyse jedes Ansatzes steht das Ausfallverhalten des betrachteten Schadensmechanismus bei Feldbeanspruchung zu bestimmen. Das bedeutet, die Verfahren werden hinsichtlich ihrer Eignung zur Bestimmung der „wahren“ Zuverlässigkeit analysiert. Dies impliziert die Bestimmung des Formparameters, da dieser das Ausfallverhalten maßgeblich charakterisiert.

4.1 Kriterien

Für die Analyse werden ausschließlich „harte“ Kriterien definiert. Dies führt zu einer Wertung, die von produktspezifischen Randbedingungen, beispielsweise Kosten und Stückzahl, unabhängig ist. Auf „weiche“ Kriterien wird an dieser Stelle bewusst verzichtet, da eine Bewertung diesbezüglich unterschiedlich ausfallen würde. Die Kriterien lassen sich den Bereichen Information und Ergebnis zuordnen und haben unterschiedliche Ausprägung. Tabelle 4.1 fasst die Kriterien und deren Beschreibung zusammen.

Besonderes Augenmerk liegt auf dem Kriterium „Formparameter“. Die Ausprägung des Ergebnisses bezüglich des Formparameters kann entweder konstant, definiert oder kontinuierlich sein:

- Konstant bedeutet, dass ein von der Beanspruchung unabhängiger konstanter Formparameter ermittelt wird.
- Definiert steht für die bewusste Festlegung (Annahme) des Formparameters bei einer bestimmten Beanspruchung.
- Kontinuierlich bedeutet, dass der Formparameter als Funktion der Beanspruchung beschrieben werden kann.

Die mögliche Berücksichtigung der ausfallfreien Zeit ist ebenso elementar für Ermüdungsausfälle. Des Weiteren bekommen die benötigten als auch die nutzbaren Informationen größeres Gewicht.

Tabelle 4.1: Definition der Analysekriterien und ihre Ausprägungen

Bereich	Kriterium	Beschreibung	Ausprägung
Information	Informationsart	Welcher Art sind die Informationen die als Basis für die Anwendung des Ansatzes dienen?	quantitativ, qualitativ
	Testdurchführung	Ist die Durchführung von Tests für die Anwendung notwendig?	ja, nein
	Benötigte Information	Welche Informationen / Daten sind notwendig?	Aufzählung
	Nutzbare Information	Welche Informationen / Daten sind zudem nutzbar, um die Aussage zu verbessern?	Aufzählung
Ergebnis	Formparameter	Was für eine Aussage kann über den Formparameter getroffen werden?	konstant, definiert, kontinuierlich
	Ausfallfreie Zeit	Wird eine ausfallfreie Zeit berücksichtigt?	ja, nein
	Vertrauensbereich	Ist ein Vertrauensbereich darstellbar?	ja, nein
	Parametrisiertes Modell	Führt der Ansatz zu einem parametrisiertem Modell?	ja, nein

4.2 Konzepte und Methoden

Zu Beginn wird allgemein auf den Anwendungsbereich und die Durchführung von Lebensdauerversuchen eingegangen. Allgemeine Ausführungen hierzu gelten genauso für die darauf aufbauenden Arten der Degradationsversuche und beschleunigten Versuche. Anschließend wird auf die Ansätze, basierend auf Ausfallstatistiken, Literatur, Experten oder Materialeigenschaften, eingegangen.

4.2.1 Lebensdauerversuch

Ein klassisches Verfahren zur Bestimmung des Ausfallverhaltens von technischen Produkten ist die Durchführung von Lebensdauerversuchen [BeLe04]. Diese werden für einzelne Komponenten, aus denen auf die Zuverlässigkeit des gesamten Systems geschlossen wird (vgl. [Mai07], [SDJB11]) oder direkt als Systemversuch durchgeführt. Zur Bestimmung eines bestimmten Formparameters für eine spezielle Schadensart sind Komponentenversuche besser geeignet, da sich hier eine Schadensart einfacher und kosteneffizienter isoliert untersuchen lässt. Unter der Annahme unabhängiger Systemelemente ist dies für eine spätere Systembetrachtung mittels Boole'scher Theo-

rie ausreichend. Eine gründliche systematische Vorbereitung eines Lebensdauerversuchs ist, vor dem Hintergrund begrenzter Kapazitäten, dringend erforderlich (siehe [SDJB11]). Schlecht geplante Versuche verursachen schnell hohe Kosten und können nicht verwertbare Ergebnisse liefern.

In den nachfolgenden Abschnitten werden ergänzend noch degradierende und beschleunigte Verfahren erläutert. An dieser Stelle sei zunächst auf nicht-beschleunigte Lebensdauerversuche bis zum Ausfall eingegangen. Dabei werden Komponenten mit einer definierten Beanspruchungsart und -höhe bis zum Ausfall auf Prüfständen getestet. Tritt ein Ausfall ein, so muss zunächst mittels gründlicher Befundung geprüft werden, ob die entsprechende Schadensart auch eingetreten ist. Wurde anstatt einer Komponente ein System beansprucht, kann unter Umständen der Versuch wieder fortgeführt werden. Dies ist der Fall, wenn eine andere Schadensart an derselben Komponente oder dieselbe Schadensart an einer an anderer Stelle verbauten Komponente eingetreten ist. Nach erfolgter Reparatur bzw. Austausch der betroffenen Komponente kann somit der Versuch bzgl. der betrachteten Schadensart fortgesetzt werden. Das gemessene Merkmal ist situationsabhängig, beispielweise die Zeit oder die Lastwechselanzahl bei Ausfall der Komponente. Die Realisierung dieses Merkmals wird dokumentiert und für eine nachfolgende Analyse bereitgestellt.

Für die Durchführung von Lebensdauerversuchen werden ein Prüfstand bzw. Erprobungsträger⁹ mit Messtechnik (mindestens zur Erfassung des Ausfallzeitpunkts) sowie Prüflinge benötigt.

Bei der Entscheidung für Lebensdauerversuche müssen verschiedene Aspekte berücksichtigt werden: Lebensdauerversuche können sehr kostenintensiv sein. Beachtet werden müssen die Anschaffung der Prüflinge und des Prüfstands sowie dessen Betrieb. Prototypen für Lebensdauerversuche verursachen meist hohe Kosten und stehen in frühen Phasen eher für grundlegende Funktionstests zur Verfügung. Der Aufbau bzw. eine Anpassung von Prüfstand, Prototypenfertigung und Versuchsdurchführung kann viel Zeit in Anspruch nehmen. Der Stichprobenumfang in frühen Phasen ist eher klein und stellt somit eine schlechte statistische Basis dar. Die Aussage, basierend auf Prüflingen im Versuch, für das spätere Serienprodukt ist mit Unsicherheit behaftet, da streng genommen eine andere Grundgesamtheit vorliegt. Die Kenntnis bzw. die Bestimmung der Korrelation Feld-Versuch ist erforderlich (siehe [VDA00]). Seriennahe Versuche liefern erst sehr spät ein Ergebnis. Verbesserungen am Produkt sind nur noch mit großem Aufwand durchführbar. Seriennahe Versuche werden vorwiegend als Zuverlässigkeitsnachweistest durchgeführt, die lediglich eine Mindestzuverlässigkeit nachweisen („success run“, siehe [BeLe04]) und keine Information zum Ausfallverhal-

⁹ In der Automobilindustrie findet die Erprobung häufig im Fahrzeug statt.

ten liefern. Versuche werden auf einem definierten Beanspruchungsniveau durchgeführt und sind somit streng genommen nur hierfür gültig. Eine eventuell vorhandene Beanspruchungsabhängigkeit des Formparameters bezogen auf den untersuchten Schadensmechanismus kann ohne weitere Untersuchungen oder Erkenntnisse nicht erkannt werden.

Diesen Nachteilen steht der große Vorteil gegenüber, dass das Ergebnis auf belastbaren Daten basiert und je nach Prüfbedingungen mehr oder weniger das Ausfallverhalten im Feld widerspiegelt. Zudem kann im Versuch bei Verwendung einer Charge die inhärente Zuverlässigkeit (Zuverlässigkeit des designten Produktentwurfs) unabhängig von Streuungseinflüssen aus Fertigung oder Produktnutzung geschätzt werden. Bei Durchführung von Lebensdaueruntersuchungen mit mehreren Prüflingen, kann mittels analytischer Verfahren ein Vertrauensbereich angegeben werden. Seriennahe Versuche, insbesondere auf Feldbeanspruchungsniveau, versprechen eine zunehmende Aussagekraft der Ergebnisse für den späteren Feldeinsatz des Produktes. Eine zunehmende Annäherung des Prüfkollektivs an den Feldeinsatz verspricht gute Übereinstimmung mit dem „wahren“ Ausfallverhalten. Eine ausfallfreie Zeit kann unter Einhaltung der Kriterien, siehe Kapitel 2.2.3), bestimmt werden. Die Verteilungsparameter werden schließlich mittels üblicher Schätzmethoden (siehe Kapitel 2.5) ermittelt.

Tabelle 4.2 fasst die wirkenden Elemente bei Lebensdaueruntersuchungen zusammen.

Tabelle 4.2: Analyse Lebensdaueruntersuchung

Information	Einstellfaktoren	Störfaktoren	Ergebnis
- Prüfstand - Prüflinge	- Beanspruchungsniveau - Prüflingsanzahl - Verteilungstyp - Parameterschätzmethode - Vertrauensbereichsmethode (optional)	- Bauteilinhärente Streuung - Bauteilcharge - Versuchsstreuung	- Formparameter (konstant) - Lageparameter - Ausfallfreie Zeit - Vertrauensbereich (optional)

4.2.2 Degradationsversuch

Bei Degradationsversuchen [BeLe04], [MeEs98] wird im Gegensatz zu Lebensdaueruntersuchungen nicht bis zum Ausfall getestet, sondern ein – bei vielen Schadensmechanismen vorhandenes – fortschreitendes Merkmal, entweder fortlaufend oder zu diskreten Zeitpunkten während des Versuchs gemessen. Wird die Messung zu konkreten Zeitpunkten durchgeführt kann hierzu der Versuch auch unterbrochen werden. Das zu beobachtende Merkmal kann sowohl direkt oder auch indirekt gemessen werden. Eine indirekte Messung setzt die Kenntnis des Zusammenhangs zwischen dem gemessenen

und beobachteten Merkmal voraus. Ein Ausfall tritt dann ein, wenn das zu beobachtende Merkmal einen Wert erreicht, für welchen der Ausfall definiert ist. Eine Realisierung des Merkmals – der Ausfallzeitpunkt – kann auf zweierlei Arten gewonnen werden und somit eine nachfolgende Analyse des Ausfallverhaltens ermöglichen: Versuchsdurchführung bis zum definierten Ausfall oder mittels Extrapolation basierend auf seit Versuchsbeginn gemessenen Werten.

Zusätzlich zu Lebensdaueruntersuchungen bis zum Ausfall (siehe oben) wird für die Durchführung von Degradationsuntersuchungen Messtechnik zur Messung eines fortschreitenden Merkmals im Betrieb oder zu diskreten Zeitpunkten bei Unterbrechung des Versuchs benötigt. Dadurch steigt gegenüber den Lebensdaueruntersuchungen zwar der materielle/technische Aufwand, es bietet sich jedoch ein Zeit- und somit Kostenersparnispotential durch Extrapolation. Gleichzeitig nimmt die Unsicherheit des Extrapolationsmodells¹⁰ jedoch zu. Ein zunächst linearer Degradationsverlauf kann ab einem Schwellenwert weiter progressiv zunehmen, was eine zu optimistische Extrapolation zur Folge hätte. Dagegen führt eine später beginnende degressive Zunahme zu konservativen Realisierungen. In beiden Fällen wäre das Ausfallverhalten unzureichend beschrieben. Einem größeren Erkenntnisgewinn über die Entwicklung des Schadensmechanismus bei längerer Versuchsdauer bis zum Erreichen des Ausfallkriteriums oder sogar darüber hinaus steht die spätere Verfügbarkeit der Ergebnisse gegenüber; bei verkürzter Versuchsdauer vice versa. Ein großer Vorteil besteht somit in dem Mehrgewinn an Information durch Beobachten des fortschreitenden Merkmals, was zu einem verbesserten Verständnis des Schadensmechanismus führen kann.

Tabelle 4.3 fasst die wirkenden Elemente bei Degradationsuntersuchungen zusammen.

Tabelle 4.3: Analyse Degradationsversuch

Information	Einstellfaktoren	Störfaktoren	Ergebnis
<ul style="list-style-type: none"> - Prüfstand - Prüflinge mit Degradationsmerkmal 	<ul style="list-style-type: none"> - Messzeitpunktintervall - Degradationsmodell mit kritischem Wert - Beanspruchungsniveau - Prüflingsanzahl - Verteilungstyp - Parameterschätzmethode - Vertrauensbereichsmethode (optional) 	<ul style="list-style-type: none"> - Bauteilinhärente Streuung - Bauteilcharge - Versuchsstreuung - Messtechnik 	<ul style="list-style-type: none"> - Formparameter (konstant) - Lageparameter - Ausfallfreie Zeit - Testzeitverkürzung - Parametrisiertes Degradationsmodell - Vertrauensbereich (optional)

¹⁰ Extrapolation des Degradationsmerkmals über das Lebensdauermerkmal.

4.2.3 Beschleunigter Lebensdauerversuch

Beschleunigte Lebensdauerversuche (engl.: Accelerated Life Test; ALT) werden in der Entwicklungsphase vorwiegend eingesetzt, um zeitnah Informationen über die Zuverlässigkeit von Materialien, Komponenten oder Subsystemen zu erhalten. Ebenso können beschleunigte Versuche zur Zertifizierung, zur Aufdeckung möglicher Schäden und zum Vergleich verschiedener Hersteller (oder auch Lieferanten) genutzt werden [MeEs98], [Yan07]

Bei beschleunigten Versuchen wird, gegenüber oben beschriebenen Lebensdauerversuchen, das Versuchsende durch verschärfte Prüfbedingungen frühzeitig erreicht. Dafür wird entweder durch erhöhte Beanspruchung oder durch häufigere Aufbringung sich wiederholender Beanspruchungen ein Ergebnis erzielt. Nach Norm [DIN14] kann die beschleunigte Prüfung auf qualitative oder quantitative Art und Weise durchgeführt werden. Qualitative Verfahren zielen dabei auf die Erkennung von potentiellen Schwachstellen ab. Bei Verfahren der quantitativen Art werden die Ergebnisse nachfolgend genutzt, um Aussagen für das Ausfallverhalten abzuleiten. Aus Sicht des Produktlebenszyklus unterscheidet Yang zudem in „design ALT“, „qualification ALT“ und „production ALT“ [Yan07], welche zum Ziel haben die Produktzuverlässigkeit „zu steigern“, nachzuweisen oder „zu halten“. Die Verfahren der quantitativen Art lassen sich nach [DIN14] unterteilen in die beschleunigte Prüfung durch erhöhte Beanspruchung, Zeit- und Ereigniskompression. Des Weiteren schlägt Nelson eine Beschleunigung infolge Größenvariation vor [Nel90], [Nel04a] (S. 385f), welches von [BaYu96] verallgemeinert wird. Bei Verschärfung der Prüfbedingungen ist vor dem Hintergrund einer quantitativen Prüfung stets darauf zu achten, dass der Schadensmechanismus derselbe bleibt. Vorversuche können hierbei nützlich sein, um Grenzen zu identifizieren, bei denen sich der auftretende Schadensmechanismus grundlegend ändert. Hierfür können speziell auch beschleunigte Prüfungen qualitativer Art wie der „Highly Accelerated Life Test“ [Yan07] (S. 326f) genutzt werden.

In dieser Arbeit sind „qualification ALTs“ (nach [Yan07]) von Bedeutung, da sie eine Zuverlässigkeitsschätzung und folglich eine Bestimmung der Weibullparameter von Prototypen als auch seriennahen Produkten erlauben. Jedoch sind quantitative beschleunigte Versuche (ALT) prinzipiell schwer auf Produkte anzuwenden, da ihre Bauteile und Materialien meist komplex miteinander kombiniert sind; sie sind vielmehr geeignet, um die Lebensdauerverteilung – und damit beispielsweise die Weibullparameter – von einfachen Bauteilen und Materialien zu schätzen [MeEs98]. Die aus den beschleunigten Versuchen quantitativer Art erhaltenen Lebensdauern stellen grundsätzlich das Ausfallverhalten bei bestimmten Prüfbedingungen, sprich einer bestimmten Beanspruchung, dar. Die Beanspruchung kann hierzu beispielsweise einstufig aufgebracht werden oder in mehreren Stufen schrittweise erhöht werden. Im Fall

der Beschleunigung durch erhöhte Beanspruchung ist ein Lebensdauermodell (engl.: life-stress model; L-S Modell) notwendig, um einen Raffungsfaktor zu bestimmen und Aussagen über das Ausfallverhalten bei anderen Beanspruchungen, wie der Feldbeanspruchung, zu treffen. Jakob et al. [JKB15] stellt eine Methodik zur Auswahl solcher Modelle vor. Das Lebensdauermodell muss parametrisiert werden, was Versuche auf mindestens zwei verschiedenen Beanspruchungsniveaus erfordert. Die Anwendung des Lebensdauermodells führt für das gesuchte Beanspruchungsniveau zu einer B_q -Lebensdauer. Hierzu wird in der Regel über den Bereich der Versuchsergebnisse hinaus extrapoliert, jedoch unter Beachtung des Gültigkeitsbereichs des parametrisierten Modells. Hinzu kommt die Schwierigkeit bei der Übertragung auf das Feldniveau durch die Korrelation zwischen Versuch und Feld [VDA00]. Die Lebensdauermodellparametrisierung, basierend auf den Versuchsergebnissen, erfolgt meist in der Annahme, dass der Formparameter für den Schadensmechanismus konstant bleibt, unabhängig von der Beanspruchung [Yan07]. Diese Annahme stützt sich auf Erfahrungen, die in der Vergangenheit eine gute Modellanpassung zeigten und ist zudem auf den leichteren Umgang zurückzuführen [Nel04a]. In der Regel ist in vielen programmtechnischen Umsetzungen diese Annahme, für den Anwender unveränderbar, implementiert. In Folge dessen wird eine womöglich vorhandene Beanspruchungsabhängigkeit des Formparameters nicht beachtet.

Ob die Annahme statistisch gerechtfertigt ist, lässt sich mit verschiedenen statistischen Testverfahren überprüfen. Hierbei kann beispielsweise ein Chi-Quadrat-Test auf gleichen Formparameter durchgeführt werden (siehe Likelihood-Ratio Test auf gleichen Formparameter in [MeEs98]). Meeker & Escobar [MeEs98] und Yang [Yan07] empfehlen diese Annahme grundsätzlich durch einen Vergleich von empirischer kumulierter Ausfallwahrscheinlichkeit zur parametrisierten Verteilung bzw. durch eine Gegenüberstellung von gemeinsamen und individuellen Formparametern zu validieren.

Eine ausreichende Kenntnis über den betreffenden Schadensmechanismus erlaubt die Parametrisierung eines Lebensdauermodells basierend auf physikalischer / chemischer Theorie, wie dem „Inverse Power Law“ oder dem Arrheniusmodell. Dagegen ist bei geringer Kenntnis lediglich ein empirisches Modell möglich, welches eine gute Anpassung, aber auch unsinnige Extrapolationen liefern kann. [MeEs98]

Lebensdauermodelle, welche eine ausfallfreie Zeit berücksichtigen, gibt es nicht (siehe Kapitel 2.4). Folglich wird auf allen Beanspruchungsniveaus von einer zweiparametrischen Verteilung ausgegangen.

Gegenüber den oben beschriebenen Lebensdauerversuchen ist der Aufwand größer: Der Prüfstand muss bessere Performanceeigenschaften aufweisen, um eine erhöhte Beanspruchung abbilden zu können. Mindestens zwei Versuchsreihen auf unterschied-

lichen Niveaus werden benötigt. Generell ist eine vertiefte Produktkenntnis über mögliche Schäden und Beanspruchungen, sowie zur Bestimmung von Versuchsniveaus und / oder Vorversuchen erforderlich [MeEs98]. Ebenso sind vertiefte statistische Kenntnisse zur Planung und Analyse der Versuche notwendig. Ein statistischer Streubereich auf Basis der Datenmenge berücksichtigt vorhandene Modellunsicherheiten nicht. Dies kann bei weitreichender Extrapolation von Bedeutung¹¹ sein [MeEs98], da der Streubereich für Feldprognosen zunimmt. Bei Produktunterschieden zwischen Prototypen und in der Linie nach SOP gefertigten Produkten, kann dies insbesondere bei beschleunigten Versuchen zu falschen Schlüssen führen [MeEs98]. Werden ausschließlich beschleunigte Versuche durchgeführt, kann dies dazu führen, dass bei erhöhter Beanspruchung ein Schadensmechanismus einen anderen verdeckt. Letzterer kommt hingegen bei Feldbeanspruchung wieder zum Vorschein [MeEs98].

Positiv ist besonders die deutliche Zeitreduktion aufgrund der Beschleunigung, sowohl durch Beanspruchungserhöhung als auch durch Emittieren von beanspruchungslosen bzw. nichtrelevanten Phasen. Dies führt zu früher verfügbaren Ergebnissen und folglich zu einer Kostenreduktion. Werden angemessene physikalische Lebensdauermodelle verwendet kann eine hohe Genauigkeit bei Extrapolation erzielt werden [MeEs98].

Tabelle 4.4 fasst die wirkenden Elemente bei beschleunigten Lebensdauerversuchen zusammen.

Tabelle 4.4: Analyse beschleunigter Lebensdauerversuch

Information	Einstellfaktoren	Störfaktoren	Ergebnis
<ul style="list-style-type: none"> - Prüfstand - Prüflinge 	<ul style="list-style-type: none"> - L-S Modell - Beanspruchungsniveaus - Prüflingsanzahl - Verteilungstyp - Parameterschätzmethode - Vertrauensbereichsmethode (optional) 	<ul style="list-style-type: none"> - Andere Schadensmechanismen - Bauteilinhärente Streuung - Bauteilcharge - Versuchsstreuung 	<ul style="list-style-type: none"> - Formparameter (konstant) - Beanspruchungsabhängiger Lageparameter - Testzeitverkürzung - Parametrisiertes L-S Modell - Vertrauensbereich (optional)

4.2.4 Beschleunigter Degradationsversuch

Beschleunigte Degradationsversuche [MeEs98] verbinden die Vorteile der Degradationsversuche bei Feldbeanspruchung und derer der beschleunigten Lebensdauerversu-

¹¹ Eine Sensitivitätsanalyse bietet Abhilfe zur Bewertung dieser Unsicherheiten.

che. Dies führt in kürzerer Zeit zu einem Ergebnis ohne einen Ausfall. Der größte Vorteil gegenüber beschleunigten Lebensdauerversuchen stellt sich bei niedrigen (wenig erhöhten) Beanspruchungsniveaus dar. Wenn ein fortschreitendes Merkmal (siehe Degradationsversuch, Kapitel 4.2.2) gemessen werden kann und keine Ausfälle auftreten, können mittels der Degradationsdaten mehr Informationen gewonnen werden und folglich mit größerem Vertrauen extrapoliert werden [MeEs98].

Tabelle 4.5 fasst die wirkenden Elemente bei beschleunigten Degradationsversuchen zusammen.

Tabelle 4.5: Analyse beschleunigter Degradationsversuch

Information	Einstellfaktoren	Störfaktoren	Ergebnis
<ul style="list-style-type: none"> - Prüfstand - Prüflinge mit Degradationsmerkmal 	<ul style="list-style-type: none"> - Messzeitpunktintervall - L-S-Degradationsmodell - Beanspruchungsniveaus - Prüflingsanzahl - Verteilungstyp - Parameterschätzmethode - Vertrauensbereichsmethode (optional) 	<ul style="list-style-type: none"> - Andere Schadensmechanismen - Bauteilinhärente Streuung - Bauteilcharge - Versuchsstreuung - Messtechnik 	<ul style="list-style-type: none"> - Formparameter (konstant) - Beanspruchungsabhängiger Lageparameter - Testzeitverkürzung - Parametrisiertes L-S-Degradationsmodell - Vertrauensbereich (optional)

4.2.5 Cox-Proportional-Hazard-Modell

Sind die physikalischen Zusammenhänge eines Schadensmechanismus bekannt, kann ein L-S Modell (vgl. beschleunigte Versuche) aufgestellt werden. Sind jedoch Systemzusammenhänge intransparent, dann können gegenseitige Abhängigkeiten und Selbstverstärkungseffekte auftreten, die nicht bekannt sind. Hierfür eignen sich statistische Modelle, welche Lebensdauern mit Zufallsvariablen verknüpfen. Dies ermöglicht die Schätzung unbekannter Variablen, ohne dass physikalische Gesetzmäßigkeiten benötigt werden bzw. bekannt sein müssen. Geeignete Modelle sind Regressionsmodelle, wie das Cox-Proportional-Hazard-Modell [Cox72] (kurz: Cox-Modell). Dieses beschreibt mittels Kovariablen verschiedene messbare bzw. beobachtbare Einflussgrößen. Die Einflussgrößen charakterisieren die Unterschiede bezüglich der getesteten Komponenten und aufgebrauchten Lastprofile. Das Prüfobjekt und die Umweltbedingungen sind folglich durch die Kovariablen definiert. Das Cox-Modell eignet sich somit speziell für heterogene Populationen von Systemen [BSDJ13]. Dies ermöglicht die Lebensdauer unterschiedlicher technischer Systeme mit ähnlichen Komponenten oder Lastprofilen zu beschreiben. Die Verknüpfung der Kovariablen mit der Lebensdauer-Verteilung wird durch die sogenannte Intensität (ähnlich der Ausfallrate) modelliert.

Diese Intensität ist das Produkt einer Basisausfallrate als Funktion des Lebensdauermerkmals und einer Exponentialfunktion mit den linearen Kovariablen. Sie ist somit proportional zu den Kovariablen. [BSDJ13], [BDJS11]

Nach Schätzung der Regressionsparameter können schließlich für ein definiertes Set an Kovariablen B_q -Lebensdauern ermittelt und damit wiederum Verteilungsparameter abgeleitet werden. Das Cox-Modell ist zwar unflexibler als beispielsweise das Aalen-Modell, jedoch zeigt es bei kleineren Stichprobenumfängen eine gute Anpassung [BSDJ13]. Prognosen sind auch für nicht getestete Komponenten und Lastfälle möglich. Es ist damit geeignet für frühe Phasen, wenn Daten von ähnlichen Komponenten bei abweichenden Einsatzbedingungen, wie es bei Vorgängerprodukten oft der Fall ist, vorhanden sind.

Tabelle 4.6 fasst die wirkenden Elemente beim Cox-Proportional-Hazard-Modell zusammen.

Tabelle 4.6: Analyse Cox-Proportional-Hazard-Modell

Information	Einstellfaktoren	Störfaktoren	Ergebnis
<ul style="list-style-type: none"> - Prüfstand - Prüflinge oder - Lebensdauerdaten technologisch vergleichbarer Komponenten - Zugehörige Einsatzbedingungen (Lastfälle) 	<ul style="list-style-type: none"> - Kovariablen (mess- oder beobachtbar) - Prüflingsanzahl 	<ul style="list-style-type: none"> - Ähnlichkeit der Komponenten und Lastfälle - Auswahl der Kovariablen 	<ul style="list-style-type: none"> - Formparameter (kontinuierlich) - Beanspruchungsabhängiger Lageparameter - Testzeitverkürzung - Parametrisiertes Cox-Modell

4.2.6 Felddatenanalyse

Eine Felddatenanalyse entspricht in weiten Teilen einem Lebensdauer-versuch. Die Analyse von Felddaten stellt prinzipiell – gegenüber dem Versuch – eine sehr gute Möglichkeit dar, eine realitätsnahe Abbildung des Ausfallverhaltens zu erhalten. Jedoch enthalten Felddaten meist Unsicherheit (vgl. [VDA00]). Die Schwierigkeit besteht in der Regel darin, die Daten entsprechend zu gewinnen und aufzubereiten. Die Qualität der Auswertung hängt maßgeblich von den verwendeten Daten ab; eine schlechte Aufbereitung kann nicht mehr ausgeglichen werden [VDA00].

Verwendbare Datenquellen, sowie die Datenerfassung werden ausführlich in [VDA00] beschrieben. In Abhängigkeit der Datenlage – zensiert und/oder unvollständig – stehen analytische Auswerteverfahren zur Verfügung (siehe [VDA00], [BeLe04], [Del07]), die schließlich zu einer parametrisierten Lebensdauer-Verteilung führen. Da diese stets

für bestimmte Umwelt- und Einsatzbedingungen gilt, kommt es zu Problemen. Ohne eine Differenzierung der Daten kann somit keine – im Feld real vorkommende – Abweichung von diesen Umwelt- und Einsatzbedingungen einzelner Applikationen berücksichtigt werden. Die Aussage über das Ausfallverhalten – gewonnen aus den Felddaten – gilt somit unabhängig von den eigentlich auftretenden Beanspruchungen pauschal für eine „gemittelte“ Feldbeanspruchung.

Dem Vorteil der real gewonnen Daten steht der zeitliche Verzug gegenüber. So fließen Felddaten aus Vorgängerprodukten meist in die laufende Entwicklung von Nachfolgerprodukten mit ein. Dies führt zwangsläufig zu einer veränderten Grundgesamtheit. In frühen Phasen ist die Nutzung von Felddaten für Abschätzungen üblich [BGJ+09].

Tabelle 4.7 fasst die wirkenden Elemente bei der Felddatenanalyse zusammen.

Tabelle 4.7: Analyse Felddatenanalyse

Information	Einstellfaktoren	Störfaktoren	Ergebnis
<ul style="list-style-type: none"> - Felddaten - Ausgelieferte Menge (Zensierungsanteil) - Laufleistung intakter Einheiten (optional) 	<ul style="list-style-type: none"> - Verteilungstyp - Parameterschätzmethode - Vertrauensbereichsmethode (optional) 	<ul style="list-style-type: none"> - Bauteilinhärente Streuung - Bauteilcharge - Unscharfe Feldbeanspruchung - Abweichende Einsatzbedingungen - Abweichende Umweltbedingungen 	<ul style="list-style-type: none"> - Formparameter (konstant) - Lageparameter - Ausfallfreie Zeit - Vertrauensbereich (optional)

4.2.7 Literaturwissen

Literaturwissen umfasst Standardwerke, Veröffentlichungen, Ausfallratenkataloge und Datenbanken. Angaben zu Formparametern lassen sich in diesen direkt finden oder können bei Bedarf aus dargestellten Daten ermittelt werden. Damit ist mittels Literatur ein einfacher und schneller Informationsgewinn möglich, welcher jedoch mit Vorsicht zu genießen ist. Wie in Kapitel 2.2 erläutert, sind die Verteilungsparameter von mehreren Einflussfaktoren abhängig, die meist nur unzureichend dokumentiert und oft abweichend von der eigenen Anwendung sind. Folglich ist die Information auch nur mit Unsicherheit übertragbar. Ausfalldaten verschiedenster „ähnlicher“ Bauteile oder abweichende Einsatz- und Umgebungsbedingungen werden zunehmend vermengt. Diese Vermengung resultiert dann zunehmend in einer konstanten Ausfallrate¹² [HaSt03], d. h. $\beta \rightarrow 1^+$. Ausfallratenkataloge als Zuverlässigkeitsdatenquelle sind eingehend von

¹² dies ist analog zum Ausfallverhalten komplexer Systeme, die bei verschiedenen Schadensmechanismen zum Tragen kommen [Abe06] (S. 1-7).

Leopold [Leo12] und Otte [Ott06] beschrieben. Aufbauend auf Basisausfallraten können teils Einsatz- und Umgebungsbedingungen Berücksichtigung finden. Nach [Leo12] weichen die in verschiedenen Katalogen angegebenen Ausfallraten beispielsweise für ein 64K-Arbeitspeicher um Faktor 7 voneinander ab. Datenbanken, wie die Zuverlässigkeitsdatenbank am Institut für Maschinenelemente der Universität Stuttgart (ZuDIMA), fassen Verteilungsparameter, wie den Formparameter und den f_{tB} -Faktor, aus Schadensstatistiken und publizierten Lebensdauerdaten typischer Maschinenelemente zusammen. Hierbei ist beispielsweise für Zahnräder und Wellen, bedingt durch streuende Einflussgrößen, ein Parameterbereich angegeben. Insbesondere wurde dabei ein tendenzieller Zusammenhang von Belastung und Formparameter beobachtet (siehe Kapitel 2.3). Wichtige Standardwerke, welche typische Formparameter zusammenfassen und somit erste grobe Abschätzungen erlauben, sind von Abernethy [Abe06], Bertsche & Lechner [BeLe04] sowie Nelson [Nel04b]. Eine öffentlich im Internet zugängliche Zusammenstellung von Weibullparametern für verschiedene Komponenten stellt Barringer & Associates, Inc. [BaBe15] zur Verfügung, jedoch wird explizit auf deren vorsichtigen Gebrauch hingewiesen.

Schließlich führt Literaturwissen zwar zu einem Verteilungsparameter, kann aber nur zu einer tendenziellen Abschätzung verwendet werden. Tabelle 4.8 fasst die wirkenden Elemente bei Verwendung von Literaturwissen zusammen.

Tabelle 4.8: Analyse Literaturwissen

Information	Einstellfaktoren	Störfaktoren	Ergebnis
Falls keine Parameter, sondern Lebensdauerdaten vorliegen: - Lebensdauerdaten mit umfangreichen Randbedingungen	Falls keine Parameter, sondern Lebensdauerdaten vorliegen: - Verteilungstyp - Parameterschätzmethode - Vertrauensbereichsmethode (optional)	- Unvollständige Randbedingungen (Form, Werkstoff, Bearbeitung, Belastung)	- Formparameter (definiert) - Ausfallfreie Zeit Falls keine Parameter, sondern Lebensdauerdaten vorliegen: - Vertrauensbereich (optional)

4.2.8 Expertenwissen

Expertenwissen gehört im Gegensatz zu Literaturwissen zu nichtdokumentierten Quellen. Es wird häufig in frühen Phasen verwendet, wenn keine Daten vorhanden und dennoch Zuverlässigkeitsprognosen durchzuführen sind. Jedoch kann es auch später im Laufe der Entwicklung zum Einsatz kommen und beispielsweise als Vorwissen in der Bayes'schen Theorie angewandt werden. Probleme im Umgang und bei der Anwendung von Expertenwissen sind in [BGJ+09] und [JäBe04] beschrieben. Die Idealvorstellung wäre eine belastbare Angabe des Ausfallverhaltens. Bei zugrundeliegender

Weibullverteilung wären dies deren Verteilungsparameter. Dieser Fall ist jedoch eher unwahrscheinlich. In der Regel können Experten lediglich einfachere Angaben machen, wie erster und letzter Ausfall, Maxima und Mittelwerte oder Wahrscheinlichkeiten [JäBe04]. Um Verteilungsparameter zu erhalten, liefern Jäger & Bertsche [JäBe04] einen Ansatz, welcher es ermöglicht, aus den genannten einfacheren Expertenangaben die Parameter einer dreiparametrischen Weibullverteilung indirekt zu ermitteln. Dies wird durch Aufstellen von hierfür notwendigen drei Gleichungen erreicht. Eine Case Study fokussiert zusätzlich die Auswirkung von Ungenauigkeiten der Angaben auf die Parameter. Expertenwissen wird verwendet, um die minimale und maximale Ausfallzeit bei gegebenem Stichprobenumfang für eine bestimmte Komponente anzugeben. Die Informationen werden anschließend für die Berechnung des Formparameters β verwendet. Hierbei ist der Formparameter für alle Beanspruchungsniveaus als konstant angenommen. Angewandt wird diese Methode von Lanza et al. [LWN09]. Einen weiteren Ansatz zur Modellierung von Expertenwissen im Bereich der Softwarezuverlässigkeit liefert [MBB07].

Der größte Nachteil ist, dass jegliche Aussagen von Experten auf ihrem Wissen und ihrer Erfahrung beruhen. Beides ist jedoch nicht weiter quantifiziert, d. h., inwiefern die Aussagen vertrauenswürdig sind, ist nicht definiert. Die Einschätzung der Vertrauenswürdigkeit bleibt damit eine subjektive Entscheidung. Tabelle 4.9 fasst die wirkenden Elemente bei Verwendung von Expertenwissen zusammen.

Tabelle 4.9: Analyse Expertenwissen

Information	Einstellfaktoren	Störfaktoren	Ergebnis
<ul style="list-style-type: none"> - Spezialisten, Experten, Fachpersonal, ... - Verbale (qualitative) Ausdrücke / spezifische Angaben - Lebensdauern, Mittelwerte, Wahrscheinlichkeiten, Parameter 	<ul style="list-style-type: none"> - Auswahl der Experten 	<ul style="list-style-type: none"> - Psychologische Aspekte (Sender-Empfänger) - Unscharfe Angaben (Gleichverteilung „von-bis“) 	<ul style="list-style-type: none"> - Formparameter (definiert) - Lageparameter - Ausfallfreie Zeit

4.2.9 Streuende Werkstoffkennwerte

Guérin [Gué01] zeigt eine Möglichkeit wie der Formparameter ausgehend von Werkstoffkennwerten und einem Lebensdauermodell beanspruchungsabhängig beschrieben werden kann. Ziel dabei ist es – wenn in frühen Phasen keine Versuchsdaten o. ä. vorliegen – nicht auf Literatur- oder Expertenwissen zurückgreifen zu müssen, sondern statistisch gesicherte Werkstoffkennwerte und anerkannte mechanische Lebensdauermodelle zu nutzen. Der physikalische Zusammenhang (hier: Ermüdung, Wöhler) muss

bekannt sein. Neben der Zugfestigkeit und Dauerfestigkeit sowie deren Streuungen, welche bekannt sein müssen, wird in seinem Beispiel das Basquin-Modell genutzt, um am Ende auf den Formparameter für Beanspruchungen im Zeitfestigkeitsbereich schließen zu können.

Das Vorgehen ist wie folgt: Wöhlerkurven gleicher Ausfallwahrscheinlichkeit sind definiert durch die Zugfestigkeit und die Dauerfestigkeit und ihrer jeweiligen normalverteilten Streuung (bzgl. der Spannung bei definierter Lastwechselzahl). Das heißt, die beiden Verteilungen an diesen charakteristischen Punkten kennzeichnen die Streuung der Ausfallwahrscheinlichkeit im Zeitfestigkeitsbereich. Für eine bestimmte Ausfallwahrscheinlichkeit können bei bekannter Streuung der normalverteilten Werkstoffkennwerte charakteristische Punkte berechnet werden. Damit wird die Berechnung der ertragbaren Lastwechselzahlen für verschiedene Ausfallwahrscheinlichkeiten bei einer gegebenen Spannung mittels der Basquin-Gleichung ermöglicht. Werden hierbei jeweils für die Ausfallwahrscheinlichkeiten 16 %, 50 % und 84 % die Lastwechselzahlen berechnet, können aus den Lastwechselzahlen und deren Differenz der Mittelwert und die Standardabweichung der Log-Normalverteilung bestimmt werden.

Sind der Mittelwert und die Standardabweichung der Log-Normalverteilung bei betrachteter Spannung bekannt, kann nach [Gué01] mit den Gleichungen für den Erwartungswert und die Varianz der Weibullverteilung das Gleichungssystem für die Weibullparameter β und η gelöst werden.

Die richtige Annahme der Materialeigenschaften ist ein entscheidender Faktor. Schwierigkeiten können auftreten bei der Bestimmung der Materialeigenschaften bei einer bestimmten Temperatur. Ein Beispiel für Materialcharakteristik als Funktion der Temperatur ist in [TGD01] gegeben. Hier sind die Zugfestigkeit und die Dauerfestigkeit nicht monoton über der Temperatur.

Nachteil dieser Methode ist, dass sie stark von der Güte des Lebensdauermodells und von den anhand von genormten Werkstoffproben gewonnenen Werkstoffkennwerten abhängig ist.

Tabelle 4.10 fasst die wirkenden Elemente bei Verwendung von streuenden Werkstoffkennwerten zusammen.

4.3 Einflüsse bei Verwendung von Lebensdauerdaten

Bei Verwendung von Ansätzen auf Basis von Lebensdauerdaten sind drei Aspekte von besonderer Bedeutung: der Datenursprung, die Betrachtungsebene und die verwendete Software bei der Analyse.

Tabelle 4.10: Analyse streuender Werkstoffkennwerte

Information	Einstellfaktoren	Störfaktoren	Ergebnis
Werkstoffdaten - N und σ_a von Zugfestigkeit und Dauerfestigkeit - Streuung der Zugfestigkeit und Dauerfestigkeit	- L-S Modell (Basquin) - Gegebene Ausfallwahrscheinlichkeit	- unpassende Werkstoffangaben - Modellungenauigkeit	- Formparameter (kontinuierlich) - Beanspruchungsabhängiger Lageparameter - Parametrisiertes L-S Modell für bestimmte Ausfallwahrscheinlichkeit - Allg. Modellgleichung für Formparameter als Funktion des Variationskoeffizienten

4.3.1 Einfluss des Datenursprungs

In ihrer Studie [JiMu11] verweisen Jiang & Murthy darauf, dass der Ursprung der Daten einen Einfluss bei der Bestimmung auf den Formparameter haben kann. Sofern im Feld über der Zeit die Nutzung variiert, kann dies zu einer größeren Streuung der Lebensdauer und folglich zu einem kleineren Formparameter führen. Das heißt, wird die Weibullverteilung aus Felddaten geschätzt – mit variierender Nutzung – ist der Formparameter kleiner als wenn er aus Versuchsdaten – unter kontrollierten Bedingungen – geschätzt wird. Weiter ist der Formparameter, dessen Schätzung auf Ausfalldaten unter kontrollierten Versuchsbedingungen basiert, als der Formparameter der inhärenten Zuverlässigkeit¹³ zu verstehen.

Yang [Yan07] weist darauf hin, dass in der Entwurfsphase Prototypen verwendet werden, deren Fertigungsprozess Änderungen unterworfen ist. Die Prozessstreuung bei Serienproduktion ist in der Nullserie nicht vorhanden. Versuche in dieser Phase führen somit zu einer optimistischeren Zuverlässigkeitsaussage, während der Kunde die „wahre“ Zuverlässigkeit erfährt. Ein Zuverlässigkeitstest am Entwicklungsende gilt als repräsentativ für das Feld, wenngleich durch Stichprobenproduktion innerhalb kurzer Zeit bzw. einer Charge keine Prozessstreuung der Serienproduktion abgedeckt wird.

4.3.2 Einfluss der Betrachtungsebene

Verschiedene Fehlerursachen führen bei identischer Form, Werkstoff und Bearbeitung je nach Belastung schließlich zu ein und derselben ausfallrelevanten Schadensart.

¹³ Inhärente Zuverlässigkeit entspricht der Zuverlässigkeit wie das Produkt entworfen wurde mit Berücksichtigung zulässiger Streuung in der Produktion; eine Streuung der Belastung wird nicht berücksichtigt.

So sind beispielsweise in der DIN 3979 [DIN79] verschiedene Formen von Rissen an Zähnen als Schadensarten definiert, welche im fortlaufenden Betrieb zu einem Dauerbruch führen, siehe Bild 4.2. Ebenso kann sich ein anfänglicher Grübchenschaden zu einem Dauerbruch entwickeln.

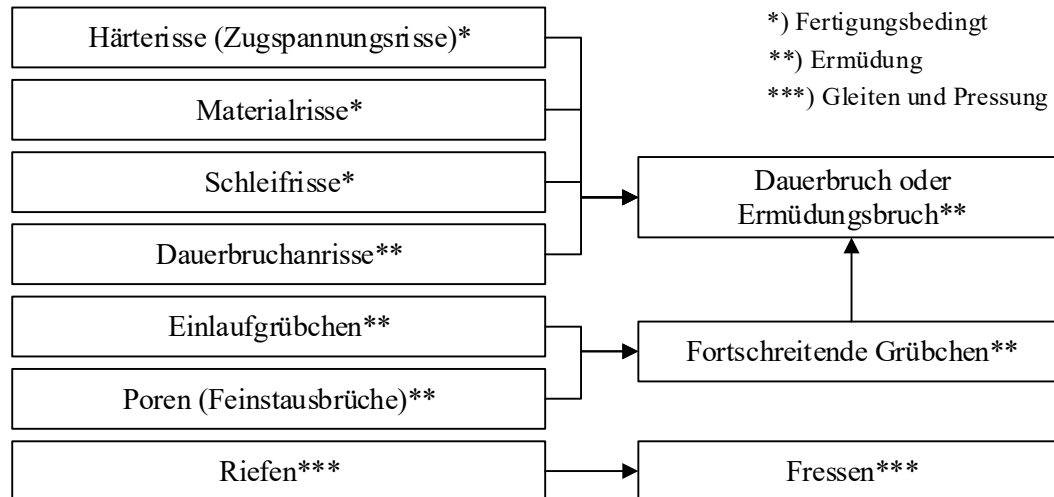


Bild 4.2: Zusammenhang einzelner Schadensarten

Werden bei einer Lebensdauerdatenanalyse Ausfälle betrachtet, die lediglich als Ermüdungsbruch gekennzeichnet sind, ist aufgrund der Anzahl an möglicher Fehlerursachen eine größere Streuung erkennbar, als wenn Ermüdungsbrüche differenziert nach den jeweiligen Fehlerursachen betrachtet werden würden.

4.3.3 Einfluss der Softwareunterstützung

Bei der Auswertung von Daten wird zur Schätzung der Verteilungsparameter (siehe Kapitel 2.5) in der Regel Softwareunterstützung verwendet. Dies führt allein aufgrund der unterschiedlichen Methoden zu verschiedenen Ergebnissen. Besonders bei kleinen Stichprobenumfängen werden Unterschiede deutlich, welche bei großen Stichprobenumfängen vernachlässigbar klein sind. Hinzu kommt, dass bei vorliegenden zensierten Daten die Methoden die Angaben der nicht ausgefallenen Teile gar nicht oder nicht gleichermaßen berücksichtigen können.

Bekanntes Softwares zur Auswertung von Zuverlässigkeitsdaten sind z. B. Weibull++¹⁴, Minitab¹⁵, CRGRAPH Visual-XSel 12.1¹⁶ und Sysleb¹⁷. Die verschiedenen Softwarepakete bieten nur teilweise die gleichen bekannten Parameterschätzmethoden zur Auswahl, siehe Tabelle 4.11.

