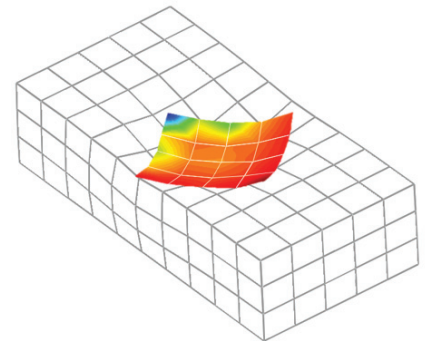
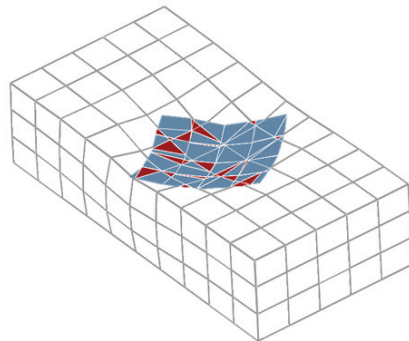
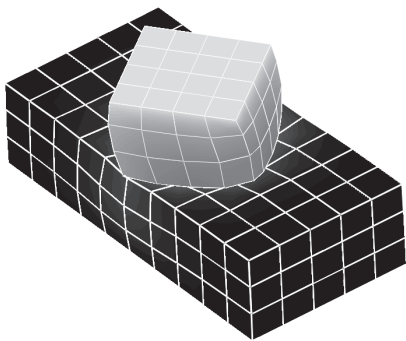


Universität Stuttgart

Baustatik und Baudynamik

Effiziente Integration und verbesserte Kontaktspannungen für duale Mortar-Formulierungen

Christoph Wilking



Effiziente Integration und verbesserte Kontaktspannungen für duale Mortar-Formulierungen

von

Christoph Moritz Wilking

Bericht Nr. 66
Institut für Baustatik und Baudynamik der Universität Stuttgart
Professor Dr.-Ing. habil. M. Bischoff
2017



© Christoph Moritz Wilking

Berichte können bezogen werden über:
Institut für Baustatik und Baudynamik
Universität Stuttgart
Pfaffenwaldring 7
70550 Stuttgart

Tel.: 0711 - 685 66123
Fax: 0711 - 685 66130
E-Mail: sekretariat@ibb.uni-stuttgart.de
<http://www.ibb.uni-stuttgart.de/>

Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung in andere Sprachen, vorbehalten. Ohne Genehmigung des Autors ist es nicht gestattet, diesen Bericht ganz oder teilweise auf photomechanischem, elektronischem oder sonstigem Wege zu kommerziellen Zwecken zu vervielfältigen.

D 93 - Dissertation an der Universität Stuttgart
ISBN 978-3-00-057443-6

Effiziente Integration und verbesserte Kontaktspannungen für duale Mortar-Formulierungen

Von der Fakultät Bau- und Umweltingenieurwissenschaften
der Universität Stuttgart zur Erlangung der Würde eines
Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.) genehmigte Abhandlung

vorgelegt von

Christoph Moritz Wilking

aus Berlin

Hauptberichter: Prof. Dr.-Ing. habil. Manfred Bischoff, Stuttgart

Mitberichter: Prof. Dr.-Ing. Wolfgang A. Wall, München

Tag der mündlichen Prüfung: 25. Juli 2017

Institut für Baustatik und Baudynamik der Universität Stuttgart

2017

Kurzfassung

Diese Arbeit beschäftigt sich mit Computersimulationen von Kontaktproblemen für deformierbare Festkörper. Kontakt tritt in vielen Ingenieurdisziplinen auf und muss in entsprechenden Computersimulationen berücksichtigt werden, um das Verhalten der untersuchten Systeme korrekt abbilden zu können. Ein anschauliches Anwendungsbeispiel für Computersimulationen von Kontaktproblemen sind Crashtest-Simulationen. Bei derartig komplizierten Problemen ist es nicht möglich, auf analytische Lösungen zurückzugreifen, weshalb genäherte Lösungen bestimmt werden. Als Diskretisierungsmethode kommt hierbei häufig die Methode der finiten Elemente zum Einsatz. Die Diskretisierung des Kontakts erfolgt dabei überwiegend mit sogenannten Node-to-Segment-Formulierungen. Kontaktdiskretisierungen, die auf der Mortar-Methode basieren, stellen in der Forschung einen Bereich zunehmender Aktivität dar. Die Mortar-Methode ist bereits in kommerziellen Finite-Elemente-Programmen implementiert und wird vermehrt für Computersimulationen von Kontaktproblemen verwendet. Die steigende Beliebtheit dieser Methode beruht auf ihrer mathematisch nachweisbaren Optimalität und ihrer numerischen Robustheit. Als Nachteil der Mortar-Methode kann ihr relativ hoher numerischer Aufwand angeführt werden. Ein Ziel dieser Arbeit ist es, die Leistungsfähigkeit von Mortar-Methoden für dreidimensionale Probleme zu steigern, indem die numerische Integration modifiziert wird. Außerdem wird ein Ansatz zur Verbesserung der Kontaktspannungen dualer Mortar-Formulierungen präsentiert.

Zur Beschreibung der Modifikationen wird zunächst die zugrunde liegende Kontaktformulierung dargestellt. Das strukturmechanische Problem wird durch Kontaktbedingungen erweitert, um die physikalischen Gesetzmäßigkeiten des Kontakts zu berücksichtigen. Diese Gesetzmäßigkeiten sind z. B. die Nichtdurchdringungsbedingung der Körper sowie das Auftreten tangentialer Reibspannungen, wenn die Kontaktoberflächen rau sind. Mathematisch gesehen werden die Kontaktbedingungen mithilfe der Lagrange-Multiplikator-Methode in die strukturmechanischen Gleichungen eingebaut und somit exakt erfüllt. Das eingeführte Feld der Lagrange-Multiplikatoren entspricht der physikalischen Kontaktspannung zwischen den Körpern. Neben dem Verschiebungsfeld ist das Lagrange-Multiplikator-Feld ein zusätzliches Feld von Unbekannten. Im Zuge der Diskretisierung werden das Verschiebungsfeld und das Lagrange-Multiplikator-Feld mit linearen Ansätzen approximiert. Für letztgenanntes Feld werden duale Formfunktionen verwendet. Diese ermöglichen es, die zusätzlichen Freiheitsgrade der Lagrange-Multiplikatoren ohne hohen numerischen Aufwand aus dem globalen Gleichungssystem zu eliminieren. Hierdurch steigert sich bei sogenannten dualen Mortar-Methoden die Effizienz gegenüber der Standard-Mortar-Methode, bei der das Lagrange-Multiplikator-Feld und das Verschiebungsfeld mit denselben Formfunktionen approximiert werden. Jedoch wird infolge der dualen Formfunktionen die Approximationskraft der Lagrange-Multiplikatoren gemindert.

Mortar-Methoden sind numerisch anspruchsvoll, da Integrale im Kontaktgebiet berechnet werden müssen. Die Mortar-Diskretisierung führt auf zwei integrale Ausdrücke, die

üblicherweise Mortar-Integrale genannt werden. Zusammen mit dem Integral zur Berechnung des gewichteten Abstands werden diese Integrale als Kontaktintegrale bezeichnet. Die Berechnung der Kontaktintegrale ist aus zwei Gründen kompliziert. Erstens muss über den Kontaktrand integriert werden, der im diskretisierten Fall nicht zwangsläufig für beide Kontaktkörper identisch ist. Zweitens ist der Integrand das Produkt zweier Formfunktionen, die auf unterschiedlichen Kontakträndern definiert sind. Da diese Formfunktionen in der betrachteten Formulierung zwischen den Elementen maximal C^0 -kontinuierlich sind, ist der Integrand nur stückweise glatt. Um den Fehler der Integration gering zu halten, muss stückweise über Untergebiete mit glattem Integranden integriert werden. Diese Untergebiete werden Segmente genannt und sind bei dreidimensionalen Problemen ebene, polygonale Flächen. Die numerische Integration wird gewöhnlich über dreieckige Integrationszellen ausgeführt, die sich aus einer Unterteilung der polygonalen Segmente ergeben. Die Triangulierung des Segments erfolgt dabei entweder über den Schwerpunkt des Segments oder mit einer Delaunay-Triangulierung. Letztere führt zu einer geringeren Anzahl an dreieckigen Integrationszellen. Die hohe Anzahl an Integrationspunkten und die damit verbundenen Rechenoperationen haben zur Folge, dass diese Integrationsmethode numerisch aufwendig ist.

Ein Schwerpunkt dieser Arbeit ist es, die beschriebene segmentbasierte Integration zu modifizieren, um die Effizienz des Algorithmus zu steigern. Hierfür werden unterschiedliche Methoden zur Integration über die polygonalen Segmente untersucht und beurteilt. Neben der Betrachtung von Quadraturformeln für polygonale Flächen liegt das Hauptaugenmerk auf der Untersuchung von Integrationsmethoden, bei denen die Segmente in viereckige Integrationszellen unterteilt werden.

Die Genauigkeit und die Effizienz der vorgeschlagenen Methoden werden untersucht. Keine numerische Integration ist in der Lage die Kontaktintegrale exakt zu berechnen, wenn deren Integranden gebrochenrationale Funktionen sind. Dies ist im Allgemeinen der Fall und gilt immer, wenn die Elementflächen der Kontaktränder verzerrt sind. Um die Genauigkeit der entwickelten Integrationsmethoden zu bewerten, wird zunächst anhand gezielter numerischer Experimente der Fehler in den Werten der Mortar-Integrale bestimmt. Zunächst werden die Integrale für zwei Elemente fiktiver Kontaktränder berechnet. Dabei wird die Verzerrung der Elemente variiert, um eine Korrelation zwischen der Größe des Fehlers und der Verzerrung zu ermitteln. Anschließend werden mit den Integrationsmethoden weitere numerische Experimente durchgeführt: Anhand von quasistatischen Kontaktproblemen mit großen Deformationen und unter Berücksichtigung von Reibungseffekten werden die Integrationsmethoden hinsichtlich ihrer Genauigkeit sowie ihres numerischen Aufwands verglichen.

Aus den Untersuchungen ergibt sich, dass die Integration über viereckige Integrationszellen unter Verwendung von Gauß-Quadraturformeln eine sinnvolle Alternative zu den konventionellen Integrationsmethoden darstellt. Im Vergleich zu den Triangulierungsmethoden hat die entwickelte Integrationsmethode eine geringere Anzahl an Integrationspunkten, sodass sich der numerische Aufwand reduziert. Zudem können dieselben Sonderfälle exakt berechnet werden. Die Fehler für allgemeine Kontaktprobleme sind

nur unwesentlich größer, solange die Elementflächen der Kontaktränder moderat verzerrt sind.

Die alternative Integration kann sowohl für die duale Mortar-Methode als auch für die Standard-Mortar-Methode angewendet werden. Der zweite Schwerpunkt dieser Arbeit ist die Beschreibung einer Modifikation der Kontaktspannungen und gilt ausschließlich für duale Mortar-Formulierungen. Bei Verwendung der Lagrange-Multiplikator-Methode zum Einbringen der Kontaktbedingungen entsprechen die Lagrange-Multiplikatoren den Kontaktspannungen. Folglich hat das Kontaktspannungsfeld ohne Modifikation dieselbe Kontinuität wie das Lagrange-Multiplikator-Feld. Werden in der Diskretisierung lineare duale Lagrange-Multiplikator-Ansätze gewählt, sind die genannten Felder zwischen den Elementen nur C^{-1} -kontinuierlich. Aufgrund dieser Diskontinuität widersprechen die Kontaktspannungen der dualen Mortar-Methode den physikalisch zu erwartenden Kontaktspannungen. Zur Darstellung der Kontaktspannungen dualer Mortar-Formulierungen wird daher meist eine stückweise lineare, bzw. für dreidimensionale Probleme bilineare, Interpolation der diskreten Knotenspannungswerte durchgeführt. Infolge dieser Interpolation ergeben sich kontinuierliche Kontaktspannungen.

Im Vergleich zwischen der diskontinuierlichen Kontaktspannung und der interpolierten Kontaktspannung kann durch die (bi-)lineare Interpolation der Fehler in den Kontaktspannungen reduziert werden. Allerdings ist der Fehler in den interpolierten Kontaktspannungen der dualen Mortar-Methode größer als der Fehler in den Kontaktspannungen der Standard-Mortar-Methode. In dieser Arbeit wird zur Verbesserung der Kontaktspannungen dualer Mortar-Formulierungen eine Modifikation der Kontaktspannungsrückrechnung aus den dualen Lagrange-Multiplikatoren vorgeschlagen. Bei der beschriebenen Rückrechnung wird dem diskontinuierlichen Verlauf der dualen Lagrange-Multiplikatoren Rechnung getragen. Mithilfe einer L^2 -Projektion wird der diskontinuierliche Verlauf in einen stückweise (bi-)linearen Verlauf überführt.

Für eine Reihe numerischer Experimente werden die Kontaktspannungen, die aus der L^2 -Projektion resultieren, mit den anderen betrachteten Kontaktspannungen verglichen. Hierfür wird für bi- und unilaterale Kontaktprobleme der Fehler in den Kontaktspannungen in einer gewichteten L^2 -Norm bestimmt. Durch die Betrachtung unterschiedlicher Netzfeinheiten kann für jedes Problem die Konvergenz der Fehler untersucht werden. Im Vergleich zu der (bi-)linearen Interpolation ändert sich durch die L^2 -Projektion die Konvergenzrate der Fehler nicht. Allerdings ist für fast alle betrachteten Probleme der absolute Wert der Fehler geringer. Mit der präsentierten L^2 -Projektion liegen die Fehler in den Kontaktspannungen im Vergleich zwischen der dualen Mortar-Methode und der Standard-Mortar-Methode meist auf praktisch gleichem Niveau.

Abstract

This work deals with computer simulations for contact problems of deformable solid bodies. Contact is present in many fields of engineering and needs to be considered in corresponding computer simulations in order to represent the proper system behaviour. A demonstrative application for computer simulations of this kind are crash test simulations. Such elaborate problems cannot be solved analytically, which is why the problems are often solved approximately. For this, mostly, the finite element method is used as a discretisation method. Herein, contact is predominantly discretised using so-called node-to-segment formulations. Contact discretisations, which are based on mortar methods, are a research field with increasing activity. Implementations of the mortar method can already be found in commercial finite element software and are used more and more for computer simulations of contact problems. The popularity of mortar methods is based on their mathematical optimality and their numerical robustness. One disadvantage of the mortar method is its high numerical effort compared to other discretisation methods for contact. The aim of the current work is to increase the efficiency of the mortar method for three-dimensional problems by modifying the numerical integration. Furthermore, an improvement of the contact stresses for dual mortar methods is proposed.

At first, the underlying contact formulation is depicted to describe the presented modifications. The continuum mechanical formulation is subjected to contact constraints in order to include the physical laws of contact, e.g. non-penetration condition or friction laws in case of rough surfaces. From a mathematical point of view the contact constraints are enforced by the Lagrange multiplier method. Thus, they are represented exactly. The introduced Lagrange multiplier field can be identified as the contact stress between the contacting bodies. Besides the displacement field the Lagrange multiplier field is an additional field of unknowns. As part of the discretisation the displacement field as well as the Lagrange multiplier field are approximated by a linear ansatz. For the Lagrange multiplier field dual shape functions are used, allowing to easily eliminate the additional degrees of freedom of the Lagrange multipliers from the global system of equations. This aspect improves the efficiency of so-called dual mortar methods compared to standard mortar methods, whereby the Lagrange multiplier field as well as the displacement field are approximated by the same shape functions. However, the use of dual shape functions reduces the approximation accuracy of the Lagrange multipliers.

Mortar methods are numerically demanding because integrals in the contact domain need to be computed. Mortar discretisation yields two integrals, which are usually called mortar integrals. Together with the integral, which shows up in the computation of the weighted gap, these integrals are termed contact integrals. The computation of these integrals is complex due to two reasons. Firstly, the integration is performed over the contact boundary, which is, in general, not identical on both bodies in contact. Secondly, the integrand is the product of two shape functions, which are defined on different contact boundaries. Since these shape functions are at most C^0 -continuous in the present formulation, the integrand is only smooth over certain subdomains. In

order to integrate accurately, the integration has to be performed piecewise within the subdomains of smooth integrands. These subdomains are termed segments and are flat polygonal areas for three-dimensional problems. The numerical integration is usually performed over triangular integration cells, which are found by subdividing the polygonal segments. The triangulation is either done by using the centre of gravity of the segments or by applying a Delaunay triangulation. The latter yields a smaller number of triangular integration cells. The large number of integration points and the involved computations result in an integration method, which is numerically expensive.

One key aspect of this work is to modify the described segment-based integration in order to improve the efficiency of the algorithm. For this purpose, different integration methods over the polygonal segments are examined and evaluated. Beside the investigation of numerical quadratures for polygonal segments the main focus is on the investigation of integration methods, where the segments are subdivided into quadrilateral integration cells.

The accuracy and efficiency of the proposed methods are investigated. No numerical quadrature is able to integrate the contact integrals exactly, if the integrands are rational polynomial functions. This is in general the case and applies if the elements of the contact boundaries are distorted. To evaluate the accuracy of the developed integration methods for these cases, the error of the mortar integrals is computed for numerical experiments. Initially, the integrals are computed for a pair of two elements from two fictitious contact boundaries. Differently distorted elements are investigated in order to get a correlation between the magnitude of the error and the distortion. Subsequently, further numerical experiments are performed: For quasi-static frictional contact problems with large deformations the integration methods are compared with respect to their numerical effort and accuracy.

As a result, the proposed integration method with quadrilateral integration cells using Gaussian quadrature rules seems to be a reasonable alternative compared to conventional integration methods. In contrast to the methods using triangular integration cells less integration points are needed and thus the numerical effort is reduced. At the same time the same special contact cases can be computed exactly. The difference in the accuracy is marginal if the elements of the contact boundaries are distorted moderately.

The proposed alternative integration method can be used for dual mortar methods as well as standard mortar methods. The second key aspect of the present work is the modification of the contact stresses, which is only applicable for dual mortar methods. By using the Lagrange multiplier method to enforce the contact constraints the Lagrange multipliers correspond to the contact stress. Consequently, without modifications the contact stress field has the same continuity as the Lagrange multiplier field. If, during the discretisation, a linear ansatz for the dual Lagrange multiplier field is used, the named fields are only C^{-1} -continuous between interconnected elements. Due to this discontinuity the contact stresses do not correspond to the physically expected contact stresses. Hence, in order to visualise the contact stress of dual mortar formulations usually piecewise linear or bilinear interpolations of the nodal values are used for two-

or three-dimensional problems, respectively. This interpolation yields continuous contact stresses.

In comparison to the discontinuous contact stresses the error of the contact stresses can be reduced if the interpolated stresses are used. However, compared to the error of standard mortar methods the error of the interpolated stress from the dual mortar method is larger. With the purpose of improving the contact stresses of dual mortar methods a modification of the postprocessing of the contact stresses from the dual Lagrange multipliers is proposed in the present work. The described postprocessing method accounts for the discontinuity of the dual Lagrange multipliers. The discontinuous stress distribution is converted into a piecewise (bi-)linear distribution by a L^2 -projection.

A set of numerical experiments is used to compare the contact stresses yielding from the L^2 -projection with other contact stresses. For this purpose the error in the contact stresses is computed in a weighted L^2 -norm for bilateral and unilateral contact problems. By considering different mesh sizes the convergence of the error is also investigated. In comparison to the (bi-)linear interpolation no differences are present in the convergence rates. However, for almost all problems the absolute error is smaller when the L^2 -projection is used. Furthermore, with the presented L^2 -projection the errors of the contact stresses for the dual mortar method and the standard mortar method are practically the same.

Danksagung

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Zeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Baustatik und Baudynamik der Universität Stuttgart. Ich danke meinem Doktorvater Prof. Dr.-Ing. habil. Manfred Bischoff für das Ermöglichen und Betreuen meiner Doktorarbeit. Er setzt sich weit über das normale Maß hinaus dafür ein, dass am Institut ein optimales und angenehmes Arbeitsklima herrscht. Seine überaus kompetente und zuverlässige Art ist beispielhaft und hat mich jederzeit motiviert sowie inspiriert. Zusätzlich ist er mit seiner umgänglichen und humorvollen Art auch neben dem Fachlichen stets ein Vorbild.

Des Weiteren bedanke ich mich bei Herrn Prof. Dr.-Ing. Wolfgang A. Wall für das Interesse an meiner Arbeit, für die Übernahme des Mitberichtes sowie das schnelle Anfertigen des Gutachtens.

Herrn Prof. Dr.-Ing. Dr.-Ing. E.h. Dr. h.c. Ekkehard Ramm danke ich vielmals für das kontinuierliche Auseinandersetzen mit meinem Forschungsthema. Durch die entstandenen fachlichen Diskussionen sind immer wieder neue Ideen aufgekommen, die zum Gelingen meiner Arbeit beigetragen haben.

Bester Dank geht ebenfalls an Dr.-Ing. Anton Tkachuk, der sich immer wieder über meine Forschung informiert hat und mit seinem Wissen jederzeit Verständnisprobleme meinerseits lösen konnte.

Für die sehr sorgfältige Entwicklung und Pflege unseres Forschungscode NumPro sowie das bereitwillige Teilen seiner Programmierkenntnisse danke ich Dr.-Ing. Malte von Scheven.

Allen aktuellen und ehemaligen Kolleginnen und Kollegen sei großer Dank für die übertragende Atmosphäre am Institut ausgesprochen. Danke für alle Gespräche, Ausflüge, Diskussionen, Hilfestellungen und netten Abende.

Sehr dankbar bin ich auch den zahlreichen lieben Freundinnen und Freunden, die meine Arbeit sehr gewissenhaft Korrektur gelesen, mich konstruktiv kritisiert und mich während des Zusammenschreibens bestätigt haben.

Zu guter Letzt danke ich meiner Familie und meiner Freundin von ganzem Herzen, da sie mich auch in weniger guten Phasen immer wieder unterstützt und aufgebaut haben.

Stuttgart, im August 2017

Christoph Wilking

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis	xiii
Tabellenverzeichnis	xvii
Abkürzungen und Bezeichnungen	xix
1 Einleitung	1
1.1 Motivation	1
1.2 Stand der Technik	2
1.3 Zielsetzung	6
1.4 Gliederung der Arbeit	7
2 Grundlagen der Kontinuums- und Kontaktmechanik	9
2.1 Nichtlineare Kontinuumsmechanik	10
2.1.1 Kinematik und Verzerrungsmaß	10
2.1.2 Spannungsmaße und Konstitutivgleichungen	12
2.1.3 Bilanzgleichungen	15
2.1.4 Randbedingungen des elastostatischen Randwertproblems	18
2.2 Nichtlineare Kontaktmechanik	19
2.2.1 Kontaktkinematik	20
2.2.2 Zerlegung der Kontaktspannung	22
2.2.3 Kontaktbedingungen des unilateralen Kontakts	23
2.2.4 Kontaktbedingungen des bilateralen Kontakts	26
2.3 Strategie zum Einbringen der Kontaktbedingungen	27
2.4 Schwache Form	28
2.4.1 Beitrag der Kontinuumsmechanik	29
2.4.2 Beitrag der Kontaktmechanik	31
2.4.3 Kontaktbedingungen	33
2.4.4 Schwache Form des gesamten Kontaktproblems	33

3	Finite-Elemente-Formulierung	35
3.1	Verschiebungsbasierte finite Elemente	36
3.1.1	Das isoparametrische Konzept	36
3.1.2	Konvergenzanforderungen	38
3.2	Diskretisierung der schwachen Form der Kontinuumsmechanik	39
3.3	Methoden zur Diskretisierung des Kontakts	40
3.3.1	Node-to-Node-Diskretisierung	41
3.3.2	Node-to-Segment-Diskretisierung	42
3.3.3	Segment-to-Segment-Diskretisierung	43
3.3.4	Die Mortar-Methode	44
3.4	Diskretisierung des Kontakts mit der Mortar-Methode	47
3.4.1	Diskretisierung des Normalenfeldes und der Tangenten	47
3.4.2	Diskretisierung des Lagrange-Multiplikator-Feldes	50
3.4.3	Diskretisierung der virtuellen Kontaktarbeit	56
3.4.4	Diskretisierung der Kontaktbedingungen	58
3.5	Gesamtformulierung des Kontaktproblems	61
4	Lösungsstrategie	63
4.1	Kontaktsuche	64
4.2	Primal-duale Aktive-Mengen-Strategie	67
4.3	Linearisierung des Gleichungssystems	69
4.4	Identifikation eines Vorteils der dualen Mortar-Methode	71
5	Effiziente numerische Berechnung der Kontaktintegrale	75
5.1	Strategien zur Berechnung der Kontaktintegrale	77
5.2	Konventionelle segmentbasierte Integrationsmethoden	79
5.2.1	Zweidimensionale Kontaktprobleme	79
5.2.2	Dreidimensionale Kontaktprobleme – Triangulierung	80
5.3	Alternative segmentbasierte Integrationsmethoden für dreidimensionale Kontaktprobleme	87
5.3.1	Polygonale Integrationszellen	88
5.3.2	Viereckige Integrationszellen – Quadrangulierung	91
5.4	Gezielte Untersuchung der Integrationsgenauigkeit für unterschiedliche Fehlerquellen	96
5.4.1	Einfluss verzerrter viereckiger Segmente	98
5.4.2	Einfluss gebrochenrationaler Integranden	99
5.4.3	Kombinierter Einfluss beider Faktoren	100
5.4.4	Vorläufige Beurteilung der Integrationsmethoden	101
5.5	Numerische Experimente	103
5.5.1	Patch-Test	103

5.5.2	Ironing-Problem	106
5.5.3	Ironing-Problem mit rotierendem Körper	109
5.5.4	Konvergenzuntersuchung	111
5.6	Zusammenfassende Beurteilung der Integrationsmethoden	113
6	L²-Projektion zur Verbesserung der Kontaktspannungen dualer Mortar-Formulierungen	117
6.1	Rückrechnung der Kontaktspannungen aus den Lagrange-Multiplikatoren	118
6.1.1	Standard-Mortar-Methode	118
6.1.2	Duale Mortar-Methode	119
6.2	Einführungsbeispiel	120
6.3	Methode zur Verbesserung der Kontaktspannungen dualer Mortar-Formulierungen	125
6.3.1	Idee der Methode	126
6.3.2	Mathematische Interpretation der Methode	127
6.3.3	Anwendung auf das Einführungsbeispiel	128
6.4	Numerische Experimente	128
6.4.1	Dreidimensionales Netzkopplungsproblem	129
6.4.2	Unilaterales Kontaktproblem	131
6.4.3	Hertz'sches Kontaktproblem	132
6.4.4	Kontaktproblem mit Spannungssingularität	135
6.5	Zusammenfassende Beurteilung der Kontaktspannungsqualität	137
7	Zusammenfassung und Ausblick	139
7.1	Zusammenfassung	139
7.2	Ausblick	141
	Literaturverzeichnis	143

Abbildungsverzeichnis

1.1	Schritte einer Computersimulation von Kontaktproblemen deformierbarer Festkörper sowie beschränkte Auswahl unterschiedlicher Aspekte und Methoden der einzelnen Schritte.	3
2.1	Veranschaulichung großer Deformationen anhand eines materiellen Kontinuums.	10
2.2	Veranschaulichung großer Deformationen bei Kontaktproblemen anhand zweier materieller Körper.	20
2.3	Kontaktbedingungen für unilaterale Kontaktprobleme.	24
3.1	Diskretisierter Kontaktrand eines zweidimensionalen Kontaktproblems.	40
3.2	Bestimmung eines kontinuierlichen Normalenfeldes \mathbf{n}_c	48
3.3	Kontaktrand eines dreidimensionalen Problems.	49
3.4	Standard-Lagrange-Formfunktion des Lagrange-Multiplikator-Feldes.	52
3.5	Duale Formfunktion des Lagrange-Multiplikator-Feldes.	54
4.1	Kontaktrandkonfiguration, die ohne Kontaktsuche zur Fehlinterpretation der Aktivität führt.	64
4.2	Fiktive Kontaktränder mit Visualisierung der Hüllkörper und der zugehörigen Binärbäume für die Kontaktsuche.	66
4.3	Ablauf der Newton-Raphson-Iterationsschleife der primal-dualen Aktive-Mengen-Strategie.	72
5.1	Ausschnitt eines diskretisierten Kontaktproblems mit Visualisierung der Formfunktionen der Knoten I und L	76
5.2	Veranschaulichung der elementbasierten numerischen Integration.	77
5.3	Veranschaulichung der Segmentierung und der segmentbasierten numerischen Integration für zweidimensionale Probleme.	79
5.4	Veranschaulichung der Segmentierung und der segmentbasierten numerischen Integration für dreidimensionale Probleme.	82