¹⁴ ReliaSoft Corporation, siehe <http://www.reliasoft.de/>.

¹⁵ Minitab Inc., siehe <http://www.minitab.com/>.

¹⁶ CRGRAPH, siehe <http://www.crgaph.de/>.

¹⁷ Institut für Maschinenelemente, siehe <http://www.ima.uni-stuttgart.de/>.

Tabelle 4.11: Parameterschätzmethoden verschiedener Software [Sch14]

Software	für zwei Parameter	für drei Parameter
Weibull++9	RRX, RRY, MLE	NLRR, MLE, MLE 2+1
Minitab 17	RRX, MLE	RRX, MLE
CRGRAPH Visual-XSel 12.1	RRX, RRY, MLE	RRX, RRY, MLE
SYSLEB	RRY, MLE	RRY, MLE

Die Auswertung ergibt jedoch teils unterschiedliche Ergebnisse. Bei den Parameterschätzmethoden für zwei Parameter zeigen die Ergebnisse der Rang-Regression nach X bzw. Y (RRX bzw. RRY) eine kleine Abweichung des Formparameters bereits bei der ersten Nachkommastelle [Sch14]. Die Rang-Regression in SYSLEB entspricht einer RRY [Sch14]. Die Ursachen für die Abweichungen sind in Tabelle 4.12 zusammengefasst. Die Ergebnisse der MLE für Weibull++ 9, Minitab 17 und CRGRAPH Visual-XSel 12.1 sind nahezu identisch.

Tabelle 4.12: Ursachen der Abweichungen bei der Rang-Regression [Sch14]

Software	Abweichung durch
Weibull++9	exakte Berechnung (Referenz)
Minitab 17	Medianränge mit Näherungsformel
CRGRAPH Visual-XSel 12.1	Medianränge mit Näherungsformel, Rundung auf drei Nachkommastellen
SYSLEB	Verwendung von ganzen Zahlen als Ausfallzeiten, Medianränge mit Näherungsformel

Die einzelnen Methoden RRX, RRY und MLE der Softwarepakete, angewandt für drei Parameter, führen im Vergleich zu nahezu dem identischen Ergebnis. Es zeigte sich, dass MLE 2+1 die ausfallfreie Zeit der nichtlinearen Rang-Regression (NLRR) verwendet (vgl. [Rel03]). Während die Rang-Regressionen von Minitab 17, CRGRAPH Visual-XSel 12.1 und SYSLEB alle auf eine Methode zur Maximierung des Korrelationskoeffizienten zurückgreifen, verwendet Weibull++ einen optimierten Nelder-Mead Algorithmus. Dabei wird γ so berechnet, dass alle Ausfallzeiten in etwa auf einer Geraden liegen. Mit den angepassten Ausfallzeiten werden dann die anderen Parameter berechnet. Dies führt teils zu erheblichen Abweichungen ($\Delta\beta > 1,0$) der NLRR gegenüber den Regressionen der anderen Softwarepakete. [Sch14]

Dies verdeutlicht die Bedeutung der Rohdaten. Werden Verteilungsparameter auf Basis von Lebensdauerdaten verwendet und es sind keine Informationen über die Schätzmethode und benutzte Software vorhanden, sollten stets – sofern möglich – die Rohdaten betrachtet und eine eigene Analyse durchgeführt werden.

4.4 Ableiten eines Formparameters

Neben den oben im Fokus stehenden Konzepten und Methoden kann ein Formparameter auch bei Kenntnis anderer Parameter abgeleitet werden.

4.4.1 Transformation der Standardabweichung logarithmierter Merkmale

Daten folgen in einigen Fällen einer Log-Normalverteilung am besten und werden daher mittels Log-Normalverteilung beschrieben oder die Analyse mit der Log-Normalverteilung ist schlichtweg etabliert, wie bei Betriebsfestigkeitsbetrachtungen [Hai06]. Um in diesen Fällen auf den Formparameter der Weibullverteilung zu schließen, muss die geschätzte Standardabweichung der logarithmierten Lebensdauermerkmale transformiert werden. Falls die Rohdaten zur Verfügung stehen, kann alternativ eine Analyse mit zugrundeliegender Weibullverteilung durchgeführt werden. Da beide Verteilungen nicht aus derselben mathematischen Familie stammen, können die Parameter nicht direkt überführt, sondern müssen approximiert werden [Liu97]. Liu gibt hierfür allgemeine Näherungsgleichungen – bestimmt mittels Median-Rang-Regression – in Abhängigkeit des Stichprobenumfangs an [Liu97].

Für große Stichprobenumfänge ($n \rightarrow \infty$) ist die Beziehung $\beta \approx 1/\sigma_{\ln v}$ als gute Näherung verwendbar [Hen14]. In der Praxis sind jedoch die Verteilungsparameter der Grundgesamtheit (gesamte produzierte Stückzahl) nicht bekannt und die Verteilungsparameter werden auf Basis von kleinen Stichproben geschätzt, so dass diese Näherung nicht mehr ausreichend zu sein scheint. Im Folgenden wird, ergänzend zu den Näherungsgleichungen von Liu [Liu97], eine weitere einfach anwendbare Näherungsgleichung auf Basis der Maximum Likelihood Schätzung vorgeschlagen mit der bei kleinen Stichprobenumfängen der Formparameter aus der Standardabweichung der logarithmierten Normalverteilung ermittelt werden kann.

Entwicklung einer Näherungsgleichung auf MLE-Basis

Je $r = 1.000$ Stichproben wurden basierend auf angenommenen Log-Normalverteilungen mit Kombinationen unterschiedlichen Stichprobenumfangs und Standardabweichung simuliert; der Lageparameter hat keinen Einfluss und wird konstant gehalten:

- Stichprobenumfang $n = \{5, 10, 20, 50, 100, 200, 500, 1.000\}$
- Standardabweichung $\sigma_{\ln v} = \{1/4, 1/3, 1/2, 3/4, 1\}$
- Lageparameter $\mu_{\ln v} = 100$

Die jeweils r Stichproben wurden simuliert und deren Parameter geschätzt. Die Parameterschätzung für die Log-Normalverteilung und die Weibullverteilung der einzelnen

Stichproben erfolgte mit der Maximum Likelihood Schätzung¹⁸. Die damit erhaltenen r Parameter wurden mittels Boxplots analysiert. Für die Entwicklung der Näherungsgleichung wurde der Median für den Weibull-Formparameter und für die Standardabweichung der Log-Normalverteilung aus den jeweils r Stichproben verwendet. Die absolute Differenz D der Medianwerte von Weibull-Formparameter und Kehrwert der Standardabweichung der Log-Normalauswertung lässt sich mittels Potenzgesetz in Abhängigkeit des Stichprobenumfangs n und der Standardabweichung mit einem Bestimmtheitsmaß von ungefähr 99 % wie folgt beschreiben:

$$D = \beta - \frac{1}{\sigma_{\text{Inv}}} = \frac{n^a}{\sigma_{\text{Inv}}}. \quad (4.1)$$

Der Koeffizient a ist unabhängig von der Standardabweichung und konvergiert mit zunehmender Stichprobenanzahl r gegen $a \approx -0,8$. Aus Gleichung (4.1) resultiert eine modifizierte Näherungsgleichung für den Formparameter:

$$\beta_{\text{mod}} \approx \frac{n^a + 1}{\sigma_{\text{Inv}}} \approx \frac{n^{-0,8} + 1}{\sigma_{\text{Inv}}}. \quad (4.2)$$

Mit Hilfe einer weiteren Simulation von 1.000 Stichproben mit je 10 Prüflingen wird diese Beziehung validiert. Bild 4.3 zeigt die Boxplots der Schätzungen sowie die berechneten Verhältnisse der gegenübergestellten Näherungen. Das Verhältnis von dem geschätzten Formparameter $\hat{\beta}$ bei Annahme einer Weibullverteilung zu dem modifizierten Formparameter $\hat{\beta}_{\text{mod}}$ bei angenommener Log-Normalverteilung beträgt nahezu eins, siehe Bild 4.3b. Die Untersuchung bestätigt zum einen die Verwendbarkeit der Näherung $\beta \approx 1/\sigma_{\text{Inv}}$ für große Stichprobenumfänge ($n \rightarrow \infty$). Zum anderen ist die modifizierte Näherung sowohl für große als auch für kleine Stichprobenumfänge anwendbar. Die aufgestellte Gleichung (4.2) liefert im Durchschnitt treffende Weibull-Formparameter-Approximationen für Stichproben, die aus einer log-normalverteilten Grundgesamtheit stammen; die Hälfte der durchgeführten Simulationen liegt innerhalb ± 10 % Abweichung.

4.4.2 Korrelierende Streuungsmaße

Neben dem Formparameter und der Standardabweichung der Log-Normalverteilung gibt es weitere Streuungsmaße, um die Verteilung von Merkmalsausprägungen einer Stichprobe (Realisierungen einer Zufallsvariable) zueinander zu beschreiben bzw. um auf die Form von Verteilungen zu schließen. Diese lassen jedoch nur bedingt einen direkten Rückschluss auf den Formparameter zu, was anhand von drei Zufallsstichproben SP_A , SP_B , und SP_C für unterschiedliche, als log-normalverteilt angenommene

¹⁸ Für die Untersuchung wurde keine Bias Korrektur vorgenommen.

Grundgesamtheiten, veranschaulicht wird, siehe Tabelle 4.13. Direkt miteinander korrelierende Streuungsmaße sind grau hinterlegt.

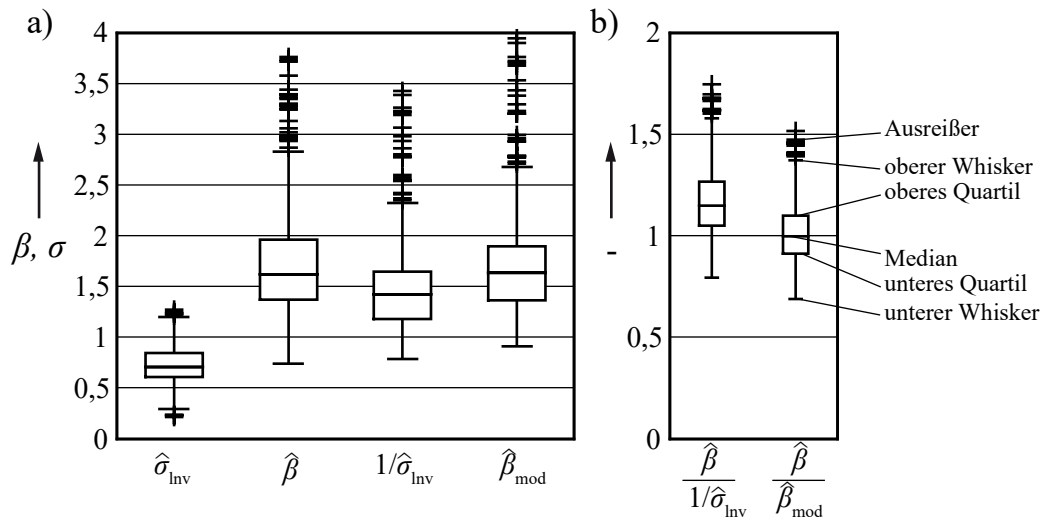


Bild 4.3: Boxplots der a) Schätzungen und b) Verhältnisse für $n = 10$, $\sigma_{\ln v} = 0,75$ und $r = 1.000$ (Whiskerlänge = maximal 1,5-facher Interquartilsabstand)

Tabelle 4.13: Geschätzte Parameter (gerundet) der Stichprobe SP_A , SP_B , und SP_C mit $n = 100.000$

Parameter		SP_A	SP_B	SP_C	Quelle für Berechnung
Erwartungswert (Grundgesamtheit)	$\mu_{\ln v}$	5,00	5,00	6,50	[SaHe06]
Standardabweichung der logarithmierten Merkmale (Grundgesamtheit)	$\sigma_{\ln v}$	0,67	0,50	0,67	[SaHe06]
Weibull-Formparameter	β	1,50	2,00	1,50	[SaHe06]
Stichprobenvarianz	s^2	19.139	8.082	388.526	[SaHe06]
Standardabweichung der Stichprobe	s	138	90	623	[SaHe06]
Variationskoeffizient	v	0,75	0,53	0,75	[SaHe06]
Streuspanne	T_N	0,18	0,28	0,18	[Hai06]

Es kann festgehalten werden: Ist bei zwei Datensätzen die Standardabweichung der Log-Normalverteilung, der Variationskoeffizient oder die Streuspanne unterschiedlich, so ist auch der Weibull-Formparameter unterschiedlich. Dies gilt hingegen nicht für die Varianz (bzw. Stichprobenvarianz) oder die Standardabweichung.

Die Varianz einer weibullverteilten Zufallsvariable ist nicht nur vom Formparameter β , sondern auch von dem Skalenparameter η abhängig. Daher weisen zwei Stichproben mit unterschiedlichem Skalenparameter η und gleichem Formparameter β eine unterschiedliche Varianz auf. Folglich ist die Varianz für die Beurteilung einer Änderung des Formparameters nicht geeignet. Dies gilt ebenso für die Standardabweichung.

Eine kleinere Varianz bei einem kleineren Erwartungswert bedeutet somit nicht zwangsläufig einen größeren Formparameter.

Die Streuspanne und der Variationskoeffizient hingegen können analog zum Formparameter interpretiert werden. Ist die Streuspanne oder der Variationskoeffizient zweier Stichproben unterschiedlich, so ist auch der Formparameter unterschiedlich und vice versa. Dabei ist die Streuspanne proportional dem Formparameter und der Variationskoeffizient proportional dem Kehrwert des Formparameters.

Eine weitere Untersuchung zum Einfluss des Formparameters auf den Variationskoeffizient zeigt [JiMu11]. Diese bestätigt, dass der Variationskoeffizient unabhängig vom Skalenparameter ist und lediglich vom Formparameter abhängig ist. Steigt der Formparameter monoton, nimmt der Variationskoeffizient monoton nichtlinear ab.

4.5 Fazit

Die im vorangegangenen Kapitel beschriebenen und analysierten Ansätze sind in Tabelle 4.14 bezüglich der Kriterien zusammengefasst.

Die auf Versuchen basierenden Ansätze Lebensdauer-versuch, Degradationsversuch, beschleunigter Lebensdauer-versuch/Degradationsversuch und die Felddatenanalyse führen in der Regel allesamt zu einem konstanten Formparameter. Bei den beschleunigten Versuchen ist mittels statistischer Tests eine Erkennung beanspruchungsabhängiger Formparameter möglich, die in Softwarepaketen vorhandenen Modelle lassen deren Berücksichtigung jedoch meist nicht zu. Eine individuelle Modellierung lässt dies, mittels bestehender beanspruchungsabhängiger Modelle (siehe Kapitel 2.4) und ohne Berücksichtigung einer ausfallfreien Zeit, dagegen zu. Literatur- und Expertenwissen ermöglichen zwar die angepasste Festlegung des Formparameters für eine bestimmte Beanspruchung und die Berücksichtigung einer ausfallfreien Zeit, sind jedoch meist auf nicht validierte Annahmen zurückzuführen. Das Cox-Modell und der Ansatz streuender Werkstoffkennwerte lassen die Ermittlung eines beanspruchungsabhängigen Formparameters indirekt zu. Besonders in frühen Phasen sind diese beiden Ansätze vielversprechend. Eine ausfallfreie Zeit ist durch diese jedoch nicht abbildbar.

Mittels Literatur-, Expertenwissen oder streuender Werkstoffkennwerte ist zwar schnell eine Aussage, beispielsweise eine Annahme des Formparameters, machbar, jedoch ist kein Vertrauensbereich für diese abzuleiten.

Die Felddatenanalyse betrachtet die Belastung im Feld pauschal und lässt eine abweichende Belastung unberücksichtigt, was zu größerer Streuung und damit zu einem kleineren – für das konkrete Ausfallbild nicht zutreffenden – Formparameter führt.

Tabelle 4.14: Zusammenfassung der Analyse

Ansatz	Information				Ergebnis			
	Informationsart	Versuche	Benötigte Information	Nutzbare Information	Formparameter	Ausfallfreie Zeit	Vertrauensbereich	Parametrisiertes Mod.
Lebensdauer-versuch	quant.	ja	Lebensdauerdaten		konstant	ja	ja	nein
Degradations-versuch	quant.	ja	Degradationsdaten		konstant	ja	ja	ja
Beschleunigter Lebensdauer- versuch	quant.	ja	Lebensdauerdaten		konstant	nein	ja	ja
Beschleunigter Degradations- versuch	quant.	ja	Degradationsdaten		konstant	nein	ja	ja
Cox-Modell	quant.	ja/ nein	Lebensdauerdaten, Kovariablen		kontinuierlich	nein	nein	ja
Felddatenanalyse	quant.	nein	Feldinformation	Anzahl und Laufleistung intakter Einheiten	konstant	ja	ja	nein
Literaturwissen	quant./ qual.	nein	Parameter	Lebensdauerdaten, Feldinformation, Randbedingungen, Faktoren	definiert	ja	nein	nein
Expertenwissen	qual.	nein	Erfahrung		definiert	ja	nein	nein
Streuende Werkstoffkennwerte	quant.	nein	Werkstoffdaten		kontinuierlich	nein	nein	ja

Ein allgemeines Defizit der analysierten Ansätze ist, dass diese jeweils nur isoliert zu einem Ergebnis führen. Ebenso wird in der Regel lediglich eine Informationsquelle herangezogen. Ein ganzheitlicher Ansatz mit einer aus verschiedenen verfügbaren Informationsquellen kombinierten beanspruchungsgerechten Bestimmung des Formparameters – und auch der übrigen Verteilungsparameter – ist nicht vorhanden.

Das Optimierungspotential besteht somit zum einen in einer ganzheitlichen Vorgehensweise, die verschiedene Informationsquellen einbindet und zum anderen in der Entwicklung einzelner erweiterter und neuer Ansätze. Ein ganzheitliches Verfahren kann eine systematisch zusammengeführte Nutzung verschiedener Ansätze ermögli-

chen. Beanspruchungsabhängige Modelle können um eine ausfallfreie Zeit erweitert werden, um ein dreiparametrisches Ausfallverhalten in beschleunigten Versuchen zu beschreiben. Felddaten können differenziert erfasst werden, um sowohl beanspruchungsabhängiges Ausfallverhalten überhaupt erst zu identifizieren als auch dieses bei einer ganzheitlichen Vorgehensweise zur Bestimmung des Formparameters nachfolgend zu verwenden. Zuletzt können die mit Unsicherheit versehenen Angaben von Experten um die Idee eines Vertrauensbereichs in Abhängigkeit der Expertengüte erweitert werden.

Darüber hinaus wird zudem in Kapitel 4.4 eine Möglichkeit aufgezeigt, welche es erlaubt auf Basis von anderen Parameter einen Formparameter abzuleiten und nachfolgend als Information zu verwenden bzw. zumindest eine Änderung des Formparameters zu erkennen.

5 Entwicklung erweiterter und neuer Ansätze

Dieses Kapitel stellt die Entwicklung erweiterter und neuer Ansätze vor, welche die im vorherigen Kapitel aufgezeigten Defizite adressieren. Dazu gehören eine differenzierte Felddatenanalyse, ein erweitertes Lebensdauermodell mit durchgängig beanspruchungsabhängigen Weibullparametern und ein quantifizierter Experte.

5.1 Differenzierte Felddatenanalyse

Die klassische Felddatenanalyse ordnet einem Feldausfall pauschal die Feldbeanspruchung zu, siehe Kapitel 4. In der Vergangenheit sind Methoden für eine differenzierte Betrachtung, besonders im Hinblick auf präventive Instandhaltung, immer mehr in den Fokus gerückt. Die Ansätze von Botzler [BBK13], [BoBe15] und Köttermann et al. [KJJB15] sowie das Wuppertaler Zuverlässigkeitsprognosemodell [IQZ15] basieren dabei auf Daten, welche bei Werkstattaufenthalten aus Steuergeräten gelesen werden können. Felddaten, die mehrere verschiedene Ausfallarten oder Baureihen enthalten, können nach Klein [Kle13] mittels numerischer Analyse separiert werden. Einzelne Ausfallverteilungen werden dadurch identifiziert und somit die ursprünglich vermengten Felddaten einer differenzierten Betrachtung der Feldbeanspruchung zugänglich gemacht. Eine Identifizierung einer individuellen Beanspruchungshöhe, welche charakteristisch für einen Ausfall ist, findet jeweils nicht statt. Schlummer [Sch12] stellt eine neue Vorgehensweise für einen Betriebsbewährtheitsnachweis im Betrieb vor. Diese berücksichtigt das reale Feldverhalten des Betrachtungsgegenstands und bietet die Möglichkeit einer individuellen Bewertung. Eine Zuordnung zu einer Beanspruchungshöhe im Sinne der vorliegenden Arbeit findet auch hier nicht statt.

In [JuBe14] wird dagegen ein Ansatz vorgestellt, welcher mittels Simulation und direkter Einbeziehung des Kunden eine Differenzierung der Felddaten, entsprechend der tatsächlichen auftretenden Beanspruchung, ermöglicht. Elementar ist hierbei die Zuordnung eines Ausfalls – hervorgerufen durch einen bestimmten Kunden – zu einer Beanspruchung, die für diesen bestimmten Kunden repräsentativ ist.

Voraussetzungen für die Anwendung sind ein parametrisiertes Lebensdauermodell und ein validiertes Simulationsmodell, welches unterschiedliches Kundenverhalten abbilden kann. Detaillierte Ausführungen sind [JuBe14] zu entnehmen. Mittels diesem Ansatz ist eine Differenzierung der Daten möglich. Felddaten werden dabei in Schadensklassen gruppiert. Allerdings hat sich in weiteren Untersuchungen gezeigt, dass eine

konkrete Bestimmung der Beanspruchung, die zum Ausfall geführt hat, von der gewählten Referenz abhängig ist.

5.1.1 Modifizierter Ansatz

Der im Folgenden modifizierte Ansatz adressiert dieses Problem und basiert auf [Ju-Be14]. Der wesentliche Bestandteil bleibt die Betrachtung von Kundentypkombinationen. In der Automobilindustrie entspricht eine Kundentypkombination (KTK) nach der 3F-Methode von Küçükay [Küc95] eine mögliche Kombination der drei Dimensionen Fahrweise, Beladung und Streckentyp. Diese Dimensionen haben unterschiedliche Ausprägungen. Beispiel für eine KTK ist ein oft sportlicher Fahrer, der meist mit leichter Beladung bevorzugt im Stadtverkehr unterwegs ist (vgl. [Küc95], [NBL+07] und [Mül02]). Müller-Kose [Mül02] zeigt auf, wie sich unterschiedliches Kundenverhalten auf die Lebensdauer verschiedener Bauteile und Schadensmechanismen auswirkt. Demzufolge ist die Zuordnung eines Ausfalls im Feld zu einer KTK und folglich zu einer für die KTK charakteristischen Beanspruchung entscheidend.

Der Algorithmus, siehe Bild 5.1, ist in einen Simulationspfad und einen Feldpfad aufgeteilt.

I. Simulation:

- a) Simulation der Belastung-Zeit-Funktion jeder KTK für eine für die KTK repräsentative Strecke. Diese repräsentative Strecke ist ein Mix aus verschiedenen Anteilen, spezifisch für die KTK zusammengestellt¹⁹.
- b) Belastung mittels Geometriedaten in Beanspruchung umrechnen.
- c) Klassieren der Beanspruchungs-Zeit-Funktion führt zu einem Stufenkollektiv. In der Antriebstechnik üblich sind die Klassengrenzenüberschreitungsanzahl sowie die ein- und zweiparametrische Momentan- und Verweildaueranzahl [BeLe04].²⁰
- d) Mittels gegebener Wöhlerkurve Schadensakkumulation anwenden und für jede KTK eine mittlere schadensäquivalente Beanspruchung berechnen. Analog zur Berechnung des geometrischen Schwerpunkts von zusammengesetzten Flächen (siehe [DaDa09]) kann die mittlere schadensäquivalente Beanspruchung $\bar{\sigma}$ für zusammengesetzte Schadensanteile D_i eines Stufenkollektivs berechnet werden

$$\bar{\sigma} = \frac{\sum_i \sigma_i D_i}{\sum_i D_i} \quad \text{mit} \quad D_i = \frac{n_i}{N_D} \left(\frac{\sigma_i}{\sigma_D} \right)^k. \quad (5.1)$$

¹⁹ Die exakte Länge der repräsentativen Strecken spielt keine Rolle.

²⁰ Die Reihenfolge der Schritte b) und c) ist kommutativ.

Diese mittlere äquivalente Beanspruchung ist definiert als die charakteristische Beanspruchung, welche von der betrachteten KTK aufgebracht wird.

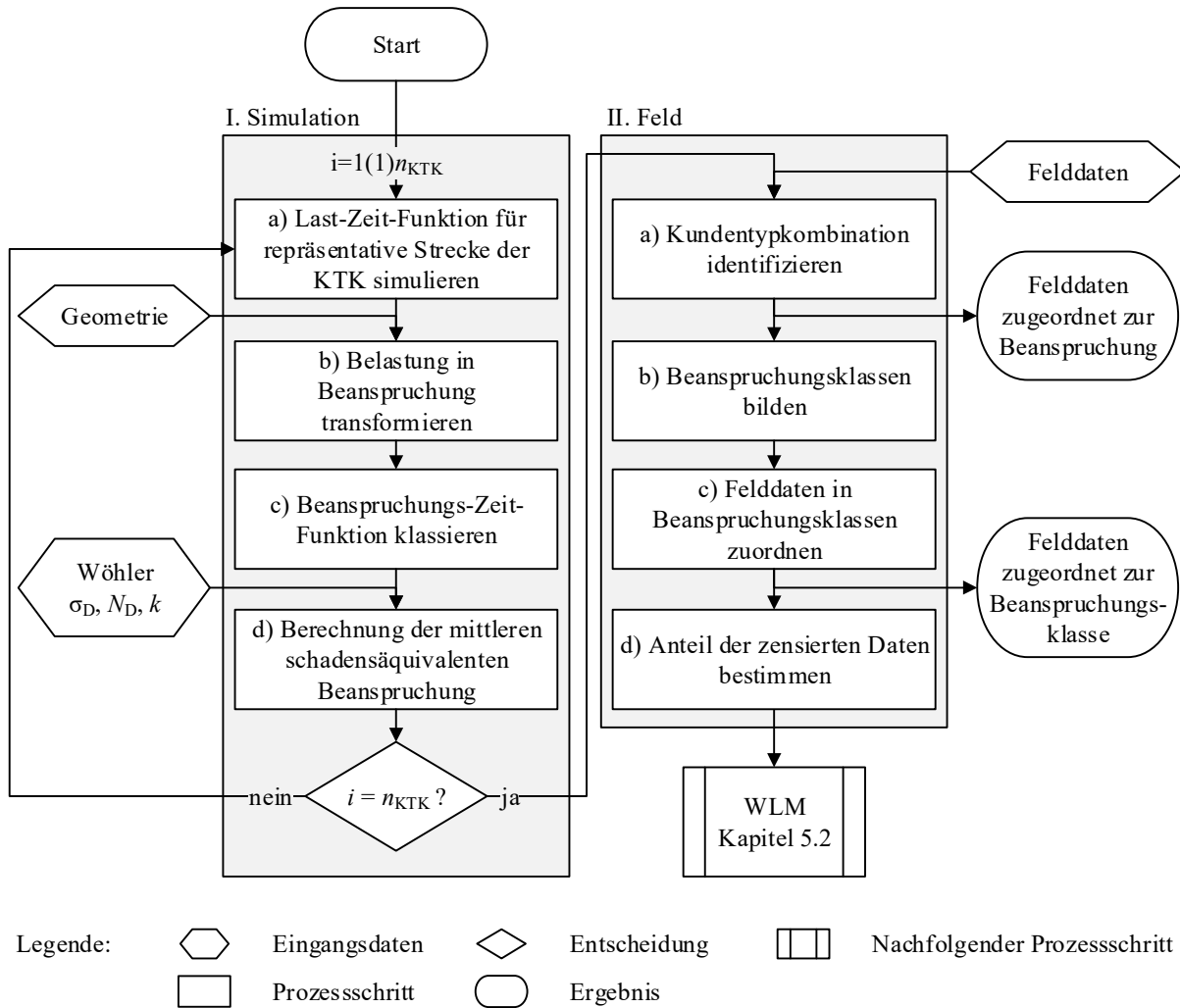


Bild 5.1: Algorithmus der differenzierten Felddatenanalyse

Schritte a) bis d) für alle KTK wiederholen. Ist der Simulationspfad abgeschlossen können nun gewonnene oder bereits vorhandene Felddaten berücksichtigt werden.

II. Feld:

- a) Ist ein Ausfall im Feld aufgetreten, muss die KTK identifiziert werden; entweder mittels Verfahren nach [JuBe14] direkt unter Einbeziehung des Kunden oder mit Hilfe von Kenngrößen aus Steuergeräten, siehe Botzler [BBK13], [BoBe15] und Köttermann et al. [KJJB15]. Nach Identifizierung der KTK, kann dem Feldausfall direkt eine repräsentative Beanspruchung zugeordnet werden (eine Weibullanalyse ist jedoch noch nicht möglich, wegen der fehlenden Berücksichtigung der zensierten Daten, was zu falschen Rückschlüssen führen würde).
- b) Eine sinnvolle Anzahl der Beanspruchungsklassen wird abgeschätzt mit $n_{BK} = \sqrt{n_{KTK}}$. Alternative Ansätze finden sich in [BeLe04]. Die Beanspru-

chungsobergrenze einer Beanspruchungsklasse $j = 1(1)(n_{\text{BK}} - 1)$ berechnet sich mit

$$\sigma_{\text{OG},j} = \min(\sigma) + j \left(\frac{\max(\sigma) - \min(\sigma)}{n_{\text{BK}}} \right). \quad (5.2)$$

Die mittleren äquivalenten Beanspruchungen aller KTK sind nun klassiert. Als Beanspruchungswert einer Beanspruchungsklasse wird der Mittelwert aller vorhandenen mittleren äquivalenten Beanspruchungen der KTK in einer Beanspruchungsklasse verwendet.

- c) Die vorhandenen Felddaten werden den Beanspruchungsklassen zugeordnet.
- d) Da Felddaten betrachtet werden, muss der Anteil der intakten Einheiten bestimmt werden. Hierfür wird folgende Annahme getroffen: Die Beanspruchung aller im Feld befindlichen Betrachtungseinheiten sei normalverteilt. Der Großteil der KTK befindet sich somit in mittleren Beanspruchungsklassen und entsprechend weniger KTK in den Extrema. Folglich gilt das auch für die Anteile der Betrachtungseinheiten im Feld. Somit kann über die Wahrscheinlichkeit P einer bestimmten Beanspruchungsklasse zuzugehören, durch Multiplikation mit der Gesamtzahl der Betrachtungseinheiten im Feld, die Anzahl der Betrachtungseinheiten pro Beanspruchungsklasse bestimmt werden. Abzüglich der ausgefallenen Einheiten pro Klasse sind damit die intakten Betrachtungseinheiten pro Beanspruchungsklasse bestimmt. Die Anzahl der intakten Betrachtungseinheiten, welche innerhalb einer Beanspruchungsklasse jeweils vor, zwischen oder nach den Ausfällen liegen, wird, je nach Informationslage, nach den Verfahren in [BeLe04] bestimmt, beispielsweise mittels Laufleistungsverteilung.

Ist der Algorithmus durchlaufen, können die nun differenzierten Felddaten für eine weiterführende Analyse verwendet werden. Da unter Umständen nur wenige Ausfälle in einer Beanspruchungsklasse vorliegen, bietet sich vor allem das in Kapitel 5.2 vorgestellte erweiterte Weibull-Lebensdauermodell an. Dies führt keine separate Weibullanalyse für jede Beanspruchungsklasse, sondern eine Analyse sämtlicher Daten aller Beanspruchungsklassen durch.

Diesem Ansatz geht voraus, dass bereits feststeht, welche Belastungsart vorherrscht. Lebensdauer- und Simulationsmodell sind bereits bekannt. Ist zunächst unklar, welche Belastung zum Ausfall geführt hat, muss dies im Vorfeld analysiert werden. Hierzu dient beispielsweise die Methode der Belastungserfassung von Henß [Hen14].

5.1.2 Methode der Belastungserfassung von Henß

Der schrittweise Aufbau der Methode ist dargestellt in Bild 5.2. Die einzelnen Schritte sind mittels der Graphentheorie en détail in [Hen14] beschrieben.

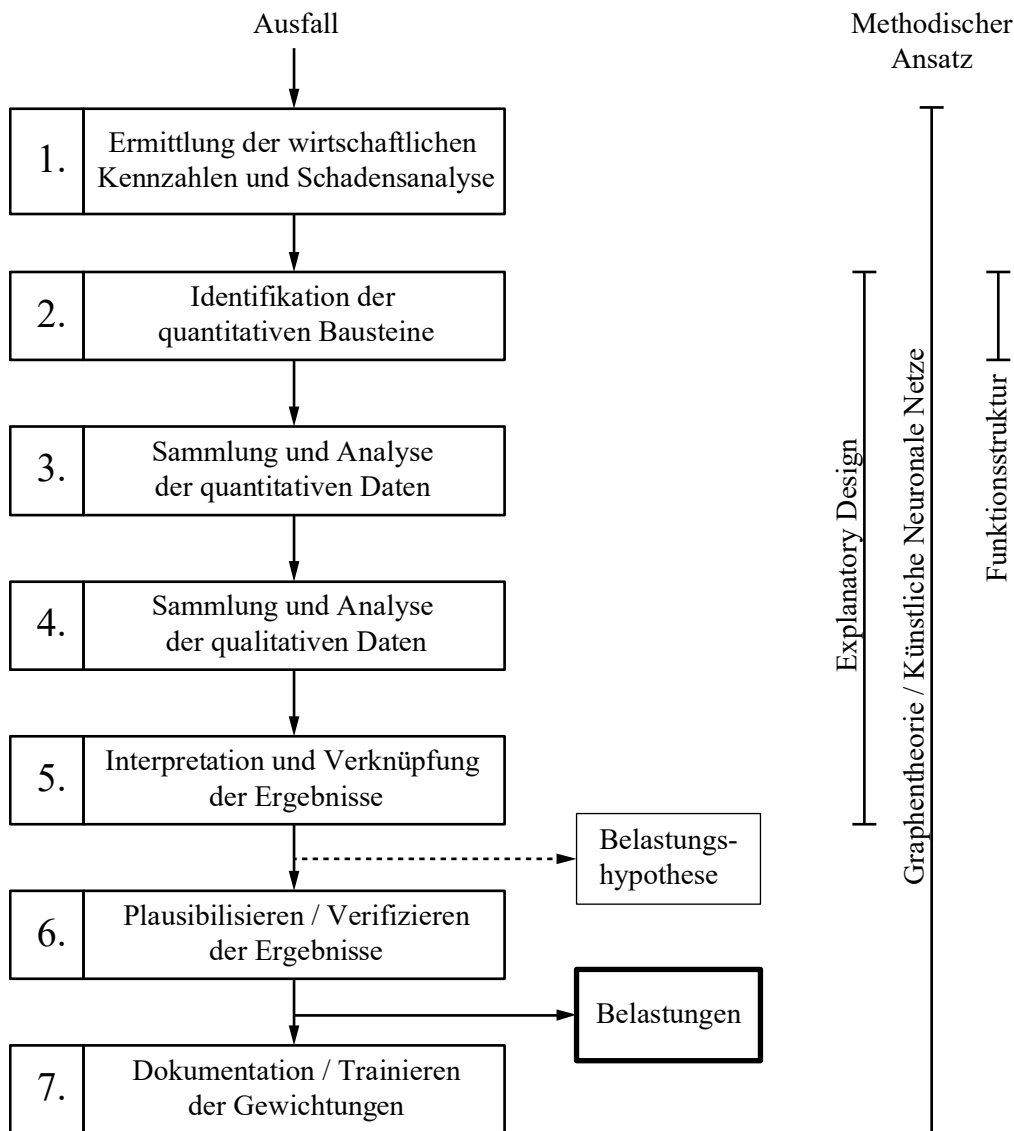


Bild 5.2: Schritte der Methode zur Belastungserfassung und gewählte methodische Ansätze innerhalb der Schritte, nach [Hen14]

Im Fall eines Ausfalls werden im Schritt 1 zunächst wirtschaftliche Rahmenbedingungen festgelegt. Daraus resultieren wirtschaftliche Kennzahlen, wie Aufwand und Nutzen einer weiterführenden Analyse für den beobachteten Ausfall. Deren Definition ist bei einem ersten Schadensfall erforderlich und kann bei wiederholter Anwendung aus einer Datenbank entnommen werden. Nach erfolgter Analyse des Schadensfalls, findet nochmals eine Rückkoppelung mit den Kennzahlen statt. Danach werden im Schritt 2 Einflüsse und Relationen identifiziert, die zum Schaden geführt haben könnten. Hierzu wird die Funktionsstruktur herangezogen. Als Ergebnis werden korrelierende quantitative Bausteine ausgewählt. Im Schritt 3 werden die quantitativen Bausteine abgearbeitet und die Informationsqualität bewertet. Schritt 4 steht für die Ermittlung der qualitativen Bausteine, durch Hilfe von Experten oder künstlichen neuronalen Netzen. Ziel des qualitativen Handlungsstrangs ist es, die gefundenen (quantitativen) Ergebnisse zu fundieren oder Ausreißer zu begründen. Im folgenden Schritt 5 werden die quantitati-

ven und qualitativen Analysen verknüpft, die Ergebnisse interpretiert und zu einer Belastungshypothese zusammengefasst. Anschließend folgt im Schritt 6 die Plausibilisierung der These, beispielsweise durch Versuchsdaten, Vergleich mit Vorgängern, Erfahrung, Experten etc. Zum Schluss gilt es im Schritt 7 die Ergebnisse zu dokumentieren und mit den Daten die künstlichen neuronalen Netze für zukünftige Anwendungen zu trainieren. Die künstlichen neuronalen Netze dienen der Verbesserung der Methode beispielsweise hinsichtlich angewandter Gewichtungsfaktoren, der Informationsqualitätsbewertung oder der Erkennung von Mustern bei Auswahlentscheidungen.

5.2 Weibull-Lebensdauermodell

Lebensdauerdaten bei erhöhter Beanspruchung können mit verschiedenen Modellen ausgewertet werden. In der Praxis ist es bislang üblich, Modelle zu verwenden, die zum einen lediglich einen funktionalen Zusammenhang der Lebensdauer und der Beanspruchung aufweisen und zum anderen keine ausfallfreie Zeit berücksichtigen, wie das „Power-Weibull Model“. Aus Kapitel 2.2.3 ist bekannt, dass die Annahme einer ausfallfreien Zeit Einfluss auf den Skalen- und den Formparameter hat. Im Kapitel 2.3 wurden Szenarien aufgezeigt, in denen jedoch eine Beanspruchungsabhängigkeit des Formparameters bekannt ist.

Bei den in Kapitel 2.4 zusammengefassten beanspruchungsabhängigen Modellen lassen sich folgende Merkmale erkennen:

- Skalenparameter meist mittels power law und Formparameter meist mittels logarithischer oder teils auch mit linearer Funktion realisiert;
- oft Verwendung der kleinsten Extremwertverteilung vom Typ I, jedoch auch Ansätze mit direkter Verwendung der Weibullverteilung üblich;
- keine Berücksichtigung einer ausfallfreien Zeit.

Beim Vorhandensein eines beanspruchungsabhängigen Formparameters ist darüber hinaus eine Berücksichtigung einer beanspruchungsabhängigen ausfallfreien Zeit erforderlich, um plausible Modelle zu parametrisieren [JBB15]. Im Folgenden werden daher Modelle auf Basis der Weibullverteilung untersucht, die sowohl einem funktionalen Zusammenhang zwischen Formparameter und Beanspruchung, als auch der Annahme einer ebenfalls beanspruchungsabhängigen ausfallfreien Zeit²¹ gerecht werden. Das von Elsayed et al. [ELW06] beschriebene „Extended Linear Hazard Regression Model“ scheidet als Basis aus, da es die Weibullverteilung als Verteilung nicht zu-

²¹ Werden gradientenbasierte Verfahren zur Parameterschätzung eingesetzt, kann die Unstetigkeit der Verteilungen durch die ausfallfreie Zeit kritisch sein, vgl. [Kle13] (S. 30).

grunde legt bzw. beibehält. Dies ist jedoch Voraussetzung für das in Kapitel 6 vorgestellte ganzheitliche Verfahren.

Nachfolgend werden zunächst die Anwendbarkeit und die Performance der entwickelten Modelle anhand von realen Daten betrachtet. Mittels Simulation wird anschließend untersucht, wie sich bei verschiedenen beanspruchungsabhängigen Grundgesamtheiten der Einsatz komplexer beanspruchungsabhängiger Modelle auswirkt.

Bild 5.3 zeigt das allgemeine schrittweise Vorgehen – von der Aufstellung des Modells, über die Schätzung der Modellkoeffizienten bis hin zur Beurteilung der untersuchten Modelle –, die im Folgenden weiter erläutert werden.

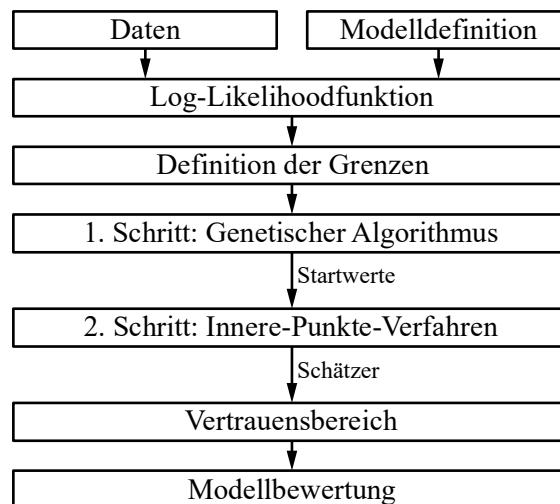


Bild 5.3: Vorgehen von der Definition bis zur Beurteilung der untersuchten Modelle

Die Grundlage für weite Teile der folgenden Ausführungen stellt Juskowiak [JBB15] dar.

5.2.1 Untersuchte Modelle

Bei den untersuchten Modellen sind die Verteilungsparameter als Funktion von der unabhängigen Variablen (hier: Beanspruchung) und den dazugehörigen Modellkoeffizienten beschrieben. Eine Transformation der Modellgleichungen für die Verteilungsparameter mittels Exponentialfunktion $\exp(*)$ führt zu einem Lösungsraum der Modellkoeffizienten im Intervall $]-\infty, +\infty[$ während der Verteilungsparameter positiv bleibt (vgl. [Nel04a]).

Tabelle 5.1 zeigt die untersuchten Modelle und welche Abhängigkeiten mit welchem funktionalen Zusammenhang für die einzelnen Verteilungsparameter modelliert wurden. Ausgehend von den in der Praxis angewandten und bekannten Modellen I und II wurden darauf aufbauend die Modelle III und IV entwickelt [JBB15].

Modell I entspricht dem einfachen Modell mit konstantem Formparameter ohne Berücksichtigung einer ausfallfreien Zeit, die nach [Nel04a] nur selten bei beschleunigten Versuchen verwendet wird. Fall II ist ein Modell mit Berücksichtigung eines beanspruchungsabhängigen Formparameters, jedoch ebenfalls ohne ausfallfreie Zeit. Modell III erweitert Modell II um die Berücksichtigung einer beanspruchungsabhängigen ausfallfreien Zeit. Es erscheint logisch, dass, wenn eine ausfallfreie Zeit für den untersuchten Schadensmechanismus physikalisch begründbar ist, nicht nur der Skalenparameter η , sondern auch die ausfallfreie Zeit γ abhängig von der Beanspruchung sein muss (siehe [Gum58]). Modell IV modifiziert Modell III hinsichtlich der Annahme, dass ausschließlich Verschleiß- und Ermüdungsausfälle mit $\beta > 1$ modelliert werden.

Tabelle 5.1: Untersuchte Modelle und funktionale Zusammenhänge

Modell		Abhängigkeiten	Funktionaler Zusammenhang	Modellgleichung
I	Konstantes Modell	$\eta = f(S)$ $\beta = \text{konst.}$ $\gamma = 0$	Log-linear Konstant ---	$\eta(S) = \exp[c_1 + c_2\xi(S)]$ $\beta = 1/\exp[c_3]$ ---
II	Beanspruchungsabh. Modell	$\eta = f(S)$ $\beta = f(S)$ $\gamma = 0$	Log-linear Log-linear ---	$\eta(S) = \exp[c_1 + c_2\xi(S)]$ $\beta(S) = 1/\exp[c_3 + c_4\xi(S)]$ ---
III	Beanspruchungsabh. Modell	$\eta = f(S)$ $\beta = f(S)$ $\gamma = f(S)$	Log-linear Log-linear Log-linear	$\eta(S) = \exp[c_1 + c_2\xi(S)]$ $\beta(S) = 1/\exp[c_3 + c_4\xi(S)]$ $\gamma(S) = \exp[c_5 + c_6\xi(S)]$
IV	Beanspruchungsabh. Modell	$\eta = f(S)$ $\beta = f(S) > 1$ $\gamma = f(S)$	Log-linear Log-linear Log-linear	$\eta(S) = \exp[c_1 + c_2\xi(S)]$ $\beta(S) = 1 + 1/\exp[c_3 + c_4\xi(S)]$ $\gamma(S) = \exp[c_5 + c_6\xi(S)]$

Die Modelle I – III sind hierarchisch aufgebaut. Im weitesten Sinne ist, bezogen auf die anderen Modelle, auch das Modell IV hierarchisch durch Hinzufügen einer Konstante mit dem Wert 1. Die dargestellten Modellgleichungen sind bestimmt durch k Modellkoeffizienten c_i . Werden einzelne Modellkoeffizienten $c_i = 0$ gesetzt, können die Modelle I – III ineinander überführt werden. Die Modellierung der Verteilungsparameter mittels Modellkoeffizienten bietet den Vorteil, dass die Anzahl der zu schätzenden Parameter unabhängig von der Anzahl an beobachteten Beanspruchungsniveaus ist. Somit ist eine Analyse auch dann möglich, wenn auch nur ein Prüfling pro Beanspruchungsniveau vorliegt.