5.5	Projektion von Punkten der Integrationszelle auf das Slave-Element. . . .	85
5.6	Delaunay-Triangulierung für das Segment aus Abbildung 5.4.	87
5.7	Darstellung der Integrationspunkte eines heptagonalen Segments.	88
5.8	Quadrangulierung für unterschiedliche n -Ecke.	91
5.9	Anzahl der benötigten Integrationspunkte für unterschiedliche n -eckige Segmente und unterschiedliche Integrationsmethoden fünfter Ordnung. . .	96
5.10	Paar eines Slave- und eines Master-Elements.	97
5.11	Relativer Fehler von Mortar-Integral M_{26}	98
5.12	Relativer Fehler von Mortar-Integral D_{11} und M_{26}	99
5.13	Relativer Fehler von Mortar-Integral D_{11} und M_{26}	101
5.14	Patch-Test: Geometrie, Materialdaten und Diskretisierung.	104
5.15	Ironing-Problem: Geometrie, Materialdaten und Diskretisierung.	106
5.16	Ironing-Problem: Summe der Auflagerkräfte des halben Hohlzylinders dargestellt über die Lastschritte.	107
5.17	Ironing-Problem mit rotierendem Körper: Geometrie, Materialdaten und Diskretisierung.	109
5.18	Ironing-Problem mit rotierendem Körper: Drei- und viereckige Integrati- onszellen, die sich infolge der Quadrangulierung ergeben.	110
5.19	Ironing-Problem mit rotierendem Körper: Summe der Auflagerkräfte des halben Hohlzylinders dargestellt über die Lastschritte.	111
5.20	Konvergenzuntersuchung: Geometrie, Materialdaten und Diskretisierung.	113
5.21	Konvergenzuntersuchung: Konvergenz der inneren Energie bei Netzver- feinerung.	114
6.1	Einführungsbeispiel: Geometrie, Materialdaten, Diskretisierung und ana- lytische Lösung.	121
6.2	Einführungsbeispiel: Absoluter Fehler von u_y (links) und σ_y (rechts) in der L^2 -Norm in Abhängigkeit der Netzfeinheit.	123
6.3	Einführungsbeispiel: Kontaktspannung $t_{c,y}$ unterschiedlicher Methoden zur Kontaktspannungsberechnung für Netzlevel 1.	124
6.4	Einführungsbeispiel: Absoluter Fehler in $t_{c,y}$, angegeben in der gewichte- ten L^2 -Norm in Abhängigkeit der Netzfeinheit.	125
6.5	Schritte zur Berechnung kontinuierlicher Kontaktspannungen über kon- sistente Knotenkräfte.	126
6.6	Einführungsbeispiel: Absoluter Fehler in $t_{c,y}$, angegeben in der gewichte- ten L^2 -Norm in Abhängigkeit der Netzfeinheit, inklusive dMM- L^2 -Proj. .	128
6.7	Dreidimensionales Netzkopplungsproblem: Geometrie, Materialdaten und Diskretisierung.	129
6.8	Dreidimensionales Netzkopplungsproblem: Absoluter Fehler in $t_{c,x}$, ange- geben in der gewichteten L^2 -Norm in Abhängigkeit der Netzfeinheit. . . .	130

6.9	Unilaterales Kontaktproblem: Geometrie, Materialdaten und Diskretisierung.	131
6.10	Unilaterales Kontaktproblem: Absoluter Fehler in $t_{c,x}$, angegeben in der gewichteten L^2 -Norm in Abhängigkeit der Netzfeinheit für $s : m = 2 : 3$ (links) sowie $s : m = 3 : 2$ (rechts).	132
6.11	Hertz'sches Kontaktproblem: Geometrie, Materialdaten und Diskretisierung.	133
6.12	Hertz'sches Kontaktproblem: Verlauf der Kontaktspannung $t_{c,n}$ für Netzlevel 3 (links) und maximaler Kontaktdruck in Abhängigkeit der Netzfeinheit (rechts).	134
6.13	Hertz'sches Kontaktproblem: Absoluter Fehler in $t_{c,n}$, angegeben in der gewichteten L^2 -Norm in Abhängigkeit der Netzfeinheit.	135
6.14	Kontaktproblem mit Spannungssingularität: Geometrie, Materialdaten, Visualisierung der Kontaktspannung $t_{c,n}$ und der Verformung.	136
6.15	Kontaktproblem mit Spannungssingularität: Absoluter Fehler in $t_{c,n}$, angegeben in der gewichteten L^2 -Norm in Abhängigkeit der Netzfeinheit . .	137

Tabellenverzeichnis

5.1	Art des Integranden in Abhängigkeit der Form des Slave- und Master-Elements sowie der Form der Integrationszelle.	93
5.2	Quadraturformel nach XIAO UND GIMBUTAS (2010).	94
5.3	Patch-Test: Koordinaten der Finite-Elemente-Knoten.	105
5.4	Patch-Test: Fehler in σ_{zz}	105
5.5	Ironing-Problem: Vergleich des numerischen Aufwands für unterschiedliche Integrationsmethoden.	108
5.6	Ironing-Problem mit rotierendem Körper: Vergleich des numerischen Aufwands für unterschiedliche Integrationsmethoden.	112

Abkürzungen und Bezeichnungen

Abkürzungen

FEM	Finite-Elemente-Methode
GPTS	Gauß-Point-to-Segment
IGA	isogeometrische Analyse
k -DOP	k -Discrete-Oriented-Polytope
LBB	Ladyschenskaja-Babuška-Brezzi
NTN	Node-to-Node
NTS	Node-to-Segment
NURBS	nicht-uniforme rationale B-Splines
PTS	Point-to-Segment
PvV	Prinzip der virtuellen Verschiebungen
Ref	Referenzlösung
STS	Segment-to-Segment
uFE	verschiebungsbasierte Finite-Elemente-Berechnung
VEM	Virtuelle-Elemente-Methode

Mathematische Notationen

$(\bullet)^{-1}$	Inverse von (\bullet)
$(\bullet)^+$	Pseudoinverse von (\bullet)
$\dot{(\bullet)}$	materielle Zeitableitung von (\bullet)
$\ddot{(\bullet)}$	zweifache materielle Zeitableitung von (\bullet)
$\overset{4}{(\bullet)}$	vierstufiger Tensor
$(\bullet)^T$	Transponierte von (\bullet)
$(\bullet)^{-T}$	Transponierte der Inversen von (\bullet)

$ (\bullet) $	Betrag einer skalaren Größe (\bullet)
$\ (\bullet)\ $	Euklid'sche Norm eines Vektors (\bullet)
$\ (\bullet)\ _{L^2}$	L^2 -Norm von (\bullet)
$\ (\bullet)\ _{L^2}^h$	gewichtete L^2 -Norm von (\bullet)
$(\bullet \cdot \bullet)$	Skalarprodukt zwischen Vektoren bzw. zwischen Tensoren (inneres Produkt)
$(\bullet \times \bullet)$	Kreuzprodukt
$\langle \bullet, \bullet \rangle$	duale Paarung
$\text{lin}(\bullet)$	Linearisierung von (\bullet)
$\text{DIV}(\bullet)$	Divergenz von (\bullet) bezogen auf die Referenzkonfiguration
$\Delta(\bullet)$	Richtungsableitung von (\bullet) nach den Verschiebungen \mathbf{d} und den Lagrange-Multiplikatoren \mathbf{z}
$\frac{d(\bullet)}{d(\bullet)}$	totale Ableitung
$\frac{\partial(\bullet)}{\partial(\bullet)}$	partielle Ableitung
$\text{Grad}(\bullet)$	Gradient von (\bullet) bezogen auf die Referenzkonfiguration
$\max(\bullet, \bullet)$	Funktion gibt den größeren Wert der beiden Skalare (\bullet, \bullet) zurück
$\text{sym}(\bullet)$	Funktion gibt den symmetrische Anteil von (\bullet) zurück
$\text{tr}(\bullet)$	Spur von (\bullet)
P	Operator zur Projektion von Größen des Master-Randes auf den Slave-Rand
$(\bullet) \circ P$	Projektion von (\bullet) mit dem Operator P
\cup	Assemblierungsoperator
\emptyset	Nullmenge
\cap	Schnittmenge
\cup	Vereinigung

Lateinische Buchstaben

\mathcal{A}	Menge der aktiven Slave-Knoten
\mathbf{A}_e	Matrix zur Bestimmung der dualen Formfunktionen von Slave-Element e
a_{IK}	Einträge der Matrix \mathbf{A}_e , für $e \in \mathbb{N}^+$
\mathbf{b}	rechte Seite der stückweisen linearen L^2 -Projektion
\mathcal{B}	Materieller Körper
c_n, c_t	Parameter der Komplementaritätsfunktionen C_n und C_t

\mathbf{C}	rechter Cauchy-Green-Deformationstensor
$\overset{4}{\mathbf{C}}$	vierstufiger Materialtensor
C_n	Komplementaritätsfunktion der Kontaktbedingungen in Normalenrichtung
\mathbf{C}_τ	Komplementaritätsfunktionen der Kontaktbedingungen in Tangentialrichtung
\mathbf{d}	globaler Vektor der diskreten Knotenverschiebungen
d_{IK}	Einträge der Matrix \mathbf{D}_e
D	Mortar-Integral
\mathbf{D}	Mortar-Matrix
\mathbf{D}_e	Matrix zur Bestimmung der dualen Formfunktionen von Slave-Element e , für $e \in \mathbb{N}^+$
dA, da	infinitesimales Flächenelement in der Referenz- bzw. Momentankonfiguration
dV, dv	infinitesimales Volumenelement in der Referenz- bzw. Momentankonfiguration
$d\mathbf{X}, dx$	infinitesimales Linienelement in der Referenz- bzw. Momentankonfiguration
e	Element (auch Oberflächenelement) der Finite-Elemente-Diskretisierung
\mathbf{e}_{1-3}	Normierte Basisvektoren des kartesischen Koordinatensystems
E	Elastizitätsmodul
\mathbf{E}	Green-Lagrange'scher Verzerrungstensor
\mathbf{f}_c	globaler Vektor der Kontaktkräfte
$\mathbf{f}_{\text{int}}, \mathbf{f}_{\text{ext}}$	globale Vektoren der inneren und äußeren Kräfte
\mathbf{F}	Deformationsgradient
\tilde{g}_I	gewichteter Abstand von Knoten I
g_n	Abstand in Normalenrichtung
\mathcal{G}	Menge der gleitenden Slave-Knoten
\mathbf{h}	Körperdrehimpuls
\mathcal{H}	Menge der haftenden Slave-Knoten
\mathbf{I}	Identitätstensor bzw.-matrix
$\overset{4}{\mathbf{I}}_{\text{sym}}$	symmetrischer, vierstufiger Identitätstensor
J	Jacobi-Determinante
\mathbf{J}	Jacobi-Matrix

k	Geometrieparameter
\mathbf{K}	tangentiale Systemsteifigkeitsmatrix des Kontaktproblems
\mathbf{K}_T	tangentiale Systemsteifigkeitsmatrix (ohne Beachtung des Kontakts)
$\tilde{\mathbf{K}}$	Anteile der tangentialen Systemsteifigkeitsmatrix des Kontaktproblems, die sich von \mathbf{K}_T unterscheiden
\mathbf{l}	Körperimpuls
\mathcal{L}^p	Lebesgue-Raum
m	Masse
m_{IK}	Einträge der Matrix \mathbf{M}_e
M	Mortar-Integral
\mathbf{M}	Mortar-Matrix
\mathcal{M}	zulässiger Raum des (virtuellen) Lagrange-Multiplikators
\mathbf{M}_e	Matrix zur Bestimmung der dualen Formfunktionen von Slave-Element e , für $e \in \mathbb{N}^+$
\mathbf{M}^{L^2}	„Massenmatrix“ der stückweisen linearen L^2 -Projektion
n	Anzahl der Eckpunkte je Segment
\mathbf{n}_0	Normale in der Mitte eines Slave-Elements
\mathbf{n}_c	nach außen gerichtete Normale des Slave-Randes
n_d	Anzahl der betrachteten Dimensionen
\mathbf{n}_e	Normale von Slave-Element e , für $e \in \mathbb{N}^+$
n_{ele}	Anzahl der finiten Elemente
n_{ic}	Anzahl der Integrationszellen je Segment
n_{ip}	Anzahl der Integrationspunkte je Integrationszelle
n_m	Anzahl der Master-Knoten
n_{nc}	Anzahl der Knoten, die nicht zu einem Kontaktrand gehören
n_{nd}	Anzahl der Knoten
$n_{\text{nd,ele}}$	Anzahl der Knoten eines finiten Elements
$n_{\text{nd}}^{\text{cell}}$	Anzahl der Eckpunkte einer Integrationszelle
n_{nde}	Anzahl der Knoten eines Slave- bzw. Master-Elements
n_s	Anzahl der Slave-Knoten
n_{se}	Anzahl der Slave-Elemente
$n_{s\lambda}$	Anzahl der Slave-Knoten, an denen Lagrange-Multiplikatoren definiert sind
N	Standard-Lagrange-Formfunktion
\mathbf{N}, \mathbf{n}	Normale in der Referenz- bzw. Momentankonfiguration

\mathbb{N}^+	Menge der positiven natürlichen Zahlen
\mathbf{P}	erster Piola-Kirchhoff-Spannungstensor
\mathcal{Q}	Spurraum von $\mathcal{W}^{1/2,6/5}$
\mathcal{Q}'	dualer Raum von \mathcal{Q}
\mathbf{r}	Residuum, Vektor der Ungleichgewichtskräfte
$\tilde{\mathbf{r}}$	modifiziertes Residuum (Anteile der Kontaktkräfte fehlen)
\mathbb{R}	Menge der reellen Zahlen
\mathbf{S}	zweiter Piola-Kirchhoff-Spannungstensor
\mathcal{S}	Menge der Slave-Knoten
t	Zeit bzw. Pseudozeit (quasistatische Probleme)
\mathbf{t}	Cauchy-Spannungsvektor
t_0	Anfangszeitpunkt des betrachteten Zeitintervalls
\mathbf{t}_c	Kontaktspannung
$\bar{\mathbf{t}}_c$	Kontaktspannung nach HÜEBER U. A. (2005)
$\tilde{\mathbf{t}}_c$	Kontaktspannung aus L^2 -Projektion
$t_{c,n}$	Kontaktspannung in Normalenrichtung
$t_{c,\tau}$	Kontaktspannung in Tangentialrichtung im zweidimensionalen Fall
$\mathbf{t}_{c,\tau}$	Kontaktspannung in Tangentialrichtung
$t_{c,\tau}^\xi$	Kontaktspannung in Tangentialrichtung (in ξ -Richtung)
$t_{c,\tau}^\eta$	Kontaktspannung in Tangentialrichtung (in η -Richtung)
t_E	Endzeitpunkt des betrachteten Zeitintervalls
\mathbf{T}	erster Piola-Kirchhoff-Spannungsvektor
$\hat{\mathbf{T}}, \hat{\mathbf{t}}$	vorgeschriebene Spannung in der Referenz- bzw. Momentankonfiguration
\mathbf{u}	Verschiebungsvektor eines materiellen Punktes
$\dot{\mathbf{u}}$	Geschwindigkeit eines materiellen Punktes
$\ddot{\mathbf{u}}$	Beschleunigung eines materiellen Punktes
$\hat{\mathbf{u}}$	vorgeschriebene Verschiebung
$\tilde{\mathbf{u}}_\tau$	Gleitinkrement
\mathcal{U}	Raum der zulässigen Verschiebungen
v	variationeller Index
$v_{\tau,\text{rel}}$	auf die Tangentiallinie projizierte Relativgeschwindigkeit im zweidimensionalen Fall
$\mathbf{v}_{\tau,\text{rel}}$	auf die Tangentialebene projizierte Relativgeschwindigkeit
\mathcal{V}	Raum der zulässigen virtuellen Verschiebungen

w_j	Gewicht der numerischen Integration von Integrationspunkt j
$w(\mathbf{E})$	Verzerrungsenergiefunktion
$\mathcal{W}^{k,p}$	Sobolev-Raum
\mathbf{x}	Ortsvektor eines materiellen Punktes in der Momentankonfiguration
$\bar{\mathbf{x}}^{(2)}$	Projektionspunkt von $\mathbf{x}^{(1)}$ auf den Master-Rand
\mathbf{X}	Ortsvektor eines materiellen Punktes in der Referenzkonfiguration
\mathbf{z}	globaler Vektor der diskreten Lagrange-Multiplikatoren
z_n	Komponente des diskreten Lagrange-Multiplikators in Normalenrichtung
\mathbf{z}_τ	Komponenten des diskreten Lagrange-Multiplikators in die Tangentialrichtungen

Griechische Buchstaben

α	Platzhalter für das Gebiet zu dem die Größe gehört
β	Skalierungsfaktor der Projektionsgleichung
$\dot{\gamma}$	plastische Gleitung
$\tilde{\gamma}$	plastische Gleitung in inkrementeller Form
$\gamma_{c,e}^{(1)}$	Fläche des Slave-Elements e in der Momentankonfiguration, für $e \in \mathbb{N}^+$
Γ_c, γ_c	Rand mit Kontaktbedingung in der Referenz- bzw. Momentankonfiguration
Γ_D, γ_D	Oberfläche mit Dirichlet-Randbedingung in der Referenz- bzw. Momentankonfiguration
Γ_N, γ_N	Oberfläche mit Neumann-Randbedingung in der Referenz- bzw. Momentankonfiguration
δ_{IK}	Kronecker-Symbol
$\delta \mathbf{d}$	virtuelle Knotenverschiebungen
$\delta \mathbf{E}$	Variation des Green-Lagrange'schen Verzerrungstensors
$\delta \boldsymbol{\lambda}$	virtueller Lagrange-Multiplikator
$\delta \mathbf{u}$	virtuelle Verschiebung
δW_{PvV}^c	virtuelle Kontaktarbeit
δW_{PvV}^F	virtuelle Arbeit der Festkörper
$\delta W_{PvV}^{\text{ext}}$	virtuelle äußere Arbeit
$\delta W_{PvV}^{\text{int}}$	virtuelle innere Arbeit
$\delta \mathbf{z}$	virtueller diskreter Lagrange-Multiplikator

$\Delta \mathbf{d}$	Verbesserung des Verschiebungsvektors während einer Iteration
Δt	(Pseudo) Zeitschritt
$\Delta \mathbf{z}$	Verbesserung des Vektors der Lagrange-Multiplikatoren während einer Iteration
$\partial \Omega$	Oberfläche des materiellen Körpers \mathcal{B}
ϵ_r	Fehlerschranke des globalen Newton-Raphson-Verfahrens
ζ, η, ξ	natürliche Elementkoordinaten
$\bar{\zeta}, \bar{\eta}, \bar{\xi}$	natürliche Koordinaten der Integrationszellen
θ	Geometrieparameter
λ	Lagrange-Multiplikator-Feld
λ_L	1. Lamé-Konstante
λ_n	Lagrange-Multiplikator in Normalenrichtung
λ_τ	Lagrange-Multiplikator in Tangentialrichtung
λ_τ^η	Lagrange-Multiplikator in Tangentialrichtung (in η -Richtung)
λ_τ^ξ	Lagrange-Multiplikator in Tangentialrichtung (in ξ -Richtung)
μ	Reibungskoeffizient
μ_L	2. Lamé-Konstante
ν	Querdehn- bzw. Poissonzahl
ξ	Position eines Punktes in den natürlichen Elementkoordinaten
$\bar{\xi}$	Position eines Punktes in den natürlichen Koordinaten der Integrationszellen
$\Xi^{(1)}$	Formfunktion des Lagrange-Multiplikators
ρ_0, ρ	Dichte in der Referenz- bzw. Momentankonfiguration
σ	Cauchy-Spannungstensor
τ	Matrix mit den Tangenten τ^ξ und τ^η
τ^η	Tangente in η -Richtung
τ^ξ	Tangente in ξ -Richtung
ϕ	Legendre-Polynome
Φ	duale Formfunktion
χ	Abbildungsfunktion zwischen Referenz- und Momentankonfiguration
ψ	Gleitfunktion
$\Psi(\mathbf{C})$	Verzerrungsenergiefunktion
Ω_0, Ω_t	Gebiet, das der materielle Körper \mathcal{B} in der Referenz- bzw. Momentankonfiguration einnimmt

Kopf- und Fußzeiger

- $(\bullet)^{(1)}$ Größe (\bullet) von Gebiet $\Omega^{(1)}$ bzw. Größe (\bullet) des Slave-Randes
- $(\bullet)^{(2)}$ Größe (\bullet) von Gebiet $\Omega^{(2)}$ bzw. Größe (\bullet) des Master-Randes
- $(\bullet)^{(\alpha)}$ Größe (\bullet) von Gebiet $\Omega^{(\alpha)}$
- $(\bullet)^{\text{cell}}$ Größe (\bullet) bezieht sich auf eine Integrationszelle
- $(\bullet)^{\text{dMM}}$ Größe (\bullet) wird mit der dualen Mortar-Methode berechnet
- $(\bullet)^h$ diskretisierte Größe von (\bullet)
- $(\bullet)^i$ Größe (\bullet) im Iterationsschritt i
- $(\bullet)^{\text{seg}}$ Segmentanteil der Größe (\bullet)
- $(\bullet)^{\text{SMM}}$ Größe (\bullet) wird mit der Standard-Mortar-Methode berechnet
- $(\bullet)_e$ Größe (\bullet) gehört zum finiten Element e bzw. zum Slave- oder Master-Element e
- $(\bullet)_G$ Untermenge der Größe (\bullet) , die zu gleitenden Slave-Knoten gehört
- $(\bullet)_H$ Untermenge der Größe (\bullet) , die zu haftenden Slave-Knoten gehört
- $(\bullet)_I, (\bullet)_K, (\bullet)_L$ (\bullet) bezeichnet eine diskretisierte Knotengröße von Knoten I, K bzw. L ; ist (\bullet) ein globaler Vektor, bezeichnet $(\bullet)_{I,K}$ bzw. $(\bullet)_L$ den Anteil von Knoten I, K bzw. L
- $(\bullet)_k$ Größe (\bullet) für das Lastniveau k , bzw. zum (Pseudo-)Zeitpunkt k
- $(\bullet)_M$ Untermenge der Größe (\bullet) , die zu Master-Knoten gehört
- $(\bullet)_N$ Untermenge der Größe (\bullet) , die zu Knoten gehört, die nicht Teil eines Kontaktrandes sind
- $(\bullet)_S$ Untermenge der Größe (\bullet) , die zu Slave-Knoten gehört

1

Einleitung

Diese Arbeit befasst sich mit der Computersimulation von Kontaktproblemen. Etymologisch betrachtet stammt das Wort *Kontakt* vom lateinischen Verb *contingere* (berühren) ab. Im Rahmen dieser Arbeit ist mit Kontakt die physische Berührung zwischen deformierbaren Festkörpern gemeint. In diesem Sinne ist Kontakt ein alltägliches Ereignis, das uns beispielsweise bei jedem Schritt begegnet – Fußsohle und Boden berühren einander. Einige wichtige physikalische Gesetze des Kontakts sind für das genannte Beispiel offensichtlich. Etwa der intuitive Zusammenhang, dass sich Fuß und Boden nicht durchdringen. Des Weiteren spüren wir einen leichten Druck, sobald wir den Fuß auf den Boden setzen. Dieser Druck ist nur spürbar solange Fuß und Boden sich berühren und verschwindet in dem Moment, in dem wir den Fuß anheben. Folglich ist entweder der Abstand zwischen Fuß und Boden oder der Druck auf die Sohle null. Genannte Zusammenhänge sind die Kontaktbedingungen in Richtung der Normalen der Kontaktfläche. Die Kontaktbedingungen in Tangentialrichtung werden uns für dieses Beispiel meist erst augenscheinlich, wenn wir versuchen über einen gefrorenen See zu laufen. Wir erkennen, dass uns beim alltäglichen Laufen die Reibung hilft nicht auszurutschen.

In den folgenden Abschnitten wird zunächst die Motivation dieser Arbeit erläutert und gezeigt, weshalb Computersimulationen von Kontaktproblemen hilfreich sind. Anschließend werden der Stand der Technik der Berechnungsmethoden zusammengefasst und die Ziele dieser Arbeit sowie deren Aufbau dargestellt.

1.1 Motivation

Mit den geschilderten und weiteren physikalischen Gesetzen des Kontakts kann ein mathematisches Modell zu seiner Beschreibung aufgestellt werden. Mit diesem lässt sich allerdings nur für wenige Sonderfälle eine analytische Lösung des sich einstellenden

Verformungs- und Spannungszustandes berechnen. Für allgemeine Fälle ist dies nicht möglich. Jedoch ist die Kenntnis über diese Zustände für viele Anwendungen des Ingenieurwesens von großer Bedeutung – etwa um die Sicherheit einer Konstruktion zu gewährleisten oder um ein tieferes Verständnis ihres Lastabtrags zu erhalten. Im Bauingenieurwesen ist beispielsweise bei der Entwicklung neuer Verbundkonstruktionen von Bedeutung, wie die eingesetzten Kopfbolzen versagen. Ohne die genauen Kenntnisse über den Kontakt zwischen Kopfbolzen und Beton kann der Versagensmechanismus nur abgeschätzt werden. Im Automobilbau ist die Kenntnis über die Verformungs- und Spannungszustände vor allem in der Risikobewertung von Unfällen, also dem Kontakt eines Fahrzeugs mit einem Hindernis, in hohem Maße relevant. Lange Zeit wurden derart komplexe Konstruktionen ausschließlich anhand von maßstabsgetreuen Versuchen bewertet. Diese Versuche sind zeit- und kostenaufwendig. Heutzutage ermöglichen es moderne Computer, diese Versuche vermehrt durch Computersimulationen zu ersetzen bzw. zu ergänzen.

In der Strukturmechanik hat sich in diesem Bereich die Finite-Elemente-Methode (FEM) etabliert. Im Zuge dieser numerischen Methode werden die Differenzialgleichungen des mathematischen Modells näherungsweise gelöst. Zur Behandlung der Kontaktmechanik im Kontext der FEM wurden in den letzten Jahren zahlreiche Methoden entwickelt. Der Wunsch nach Computermodellen, die die Wirklichkeit immer genauer abbilden, führt auch heute noch zu einem hohen Forschungsbedarf auf diesem Gebiet.

Durch effizientere Methoden zur Simulation von Kontaktproblemen lassen sich die Rechenzeiten und damit die Entwicklungszeiten und -kosten reduzieren. Gleichzeitig soll die Genauigkeit der Ergebnisse möglichst hoch sein. So ist bei der Behandlung von Verschleißproblemen und thermomechanischen Kontaktproblemen eine genaue Berechnung der Kontaktspannungen wichtig, um genaue Angaben des Abriebs bzw. des Kontakt-Wärmeübergangskoeffizienten zu erhalten.

1.2 Stand der Technik

Bereits im 19. Jahrhundert befasste sich HERTZ (1882) mit Kontaktproblemen und stellte für einige Sonderfälle deren analytische Lösung auf. In den 1960er Jahren wurde die FEM im Rahmen der Strukturmechanik entwickelt und in den 1970er Jahren erstmals für Kontaktprobleme verwendet. Seitdem wurden zahlreiche wissenschaftliche Beiträge zu dieser Thematik veröffentlicht und unterschiedliche Methoden entwickelt, um die unterschiedlichen Aspekte von Kontaktformulierungen algorithmisch zu behandeln. Abbildung 1.1 zeigt die Schritte einer Computersimulation und gibt für jeden Schritt eine



Abbildung 1.1: Schritte einer Computersimulation von Kontaktproblemen deformierbarer Festkörper sowie beschränkte Auswahl unterschiedlicher Aspekte und Methoden der einzelnen Schritte. In Rot sind diejenigen Aspekte und Methoden hervorgehoben, die in dieser Arbeit berücksichtigt bzw. verwendet werden.

kleine Auswahl an Aspekten bzw. Methoden an, die für Kontaktprobleme von Bedeutung sind. Aspekte und Methoden, die in dieser Arbeit berücksichtigt bzw. verwendet werden, sind farblich hervorgehoben. Ausführungen zu den angegebenen und weiteren Aspekten einer Kontaktformulierung lassen sich beispielsweise in LAURSEN (2003) und WRIGGERS (2006) und der darin angegebenen Literatur finden. Im Folgenden werden lediglich die entwickelten Kontaktdiskretisierungen und Methoden zum Einbringen der

Kontaktbedingungen zusammengefasst, da diese für die vorliegende Arbeit besonders relevant sind.

Das Einbringen der Kontaktbedingungen erfolgt in vielen Algorithmen über die Penalty- oder die Lagrange-Multiplikator-Methode. Letztere erfüllt die Kontaktbedingungen exakt, hat allerdings den Nachteil, dass mit den Lagrange-Multiplikatoren zusätzliche Unbekannte eingeführt werden. Die Penalty-Methode benötigt keine zusätzlichen Unbekannten. Jedoch werden die Kontaktbedingungen mit dieser Methode nicht exakt erfüllt. Weitere Methoden zum Einbringen der Kontaktbedingungen basieren meist auf einer Kombination beider zuvor genannten Methoden.

Unabhängig davon welche Methode zum Einbringen der Kontaktbedingungen verwendet wird, kann die räumliche Kontaktdiskretisierung auf unterschiedliche Art und Weise erfolgen. Die ersten Kontaktformulierungen von FRANCAVILLA UND ZIENKIEWICZ (1975) und HUGHES U. A. (1976) verwenden Node-to-Node(NTN)-Diskretisierungen. Bei dieser Diskretisierung werden die Kontaktbedingungen paarweise zwischen zwei Finite-Elemente-Knoten aufgestellt. Da die NTN-Diskretisierung einen konform vernetzten Kontaktrand benötigt, ist sie lediglich auf Probleme mit kleinen Deformationen anwendbar. Zur Berechnung von Problemen mit großen Deformationen wurden sogenannte Node-to-Segment(NTS)-Diskretisierungen entwickelt. Bei diesen Diskretisierungen erfolgt die Aufstellung der Kontaktbedingungen zwischen den Knoten des einen Kontaktrandes und der diskretisierten Oberfläche des anderen Kontaktrandes. Eine erste Umsetzung dieser Methode wird in HUGHES U. A. (1977) beschrieben. Weitere Anwendungen finden sich beispielsweise in BATHE UND CHAUDHARY (1985), HALLQUIST U. A. (1985), WRIGGERS U. A. (1990) sowie LAURSEN UND SIMO (1993). NTS-Diskretisierungen neigen für große Tangentialbewegungen der Kontaktpartner zu numerischen Instabilitäten. Mitverantwortlich hierfür sind die Knicke des diskretisierten Kontaktrandes. Zur Behebung dieses Defizits wurden einige Glättungsalgorithmen entworfen, siehe z. B. PADMANABHAN UND LAURSEN (2001) und WRIGGERS U. A. (2001). Mit der von HUGHES U. A. (2005) vorgeschlagenen isogeometrischen Analyse (IGA) bleibt die Oberfläche der Kontaktkörper auch nach der Diskretisierung glatt, sodass keine Glättung notwendig ist. Dieses Konzept wird von MATZEN U. A. (2013) und MATZEN UND BISCHOFF (2016) verwendet, um stabile NTS-Diskretisierungen zu entwickeln.