Die Schätzung ist schneller und genauer, wenn die unabhängige Variable (hier: Beanspruchung S) zentriert wird [Nel04a]. Dies kann beispielsweise durch Subtraktion des

Mittelwertes aller vorkommenden Realisierungen der Beanspruchungsvariablen erreicht werden. Üblich ist eine Zentrierung (bzw. Normierung) der Beanspruchung zu einer Log-Pseudobeanspruchung [Nel84] in [MeEs98]. Bei den untersuchten Modellen in Tabelle 5.1 ist die Beanspruchung S in den Modellgleichungen normiert zu einer Log-Pseudobeanspruchung $\xi = \ln S - \overline{\ln S}$. Sie berechnet sich aus der Differenz der logarithmierten Beanspruchung $\ln S$ zu einer mittleren logarithmierten Beanspruchung $\overline{\ln S}$. Für die Berechnung von $\overline{\ln S}$ wird jedes vorhandene Beanspruchungsniveau nur einmal berücksichtigt.

5.2.2 Schätzung der Hyperparameter

Die Schätzung wird mit MLE durchgeführt, siehe Kapitel 2.5.1. Die allgemeine Log-Likelihoodfunktion $\Lambda = \ln L$ für zensierte Daten vom Typ I/II mit dem Modellkoeffizientenvektor $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \dots, c_k)$ und der modellabhängigen Anzahl der Modellkoeffizienten $k = 3, 4, 5, 6$ für die untersuchten Modelle lautet

$$\Lambda(\mathbf{c}|\mathbf{t}) = \sum_{i=1}^{n_f} \ln \left[\frac{\beta(S_i)}{\eta(S_i)} \left(\frac{t_i - \gamma(S_i)}{\eta(S_i)} \right)^{\beta(S_i)-1} \exp \left(- \left(\frac{t_i - \gamma(S_i)}{\eta(S_i)} \right)^{\beta(S_i)} \right) \right] - \sum_{i=1}^{n_s} \left(\frac{t_i - \gamma(S_i)}{\eta(S_i)} \right)^{\beta(S_i)}. \quad (5.3)$$

Für vollständige Daten ($n_s = 0$) vereinfacht sich Gleichung (5.3). Durch Einsetzen der jeweiligen Modellgleichungen aus Tabelle 5.1, ergibt sich die Log-Likelihoodfunktion für das jeweilige Modell.

Grundsätzlich werden die Modellkoeffizienten geschätzt durch Maximierung der Log-Likelihoodfunktion bei den verfügbaren Daten. Im einfachen Fall (Parameterschätzung auf einem Beanspruchungsniveau) führen das Aufstellen der Log-Likelihoodfunktion und das Lösen des Gleichungssystems der partiellen Ableitungen zu der gesuchten Schätzung des Modellkoeffizientenvektors $\hat{\mathbf{c}}_{ML}$. Bei Daten, welche bei unterschiedlicher Beanspruchung gewonnen wurden, und beanspruchungsabhängigen Verteilungsparametern ist dies jedoch komplex. Eine analytische Lösung der partiellen Ableitungen der Gleichung (5.3) ist in diesem Fall nicht möglich, siehe Kapitel 2.5.1.

Daher wird hier ein zweistufiges hybrides Verfahren angewandt, um mit möglichst wenigen Randbedingungen eine Schätzung durchzuführen. In einer ersten Stufe kommt ein stochastisches Verfahren (genetischer Algorithmus [Mat15]) zum Einsatz. Je nach Art der Daten kann der Lösungsraum eingeschränkt werden. So kann beispielsweise bei einer vorliegenden Schadensart Ermüdungsbruch der Lösungsraum der Koeffizienten $c_4 =]-\infty, 0]$ und $c_6 =]-\infty, 0]$ gesetzt werden. D. h. das Modell lässt mit steigender Beanspruchung nur einen größer werdenden Formparameter und eine

kleiner werdende ausfallfreie Zeit zu. Der unbegrenzte (bzw. begrenzte) Parameter-
raum wird global abgetastet und eine Lösung in grober Näherung²² gefunden. Ist
stochastisch eine näherungsweise Lösung gefunden, folgt die zweite Stufe. In dieser
wird, ausgehend von der Lösung aus der ersten Stufe, lokal optimiert. Hierfür wird ein
deterministisches Verfahren (Verfahren der inneren Punkte [Mat15]) angewandt, um
mit hinreichender Genauigkeit ein reproduzierbares Ergebnis zu erhalten. Dieser An-
satz verspricht somit reproduzierbar und auch schneller das globale Maximum der
Log-Likelihoodfunktion zu ermitteln, gegenüber einem Ansatz ausschließlich mit GA
bei modifizierten Einstellparametern oder ausschließlich mit deterministischen Verfah-
ren bei Abtastung eines definierten Parametergitters.

Prüfung auf Maximum

Eine Prüfung, ob die Schätzung auch gegen ein Maximum konvergiert, kann mittels
dem Konvergenzkriterium durchgeführt werden [Nel04b], [Nel04a]. Dieses besagt,
wenn die Eigenwerte der lokalen²³ Fisher-Matrix positiv sind, ist sie positiv definit
(vgl. [FKL09](S.456)) und somit die Log-Likelihoodfunktion streng konkav. Streng
konkav bedeutet, dass nur ein Maximum vorhanden ist; sprich das globale Maximum
ist gefunden. Für die Berechnung ist es zweckmäßig die Hesse-Matrix zu verwenden.

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 \Lambda(\mathbf{c})}{\partial c_1^2} & -\frac{\partial^2 \Lambda(\mathbf{c})}{\partial c_1 \partial c_2} & \cdots & -\frac{\partial^2 \Lambda(\mathbf{c})}{\partial c_1 \partial c_k} \\ -\frac{\partial^2 \Lambda(\mathbf{c})}{\partial c_2 \partial c_1} & -\frac{\partial^2 \Lambda(\mathbf{c})}{\partial c_2^2} & & -\frac{\partial^2 \Lambda(\mathbf{c})}{\partial c_2 \partial c_k} \\ \vdots & & \ddots & \\ -\frac{\partial^2 \Lambda(\mathbf{c})}{\partial c_k \partial c_1} & -\frac{\partial^2 \Lambda(\mathbf{c})}{\partial c_k \partial c_2} & & -\frac{\partial^2 \Lambda(\mathbf{c})}{\partial c_k^2} \end{bmatrix} = -\mathbf{H} \quad (5.4)$$

Die Fisher-Matrix \mathbf{F} entspricht einer negativen Hesse-Matrix \mathbf{H} . Diese kann direkt für
die jeweilige Log-Likelihoodfunktion, Gleichung (5.3), mittels Rechenprogrammen
berechnet werden. Entsprechend ist zu prüfen, ob die Eigenwerte der Hesse-Matrix \mathbf{H}
negativ sind. Dazu ist die Hesse-Matrix für $\mathbf{c} = \hat{\mathbf{c}}_{\text{ML}}$ zu evaluieren. Die Eigenwerte λ
werden für die evaluierte Hesse-Matrix²⁴ \mathbf{H}_0 berechnet durch Lösen von

$$\det(\mathbf{H}_0 - \lambda \mathbf{E}) = 0 \quad (5.5)$$

mit Einheitsmatrix \mathbf{E} . Sind alle Eigenwerte λ negativ liegt ein globales Maximum der
Log-Likelihoodfunktion vor.

²² Wie grob oder fein die Lösung ist, ist stark abhängig von den gewählten Einstellungen für den genetischen Algorithmus.

²³ „lokal“ bedeutet, dass die Matrix für die Schätzer evaluiert ist.

²⁴ Index „0“ bedeutet, dass die Matrix für die Schätzer evaluiert ist.

5.2.3 Berechnung des Vertrauensbereichs

Der Vertrauensbereich der Verteilungsparameter sowie der Lebensdauer bei gegebener Ausfallwahrscheinlichkeit wird mittels der Fisher-Matrix näherungsweise berechnet, siehe Kapitel 2.5.2. Für den Fall großer Stichprobenumfänge – welche bei Felddaten oder auch Versuchsdaten von Vorgängern in der Regel vorliegen – ist hierzu die Anwendung der asymptotischen Theorie gerechtfertigt [Nel04a].

Mit Gleichung (5.4) folgt für die Varianz-Kovarianz-Matrix durch Invertierung der Fisher-Matrix [Nel04a]

$$\mathbf{V}_0 = \begin{bmatrix} \text{Var}(c_1) & \text{Cov}(c_1, c_2) & \dots & \text{Cov}(c_1, c_k) \\ \text{Cov}(c_2, c_1) & \text{Var}(c_2) & & \text{Cov}(c_2, c_k) \\ \vdots & & \ddots & \\ \text{Cov}(c_k, c_1) & \text{Cov}(c_k, c_2) & & \text{Var}(c_k) \end{bmatrix}_0 = \mathbf{F}_0^{-1} = (-\mathbf{H}_0)^{-1}. \quad (5.6)$$

Die Standardabweichung eines geschätzten Modellkoeffizienten \hat{c}_i kann daraus direkt abgeleitet werden, da $s(\hat{c}_i) = [\text{Var}(\hat{c}_i)]^{1/2}$. Die Standardabweichung einzelner Modellkoeffizienten ist unabhängig vom Beanspruchungsniveau. Dagegen ist die Standardabweichung eines Verteilungsparameters abhängig vom Beanspruchungsniveau S zu berechnen.

Beanspruchungsabhängiger Vertrauensbereich der Verteilungsparameter

Hierfür werden die in Tabelle 5.1 beschriebenen Modellgleichungen verwendet. Das Vorgehen zur Bestimmung der beanspruchungsabhängigen Verteilungsparameter wird beispielhaft für das Modell III beschrieben (vgl. [Nel04a]). Sei $h = h(\mathbf{c}, S)$ ein beanspruchungsabhängiger Verteilungsparameter als Funktion der jeweiligen benötigten Modellkoeffizienten \mathbf{c} und einem bestimmten Beanspruchungsniveau S , dann berechnen sich die Varianz von h mit dessen partiellen Ableitungen und Gleichung (5.6) zu

$$\text{Var}[h(S)] = \left[\frac{\partial h(\mathbf{c}, S)}{\partial \mathbf{c}} \right]'_0 \mathbf{V}_0 \left[\frac{\partial h(\mathbf{c}, S)}{\partial \mathbf{c}} \right]_0. \quad (5.7)$$

Für den Formparameter von Modell III ergibt sich beispielsweise die Varianz

$$\text{Var}[\beta(S)] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \beta(c_3, c_4, S)}{\partial c_3} \\ \frac{\partial \beta(c_3, c_4, S)}{\partial c_4} \end{bmatrix}'_0 \begin{bmatrix} \text{Var}(c_3) & \text{Cov}(c_3, c_4) \\ \text{Cov}(c_4, c_3) & \text{Var}(c_4) \end{bmatrix}_0 \begin{bmatrix} \frac{\partial \beta(c_3, c_4, S)}{\partial c_3} \\ \frac{\partial \beta(c_3, c_4, S)}{\partial c_4} \end{bmatrix}_0 \quad (5.8)$$

und folglich die Standardabweichung

$$s[\beta(S)] = \sqrt{\text{Var}[\beta(S)]}. \quad (5.9)$$

Der Skalen- sowie der Formparameter sind beide positiv definiert, d. h. $\eta > 0$ und $\beta > 0$. Nach [Nel04a], [LLi62] werden geeignete 100γ % näherungsweise Konfidenzintervalle berechnet mit

$$\begin{aligned}\eta_u(S) &= \hat{\eta}(S) \exp\left[-K_\gamma \frac{s[\hat{\eta}(S)]}{\hat{\eta}(S)}\right] \\ \eta_o(S) &= \hat{\eta}(S) \exp\left[K_\gamma \frac{s[\hat{\eta}(S)]}{\hat{\eta}(S)}\right]\end{aligned}\quad (5.10)$$

und

$$\begin{aligned}\beta_u(S) &= \hat{\beta}(S) \exp\left[-K_\gamma \frac{s[\hat{\beta}(S)]}{\hat{\beta}(S)}\right] \\ \beta_o(S) &= \hat{\beta}(S) \exp\left[K_\gamma \frac{s[\hat{\beta}(S)]}{\hat{\beta}(S)}\right]\end{aligned}\quad (5.11)$$

mit dem $100(1 + \gamma)/2$ -ten zweiseitigen Standardnormalperzentil K_γ . Für die ausfallfreie Zeit wird der Definitionsbereich nicht eingeschränkt. Eine untere Vertrauensgrenze $\gamma_u(S) < 0$ deutet darauf hin, dass aus statistischer Sicht eine ausfallfreie Zeit nicht vorliegen muss. Folglich sind die Vertrauensgrenzen für $-\infty < \gamma(S) < +\infty$

$$\begin{aligned}\gamma_u(S) &= \hat{\gamma}(S) - K_\gamma s[\hat{\gamma}(S)] \\ \gamma_o(S) &= \hat{\gamma}(S) + K_\gamma s[\hat{\gamma}(S)].\end{aligned}\quad (5.12)$$

Beanspruchungsabhängiger Vertrauensbereich der B_q -Lebensdauer

Die B_q -Lebensdauer bei einem bestimmten Beanspruchungsniveau S berechnet sich zu

$$B_q(S) = \eta(S) \left[-\ln\left(1 - \frac{q}{100}\right)\right]^{1/\beta(S)} + \gamma(S). \quad (5.13)$$

Mit den partiellen Ableitungen dieser Gleichung nach den einzelnen Modellkoeffizienten c_i des Modellkoeffizientenvektors $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \dots, c_k)$ ergibt sich für die Varianz evaluiert an den Schätzern

$$\text{Var}[B_q(S)] = \begin{bmatrix} \frac{\partial B_q(\mathbf{c}, S)}{\partial c_1} \\ \frac{\partial B_q(\mathbf{c}, S)}{\partial c_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial B_q(\mathbf{c}, S)}{\partial c_k} \end{bmatrix}'_0 \mathbf{V}_0 \begin{bmatrix} \frac{\partial B_q(\mathbf{c}, S)}{\partial c_1} \\ \frac{\partial B_q(\mathbf{c}, S)}{\partial c_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial B_q(\mathbf{c}, S)}{\partial c_k} \end{bmatrix}_0 \quad (5.14)$$

mit \mathbf{V}_0 aus Gleichung (5.6) und daraus die Standardabweichung

$$s[B_q(S)] = \sqrt{\text{Var}[B_q(S)]}. \quad (5.15)$$

Da die Lebensdauer stets positiv ist, folgt auch hier analog zu Gleichungen (5.10) und (5.11) die untere und obere Vertrauensgrenze

$$\begin{aligned} B_{q,u}(S) &= \hat{B}_q(S) \exp \left[-K_\gamma \frac{s[\hat{B}_q(S)]}{\hat{B}_q(S)} \right], \\ B_{q,o}(S) &= \hat{B}_q(S) \exp \left[K_\gamma \frac{s[\hat{B}_q(S)]}{\hat{B}_q(S)} \right]. \end{aligned} \quad (5.16)$$

5.2.4 Bewertungskriterien

Drei verschiedene Kriterien werden angewandt: eine Plausibilitätsprüfung (PC), der Likelihood-Ratio Test und das Bayes'sche Informationskriterium.

Werden die Modelle verwendet um Daten zu beschreiben, welche auf Ermüdung zurückzuführen sind, müssen die parametrisierten Modelle auf Plausibilität geprüft werden. Der dafür relevante Beanspruchungsbereich ist sinngemäß definiert von ca. 110 % der am höchsten beobachteten Beanspruchung bis ca. 90 % der Feldbeanspruchung. Eine weitere Extrapolation ist prinzipiell möglich, jedoch mit zunehmender Unsicherheit behaftet. In dem relevanten Beanspruchungsbereich werden folgende Merkmale überprüft:

- Ändert sich das Vorzeichen der Korrelation bei Zu- oder Abnahme des Beanspruchungsniveaus?
- Verkleinert sich die absolute Differenz zwischen zwei B_q -Lebensdauerkurven bei abnehmender Beanspruchung?

Trifft eins dieser Merkmale zu, gilt in Anbetracht von Ermüdungsausfällen das Modell bei zugrundeliegenden Daten als nicht plausibel.

Der LRT wird insbesondere benutzt, um die Modelle I, II und III zu bewerten. Modell IV ist streng genommen nicht hierarchisch gegenüber den anderen. Daher wird das BIC als weiteres Kriterium herangezogen und die Modelle mittels der Differenzen zwischen den BIC-Werten bewertet.

5.2.5 Verwendete Daten

Es werden drei Datensätze vorgestellt, welche für die Untersuchung verwendet werden. Diese stammen von Brodbeck [Bro95], Groß [Gro74] und Barlow et al. [BTF88] (zitiert in [DrMo07]).

Brodbeck und Groß – Zahnbruch durch Ermüdung

Zur Entwicklung und Validierung der Modelle I bis IV werden Daten genutzt, welche von Brodbeck und Groß veröffentlicht wurden. In beiden Fällen wurden Zahnräder bis

zum Zahnbruch durch Ermüdung im Zeitfestigkeitsbereich²⁵ des Wöhlerdiagramms (siehe Kapitel 3.2) belastet. Die Ausfalldaten beider Datensätze befinden sich im Anhang, Tabelle 10.1 und Tabelle 10.2. Der Datensatz von Brodbeck umfasst insgesamt 300 Prüflinge und der von Groß 36 Prüflinge, verteilt auf je drei Beanspruchungsniveaus. Die Rohdaten im Weibullpapier dargestellt, zeigt Bild 5.4.

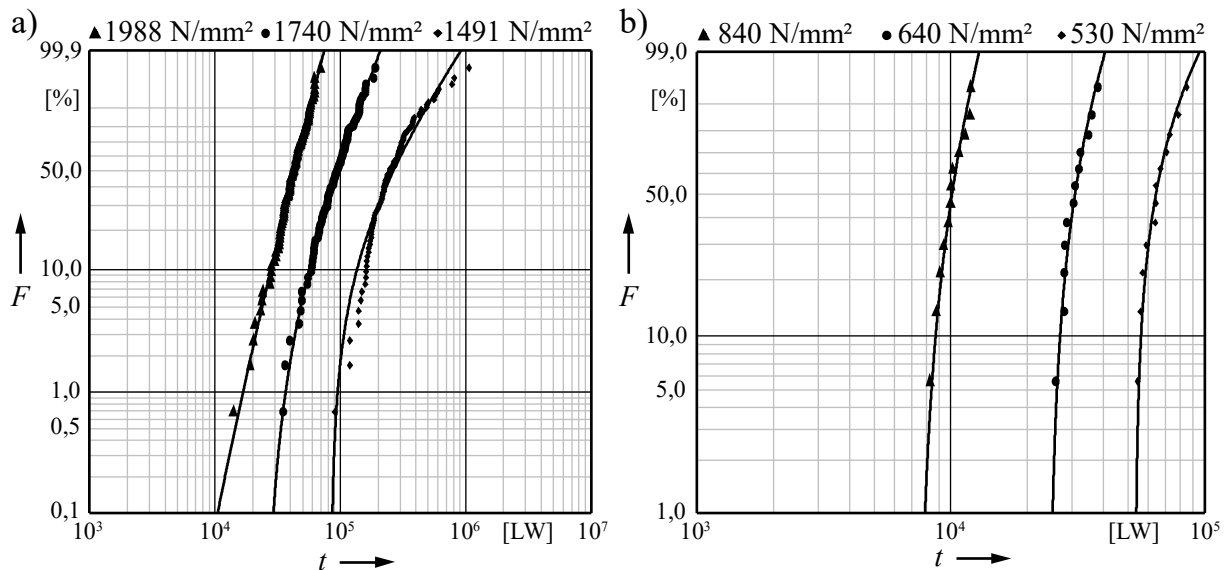


Bild 5.4: Dreiparametrische Weibullverteilung der Daten von a) Brodbeck und b) Groß

In beiden Fällen sind konkave Verläufe der Daten zu erkennen, was auf eine ausfallfreie Zeit hindeutet²⁶. Eine für verschiedene Formparameter typische unterschiedliche Steigung ist zunächst nicht direkt erkennbar, da die Ausfalldaten nicht mit ihrer jeweiligen ausfallfreien Zeit transformiert wurden. Eine Untersuchung auf gleichen Formparameter mit dem LRT zeigt eine signifikante Beanspruchungsabhängigkeit des Formparameters im Fall Brodbeck bzw. eine erkennbare Tendenz zu einem größeren Formparameter bei zunehmender Beanspruchung bei Groß. Ersichtlich wird dies durch die nicht überlappenden bzw. überlappenden Konturlinien des Vertrauensbereichs, siehe Bild 5.5.

Barlow et al. – Systemausfallverhalten

Der Datensatz von Barlow et al. [BTF88] (zitiert in [DrMo07]) dient zur Validierung von Modell I, II und III. Untersucht wurde hierbei ein kugelförmiger Druckkessel, welcher unter konstantem Druck nach gewisser Zeit berstet. Im Unterschied zu den vorangegangenen Datensätzen ist ein Ausfallverhalten über den vorliegenden Beanspruchungsniveaus zu beobachten, welches von abnehmender Ausfallrate bei hoher

²⁵ Dauerfestigkeitswert für Zahnfußbiegenennspannung bei Brodbeck = 930 N/mm², bei Groß keine Angabe.

²⁶ Begründung für eine ausfallfreie Zeit, siehe Kapitel 2.2.3.

Beanspruchung in eine steigende Ausfallrate bei niedrigerer Beanspruchung übergeht. Dies entspricht einem umgekehrten Trend, d. h. der Formparameter nimmt mit zunehmender Beanspruchung ab. Die Daten sind auf vier Beanspruchungsniveaus verteilt und umfassen insgesamt 108 Prüflinge, davon 22 Typ I zensiert (siehe Anhang, Tabelle 10.3).

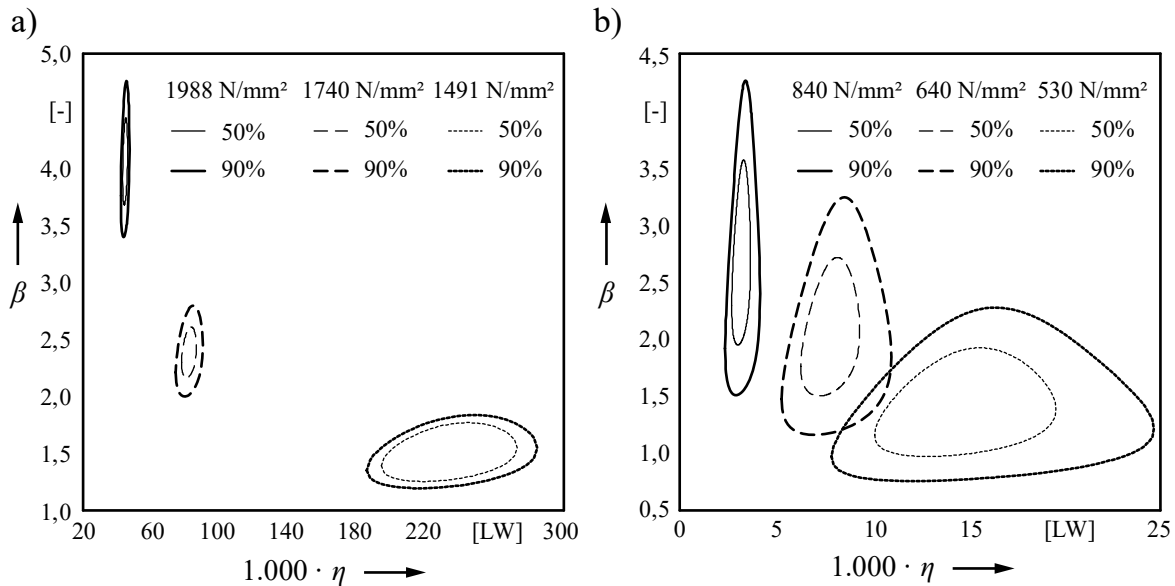


Bild 5.5: Vertrauensbereiche der Skalen- und Formparameter der Daten von a) Brodbeck und b) Groß, nach [JuBe14]

5.2.6 Modellanalyse

Zunächst werden die Datensätze von Brodbeck und Groß zur Validierung der Modelle verwendet. Dazu werden diese mit allen vier Modellen analysiert und die Ergebnisse auszugsweise dargestellt. Die Diagramme in Bild 5.6 bis Bild 5.8 zeigen:

- die beobachteten Daten,
- die B_q -Lebensdauerkurven für $q = 1, 10, 50, 90, 99$,
- die ausfallfreie Zeit (falls vorhanden),
- den beidseitigen 95 % Vertrauensbereich für $q = 1$ und
- die berechneten B_q -Lebensdauern bei Feldbeanspruchung ($S_d \approx 90$ % der am niedrigsten beobachteten Beanspruchung).

Bild 5.8 zeigt zusätzlich die drei Weibullparameter in Abhängigkeit der Beanspruchung. Die Diagramme enthalten:

- die Weibullparameterschätzungen der separat auf jedem Beanspruchungsniveau durchgeführten Weibullanalyse,
- die an diese Schätzungen angepasste Kurve und
- den beidseitigen 95 % Vertrauensbereich der Weibullparameter.

Die Ergebnisse aller Modelle werden nachfolgend in Tabelle 5.2 (Modellkoeffizienten, Weibullparameter und B_q -Lebensdauern) und Tabelle 5.3 (Modellbewertung) zusammengefasst.

Das Modell I zeigt den erwarteten Verlauf der B_q -Lebensdauerkurven, welche in einem Achsensystem mit logarithmierten Achsen parallel verlaufen, und ist daher nicht dargestellt.

Bei Brodbeck's Daten zeigt Modell II einen im Ermüdungskontext nicht plausibel drehenden Kurvenverlauf für niedrige Ausfallwahrscheinlichkeiten bei niedriger Beanspruchung. Bild 5.6 zeigt dies für die B_1 -Lebensdauerkurve. Bei Verwendung von Groß's Daten erscheint Modell II hingegen plausibel.

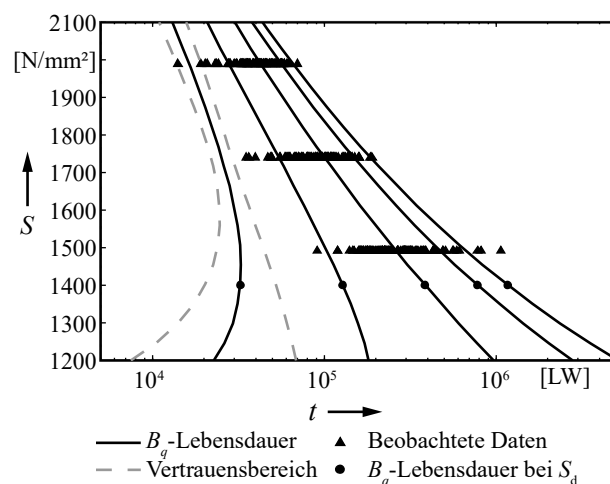


Bild 5.6: Weibull-Lebensdauermodell II (Daten: Brodbeck [Bro95])

Der drehende Kurvenverlauf ist mathematisch zu begründen (vgl. [BeLe04](S.258f)): Modell II lässt einen beanspruchungsabhängigen Formparameter zu. Ist die Veränderung des Formparameters im relevanten Beanspruchungsbereich groß genug und bewegt sich bei abnehmender Beanspruchung gegen eins, so zeigt die Dichtefunktion einen zunehmend linkssteilen Verlauf. In Anbetracht der fehlenden ausfallfreien Zeit von Modell II, führt dies wiederum dazu, dass beispielsweise das B_1 -Perzentil bei niedrigerer Beanspruchung zu einer kürzeren Lebensdauer tendiert als bei höherer Beanspruchung, wie in Bild 5.6 zu sehen ist.

Aufgrund des beobachteten drehenden Kurvenverlaufs wird eine ausfallfreie Zeit hinzugefügt, um das beschriebene Problem zu lösen, siehe Bild 5.7. Die Korrelation zwischen Beanspruchung und B_q -Lebensdauer ändert nun ihr Vorzeichen nicht. Die bei hohem Beanspruchungsniveau erkennbare große Differenz der ausfallfreien Zeit und B_1 -Lebensdauer liegt an dem großen Formparameter ($\beta \approx 4$) und ist physikalisch begründbar. Gleichzeitig nähern sich die beiden Kurven – ausfallfreie Zeit und B_1 -Lebensdauer – deutlich, wegen des kleineren Formparameters, an. Jedoch zeigt Modell

III bei Brodbeck's Daten im relevanten Beanspruchungsbereich mit abnehmender Beanspruchung kleiner werdende absolute Differenzen zwischen der B_1 - und der B_{10} -Lebensdauerkurve. Für Groß's Daten zeigt auch Modell III für Ermüdung plausible Kurvenverläufe.

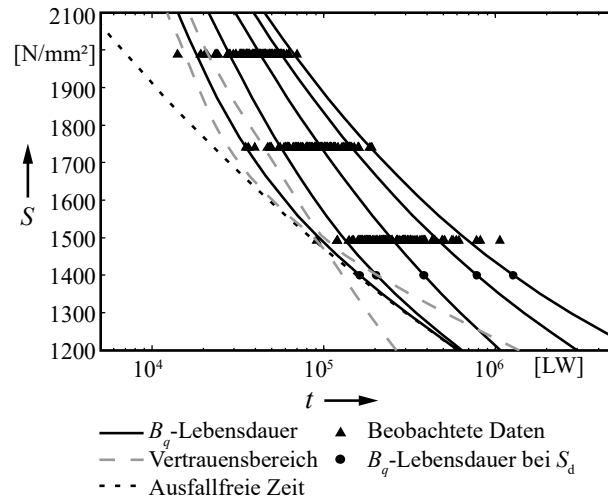


Bild 5.7: Weibull-Lebensdauermodell III (Daten: Brodbeck [Bro95])

Die Beschränkung auf $\beta > 1$ in Modell IV (Bild 5.8) führt bei beiden Datensätzen zu plausiblen Modellen. Hinsichtlich der ausfallfreien Zeit trifft auch hier die für Modell III genannte Begründung zu. Für Brodbeck's Daten trifft die Schätzung der Modellkoeffizienten die separat auf den beobachteten Beanspruchungsniveaus geschätzten Weibullparameter gut. Bei beiden Datensätzen liegen die separat auf den beobachteten Beanspruchungsniveaus geschätzten Weibullparameter innerhalb des 95 % Vertrauensbereichs. Aufgrund der schwächeren (statistisch nicht signifikanten) Beanspruchungsabhängigkeit des Formparameters, verlaufen die B_q -Lebensdauerkurven bei Groß's Daten nahezu parallel im Vergleich zu Brodbeck's Daten.

In der Zusammenfassung (Tabelle 5.2) sind zunächst die deutlich kleineren Form- und Skalenparameter bei Feldbeanspruchung, aufgrund der hinzugefügten ausfallfreien Zeit, bei beiden Datensätzen erkennbar. Bedingt durch die Beschränkung $\beta > 1$ ist der Formparameter von Modell IV etwas größer als bei Modell III. Ansonsten sind die Unterschiede beider Modelle gering. Die Modellkoeffizienten unterscheiden sich leicht aufgrund der verschiedenen verwendeten Modellgleichungen. Besonders bei kleinen Ausfallwahrscheinlichkeiten ($q = 1$) sind die Unterschiede zwischen den Lebensdauern der Modelle groß. Bei Betrachtung einer höheren Ausfallwahrscheinlichkeit ($q = 10$) oder einem Datensatz mit schwächerer Beanspruchungsabhängigkeit (vergleiche Brodbeck gegenüber Groß) werden diese Unterschiede kleiner. Die Berücksichtigung einer ausfallfreien Zeit bei Modell III und IV führt in beiden Fällen zu höheren B_1 -Lebensdauern. In anderen Worten, ist eine ausfallfreie Zeit begründbar, sind die Modelle I und II zu konservativ hinsichtlich der B_1 -Lebensdauern.

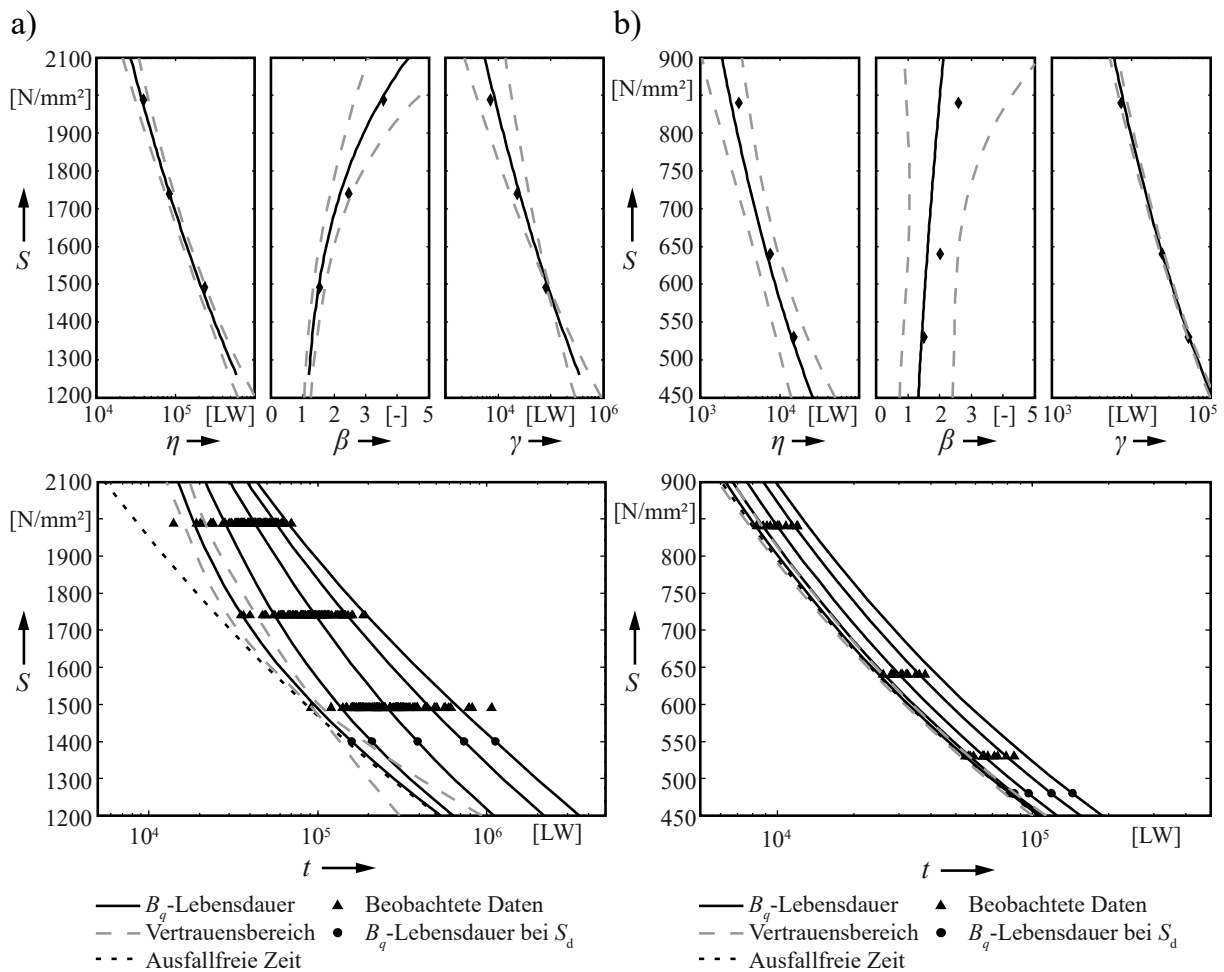


Bild 5.8: Weibull-Lebensdauermodell IV (Daten: a) Brodbeck [Bro95] und b) Groß [Gro74])

Die aus der ausfallfreien Zeit und B_{10} -Lebensdauer resultierenden f_{tB} -Faktoren betragen bei Brodbeck's Daten für Modell III 0,77 und für Modell IV 0,71 bzw. bei Groß's Daten 0,96 und 0,95. Diese Werte liegen im Bereich von aus Literatur bekannter Werte für Bruch bei Zahnrädern, siehe [BeLe04].

Die Ergebnisse der Bewertungskriterien sind in Tabelle 5.3 dargestellt. Der LRT zeigt, bei Wahl eines Signifikanzniveaus von $\alpha = 0,05$, im Fall von Groß's Daten keine bessere Anpassung von Modell II gegenüber Modell I ($p = 0,42$). Bei Brodbeck's Daten ist Modell II signifikant besser als Modell I ($p \approx 0$). Modell III ist bei beiden Datensätzen signifikant besser²⁷ als Modell I oder Modell II; dabei ist stets $p \leq 0,02$. Das BIC ergibt aufgrund berücksichtigter Komplexität und Stichprobenumfang davon teils abweichende Ergebnisse. Für Brodbeck's Daten zeigt sich eine sehr starke Ablehnung der Modelle I und II zugunsten der Modell III und IV. Diese Bewertung deckt sich mit der des LRT. Im Fall von Groß's Daten ergibt eine Auswertung der BICs deutlich we-

²⁷ Wird entgegen der mathematischen Korrektheit (siehe Kapitel 5.2.4) der LRT auf Modell IV gegenüber den Modellen I und II angewandt, zeigt sich ebenso eine signifikante Verbesserung.

niger Klarheit für oder gegen ein Modell. Dies liegt an der im Verhältnis zu großen Anzahl an Modellkoeffizienten im Vergleich zu dem kleineren Stichprobenumfang. In diesem Fall erscheint Modell I leicht favorisiert. Modell II schneidet am schlechtesten ab.

Tabelle 5.2: Zusammenfassung der Modellkoeffizienten sowie der Weibullparameter und B_q -Lebensdauern bei Feldbeanspruchung

Daten	Variable	Modell I	Modell II	Modell III	Modell IV
Brodbeck	c_1	11,6932	11,6809	11,4079	11,3871
	c_2	-7,2152	-6,6417	-5,8883	-6,0556
	c_3	-0,9728	-1,1030	-0,8431	0,1335
	c_4	-	-2,6883	-3,1661	-5,5245
	c_5	-	-	10,1005	10,2003
	c_6	-	-	-8,8109	-8,1098
	$\eta(S_d)$	546.288	478.306	310.656	315.168
	$\beta(S_d)$	2,65	1,71	1,19	1,36
	$\gamma(S_d)$	-	-	155.413	148.176
	$B_1(S_d)$	95.986	32.551	162.001	158.815
	$B_{10}(S_d)$	233.333	128.455	202.577	208.240
Groß	c_1	10,2804	10,2802	8,7587	8,7590
	c_2	-4,1350	-4,1109	-3,8881	-3,9456
	c_3	-2,1646	-2,1728	-0,5563	0,3086
	c_4	-	-0,4478	-0,6531	-1,2538
	c_5	-	-	9,9962	9,9964
	c_6	-	-	-4,1363	-4,1255
	$\eta(S_d)$	107.457	106.626	21.705	22.107
	$\beta(S_d)$	8,71	7,63	1,42	1,49
	$\gamma(S_d)$	-	-	80.906	80.650
	$B_1(S_d)$	63.372	58.328	81.756	81.668
	$B_{10}(S_d)$	82.994	79.378	85.353	85.555

Tabelle 5.3: Zusammenfassung der Bewertungskriterien

Daten	Variable	Modell I	Modell II	Modell III	Modell IV
Brodbeck	PC	bestanden	nicht bestanden	nicht bestanden	bestanden
	ML	-3.607,0	-3.578,5	-3.562,3	-3.563,3
	BIC	7.231,1	7.179,8	7.158,8	7.160,8
Groß	PC	bestanden	bestanden	bestanden	bestanden
	ML	-344,9	-344,7	-340,5	-340,5
	BIC	700,6	703,7	702,4	702,5

Abschließend erscheint das Modell III für Brodbeck's Daten als die beste Wahl. In Anbetracht der Ermüdungsausfälle ist jedoch Modell IV zu empfehlen, da dieses auch die Plausibilitätsprüfung für beide Datensätze besteht. Für Groß's Daten, mit schwächerer Beanspruchungsabhängigkeit, sind gemäß LRT ebenso die Modelle III und IV zu empfehlen. Bei Betrachtung des BIC werden diese durch Einbindung der Komplexität hingegen bestraft und das Modell I leicht bevorzugt.

Während Modell IV ausschließlich für Daten mit einem zugrundeliegenden Ermüdungs- oder Verschleißmechanismus ($\beta > 1$) anwendbar ist, kann Modell III unbegrenzt eingesetzt werden. Mit Hilfe der Daten von Barlow et al. soll das Modell für eine zugrundeliegende negative Korrelation zwischen Beanspruchung und Formparameter validiert werden. In Bild 5.9 sind die Modelle I und III dargestellt.

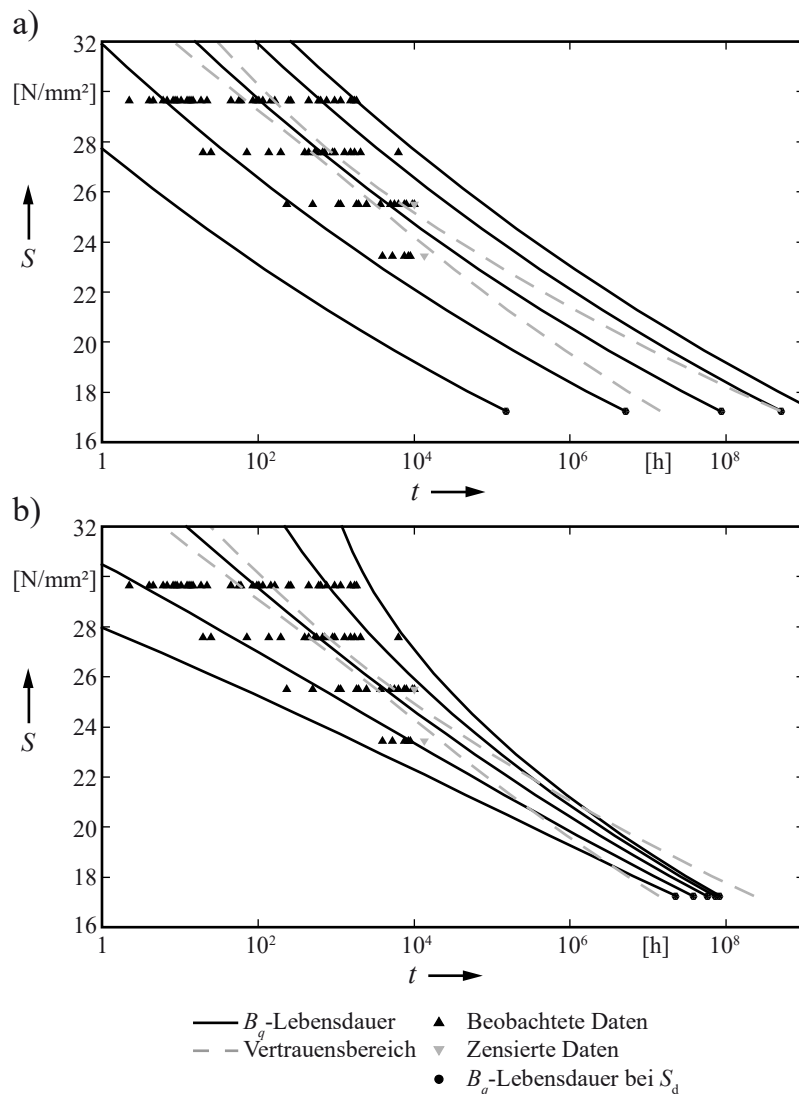


Bild 5.9: Weibull-Lebensdauermodelle a) I und b) III für Barlow's Daten

Abgebildet sind die angepassten B_q -Lebensdauerkurven mit $q = 1, 10, 50, 90, 99$ und die berechneten B_q -Lebensdauern bei Feldbeanspruchung $S_d = 17,237 \text{ N/mm}^2$, re-

sultierend aus der Modellextrapolation, dargestellt. Des Weiteren sind die Daten wie auch der zweiseitige 90 % Vertrauensbereich der B_{50} -Lebensdauerkurve zu sehen.

Modell I zeigt eine große Spannweite des prognostizierten Ausfallverhaltens bei Feldbeanspruchung. Demgegenüber weist Modell III eine deutlich kleinere Spannweite auf. Das Potential von Modell III eine ausfallfreie Zeit zu berücksichtigen, wird nicht ausgenutzt (siehe c_5 , c_6 und $\gamma(S_d)$ von Modell III in Tabelle 5.4). Die Schätzung des Modells III führt exakt zum selben Ergebnis wie bei Modell II, auf dessen Darstellung verzichtet wird. Vor dem Hintergrund des bekannten beanspruchungsabhängigen Ausfallverhaltens in diesem Beispiel – eine steigende Ausfallrate und somit ein $\beta > 1$ wird bei niedrigerer Beanspruchung erwartet – sind die B_1 - und B_{10} -Lebensdauern von Modell I zu konservativ.

Eine Analyse der Bewertungskriterien (Tabelle 5.5) favorisiert eine beanspruchungsabhängige Modellierung. Dies stimmt mit Barlow et al. [BTF88] (zitiert in [DrMo07]) überein. Die Ergebnisse des LRT zeigen eine signifikant bessere Anpassung der Modelle II und III gegenüber Modell I. Aufgrund des identischen ML ergibt sich zwischen den Modellen II und III kein Unterschied. Beim Vergleich der Differenzen der BIC-Werte zeigt sich eine (sehr) starke Präferenz von Modell II gegenüber den Modellen I und III. Hierbei ist Modell III bestraft durch die beiden nicht genutzten zusätzlichen Modellkoeffizienten, was zu einem größeren BIC-Wert führt. Die Gegenüberstellung der Modelle I und III führt zu keiner eindeutigen Präferenz.