Anstatt die Kontaktbedingungen an einzelnen Knoten aufzustellen, werden sie bei Segment-to-Segment(STS)-Diskretisierungen als integrale Bedingungen formuliert. Umsetzungen und Weiterentwicklungen dieser Kontaktdiskretisierung finden sich beispielsweise in SIMO U. A. (1985) sowie PAPADOPOULOS UND TAYLOR (1992, 1993). Parallel zu den STS-Diskretisierungen wurde im Zusammenhang mit Gebietszerlegungsverfahren die Mortar-Methode entwickelt, um nichtkonforme Diskretisierungen zu koppeln, siehe z. B. MADAY U. A. (1988) und BERNARDI U. A. (1993, 1994). Die diskrete Formulie-

rung der Mortar-Methode ist mit STS-Formulierungen verwandt und eine Abgrenzung beider Methoden ist nicht immer eindeutig möglich. Bei der Mortar-Methode werden die Kontaktbedingungen schwach erfüllt und aufgrund ihrer fundierten mathematischen Basis lassen sich ihre optimalen Konvergenzeigenschaften beweisen. Erste Anwendungen der Mortar-Methode auf unilaterale Kontaktprobleme mit kleinen Deformationen werden in BEN BELGACEM U. A. (1997, 1998) beschrieben. Eine Implementierung dieser rein mathematischen Beschreibungen wird von HILD (2000) präsentiert und gleichzeitig für lineare, reibungslose Probleme mit einer NTS-Formulierung verglichen. MCDEVITT UND LAURSEN (2000) geben eine Umsetzung der Mortar-Methode für den zweidimensionalen Fall mit Reibung an. Erweiterungen der Methode auf den dreidimensionalen Fall für nichtlineare Probleme mit und ohne Reibung werden z. B. in PUSO UND LAURSEN (2004a, b), FISCHER UND WRIGGERS (2005, 2006), YANG U. A. (2005) sowie HESCH UND BETSCH (2009) vorgestellt. Die Anwendung auf finite Elemente mit quadratischen Formfunktionen im dreidimensionalen Fall ist in PUSO U. A. (2008) beschrieben. YANG UND LAURSEN (2008b) und YANG (2009) verwenden die Mortar-Methode im Zusammenhang mit linearen und nichtlinearen Selbstkontaktproblemen. Unterschiedliche Strategien zur Berechnung der für die Mortar-Methode charakteristischen Kontaktintegrale werden in FARAH U. A. (2014) ausführlich geschildert und miteinander verglichen. Anwendungen der Mortar-Methode im Rahmen der IGA finden sich beispielsweise in DE LORENZIS U. A. (2012), KIM UND YOUN (2012), TEMIZER U. A. (2012), HESCH UND BETSCH (2012) sowie DITTMANN U. A. (2014).

In den genannten Veröffentlichungen zur Mortar-Methode werden die Kontaktbedingungen durch unterschiedliche Methoden in die Formulierung eingebracht. Bei Verwendung der Lagrange-Multiplikator-Methode wird zunehmend die von WOHLMUTH (2000) vorgeschlagene duale Mortar-Methode verwendet. Diese ermöglicht die exakte Einhaltung der Kontaktbedingungen und eine effiziente statische Kondensation der Lagrange-Multiplikatoren. Durch die Kondensation werden die zusätzlichen Unbekannten, die infolge der Lagrange-Multiplikator-Methode eingeführt werden, aus dem globalen Gleichungssystem eliminiert. Erste duale Mortar-Formulierungen für unilaterale Kontaktprobleme werden in KRAUSE UND WOHLMUTH (2000, 2002) beschrieben. Eine Erweiterung auf nichtlineare Probleme wird in HARTMANN U. A. (2007) und HARTMANN UND RAMM (2008) präsentiert. POPP U. A. (2009, 2010) geben zum ersten Mal eine konsistente Linearisierung der nichtlinearen Gleichungen der dualen Mortar-Methode an. Die konsistente Berechnung der dualen Formfunktionen für Elemente am Ende des Kontaktrandes wird in CICHOSZ UND BISCHOFF (2011) und POPP U. A. (2013) vorgestellt. Neben linearen Formfunktionen werden in POPP U. A. (2012) auch quadratische Formfunktionen im Rahmen der dualen Mortar-Methode verwendet. Die Behandlung der Coulomb'schen Reibung im Kontext der dualen Mortar-Methode wird von HÜEBER U. A. (2008) und GITTERLE U. A. (2010) beschrieben. SITZMANN U. A. (2015, 2016)

kombinieren die duale Mortar-Methode mit konstitutiven Kontaktgesetzen, um Oberflächenrauigkeiten zu berücksichtigen. Eine Methode zur Ermittlung kontinuierlicher Kontaktspannungen wird in HÜEBER U. A. (2005) präsentiert. Eine übersichtliche Zusammenfassung einiger wichtiger Aspekte der dualen Mortar-Methode im Kontext von Kontaktproblemen mit der FEM ist in POPP UND WALL (2014) zu finden.

In jüngster Zeit wurde die duale Mortar-Methode auch mit höher-kontinuierlichen Ansatzfunktionen im Zusammenhang mit der IGA verwendet. SEITZ U. A. (2016) präsentieren diesbezüglich einen Kontaktalgorithmus für große Deformationen. Anwendungen auf Verschleißprobleme sind in FARAH U. A. (2016) sowie FARAH U. A. (2017) zu finden.

1.3 Zielsetzung

Die vorliegende Arbeit hat zwei Ziele, die weitestgehend unabhängig voneinander betrachtet werden. Das erste Ziel ist die Effizienzsteigerung des betrachteten Kontaktalgorithmus. Dieser beruht auf der Mortar-Methode und bedingt folglich die Berechnung der Kontaktintegrale. Um den Fehler bei der numerischen Integration gering zu halten, wird das gesamte Integrationsgebiet in Bereiche unterteilt, innerhalb derer der Integrand kontinuierlich ist. Diese Bereiche werden Segmente genannt. Vor allem für dreidimensionale Probleme ist diese Art der Integration sehr rechenintensiv. In dieser Arbeit soll deshalb die in PUSO UND LAURSEN (2003) vorgeschlagene Integrationsstrategie modifiziert werden, um den Algorithmus effizienter zu gestalten. Dabei ist es das Ziel, die Genauigkeit der Integration annähernd beizubehalten. Anhand von numerischen Experimenten soll diese Zielvorgabe überprüft werden.

Die zweite Zielsetzung dieser Arbeit steht in Zusammenhang mit den Kontaktspannungen dualer Mortar-Methoden. Ohne Nachbearbeitung sind diese diskontinuierlich und entsprechen somit nicht den physikalisch zu erwartenden Kontaktspannungen. HÜEBER U. A. (2005) schlagen deshalb eine Methode vor, die zu kontinuierlichen Kontaktspannungen führt. Der Fehler in der Kontaktspannung kann auf diese Art und Weise reduziert werden. Allerdings sind die nachbearbeiteten Kontaktspannungen im Vergleich zu den Kontaktspannungen von Standard-Mortar-Formulierungen ungenauer. Von diesem Nachteil abgesehen hat die duale Mortar-Methode gegenüber der Standard-Mortar-Methode einige Vorteile, z. B. die Möglichkeit zur statischen Kondensation der Lagrange-Multiplikatoren. Damit die Vorteile der dualen Mortar-Methode noch stärker überwiegen, soll der genannte Nachteil abgeschwächt werden. Die Verbesserung der Kontaktspannungen dualer Mortar-Methoden ist deshalb Ziel dieses Arbeitsgebiets. Die Erfüllung dieser Zielsetzung ist anhand numerischer Experimente zu prüfen.

1.4 Gliederung der Arbeit

In **Kapitel 2** werden die grundlegenden Gleichungen der nichtlinearen Kontinuums- und Kontaktmechanik in ihrer starken Form angegeben. Das Einbringen der Kontaktbedingungen in die kontinuumsmechanische Formulierung erfolgt mit der Lagrange-Multiplikator-Methode. Als Vorbereitung auf die Verwendung der FEM wird die starke Form unter Zuhilfenahme der Methode der gewichteten Residuen in die schwache Form überführt.

Kapitel 3 thematisiert die Finite-Elemente-Diskretisierung. Der Fokus liegt dabei auf der Kontaktdiskretisierung. Die Erläuterungen zur Diskretisierung der kontinuumsmechanischen Gleichungen beschränken sich hauptsächlich auf die Einführung der verwendeten Notation. Nach einer kurzen Zusammenfassung gebräuchlicher Kontaktdiskretisierungen wird die Diskretisierung der Mortar-Formulierung angegeben. Im Zuge dessen werden die Kontaktintegrale beschrieben. Eine Erörterung ihrer Berechnungsmethoden ist Hauptbestandteil von Kapitel 5.

Gegenstand von **Kapitel 4** ist die Beschreibung der Strategie, die zum Lösen der Gleichungen und Ungleichungen der diskreten Formulierung angewendet wird. Zusätzlich wird die statische Kondensation der diskreten Lagrange-Multiplikatoren beschrieben und damit ein Vorteil der dualen Mortar-Methode identifiziert.

Kapitel 5 ist der ersten Zielsetzung dieser Arbeit gewidmet. Zunächst wird erläutert, welche Zusammenhänge die numerische Berechnung der Kontaktintegrale erschweren. Danach werden zwei gebräuchliche Integrationsmethoden beschrieben. Für dreidimensionale Probleme folgt eine detaillierte Untersuchung der genaueren Methode, um den Grund des numerischen Aufwands dieser Methode zu identifizieren. Anschließend werden alternative Integrationsmethoden entwickelt. Zwei vielversprechende Ansätze werden anhand von numerischen Experimenten auf ihre Effizienz und Genauigkeit getestet.

Im Mittelpunkt von **Kapitel 6** steht die Untersuchung der Kontaktspannungen dualer Mortar-Methoden und damit die zweite Zielsetzung dieser Arbeit. Als Erstes werden die duale Mortar-Methode und die Standard-Mortar-Methode hinsichtlich ihrer Kontaktspannungsgenauigkeit verglichen. Daran anschließend wird eine Methode zur Verbesserung der Kontaktspannungen der dualen Mortar-Methode präsentiert. Abschließend erfolgt anhand von bi- und unilateralen Kontaktproblemen ein Vergleich der entwickelten Kontaktspannungen mit Kontaktspannungen aus der Literatur.

In **Kapitel 7** folgt eine Zusammenfassung der Erkenntnisse dieser Arbeit. Beendet wird die Arbeit mit einem Ausblick auf mögliche Weiterentwicklungen und Anwendungen der beschriebenen Methoden.

2

Grundlagen der Kontinuums- und Kontaktmechanik

In diesem Kapitel werden die grundlegenden mechanischen Gleichungen von Kontaktproblemen beschrieben. Bevor speziell auf die Kontaktmechanik eingegangen wird, vermittelt Abschnitt 2.1 die nötigen Grundkenntnisse der Kontinuumsmechanik für große Deformationen. Die Kontinuumsmechanik ist die Beschreibung der Deformation eines Körpers unter äußerer Belastung. Sie setzt die Deformation und die daraus resultierenden Verzerrungen über ein Materialgesetz in Relation zu den sich einstellenden Spannungen. In dieser Arbeit beschränken sich die Darstellungen ausschließlich auf Festkörper.

Berühren sich zwei oder mehrere Körper während ihrer Deformation, interagieren sie miteinander. Der Kontakt aller interagierenden Körper hat Einfluss auf deren Deformation und damit die Spannung in den sich berührenden Körpern. Um die Interaktion der Körper mechanisch beschreiben zu können, werden in Abschnitt 2.2 die Ausführungen zur Kontinuumsmechanik um die Kontaktmechanik erweitert. Mit der in Abschnitt 2.3 vorgestellten Lagrange-Multiplikator-Methode werden die Kontaktgleichungen in die kontinuumsmechanischen Gleichungen integriert.

Bis zu diesem Abschnitt wird das mechanische Modell in der starken Form beschrieben. Im nachfolgenden Abschnitt 2.4 werden die Gleichungen in ihre schwache Form überführt. Diese sind gleichwertig zu den Gleichungen der Abschnitte 2.1 und 2.2, werden allerdings als Basis für die in Kapitel 3 hergeleitete Finite-Elemente-Formulierung benötigt.

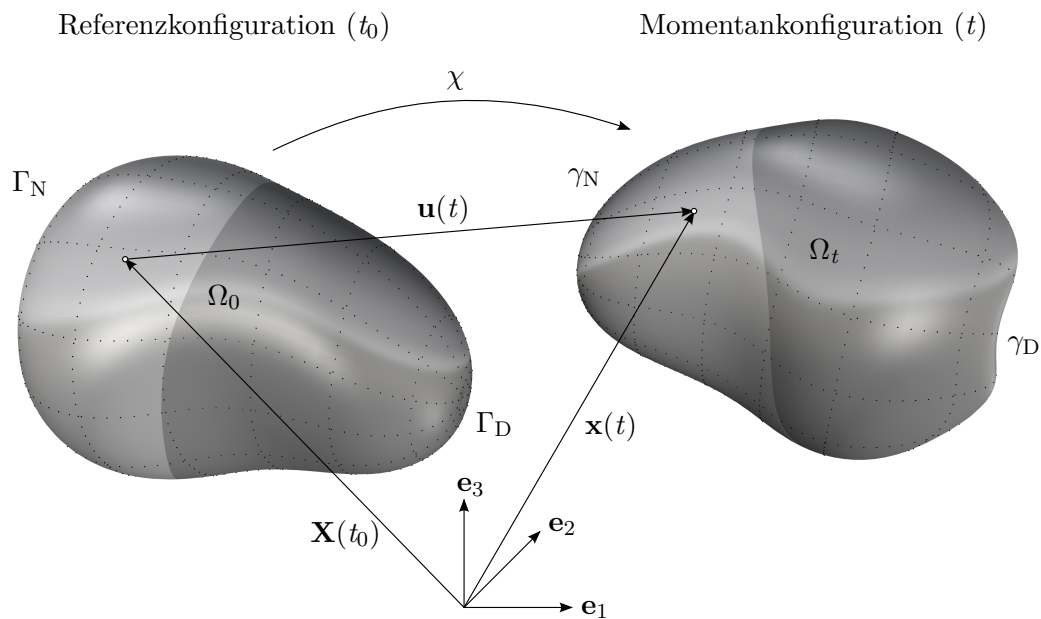


Abbildung 2.1: Veranschaulichung großer Deformationen anhand eines materiellen Kontinuums. Darstellung in der Referenz- und Momentankonfiguration.

2.1 Nichtlineare Kontinuumsmechanik

Dieser Abschnitt beschreibt die Deformation materieller Körper in Raum und Zeit aufgrund äußerer Einwirkungen. In den folgenden Unterabschnitten werden die Bewegungsgleichung, die in dieser Arbeit verwendeten Verzerrungs- und Spannungsmaße sowie die verwendeten Materialgesetze vorgestellt. Die Ausführungen dienen hauptsächlich der Einführung in dieser Arbeit verwendeter Bezeichnungen und weniger einer umfassenden Beschreibung der Kontinuumsmechanik. Für Letzteres sei auf die Literatur von HOLZAPFEL (2000), BONET UND WOOD (1999), BELYTSCHKO U. A. (2014), WILLNER (2003) sowie BAŞAR UND WEICHERT (2000) verwiesen, die auch als Grundlage dieses Abschnitts dient.

2.1.1 Kinematik und Verzerrungsmaß

Für die nichtlineare Kontinuumsmechanik ist die korrekte Beschreibung großer Deformationen von hoher Relevanz. Sie gibt wieder, wie sich die einzelnen materiellen Punkte eines materiellen Körpers \mathcal{B} im Laufe der Zeit t im dreidimensionalen euklidischen Raum bewegen. Die Bewegung eines materiellen Körpers wird in Abbildung 2.1 veranschaulicht. Die Abbildung zeigt den Körper \mathcal{B} in der Referenzkonfiguration zum Zeitpunkt t_0 und in der Momentankonfiguration zum Zeitpunkt t . Als Referenzkonfiguration dient

in dieser Arbeit die undeformierte Ausgangslage. Grundsätzlich sind aber auch andere Referenzkonfigurationen vorstellbar. Das Gebiet, das der Körper zu den genannten Zeitpunkten einnimmt, wird entsprechend mit den Symbolen Ω_0 bzw. Ω_t bezeichnet. Die Lage der einzelnen materiellen Punkte ändert sich zwischen den beiden Konfigurationen beispielsweise aufgrund äußerer Lasten.

Zur Beschreibung der Bewegung eines materiellen Punktes muss seine Lage im Raum bekannt sein. In der Referenzkonfiguration wird die Lage über den Ortsvektor \mathbf{X} angegeben. Die aktuelle Position \mathbf{x} eines materiellen Punktes zum Zeitpunkt t lautet mithilfe der Abbildungsfunktion χ :

$$\mathbf{x} = \chi(\mathbf{X}, t). \quad (2.1)$$

Ein Ortsvektor beschreibt die Lage von genau einem materiellen Punkt. Außerdem existiert für jeden materiellen Punkt zu jedem Zeitpunkt genau ein Ortsvektor. Die Abbildungsfunktion χ ist daher eineindeutig und damit invertierbar. Aus der Differenz der Ortsvektoren \mathbf{X} und \mathbf{x} eines materiellen Punktes lässt sich seine Verschiebung \mathbf{u} berechnen. Es gilt der Zusammenhang:

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X}. \quad (2.2)$$

Aus dem Verschiebungsvektor \mathbf{u} kann die Geschwindigkeit $\dot{\mathbf{x}}$ und die Beschleunigung $\ddot{\mathbf{x}}$ des materiellen Punktes berechnet werden. In der totalen Lagrange'schen Betrachtungsweise¹, die in dieser Arbeit, wie in der Festkörpermechanik üblich, zur Beschreibung der Bewegung verwendet wird, lauten diese Größen:

$$\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{u}} = \frac{d\chi}{dt} = \frac{d\mathbf{u}}{dt}, \quad (2.3)$$

$$\ddot{\mathbf{x}} = \ddot{\mathbf{u}} = \frac{d^2\chi}{dt^2} = \frac{d^2\mathbf{u}}{dt^2}. \quad (2.4)$$

Im Wesentlichen werden bei der Beschreibung großer Deformationen Größen aus der Referenzkonfiguration zu Größen aus der Momentankonfiguration in Relation gesetzt. Dem Deformationsgradienten \mathbf{F} kommt dabei eine entscheidende Rolle zu. Er ist definiert durch

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{x}}{d\mathbf{X}} = \mathbf{I} + \frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{X}} \quad (2.5)$$

¹Im weiteren Verlauf der Arbeit wird diese abkürzend Lagrange'sche Betrachtungsweise genannt. Es ist aber stets die totale Lagrange'sche Betrachtungsweise gemeint, die sich immer auf dieselbe Referenzkonfiguration bezieht.

und stellt einen direkten Bezug zwischen dem infinitesimalen Linienelement $d\mathbf{X}$ der Referenzkonfiguration und dem entsprechenden infinitesimalen Linienelement $d\mathbf{x}$ der Momentankonfiguration her.

Ein ähnlicher Zusammenhang kann für infinitesimale Volumenelemente gefunden werden:

$$dv = (\det \mathbf{F}) dV = J dV. \quad (2.6)$$

In der vorherigen Transformationsvorschrift ist dv das infinitesimale Volumenelement in der Momentankonfiguration und dV ist die entsprechende Größe in der Referenzkonfiguration. Die Determinante $\det \mathbf{F}$ wird Jacobi-Determinante genannt und mit $\det \mathbf{F} = J$ abgekürzt.

Eine weitere Größe, die zur Beschreibung des Verformungszustandes eines Körpers benötigt wird, ist das Verzerrungsmaß. Es ist ein Maß für die Formänderung eines Körpers und dient in Kombination mit den Materialgesetzen zur Berechnung der Spannungen im Körper. Der Deformationsgradient \mathbf{F} ist kein geeignetes Maß zur Beschreibung von Verzerrungen, da er Starrkörperbewegungen enthält. Für reine Starrkörperrotationen würden mit dem Deformationsgradienten als Verzerrungsmaß unphysikalische Spannungen entstehen. Es wird daher ein Verzerrungsmaß verwendet, das keine Starrkörperbewegungen enthält. Dabei handelt es sich um den symmetrischen Green-Lagrange'schen Verzerrungstensor \mathbf{E} :

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}). \quad (2.7)$$

Er enthält den rechten Cauchy-Green-Deformationstensor \mathbf{C} sowie den Identitätstensor \mathbf{I} .

2.1.2 Spannungsmaße und Konstitutivgleichungen

Äußere Krafteinwirkungen führen in Kontinua zu mechanischen Spannungen. Bevor der Zusammenhang zwischen den Verzerrungen und den sich einstellenden inneren Beanspruchungen hergestellt wird, werden im Folgenden die in dieser Arbeit verwendeten Spannungsmaße beschrieben.

Durch das Fundamentaltheorem von Cauchy

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \mathbf{n} \quad (2.8)$$

wird der Cauchy-Spannungstensor $\boldsymbol{\sigma}$ über seine Verknüpfung zum Cauchy-Spannungsvektor \mathbf{t} eingeführt. Der Spannungstensor $\boldsymbol{\sigma}$ gibt für jeden materiellen Punkt dessen kompletten Spannungszustand wieder. Für einen gedachten Schnitt durch das Kontinuum stellt der Spannungsvektor \mathbf{t} die frei werdende Oberflächenspannung dar. Diese wird auch als Kontaktspannung bezeichnet, da sie die Spannung zwischen den beiden geschnittenen Körpern darstellt. Der Spannungsvektor \mathbf{t} ist abhängig von der Normalen \mathbf{n} der gedachten Schnittfläche. Die Cauchy-Spannung $\boldsymbol{\sigma}$ wird auch als wahre Spannung bezeichnet, da die aktuelle Kraft auf ein Flächenelement der Momentankonfiguration bezogen wird.

In der Lagrange'schen Betrachtungsweise ist das Flächenelement der Momentankonfiguration unbekannt. Es werden daher Spannungsmaße benötigt, die sich auf Größen der Referenzkonfiguration beziehen. Zunächst wird der erste Piola-Kirchhoff-Spannungstensor \mathbf{P} , auch Nominal-Spannungstensor genannt, über eine ähnliche Beziehung wie in Gleichung (2.8) eingeführt. Der Spannungsvektor \mathbf{T} der ersten Piola-Kirchhoff-Spannung wirkt auf der Schnittfläche der Momentankonfiguration, bezieht sich aber auf ein Flächenelement der Referenzkonfiguration. Es gelten die Beziehungen:

$$\mathbf{T}(\mathbf{X}, t, \mathbf{N}) = \mathbf{P}(\mathbf{X}, t) \mathbf{N}, \quad (2.9)$$

$$\mathbf{P} = (\det \mathbf{F}) \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T}. \quad (2.10)$$

Die Normale \mathbf{N} bezeichnet hierbei die Normale der gedachten Schnittfläche in der Referenzkonfiguration. In der Literatur existieren gegensätzliche Definitionen der Nominal-Spannung und der ersten Piola-Kirchhoff-Spannung. In der vorliegenden Arbeit entsprechen beide Spannungsmaße der in Gleichung (2.10) gegebenen Definition.

Ein weiteres Spannungsmaß, das in dieser Arbeit verwendet wird, ist die zweite Piola-Kirchhoff-Spannung \mathbf{S} . Zu den bisher genannten Spannungsmaßen steht dieses in folgendem Zusammenhang:

$$\mathbf{S} = (\det \mathbf{F}) \mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{P}. \quad (2.11)$$

Wie durch die Drallbilanz in Unterabschnitt 2.1.3 gezeigt wird, ist der zweite Piola-Kirchhoff-Spannungstensor ein symmetrischer Tensor. Alle zu seiner Beschreibung verwendeten Größen sind bezüglich der Referenzkonfiguration formuliert, wodurch er für die hier verwendete Lagrange'sche Betrachtungsweise geeignet ist. Weitere Spannungstensoren können der Literatur entnommen werden. Diese werden hier nicht aufgeführt, da sie im weiteren Verlauf dieser Arbeit keine Rolle spielen.

Konstitutive Gleichungen setzen die Verzerrungen mit den Spannungen in Beziehung. Sie werden auch Materialgleichungen genannt und idealisieren das Verhalten physikalischer Materialien. Im Folgenden werden die konstitutiven Gleichungen von zwei in die-

ser Arbeit verwendeten hyperelastischen Materialien vorgestellt. Bei hyperelastischen Materialien lässt sich der zweite Piola-Kirchhoff-Spannungstensor \mathbf{S} wie folgt aus den Verzerrungsenergiefunktionen $\Psi(\mathbf{C})$ bzw. $w(\mathbf{E})$ berechnen:

$$\mathbf{S} = 2 \frac{\partial \Psi(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} = \frac{\partial w(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}}. \quad (2.12)$$

In dieser Arbeit wird das beschriebene nichtlineare Problem mithilfe eines inkrementell-iterativen Newton-Raphson-Verfahrens gelöst, vergleiche Abschnitt 4.3. Dieses Verfahren bedingt die Linearisierung der Konstitutivgleichungen und damit die Kenntnis über den vierstufigen Materialtensor $\overset{4}{\mathbf{C}}$. Dieser lässt sich aus der Verzerrungsenergiefunktion herleiten:

$$\overset{4}{\mathbf{C}} = 4 \frac{\partial^2 \Psi(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C} \partial \mathbf{C}} = \frac{\partial^2 w(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E} \partial \mathbf{E}} = \frac{\partial \mathbf{S}(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}}. \quad (2.13)$$

Infolge der Symmetrie von \mathbf{S} und \mathbf{E} sowie der Betrachtung hyperelastischer Materialien reduzieren sich die unabhängigen Materialkonstanten des Materialtensors $\overset{4}{\mathbf{C}}$ von ursprünglich 81 auf 21. Für isotrope Materialien, wie sie in dieser Arbeit verwendet werden, verringert sich die Anzahl der unabhängigen Konstanten weiter auf zwei. Dies sind die Lamé-Konstanten λ_L und μ_L , die sich aus den anschaulicheren elastischen Konstanten, dem Elastizitätsmodul E und der Querdehn- bzw. Poissonzahl ν , wie folgt berechnen lassen:

$$\lambda_L = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu_L = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (2.14)$$

Saint-Venant-Kirchhoff-Material

Das einfachste hyperelastische Material ist das Saint-Venant-Kirchhoff-Material. Es ist eine Verallgemeinerung der linearen Elastizität auf nichtlineare Verzerrungsmaße. Allerdings ist das Saint-Venant-Kirchhoff-Material für Probleme mit großen Verzerrungen ungeeignet, da die Spannungen für diese Fälle nicht physikalisch sind. Als Spannungsmaß wird der zweite Piola-Kirchhoff-Spannungstensor \mathbf{S} verwendet und als Verzerrungsmaß der Green-Lagrange'sche Verzerrungstensor \mathbf{E} . Die Verzerrungsenergiefunktion des Saint-Venant-Kirchhoff-Materials lautet:

$$w(\mathbf{E}) = \frac{\lambda_L}{2} (\text{tr } \mathbf{E})^2 + \mu_L \text{tr } \mathbf{E}. \quad (2.15)$$

Der Spannungstensor ergibt sich durch Einsetzen der Verzerrungsenergiefunktion aus Gleichung (2.15) in Gleichung (2.12):

$$\mathbf{S} = \lambda_L(\text{tr } \mathbf{E})\mathbf{I} + 2\mu_L\mathbf{E} = \overset{4}{\mathbf{C}}\mathbf{E}. \quad (2.16)$$

Mathematisch gesehen ist in vorheriger Gleichung der Zusammenhang $\overset{4}{\mathbf{C}}\mathbf{E}$ zwischen dem Materialtensor und der Verzerrung eine lineare Abbildung, für die in der Literatur häufig die Schreibweise $\overset{4}{\mathbf{C}} : \mathbf{E}$ zu finden ist. Der vierstufige Materialtensor lässt sich durch Einsetzen der Gleichung (2.15) in Gleichung (2.13) berechnen:

$$\overset{4}{\mathbf{C}} = \lambda_L(\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}) + 2\mu_L\overset{4}{\mathbf{I}}_{\text{sym}}. \quad (2.17)$$

Hierin ist $\overset{4}{\mathbf{I}}_{\text{sym}}$ der symmetrische, vierstufige Identitätstensor.

Neo-Hooke-Material

Soll elastisches Materialverhalten auch für große Verzerrungen abgebildet werden, können Neo-Hooke-Materialien verwendet werden. Dabei handelt es sich um isotrope hyperelastische Materialien. Die Verzerrungsenergiefunktion des hier betrachteten Neo-Hooke-Materials lautet:

$$\Psi(\mathbf{C}) = \frac{\mu_L}{2}(\text{tr } \mathbf{C} - 3) - \mu_L \ln(\det \mathbf{F}) + \frac{\lambda_L}{2}(\ln(\det \mathbf{F}))^2. \quad (2.18)$$

Aus dieser lässt sich mithilfe von Gleichung (2.12) der zweite Piola-Kirchhoff-Spannungstensor

$$\mathbf{S} = \mu_L(\mathbf{I} - \mathbf{C}^{-1}) + \lambda_L \ln(\det \mathbf{F})\mathbf{C}^{-1} \quad (2.19)$$

bestimmen. Der Materialtensor ergibt sich durch Einsetzen von Gleichung (2.18) in Gleichung (2.13). Die Darstellung der Lösung ist nicht so kompakt wie die des Saint-Venant-Kirchhoff-Materials und wird deshalb an dieser Stelle nicht angegeben. Es sei dazu auf BONET UND WOOD (1999) sowie BELYTSCHKO U. A. (2014) verwiesen.

2.1.3 Bilanzgleichungen

Die in diesem Unterabschnitt angegebenen Bilanzgleichungen stellen eine mathematische Beschreibung physikalischer Axiome dar. Es werden nicht alle Bilanzgleichungen

der Kontinuumsmechanik aufgeführt, sondern nur solche, die für die Formulierung isothermer mechanischer Prozesse neue Erkenntnisse bringen. Die Naturgesetze werden als globale Integralgleichungen formuliert und können in lokale Gleichungen, die für jeden materiellen Punkt gelten, überführt werden. Damit diese Überführung möglich ist, muss der Integrand stetig sein. In der vorliegenden Arbeit ist diese Voraussetzung erfüllt und damit gilt das Prinzip der lokalen Wirkung (ALTENBACH 2015; WILLNER 2003).

Auf eine ausführliche Herleitung der Bilanzgleichungen wird im Folgenden verzichtet. Es werden nur die wichtigsten Aspekte der jeweiligen Bilanzgleichungen genannt und sie werden in eine Form gebracht, die für eine Lagrange'sche Betrachtungsweise praktikabel ist.