Tabelle 5.4: Zusammenfassung für Barlow's Daten

Variable	Modell I	Modell II	Modell III
c_1	8,0723	7,8593	7,8593
c_2	-25,0820	-23,5196	-23,5196
c_3	0,4022	0,1316	0,1316
c_4	-	3,9483	3,9483
c_5	-	-	-1,54E+11
c_6	-	-	-8,84E+08
$\eta(S_d)$	1,46E+08	6,06E+07	6,06E+07
$\beta(S_d)$	0,67	4,75	4,75
$\gamma(S_d)$	-	-	0
$B_1(S_d)$	1,51E+05	2,30E+07	2,30E+07
$B_{10}(S_d)$	5,06E+06	3,77E+07	3,77E+07
$B_{50}(S_d)$	8,46E+07	5,61E+07	5,61E+07
$B_{90}(S_d)$	5,10E+08	7,23E+07	7,23E+07
$B_{99}(S_d)$	1,44E+09	8,37E+07	8,37E+07
ML	-677,5	-670,9	-670,9
BIC	1.369,0	1.360,5	1.369,8

Tabelle 5.5: Zusammenfassung der Bewertungskriterien

Kriterium		Modell I vs. II	Modell I vs. III	Modell II vs. III
LRT	H_0	Modell I = Modell II	Modell I = Modell III	Modell II = Modell III
	p -Wert	0,000275	0,004155	1,000000
BIC		BIC I - BIC II	BIC III - BIC I	BIC III - BIC II
	Δ_{BIC}	8,6	0,8	9,4

Zusammenfassend stellt Modell II in diesem Fall die beste Wahl dar. Jedoch führt Modell III zur selben Prognose bei Feldbeanspruchung und ist ebenso geeignet.

5.2.7 Simulationsstudie zur Einflussanalyse

Im vorherigen Abschnitt wurden die Modelle lediglich für drei Datensätze validiert. Nun wird mittels Simulation synthetischer Datensätze die Anwendbarkeit der Modelle in einem weiten Bereich untersucht, vgl. [JuBe16]. Ziel ist es festzustellen, wie sich die Performance der Modelle bei verschiedenen Grundgesamtheiten, verhält.

Ausgehend von den Originaldaten von Brodbeck (signifikante Beanspruchungsabhängigkeit des Formparameters und großer Stichprobenumfang) und Groß (tendenzielle Beanspruchungsabhängigkeit des Formparameters und kleiner Stichprobenumfang) werden die Daten synthetisiert. Für die Grundgesamtheiten wird angenommen, dass sie Modell IV folgen. Durch Variation der Modellkoeffizienten c_1 bis c_6 wird die Grundgesamtheit bzw. der konstante und der beanspruchungsabhängige Term des jeweiligen Verteilungsparameters η , β und γ (siehe Tabelle 5.1) verändert. Bild 5.10 verdeutlicht, wie sich einzelne Kombinationen der Modellkoeffizienten bei Modell IV auf den jeweiligen Weibullparameter auswirken.

Der untersuchte Bereich umfasst verschiedenste Szenarien, wie eine geringe ausfallfreie Zeit und eine leichte Beanspruchungsabhängigkeit oder verschiedene Beanspruchungsabhängigkeitsgrade des Formparameters. Die Kombination vier verschiedener Funktionen für η , neun für β und vier für γ führt zu insgesamt 144 Szenarien. Jedes Szenario wird als Grundgesamtheit definiert und dient damit als Input für die Simulation. Im Sinne eines vollfaktoriellen Versuchsplans wird für jedes Szenario eine Pseudo-Zufallsstichprobe auf drei Beanspruchungsniveaus mit $n = 20$ Prüflingen (Stichprobenumfang $n_{\text{ges}} = 60$) berechnet. Es werden die Beanspruchungsniveaus von Brodbeck's Daten verwendet. Die Berechnung der Pseudo-Zufallsstichproben erfolgt mittels der inversen Betaverteilung nach [Mat15]

$$x = F^{-1}(P|a, b) \quad \text{mit} \quad P = F(x|a, b) = \frac{1}{B(a, b)} \int_0^x t^{a-1} (1-t)^{b-1} dt. \quad (5.17)$$

Die Beträge für die Wahrscheinlichkeit $P = 0,5$ ergeben sich durch Einsetzen von $a = i$ und $b = n - i + 1$. Die Verwendung der Beträge führt zu einer repräsentativen und reproduzierbaren Pseudo-Zufallsstichprobe je Szenario. Der sich vor allem bei kleinen Stichproben einstellende Fehler wird vernachlässigt. Für jedes Szenario werden die Modellkoeffizienten für jedes Modell geschätzt und deren BICs berechnet. Die Ergebnisanalyse findet mittels derer Differenzen Δ_{BIC} statt.

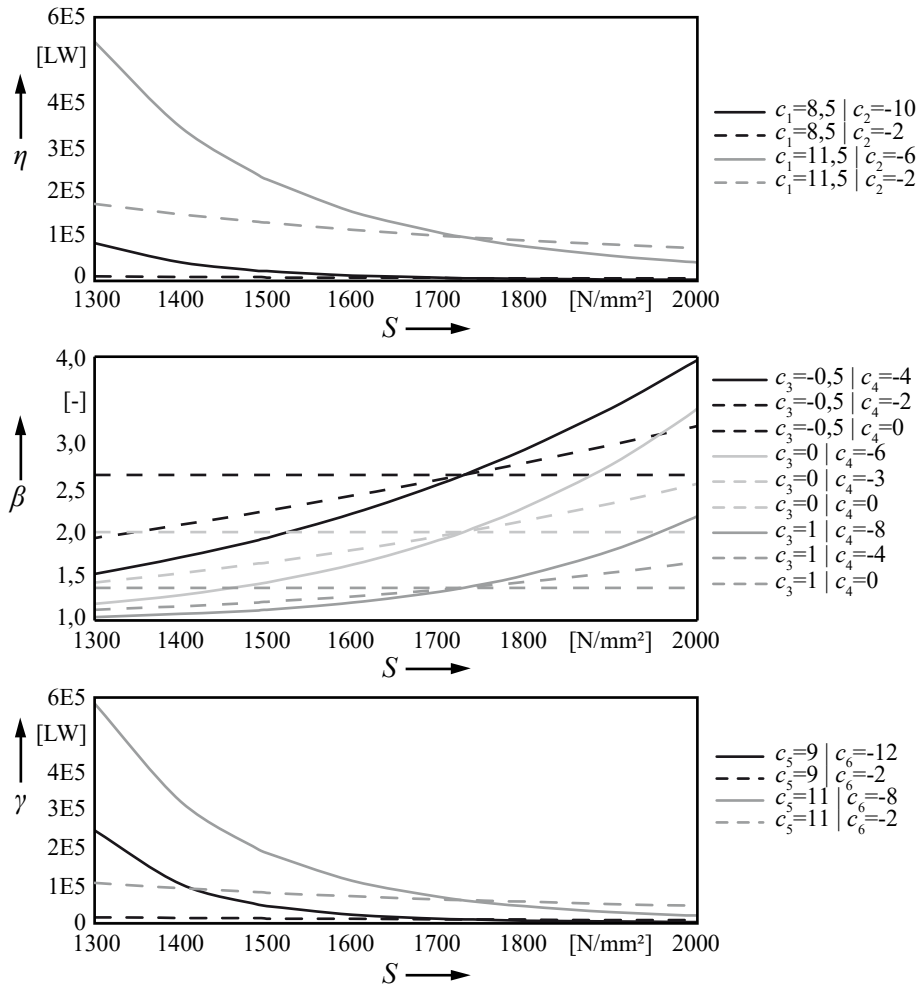


Bild 5.10: Beanspruchungsabhängige Weibullparameter bei Annahme von Modell IV

Die Balkendiagramme in Bild 5.11 zeigen die Ergebnisse der Simulationsstudie für die 144 Szenarien. Jeder einzelne Balken steht für die absolute Differenz der BIC-Werte Δ_{BIC} zwischen einem Modell i und dem Modell mit dem minimalen BIC-Wert. Die Balken mit hohen Werten ($\Delta_{\text{BIC}} > 20$) sind in der Darstellung begrenzt auf $\Delta_{\text{BIC}} = 20$. Für das bessere Verständnis von Bild 5.11 dient folgendes Beispiel: die Bezeichnung BAR(4,1,7) bezieht sich auf das Balkendiagramm in der vierten von vier Reihen, der ersten von vier Spalten und dem siebten von Neun Diagrammen. Folglich zeigt BAR(4,1,7) in der unteren linken Ecke für eine Grundgesamtheit von $c_1 = 8,5$, $c_2 = -10$, $c_3 = 1$, $c_4 = -8$, $c_5 = 11$ und $c_6 = -2$, dass der minimale BIC-Wert von Modell IV erreicht wird, $\Delta_{\text{BIC,I}} \geq 20$, $\Delta_{\text{BIC,II}} \approx 14$ und $\Delta_{\text{BIC,III}}$ nahezu 0 ist. Zu beach-

ten ist, dass am linken Rand von Bild 5.11 die Werte von c_3 für jede Reihe, am rechten Rand die Skala von Δ_{BIC} und am unteren Rand die Werte von c_4 für jede Spalte – wobei die oberen Werte zu den oberen Diagrammen zählen etc. – dargestellt sind.

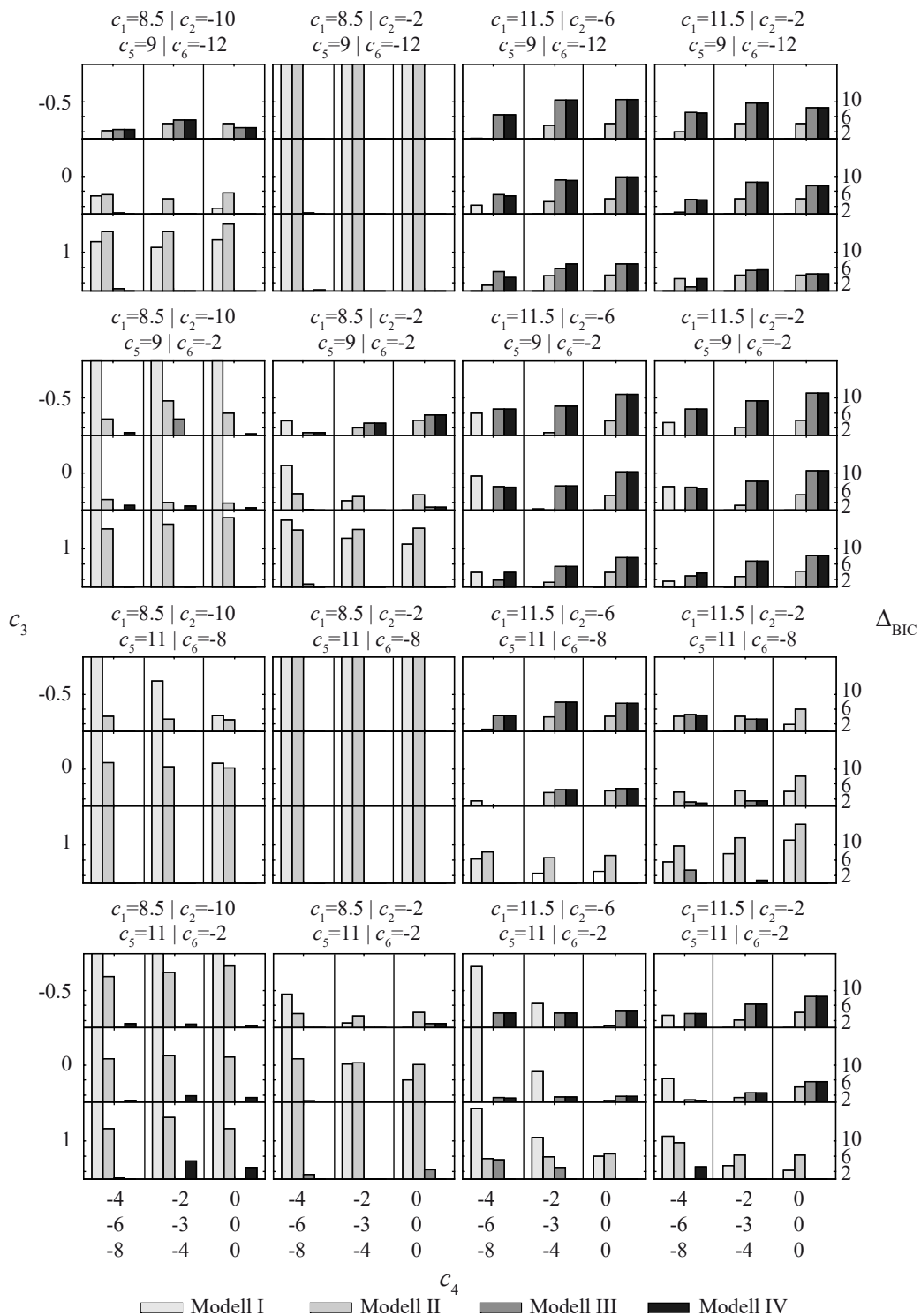


Bild 5.11: Differenzen der BIC-Werte Δ_{BIC} zwischen Modell i und dem Modell mit dem minimalen BIC-Wert in Abhängigkeit der Modellkoeffizienten c (Stichprobenumfang $n_{ges} = 60$)

Die zusammengefassten Ergebnisse der Studie sind:

- (1) Die Δ_{BIC} Werte der Modelle III und IV sind in den meisten Szenarien kleiner, was eine Entscheidung gegen die Modelle I und II befürwortet.
- (2) Eine deutlich kleinere ausfallfreie Zeit gegenüber dem Skalenparameter führt zu kleineren Δ_{BIC} Werten der Modelle I und II. Dies geht aus dem oberen rechten Viertel hervor, in dem $c_1 \gg c_5$ und in den meisten Szenarien eine starke Ablehnung der Modelle III und IV zu erkennen ist.
- (3) Im Gegensatz dazu zeigt sich eine starke bzw. sehr starke Ablehnung von Modell II bzw. Modell I, wenn der Skalenparameter η deutlich kleiner als die ausfallfreie Zeit γ ist (unteres linkes Viertel, in dem $c_1 \ll c_5$).
- (4) Wenn die beanspruchungsabhängige Funktion des Formparameters β sich hin zu niedrigeren Werten verschiebt, d. h. c_3 von -0,5 zu 1, wird die Ablehnung der Modelle I und II insgesamt stärker.
- (5) Wenn der Beanspruchungsabhängigkeitsgrad des Formparameters β größer wird, d. h. c_4 von 0 zu negativen Werten, wird die Ablehnung der Modelle I und II ebenfalls insgesamt stärker.
- (6) Eine schwächere Beanspruchungsabhängigkeit des Skalenparameters η , d. h. $c_2 = -2$, kombiniert mit einer starken Beanspruchungsabhängigkeit der ausfallfreien Zeit γ , d. h. $c_6 = -12$ bzw. -8 , führt zu einer sehr starken Entscheidung für die Modelle III und IV (siehe BAR(1,2,*) and BAR(3,2,*)).

Die Punkte (3) und (6) zusammengenommen, bestätigen die in Kapitel 3.4 aufgestellte These bezüglich Risseinleitung und Rissfortschritt bei Ermüdung.

Eine Untersuchung derselben Szenarien mit einem verdoppelten Stichprobenumfang führt insgesamt zu einer Abnahme der Δ_{BIC} Werte bei den Modellen III und IV und einer Zunahme der Δ_{BIC} Werte bei den Modellen I und II. Das heißt, die Performance der Modelle III und IV wird besser.

Zu beachten ist, dass einzelne in Bild 5.11 dargestellte Resultate abweichen können, abhängig von der Konfiguration des angewandten Algorithmus (siehe Kapitel 5.2.2). Dennoch können die zusammengefassten Erkenntnisse allgemein begründet werden.

5.3 Quantifizierter Experte

Expertenwissen wird bevorzugt in frühen Phasen genutzt, wenn womöglich gar keine weiteren Informationen vorliegen, oder auch als Vorwissen eingesetzt, welches dann mittels neuer Erkenntnisse (beispielsweise Versuchsdaten) aktualisiert wird. Dabei gibt es zwei wesentliche Probleme im Umgang mit Expertenwissen [MaWa82]: eine individuelle Beurteilung von unsicheren Mengen zu erhalten und zu quantifizieren,

was entscheidend ist, wenn nur ein Experte involviert ist²⁸ sowie die Schwierigkeit verschiedene Expertenmeinungen zu aggregieren.

Der Beurteilung eines Experten kommt somit eine entscheidende Bedeutung zu. In [GrDr03] wird Expertenwissen beispielsweise zur Schätzung von Ausfallraten verwendet. Die Beurteilung einzelner, verschiedener Expertenmeinungen erfolgt hier in Form einer Standardabweichung. Je höher die Standardabweichung wird, desto unsicherer ist die Einschätzung des Experten. Die Bestimmung dieser Standardabweichung ist nicht definiert. Das Aggregieren von verschiedenen Experteneinschätzungen nach [SaMa94] basiert auf der Gewichtung von Betadichten. Die Bestimmung der Gewichtungsfaktoren, welche wiederum einer Beurteilung gleich kommen, ist ebenso nicht festgelegt.

In [Qad14] werden Methoden zur Expertenauswertung und zum Aggregieren von Expertenwissen erläutert. Ziel der Methoden zur Auswertung von Experten ist es nicht deren Aussage zu quantifizieren, sondern die Qualität des Experten zu quantifizieren. Mittels dieser wird schließlich eine Abschätzung eines Vertrauensbereichs für Expertenwissen, ähnlich dem auf Daten basierenden statistischen Vertrauensbereich, ermöglicht.

Das klassische Modell nach Cooke [Coo91], entwickelt an der TU Delft, ist bezüglich der Quantifizierung von Experten das bekannteste Verfahren der letzten Jahre [CoGo08]. Mittels Kernvariablen werden die Experten zunächst getestet. Das Verfahren selbst ist aufgeteilt in Kalibrierung, Information und Entscheidungsprozess. Im letztgenannten ist zudem die Möglichkeit gegeben, Expertenmeinungen zu aggregieren. Die Auswertung vergangener Anwendungen [CEH08] belegen in den meisten Fällen die Leistungsfähigkeit des klassischen Modells gegenüber anderen Methoden, wie die der Gleichbeurteilung von Experten. Die Methode erweist sich jedoch als sehr ressourcenintensiv [CEH08], weshalb ein weiterer Ansatz mittels sozialer Netzwerktheorie untersucht wurde. Die Idee dahinter ist: Beziehungen von Vertretern in einem Netz sozialer Interaktionen sind bedeutender als die Eigenschaften einzelner Vertreter [Han05]. Als bedeutendes und einfach zu messendes Kriterium für die Expertenbeurteilung erscheinen wissenschaftliche Zitierungen [CEH08]. Eine Vergleichsstudie [CEH08] zeigt, dass die Performance der sozialen Netzwerktheorie zwischen dem klassischen Modell nach Cooke und dem gleichgewichteten Ansatz liegt.

²⁸ Ansätze und Literatur siehe [MaWa82] (S. 233f).

5.3.1 Verfahren basierend auf maschinellem Lernen

Ein neues Verfahren wird auf Grundlage von Qaddir [Qad14] entwickelt. Dieses basiert auf maschinellem Lernen [Mit97].

Ausgehend von m Trainingsdaten $(\mathbf{x}^{(i)}, y^{(i)})$ mit $i = 1 \dots m$ und $\mathbf{x} = [x_0, x_1, \dots, x_n]^T$ mit n Eingangsvariablen und $x_0 = 1$ – wird ein Lernalgorithmus genutzt, um eine möglichst gute Annäherung an eine wahre Funktion $y = f(\mathbf{x})$ mittels (linearer) Regressionsanalyse zu erhalten. Die Annäherung wird als Hypothese bezeichnet. Für die Prognose der binären Zuordnung ($y \in \{0,1\}$) einer Person in die Klassen „Nicht-Experte“ und „Experte“ wird die logistische Regression verwendet. Diese führt nicht zu einer Vorhersage eines $y = f(\mathbf{x})$, sondern zu einer Eintrittswahrscheinlichkeit der entsprechenden binären Klassifizierung $y \in \{0,1\}$ in Abhängigkeit der Eingangsvariablen \mathbf{x} [SPN09]. Die Hypothese lautet allgemein

$$h_{\theta}(\mathbf{x}) = g(\boldsymbol{\theta}^T \mathbf{x}) \quad (5.18)$$

mit $\boldsymbol{\theta}^T \mathbf{x} = \sum_{i=0}^n \theta_i x_i$, $x_0 = 1$ und Parametervektor $\boldsymbol{\theta}$. Für die Klassifizierung wird die Sigmoid-Funktion

$$g(z) = \frac{1}{1 + \exp(-z)} \quad (5.19)$$

verwendet²⁹. Gleichung (5.19) in Gleichung (5.18) eingesetzt führt zur Hypothese

$$h_{\theta}(\mathbf{x}) = g(\boldsymbol{\theta}^T \mathbf{x}) = \frac{1}{1 + \exp(-\boldsymbol{\theta}^T \mathbf{x})}, \quad 0 \leq h_{\theta}(\mathbf{x}) \leq 1. \quad (5.20)$$

Eine Sigmoid-Funktion und eine angepasste Entscheidungsgrenze, welche die beiden möglichen Klassen trennt, sind in Bild 5.12 dargestellt. Die Entscheidungsgrenze ergibt sich aus der Kostenfunktion und entspricht dem Fall, in dem die Sigmoid-Funktion $g(z) = g(\boldsymbol{\theta}^T \mathbf{x}) = 0,5$ ist.

Die Kostenfunktion der logistischen Regression ist nach [Tiw15] definiert zu

$$J(\boldsymbol{\theta}) = -\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m y^{(i)} \ln[h_{\theta}(\mathbf{x}^{(i)})] + (1 - y^{(i)}) \ln[1 - h_{\theta}(\mathbf{x}^{(i)})]. \quad (5.21)$$

Je nachdem, ob das Label y gleich 1 oder 0 ist, wird der erste oder zweite Term der Gleichung aktiviert. Die Schätzung des Parameters $\boldsymbol{\theta}$ wird durch Minimierung der Kostenfunktion (zum Beispiel MLE, siehe Kapitel 2.5) erreicht. Die Kostenfunktion misst den Unterschied zwischen den geschätzten und den beobachteten Werten. Die Hypothese $h_{\theta}(\mathbf{x})$ von gegebenen Merkmalen, bei geschätzten Parametern $\boldsymbol{\theta}$, entspricht der Wahrscheinlichkeit ein „Experte“ ($y = 1$) zu sein:

²⁹ Auch andere Funktionen mit s-förmigem Verlauf sind möglich, jedoch hat sich die Sigmoid-Funktion wegen ihrer einfachen Differenzierbarkeit als geeignet erwiesen.

$$h_{\theta}(\mathbf{x}) = P(y = 1 | \mathbf{x}; \theta) = P(y = 1). \quad (5.22)$$

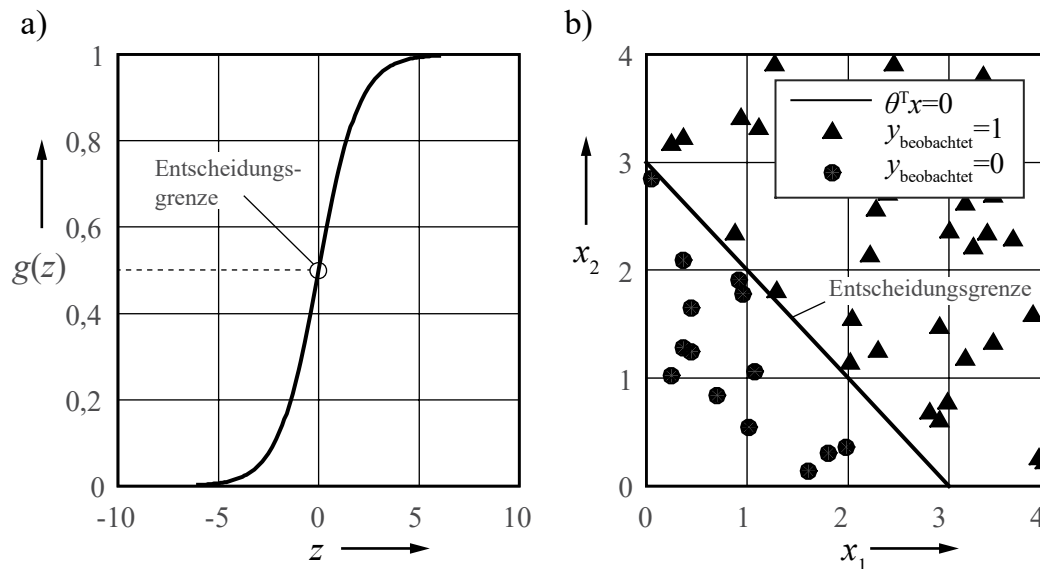


Bild 5.12: a) Sigmoid-Funktion und b) Beispiel einer Entscheidungsgrenze bei logistischer Regression

Schrittweises Vorgehen

Das Verfahren wird in folgende Schritte eingeteilt:

1. Definition des Fachgebietes.
2. Definition der n charakterisierenden Merkmale eines Experten: Ein Merkmal in diesem Sinne ist eine quantitativ messbare Größe, welche die Kompetenz eines Experten charakterisiert. Für spezifische Fragestellungen können beispielsweise folgende Merkmale relevant sein.
 - Berufserfahrung (Jahre)
 - Publikationen (Anzahl)
 - Präsentationen (Anzahl)
 - Bücher (Anzahl)
 - Buchkapitel (Anzahl)
 - Zitierungen (Anzahl)
 - Auszeichnungen (Anzahl)
 - Ehrenmitgliedschaften (Anzahl)
 - ...

3. Sammlung von Trainingsdaten³⁰ von „Experten“ ($y = 1$) und „Nicht-Experten“ ($y = 0$): Für die Suche nach einem Experten kommen verschiedene Möglichkeiten [Qad14] in Betracht, wie die Auswertung von
 - Fehler-, Möglichkeiten- und Einflussanalysen,
 - Expertendatenbanken und einschlägiger Organisationen³¹,
 - sozialen Netzwerken (Linkedin.com, Xing.com, Experteer.com, Careerbuilder.de, Experteer.de, Monster.de, ...) oder ein
 - systematisches Expertenauswahlverfahren (vgl. [ZuGr13]).

Die Datenerfassung selbst kann dann durch Recherche, (automatisierte) Zählungen der Merkmale oder im Fall der Anzahl der Zitierungen, durch die soziale Netzwerktheorie erfolgen. Da es Trainingsdaten sind, muss bekannt sein, ob es sich bei den Personen um „Experten“ ($y = 1$) oder „Nicht-Experten“ ($y = 0$) handelt.

4. Standardisierung der n Merkmale mittels Feature-Skalierung: Transformation der Merkmale unterschiedlicher Skalierung in ein Intervall $-1 \leq x_j \leq 1$ führt zu schneller und effektiver Berechnung sowie zu einer Beschreibung des Einfluss des j -ten Merkmals.

$$x_{j,\text{norm}}^{(i)} = \frac{x_j^{(i)} - \bar{x}_j}{\max(x_j) - \min(x_j)}. \quad (5.23)$$

5. Schätzen der Parameter θ durch Minimierung der Kostenfunktion der logistischen Regression: positive bzw. negative Parameter θ_j bedeuten einen positiven bzw. negativen Effekt des Merkmals auf die Klassifizierung.
6. Berechnung der Hypothese $h_\theta(\mathbf{x})$

Ist das Verfahren einmal für ein im ersten Schritt definiertes Fachgebiet durchgeführt worden, kann es für jede Person, durch Berücksichtigung ihrer personenspezifischen Merkmale, die Wahrscheinlichkeit berechnen, ein „Experte“ zu sein.

5.3.2 Anwendungsbeispiel

Anhand folgenden Beispiels soll die Vorgehensweise verdeutlicht werden. Ziel ist es einen Zuverlässigkeitsexperten zu quantifizieren, um somit einen Vertrauensbereich für seine Aussage zu einer Zuverlässigkeitskenngröße abzuleiten.

Das Fachgebiet ist Zuverlässigkeitstechnik. Als charakteristische Merkmale für einen Experten werden Berufserfahrung im Fachgebiet Zuverlässigkeitstechnik und Publikationen als Hauptautor definiert. Als Trainingsdaten sind 27 Datensätze aktueller und

³⁰ In großen Mengen.

³¹ Für das Fachgebiet der Zuverlässigkeitstechnik können hier Organisationen, wie SRE, ESRA, IEEE RS, ASQ RD oder ähnliche genutzt werden.

ehemaliger Mitarbeiter des Instituts für Maschinenelemente zur Verfügung³². Die Beobachtung „Experte“ oder „Nicht-Experte“ definiert der Autor (Trainingsdaten im Anhang, Tabelle 10.4). Im nächsten Schritt werden die Daten mit Gleichung (5.23) standardisiert. Die Minimierung der Kostenfunktion, Gleichung (5.21), liefert die Schätzung des Parametervektors θ , siehe Tabelle 5.6.

Das Modell zeigt eine gute Anpassung (Nagelkerke- $r^2 > 0,5$). Es ist, wie auch die beiden Merkmale, statistisch signifikant bei $\alpha = 10\%$ Irrtumswahrscheinlichkeit ($p < \alpha$), Tabelle 5.6. Bild 5.13 zeigt das angepasste Modell mit den Trainingsdaten über den standardisierten Merkmalen. Zu sehen sind die beobachteten „Experten“ und „Nicht-Experten“. Auffällig ist der Datensatz P25, welcher als „Nicht-Experte“ beobachtet wurde, durch das Modell aber eine sehr hohe Wahrscheinlichkeit zugeordnet bekommt ein Experte zu sein. Das Modell bestätigt bei allen anderen Datensätzen die Beobachtung, siehe Bild 5.14. Wäre der Datensatz P25 als „Experte“ definiert, wäre die Anpassung des Modells und die Parametersignifikanz erkennbar besser (Tabelle 5.6, rechte Spalte).

Ist das Modell mittels Trainingsdaten angepasst, kann für die Person A die Wahrscheinlichkeit der Zuordnung in die Klasse „Experte“ berechnet werden.

Tabelle 5.6: Ergebniszusammenfassung des Anwendungsbeispiels

Parameter	Wert $y_{P25} = 0$	Wert $y_{P25} = 1$
θ_0	1,512	4,008
θ_1	12,267	28,604
θ_2	10,235	22,124
Nagelkerke- r^2	0,852	0,995
p_{Modell}	7,509e-08	0
$p_{\text{Berufserfahrung}}$	0,0191	1,386e-04
$p_{\text{Hauptautor}}$	0,0763	0,0135

Person A kann 5 Jahre Berufserfahrung in der Zuverlässigkeitstechnik und 4 Publikationen als Hauptautor aufweisen. Mit Gleichung (5.22) ergibt sich eine Wahrscheinlichkeit von 61,7 %. Diese systematisch ermittelte Wahrscheinlichkeit kann nun verwendet werden, um das Erfahrungswissen des Experten mit entsprechender Unsicherheit in verschiedenen Anwendungen zu berücksichtigen.

³² Datenerhebung: Stand Mai 2015.

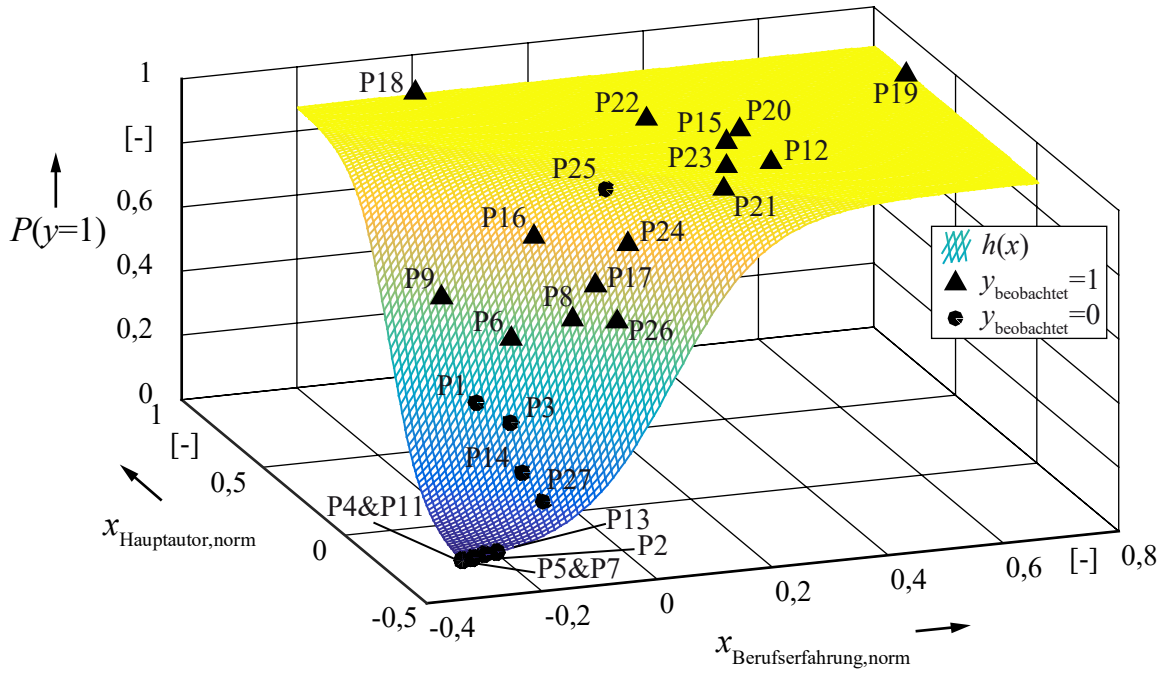


Bild 5.13: Angepasstes Modell für Hypothese $h=P(y=1)$

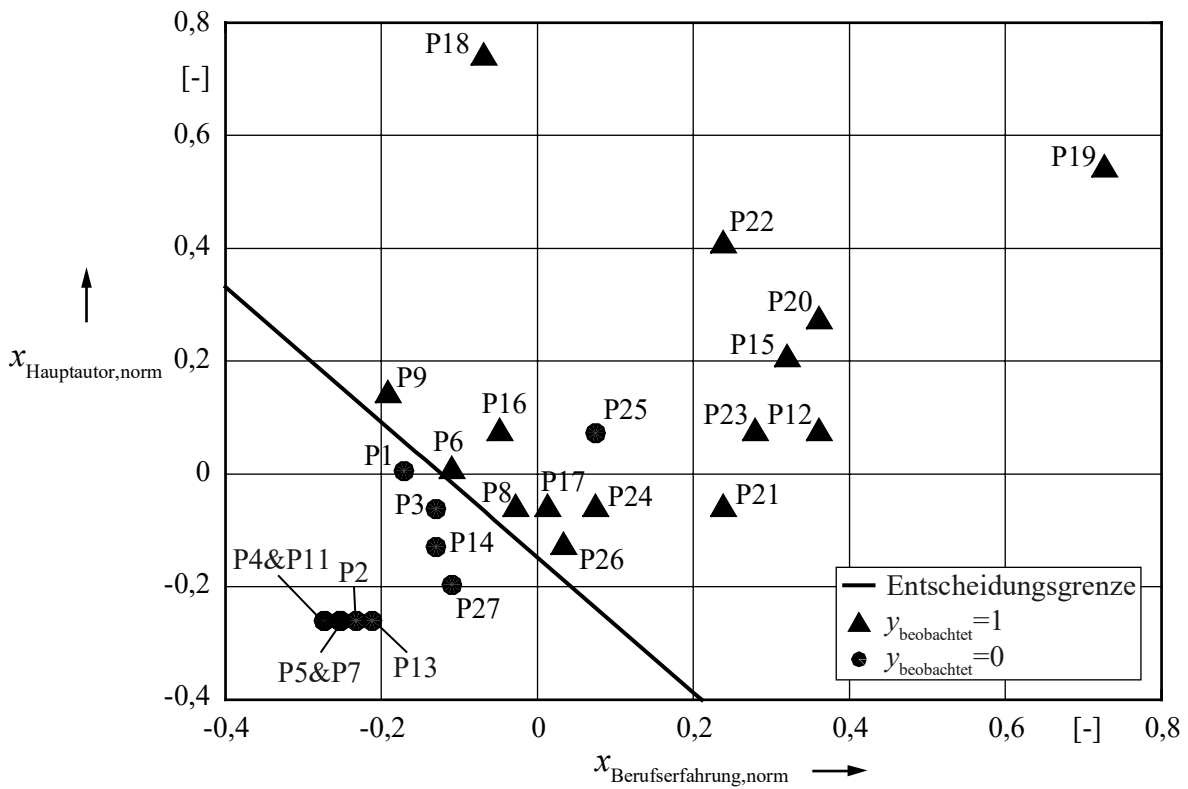


Bild 5.14: Entscheidungsgrenze des angepassten Modells

5.4 Fazit

Die entwickelten erweiterten und neuen Ansätze lassen sich wie folgt zusammenfassen:

Der modifizierte Ansatz der differenzierten Felddatenanalyse ermöglicht zwei Aspekte: zum einen eine Identifikation von bis dahin noch unbekanntem beanspruchungsabhängigen Formparameter und zum anderen eine differenzierte Aufbereitung der Felddaten für eine nachfolgende beanspruchungsabhängige Modellierung, um in einem weiteren Schritt die Weibullparameter aktueller Entwicklungen beanspruchungsgerecht zu bestimmen. Die umfassende Methode nach Henß bietet darüber hinaus eine systematische Möglichkeit, vor dem Hintergrund von wirtschaftlichen Aspekten, bei Unklarheit, die für den Ausfall entscheidende Belastung zu erfassen.

Das für die beanspruchungsgerechte Bestimmung notwendige beanspruchungsabhängige Modell wird durch das erweiterte Weibull-Lebensdauermodell bereitgestellt. Die Erweiterung besteht vor allem darin, dass neben dem Skalenparameter nicht nur der Formparameter, sondern auch die ausfallfreie Zeit beanspruchungsabhängig modelliert ist. Von den beiden neu eingeführten Modellen III und IV ist das Modell III das flexiblere, wohingegen Modell IV speziell für die Anwendung bei Ermüdungs- oder Verschleißerscheinungen entwickelt ist. Mittels beider Modelle können, basierend auf Versuchen bei erhöhten Beanspruchungen, alle Weibullparameter – folglich die Weibullverteilung –, in einem vernünftigen Extrapolationsbereich, beanspruchungsgerecht und direkt bestimmt werden. Werden diese Modelle nicht verwendet, führt das in vielen Fällen zu allzu konservativen Lebensdauern, besonders bei Betrachtung niedriger Ausfallwahrscheinlichkeiten. Das Beibehalten des formalen Zusammenhangs der Weibullverteilung ermöglicht eine direkte Einbindung von parameterspezifischem Vorwissen in das ganzheitliche Verfahren, welches im anschließenden Kapitel vorgestellt wird.

Mit Hilfe des vorgestellten Verfahrens, basierend auf maschinellem Lernen, kann ein Experte quantifiziert werden. Somit ist es möglich zu beurteilen wie sehr seinen Angaben „vertraut“ werden kann – analog zu dem Vertrauensbereich bei Daten. Sind charakteristische Merkmale zunehmend ausgeprägt, ist dies analog zu einem vergrößerten Stichprobenumfang. Die Anwendung dieses damit quantifizierten Experten ermöglicht somit jegliche Angaben entsprechend systematisch zu gewichten. Eine daraus resultierende Information kann dann entweder mit der von anderen Experten kombiniert oder direkt als Vorwissen für nachfolgende Berechnungen genutzt werden.

6 Ganzheitliches Verfahren

Vorausgesetzt die Lebensdauer sei weibullverteilt, dann charakterisieren die Parameter der Weibullverteilung in Abhängigkeit der Beanspruchung das Ausfallverhalten einer Betrachtungseinheit im Feld. Idee des Verfahrens ist es, möglichst viel individuelles Wissen über diese Parameter zusammenzutragen. Oftmals sind Informationen zu einem Parameter einer Verteilung vorhanden. Für den Formparameter existiert beispielsweise eine Vorahnung wie der wahre Parameter sein könnte. Ein Lageparameter, wie die B_q -Lebensdauer geht womöglich aus einer Betriebsfestigkeitsrechnung hervor. Gegebenenfalls kann eine ausfallfreie Zeit direkt oder indirekt über den f_{tB} -Faktor angegeben werden. Meist sind auch Daten vorhanden, welche ebenfalls Informationen über die Parameter im vorliegenden Fall liefern.

Der nachfolgend vorgestellte Ansatz soll nun eine ganzheitliche beanspruchungsrechte Bestimmung des Formparameters ermöglichen. Dies geschieht durch Einbindung aller Verteilungsparameter, da diese zusammen notwendig sind, um letztlich treffende Zuverlässigkeitsprognosen durchzuführen. Dabei kann die Integration der Informationen zu den einzelnen Parametern unabhängig voneinander erfolgen.

Bild 6.1 zeigt den Aufbau des ganzheitlichen Verfahrens. Über allem steht der Satz von Bayes. Dieser dient als Basismodell und führt sämtliche Informationen zusammen. Als Informationen werden aktuelle Beobachtungen und Vorwissen, sowohl aus Daten als auch aus Erfahrung, verstanden. Vorwissen aus Daten wird mit Berücksichtigung eines Transformationsfaktors integriert. Dieser Transformationsfaktor ist, aufgrund der nicht-identischen Grundgesamtheiten, von wesentlicher Bedeutung beim Kombinieren von a priori Daten mit aktuellen Beobachtungen. Dagegen wird das Vorwissen aus Erfahrung direkt für die relevante Betrachtungseinheit erfasst. Die verschiedenen Informationen ergeben sich aus verschiedenen bestehenden Konzepten und Methoden (Kapitel 4), die abhängig von den Randbedingungen angewandt werden können. Ergänzt bzw. ersetzt werden diese von den entwickelten erweiterten und neuen Ansätzen aus Kapitel 5.

Das Verfahren sowie dessen einzelne Elemente werden nachfolgend in diesem Kapitel erläutert.

Die untersuchten Kenngrößen im Kontext dieser Arbeit sind die Weibullparameter. Diese Parameter werden in der Bayes'schen Theorie als Zufallsvariablen dargestellt. Vorhandenes Vorwissen über die Parameter aus verschiedenen Informationsquellen

wird mittels einer a priori Verteilung miteingebunden, um durch Hinzufügen von Informationen aus aktuellen Beobachtungen (Lebensdauerdaten) statistische Schlussfolgerungen über die a posteriori Verteilung zu ziehen.

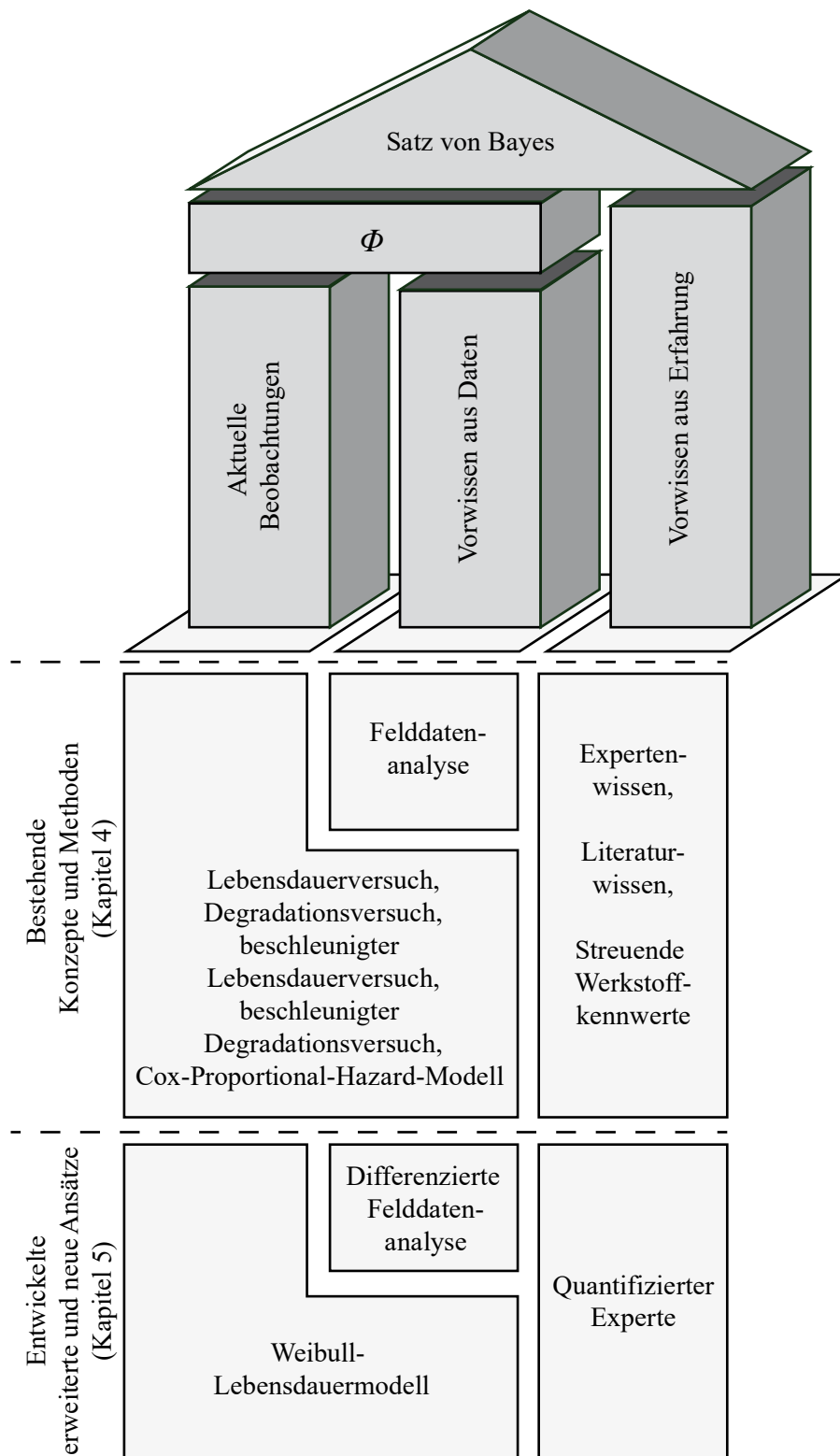


Bild 6.1: Aufbau und Elemente des ganzheitlichen Verfahrens mit Zuordnung der bestehenden Methoden und Konzepte sowie der entwickelten Ansätze

Das Basismodell des hier vorgestellten Verfahrens unterscheidet sich von dem nach Martz und Waller [MaWa82] bezüglich der Berechnung der a posteriori Verteilung insbesondere dadurch, dass hier Vorwissen über den Formparameter, den Skalenparameter und die ausfallfreie Zeit als voneinander unabhängige kontinuierliche Verteilungen berücksichtigt wird und zum anderen das Verfahren nicht auf den Skalen- und Formparameter beschränkt ist.

Liegen keinerlei Informationen aus Daten (aktuelle Beobachtungen und Vorwissen aus Daten) vor, kann lediglich mit Informationen aus Erfahrung gearbeitet werden. Das Verfahren vereinfacht sich deutlich und sieht hierfür nur die Ausführungen in Kapitel 6.4 vor. Dies kann beispielsweise in frühen Phasen bei Neuentwicklungen der Fall sein, wenn keine Daten ähnlicher Betrachtungseinheiten vorliegen. In diesem Fall müssen Informationen zu allen Parametern vorliegen bzw. angenommen werden, welche anschließend mit Hilfe der Monte-Carlo Simulation zu einer Zuverlässigkeitsprognose mit Aussagewahrscheinlichkeit führt.

6.1 Verwendetes Vorwissen

Eine Übersicht möglicher Informationsquellen für Eingangsinformationen für den Entwicklungs- sowie den Zuverlässigkeitsprozess zeigt [Hof13]. Relevant für die Verwendung als Vorwissen sind daraus sowohl zeitlich vorhergehende Zuverlässigkeitsschritte als auch generell das Zuverlässigkeitsinformationsmodell.

Für das ganzheitliche Verfahren ist, im Sinne von Kapitel 2.7.2, informatives Vorwissen von Bedeutung. Informatives Vorwissen bedeutet streng genommen, dass aus verschiedenen Quellen Wissen über Parameter vorhanden ist, bevor aktuelle Beobachtungen gemacht werden. Nach Hamada et al. [HWRM08] kommen generell sechs verschiedene Quellen in Betracht: Physikalische / chemische Theorie, Berechnung, Ergebnisse vorheriger Musterstände, branchenspezifische generische Zuverlässigkeitsdaten, Erfahrung mit früheren ähnlichen Anwendungen und Expertenmeinungen. Meeker & Escobar [MeEs98] unterscheiden schlicht in Daten aus der Vergangenheit sowie Expertenwissen oder subjektive Meinung.

Als informatives Vorwissen aus Daten werden nachfolgend konkret die Quellen Versuchsdaten von Vorgängern, Felddaten von Vorgängern oder Versuchsdaten aus vorherigen Musterständen (falls bereits auf Lebensdauer erprobt) zusammengefasst. Die Integration dieser Daten wird ausführlich in Kapitel 6.3 erläutert.

Sind Erfahrung, Expertenwissen oder subjektive Meinung über einen möglichen wahren Parameter vorhanden, werden diese zu Vorwissen aus Erfahrung in Kapitel 6.4 zusammengefasst. Das Vorwissen über die Verteilungsparameter wird mittels geeigneter Verteilungsfunktionen abgebildet, siehe Kapitel 6.2. Prinzipiell können darüber

hinaus weitere Quellen von Vorwissen, wie Literatur oder Datenbanken, mit anderen Verteilungen integriert werden. Als Eingangsdaten für das ganzheitliche Verfahren sind die Annahme eines Median und einer Standardabweichung für den jeweiligen Parameter bei einem definierten Beanspruchungsniveau integrierbar.

6.2 A priori Verteilungsfunktionen

Für die Abbildung des Vorwissens über die Verteilungsparameter und schließlich zur Einbindung in das Bayes'sche Modell, muss eine geeignete a priori Dichtefunktion für den Parameter definiert werden. In der Regel werden für a priori Verteilungen konjugierte Verteilungen verwendet, welche dieselbe funktionale Form wie die Likelihoodfunktion (Stichprobenfunktion) aufweisen und daher mathematisch einfach handhabbar sind. Jedoch sollte dies nicht der Grund sein, wieso eine solche konjugierte Verteilung verwendet wird, wenn sie nicht als geeignet erscheint [HWRM08]. Das Problem hierbei ist, dass das Lebensdauermerkmal bei Ermüdungs- und Verschleißausfällen weibullverteilt ist und für die Weibullverteilung bei unbekanntem Verteilungsparameter keine konjugierte Verteilung existiert [HWRM08].

Somit gilt es eine geeignete a priori Verteilung zu definieren. Die Anwendung der ML-Theorie, die zur Schätzung bei vorhandenen Daten verwendet wird (siehe Kapitel 5.2), ermöglicht bei hinreichend kleiner Varianz eine näherungsweise normalverteilte Beschreibung der Verteilungsparameter³³. Als Eingangsinformationen stehen ein Schätzer und dessen Varianz bzw. Standardabweichung direkt zur Verfügung.

Nachfolgend werden für verschiedene Definitionsbereiche die Herleitung der Verteilung dargelegt. Die Zufallsvariable $Z: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mit der Verteilungsfunktion $F_Z(z) = P(Z \leq z)$ sei standardnormalverteilt, d. h. $Z \sim N(0,1)$.

6.2.1 Positiver Definitionsbereich

Es sei $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$ Zufallsvariable mit der Verteilungsfunktion $F_X(x) = P(X \leq x)$. In Anlehnung an Nelson [Nel04a] kann bei näherungsweise normalverteilten Vertrauensintervallen die 100γ %-Vertrauensgrenze berechnet werden zu

$$x_\gamma = \hat{x} \exp\left(\frac{z_\gamma s(\hat{x})}{\hat{x}}\right), \quad (6.1)$$

mit dem Standardnormalquantil z_γ und den Konstanten, dem Parameterschätzer \hat{x} und dessen Standardabweichung $s(\hat{x})$; wobei die Anpassung dieser Vertrauensgrenzen mit größerem γ und mit kleinerem Stichprobenumfang schlechter wird. Aufgelöst nach dem Standardnormalquantil ergibt sich

³³ Im Einklang mit näherungsweise normalverteilten Konfidenzintervallen bei Verwendung der MLE-Theorie.

$$z_\gamma = \frac{\hat{x}}{s(\hat{x})} \ln \frac{x}{\hat{x}}. \quad (6.2)$$

Dieser Zusammenhang wird nachfolgend als Modell für die Transformation verwendet. Somit gilt für die Zufallsvariablen Z und X der Zusammenhang

$$Z = g(X) = \frac{\hat{x}}{s(\hat{x})} \ln \frac{X}{\hat{x}} \quad \text{und} \quad X = g^{-1}(Z) = \hat{x} \exp\left(\frac{Zs(\hat{x})}{\hat{x}}\right). \quad (6.3)$$

Weiter gilt

$$F(z) = F[g(x)]. \quad (6.4)$$

Die Verteilungsfunktion der standardnormalverteilten Zufallsvariablen Z ist

$$F(z) = P(Z \leq z) = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\tilde{z}^2}{2}\right) d\tilde{z}. \quad (6.5)$$

Gleichung (6.3) in Gleichung (6.5) eingesetzt und die Substitutionen

$$\begin{aligned} z &= g(x) \\ dz &= g'(x) dx \end{aligned} \quad (6.6)$$

führen zu der Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen X

$$\begin{aligned} F(z) = P(Z \leq z) &= \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\tilde{z}^2}{2}\right) d\tilde{z} \\ &= \int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\hat{x}}{s(\hat{x})} \ln \frac{\tilde{x}}{\hat{x}}\right)^2\right] \frac{\hat{x}}{s(\hat{x})} \frac{1}{\tilde{x}} d\tilde{x} \\ &= P(X \leq x) = F(x). \end{aligned} \quad (6.7)$$

Durch Ableitung dieser Gleichung nach x folgt die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\hat{x}}{s(\hat{x})} \ln \frac{x}{\hat{x}}\right)^2\right] \frac{\hat{x}}{s(\hat{x})} \frac{1}{x}, \quad x > 0. \quad (6.8)$$

Gleichung (6.8) gilt für positiv definierte Verteilungsparameter und ist für eine hinreichend kleine Varianz bzw. Standardabweichung näherungsweise normalverteilt.

6.2.2 Definitionsbereich in (0, 1)

Es sei $X: \Omega \rightarrow (0, 1)$ Zufallsvariable mit der Verteilungsfunktion $F_X(x) = P(X \leq x)$. In Anlehnung an Nelson [Nel04a] kann bei näherungsweise normalverteilten Vertrauensintervallen die 100γ %-Vertrauensgrenze berechnet werden zu

$$x_\gamma = \frac{\hat{x}}{\hat{x} + (1 - \hat{x}) \exp\left(-\frac{z_\gamma s(\hat{x})}{\hat{x}(1 - \hat{x})}\right)}, \quad (6.9)$$

mit dem Standardnormalquantil z_γ und den Konstanten, dem Parameterschätzer \hat{x} und dessen Standardabweichung $s(\hat{x})$; wobei die Anpassung dieser Vertrauensgrenzen mit größerem γ und mit kleinerem Stichprobenumfang schlechter wird. Aufgelöst nach dem Standardnormalquantil ergibt sich

$$z_\gamma = -\frac{\hat{x}(1-\hat{x})}{s(\hat{x})} \ln \left(\frac{\frac{\hat{x}}{x_\gamma} - \hat{x}}{1-\hat{x}} \right). \quad (6.10)$$

Dieser Zusammenhang wird nachfolgend als Modell für die Transformation verwendet. Somit gilt für die Zufallsvariablen Z und X der Zusammenhang

$$Z = g(X) = -\frac{\hat{x}(1-\hat{x})}{s(\hat{x})} \ln \left(\frac{\frac{\hat{x}}{X} - \hat{x}}{1-\hat{x}} \right) \quad \text{und} \quad (6.11)$$

$$X = g^{-1}(Z) = \frac{\hat{x}}{\hat{x} + (1-\hat{x}) \exp \left(-\frac{Zs(\hat{x})}{\hat{x}(1-\hat{x})} \right)}.$$

Weiter gilt Gleichung (6.4). Gleichung (6.11) in (6.5) eingesetzt und die Substitutionen nach Gleichung (6.6) führen zu der Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen X

$$\begin{aligned} F(z) = P(Z \leq z) &= \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{\tilde{z}^2}{2} \right) d\tilde{z} \\ &= \int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left\{ \frac{\hat{x}(1-\hat{x})}{s(\hat{x})} \ln \left(\frac{\frac{\hat{x}}{\tilde{x}} - \hat{x}}{1-\hat{x}} \right) \right\}^2 \right] \\ &\quad \cdot \frac{\hat{x}^2(\hat{x}-1)}{s(\hat{x})\tilde{x}^2 \left(\hat{x} - \frac{\hat{x}}{\tilde{x}} \right)} d\tilde{x} \\ &= P(X \leq x) = F(x). \end{aligned} \quad (6.12)$$

Durch Ableitung dieser Gleichung nach x folgt die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left\{ \frac{\hat{x}(1-\hat{x})}{s(\hat{x})} \ln \left(\frac{\frac{\hat{x}}{x} - \hat{x}}{1-\hat{x}} \right) \right\}^2 \right] \frac{\hat{x}^2(\hat{x}-1)}{s(\hat{x})x^2 \left(\hat{x} - \frac{\hat{x}}{x} \right)}, \quad 0 < x < 1. \quad (6.13)$$

Gleichung (6.13) gilt für im Intervall $(0, 1)$ definierte Verteilungsparameter und ist für eine hinreichend kleine Varianz bzw. Standardabweichung näherungsweise normalverteilt.

6.2.3 Näherungsweise normalverteilter Parameter

Im Falle eines angenommenen näherungsweise normalverteilten Verteilungsparameters sei die Zufallsvariable $X \sim N_{app}(x', s(x'))$. Es gilt

$$f(x) = \frac{1}{s(x')\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-x'}{s(x')}\right)^2\right], \quad x > 0, \quad (6.14)$$

mit den angenommenen Parametern x' und $s(x')$. Aufgrund des positiven Definitionsbereichs ist das Integral über diese Dichtefunktion kleiner eins. Diese Abweichung wird für folgende Anwendung jedoch vernachlässigt.

6.3 Integration von Informationen aus Daten

Informationen in Form von Daten, beispielsweise Ausfallzeiten, werden nicht als a priori Verteilung $g(\boldsymbol{\theta})$ berücksichtigt, sondern indirekt in die Likelihoodfunktion der aktuellen Beobachtungen integriert, siehe Gleichung (2.29). Dies geschieht basierend auf folgender Modellvorstellung:

Ist nur ein Datensatz vorhanden, fließt dieser mittels Likelihoodfunktion nach klassischem Satz von Bayes ein. Sind mehrere Datensätze vorhanden, können diese nach [MaWa82] sequentiell eingebunden werden.

Für einen Datensatz \mathbf{x}_1 und Vorwissen über die Verteilungsparameter $\boldsymbol{\theta}$ besagt der Satz von Bayes

$$g(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x}_1) \propto g(\boldsymbol{\theta})L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x}_1). \quad (6.15)$$

Kommt nun ein zweiter Datensatz \mathbf{x}_2 , statistisch unabhängig von \mathbf{x}_1 , hinzu, so ist

$$\begin{aligned} g(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) &\propto g(\boldsymbol{\theta})L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x}_1)L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x}_2) \\ &\propto g(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x}_1)L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x}_2) \end{aligned} \quad (6.16)$$

Somit kann jede Beobachtung separat verarbeitet werden. Liegen beispielsweise i Beobachtungen vor, so ergibt sich für den Zeitpunkt der i -ten Beobachtung

$$g(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_i) \propto g(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{i-1})L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x}_i), \quad i = 2, \dots, n \quad (6.17)$$

und für die erste Beobachtung $g(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x}_1) \propto g(\boldsymbol{\theta})L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x}_1)$.

Das bedeutet, wenn aktuelle Beobachtungen und Vorwissen in Form von Daten vorhanden sind, können diese in einer Likelihoodfunktion zusammengeführt werden. Da das Vorwissen jedoch in der Regel aus einer mit den aktuellen Beobachtungen nicht identischen Grundgesamtheit entstammt und das Beanspruchungsniveau der Daten unterschiedlich ist, können Gleichungen (6.15) – (6.17) nicht direkt angewandt werden. Daher wird nachfolgende Verfahrensweise vorgeschlagen.

6.3.1 Szenarien und Ablauf

Das Verfahren ist in verschiedenen Szenarien durchführbar, Tabelle 6.1. Voraussetzung ist, dass entweder die Vorwissensdaten (Fall A), die aktuellen Beobachtungen (Fall B) oder beide (Fall C) auf mehreren Beanspruchungsniveaus vorliegen müssen, so dass in mindestens einem Fall das Weibull-Lebensdauermodell (WLM) angewandt werden kann, um den Zusammenhang zwischen Beanspruchung und Verteilungsparameter zu beschreiben.

Tabelle 6.1: Szenarien für die Zusammenführung der Daten

	Fall A	Fall B	Fall C
Aktuelle Beobachtungen	Beanspruchungsniveau S_x	Mehrere Beanspruchungsniveaus S_1, S_2, \dots, S_n	Mehrere Beanspruchungsniveaus S_1, S_2, \dots, S_n
a priori Daten	Mehrere Beanspruchungsniveaus S_1, S_2, \dots, S_n	Beanspruchungsniveau S_x	Mehrere Beanspruchungsniveaus S_1, S_2, \dots, S_n

Bild 6.2 zeigt dies für die Fälle A und B. Fall A tritt zum Beispiel ein, wenn frühere Versuche (älterer Musterstand, Vorgängerprodukt, ...) auf n Beanspruchungsniveaus S_1, S_2, \dots, S_n vorliegen und in der laufenden Entwicklung aktuell eine Versuchsreihe auf einem Beanspruchungsniveau S_x durchgeführt wird. Liegen im Fall C die a priori Daten und aktuelle Beobachtungen auf mehreren Beanspruchungsniveaus vor, vereinfacht sich der Ablauf, Bild 6.3.

Allgemein beginnt der Ablauf mit der Beschreibung des Zusammenhangs zwischen Beanspruchung und Verteilungsparameter mittels WLM (Kapitel 5.2). Die geschätzten Modellkoeffizienten und das Perlenschnurverfahren (PSV) ermöglichen es sämtliche Daten auf ein identisches Beanspruchungsniveau zu transformieren. Auf diesem wird der Transformationsfaktor bestimmt. Nach Transformation auf Feldbeanspruchung werden gegebenenfalls die Ausfalldaten zu Intervalldaten transformiert, um der nicht-identischen Grundgesamtheit, und der Modellunsicherheit in den Fällen A und B, bei Übertragung gerecht zu werden. Letztlich führt dieses Vorgehen zu einer kombinierten Likelihoodfunktion der verfügbaren Daten. Sind mehrere a priori Datensätze vorhanden wird der entsprechende Pfad mehrmals durchlaufen.

Die nachfolgenden Ausführungen zu den einzelnen Schritten beziehen sich jeweils auf den Fall A. In den Fällen B und C ist sinngemäß zu verfahren.

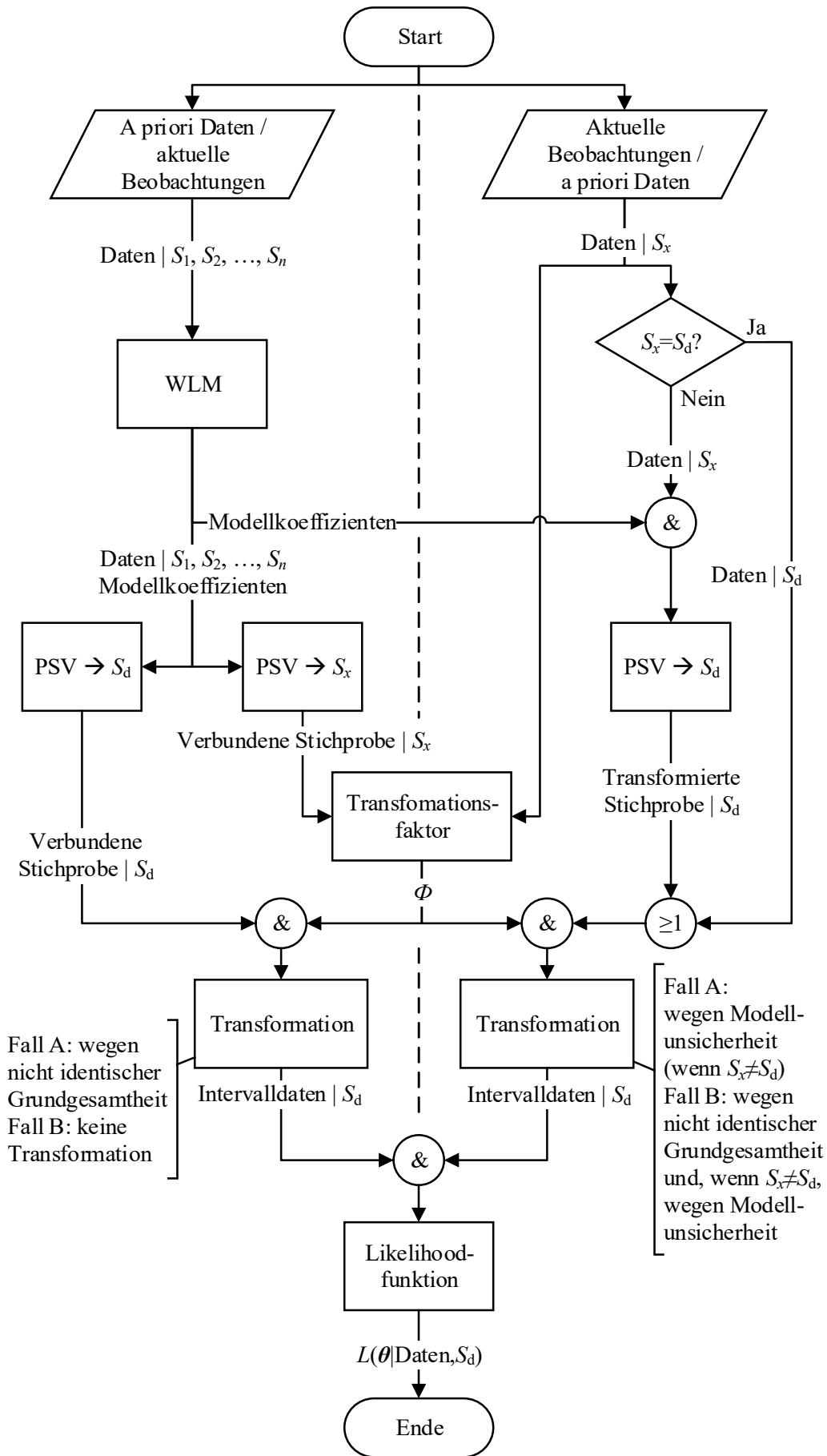


Bild 6.2: Zusammenführen der Daten in eine Likelihoodfunktion (Fall A und B)

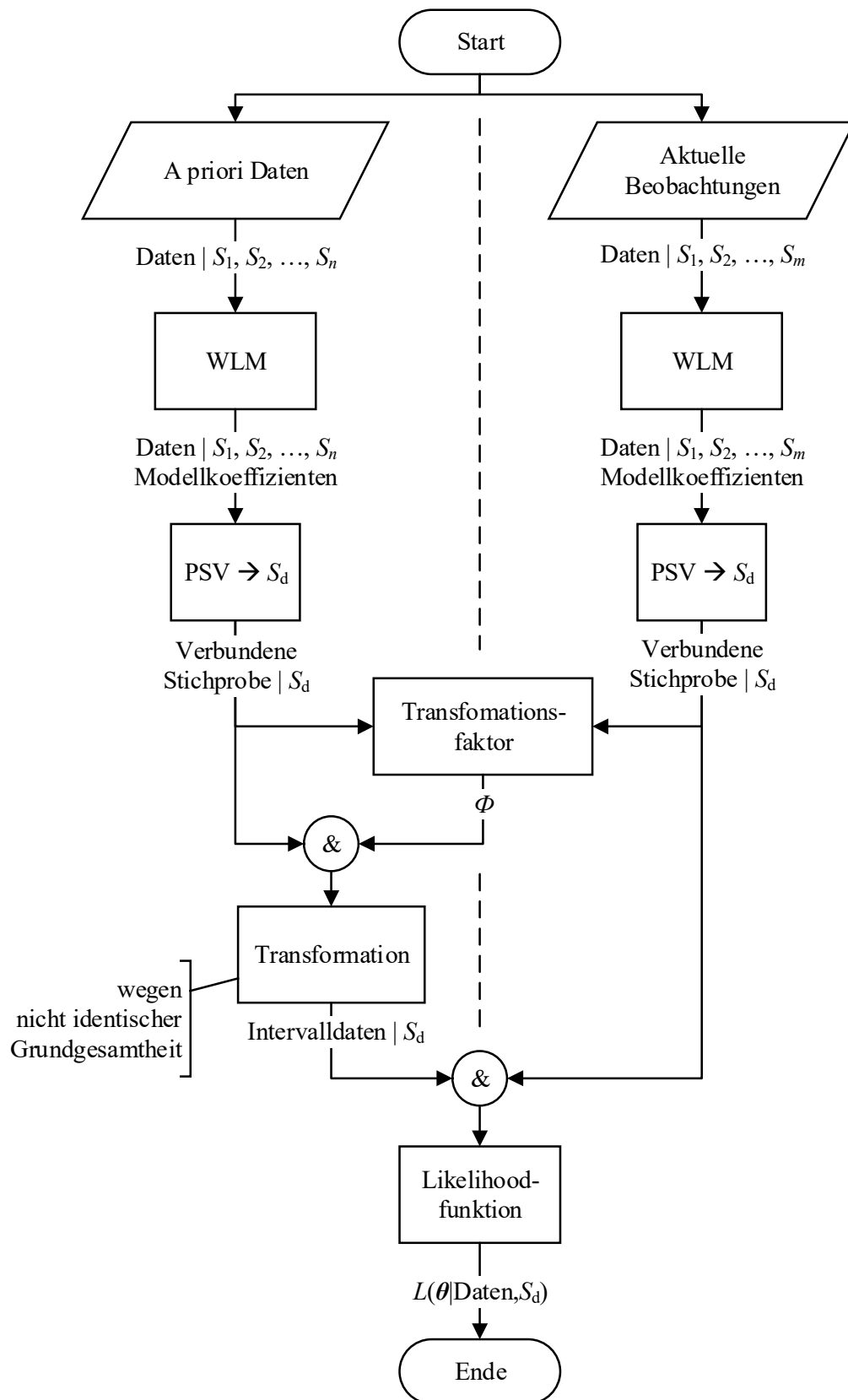


Bild 6.3: Zusammenführen der Daten in eine Likelihoodfunktion (Fall C)

6.3.2 Perlenschnurverfahren für beanspruchungsabhängige Parameter

Die Umsetzung des PSV geschieht analog zu dem Perlenschnurverfahren bei geraden Lebensdauerlinien im doppeltlogarithmischen Diagramm (siehe [Mau99]).

Nach Schätzung der jeweils beanspruchungsabhängigen Verteilungsparameter mittels dem vorgestellten WLM (siehe Kapitel 5.2) werden in einem ersten Schritt die Ausfallwahrscheinlichkeiten der Daten bei den verschiedenen Beanspruchungsniveaus $F_i(t_i|S_i)$ berechnet mit

$$F(t_i|S_i) = 1 - \exp \left[- \left(\frac{t_i - \gamma(S_i)}{\eta(S_i)} \right)^{\beta(S_i)} \right] \quad (6.18)$$

und den Modellgleichungen in Tabelle 5.1. Mit $F(t_i|S_i) = F(t_i^*|S_x) = u_i$ und Umformung der Gleichung (6.18) nach der Ausfallzeit t_i^* bei Beanspruchung S_x kann diese berechnet werden zu

$$t_i^*(S_x) = \gamma(S_x) + \eta(S_x) \left[\frac{\beta(S_x)}{\sqrt{-\ln(1 - u_i)}} \right]. \quad (6.19)$$

Dies führt zu einer transformierten Stichprobe auf dem gewünschten Beanspruchungsniveau S_x , siehe Bild 6.4.

Wird diese Stichprobe bei Feldbeanspruchung ermittelt, ist in Gleichung (6.19) $S_d = S_x$ zu setzen. Sind n Daten auf mehrere Beanspruchungsniveaus verteilt vorhanden, beträgt der Stichprobenumfang auf dem gewünschten Beanspruchungsniveau ebenfalls n . Dadurch wird den Daten auf dem gewünschten Beanspruchungsniveau eine neue Rangzahl zugeordnet.

Zusammen mit den aktuellen Beobachtungen bei Beanspruchung S_x , wird nun ein quantitativer Transformationsfaktor Φ für zwei Stichproben nach [Hit07], siehe Kapitel 2.7.3, bestimmt.

6.3.3 Transformation der a priori Daten

Zunächst wird die verbundene Stichprobe bei Feldbeanspruchung S_d , mittels Transformationsfaktor Φ , zu Intervalldaten überführt. Dies führt auf folgende Annahme zurück:

Vorwissen wird prinzipiell nur bei subjektiv ähnlichen Betrachtungseinheiten verwendet. Der Transformationsfaktor beschreibt den Grad der Ähnlichkeit zweier Grundgesamtheiten. Je weniger sich zwei Grundgesamtheiten A und B ähneln, desto wahrscheinlicher ist es, dass die Ranggröße $t_{i,A}$ einer Stichprobe aus Grundgesamtheit A von der Ranggröße $t_{i,B}$ einer Stichprobe aus Grundgesamtheit B, bei gleich großem Stichprobenumfang, weiter entfernt ist.

Folglich wird für jede Ranggröße t_i ein Intervall mit Anfang und Ende definiert in dem die „wahre“ Lebensdauer bei Berücksichtigung der nicht-identischen Grundgesamtheit liegt:

$$\begin{aligned} t_{i,\text{Anf}} &= \Phi t_i, \\ t_{i,\text{End}} &= \frac{t_i}{\Phi}. \end{aligned} \quad (6.20)$$

Ist $\Phi = 1$, so werden die Daten der verbundenen Stichprobe in ihrer ursprünglichen Form verwendet. Für $\Phi \rightarrow 0$ wird das Intervall sehr groß und quasi kein Vorwissen übertragen. Dies geht einher mit [Kro04].

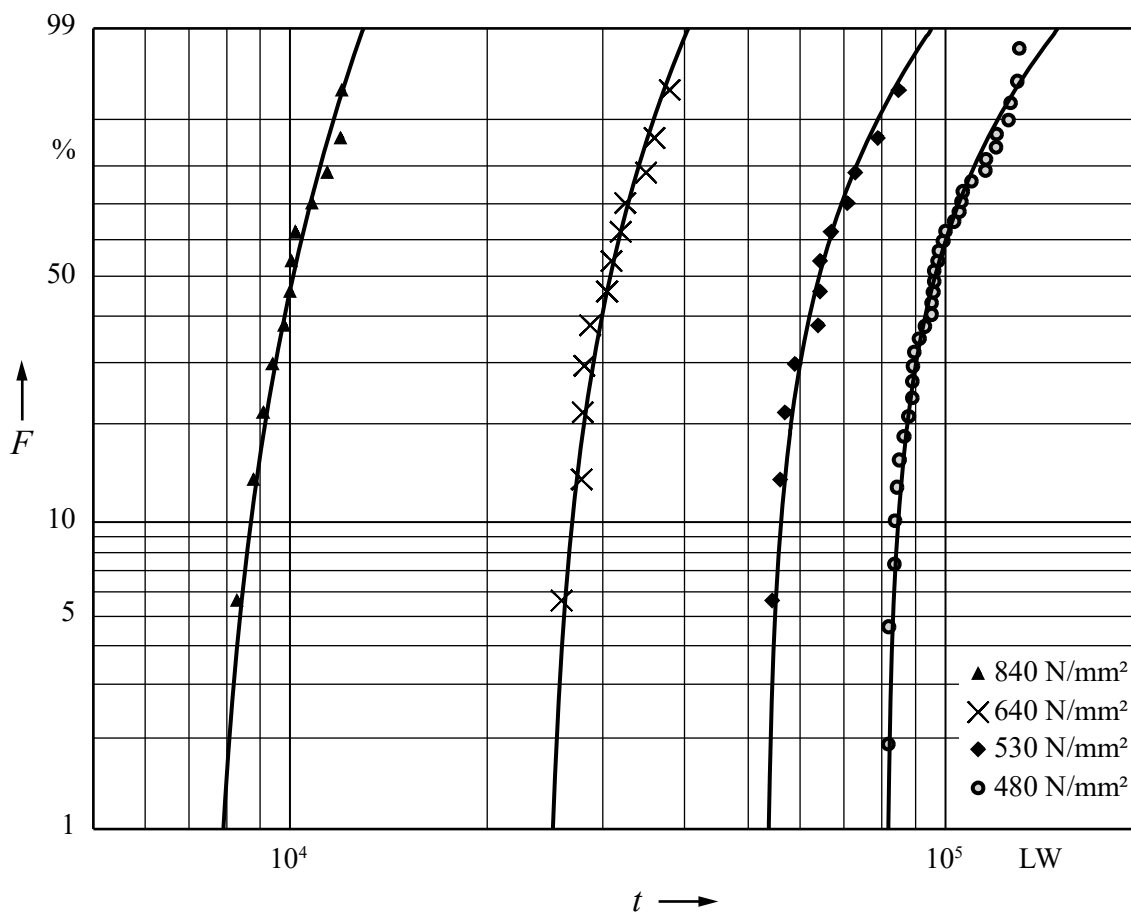


Bild 6.4: Beispiel für Stichproben verschiedener Beanspruchungsniveaus und deren verbundene Stichprobe bei Beanspruchung 480 N/mm² nach Anwendung des Perlen-schnurverfahrens

Anwendungsbeispiel

Die Transformation in Intervalldaten wird anhand eines Beispiels mit synthetischen Daten verdeutlicht. Aus Versuchen des Vorgängerprodukts liegen je 16 Prüflinge auf drei Beanspruchungsniveaus a priori vor, siehe Tabelle 10.5 im Anhang. Zudem sind 21 aktuelle Beobachtungen bei Feldbeanspruchung S_d vorhanden, siehe Tabelle 10.6 im Anhang. Das PSV (Kapitel 6.3.2) liefert eine verbundene Stichprobe der a priori

Daten bei Feldbeanspruchung. Eine Weibullanalyse dieser beiden Datensätze zu diesem Zeitpunkt entspricht einer vollständigen Übertragung ($\Phi = 1$) der Vorkenntnis und führt zu einer zu guten Schätzung. Wird der nicht-identischen Grundgesamtheit Rechnung getragen ($\Phi = 0,7$), werden mit Gleichung (6.20) die Ausfalldaten der verbundenen Stichprobe der a priori Daten zu Intervalldaten transformiert.

Bild 6.5 zeigt die Auswirkung der zusätzlichen Informationen im Weibulldiagramm.

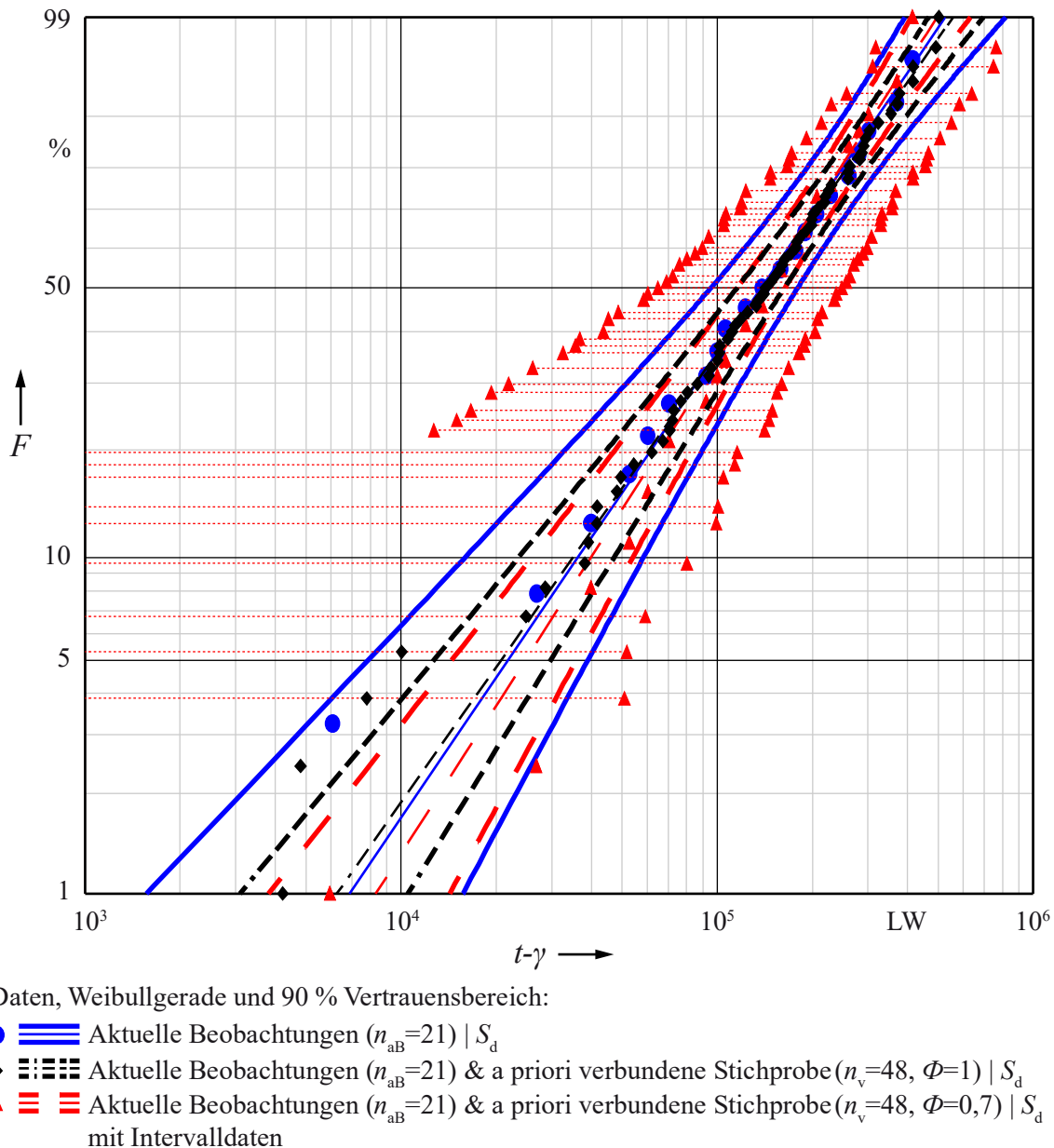


Bild 6.5: Kombination von Daten zu einer Likelihoodfunktion³⁴

³⁴ Anmerkungen zum Diagramm:

- Schätzung ist mit „wahrer“ dreiparametrischer MLE in Weibull++9 durchgeführt.
- Lebensdauern sind um die jeweilige ausfallfreie Zeit transformiert dargestellt.
- Datenpunkte sind zur Darstellung den Medianrängen zugeordnet.

Deutlich zu erkennen ist ein zunächst stark verkleinerter Vertrauensbereich durch Integration der a priori Daten bei $\Phi = 1$ und ein dazu wieder leicht vergrößerter, steilerer Vertrauensbereich bei $\Phi = 0,7$.

Das Beispiel zeigt, dass zum einen durch Integration der a priori Daten – wie zu erwarten war – die Varianz des Formparameters reduziert wird und zum anderen durch die Transformation in Intervalldaten die Varianz wiederum vergrößert wird, siehe Bild 6.6. Insgesamt kann die Varianz des Formparameters reduziert werden. Dagegen ist die Varianz des Skalenparameters lediglich beeinflusst durch den veränderten Stichprobenumfang. Eine Variation des Transformationsfaktors hat darauf kaum Einfluss.

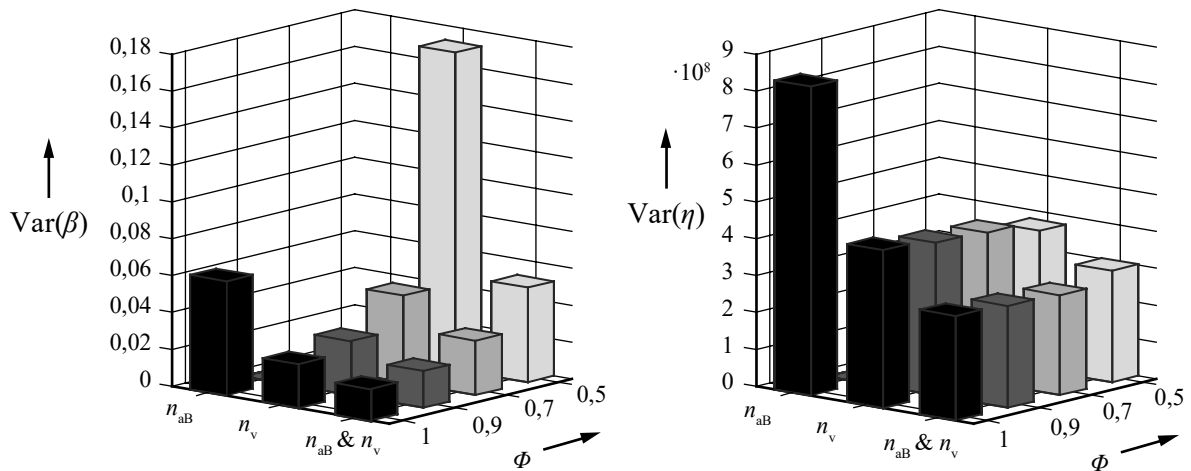


Bild 6.6: Einfluss der berücksichtigten Daten und des Transformationsfaktors auf die Varianz von Form- und Skalenparameter (siehe Tabelle 10.7 im Anhang)

6.3.4 Transformation der aktuellen Beobachtungen

Liegen die aktuellen Beobachtungen nicht bei Feldbeanspruchung sondern bei einer anderen Beanspruchung vor, ist ebenso das PSV anzuwenden, um die Beobachtungen auf Feldbeanspruchung zu transformieren. Falls die aktuellen Beobachtungen, wie die a priori Daten, auf mehreren Beanspruchungsniveaus vorliegen, kann auch hier ein WLM angepasst und analog dazu das PSV angewandt werden, um eine verbundene Stichprobe bei Feldbeanspruchung zu erhalten. Falls nicht, wird wie folgt verfahren:

Bei Anwendung des PSV auf die aktuellen Beobachtungen besteht Unsicherheit, da die Modellkoeffizienten mit Daten aus einer nicht-identischen Grundgesamtheit geschätzt werden. Daher wird auch bei aktuellen Beobachtungen der Transformationsfaktor verwendet, um diese in Intervalldaten zu transformieren und somit jener Unsicherheit Rechnung zu tragen.³⁵

³⁵ Dies ist nur in den Fällen A und B notwendig. Im Fall C kann ein eigenes WLM angepasst werden.

Bild 6.7 zeigt die Transformation in Intervalldaten. Ausgangspunkt ist die mit MLE geschätzte Weibullgerade bei S_x . Im I. Schritt wird mit Gleichung (6.18) die Hilfsvariable u_i für die aktuellen Beobachtungen bei S_x und Verwendung des WLM sowie dessen geschätzten Modellkoeffizienten berechnet. Daraus resultiert zunächst eine Unsicherheit aufgrund der nicht-identischen Grundgesamtheit. Die nächsten Schritte II und III berechnen bei konstantem u_i die transformierte Ausfallzeit t_i^* bei Feldbeanspruchung S_d mit Gleichung (6.19). Schritt IV generiert, aus der auf Feldbeanspruchung transformierten Stichprobe, durch Transformation mittels Gleichung (6.20), die Intervalldaten $t_{i,\text{Anf}}^*$ und $t_{i,\text{End}}^*$.

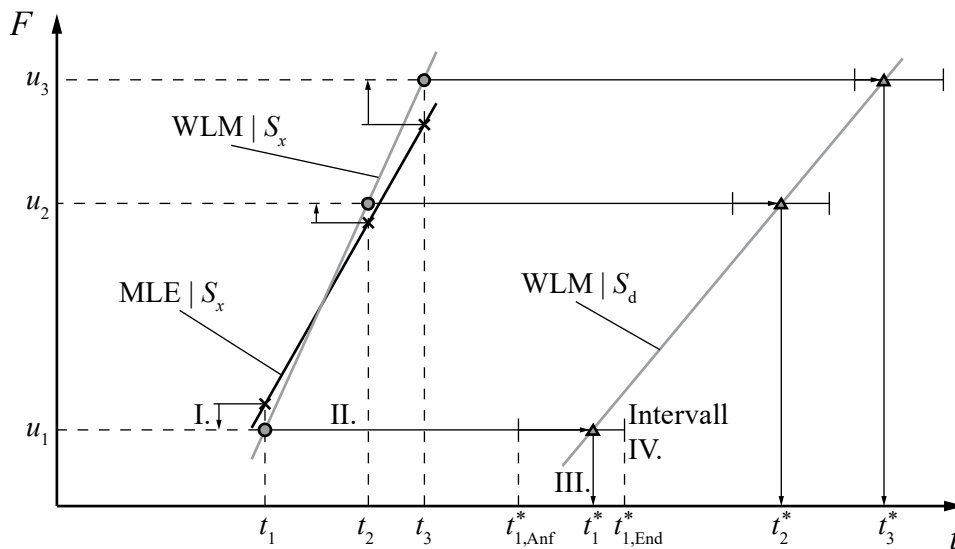


Bild 6.7: Anwendung des PSV (Schritte I.-III.) und Transformation in Intervalldaten (Schritt IV.)

6.4 Integration von Informationen aus Erfahrung

Es seien Informationen aus Erfahrung bezogen auf Feldbeanspruchung gegeben. Diese Informationen werden entsprechend dem Definitionsbereich des Parameters mit einer geeigneten a priori Verteilung nach Kapitel 6.2 beschrieben. Um diese Verteilung zu bestimmen, wird der Schätzer für den Median und dessen Standardabweichung benötigt. Für die Ermittlung dieser Größen werden nachfolgend Möglichkeiten für verschiedene Randbedingungen vorgeschlagen und gegenübergestellt. Liegen etwa mehrere Informationen aus Erfahrung zu einem Parameter vor, können diese mittels Gewichtung in eine a priori Verteilung für diesen einen Parameter überführt werden.

6.4.1 Vorgehen bei gegebenen Randbedingungen

Je nachdem welche Angaben aus Erfahrung zur Verfügung stehen, kommen verschiedene Ansätze in Betracht, um die a priori Verteilung zu beschreiben. Unterschieden wird in eine gegebene Schätzung für

- Mittelwert,
- Minimum und Maximum,
- Minimum, Modalwert und Maximum.

Gegebene Schätzung für Mittelwert

Ansatz ist, die Wahrscheinlichkeit ein Experte zu sein $P(y = 1)$ als Unsicherheitsmaß für die Schätzung eines Experten in Form einer Standardabweichung zu verwenden (vgl. [GrDr03]). Je höher diese Wahrscheinlichkeit, desto kleiner sei die Standardabweichung seiner Schätzung. Beispielsweise wird für den Formparameter der Zusammenhang

$$s_E(\hat{\beta}_E) = -\hat{\beta}_E \ln P(y = 1) \quad (6.21)$$

vorgeschlagen. Untersuchungen haben gezeigt, dass dieser Zusammenhang plausible Werte für die Standardabweichung des Formparameters ergibt. Beispielsweise ergibt sich bei einem relativ guten Experten mit $P(y = 1) = 0,83$ und der Schätzung $\beta_E = 2$ eine vergleichbare Standardabweichung für den Formparameter $s_E = 0,37$, wie bei einem Lebensdauerversuch mit 20 Prüflingen der zu einer Schätzung $\hat{\beta} \approx 2$ führt. Andere Zusammenhänge sind ebenfalls denkbar, solange

$$\lim_{P \rightarrow 1} s_E(\hat{\beta}_E) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{P \rightarrow 0} s_E(\hat{\beta}_E) = +\infty \quad (6.22)$$

gilt.

Gleichung (6.21) kann auch für Angaben aus einer Betriebsfestigkeitsrechnung, Datenbank oder einem Ausfallratenkatalog verwendet werden. Die Wahrscheinlichkeit P steht dabei für das Vertrauen in die Angabe.

Gegebene Schätzung für Minimum und Maximum

Wird ein möglicher Parameterbereich mit einem Minimum und Maximum angegeben, kann durch Zuordnung zu extremen Wahrscheinlichkeiten die Verteilung für den möglichen wahren Parameter bestimmt werden. In Verbindung mit der Expertengüte ist es möglich, die subjektive Angabe des Experten zusätzlich mit entsprechender Unsicherheit zu versehen.