Massenbilanz

Das Axiom, das durch die Massenbilanz in eine mathematische Form überführt wird, sagt aus, dass die Masse in einem geschlossenen System konstant bleibt. Für ein betrachtetes Kontinuum muss daher die Masse m in der Momentankonfiguration der Masse in der Referenzkonfiguration entsprechen. Demnach gilt:

$$m = \int_{\Omega_0} \rho_0(\mathbf{X}) \, dV = \int_{\Omega_t} \rho(\mathbf{x}, t) \, dv = \text{konst.} > 0. \quad (2.20)$$

In Gleichung (2.20) ist ρ_0 die Dichte in der Referenzkonfiguration und ρ die Dichte in der Momentankonfiguration. Diese Bedingung kann auch als zeitliche Änderung dargestellt werden, da sie zu jedem Zeitpunkt t erfüllt sein muss:

$$\dot{m} = \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho(\mathbf{x}, t) \, dv = 0. \quad (2.21)$$

Unter Zuhilfenahme von Gleichung (2.6) kann mit der Massenbilanz der Zusammenhang

$$\rho_0 = \rho \det \mathbf{F} \quad (2.22)$$

hergestellt werden.

Impulsbilanz

Die zweite Bilanz, die an dieser Stelle beschrieben wird, ist die Impulsbilanz. Der Impuls ist definiert als das Produkt aus der Dichte eines materiellen Punktes und seiner

Geschwindigkeit. Wird das Produkt über den Körper integriert, ergibt sich der Körperimpuls \mathbf{l} :

$$\mathbf{l}(t) = \int_{\Omega_t} \rho(\mathbf{x}, t) \dot{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, t) dv. \quad (2.23)$$

Das zugrundeliegende Axiom fordert die Äquivalenz der zeitlichen Änderung des Impulses und der Summe der einwirkenden Kräfte. Auf den Körper wirken sowohl Volumenkräfte $\rho \mathbf{b}$ als auch Oberflächenlasten \mathbf{t} . Die Impulsbilanz kann wie folgt angegeben werden:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho(\mathbf{x}, t) \dot{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, t) dv = \int_{\Omega_t} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) dv + \int_{\gamma} \mathbf{t}(\mathbf{x}, t) da. \quad (2.24)$$

Darin ist da ein infinitesimales Flächenelement in der Momentankonfiguration und γ steht für die Oberfläche der Momentankonfiguration. Durch Substitution von Größen der Momentankonfiguration durch Größen der Referenzkonfiguration lässt sich die Impulsbilanz nach weiteren Umformungen in der lokalen Form

$$\rho_0 \ddot{\mathbf{x}} = \text{Div } \mathbf{P} + \rho_0 \mathbf{b} \quad (2.25)$$

darstellen. Für statische und quasistatische Probleme kann die Beschleunigung $\ddot{\mathbf{x}}$ vernachlässigt werden und es ergibt sich die Gleichgewichtsbedingung

$$\mathbf{0} = \text{Div } \mathbf{P} + \rho_0 \mathbf{b}. \quad (2.26)$$

Drallbilanz

Der Drall \mathbf{h} , auch Drehimpuls genannt, eines materiellen Körpers bezüglich des Koordinatenursprungs ist definiert als

$$\mathbf{h}(t) = \int_{\Omega_t} \mathbf{x} \times (\rho(\mathbf{x}, t) \dot{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, t)) dv. \quad (2.27)$$

Die axiomatische Aussage der Drallbilanz lautet: Die zeitliche Änderung des Dralls entspricht der Summe der Momente um einen raumfesten Punkt. Wird als raumfester Punkt der Koordinatenursprung gewählt, lässt sich die Drallbilanz wie folgt ausdrücken:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \mathbf{x} \times (\rho(\mathbf{x}, t) \dot{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, t)) dv = \int_{\Omega_t} \mathbf{x} \times (\rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{b}(\mathbf{x}, t)) dv + \int_{\gamma} \mathbf{x} \times \mathbf{t}(\mathbf{x}, t) da. \quad (2.28)$$

Ohne auf weitere Schritte der Herleitung einzugehen, ist die Aussage der Drallbilanz, dass der Cauchy- und der zweite Piola-Kirchhoff-Spannungstensor symmetrisch sein müssen. Demnach gilt:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T, \quad \mathbf{S} = \mathbf{S}^T. \quad (2.29)$$

2.1.4 Randbedingungen des elastostatischen Randwertproblems

Die bisherigen Gleichungen dieses Abschnitts können nun verwendet werden, um die Gleichungen des sogenannten Anfangsrandwertproblems der Elastodynamik bzw. des Randwertproblems der Elastostatik aufzustellen. Wie die Bezeichnungen schon erahnen lassen, sind für dynamische Probleme Anfangs- und Randbedingungen erforderlich, um das System der partiellen Differenzialgleichungen lösen zu können. Für statische bzw. quasistatische Probleme reichen Randbedingungen aus, um das System lösen zu können. Diese Arbeit beschränkt sich auf die Betrachtung quasistatischer Probleme. Die Impulsbilanz wird daher in der Form von Gleichung (2.26) verwendet und gilt im gesamten Gebiet während des Zeitintervalls von t_0 bis t_E :

$$\mathbf{0} = \text{Div } \mathbf{P} + \rho_0 \mathbf{b}. \quad (2.30)$$

Bei den hier betrachteten quasistatischen Problemen ist t keine physikalische Größe, sondern eine Pseudozeit. Sie wird ausschließlich zur Berücksichtigung geometrisch nicht-linearer Effekte benötigt.

Die Randbedingungen werden auf den Rand $\partial\Omega$ des Gebiets Ω aufgebracht. Auf den Rändern Γ_N und γ_N sind Neumann-Randbedingungen vorgegeben. Γ_D und γ_D hingegen beschreiben Ränder mit vorgeschriebenen Dirichlet-Randbedingungen. Die Ränder der Referenzkonfiguration und Momentankonfiguration werden hierbei entsprechend mit Γ bzw. γ bezeichnet. In Abbildung 2.1 sind die verschiedenen Ränder durch unterschiedliche Grautöne veranschaulicht. Für die Teilmengen der Ränder gilt:

$$\Gamma_N \cup \Gamma_D = \partial\Omega_0, \quad \Gamma_N \cap \Gamma_D = \emptyset. \quad (2.31)$$

Die Zusammenhänge aus den Gleichungen (2.31) gelten analog für die Teilmengen γ_N und γ_D der Momentankonfiguration und den zugehörigen Rand $\partial\Omega_t$ der genannten Konfiguration.

Für das Zeitintervall von t_0 bis t_E sind auf diesen Oberflächen die Verschiebungen $\hat{\mathbf{u}}$ und die Spannungen $\hat{\mathbf{T}}$ vorgegeben, sodass

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \hat{\mathbf{u}} && \text{auf } \Gamma_D \times [t_0, t_E], \\ \mathbf{PN} &= \hat{\mathbf{T}} && \text{auf } \Gamma_N \times [t_0, t_E]. \end{aligned} \tag{2.32}$$

2.2 Nichtlineare Kontaktmechanik

Mit den Gleichungen des elastostatischen Randwertproblems präsentiert der vorherige Abschnitt die wichtigsten Gleichungen der Kontinuumsmechanik. Nun werden diese Gleichungen um die wichtigsten Gleichungen der Kontaktmechanik erweitert. Die Kontaktmechanik hat das Ziel, die Bewegung materieller Körper im Raum zu beschreiben und dabei deren Durchdringung zu verhindern. Zusätzlich werden Reibungseffekte durch die Formulierung entsprechender Gesetze berücksichtigt. Um die Interaktion der Körper zu beschreiben, werden Kontaktbedingungen in Normalen- und Tangentialrichtung aufgestellt. Diese gelten auf dem Kontaktrand und schränken die zulässigen Verschiebungsfelder der Körper ein.

Die Kontaktmechanik wird im Folgenden anhand zweier deformierbarer Körper veranschaulicht. Diese Beschränkung dient ausschließlich der Übersichtlichkeit. Die hier erläuterten Zusammenhänge lassen sich auch auf Mehrkörper- und Selbstkontaktprobleme anwenden. Das Augenmerk dieses Abschnitts liegt auf der Interaktion zwischen den beiden Körpern auf dem Kontaktrand. Unabhängig davon gelten für jeden einzelnen Körper die in Abschnitt 2.1 beschriebenen kontinuumsmechanischen Gesetzmäßigkeiten.

Der Schwerpunkt dieser Arbeit liegt in der Untersuchung unilateraler Kontaktprobleme. Bei diesen Problemen werden zwischen den Kontinua nur Druckspannungen in Normalenrichtung übertragen. Zugspannungen, beispielsweise infolge von Adhäsion, bleiben für diese Kontaktart unberücksichtigt. Bei bilateralen Kontaktproblemen hingegen werden sowohl Druck- als auch Zugspannungen übertragen. Letztgenannte Kontaktart ist in dieser Arbeit von untergeordneter Bedeutung. Trotzdem werden die entsprechenden Kontaktbedingungen aufgeführt, da bilateraler Kontakt für die Untersuchung der Kontaktspannungen in Kapitel 6 gewisse Vorteile mit sich bringt. Im weiteren Verlauf wird nur vereinzelt auf die Besonderheiten des bilateralen Kontakts hingewiesen. Eine detaillierte Beschreibung und eine Darstellung der Gemeinsamkeiten zwischen bi- und unilateralem Kontakt lässt sich z. B. in POPP (2012) finden.

Den folgenden Ausführungen liegen die Arbeiten von LAURSEN (2003), WRIGGERS (2006) und WILLNER (2003) zugrunde. Detailliertere Beschreibungen der Kontaktmechanik lassen sich in dieser und der darin angegebenen Literatur finden.

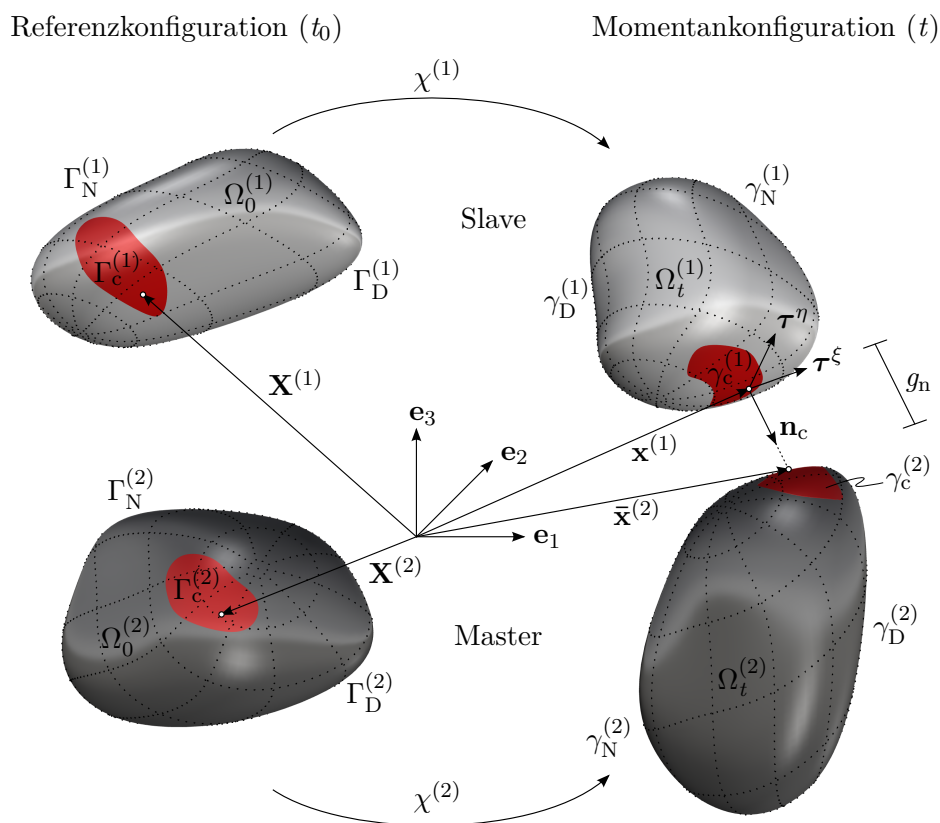


Abbildung 2.2: Veranschaulichung großer Deformationen bei Kontaktproblemen anhand zweier materieller Körper. Darstellung in der Referenz- und Momentankonfiguration.

2.2.1 Kontaktkinematik

Die Deformation bei Kontaktproblemen wird in Abbildung 2.2 anhand von zwei materiellen Körpern veranschaulicht. Diese nehmen die Gebiete $\Omega^{(1)}$ und $\Omega^{(2)}$ ein. Im Wesentlichen werden die Bezeichnungen aus Abschnitt 2.1 verwendet. Zur Unterscheidung der einzelnen Gebiete geben die Kopfzeiger $(\bullet)^{(1)}$ bzw. $(\bullet)^{(2)}$ die Zugehörigkeit zu den Gebieten $\Omega^{(1)}$ bzw. $\Omega^{(2)}$ an. Sind Größen beider Körper gemeint, wird der Kopfzeiger $(\bullet)^{(\alpha)}$, mit $\alpha = 1, 2$, verwendet. Die Einstein'sche Summenkonvention gilt für α nicht.

Neben den in Unterabschnitt 2.1.4 angegebenen Dirichlet- und Neumann-Rändern, gibt es in der Kontaktmechanik zusätzlich die Kontaktränder Γ_c und γ_c der Referenz- bzw. Momentankonfiguration. Zur besseren Übersichtlichkeit sind ausschließlich die Kontaktränder in Abbildung 2.2 in Rot hervorgehoben, die beiden anderen Ränder werden nicht gesondert veranschaulicht. In der Kontaktliteratur ist es üblich, die Kontaktränder als Slave- und Master-Rand zu bezeichnen. In dieser Arbeit wird der Kontaktrand von Körper $\Omega^{(1)}$ als Slave-Rand und der Kontaktrand von Körper $\Omega^{(2)}$ entsprechend als Master-

Rand bezeichnet. Auf diesen Rändern entsteht potentiell Kontakt zwischen den beiden Körpern und dort gelten die Kontaktbedingungen aus den Unterabschnitten 2.2.3 und 2.2.4. Ein Kontaktrand, der aktuell nicht mit einem anderen Kontaktrand in Kontakt steht, wird wie ein Neumann-Rand behandelt.

Jeweils der gesamte Rand eines einzelnen Körpers wird durch die drei genannten Ränder $\Gamma_N, \Gamma_D, \Gamma_c$ bzw. $\gamma_N, \gamma_D, \gamma_c$ beschrieben. Es gibt keine Überlappung der einzelnen Ränder, sodass für die Teilmengen gilt:

$$\Gamma_N^{(\alpha)} \cup \Gamma_D^{(\alpha)} \cup \Gamma_c^{(\alpha)} = \partial\Omega_0^{(\alpha)}, \quad (2.33)$$

$$\Gamma_N^{(\alpha)} \cap \Gamma_D^{(\alpha)} = \Gamma_N^{(\alpha)} \cap \Gamma_c^{(\alpha)} = \Gamma_D^{(\alpha)} \cap \Gamma_c^{(\alpha)} = \emptyset. \quad (2.34)$$

Für die Ränder γ der Momentankonfiguration im Zeitintervall t_0 bis t_E gelten dieselben Zusammenhänge.