Für ein θ_u und θ_o werden Wahrscheinlichkeiten definiert:

$$\begin{aligned} F(\theta_u) &= 0,01 \\ F(\theta_o) &= 0,99 \end{aligned} \quad (6.23)$$

Mit der Annahme eines positiven Definitionsbereichs mit Gleichung (6.7) ergibt sich ein Gleichungssystem

$$F(\theta_u) = \int_0^{\theta_u} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\hat{\theta}}{s(\hat{\theta})} \ln \frac{\tilde{\theta}}{\hat{\theta}} \right)^2 \right] \frac{\hat{\theta}}{s(\hat{\theta})} \frac{1}{\tilde{\theta}} d\tilde{\theta} \quad (6.24)$$

$$F(\theta_o) = \int_0^{\theta_o} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\hat{\theta}}{s(\hat{\theta})} \ln \frac{\tilde{\theta}}{\hat{\theta}} \right)^2 \right] \frac{\hat{\theta}}{s(\hat{\theta})} \frac{1}{\tilde{\theta}} d\tilde{\theta}$$

mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten $\hat{\theta}$ und $s(\hat{\theta})$. Dieses kann numerisch gelöst werden und liefert somit Schätzer und Standardabweichung des betreffenden Parameters. Wird beispielsweise der Bereich des möglichen Formparameters eingegrenzt auf $\beta_u = 1,5$ und $\beta_o = 2,5$, ergibt sich mit Gleichung (6.24) $\hat{\beta} = 1,935$ und $s^*(\hat{\beta}) = 0,2125$. Durch Division mit der dritten Potenz der Expertengüte, wird der Unsicherheit Rechnung getragen

$$s_E(\hat{\beta}_E) = \frac{s^*(\hat{\beta})}{[P(y=1)]^3}. \quad (6.25)$$

Alternativ zu diesem sind weitere Zusammenhänge denkbar. So folgt schließlich mit $P(y=1) = 0,83$ die Standardabweichung für die Integration in die a priori Verteilung $s_E(\hat{\beta}_E) = 0,3716$.

Gegebene Schätzung für Minimum, Modalwert und Maximum

Wenn zusätzlich zu Minimum und Maximum ein Wert angegeben werden kann, der für am wahrscheinlichsten gehalten wird, ist das Gleichungssystem in Gleichung (6.24) überbestimmt. Daher werden durch Mittelwertbildung schließlich Schätzer und Standardabweichung ermittelt. Für einen normalverteilten Parameter ist der Modalwert gleich dem Median. Abstand von Minimum und Maximum zum Modalwert ist in diesem Fall identisch. Für den Fall eines Parameters mit positivem Definitionsbereich ist das Vorgehen wie folgt:

Zunächst wird die Dichtefunktion aus Gleichung (6.8) nach θ differenziert. Aus

$$f(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\hat{\theta}}{s(\hat{\theta})} \ln \frac{\theta}{\hat{\theta}} \right)^2 \right] \frac{\hat{\theta}}{s(\hat{\theta})} \frac{1}{\theta} \quad (6.26)$$

und $f'(\theta) = 0$ setzen folgt durch Auflösen nach der Nullstelle θ_0

$$\theta_0 = \hat{\theta} \exp \left(-\frac{[s(\hat{\theta})]^2}{\hat{\theta}^2} \right). \quad (6.27)$$

Da $\theta_0 = \theta_{mod}$ kann Gleichung (6.27) umgestellt werden zu

$$s(\hat{\theta}) = \hat{\theta} \sqrt{-\ln \left(\frac{\theta_{mod}}{\hat{\theta}} \right)} \quad (6.28)$$

unter Beachtung von $s(\hat{\theta}) > 0$. Damit und mit Gleichung (6.24) sind zwei Gleichungssysteme mit je zwei Gleichungen und zwei Unbekannten gegeben – einmal für θ_u und einmal für θ_o . Diese können erneut numerisch gelöst werden und führen jeweils zu einem Schätzer für den Median und dessen Standardabweichung. Die Ergebnisse beider Gleichungssysteme werden anschließend gemittelt. Dies führt zu

$$\begin{aligned}\hat{\theta} &= \frac{\hat{\theta}_u + \hat{\theta}_o}{2}, \\ s(\hat{\theta}) &= \frac{s_u(\hat{\theta}) + s_o(\hat{\theta})}{2}.\end{aligned}\tag{6.29}$$

Sind beispielsweise $\beta_u = 1,5$, $\beta_{\text{mod}} = 1,9$ und $\beta_o = 2,5$ angenommen, ergibt sich damit $\hat{\beta} = 1,9235$ und $s^*(\hat{\beta}) = 0,2132$. Mit Gleichung (6.25) folgt schließlich für $P(y = 1) = 0,83$ die Standardabweichung für die Integration in die a priori Verteilung $s_E(\hat{\beta}_E) = 0,3729$.

Gegenüberstellung der Varianten

Die Ergebnisse der gezeigten Ansätze bei verschiedenen Randbedingungen sind in Bild 6.8 zusammengefasst. Die Dichtefunktionen der a priori Verteilung, die die Möglichkeit des wahren Formparameters β beschreibt, sind einem Lebensdauertest mit $n = 20$ Prüflingen („End of Life“, EoL) gegenübergestellt. Zu sehen sind zum einen die Verteilungen aus den direkten Angaben aus Erfahrung zu „Minimum und Maximum“ und „Minimum, Modalwert und Maximum“ sowie dieselben Ansätze und der Ansatz „Mittelwert“ (Med|P) mit berücksichtigter Expertengüte $P(y = 1) = 0,83$. Die vorgestellten Ansätze entsprechen dem Vertrauensbereich von β aus dem Lebensdauertest relativ gut.

6.4.2 Kombination verschiedener Informationen aus Erfahrung

Sind mehrere Informationen aus Erfahrung zu einem Parameter vorhanden, müssen diese in einer gemeinsamen a priori Verteilung zusammengeführt werden. Dies geschieht mit dem Prinzip des Einheitsvektors. Ein Einheitsvektoransatz führt dazu, dass das Gewicht einzelner Dichten transformiert wird, um in Summe eine gemeinsame Dichtefunktion zu erhalten, deren Integral über den Definitionsbereich eins ergibt. Als absolutes Gewicht einer Dichtefunktion wird die Wahrscheinlichkeit P herangezogen. Informationen mit gleicher Wahrscheinlichkeit P werden logischerweise gleich gewichtet.

Das relative Gewicht g_i für $i = 1, \dots, n$ einer i -ten Dichtefunktion bei gegebenen n Dichtefunktionen, berechnet sich aus

$$g_i = \frac{P_i^2}{\sum_{i=1}^n P_i^2}.\tag{6.30}$$

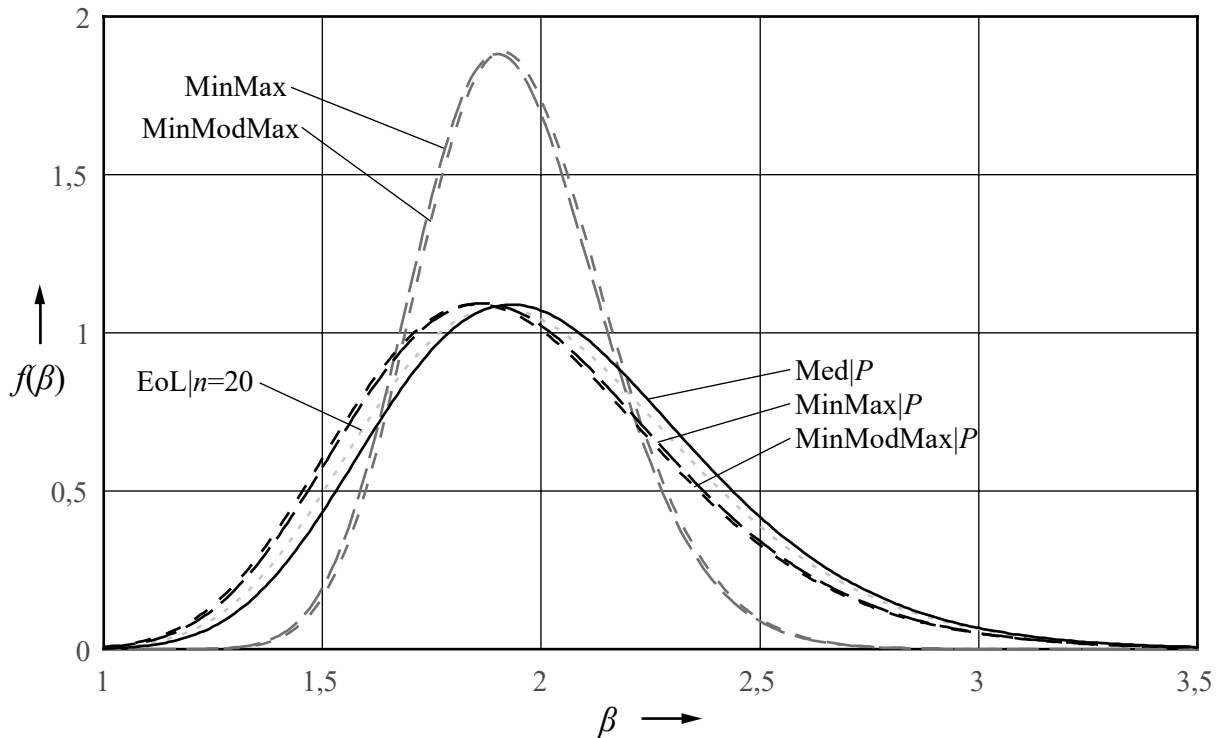


Bild 6.8: Gegenüberstellung der Dichtefunktionen der a priori Verteilung für β aus Informationen aus Erfahrung mit Lebensdauertest mit 20 Prüflingen (ohne Unsicherheit und mit $P(y = 1) = 0,83$)

In Bild 6.9 sind zwei Szenarien mit je $n = 2$ informativen Vorwissensquellen unterschiedlicher Güte P_1 und P_2 dargestellt. In beiden Fällen wird ein Einheitsvektor mit der Länge eins gebildet, sei es durch Verlängerung (a) oder Verkürzung (b) des n -dimensionalen Vektors. Die jeweiligen Wahrscheinlichkeiten P seien bereits bestimmt (beispielsweise nach Kapitel 5.3).

Im Gegensatz zu dem Ansatz nach Kleynner et al. [KBG+97] (siehe Kapitel 2.7.3), bei dem „schlechtes“ informatives Vorwissen durch einen zum Wissensfaktor komplementären Anteil entsprechende Gleichverteilung ergänzt wird, ist dies hier nicht notwendig, da das Vorwissen bereits durch die Wahrscheinlichkeit P modifiziert ist. Des Weiteren bietet der Ansatz eine Möglichkeit, die in Savchuck und Martz [SaMa94] (siehe Kapitel 2.7.3) nicht weiter definierten Gewichtungsfaktoren systematisch abzuleiten.

Mit Hilfe der relativen Gewichte g_i aus Gleichung (6.30) ist die gemeinsame a priori Verteilung eines Parameters θ_j mit Informationen aus Erfahrung aus verschiedenen Quellen i bestimmt zu

$$g_j(\theta_j) = \sum_{i=1}^n g_i f(\theta_j | \hat{\theta}_{ij}, s(\hat{\theta}_{ij})). \quad (6.31)$$

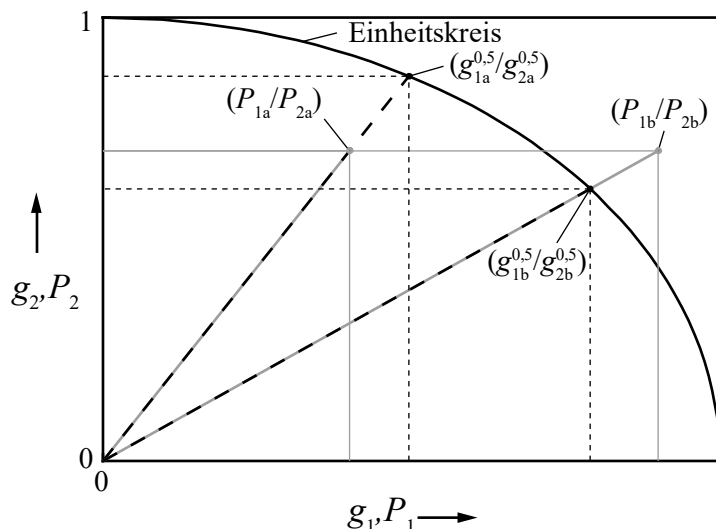


Bild 6.9: Einheitsvektoransatz bei Verlängerung und Verkürzung

6.5 A posteriori Verteilung

Es gilt für die a posteriori Verteilung mit dem Parametervektor $\boldsymbol{\theta} = (\beta, \eta, \gamma)$ und dem Vektor der Lebensdauerdaten \mathbf{t}

$$g(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{t}) = \frac{L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{t})[\prod_{j=1}^n g_j(\theta_j)]}{\int_{\Omega} L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{t})[\prod_{j=1}^n g_j(\theta_j)] d\boldsymbol{\theta}}. \quad (6.32)$$

Für die Berechnung werden die in Kapitel 6.3 aufgestellte Likelihoodfunktion für das betrachtete Beanspruchungsniveau und die unabhängigen a priori Verteilungen der Parameter $g_j(\theta_j)$ aus Kapitel 6.4 verwendet. Liegen a priori Daten vor, sind diese in der Likelihoodfunktion bereits integriert.

6.5.1 Punktschätzung und Bayes'sche Region

Für die Angabe einer Punktschätzung für $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ stehen drei Schätzer zur Verfügung [HWRM08]: der Maximum a posteriori Schätzer (MAP), der a posteriori Erwartungswert und der a posteriori Median³⁶. Der MAP ist definiert durch

$$g'(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{t}) = 0. \quad (6.33)$$

Die Nullstelle der ersten Ableitung – das Maximum der posteriori Dichtefunktion – entspricht dem MAP [HWRM08].

Als bayes'sche Region wird nachfolgend ein n -dimensionaler begrenzter Raum, entsprechend der Anzahl zu schätzender Parameter n , verstanden. Als Basis dient die a

³⁶ Erwartungswert und Median werden in der Ausarbeitung nicht verwendet und sind daher nicht weiter ausgeführt.

posteriori Dichtefunktion. Für die Bestimmung dieser Region wird nachfolgend das Likelihood-Ratio als Näherungslösung verwendet³⁷. Nach [BoTi73](S. 94) tendiert die gemeinsame Verteilung für große Stichproben zur Normalverteilung. Die Parameterkombinationen, welche den Raum begrenzen, sind die Lösungen der Gleichung

$$g(\boldsymbol{\theta}_{BR;1-\alpha}|\mathbf{t}) = g(\hat{\boldsymbol{\theta}}|\mathbf{t}) \exp\left(-\frac{\chi_{1-\alpha;FG}^2}{2}\right) \quad (6.34)$$

mit der Anzahl der Freiheitsgrade FG , welche der Anzahl der Parameter n im Parametervektor $\boldsymbol{\theta}$ entspricht. Die Lösungen von Gleichung (6.34) können numerisch bestimmt werden. Die Parameterkombinationen $\boldsymbol{\theta}_{BR;1-\alpha}$, welche diese Gleichung lösen, umschließen für jedes $(1 - \alpha)$ eine Region höchster a posteriori Dichte (engl.: highest posterior density, HPD, vgl. [BoTi73]). Nach Anwendung der Bayes'schen Theorie enthalten diese Parameterkombinationen und die von ihnen eingeschlossene Region mit einer Wahrscheinlichkeit von $(1 - \alpha)100\%$ die wahre Parameterkombination.

6.5.2 Interpretation der a posteriori Verteilung

Nachfolgend werden verschiedene Möglichkeiten der Interpretation der a posteriori Verteilung für verschiedene Randbedingungen mit zunehmender Komplexität aufgezeigt. Dazu zählen:

- (1) Einfluss des Vorwissens über B_{10} -Lebensdauer auf die a posteriori Schätzung des Formparameters.
- (2) Anwendung bei zweiparametrischer Weibullverteilung und Vorwissen über B_{10} -Lebensdauer und Formparameter.
- (3) Anwendung bei dreiparametrischer Weibullverteilung und Vorwissen über f_{tB} -Faktor und Formparameter bei bekannter B_{10} -Lebensdauer.
- (4) Berechnung der B_q -Lebensdauer für gegebene Zuverlässigkeit und Aussagewahrscheinlichkeit bei Vorwissen über drei Verteilungsparameter.

Die Punkte (1) bis (3) zielen dabei auf den Einfluss von aktuellen Beobachtungen und Vorwissen über andere Parameter auf den Formparameter ab. Punkt (4) hingegen veranschaulicht, wie sich das ganzheitliche Verfahren letztlich auf die Zuverlässigkeitsprognose auswirkt. Die verwendeten aktuellen Beobachtungen befinden sich im Anhang, Tabelle 10.8.

³⁷ Vgl. Ausführung in [MaWa82] (S. 210) für eine monoton abnehmende Funktion.

Einfluss des Vorwissens über B_{10} -Lebensdauer auf die a posteriori Schätzung des Formparameters

In Bild 6.10 wird exemplarisch der Einfluss eines verbesserten, mit weniger Unsicherheit behafteten Vorwissens über die B_{10} -Lebensdauer auf die a posteriori Schätzung des Formparameters aufgezeigt. Bei gleichbleibendem Vorwissen über β wurde die Standardabweichung der B_{10} -Lebensdauer variiert, bei gleichbleibendem Mittelwert der B_{10} -Lebensdauer ($\bar{B}_{10} = 50$). Eine kleiner werdende Standardabweichung der B_{10} -Lebensdauer beeinflusst den Formparameter. Das Intervall des wahrscheinlichen Formparameters $\beta_{BR;1-\alpha}$, für $\alpha = 0,01; 0,1$ wird kleiner. Daraus wird ersichtlich, wie Vorwissen über andere Verteilungsparameter die Aussage für einen bestimmten Verteilungsparameter, wie den Formparameter β , beeinflussen kann und in diesem Beispiel zu einer Verbesserung der Aussage führt.

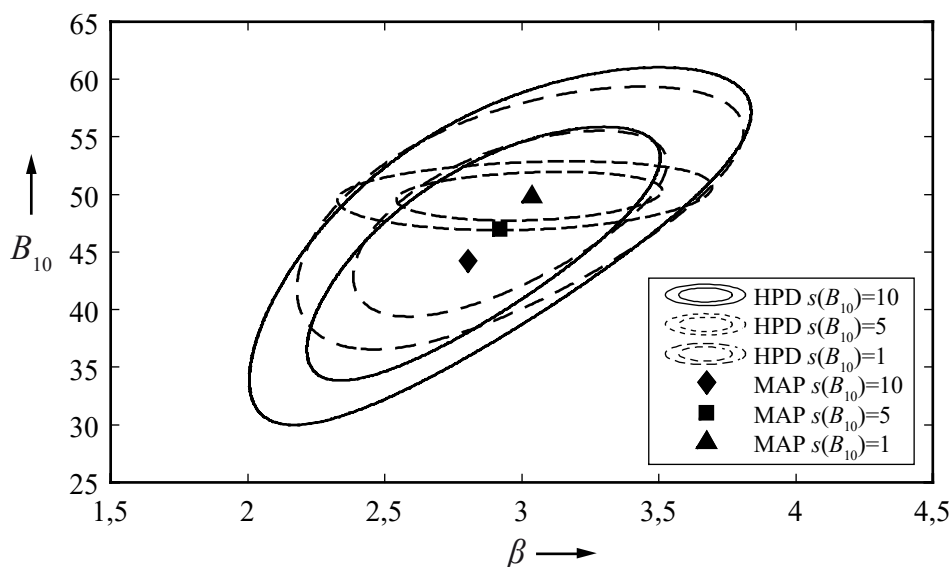


Bild 6.10: Einfluss der Unsicherheit des Vorwissens über die B_{10} -Lebensdauer bei gleichbleibendem Vorwissen über den Formparameter auf die Bayes'sche Region (HPD) bei zweiparametrischer Weibullverteilung und 20 aktuellen Beobachtungen

Anwendung bei zweiparametrischer Weibullverteilung und Vorwissen über B_{10} -Lebensdauer und Formparameter

Im folgenden Beispiel (Bild 6.11) sei zunächst Vorwissen über die B_{10} -Lebensdauer und den Formparameter vorhanden. Das jeweilige Vorwissen sei mit geeigneter a priori Verteilung beschrieben. Zur Veranschaulichung sind neben den a priori Verteilungen der beiden Parameter – B_{10} und β – auch deren Verteilung aus den gegebenen aktuellen Beobachtungen dargestellt. Daraus ist ersichtlich, dass Vorwissen und aktuelle Beobachtungen ($n = 20$) ein ungefähr gleiches Gewicht haben. Die Bayes'sche Region ($\alpha = 0,01; 0,1$) der wahrscheinlichen Parameterkombinationen ist gegenüber den Konturlinien der Likelihoodfunktion der aktuellen Beobachtungen sichtbar reduziert.

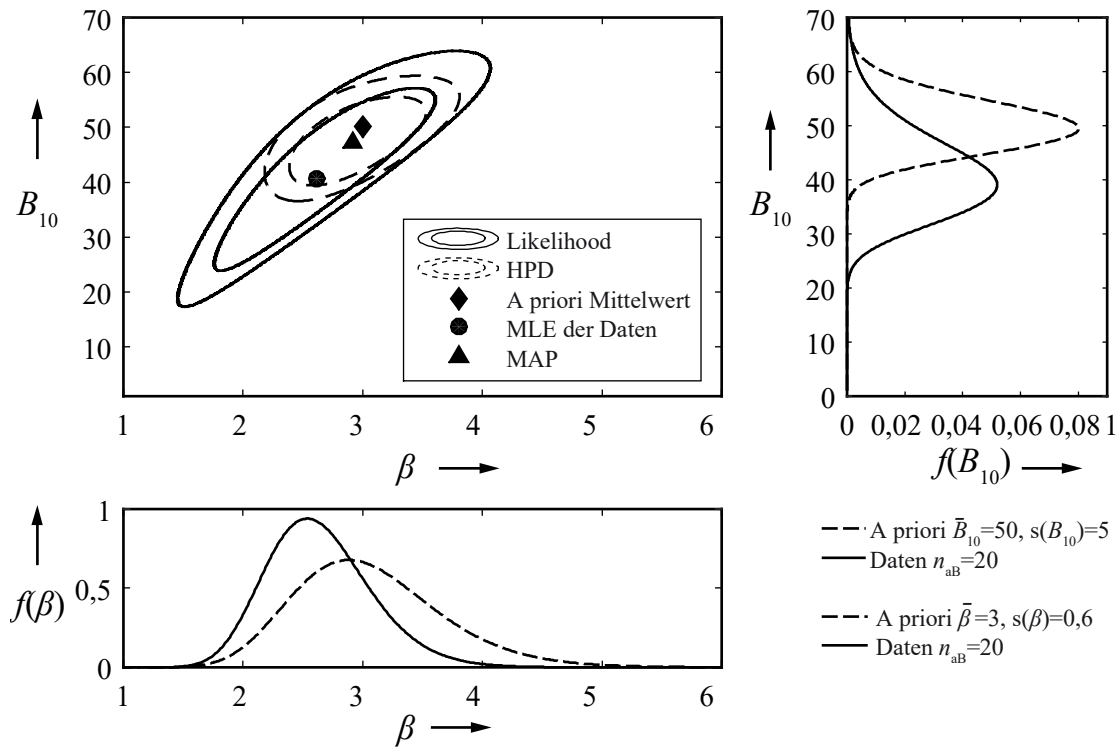


Bild 6.11: Bayes'sche Region bei zweiparametrischer Weibullverteilung, 20 aktuellen Beobachtungen und Vorwissen über B_{10} -Lebensdauer und Formparameter

Anwendung bei dreiparametrischer Weibullverteilung und Vorwissen über f_{tB} -Faktor und Formparameter bei bekannter B_{10} Lebensdauer

Im Falle einer Weibullverteilung mit vorhandener ausfallfreier Zeit kann, bei als bekannt angenommener B_{10} -Lebensdauer (beispielsweise berechnet aus verifiziertem Berechnungsverfahren), zusätzlich Vorwissen über den f_{tB} -Faktor berücksichtigt werden. Mit Gleichung (2.5) ergibt sich für den Skalenparameter der dreiparametrischen Weibullverteilung in Anlehnung an [BeLe04]

$$\eta = \frac{B_{10} - f_{tB} B_{10}}{\beta \sqrt{-\ln 0,9}}. \quad (6.35)$$

Die Modellierung des Vorwissens wird mit den Gleichungen aus Kapitel 6.2 vorgenommen. Da die B_{10} -Lebensdauer als bekannt angenommen ist, kann auch in diesem Fall das Resultat zweidimensional dargestellt werden.

In Bild 6.12 deutlich erkennbar ist die Abhängigkeit des Formparameters von der ausfallfreien Zeit. Wird diese größer – größer werdender f_{tB} -Faktor – wird der Formparameter kleiner. Durch das voneinander unabhängige Vorwissen über beide Parameter wird die a posteriori Schätzung tendenziell in die Richtung des a priori Mittelwerts verschoben, folgt jedoch weiter dem direkten Zusammenhang von Formparameter und ausfallfreier Zeit.

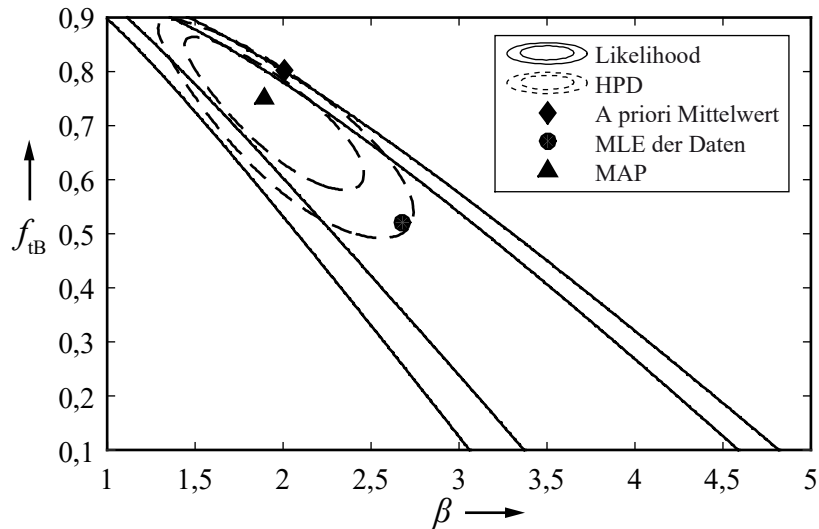


Bild 6.12: Bayes'sche Region bei dreiparametrischer Weibullverteilung, 20 aktuellen Beobachtungen und Vorwissen über Formparameter und f_{tB} -Faktor

Berechnung der B_q -Lebensdauer für gegebene Zuverlässigkeit und Aussagewahrscheinlichkeit bei Vorwissen über drei Verteilungsparameter

Angenommen sei Vorwissen über den Formparameter β , den f_{tB} -Faktor und die B_5 -Lebensdauer. Deren a priori Verteilungen sind jeweils unabhängig nach Kapitel 6.2 modelliert. Ziel sei es, mit Hilfe des Vorwissens über die Form der Weibullverteilung, deren Lage und ausfallfreie Zeit eine verbesserte Punkt- und Intervallschätzung für die B_{10} -Lebensdauer zu erhalten. Der Zusammenhang zwischen f_{tB} -Faktor und einer B_q -Lebensdauer und die Umrechnung in Skalenparameter η und ausfallfreie Zeit γ sind ausführlich in [BeLe04](S.259-263) dargestellt. Tabelle 6.2 fasst die verwendete Daten und das Ergebnis zusammen.

Tabelle 6.2: Verwendete Daten (a priori und aktuelle Beobachtungen) und Ergebnisse (a posteriori)

		β	f_{tB}	B_5	η	γ	B_{10}
A priori	Mittelwert	2,000	0,700	60,000	-	-	-
	Standardabweichung	0,300	0,100	1,000	-	-	-
	Modellierung	positiv	(0, 1)	positiv	-	-	-
Aktuelle Beobachtungen ($n_{aB} = 20$)	95 % Obergrenze	-	-	-	-	-	74,308
	MLE	2,205	0,719	61,271	51,897	47,777	66,480
	5 % Untergrenze	-	-	-	-	-	59,477
A posteriori	95 % Obergrenze	-	-	-	-	-	68,104
	MAP	2,050	0,735	60,000	51,717	47,855	65,109
	5 % Untergrenze	-	-	-	-	-	62,219

Aufgrund dreier, als verteilt angenommener Parameter ist in Bild 6.13 das Ergebnis dreidimensional dargestellt. Zu sehen sind der Schätzer der $n = 20$ aktuellen Beobachtungen, die Bayes'schen Regionen mit 90 % HPD, der MAP sowie die Parameterkombinationen welche zu den Vertrauensgrenzen der gesuchten B_q -Lebensdauer führen. Aufgrund der angewandten numerischen Integration und der gewählten Auflösung handelt es sich um näherungsweise Ergebnisse.

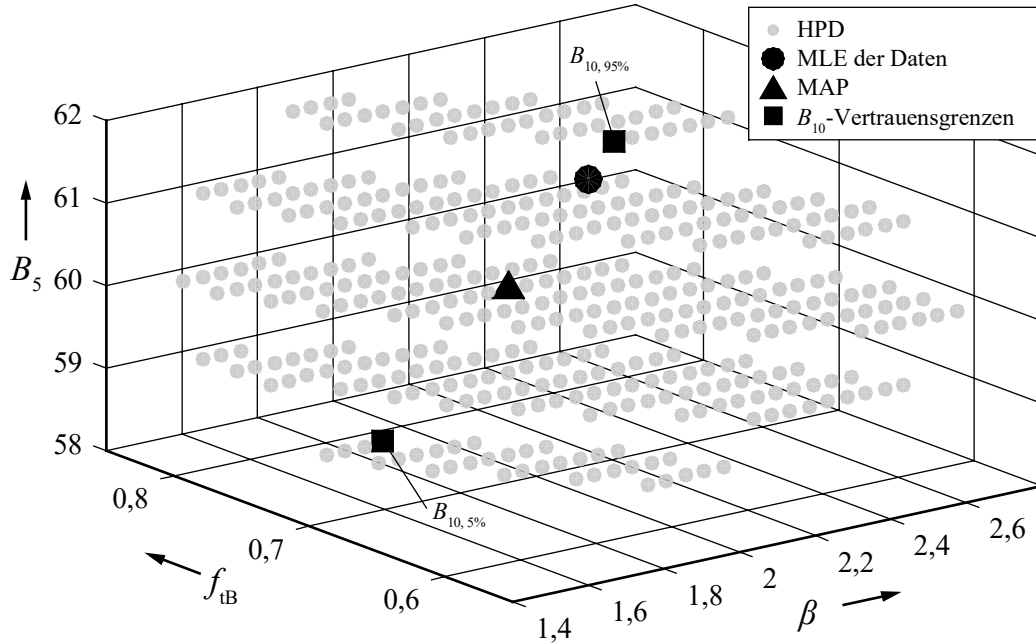


Bild 6.13: Wahrscheinliche Parameterkombinationen (90 % HPD) bei dreiparametrischer Weibullverteilung, 20 aktuellen Beobachtungen und Vorwissen über B_5 -Lebensdauer, Formparameter und ausfallfreie Zeit

7 Anwendungsbeispiel

Dieses Kapitel zeigt die Anwendung des ganzheitlichen Verfahrens (GV) anhand eines synthetischen Beispiels bei verschiedenen Szenarien.

Entwickelt wird ein Nachfolger eines einstufigen Industriegetriebes, siehe [Knö15]. In [BeLe04] ist ein ähnliches Getriebe beispielhaft analysiert. Vereinfacht wird lediglich das kritische Systemelement betrachtet, welches analog zu [BeLe04] das Systemelement „Zahnrad 1 Bruch“ sei. Dieses soll ein höheres Nennmoment übertragen können, was zu einer größeren Zahnbreite führt, und gegenüber dem Vorgänger eine Schrägverzahnung erhalten, um die Laufruhe zu erhöhen. Diese Modifikationen an der Verzahnung führen zu einer nicht-identischen Grundgesamtheit gegenüber dem Vorgängerprodukt. Aus Kostengründen soll eine Überdimensionierung vermieden werden. Die Zuverlässigkeitsforderung für das Systemelement sei $R(t_{\text{soll}} = 72.000) = 0,95$ bzw. $B_{5,\text{soll}} = 72.000$ bei $P_A = 90\%$.

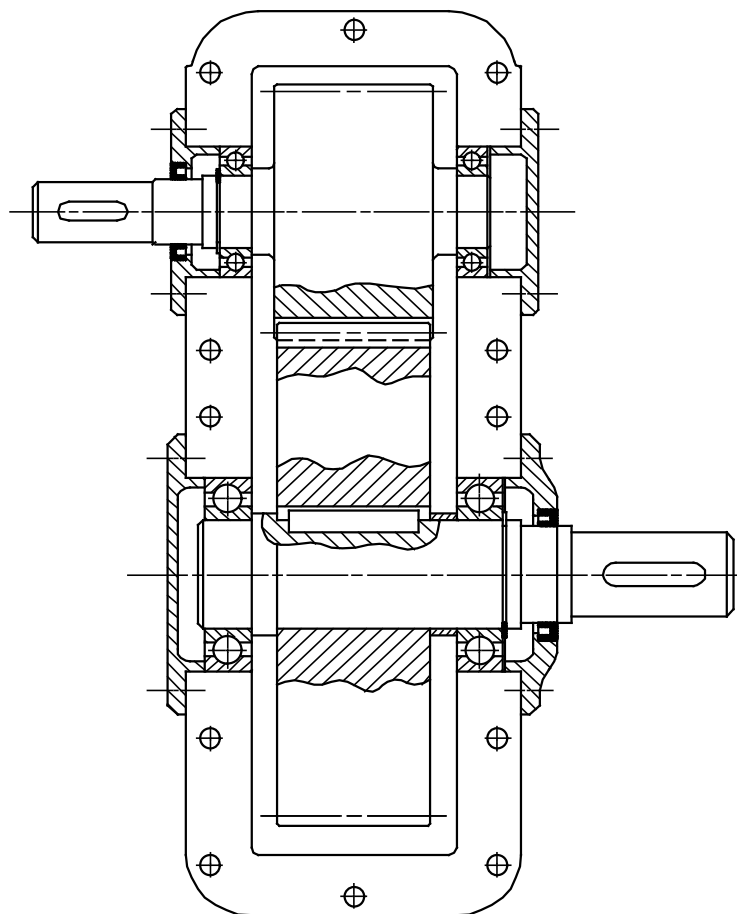


Bild 7.1: Einstufiges Industriegetriebe [BeLe04]

Szenario A: Ausgangsbasis

In einer frühen Phase soll eine Zuverlässigkeitsprognose für das Feld ($S_d = 480 \text{ N/mm}^2$) getroffen werden. Hierzu stehen folgende Informationen aus Erfahrung, bezogen auf Feldbeanspruchung, zur Verfügung:

- Expertenangabe
 - $\beta_u = 1,3$ und $\beta_o = 1,8$
 - $f_{tB,u} = 0,8$ und $f_{tB,o} = 0,95$
 - 7 Jahre Berufserfahrung
 - 5 Veröffentlichungen als Hauptautor
- Betriebsfestigkeitsberechnung
 - $B_1 = 75.000$ Umdrehungen
 - angenommener Unsicherheitsfaktor für Berechnungsmodell $P_{BFR} = 0,95$

Weiter stehen Versuchsdaten von Komponentenversuchen der Verzahnung der Vorgängerbaureihe zur Verfügung. Verfügbare Informationen aus Daten:

- Ausfallzeiten von insgesamt 36 Prüflingen auf drei verschiedenen Beanspruchungsniveaus $S = (530 \text{ N/mm}^2, 640 \text{ N/mm}^2, 840 \text{ N/mm}^2)$, siehe Daten von Groß [Gro74] im Anhang, Tabelle 10.2;
- Gewähltes Modell: Modell IV;
- Angenommener Transformationsfaktor $\Phi = 0,9$ (modifizierte Verzahnung).

Für die Verarbeitung der Expertenangabe wird zudem ein bereits angepasstes Modell aus Kapitel 5.3.2 (für $y_{p25} = 0$) verwendet, was zu $P(y = 1) = 0,897$ führt. Die a priori Verteilungen von β , f_{tB} und B_1 werden nach Kapitel 6.4.1 definiert. Die a priori vorhandenen Vorgängerversuchsdaten werden mittels PSV nach Kapitel 6.3.2 und angenommenem Transformationsfaktor (vgl. [Kro04] und [Hit07]) nach Kapitel 6.3.3 auf Feldbeanspruchung und in Intervalldaten transformiert sowie in die Likelihoodfunktion integriert.

Szenario B: zusätzliche Versuche bei erhöhtem Beanspruchungsniveau

Während der C-Musterphase werden weitere Versuche durchgeführt. Zusätzliche verfügbare Informationen aus Daten gegenüber Szenario A sind:

- Ausfallzeiten $t = 18.656, 19.355, 20.311, 21.518, 22.276, 29.920$ LW auf einem erhöhten Beanspruchungsniveau $S_{aB} = 700 \text{ N/mm}^2$.

Die Schätzung des Modalwerts für die gesuchte B_5 -Lebensdauer, bei gegebener Ausgawahrscheinlichkeit, sowie der Parameter nach Anwendung des ganzheitlichen Verfahrens ist in Tabelle 7.1 zusammengestellt. Ergänzend ist die B_5 -Lebensdauer der Analyse der Vorgängerdaten mit Reliasoft gegenübergestellt.

Tabelle 7.1: Ergebnis für das Anwendungsbeispiel im Szenario A und B

Variable S_d	Reliasoft	GV (Szenario A)	GV (Szenario B)
n_V	36	36	36
n_{aB}	-	-	6
S_{aB}	-	-	700
$P(y = 1)$	-	0,897	0,897
P_{BFR}	-	0,950	0,950
Φ	1	0,900	0,935
η	107.457	28.756	27.472
β	8,711	1,675	1,625
γ	-	73.614	76.492
f_{tB}	-	0,908	0,918
B_1	63.372	75.459	78.112
$B_{5,90\%}$	70.457	75.729	77.724
$B_{5,Modalwert}$	76.412	78.496	80.909
$B_{5,10\%}$	82.870	80.735	82.455

Durch aktuelle Beobachtungen im Szenario B kann nach Anwendung des PSV der Transformationsfaktor auf dem Beanspruchungsniveau der aktuellen Beobachtungen bestimmt werden ($\Phi = 0,935$). Die Prognose ändert sich dadurch in dem vorliegenden Beispiel nur leicht, zu größeren Lebensdauern hin, da die aktuellen Beobachtungen ($n = 6$) gegenüber den Vorgängerversuchen ($n = 36$) weniger Gewicht haben. Im Vergleich mit der Analyse in Reliasoft³⁸ kann festgehalten werden, dass, durch Berücksichtigung der beanspruchungsabhängigen Modellierung mit ausfallfreier Zeit und des parameterspezifischen Vorwissens, sich die Schätzung ändert und der Vertrauensbereich verkleinert bzw. die Aussagesicherheit erhöht. Die Prognose auf Basis des ganzheitlichen Verfahrens erfüllt in den beiden Szenarien A und B das Zuverlässigkeitsziel. Somit ist nach Anwendung des ganzheitlichen Verfahrens festzuhalten, dass die Entwicklung des betrachteten Produkts – im Sinne eines Zuverlässigkeitswachstumsprogramms (siehe beispielsweise [JSSB13], [SJB+13a]) – im Plan ist. Die Analyse allein der Vorgängerversuche zeigt jedoch eine Nicht-Erfüllung des Ziels; Maßnahmen müssen gegebenenfalls ergriffen werden (siehe [BJSB14]).

Bezüglich der angegebenen Vertrauensgrenzen im ganzheitlichen Verfahren ist zu beachten, dass die Berechnung der Likelihoodfunktion für bestimmte Kombinationen der Parameter, über die Vorwissen vorhanden ist, zu komplexen Zahlen führt. Dies ist dann der Fall, wenn die Kombination zu einer ausfallfreien Zeit führt, die größer als

³⁸ Analyse in Reliasoft ALTA 8. Modell: Inverse Power Law Weibull (zweiparametrisches Weibullmodell). Vertrauensbereich-Methode: Fisher-Matrix.

die Lebensdauer bzw. die untere Intervallgrenze bei transformierten Daten ist. Diese Parameterkombinationen werden im Berechnungsalgorithmus herausgefiltert, so dass die angegebenen Vertrauensgrenzen der B_5 -Lebensdauer dem Minimum und Maximum aller Kombinationen entsprechen, die zu reellen Zahlen führen und innerhalb der Bayes'schen Region liegen.

Szenario C: weniger Vorgängerversuche und zusätzliche (zensierte) Versuche bei Feldbeanspruchung

Im Szenario C wird das WLM Modell IV als bekannt angenommen. Somit können wenige Vorgängerversuche (C1) mit Hilfe des bekannten parametrisierten Modells auf Feldbeanspruchung transformiert werden. Das Gewicht der Vorgängerversuche ist dadurch, gegenüber den vorherigen Szenarien A und B, reduziert. Weiter stehen aktuelle Beobachtungen zur Verfügung, welche einmal vollständig (C2) und einmal aus Zeitgründen Typ I zensiert (C3) vorliegen. Unsicherheit bei den Informationen aus Erfahrung ist vorhanden. Die Annahme für den Transformationsfaktor beträgt $\Phi = 0,536$. Die verwendeten synthetischen Daten befinden sich im Anhang Tabelle 10.9 und Tabelle 10.10.

Tabelle 7.2 zeigt, wie der Vertrauensbereich ohne Berücksichtigung aktueller Beobachtungen größer ist (C1). Die Integration der vollständigen aktuellen Beobachtungen reduziert den Vertrauensbereich (C2), während durch die Typ I Zensierung die aktuellen Beobachtungen weniger Gewicht bekommen und folglich der Vertrauensbereich wieder weiter wird (C3).

Tabelle 7.2: Ergebnis für das Anwendungsbeispiel im Szenario C

Variable S_d	GV (Szenario C1)	GV (Szenario C2)	GV (Szenario C3)
n_V	12	12	12
n_{aB}	-	12	12
S_{aB}	-	480	480
$P(y = 1)$	0,897	0,897	0,897
P_{BFR}	0,950	0,950	0,950
Φ	0,536	0,536	0,536
η	110.253	78.204	95.836
β	2,125	2,500	2,250
γ	47.208	47.193	47.207
f_{tB}	0,553	0,596	0,573
B_1	59.862	59.612	59.612
$B_{5,90\%}$	71.534	69.330	70.798
$B_{5,Modalwert}$	74.457	71.030	72.806
$B_{5,10\%}$	81.885	74.975	79.032

Szenario D: Vorgängerversuche und Vorwissen über den Formparameter

Für die Erbringung des Zuverlässigkeitsnachweises gegen Entwicklungsende wird in der Regel der Formparameter angenommen, um den notwendigen Stichprobenumfang der noch zu testenden Prüflinge zu bestimmen. Das ganzheitliche Verfahren dagegen bietet die Möglichkeit diese Formparameterannahme als Verteilung zu beschreiben und darüber hinaus die Güte der Information zu berücksichtigen. Ebenso eingebunden werden die aus Vorgängerversuchen bekannten Informationen aus Daten von Szenario A. Reicht die damit prognostizierte Zuverlässigkeit nicht aus, ist der Zuverlässigkeitsnachweis unter Berücksichtigung aller verfügbaren Informationen nicht erbracht.

Wenn die untere Vertrauensgrenze die Zuverlässigkeitsanforderung unterschreitet, kann gegebenenfalls durch weitere Tests die geforderte Zuverlässigkeit bei der geforderten Aussagewahrscheinlichkeit noch erreicht werden. Weitere Tests bedeuten in diesem Sinne aktuelle Beobachtungen hinzuzufügen. Unterschreitet jedoch die Schätzung die Zuverlässigkeitsanforderung, müssen weitere Maßnahmen eingeleitet werden (siehe [BJSB14]), um das Ziel zu erreichen.

Bild 7.2 zeigt das Szenario D für verschiedene Φ und $P(y = 1)$. Die schwarzen Quadrate zeigen die B_5 -Lebensdauer bei bloßer Berücksichtigung der Vorgängerversuche aus Szenario A. Für $\Phi = 0,8$ überschneiden sich die Intervalldaten der verbundenen Stichprobe, so dass MLE ohne Vorwissen über den Formparameter zu einer Schätzung $\beta \rightarrow \infty$ führt.

Wird das Vorwissen über den Formparameter mit steigender Expertengüte berücksichtigt, passt sich die Schätzung der B_5 -Lebensdauer an und der Vertrauensbereich verkleinert sich. Letzteres wird durch einen abnehmenden Transformationsfaktor verstärkt. Bei einem Transformationsfaktor $\Phi = 0,8$ für die Vorgängerversuche und Vorwissen über den Formparameter von einem Experten mit $P(y = 1) > 0,4$ unterschreitet die untere Vertrauensgrenze die Zuverlässigkeitsanforderung. Das Vorwissen des Experten bekommt mehr Gewicht, was zu einer insgesamt unzureichenden Zuverlässigkeitsprognose führt. In allen anderen gezeigten Fällen ist der Zuverlässigkeitsnachweis erbracht.

Einfluss der Parameter im Szenario A

Der Einfluss des spezifischen Vorwissens über die Parameter wird im ganzheitlichen Verfahren wiederum beeinflusst durch $P(y = 1)$, P_{BFR} und den Transformationsfaktor Φ . Bild 7.3 fasst die Untersuchung auf Basis von Szenario A zusammen³⁹.

³⁹ Zu beachten ist, dass, wie in Kapitel 6.5.2 bereits aufgezeigt, der Einfluss abhängig von den Wechselwirkungen von Informationen aus Daten und aus Erfahrungen ist.

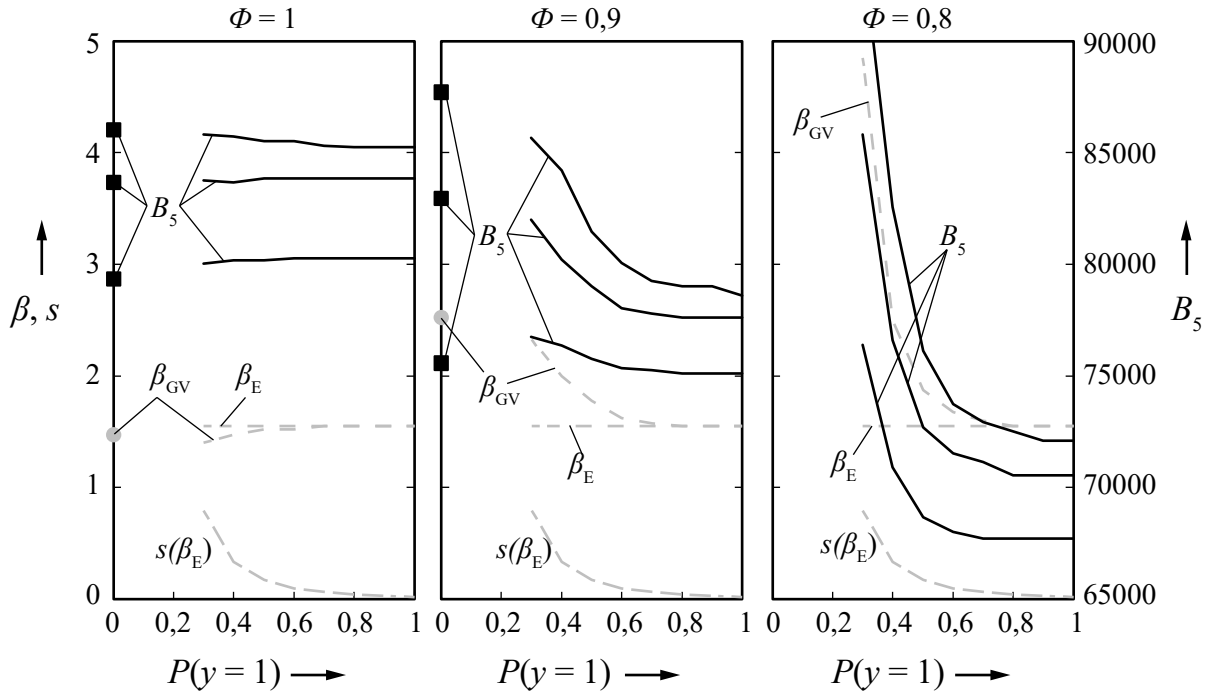


Bild 7.2: Einfluss der Expertengüte auf die B_5 -Lebensdauer und den a posteriori Formparameter bei vorhandenen Vorgängerdaten bei verschiedenen Transformationsfaktoren und 80 % Vertrauensbereich

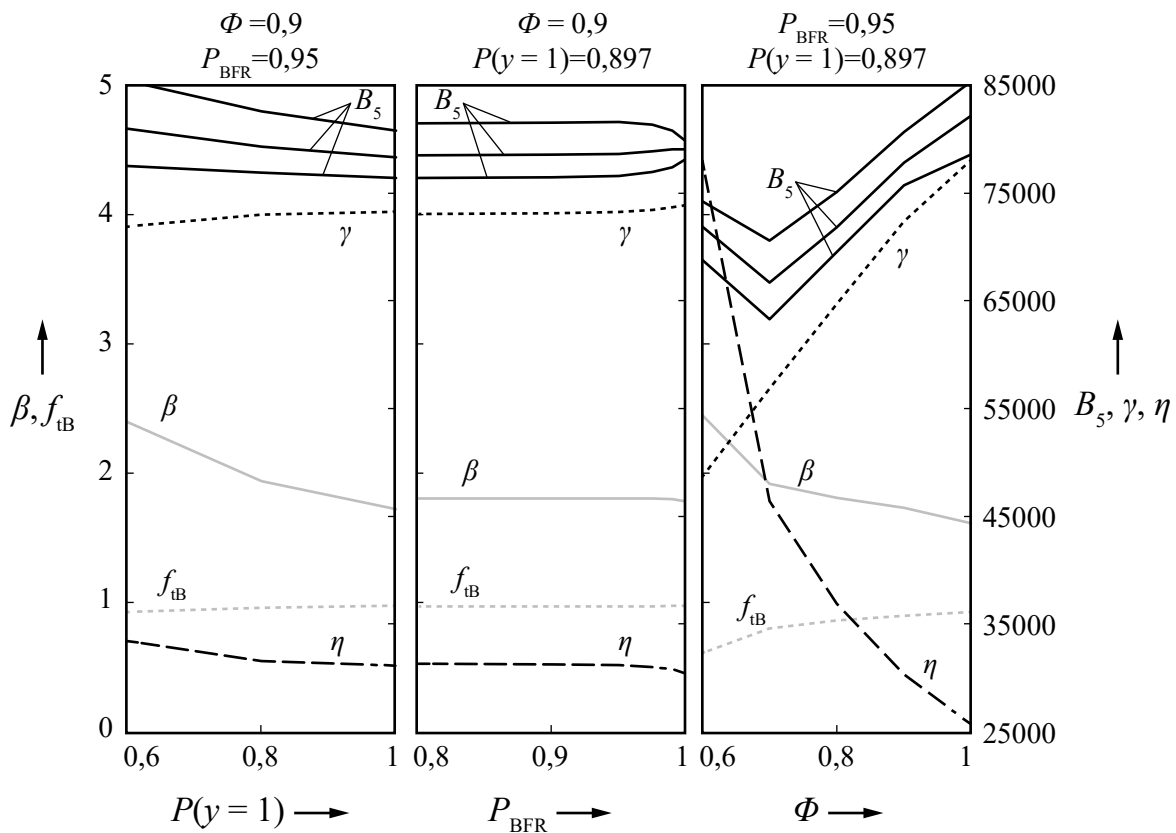


Bild 7.3: Einfluss der Parameter auf die B_5 -Lebensdauer und die a posteriori Weibullparameter bei vorhandenen Vorgängerdaten bei 80 % Vertrauensbereich

Eine größere Unsicherheit bei dem Experten vergrößert den möglichen Bereich für den Formparameter. Bei den vorliegenden Daten führt dies zu einem größeren Formparameter. Dies ergibt steigende B_q -Lebensdauern. Zudem vergrößert sich der Vertrauensbereich ($P_A = 80\%$). Die geringe Abnahme von P_{BFR} hat im vorliegenden Beispiel – guter Experte und hoher Transformationsfaktor – Einfluss auf den Vertrauensbereich, welcher mit abnehmender Sicherheit zunächst weiter wird. Bei weiter abnehmender P_{BFR} ist kein Einfluss mehr erkennbar. Ein kleinerer Transformationsfaktor führt zu größeren Intervallen der Daten, welche eine kleinere ausfallfreie Zeit zulassen. Daraus resultieren zunächst deutlich kleinere Schätzer für die B_q -Lebensdauern, ehe der Effekt des größer werdenden Formparameters dem entgegenwirkt.

8 Zusammenfassung und Ausblick

Eine Zuverlässigkeitsprognose ist aus unternehmerischer Sicht heute unabdingbar. Ohne eine fundierte Beurteilung der Zuverlässigkeit von Konzepten in frühen Entwicklungsphasen und einem aussagekräftigen Zuverlässigkeitsnachweis zur Serienfreigabe gegen Ende der Produktentwicklung, können unverhältnismäßig hohe und nicht vorhergesehene Kosten entstehen. Für einige Situationen kommt dabei einer beanspruchungsgerechten Bestimmung des Weibull-Formparameters eine besondere Bedeutung zu und damit letztlich einer beanspruchungsgerechten Zuverlässigkeitsprognose.

In der vorliegenden Arbeit wurden die Weibullverteilung, sowie besonders deren Formparameter, ausführlich erläutert. Im Zusammenhang mit dem Formparameter wurden bekannte Einflüsse zusammengetragen. Bei der Annahme von gleicher Form, Werkstoff und Bearbeitung – sprich, demselben Produktentwurf und Produktionsprozess – hat die Belastung bei einigen Schadensmechanismen einen wesentlichen Einfluss auf die Form des Ausfallverhaltens. Bestehende Modelle, die diesem Einfluss bedingt Rechnung tragen, wurden umrissen. Die meisten Modelle basieren auf einer Extremwert-, Log-Normal- oder Weibullverteilung mit log-linearem Zusammenhang für das Streuungsmaß.

Ein bekanntes Beispiel für eine von der Beanspruchung beeinflussten Form des Ausfallverhaltens ist der Schadensmechanismus Ermüdung. Vor diesem Hintergrund wurde der Ermüdungsmechanismus im Hinblick auf einen beanspruchungsabhängigen Formparameter hinreichend betrachtet. Unter Berücksichtigung von werkstoffmechanischen als auch wahrscheinlichkeitstheoretischen Aspekten wurde letztlich eine These zum beanspruchungsabhängigen Formparameter aufgestellt: Bei zunehmender Beanspruchung führen die größere Streuung, größere Schwingspiellanzahl und die stärkere Zunahme der Wachstumsgeschwindigkeit der Risseinleitungsphase gegenüber der Rissfortschrittsphase zu einem vergrößerten Weibull-Formparameter.

Die aus der Literatur bekannten Konzepte und Methoden, aus denen ein Formparameter hervorgehen kann, wurden mit Fokus auf der beanspruchungsgerechten Bestimmung des Formparameters analysiert. Die Arbeit hat gezeigt, dass die ausfallfreie Zeit hierbei ebenso relevant ist und schließt diese daher in die Analyse mit ein. Mit Hilfe der Analyse wurde Optimierungspotential identifiziert. Dieses Potential liegt in einer beanspruchungsabhängigen Modellierung aller drei Parameter der Weibullverteilung, einer – hinsichtlich erfahrenen Beanspruchung – differenzierten Felddatenanalyse und

– hinsichtlich der Qualität – quantifizierten Informationen von Experten. Zudem stehen die Konzepte und Methoden für sich. Eine systematische Vorgehensweise, die alle verfügbaren Informationen, wie Lebensdauerdaten und parameterspezifisches Wissen, mit einbindet, ist nicht vorhanden.

Darauf aufbauend wurden erweiterte und neue Ansätze entwickelt, die das aufgezeigte Potential adressieren:

Es wurde gezeigt, wie – auf Basis einer Simulation der Belastung – die Zuordnung eines Feldausfalls, hervorgerufen von verschiedenen Kundentypen, zu einer bestimmten Beanspruchung erfolgen kann. Dies führt zu differenzierten Daten und letztlich können somit bis dahin nicht bekannte Beanspruchungsabhängigkeiten erst erkannt oder die Daten einer beanspruchungsabhängigen Analyse zugeführt werden.

Für die Analyse beanspruchungsabhängiger Lebensdauerdaten wurden erweiterte Weibull-Lebensdauermodelle entwickelt. Eine beanspruchungsabhängige Modellierung aller Verteilungsparameter ermöglicht, für eine in der Spezifikation definierte Feldbeanspruchung, eine Weibullverteilung beanspruchungsgerecht zu bestimmen. Validiert wurden die Modelle mittels drei Datensätzen mit unterschiedlichen Beanspruchungsabhängigkeiten. In einer Simulationsstudie wurden die entwickelten Modelle den bestehenden gegenübergestellt. Die Studie unterstreicht den weiten Einsatzbereich der entwickelten Modelle: In den meisten Szenarien sind die Modelle III und IV zu bevorzugen. Ist die ausfallfreie Zeit deutlich kleiner als der Skalenparameter werden dagegen die Modelle I und II besser bewertet. Je linkssteiler die Weibullverteilung bei den betrachteten Beanspruchungen oder je stärker die Beanspruchungsabhängigkeit des Formparameters ist, desto besser sind die Modelle III und IV. Während der Einsatzbereich von Modell III unbegrenzt ist, ist Modell IV speziell für Schadensmechanismen mit $\beta > 1$ entwickelt und beispielsweise für Ermüdung zu bevorzugen.

Weiter wurde ein Verfahren, basierend auf maschinellem Lernen, vorgeschlagen. Abhängig von definierten Merkmalen wird dabei die Wahrscheinlichkeit, ein Experte zu sein, quantifiziert. Diese Wahrscheinlichkeit wird als Maß verwendet, inwieweit dessen Aussage mehr oder weniger Vertrauen geschenkt werden kann. Letztlich kann somit der Aussage des Experten systematisch ein Vertrauensbereich zugewiesen werden.

Die bestehenden und die entwickelten Ansätze wurden schließlich in einem ganzheitlichen Verfahren zusammengeführt. Dieses basiert auf dem Satz von Bayes und integriert sämtliche zur Verfügung stehenden Informationen aus Daten und aus Erfahrung. Zu letzterem zählen auch Berechnungsergebnisse für eine B_q -Lebensdauer. Lebensdauerdaten – aus Vorgängerversuchen, dem Feld oder aus der aktuellen Erprobung – werden dabei auf Feldbeanspruchung transformiert und in die Likelihoodfunktion, unter Berücksichtigung nicht-identischer Grundgesamtheiten, integriert. Für verschiede-

ne Szenarien sind hierzu Ablaufpläne dargestellt. Über die voneinander unabhängigen a priori Verteilungen der einzelnen Weibullparameter fließen die Informationen aus Erfahrung mit ein. Sind zu einem Parameter mehrere Informationen vorhanden, werden diese kombiniert. Sind keine Daten vorhanden, beschränkt sich das Verfahren auf voneinander unabhängige Informationen aus Erfahrung und es bedarf beispielsweise einer nachfolgenden Monte-Carlo Simulation. Das pragmatische ganzheitliche Verfahren führt letztlich systematisch und umfassend zu einer beanspruchungsgerechten Zuverlässigkeitsprognose. Ein Ausblick auf die Interpretation der a posteriori Verteilung bei unterschiedlichen Randbedingungen wurde gegeben.

Ein synthetisches Anwendungsbeispiel rundet die vorliegende Arbeit ab. Die Anwendbarkeit des ganzheitlichen Verfahrens wurde in verschiedenen Szenarien mit unterschiedlichen Randbedingungen bezüglich Informationen aus Daten und Erfahrung nachgewiesen sowie der Einfluss von Parametern, wie Transformationsfaktor und Expertengüte, aufgezeigt. Der ganzheitliche Ansatz konnte durch Einbindung zusätzlicher Informationen die Streuung der Zuverlässigkeitsprognose, gegenüber den für sich stehenden Konzepten und Methoden, stets reduzieren. Der Einfluss der Experten nimmt mit kleinerem Transformationsfaktor zu.

Die Arbeit stellt ein grundlegendes Verfahren dar, um zum einen einem beanspruchungsabhängigen Weibull-Formparameter Rechnung zu tragen und zum anderen parameterspezifisches Wissen systematisch in die Zuverlässigkeitsprognose zu integrieren. Weitere neue oder weiterentwickelte Ansätze können beliebig darin eingebunden werden. Andere Untersuchungen können die Bestimmung von Kundentypen fokussieren, um Felddaten sicherer zuzuordnen. Zudem steht eine praktische Verifikation des ganzheitlichen Verfahrens noch aus.

9 Literatur

- [Abe06] ABERNETHY Robert B.: *The new Weibull handbook: Reliability & statistical analysis for predicting life, safety, risk, support costs, failures, and forecasting warranty claims*. 5. Aufl. North Palm Beach (FL): R.B. Abernethy, 2006. ISBN 9780965306232
- [BaBe15] BARRINGER, Paul ; BENETT, Ted: *Weibull Failure Database*. Humble (TX): Barringer & Associates, Inc. URL <http://www.barringer1.com/> – Überprüfungsdatum 13.12.2015
- [BaYu96] BAI Do Sun und YUN Hyung Je: *Accelerated life tests for products of unequal size*. In: *IEEE Transactions on Reliability* 45 (1996), Nr. 4, S. 611–618. Verfügbar unter: doi:10.1109/24.556583
- [BBK13] BOTZLER Mathias, BERTSCHE Bernd und KOKES Michael: Wahrscheinlichkeitsbasierte präventive Diagnose von Nutzfahrzeugen. In: *Entwicklung und Betrieb zuverlässiger Produkte: 26. Fachtagung Technische Zuverlässigkeit 2013, Leonberg bei Stuttgart, 23. und 24. April 2013*. Leonberg. Düsseldorf: VDI-Verl., 2013 (VDI-Berichte, 2210). ISBN 9783180922102
- [BDJS11] BOBROWSKI Sebastian, DÖRING Maik, JENSEN Uwe und SCHINKÖTHE Wolfgang: Reliability prediction using the Cox proportional hazards model. In: *56th International Scientific Colloquium*. Ilmenau. Technischen Universität Ilmenau (Hrsg.). Ilmenau: Faculty of Mechanical Engineering, 2011
- [Bei10] BEIER Michael: *Lebensdaueruntersuchungen an feinwerktechnischen Planetenradgetrieben mit Kunststoffverzahnung*. Dissertation (Institut für Konstruktion und Fertigung in der Feinwerktechnik 32). Stuttgart: Institut für Konstruktion und Fertigung in der Feinwerktechnik, 2010. ISBN 978-3-922381-32-7
- [BeLe04] BERTSCHE Bernd und LECHNER Gisbert: *Zuverlässigkeit in Maschinenbau und Fahrzeugtechnik: Ermittlung von Bauteil- und System-Zuverlässigkeiten*. 3. Aufl. Berlin, et al.: Springer, 2004. ISBN 978-3-540-20871-6. Verfügbar unter: doi:10.1007/3-540-34996-0

- [Ben03] BENKER Hans: *Mathematische Optimierung mit Computeralgebrasystemen: Einführung für Ingenieure, Naturwissenschaftler und Wirtschaftswissenschaftler unter Anwendung von MATHEMATICA, MAPLE, MATHCAD, MATLAB und EXCEL*. Berlin, Heidelberg: Springer, 2003. ISBN 978-3-642-62902-0. Verfügbar unter: doi:10.1007/978-3-642-55736-1
- [Ber08] BERTSCHE Bernd: *Reliability in automotive and mechanical engineering: Determination of component and system reliability*. Berlin, Heidelberg: Springer, 2008. ISBN 9783540342823. Verfügbar unter: doi:10.1007/978-3-540-34282-3
- [Ber76] BERGLING Gunnar: *Betriebszuverlässigkeit von Wälzlagern*. In: *SKF Kugellager 51* (1976), Nr. 188, S. 1–10
- [Ber89] BERTSCHE Bernd: *Zur Berechnung der System-Zuverlässigkeit von Maschinenbau-Produkten*. Dissertation (Berichte aus dem Institut für Maschinenelemente 28). Stuttgart: Institut für Maschinenelemente, 1989. ISBN 3-921920-30-2
- [BGJ+09] BERTSCHE Bernd, GÖHNER Peter und JENSEN Uwe, et al.: *Zuverlässigkeit mechatronischer Systeme*. Berlin, Heidelberg: Springer, 2009. ISBN 978-3-540-85089-2. Verfügbar unter: doi:10.1007/978-3-540-85091-5
- [Bib15] BIBLIOGRAPHISCHES INSTITUT GMBH: *Mechanismus*. URL <http://www.duden.de/> – Überprüfungsdatum 20.12.2015
- [Bir04] BIROLINI Alessandro: *Reliability Engineering: Theory and practice; with 60 tables and 110 examples*. 4th ed. Berlin, Heidelberg: Springer, 2004. ISBN 9783540402879
- [BJSB14] BARTHOLDT Michael, JUSKOWIAK Jochen, SCHWEIZER Volker und BERTSCHE Bernd: Reliability Controlling Using a Modified Reliability Growth Model. In: *International Applied Reliability Symposium*. Paris. ReliaSoft Corporation (Hrsg.), 2014, S. 453–468
- [BoBe15] BOTZLER Mathias und BERTSCHE Bernd: Anwendungsorientierte Felddatenauswertung zur präventiven Diagnose. In: *27. VDI-Fachtagung Technische Zuverlässigkeit: Entwicklung und Betrieb zuverlässiger Produkte*. Stuttgart, 2015
- [BoGe89] BOYKO K. C. und GERLACH D. L.: Time dependent dielectric breakdown at 210 A° Oxides. In: *Reliability Physics Symposium*. Phoenix (AZ). IEEE (Hrsg.), 1989, S. 1–8. Verfügbar unter: doi:10.1109/RELPHY.1989.36309

- [BoTi73] BOX George E. P. und TIAO George C.: *Bayesian inference in statistical analysis* (Addison-Wesley series in behavioral science). Reading (MA): Addison-Wesley Pub. Co, 1973. ISBN 9780201006223
- [Bro95] BRODBECK Peter: *Experimentelle und theoretische Untersuchungen zur Bauteilzuverlässigkeit und zur Systemberechnung nach dem Booleschen Modell*. Dissertation (Berichte aus dem Institut für Maschinenelemente 60). Stuttgart: Institut für Maschinenelemente, 1995. ISBN 3-921920-60-4
- [BSDJ13] BOBROWSKI Sebastian, SCHINKÖTHE Wolfgang, DÖRING Maik und JENSEN Uwe: Zuverlässigkeitsprognose mit dem Cox-Proportional-Hazards-Modell am Beispiel mechatronischer Antriebe. In: *Stuttgarter Symposium für Produktentwicklung*. Stuttgart. SPATH, Dieter; BERTSCHE, Bernd; BINZ, Hansgeorg (Hrsg.). Stuttgart: Fraunhofer-Verlag, 2013. ISBN 9783839605738
- [BTF88] BARLOW R., TOLAND R. und FREEMAN T.: A Bayesian Analysis of the Stress-Rupture Life of Kevlar/Epoxy Spherical Pressure Vessels. In: *Proceedings of the International School of Physics "Enrico Fermi"*, 1988
- [CEH08] COOKE Roger M., ELSAADANY Susie und HUANG Xinzheng: *On the performance of social network and likelihood-based expert weighting schemes*. In: *Reliability Engineering & System Safety* 93 (2008), Nr. 5, S. 745–756. Verfügbar unter: doi:10.1016/j.ress.2007.03.017
- [Cha91] CHAN C. K.: *Temperature-dependent standard deviation of log(failure time) distributions*. In: *IEEE Transactions on Reliability* 40 (1991), Nr. 2, S. 157–160. Verfügbar unter: doi:10.1109/24.87118
- [ClFu91] CLARK Kim B. und FUJIMOTO Takahiro: *Product development performance: Strategy, organization, and management in the world auto industry*. 1. [print.]. Boston (MA): Harvard Business School Pr, 1991. ISBN 0-87584-245-3
- [CoGo08] COOKE Roger M. und GOOSSENS Louis L.H.J.: *TU Delft expert judgment data base*. In: *Reliability Engineering & System Safety* 93 (2008), Nr. 5, S. 657–674. Verfügbar unter: doi:10.1016/j.ress.2007.03.005
- [Coo91] COOKE Roger: *Experts in uncertainty: Opinion and subjective probability in science* (Environmental ethics and science policy). New York: Oxford University Press, 1991. ISBN 9780195064650

- [Cox72] COX D. R.: *Regression Models and Life-Tables*. In: *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)* 34 (1972), Nr. 2, S. p 187-220
- [DaDa09] DANKERT Jürgen und DANKERT Helga: *Technische Mechanik: Statik Festigkeitslehre Kinematik/Kinetik; mit 128 Übungsaufgaben zahlreichen Beispielen und weiteren Abbildungen und Aufgaben im Internet*. 5., überarb. und erw. Aufl. (Studium). Wiesbaden: Vieweg + Teubner, 2009. ISBN 9783835101777
- [Del07] DELONGA Melani: *Zuverlässigkeitsmanagementsystem auf Basis von Felddaten*. Dissertation (Berichte aus dem Institut für Maschinenelemente 123). Stuttgart: Institut für Maschinenelemente, 2007. ISBN 3-936100-24-1
- [DIN07] DIN EN 843-5:2007-03. *Hochleistungskeramik – Mechanische Eigenschaften monolithischer Keramik bei Raumtemperatur – Teil 5: Statistische Auswertung*
- [DIN09] DIN EN 61649:2009-03. *Weibull Analyse*
- [DIN10] DIN ISO 281:2010-10. *Wälzlager - Dynamische Tragzahlen und nominelle Lebensdauer*
- [DIN14] DIN EN 62506:2014-03. *Verfahren für beschleunigte Produktprüfungen*
- [DIN79] DIN 3979:1979-07. *Zahnschäden an Zahnradgetrieben*
- [DIN87] DIN 3990-1:1987-12. *Tragfähigkeitsberechnung von Stirnrädern - Einführung und allgemeine Einflussfaktoren*
- [DIN94] DIN IEC 60050-191. *IEV-Kapitel 191 Zuverlässigkeit und Dienstgüte*
- [DrMo07] DROGUETT Enrique López und MOSLEH Ali: *Time to failure assessment of products at service conditions from accelerated lifetime tests with stress-dependent spread in life*. In: *Pesquisa Operacional* 27 (2007), Nr. 2, S. 209–233. Verfügbar unter: doi:10.1590/S0101-74382007000200002
- [DSPL07] DANZER R., SUPANCIC P., PASCUAL J. und LUBE T.: *Fracture statistics of ceramics – Weibull statistics and deviations from Weibull statistics*. In: *Engineering Fracture Mechanics* 74 (2007), Nr. 18, S. 2919–2932. Verfügbar unter: doi:10.1016/j.engfracmech.2006.05.028
- [EhMe13] EHRENSPIEL Klaus und MEERKAMM Harald: *Integrierte Produktentwicklung: Denkabläufe Methodeneinsatz Zusammenarbeit*.

- Online-Ausg (Hanser eLibrary). München: Hanser Verlag, 2013. ISBN 9783446436275. Verfügbar unter: doi:10.3139/9783446436275
- [Els12] ELSAYED Elsayed A.: *Reliability engineering*. 2nd ed. (Wiley series in systems engineering and management). Hoboken: John Wiley & Sons, 2012. ISBN 9781118137192
- [ELW06] ELSAYED Elsayed A., LIAO Haitao und WANG Xindong: *An extended linear hazard regression model with application to time-dependent dielectric breakdown of thermal oxides*. In: *IIE Transactions* 38 (2006), Nr. 4, S. 329–340. Verfügbar unter: doi:10.1080/07408170500208362
- [FKL09] FAHRMEIR Ludwig, KNEIB Thomas und LANG Stefan: *Regression: Modelle Methoden und Anwendungen* (SpringerLink : Bücher). Berlin, Heidelberg: Springer, 2009. ISBN 978-3-642-01836-7
- [For36] FOREST A. V. de: *The rate of growth of fatigue cracks*. In: *Journal of applied mechanics* 3 (1936), S. A-23 - A-25
- [GeMe10] GENSCHEL Ulrike und MEEKER William Q.: *A Comparison of Maximum Likelihood and Median Rank Regression for Weibull Estimation*. In: *Quality Engineering* 22 (2010), Nr. 4, S. 236–255. Verfügbar unter: doi:10.1080/08982112.2010.503447
- [GrDr03] GROEN Frank J. und DROGUETT Enrique López: *Bayesian Estimation of the Variability of Reliability Measures*. In: *Annual Reliability and Maintainability Symposium: The International Symposium on Product Quality & Integrity*. Tampa (FL). Piscataway (NJ): Institute of Electrical and Electronics Engineers, 2003, S. 182–187. ISBN 0-7803-7718-4
- [Gro74] GROß Hartmut R. W.: *Beitrag zur Lebensdauerabschätzung von Stirnrädern bei Zahnkraftkollektiven mit geringem Völligkeitsgrad*. Dissertation (Fakultät für Maschinenwesen). Aachen, 1974
- [Gué01] GUÉRIN Fabrice: *Determining the shape parameter of a Weibull distribution, from mechanical-damage models*. In: *Annual Reliability and Maintainability Symposium: The International Symposium on Product Quality & Integrity*. Philadelphia (PA). Piscataway (NJ): IEEE Operations Center, 2001, S. 156–160. ISBN 0-7803-6616-6
- [Gum58] GUMBEL Emil Julius: *Statistics of extremes*. New York: Columbia University Press, 1958. ISBN 9780231021906
- [GuPu02] GUIDA Maurizio und PULCINI Gianpaolo: *Automotive reliability inference based on past data and technical knowledge*. In: *Reliability*

Engineering & System Safety 76 (2002), Nr. 2, S. 129–137. Verfügbar unter: doi:10.1016/S0951-8320(01)00132-6

- [Hai06] HAIBACH Erwin: *Betriebsfestigkeit: Verfahren und Daten zur Bauteilberechnung*. 3., korrigierte und ergänzte Auflage. Berlin, et al.: Springer, 2006. ISBN 978-3-540-29363-7. Verfügbar unter: doi:10.1007/3-540-29364-7
- [Han05] HANNEMAN, Robert: *Introduction to Social Network Methods*. Riverside (CA): University of California. URL <http://faculty.ucr.edu/~hanneman/nettext/> – Überprüfungsdatum 06.12.2015
- [HáŠi67] HÁJEK Jaroslav und ŠIDÁK Zbyněk: *Theory of rank tests*. New York: Academic Press Inc., 1967. ISBN 0-12-317250-0
- [HaSt03] HALL P. L. und STRUTT J. E.: *Probabilistic physics-of-failure models for component reliabilities using Monte Carlo simulation and Weibull analysis: A parametric study*. In: *Reliability Engineering & System Safety* 80 (2003), Nr. 3, S. 233–242. Verfügbar unter: doi:10.1016/S0951-8320(03)00032-2
- [Hei05] HEIER Siegfried: *Windkraftanlagen: Systemauslegung Netzintegration und Regelung*. 4., überarbeitete und aktualisierte Auflage (SpringerLink : Bücher). Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 2005. ISBN 9783322940872. Verfügbar unter: doi:10.1007/978-3-322-94087-2
- [Hir93] HIROSE Hideo: *Estimation of threshold stress in accelerated life-testing*. In: *IEEE Transactions on Reliability* 42 (1993), Nr. 4, S. 650–657. Verfügbar unter: doi:10.1109/24.273601
- [Hir99] HIROSE Hideo: *Bias correction for the maximum likelihood estimates in the two-parameter Weibull distribution*. In: *IEEE Transactions on Dielectrics and Electrical Insulation* 6 (1999), Nr. 1, S. 66–68. Verfügbar unter: doi:10.1109/94.752011
- [Hit07] HITZIGER Tillmann: *Übertragbarkeit von Vorkenntnissen bei der Zuverlässigkeitstestplanung*. Dissertation (Berichte aus dem Institut für Maschinenelemente 122). Stuttgart: Institut für Maschinenelemente, 2007. ISBN 3936100233
- [Hof13] HOFMANN Daniel: *Verknüpfungsmodell zuverlässigkeitsrelevanter Informationen in der Produktentwicklung mechatronischer Systeme*. Dissertation (Berichte aus dem Institut für Maschinenelemente 143).

- Stuttgart: Institut für Maschinenelemente, 2013. ISBN 978-3-936100-44-X
- [HSR89] HIERGEIST Peter, SPITZER Andreas und ROHL Siegfried: *Lifetime of thin oxide and oxide-nitride-oxide dielectrics within trench capacitors for DRAMs*. In: *Electron Devices, IEEE Transactions on* 36 (1989), Nr. 5, S. 913–919. Verfügbar unter: doi:10.1109/16.299673
- [HWRM08] HAMADA Michael S., WILSON Alyson G., REESE C. Shane und MARTZ Harry F.: *Bayesian reliability* (Springer series in statistics). New York: Springer, 2008. ISBN 978-0-387-77948-5. Verfügbar unter: doi:10.1007/978-0-387-77950-8
- [IQZ15] IQZ GMBH: *Zuverlässigkeitsanalyse mit dem Wuppertaler Zuverlässigkeitsprognosemodell (ZPM)*. URL <http://iqz-wuppertal.de/> – Überprüfungsdatum 13.12.2015
- [JäBe04] JÄGER Patrick und BERTSCHE Bernd: A new approach to gathering failure behavior information about mechanical components based on expert knowledge. In: *Annual Symposium Reliability and Maintainability*. Los Angeles (CA). Piscataway (NJ): IEEE, 2004, S. 90–95. ISBN 0-7803-8215-3. Verfügbar unter: doi:10.1109/RAMS.2004.1285429
- [JBB15] JUSKOWIAK Jochen, BARTHOLDT Michael und BERTSCHE Bernd: Weibull Lifetime Model Considering Stress-Dependent Parameters. In: *Proceedings of the 21th ISSAT*. Philadelphia (PA), 2015, S. 261–266. ISBN 978-0-9910576-2-7
- [JiMu11] JIANG R. und MURTHY D. N. P.: *A study of Weibull shape parameter: Properties and significance*. In: *Reliability Engineering & System Safety* 96 (2011), Nr. 12, S. 1619–1626. Verfügbar unter: doi:10.1016/j.ress.2011.09.003
- [JJB15] JAKOB Frank, JUSKOWIAK Jochen und BERTSCHE Bernd: Influence of Tested Samples on Acceleration Factors Variation. In: *Ann. Reliability & Maintainability Symp.* Palm Harbour (FL). Piscataway (NJ): IEEE, 2015, S. 537–542. ISBN 978-1-4799-6702-5. Verfügbar unter: doi:10.1109/RAMS.2015.7105180
- [JKB15] JAKOB Frank, KIMMELMANN Martin und BERTSCHE Bernd: *Methodik zur Auswahl von Raffungsmodellen für beschleunigte Versuche*. In: *Konstruktion* (2015), Nr. 11, S. 86–90

- [JLN+85] JOYCE W. B., LIOU K-Y. und NASH F. R., et al.: *Methodology of Accelerated Aging*. In: *AT&T Technical Journal* 64 (1985), Nr. 3, S. 717–764. ISSN: 1538-7305. Verfügbar unter: doi:10.1002/j.1538-7305.1985.tb00446.x
- [JSSB13] JUSKOWIAK Jochen, SCHWEIZER Volker, STOHRER Matthias und BERTSCHE Bernd: Reliability growth model in early design stages. In: *Annual Reliability and Maintainability Symposium*. Orlando (FL). Piscataway (NJ): IEEE, 2013, S. 1–6. ISBN 978-1-4673-4709-9. Verfügbar unter: doi:10.1109/RAMS.2013.6517687
- [JuBe14] JUSKOWIAK Jochen und BERTSCHE Bernd: Stress-Dependent Weibull Shape Parameter Based on Field Data. In: *PSAM12 proceedings*. Honolulu (HI). IAPSAM (Hrsg.), 2014
- [JuBe16] JUSKOWIAK Jochen und BERTSCHE Bernd: *Application and Simulation Study of Stress-Dependent Weibull Lifetime Models*. In: *International Journal of Reliability, Quality and Safety Engineering* 23 (2016), Nr. 2, 1650008. Verfügbar unter: doi:10.1142/S021853931650008X
- [Jus08] JUSKOWIAK Jochen: *Vergleich von Algorithmen zur Auswertung von gerafften Lebensdauerversuchen* (unveröffentlichte Studienarbeit). Stuttgart: Institut für Maschinenelemente, 2008
- [KBG+97] KLEYNER Andre, BHAGATH Shrikar und GASPARINI Mauro, et al.: *Bayesian techniques to reduce the sample size in automotive electronics attribute testing*. In: *Microelectronics Reliability* 37 (1997), Nr. 6, S. 879–883. Verfügbar unter: doi:10.1016/S0026-2714(96)00253-3
- [KiBa99] KIM C. M. und BAID. S.: *Design of Step-Stress Accelerated Life Tests for Weibull Distributions with a Nonconstant Shape Parameter*. In: *Journal of the Korean Statistical Society* 28 (1999), Nr. 4, S. 415–433. ISSN: 1226-3192
- [Kit83] KITSCHKE Erwin: *Wahrscheinlichkeitstheoretische Methoden zur Ermittlung der Zuverlässigkeitskenngrößen mechanischer Systeme auf der Grundlage der statistischen Beschreibung des Ausfallverhaltens von Komponenten*. Dissertation (Schriftenreihe 83.12). Bochum: Institut für Konstruktionstechnik, 1983
- [KJJB15] KÖTTERMANN Thomas, JACOBI Andreas, JORDAN Christoph und BRACKE Stefan: Anwendung multivariater Methoden auf automobile Daten zur lastbasierten Zuverlässigkeitsanalyse. In: *27. VDI-Fachtagung Technische Zuverlässigkeit: Entwicklung und Betrieb zuverlässiger Produkte*. Stuttgart, 2015

- [Kle13] KLEIN Benjamin: *Numerische Analyse von gemischten Ausfallverteilungen in der Zuverlässigkeitstechnik*. Dissertation (Berichte aus dem Institut für Maschinenelemente 148). Stuttgart: Universitätsbibliothek der Universität Stuttgart, 2013. ISBN 978-3-936100-49-5
- [Knö15] KNÖDLER-GETRIEBE GMBH & CO. KG: *Standardgetriebe*. URL <http://www.knoedler-getriebe.de/> – Überprüfungsdatum 19.12.2015
- [KoE114] KOSKULICS Michael und ELSAYED Elsayed A.: *Reliability Models for Stress Sequence Loading*. In: *Journal of Modern Mathematics Frontier 3* (2014), Nr. 1, S. 1–11. Verfügbar unter: doi:10.14355/jmmf.2014.0301.01
- [Kro04] KROLO Anna: *Planung von Zuverlässigkeitstests mit weitreichender Berücksichtigung von Vorkenntnissen*. Dissertation (Berichte aus dem Institut für Maschinenelemente 110). Stuttgart: Universitätsbibliothek der Universität Stuttgart, 2004. ISBN 3-936100-10-1
- [Küc95] KÜCÜKAY Ferit: *Repräsentative Erprobungsmethoden bei der Pkw-Getriebeentwicklung*. In: *Getriebe in Fahrzeugen '95: Tagung*. Friedrichshafen. Düsseldorf: VDI-Verlag, 1995, S. 49–65 (VDI-Berichte, 1175). ISBN 3-18-091175-1
- [Law03] LAWLESS Jerald F.: *Statistical models and methods for lifetime data*. 2nd ed (Wiley series in probability and statistics). Hoboken (NJ): Wiley-Interscience, 2003. ISBN 0-471-37215-3
- [Leo12] LEOPOLD Tobias: *Ganzheitliche Datenerfassung für verbesserte Zuverlässigkeitsanalysen*. Dissertation (Berichte aus dem Institut für Maschinenelemente 140). Stuttgart: Universitätsbibliothek der Universität Stuttgart, 2012. ISBN 978-3-936100-41-9
- [Liu97] LIU Chi-Chao: *A Comparison Between The Weibull And Lognormal Models Used To Analyse Reliability Data*. PhD thesis. Nottingham: Departement of Manufacturing Engineering and Operations Management, 1997
- [LiZe93] LIU J. und ZENNER H.: *Berechnung der Dauerschwingfestigkeit bei mehrachsiger Beanspruchung - Teil 1*. In: *Materialwissenschaft und Werkstofftechnik* 24 (1993), Nr. 7, S. 240–249. ISSN: 1521-4052. Verfügbar unter: doi:10.1002/mawe.19930240706

- [LLi62] LLOYD David K. und LIPOW Myron: *Reliability: Management, Methods, and Mathematics* (Prentice-Hall international series in engineering). Englewood Cliffs (NJ): Prentice-Hall, 1962
- [LTK89] LI P. C., TING W. und KWONG D.-L.: *Time-dependent dielectric breakdown of chemical-vapour-deposited SiO₂ gate dielectrics*. In: *Electronics Letters* 25 (1989), Nr. 10, S. 665–666. ISSN: 1350-911X. Verfügbar unter: doi:10.1049/el:19890450
- [LWN09] LANZA Gisela, WERNER Patrick und NIGGESCHMIDT Stephan: Adapted reliability prediction by integrating mechanical load impacts. In: *Annual Reliability and Maintainability Symposium*. Fort Worth (TX). Piscataway (NJ): IEEE, 2009, S. 83–88. ISBN 978-1-4244-2508-2. Verfügbar unter: doi:10.1109/RAMS.2009.4914655
- [Mae67] MAENNIG Wolfgang-Werner: *Untersuchungen zur Planung und Auswertung von Dauerschwingversuchen an Stahl in den Bereichen der Zeit- und Dauerfestigkeit* (Fortschrittberichte, VDI-Zeitschrift : Reihe 5. Grund- und Werkstoffe 5). Düsseldorf: VDI-Verlag, 1967
- [Mai07] MAISCH Matthias: *Zuverlässigkeitsorientiertes Erprobungskonzept für Nutzfahrzeuggetriebe unter Berücksichtigung von Betriebsdaten*. Dissertation (Berichte aus dem Institut für Maschinenelemente 124). Stuttgart: IMA, 2007. ISBN 3-936100-25-x
- [Mat15] MATHWORKS: *Documentation*. Natick (MA): MathWorks GmbH. URL <http://de.mathworks.com/help/index.html> – Überprüfungsdatum 08.12.2015
- [Mau99] MAUCH Heiko: *Statistische Methoden zur Beurteilung von Bauteillebensdauer und Zuverlässigkeit und ihre beispielhafte Anwendung auf Zahnräder* (FVA Forschungsvorhaben "Lebensdauerstatistik" Nr. 304): FVA, 1999
- [MaWa82] MARTZ Harry F. und WALLER Ray A.: *Bayesian reliability analysis* (Wiley series in probability and mathematical statistics. Applied probability and statistics). New York: Wiley, 1982. ISBN 0471864250
- [MBB07] MANNHART Alexandra, BILGIC Ali und BERTSCHE Bernd: Modeling Expert Judgment for Reliability Prediction - Comparison of Methods. In: *Annual Reliability and Maintainability Symposium*. Orlando (FL). Piscataway (NJ): IEEE, 2007, S. 1–6. ISBN 0-7803-9766-5. Verfügbar unter: doi:10.1109/RAMS.2007.328099

- [MeEs98] MEEKER William Q. und ESCOBAR Luis A.: *Statistical methods for reliability data* (Wiley series in probability and statistics. Applied probability and statistics section). New York: John Wiley & Sons, 1998. ISBN 9780585317243
- [MeMe94] MEETER Carol A. und MEEKER William Q.: *Optimum Accelerated Life Tests with a Nonconstant Scale Parameter*. In: *Technometrics* 36 (1994), Nr. 1, S. 71–83
- [Mit97] MITCHELL Tom M.: *Machine learning* (McGraw-Hill Series in Computer Science). Boston (MA): WCB/McGraw-Hill, 1997. ISBN 0070428077
- [Mül02] MÜLLER-KOSE Jan-Peter: *Repräsentative Lastkollektive für Fahrzeuggetriebe*. Dissertation (Schriftenreihe des Instituts für Fahrzeugtechnik, TU Braunschweig 3). Aachen: Shaker, 2002. ISBN 3-8322-1003-2
- [NBL+07] NAUNHEIMER Harald, BERTSCHE B. und LECHNER G., et al.: *Fahrzeuggetriebe: Grundlagen, Auswahl, Auslegung und Konstruktion*. 2. Aufl. (VDI-Buch). Berlin: Springer, 2007. ISBN 978-3-540-30625-2. Verfügbar unter: doi:10.1007/978-3-540-30670-2
- [Nel04a] NELSON Wayne: *Accelerated testing: Statistical models, test plans and data analyses*. 2. Aufl. (Wiley series in probability and statistics). Hoboken (NJ): John Wiley & Sons, Inc., 2004. ISBN 978-0-471-69736-7
- [Nel04b] NELSON Wayne: *Applied life data analysis* (Wiley series in probability and statistics). Hoboken (NJ): John Wiley & Sons, Inc., 2004. ISBN 978-0-471-64462-0
- [Nel84] NELSON Wayne: *Fitting of Fatigue Curves with Nonconstant Standard Deviation to Data with Runouts*. In: *Journal of Testing and Evaluation* 12 (1984), Nr. 2, S. 69–77. ISSN: 0090-3973. Verfügbar unter: doi:10.1520/JTE10700J
- [Nel90] NELSON Wayne: *Accelerated testing: Statistical models, test plans and data analyses* (Wiley series in probability and statistics). Hoboken (NJ): John Wiley & Sons, Inc., 1990. ISBN 9780471522775
- [NiLe09] NICHOLLS David und LEIN Paul: Weibayes Testing: What is the Impact if Assumed Beta is Incorrect? In: *Annual Reliability and Maintainability Symposium*. Fort Worth (TX). Piscataway (NJ): IEEE, 2009. ISBN 978-1-4244-2508-2. Verfügbar unter: doi:10.1109/RAMS.2009.4914646

- [Oh91] OH Byung Hwan: *Fatigue Life Distributions of Concrete for Various Stress Levels*. In: *ACI Materials Journal* 88 (1991), Nr. 2, S. 122–128. Verfügbar unter: doi:10.14359/1870
- [O'K112] O'CONNOR Patrick D. T. und KLEYNER Andre: *Practical reliability engineering*. 5. ed. Chichester: Wiley, 2012. ISBN 9780470979815
- [Ott06] OTTE Björn: *Strukturierung und Bewertung von Eingangsdaten für Zuverlässigkeitsanalysen*. Dissertation (Berichte aus dem Institut für Maschinenelemente 120). Stuttgart: IMA, 2006. ISBN 3936100217
- [PaGu89] PANCHANG Vijay G. und GUPTA Ramesh C.: *On the Determination of Three-Parameter Weibull MLE's*. In: *Communications in Statistics - Simulation and Computation* 18 (1989), Nr. 3, S. 1037–1057. Verfügbar unter: doi:10.1080/03610918908812805
- [PaMe97] PASCUAL Francis G. und MEEKER William Q.: *Analysis of Fatigue Data with Runouts Based on a Model with Nonconstant Standard Deviation and a Fatigue Limit Parameter*. In: *Journal of Testing and Evaluation* 25 (1997), Nr. 3, S. 292–301. ISSN: 0090-3973. Verfügbar unter: doi:10.1520/JTE11341J
- [PhLa07] PHAM Hoang und LAI Chin-Diew: *On Recent Generalizations of the Weibull Distribution*. In: *IEEE Transactions on Reliability* 56 (2007), Nr. 3, S. 454–458. ISSN: 0018-9529. Verfügbar unter: doi:10.1109/TR.2007.903352
- [PSP01] PFANNER D., STANGENBERG F. und PETRYNA Y. S.: Probabilistic Fatigue Damage Model for Reinforced Concrete. In: *Proceedings of the European Conference on Safety and Reliability ESREL 2001*. Turin, 2001
- [Raf95] RAFTERY Adrian E.: *Bayesian Model Selection in Social Research*. In: *Sociological Methodology* 25 (1995), S. 111–163. Verfügbar unter: doi:10.2307/271063
- [RaGu12] RAHEJA Dev und GULLO Louis J.: *Design for reliability* (Wiley series in quality & reliability engineering). Hoboken (NJ): John Wiley & Sons, Inc., 2012. ISBN 978-0-470-48675-7
- [Rel03] RELIASOFT CORPORATION: *Tool Tips: Use True 3-P MLE on Weibull Option and Rank Regression in ALTA* (Reliability HotWire 30). Tucson (AZ): ReliaSoft Corporation. URL <http://www.weibull.com/hotwire/issue30/tooltips30.htm> – Überprüfungsdatum 08.12.2015

- [RHB12] RÖSLER Joachim, HARDERS Harald und BÄKER Martin: *Mechanisches Verhalten der Werkstoffe*. 4. Aufl. (Lehrbuch). Wiesbaden: Springer Vieweg, 2012. ISBN 978-3-8348-2241-3
- [Rin09] RINNE Horst: *The Weibull distribution: A handbook*. Boca Raton (FL): CRC Press, 2009. ISBN 978-1-4200-8743-7
- [Ros81] ROSEMANN Harald: *Zuverlässigkeit und Verfügbarkeit technischer Anlagen und Geräte: Mit praktischen Beispielen von Berechnung und Einsatz in Schwachstellenanalysen*. Berlin, Heidelberg: Springer, 1981. ISBN 9783642480454
- [Ros96] ROSS R.: *Bias and standard deviation due to Weibull parameter estimation for small data sets*. In: *IEEE Transactions on Dielectrics and Electrical Insulation* 3 (1996), Nr. 1, S. 28–42. ISSN: 1070-9878. Verfügbar unter: doi:10.1109/94.485512
- [SaHe06] SACHS Lothar und HEDDERICH Jürgen: *Angewandte Statistik: Methodensammlung mit R*. 12., vollständig neu bearbeitete Auflage (SpringerLink : Bücher). Berlin, et al.: Springer, 2006. ISBN 978-3-540-32161-3. Verfügbar unter: doi:10.1007/978-3-540-32161-3
- [SaMa94] SAVCHUK Vladimir P. und MARTZ Harry F.: *Bayes reliability estimation using multiple sources of prior information: binomial sampling*. In: *IEEE Transactions on Reliability* 43 (1994), Nr. 1, S. 138–144. ISSN: 0018-9529. Verfügbar unter: doi:10.1109/24.285128
- [ScFe85] SCHWARZ J. A. und FELTON L. E.: *Compensating effects in electromigration kinetics*. In: *Solid-State Electronics* 28 (1985), Nr. 7, S. 669–675. Verfügbar unter: doi:10.1016/0038-1101(85)90017-6
- [Sch01] SCHIJVE Jaap: *Fatigue of structures and materials*. Dordrecht: Kluwer, 2001. ISBN 0792370139
- [Sch07] SCHLECHT Berthold: *Maschinenelemente 1: Festigkeit, Wellen, Verbindungen, Federn, Kupplungen*. München: Pearson Studium, 2007. ISBN 978-3-8273-7145-4
- [Sch08] SCHÄFER Uwe: *Das lineare Komplementaritätsproblem: Eine Einführung* (Springer-Lehrbuch). Berlin, Heidelberg: Springer, 2008. ISBN 978-3-540-79734-0. Verfügbar unter: doi:10.1007/978-3-540-79735-7
- [Sch09a] SCHLECHT Berthold: *Maschinenelemente 2: Lager und Getriebe*. München: Pearson Studium, 2009. ISBN 978-3-8273-7146-1

- [Sch09b] SCHIJVE Jaap: *Fatigue of structures and materials*. 2nd ed. Dordrecht, London: Springer, 2009. ISBN 978-1-4020-6808-9. Verfügbar unter: doi:10.1007/978-1-4020-6808-9
- [Sch12] SCHLUMMER Marco Heinz: *Beitrag zur Entwicklung einer alternativen Vorgehensweise für eine Proven-in-use-Argumentation in der Automobilindustrie*. Dissertation. Wuppertal: Universitätsbibliothek Wuppertal, 2012
- [Sch77] SCHIJVE Jaap: *Four Lectures on Fatigue Crack Growth*. Report LR-254. Delft: Delft University of Technology, Departement of Aerospace Engineering, 1977
- [Sch87] SCHWARZ J. A.: *Effect of temperature on the variance of the log-normal distribution of failure times due to electromigration damage*. In: *Journal of Applied Physics* 61 (1987), Nr. 2, S. 801. ISSN: 0021-8979. Verfügbar unter: doi:10.1063/1.338954
- [Sch94] SCHIJVE Jaap: *Fatigue Predictions And Scatter*. In: *Fatigue & Fracture of Engineering Materials and Structures* 17 (1994), Nr. 4, S. 381–396. ISSN: 1460-2695. Verfügbar unter: doi:10.1111/j.1460-2695.1994.tb00239.x
- [SDJB11] STOHRER Matthias, DITTRICH André, JUSKOWIAK Jochen und BERTSCHE Bernd: IRST - IMA Procedure for Reliability System Testing : Integrale Methodik zur präventiven Zuverlässigkeitsabsicherung von Produkten. In: *Stuttgarter Symposium für Produktentwicklung 2011: Engineering - eine Herausforderung für die Zukunft*. Stuttgart. SPATH, Dieter; BERTSCHE, Bernd; BINZ, Hansgeorg (Hrsg.). Stuttgart: Fraunhofer IAO, 2011, S. 129–130. ISBN 9783839603482
- [SFM09] SCHEFFLER Christina, FÖRSTER Theresa und MÄDER Edith: Beschleunigte Alterung von Glasfasern in alkalischen Lösungen: Einflüsse auf die mechanischen Eigenschaften. In: *4th Colloquium on Textile Reinforced Structures*. Dresden, 2009, S. 63–74. ISBN 9783867801225
- [SJB+13a] SCHWEIZER Volker, JUSKOWIAK Jochen und BARTHOLDT Michael, et al.: Modification and Application of an S-shaped Reliability Growth Model. In: *ESREL: Safety, Reliability and Risk Analysis - Beyond the Horizon*. Amsterdam. London: CRC Press, 2013, S. 3029-3035. ISBN 978-1-138-00123-7. Verfügbar unter: doi:10.1201/b15938-454

- [SJB13b] SCHWEIZER Volker, JUSKOWIAK Jochen und BERTSCHE Bernd: *Design for Reliability bei Früh- und Zufallsausfällen - Ansätze zur Vermeidung in der Praxis*. In: *ant Journal* 52 (2013), Nr. 4, S. 17–23
- [SJK09] SEO J.H, JUNG M. und KIM C.M: *Design of accelerated life test sampling plans with a nonconstant shape parameter*. In: *European Journal of Operational Research* 197 (2009), Nr. 2, S. 659–666. Verfügbar unter: doi:10.1016/j.ejor.2008.07.009
- [SPN09] STEIN, Petra ; PAVETIC, Monika ; NOACK, Marcel: *Multivariate Analyseverfahren*. URL <https://www.uni-due.de/imperia/md/content/soziologie/stein/multivariate.pdf> – Überprüfungsdatum 08.12.2015
- [TaAr03] TAKEMOTO Yasuhiko und ARIZONO Ikuo: Design of Accelerated Reliability Tests Based on Simple-Step-Stress Model. In: *Annual Reliability and Maintainability Symposium: The International Symposium on Product Quality & Integrity*. Tampa (FL). Piscataway (NJ): Institute of Electrical and Electronics Engineers, 2003. ISBN 0-7803-7718-4
- [TGD01] TEBBI O., GUERIN F. und DUMON B.: Comparative study of accelerated testing models, applications in mechanics. In: *IEEE International Conference on Systems, Man & Cybernetics*. Tucson (AZ), 2001, S. 2099–2104. Verfügbar unter: doi:10.1109/ICSMC.2001.972865
- [Tiw15] TIWARY Chandramani: *Learning Apache Mahout (Community experience distilled)*. Birmingham: Packt Publishing, 2015. ISBN 9781783555215
- [VDA00] VDA: *Qualitätsmanagement in der Automobilindustrie: Zuverlässigkeitssicherung bei Automobilherstellern und Lieferanten. Zuverlässigkeits-Methoden und -Hilfsmittel*. 3. Aufl. Frankfurt am Main, 2000
- [VDI06] VDI-RICHTLINIE: *Terminologie der Zuverlässigkeit (VDI 4001 Blatt 2)*. Berlin: VDI-Gesellschaft Systementwicklung und Projektgestaltung, 2006
- [WaKe00] WANG Wendai und KECECIOGLU Dimitri B.: *Fitting the Weibull log-linear model to accelerated life-test data*. In: *IEEE Transactions on Reliability* 49 (2000), Nr. 2, S. 217–223. ISSN: 0018-9529. Verfügbar unter: doi:10.1109/24.877341

- [Wei39] WEIBULL Waloddi: *A statistical theory of the strength of materials* (Ingeniörsvetenskapsakademiens handlingar 151). Stockholm: Generalstabens litografiska anstalts förlag, 1939
- [Wei51] WEIBULL Waloddi: *A Statistical Distribution Function of Wide Applicability*. In: *Journal of applied mechanics* 18 (1951), S. 293–297
- [WNH15] WANG Guodong, NIU Zhanwen und HE Zhen: *Accelerated Lifetime Data Analysis with a Nonconstant Shape Parameter*. In: *Mathematical Problems in Engineering* 2015 (2015), Nr. 1, S. 1–8. ISSN: 1563-5147. Verfügbar unter: doi:10.1155/2015/801465
- [YaEl03] YANG Kai und EL-HAIK Basem: *Design for Six Sigma: A roadmap for product development*. New York: McGraw-Hill, 2003. ISBN 0071435999
- [Yan07] YANG Guangbin: *Life cycle reliability engineering*. Hoboken (NJ): John Wiley & Sons, Inc., 2007. ISBN 978-0-471-71529-0
- [ZuGr13] ZUREK Jozef und GRZESIK Norbert: *Fuzzy expert aircraft onboard control systems assistant*. In: *ESREL: Safety, Reliability and Risk Analysis - Beyond the Horizon*. Amsterdam. London: CRC Press, 2013, S. 1063–1068. ISBN 978-1-138-00123-7

Vom Autor betreute studentische Arbeiten im Zusammenhang mit der vorliegenden Arbeit:

- [Hen14] HENß Mark: *Entwicklung einer Methode zur Belastungserfassung bei Felddaten* (unveröffentlichte Studienarbeit). Stuttgart: Institut für Maschinenelemente, 2014
- [Qad14] QADDIR Noorulhak: *Expertengewichtung- und kombination* (unveröffentlichte Bachelorarbeit). Stuttgart: Institut für Maschinenelemente, 2014
- [Rei15] REICHSTATT Stefan: *Optimierung und Anwendungsstudie eines erweiterten Lebensdauermodells* (unveröffentlichte Studienarbeit). Stuttgart: Institut für Maschinenelemente, 2015
- [Sch14] SCHIF Alexander: *Untersuchung zum Einfluss der Software bei der Analyse von Zufallsdaten* (unveröffentlichte Studienarbeit). Stuttgart: Institut für Maschinenelemente, 2014

10 Anhang

Tabelle 10.1: Lastwechsel der Versuchsreihen mit Zahnrädern von Brodbeck [Bro95]

Rang- zahl	1.491 N/mm²	1.740 N/mm²	1.988 N/mm²	Rang- zahl	1.491 N/mm²	1.740 N/mm²	1.988 N/mm²
1	90.900	35.100	14.100	51	249.800	94.800	42.700
2	119.700	36.500	19.200	52	251.300	96.100	42.900
3	119.800	39.700	20.300	53	266.200	97.000	43.100
4	140.200	47.200	20.900	54	267.300	97.500	43.200
5	140.200	48.600	23.300	55	267.500	98.100	44.200
6	146.600	49.400	23.700	56	270.000	100.600	44.300
7	148.900	49.500	24.200	57	270.400	101.000	44.300
8	158.500	55.000	27.600	58	278.500	101.300	44.700
9	160.500	55.600	27.800	59	286.800	102.000	44.700
10	161.200	59.000	28.200	60	288.600	103.100	45.300
11	163.100	59.800	28.400	61	291.600	104.500	45.400
12	164.000	60.300	29.900	62	291.900	104.800	45.600
13	165.700	61.200	30.700	63	293.400	105.500	45.700
14	168.700	62.100	30.900	64	294.400	105.800	46.000
15	169.200	62.200	32.500	65	296.700	108.700	46.000
16	173.600	62.700	32.800	66	299.500	109.000	46.100
17	174.500	63.300	32.900	67	300.700	109.300	46.900
18	177.500	66.600	33.200	68	308.300	109.800	48.100
19	177.700	67.300	33.300	69	308.600	110.500	48.300
20	178.800	68.000	33.700	70	308.800	110.500	48.400
21	180.100	68.500	33.700	71	312.200	111.600	49.300
22	183.200	69.100	33.900	72	318.900	113.700	49.400
23	184.700	70.900	34.200	73	319.200	113.800	49.500
24	186.800	71.400	34.800	74	319.400	113.900	50.100
25	186.800	71.500	35.400	75	322.600	113.900	50.300
26	187.900	73.400	35.500	76	326.900	115.400	51.700
27	191.900	73.900	35.600	77	337.600	115.800	51.800
28	195.300	75.200	35.700	78	346.100	115.800	52.000
29	200.000	75.900	35.900	79	351.900	117.400	52.700
30	203.100	79.400	36.000	80	365.200	121.000	52.700
31	206.400	79.500	36.300	81	370.500	127.400	53.500
32	211.100	79.600	36.700	82	375.600	127.400	54.300
33	212.600	80.100	36.900	83	380.900	129.700	54.300

Rangzahl	1.491 N/mm ²	1.740 N/mm ²	1.988 N/mm ²	Rangzahl	1.491 N/mm ²	1.740 N/mm ²	1.988 N/mm ²
34	215.400	80.300	37.100	84	380.900	130.700	55.400
35	217.600	80.400	38.400	85	386.800	133.700	55.900
36	218.500	81.200	38.700	86	390.000	136.400	56.200
37	218.800	82.300	38.900	87	430.200	138.900	56.400
38	223.400	82.800	39.200	88	431.000	141.500	56.500
39	224.100	83.900	39.600	89	442.600	141.800	56.800
40	224.400	84.500	39.800	90	443.500	141.800	56.800
41	225.300	86.700	39.900	91	490.900	142.000	57.300
42	226.000	88.600	39.900	92	492.600	142.800	58.400
43	228.800	88.700	40.100	93	506.500	144.700	58.600
44	231.200	88.900	40.100	94	560.200	146.000	60.800
45	232.300	89.700	40.200	95	568.100	151.000	62.300
46	237.500	90.700	40.400	96	592.100	159.200	62.500
47	238.600	91.300	41.500	97	613.300	159.600	62.600
48	239.400	91.400	42.000	98	781.100	160.300	62.600
49	244.800	93.600	42.100	99	817.400	185.500	62.600
50	249.500	93.700	42.300	100	1065.500	190.400	69.900

Tabelle 10.2: Lastwechsel der Versuchsreihen mit Zahnrädern von Groß, vgl. [Gro74]

Rangzahl	530 N/mm ²	640 N/mm ²	840 N/mm ²
1	54.500	26.000	8.300
2	57.000	28.000	8.800
3	58.000	28.050	9.100
4	59.000	28.200	9.400
5	64.000	28.700	9.800
6	64.500	30.500	10.000
7	67.000	31.000	10.050
8	69.500	32.000	10.200
9	71.000	32.500	10.800
10	73.000	35.000	11.400
11	79.000	36.000	11.950
12	85.000	38.000	12.000

Tabelle 10.3: Lebensdauern der Versuchsreihen von Barlow et al. [BTF88] (zitiert in [DrMo07])

Beanspruchung in [N/mm ²]	Lebensdauer in [h]	Ausfall (f) / zensiert (s)	Beanspruchung in [N/mm ²]	Lebensdauer in [h]	Ausfall (f) / zensiert (s)	Beanspruchung in [N/mm ²]	Lebensdauer in [h]	Ausfall (f) / zensiert (s)
23,44	4.000,00	f	25,51	7.996,00	f	29,65	4,60	f
23,44	5.376,00	f	25,51	9.240,30	f	29,65	6,10	f
23,44	7.320,00	f	25,51	9.973,00	f	29,65	6,70	f
23,44	8.616,00	f	25,51	9.973,00	s	29,65	7,90	f
23,44	9.120,00	f	25,51	9.973,00	s	29,65	8,30	f
23,44	13.272,00	s	25,51	9.973,00	s	29,65	8,50	f
23,44	13.272,00	s	25,51	9.973,00	s	29,65	9,10	f
23,44	13.272,00	s	25,51	9.973,00	s	29,65	10,20	f
23,44	13.272,00	s	25,51	9.973,00	s	29,65	12,50	f
23,44	13.272,00	s	27,58	19,10	f	29,65	13,30	f
23,44	13.272,00	s	27,58	24,30	f	29,65	14,00	f
23,44	13.272,00	s	27,58	69,80	f	29,65	14,60	f
23,44	13.272,00	s	27,58	71,20	f	29,65	15,00	f
23,44	13.272,00	s	27,58	136,00	f	29,65	18,70	f
23,44	13.272,00	s	27,58	199,10	f	29,65	22,10	f
23,44	13.272,00	s	27,58	403,70	f	29,65	45,90	f
23,44	13.272,00	s	27,58	432,20	f	29,65	55,40	f
23,44	13.272,00	s	27,58	453,40	f	29,65	61,20	f
23,44	13.272,00	s	27,58	514,10	f	29,65	87,50	f
23,44	13.272,00	s	27,58	514,20	f	29,65	98,20	f
23,44	13.272,00	s	27,58	541,60	f	29,65	101,00	f
25,51	225,20	f	27,58	544,90	f	29,65	111,40	f
25,51	503,60	f	27,58	554,20	f	29,65	144,00	f
25,51	1.087,70	f	27,58	664,50	f	29,65	158,70	f
25,51	1.134,30	f	27,58	694,10	f	29,65	243,90	f
25,51	1.824,30	f	27,58	876,70	f	29,65	254,10	f
25,51	1.920,10	f	27,58	930,40	f	29,65	444,40	f
25,51	2.383,00	f	27,58	1.254,90	f	29,65	590,40	f
25,51	2.442,50	f	27,58	1.275,60	f	29,65	638,20	f
25,51	3.708,90	f	27,58	1.536,80	f	29,65	755,20	f
25,51	3.708,90	f	27,58	1.755,50	f	29,65	952,20	f
25,51	4.908,90	f	27,58	2.046,20	f	29,65	1.108,20	f
25,51	5.556,00	f	27,58	6.177,50	f	29,65	1.148,50	f
25,51	6.271,00	f	29,65	2,20	f	29,65	1.569,30	f
25,51	7.332,00	f	29,65	4,00	f	29,65	1.750,60	f
25,51	7.918,70	f	29,65	4,00	f	29,65	1.802,10	f

Tabelle 10.4: Trainingsdaten mit 27 Datensätzen aktueller und ehemaliger Mitarbeiter des Instituts für Maschinenelemente, Stand Mai 2015

Datensatz	Berufserfahrung	Hauptautor	Klasse
P1	3	4	0
P2	1,5	0	0
P3	4	3	0
P4	0,5	0	0
P5	1	0	0
P6	4,5	4	1
P7	1	0	0
P8	6,5	3	1
P9	2,5	6	1
P10	1	0	0
P11	0,5	0	0
P12	16	5	1
P13	2	0	0
P14	4	2	0
P15	15	7	1
P16	6	5	1
P17	7,5	3	1
P18	5,5	15	1
P19	25	12	1
P20	16	8	1
P21	13	3	1
P22	13	10	1
P23	14	5	1
P24	9	3	1
P25	9	5	0
P26	8	2	1
P27	4,5	1	0

Tabelle 10.5: Synthetische Daten für Anwendungsbeispiel bei Transformation der a priori Daten – a priori Ausfallzeiten auf drei Beanspruchungsniveaus

Rangzahl	1.491 N/mm²	1.740 N/mm²	1.988 N/mm²
1	114.285	36.393	19.388
2	134.395	56.522	27.519
3	151.381	61.734	29.363
4	182.818	70.442	32.762
5	196.401	74.204	34.241
6	211.638	81.300	36.961
7	221.575	86.025	39.942
8	252.356	92.980	41.586
9	267.945	96.899	43.790
10	287.623	103.809	44.956
11	309.465	111.885	46.953
12	328.794	117.521	48.619
13	370.512	128.019	50.790
14	401.377	134.953	56.446
15	488.712	143.728	60.748
16	527.574	181.042	70.009

Tabelle 10.6: Synthetische Daten für Anwendungsbeispiel bei Transformation der a priori Daten – aktuelle Beobachtungen (Ausfallzeiten) bei Feldbeanspruchung

Rangzahl	1.491 N/mm²	Rangzahl	1.491 N/mm²	Rangzahl	1.491 N/mm²
1	117.266	8	211.891	15	318.829
2	138.182	9	217.957	16	340.798
3	151.317	10	234.774	17	373.430
4	164.240	11	250.896	18	393.309
5	171.888	12	270.839	19	414.125
6	182.012	13	288.866	20	483.420
7	204.075	14	301.697	21	528.461

Tabelle 10.7: Ergebnisse für verschiedene Transformationsfaktoren bei Feldbeanspruchung (90 % VG) für Anwendungsbeispiel bei Transformation der a priori Daten

	Aktuelle Beobachtungen			Verbundene Stichprobe a priori			Aktuelle Beobachtungen & verbundene Stichprobe a priori		
				$\Phi = 1$			$\Phi = 1$		
β	1,06	1,41	1,89	1,11	1,34	1,62	1,17	1,36	1,60
η	136.651	178.446	233.025	151.773	182.828	220.236	156.396	182.120	212.074
γ		111.156			109.289			109.448	
L		-271			-623			-894	
V	0,0620	2.190		0,0238	967		0,0173	673	
	2.190	8,4E+08		967	4,3E+08		673	2,8E+08	
				$\Phi = 0,9$			$\Phi = 0,9$		
β				1,20	1,45	1,77	1,23	1,44	1,70
η				161.704	192.399	228.920	162.272	187.713	217.142
γ					102.833			105.832	
L					-101			-372	
V				0,0294	1.072		0,0200	723	
				1.072	4,1E+08		723	2,8E+08	
				$\Phi = 0,7$			$\Phi = 0,7$		
β				1,05	1,36	1,77	1,24	1,50	1,81
η				127.671	157.573	194.478	153.752	178.861	208.070
γ					127.800			111.280	
L					-43			-314	
V				0,0471	1.228		0,0295	775	
				1.228	4,1E+08		775	2,7E+08	
				$\Phi = 0,5$			$\Phi = 0,5$		
β				0,59	1,09	2,04	1,39	1,72	2,14
η				36.259	61.127	103.052	153.572	180.028	211.041
γ					200.688			108.717	
L					-10,7171			-285,826	
V				0,1721	4.830		0,0513	1.245	
				4.830	3,8E+08		1.245	3,0E+08	

Tabelle 10.8: Synthetische Daten für Beispiele zur Interpretation der a posteriori Verteilung

Rangzahl	t	Rangzahl	t	Rangzahl	t
1	55,52	8	85,27	15	106,08
2	61,39	9	87,48	16	109,59
3	69,53	10	88,71	17	115,37
4	71,82	11	93,77	18	123,16
5	76,01	12	95,67	19	131,51
6	78,71	13	100,97	20	138,51
7	81,65	14	104,28		

Tabelle 10.9: Synthetische Daten der Vorgängerversuche für Szenario C im Anwendungsbeispiel

Rangzahl	530 N/mm ²	Rangzahl	640 N/mm ²	Rangzahl	840 N/mm ²
1	61.086	8	31.851	15	9.086
2	62.427	9	31.982	16	9.535
3	67.171	10	33.981	17	9.572
4	69.420	11	35.437	18	9.829

Tabelle 10.10: Synthetische Daten der aktuellen Beobachtungen für Szenario C2 und C3 im Anwendungsbeispiel

Szenario C2			Szenario C3		
Rangzahl	480 N/mm ²	Ausfall (f) / zensiert (s)	Rangzahl	480 N/mm ²	Ausfall (f) / zensiert (s)
1	87.835	f	1	87.835	f
2	89.333	f	2	89.333	f
3	92.455	f	3	92.455	f
4	97.232	f	4	97.232	f
5	97.794	f	5	97.794	f
6	98.338	f	6	98.338	f
7	101.400	f	7	100.455	s
8	102.846	f	8	100.455	s
9	103.042	f	9	100.455	s
10	104.291	f	10	100.455	s
11	108.662	f	11	100.455	s
12	122.234	f	12	100.455	s

Lebenslauf

Jochen Juskowiak

geboren am 7. August 1981 in Stuttgart

Schulbildung

1988 – 1992 Grundschule: Schule an der Weissach

1992 – 2001 Gymnasium: Bildungszentrum Weissacher Tal

Bundeswehr

09/01 – 02/03 Gruppenführer in 6./Transportbataillon 10 in Ellwangen/Jagst

Studium

10/03 – 09/09 Diplom Technologiemanagement an der Universität Stuttgart

Hauptfächer:

- Konstruktionstechnik

- Kraftfahrzeuge

Beruf

10/09 – 02/16 Akademischer Mitarbeiter am IMA im Forschungsbereich
Zuverlässigkeitstechnik

seit 03/16 Entwicklungsingenieur
bei Robert Bosch Starter Motors Generators GmbH

Liste der bisher erschienenen Berichte aus dem IMA:

Nr.	Verfasser	Titel
1	H.K. Müller	Beitrag zur Berechnung und Konstruktion von Hochdruckdichtungen an schnellaufenden Wellen
2	W. Passera	Konzentrisch laufende Gewinde-Wellen-Dichtung im laminaren Bereich
3	K. Karow	Konzentrische Doppelgewindewellendichtung im laminaren Bereich
3	F.E. Breit	Die Kreiszyinderschalendichtung: Eine Axialspaltdichtung mit druckabhängiger Spaltweite
	W. Sommer	Dichtungen an Mehrphasensystemen: Berührungsfreie Wellendichtungen mit hochviskosen Sperrflüssigkeiten
4	K. Heitel	Beitrag zur Berechnung und Konstruktion konzentrisch und exzentrisch betriebener Gewindewellendichtungen im laminaren Bereich
5	K.-H. Hirschmann	Beitrag zur Berechnung der Geometrie von Evolventenverzahnungen
6	H. Däuble	Durchfluß und Druckverlauf im radial durchströmten Dichtspalt bei pulsierendem Druck
7	J. Rybak	Einheitliche Berechnung von Schneidrädern für Außen- und Innenverzahnungen. Beitrag zu Eingriffsstörungen beim Hohlrad-Verzahnern mittels Schneidräder
8	D. Franz	Rechnergestütztes Entwerfen von Varianten auf der Grundlage gesammelter Erfahrungswerte
9	E. Lauster	Untersuchungen und Berechnungen zum Wärmehaushalt mechanischer Schaltgetriebe
10		Festschrift zum 70. Geburtstag von Prof. Dr.-Ing. K. Talke
11	G. Ott	Untersuchungen zum dynamischen Leckage- und Reibverhalten von Radialwellendichtringen
12	E. Fuchs	Untersuchung des elastohydrodynamischen Verhaltens von berührungsfreien Hochdruckdichtungen
13	G. Sedlak	Rechnerunterstütztes Aufnehmen und Auswerten spannungsoptischer Bilder
14	W. Wolf	Programmsystem zur Analyse und Optimierung von Fahrzeuggetrieben
15	H. v. Eiff	Einfluß der Verzahnungsgeometrie auf die Zahnfußbeanspruchung innen- und außenverzahnter Geradstirnräder
16	N. Messner	Untersuchung von Hydraulikstangendichtungen aus Polytetrafluoräthylen
17	V. Schade	Entwicklung eines Verfahrens zur Einflanken-Wälzprüfung und einer rechnergestützten Auswertemethode für Stirnräder
18	A. Gührer	Beitrag zur Optimierung von Antriebssträngen bei Fahrzeugen
19	R. Nill	Das Schwingungsverhalten loser Bauteile in Fahrzeuggetrieben
20	M. Kammüller	Zum Abdichtverhalten von Radial-Wellendichtringen
21	H. Truong	Strukturorientiertes Modellieren, Optimieren und Identifizieren von Mehrkörpersystemen
22	H. Liu	Rechnergestützte Bilderfassung, -verarbeitung und -auswertung in der Spannungsoptik
23	W. Haas	Berührungsfreie Wellendichtungen für flüssigkeitsbespritzte Dichtstellen
24	M. Plank	Das Betriebsverhalten von Wälzlagern im Drehzahlbereich bis 100.000/min bei Kleinstmengenschmierung
25	A. Wolf	Untersuchungen zum Abdichtverhalten von druckbelastbaren Elastomer- und PTFE-Wellendichtungen
26	P. Waidner	Vorgänge im Dichtspalt wasserabdichtender Gleitringdichtungen
27	Hirschmann u.a.	Veröffentlichungen aus Anlaß des 75. Geburtstags von Prof. Dr.-Ing. Kurt Talke
28	B. Bertsche	Zur Berechnung der Systemzuverlässigkeit von Maschinenbau-Produkten
29	G. Lechner;	Forschungsarbeiten zur Zuverlässigkeit im Maschinenbau
	K.-H.Hirschmann;	
	B. Bertsche	
30	H.-J. Prokop	Zum Abdicht- und Reibungsverhalten von Hydraulikstangendichtungen aus Polytetrafluoräthylen
31	K. Kleinbach	Qualitätsbeurteilung von Kegelradsätzen durch integrierte Prüfung von Tragbild, Einflankenwälzabweichung und Spielverlauf
32	E. Zürn	Beitrag zur Erhöhung der Meßgenauigkeit und -geschwindigkeit eines Mehrkoordinatentasters
33	F. Jauch	Optimierung des Antriebsstranges von Kraftfahrzeugen durch Fahrsimulation
34	J. Grabscheid	Entwicklung einer Kegelrad-Laufprüfmaschine mit thermografischer Tragbilderfassung
35	A. Hölderlin	Verknüpfung von rechnerunterstützter Konstruktion und Koordinatenmeßtechnik
36	J. Kurfess	Abdichten von Flüssigkeiten mit Magnetflüssigkeitsdichtungen
37	G. Borenius	Zur rechnerischen Schädigungsakkumulation in der Erprobung von Kraftfahrzeugteilen bei stochastischer Belastung mit variabler Mittellast
38	E. Fritz	Abdichtung von Maschinenspindeln
39	E. Fritz; W. Haas;	Berührungsfreie Spindelabdichtungen im Werkzeugmaschinenbau. Konstruktionskatalog
	H.K. Müller	

Nr.	Verfasser	Titel
40	B. Jenisch	Abdichten mit Radial-Wellendichtringen aus Elastomer und Polytetrafluorethylen
41	G. Weidner	Klappern und Rasseln von Fahrzeuggetrieben
42	A. Herzog	Erweiterung des Datenmodells eines 2D CAD-Systems zur Programmierung von Mehrkoordinatenmeßgeräten
43	T. Roser	Wissensbasiertes Konstruieren am Beispiel von Getrieben
44	P. Wäschle	Entlastete Wellendichtringe
45	Z. Wu	Vergleich und Entwicklung von Methoden zur Zuverlässigkeitsanalyse von Systemen
46	W. Richter	Nichtwiederholbarer Schlag von Wälzlageeinheiten für Festplattenlaufwerke
47	R. Durst	Rechnerunterstützte Nutprofilentwicklung und clusteranalytische Methoden zur Optimierung von Gewindewerkzeugen
48	G.S. Müller	Das Abdichtverhalten von Gleitringdichtungen aus Siliziumkarbid
49	W.-E. Krieg	Untersuchungen an Gehäuseabdichtungen von hochbelasteten Getrieben
50	J. Grill	Zur Krümmungstheorie von Hüllflächen und ihrer Anwendung bei Werkzeugen und Verzahnungen
51	M. Jäckle	Entlüftung von Getrieben
52	M. Köchling	Beitrag zur Auslegung von geradzahnten Stirnrädern mit beliebiger Flankenform
53	M. Hildebrandt	Schadensfrüherkennung an Wälzkontakten mit Körperschall-Referenzsignalen
54	H. Kaiser	Konstruieren im Verbund von Expertensystem, CAD-System, Datenbank und Wiederholteil-suchsystem
55	N. Stanger	Berührungsfrei abdichten bei kleinem Bauraum
56	R. Lenk	Zuverlässigkeitsanalyse von komplexen Systemen am Beispiel PKW-Automatikgetriebe
57	H. Naunheimer	Beitrag zur Entwicklung von Stufenlosgetrieben mittels Fahrsimulation
58	G. Neumann	Thermografische Tragbilderfassung an rotierenden Zahnrädern
59	G. Wüstenhagen	Beitrag zur Optimierung des Entlasteten Wellendichtrings
60	P. Brodbeck	Experimentelle und theoretische Untersuchungen zur Bauteilzuverlässigkeit und zur Systemberechnung nach dem Booleschen Modell
61	Ch. Hoffmann	Untersuchungen an PTFE-Wellendichtungen
62	V. Hettich	Identifikation und Modellierung des Materialverhaltens dynamisch beanspruchter Flächen-dichtungen
63	K. Riedl	Pulsationsoptimierte Außenzahnpumpen mit ungleichförmig übersetzenden Radpaaren
64	D. Schwuchow	Sonderverzahnungen für Zahnpumpen mit minimaler Volumenstrompulsation
65	T. Spörl	Modulares Fahrsimulationsprogramm für beliebig aufgebaute Fahrzeugtriebstränge und Anwendung auf Hybridantriebe
66	K. Zhao	Entwicklung eines räumlichen Toleranzmodells zur Optimierung der Produktqualität
67	K. Heusel	Qualitätssteigerung von Planetengetrieben durch Selektive Montage
68	T. Wagner	Entwicklung eines Qualitätssysteminformationssystems für die Konstruktion
69	H. Zelßmann	Optimierung des Betriebsverhaltens von Getriebeentlüftungen
70	E. Bock	Schwimmende Wellendichtringe
71	S. Ring	Anwendung der Verzahnungstheorie auf die Modellierung und Simulation des Werkzeug-schleifens
72	M. Klöpfer	Dynamisch beanspruchte Dichtverbindungen von Getriebegehäusen
73	C.-H. Lang	Losteilgeräusche von Fahrzeuggetrieben
74	W. Haas	Berührungsfreies Abdichten im Maschinenbau unter besonderer Berücksichtigung der Fang-labyrinth
75	P. Schiberna	Geschwindigkeitsvorgabe für Fahrsimulationen mittels Verkehrssimulation
76	W. Elser	Beitrag zur Optimierung von Wälzgetrieben
77	P. Marx	Durchgängige, bauteilübergreifende Auslegung von Maschinenelementen mit unscharfen Vorgaben
78	J. Kopsch	Unterstützung der Konstruktionstätigkeiten mit einem Aktiven Semantischen Netz
79	J. Rach	Beitrag zur Minimierung von Klapper- und Rasselgeräuschen von Fahrzeuggetrieben
80	U. Häussler	Generalisierte Berechnung räumlicher Verzahnungen und ihre Anwendung auf Wälzfräse-herstellung und Wälzfräsen
81	M. Hüsges	Steigerung der Tolerierungsfähigkeit unter fertigungstechnischen Gesichtspunkten
82	X. Nastos	Ein räumliches Toleranzbewertungssystem für die Konstruktion
83	A. Seifried	Eine neue Methode zur Berechnung von Rollenlagern über lagerinterne Kontakt-Beanspruchungen
84	Ch. Dörr	Ermittlung von Getriebebelastkollektiven mittels Winkelbeschleunigungen
85	A. Veil	Integration der Berechnung von Systemzuverlässigkeiten in den CAD-Konstruktionsprozeß
86	U. Frenzel	Rückenstrukturierte Hydraulikstangendichtungen aus Polyurethan
87	U. Braun	Optimierung von Außenzahnpumpen mit pulsationsarmer Sonderverzahnung
88	M. Lambert	Abdichtung von Werkzeugmaschinen-Flachführungen
89	R. Kubalczyk	Gehäusegestaltung von Fahrzeuggetrieben im Abdichtbereich

Nr.	Verfasser	Titel
90	M. Oberle	Spielbeeinflussende Toleranzparameter bei Planetengetrieben
91	S. N. Dogan	Zur Minimierung der Losteilgeräusche von Fahrzeuggetrieben
92	M. Bast	Beitrag zur werkstückorientierten Konstruktion von Zerspanwerkzeugen
93	M. Ebenhoch	Eignung von additiv generierten Prototypen zur frühzeitigen Spannungsanalyse im Produktentwicklungsprozess
94	A. Fritz	Berechnung und Monte-Carlo Simulation der Zuverlässigkeit und Verfügbarkeit technischer Systeme
95	O. Schrems	Die Fertigung als Versuchsfeld für die qualitätsgerechte Produktoptimierung
96	M. Jäckle	Untersuchungen zur elastischen Verformung von Fahrzeuggetrieben
97	H. Haiser	PTFE-Compounds im dynamischen Dichtkontakt bei druckbelastbaren Radial-Wellendichtungen
98	M. Rettenmaier	Entwicklung eines Modellierungs-Hilfssystems für Rapid Prototyping gerechte Bauteile
99	M. Przybilla	Methodisches Konstruieren von Leichtbauelementen für hochdynamische Werkzeugmaschinen
100	M. Olbrich	Werkstoffmodelle zur Finiten-Elemente-Analyse von PTFE-Wellendichtungen
101	M. Kunz	Ermittlung des Einflusses fahrzeug-, fahrer- und verkehrsspezifischer Parameter auf die Getriebelastkollektive mittels Fahrsimulation
102	H. Ruppert	CAD-integrierte Zuverlässigkeitsanalyse und -optimierung
103	S. Kilian	Entwicklung hochdynamisch beanspruchter Flächendichtverbindungen
104	A. Flaig	Untersuchung von umweltschonenden Antriebskonzepten für Krafffahrzeuge mittels Simulation
105	B. Luo	Überprüfung und Weiterentwicklung der Zuverlässigkeitsmodelle im Maschinenbau mittels Mono-Bauteil-Systemen
106	L. Schüppenbauer	Erhöhung der Verfügbarkeit von Daten für die Gestaltung und Berechnung der Zuverlässigkeit von Systemen
107	J. Ryborz	Klapper - und Rasselgeräuschverhalten von Pkw- und Nkw- Getrieben
108	M. Würthner	Rotierende Wellen gegen Kühlschmierstoff und Partikel berührungsfrei abdichten
109	C. Gitt	Analyse und Synthese leistungsverzweigter Stufenlosgetriebe
110	A. Krolo	Planung von Zuverlässigkeitstests mit weitreichender Berücksichtigung von Vorkenntnissen
111	G. Schöllhammer	Entwicklung und Untersuchung inverser Wellendichtsysteme
112	K. Fronius	Gehäusegestaltung im Abdichtbereich unter pulsierendem Innendruck
113	A. Weidler	Ermittlung von Raffungsfaktoren für die Getriebeerprobung
114	B. Stiegler	Berührungsfreie Dichtsysteme für Anwendungen im Fahrzeug- und Maschinenbau
115	T. Kunstfeld	Einfluss der Wellenoberfläche auf das Dichtverhalten von Radial-Wellendichtungen
116	M. Janssen	Abstreifer für Werkzeugmaschinenführungen
117	S. Buhl	Wechselbeziehungen im Dichtsystem von Radial-Wellendichtring, Gegenlaufläche und Fluid
118	P. Pozsgai	Realitätsnahe Modellierung und Analyse der operativen Zuverlässigkeitskennwerte technischer Systeme
119	H. Li	Untersuchungen zum realen Bewegungsverhalten von Losteilen in Fahrzeuggetrieben
120	B. Otte	Strukturierung und Bewertung von Eingangsdaten für Zuverlässigkeitsanalysen
121	P. Jäger	Zuverlässigkeitsbewertung mechatronischer Systeme in frühen Entwicklungsphasen
122	T. Hitziger	Übertragbarkeit von Vorkenntnissen bei der Zuverlässigkeitstestplanung
123	M. Delonga	Zuverlässigkeitsmanagementsystem auf Basis von Felddaten
124	M. Maisch	Zuverlässigkeitsorientiertes Erprobungskonzept für Nutzfahrzeuggetriebe unter Berücksichtigung von Betriebsdaten
125	J. Orso	Berührungsfreies Abdichten schnelllaufender Spindeln gegen feine Stäube
126	F. Bauer	PTFE-Manschettendichtungen mit Spiralrille - Analyse, Funktionsweise und Erweiterung der Einsatzgrenzen
127	M. Stockmeier	Entwicklung von Klapper- und rasselgeräuschfreien Fahrzeuggetrieben
128	M. Trost	Gesamtheitliche Anlagenmodellierung und -analyse auf Basis stochastischer Netzverfahren
129	P. Lambeck	Unterstützung der Kreativität von verteilten Konstrukteuren mit einem Aktiven Semantischen Netz
130	K. Pickard	Erweiterte qualitative Zuverlässigkeitsanalyse mit Ausfallprognose von Systemen
131	W. Novak	Geräusch- und Wirkungsgradoptimierung bei Fahrzeuggetrieben durch Festradentkopplung
132	M. Henzler	Radialdichtungen unter hoher Druckbelastung in Drehübertragern von Werkzeugmaschinen
133	B. Rzepka	Konzeption eines aktiven semantischen Zuverlässigkeitsinformationssystems
134	C.G. Pflüger	Abdichtung schnelllaufender Hochdruck-Drehübertrager mittels Rechteckring und hocheffizient strukturierter Gleitfläche
135	G. Baitinger	Multiskalenansatz mit Mikrostrukturanalyse zur Drallbeurteilung von Dichtungsgegenläufigen

Nr.	Verfasser	Titel
136	J. Gäng	Berücksichtigung von Wechselwirkungen bei Zuverlässigkeitsanalysen
137	Ch. Maisch	Berücksichtigung der Ölalterung bei der Lebensdauer- und Zuverlässigkeitsprognose von Getrieben
138	D. Kirschmann	Ermittlung erweiterter Zuverlässigkeitsziele in der Produktentwicklung
139	D. Weber	Numerische Verschleißsimulation auf Basis tribologischer Untersuchungen am Beispiel von PTFE-Manschettendichtungen
140	T. Leopold	Ganzheitliche Datenerfassung für verbesserte Zuverlässigkeitsanalysen
141	St. Jung	Beitrag zum Einfluss der Oberflächencharakteristik von Gegenlauflächen auf das tribologische System Radial-Wellendichtung
142	T. Prill	Beitrag zur Gestaltung von Leichtbau-Getriebegehäusen und deren Abdichtung
143	D. Hofmann	Verknüpfungsmo- dell zuverlässigkeitsrelevanter Informationen in der Produktentwicklung mechatronischer Systeme
144	M. Wacker	Einfluss von Drehungleichförmigkeiten auf die Zahnradlebensdauer in Fahrzeuggetrieben
145	B. Jakobi	Dichtungsgeräusche am Beispiel von Pkw-Lenkungen – Analyse und Abhilfemaßnahmen
146	S. Kiefer	Bewegungsverhalten von singulären Zahnradstufen mit schaltbaren Koppelungseinrichtungen
147	P. Fietkau	Transiente Kontaktberechnung bei Fahrzeuggetrieben
148	B. Klein	Numerische Analyse von gemischten Ausfallverteilungen in der Zuverlässigkeitstechnik
149	M. Klaiber	Betriebs- und Benetzungseigenschaften im Dichtsystem Radial-Wellendichtung am Beispiel von additivierten synthetischen Schmierölen
150	A. Baumann	Rasselgeräuschminimierung von Fahrzeuggetrieben durch Getriebeöle
151	M. Kopp	Modularisierung und Synthese von Zuverlässigkeitsmethoden
152	M. Narten	Abdichten von fließfettgeschmierten Getrieben mit Radialwellendichtungen – Reibungsmin- derung durch Makrostrukturierung der Dichtungsgegenlaufläche
153	P. Schuler	Einfluss von Grenzflächeneffekten auf den Dichtmechanismus der Radial-Wellendichtung
154	A. Romer	Anwendungsspezifischer Zuverlässigkeitsnachweis auf Basis von Lastkollektiven und Vorwissen
155	A. Daubner	Analyse, Modellierung und Simulation von Verschleiß auf mehreren Skalen zur Betriebsdauervorhersage von Wellendichtringen aus PTFE-Compound
156	J. Rowas	Ökologischer Einsatz der Traktionsarten im System Bahn
157	D. J. Maier	Sensorlose online Zustandserfassung von Vorschubantriebskomponenten in Werkzeugmaschinen
158	J.-P. Reibert	Statisches Abdichten auf nicht idealen Dichtflächen in der Antriebstechnik
159	M. Sommer	Einfluss des Schmierfetts auf das tribologische System Radial-Wellendichtung – Betriebsverhalten und Funktionsmodell
160	W. Haas	Basics der Dichtungstechnik
161	U. Nißler	Dichtheit von Hydraulikstangendichtringen aus Polyurethan
162	S. M. Neuberger	Entwicklung einer gasgeschmierten Gleitringdichtung für den Einsatz im Verbrennungsmotor
163	W. Goujavin	Strömungsmechanische Untersuchungen zur Funktionsweise von Manschettendichtungen aus PTFE-Compounds mit Rückförderstrukturen
164	K. Mutter	Simulation der Zuverlässigkeit von Gesamtfahrzeugfunktionen am Beispiel Fahrkomfort
165	S. Sanzenbacher	Reduzierung von Getriebegeräuschen durch Körperschallminderungsmaßnahmen
166	O. Koller	Zuverlässigkeit von Leistungsmodulen im elektrischen Antriebsstrang
167	M. Remppis	Untersuchungen zum Förderverhalten von Dichtsystemen mit Radial-Wellendichtringen aus Elastomer
168	M. Baumann	Abdichtung drallbehafteter Dichtungsgegenlauflächen – Messung, Analyse, Bewertung und Grenzen
169	M. Schenk	Adaptives Prüfstandsverhalten in der PKW-Antriebstrangerprobung
170	J. Gözl	Manschettendichtringe aus PTFE-Compounds, Funktionsmechanismus von PTFE-Manschettendichtungen und Entwicklung von Rückförderstrukturen für beidseitig drehende Wellen
171	J. Kümmel	Schmutzabdichtung mittels Fettgefüllter Berührungsfeier Wellendichtungen
172	S. Bader	Gehäusedichtungen unter korrosiver Last