Die materiellen Körper dürfen sich während ihrer Bewegung nicht unphysikalisch durchdringen. Zur korrekten Beschreibung der Bewegung wird als kinematisches Maß der minimale Abstand zwischen den beiden Körpern in Richtung der Normalen des Slave-Randes eingeführt. Für jeden Slave-Punkt $\mathbf{x}^{(1)}$ wird derjenige Punkt $\bar{\mathbf{x}}^{(2)}$ des Master-Randes $\gamma_c^{(2)}$ gesucht, der in Richtung der Slave-Randnormalen $\mathbf{n}_c = \mathbf{n}_c(\mathbf{x}^{(1)})$ den geringsten Abstand hat. Die Projektion zur Bestimmung des gesuchten Punktes $\bar{\mathbf{x}}^{(2)}$ wird in der vorliegenden Arbeit wie folgt notiert:

$$P: \gamma_c^{(1)} \rightarrow \gamma_c^{(2)}, \mathbf{x}^{(1)} \rightarrow \bar{\mathbf{x}}^{(2)}. \quad (2.35)$$

Der in Abbildung 2.2 für einen Punkt veranschaulichte Abstand g_n zwischen den Körpern kann mithilfe der Gleichung

$$g_n(\mathbf{x}^{(1)}) = -\mathbf{n}_c(\mathbf{x}^{(1)}) \cdot (\mathbf{x}^{(1)} - \bar{\mathbf{x}}^{(2)}(\mathbf{x}^{(1)})) \quad (2.36)$$

bestimmt werden.

Gleichung (2.36) beschreibt die relative Bewegung der beiden Körper in Normalenrichtung. Zur Berücksichtigung von Reibungseffekten muss zusätzlich die relative Geschwindigkeit der beiden Körper entlang ihrer Kontaktränder beschrieben werden. Es gibt unterschiedliche Ansätze zur Bestimmung der Relativgeschwindigkeit. Diese werden z. B. in GITTERLE (2012) anschaulich erläutert. In der vorliegenden Arbeit wird eine Definition verwendet, die häufig zum Einsatz kommt, wenn eine Mortar-Kontaktdiskretisierung verwendet wird. Die Relativgeschwindigkeit $\mathbf{v}_{\tau, \text{rel}}$ berechnet sich bei diesem Ansatz aus der Projektion der materiellen Geschwindigkeiten der Punkte $\mathbf{x}^{(1)}$ und $\bar{\mathbf{x}}^{(2)}$ auf die Tan-

gentialebene in Punkt $\mathbf{x}^{(1)}$. Daher gilt:

$$\mathbf{v}_{\tau,\text{rel}}(\mathbf{X}^{(1)},t) = \boldsymbol{\tau}^T(\mathbf{X}^{(1)},t) \left(\dot{\mathbf{x}}^{(1)}(\mathbf{X}^{(1)},t) - \dot{\bar{\mathbf{x}}}^{(2)}(\bar{\mathbf{X}}^{(2)}(\mathbf{X}^{(1)},t),t) \right). \quad (2.37)$$

Die Tangentialebene wird über die in Abbildung 2.2 dargestellten Tangenten $\boldsymbol{\tau}^\xi$ und $\boldsymbol{\tau}^\eta$ bestimmt. Die beiden Tangenten bilden zusammen mit der nach außen gerichteten Normalen \mathbf{n}_c ein orthonormales Basissystem im dreidimensionalen Raum. Da dieses vom aktuellen Punkt $\mathbf{x}^{(1)}$ des Slave-Randes abhängt, hängt die Relativgeschwindigkeit implizit von den materiellen Koordinaten $\mathbf{X}^{(1)}$ ab. In Gleichung (2.37) sind die Tangenten $\boldsymbol{\tau}^\xi$ sowie $\boldsymbol{\tau}^\eta$ in

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\tau}^\xi & \boldsymbol{\tau}^\eta \end{pmatrix} \quad (2.38)$$

zusammengefasst. Die Beschreibung der Tangentialebene durch die Tangenten $\boldsymbol{\tau}^\xi$ und $\boldsymbol{\tau}^\eta$ ist nicht eindeutig. Es lassen sich beliebig viele Tangenten bestimmen, die zueinander rechtwinklig sind und senkrecht auf der Normalen stehen. Sie unterscheiden sich lediglich durch eine Rotation um die Normale. Der algorithmische Umgang mit dieser Mehrdeutigkeit wird in Unterabschnitt 3.4.1 erläutert.

Abschließend sei angemerkt, dass die Bestimmung des Projektionspunktes $\bar{\mathbf{x}}^{(2)}$ mit Gleichung (2.35) und die Verwendung der in Gleichung (2.37) definierten Relativgeschwindigkeit gewissen Annahmen unterliegen. Diese Annahmen und daraus eventuell resultierende Fehlerquellen sind z. B. in LAURSEN (2003) und WRIGGERS (2006) näher erläutert. In der vorliegenden Arbeit wird die Gültigkeit der Gleichungen durch die in Abschnitt 3.4 gewählte Kontaktdiskretisierung sichergestellt bzw. annähernd sichergestellt.

2.2.2 Zerlegung der Kontaktspannung

Bevor die Kontaktbedingungen aufgestellt werden können, muss zunächst die Kontaktspannung eingeführt werden. Ähnlich wie für die kinematischen Kontaktgrößen, erfolgt außerdem eine Zerlegung der eingeführten Kontaktspannung in einen normalen und einen tangentialen Anteil.

Die Kontaktspannung \mathbf{t}_c tritt immer auf, wenn sich zwei Körper berühren. Sie ist auf dem Kontaktrand definiert und ist nur in der Kontaktzone ungleich null. Als Kontaktzone wird der Bereich des Kontaktrandes bezeichnet, der tatsächlich in Kontakt mit einem anderen Kontaktrand steht. Die Kontaktspannung \mathbf{t}_c wird in dieser Arbeit in Form einer Cauchy-Spannung über das Fundamentaltheorem von Cauchy angegeben:

$$\mathbf{t}_c^{(\alpha)} = \boldsymbol{\sigma}^{(\alpha)} \mathbf{n}_c^{(\alpha)}. \quad (2.39)$$

Für Kontinua sind in der Kontaktzone die Normalen $\mathbf{n}_c^{(\alpha)}$ beider Kontaktträger gleich, das heißt $\mathbf{n}_c^{(1)} = \mathbf{n}_c^{(2)}$. Mithilfe der Impulsbilanz über den masselosen Kontaktrand lässt sich außerdem feststellen, dass

$$\mathbf{t}_c^{(1)} + \mathbf{t}_c^{(2)} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{t}_c^{(1)} = -\mathbf{t}_c^{(2)}. \quad (2.40)$$

Im weiteren Verlauf werden viele Größen nur in Abhängigkeit der Kontaktspannung $\mathbf{t}_c^{(1)}$ des Slave-Randes angegeben, da sich die Kontaktspannungen der beiden Ränder entsprechen.

Hinsichtlich der Formulierung der Kontaktbedingungen in Normalen- und Tangentialrichtung wird die Kontaktspannung ebenfalls in die Anteile dieser Richtungen zerlegt, sodass mit den Anteilen

$$t_{c,n} = \mathbf{t}_c^{(1)} \cdot \mathbf{n}_c, \quad t_{c,\tau}^\xi = \mathbf{t}_c^{(1)} \cdot \boldsymbol{\tau}^\xi, \quad t_{c,\tau}^\eta = \mathbf{t}_c^{(1)} \cdot \boldsymbol{\tau}^\eta \quad (2.41)$$

Folgendes gilt:

$$\mathbf{t}_c^{(1)} = t_{c,n} \mathbf{n}_c + t_{c,\tau}^\xi \boldsymbol{\tau}^\xi + t_{c,\tau}^\eta \boldsymbol{\tau}^\eta, \quad (2.42)$$

$$\mathbf{t}_{c,\tau} = t_{c,\tau}^\xi \boldsymbol{\tau}^\xi + t_{c,\tau}^\eta \boldsymbol{\tau}^\eta. \quad (2.43)$$

2.2.3 Kontaktbedingungen des unilateralen Kontakts

An dieser Stelle werden die komplizierten physikalischen Gesetzmäßigkeiten des Kontakts vereinfacht und in mathematische Gleichungen und Ungleichungen überführt. Diese stellen die Kontaktbedingungen dar und haben im Wesentlichen folgende Aussagen:

- Die betrachteten Körper dürfen sich nicht durchdringen.
- Zwischen sich berührenden Körpern gibt es Kontaktspannungen, dabei handelt es sich immer um Druckspannungen.
- Die Kontaktspannungen in Tangentialrichtung werden durch Reibungsgesetze begrenzt.

Durch die oben angeführte Zerlegung der Relativbewegung und der Kontaktspannung in die Normalen- und Tangentialrichtung, kann der Kontakt in jede Richtung separat untersucht werden. Es folgt daher eine getrennte Aufstellung der Kontaktbedingungen in Normalen- und Tangentialrichtung.

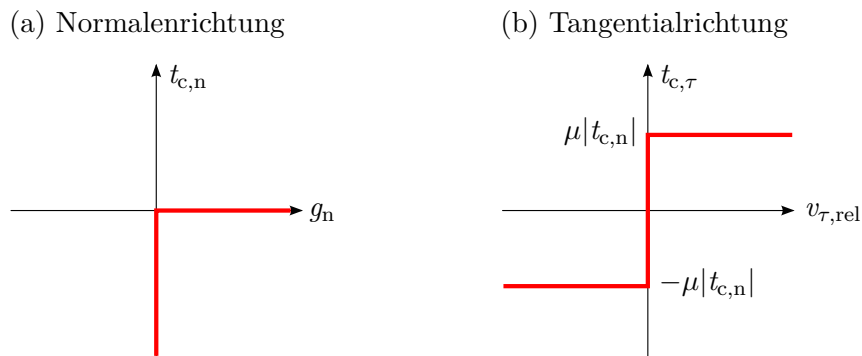


Abbildung 2.3: Kontaktbedingungen für unilaterale Kontaktprobleme in Normalen- und Tangentialrichtung im zweidimensionalen Fall.

Kontaktbedingungen der Normalenrichtung

Die Kontaktbedingungen der Normalenrichtung befassen sich hauptsächlich mit den beiden ersten Punkten der obigen Aufzählung. Der in Gleichung (2.36) definierte Abstand darf demzufolge nicht negativ werden und die Kontaktspannungen in Normalenrichtung dürfen nie einen Wert größer null annehmen. Darüber hinaus ist die Kontaktspannung null, wenn die Körper sich nicht berühren. Umgekehrt existiert dann eine Kontaktdruckspannung, wenn die Körper sich berühren. Eine der betrachteten Größen – Abstand oder Kontaktspannung – ist demzufolge immer null. Die Zusammenhänge können kompakt in Form der Hertz-Signorini-Moreau-Kontaktbedingungen

$$g_n \geq 0, \quad t_{c,n} \leq 0, \quad g_n t_{c,n} = 0 \quad (2.44)$$

dargestellt werden. Eine Veranschaulichung dieser Bedingungen ist in Abbildung 2.3 (a) gegeben. Diese Bedingungen werden häufig Karush-Kuhn-Tucker-Bedingungen genannt, da in der nichtlinearen Optimierung der gleiche Typ von Gleichungen diese Bezeichnung trägt. Auch dort dienen die Bedingungen dem Einbringen von Randbedingungen, das heißt der Einschränkung des zulässigen Bereichs der zu optimierenden Funktion.

In der vorliegenden Arbeit werden geometrisch perfekte Kontaktränder angenommen. Mikroskopische Unebenheiten sollen nicht berücksichtigt werden und die Nichtdurchdringungsbedingung $g_n \geq 0$ soll exakt gelten. Für die Approximation rauer Kontaktränder werden häufig konstitutive Normalkraftgesetze verwendet, die eine geringe Durchdringung der Körper erlauben, sodass der Abstand g_n auch kleiner als null sein kann. Dies ermöglicht es, die Rauigkeit näherungsweise abzubilden, ohne die wirkliche Struktur des Randes mathematisch beschreiben zu müssen. Entsprechende Modelle sind z. B. in WILLNER (2003) und WRIGGERS (2006) angegeben.

Kontaktbedingungen der Tangentialrichtung

Zur Beschreibung von Reibungseffekten werden die Kontaktbedingungen der Tangentialrichtung formuliert. Wie oben erwähnt, wird auf die Berücksichtigung mikroskopischer Unebenheiten verzichtet. Stattdessen wird das physikalische Reibungsverhalten durch geeignete Modelle approximiert. Unter anderem in den Arbeiten von WRIGGERS (2006) und BELYTSCHKO U. A. (2014) werden unterschiedliche Ansätze zur Beschreibung der Reibung und deren Modelle aufgeführt. In dieser Arbeit werden ausschließlich das stark vereinfachende Reibungsgesetz von Coulomb und der Sonderfall des reibungsfreien Kontakts behandelt. Die folgenden Aussagen gelten nur für die Kontaktränder, die mit einem anderen Kontaktrand in Kontakt stehen und deswegen $g_n = 0$ ist.

Für den einfachen Fall des reibungsfreien Kontakts reduzieren sich die Kontaktbedingungen der Tangentialrichtung auf die Forderung, dass die tangentiale Kontaktspannung $\mathbf{t}_{c,\tau}$ verschwindet. Die Kontaktspannung besteht damit nur aus dem Anteil der Normalenrichtung, $\mathbf{t}_c = t_{c,n}\mathbf{n}_c$.

Im Fall des reibungsbehafteten Kontakts werden zwei Zustände unterschieden, das Haften und das Gleiten. Während des Haftens ist der Betrag der Tangentialspannung kleiner als die maximal mögliche Tangentialspannung, die dem Produkt aus dem Reibungskoeffizienten μ und der Normalspannung $t_{c,n}$ entspricht. In diesem Zustand gibt es keine Relativbewegung der Körper in Tangentialrichtung. Ist die maximal mögliche Tangentialspannung erreicht, bewegen sich die Körper relativ zueinander in Tangentialrichtung. Die Bewegungsrichtung entspricht dabei der negativen Richtung der Tangentialspannung.

Abbildung 2.3 (b) veranschaulicht die Bedingungen des Reibungsgesetzes von Coulomb für zweidimensionale Probleme. Die tangentiale Kontaktspannung $t_{c,\tau}$ und die relative Tangentialgeschwindigkeit $v_{\tau,\text{rel}}$ sind dabei die einzigen Komponenten der im dreidimensionalen Fall vektoriellen Größen aus den Gleichungen (2.43) und (2.37).

Zur mathematischen Darstellung dieser Zusammenhänge wird in dieser Arbeit nicht exakt das klassische Reibungsgesetz von Coulomb verwendet, sondern eine leicht veränderte Variante. Bei dieser Variante wird das Reibungsgesetz in ratenabhängiger Form angegeben und ist dadurch pfadabhängig. Das konstitutive Gesetz in Tangentialrichtung kann in Form von Karush-Kuhn-Tucker-Bedingungen angegeben werden:

$$\begin{aligned}
 \psi &= \|\mathbf{t}_{c,\tau}\| - \mu|t_{c,n}| \leq 0, \\
 \mathbf{v}_{\tau,\text{rel}} + \dot{\gamma}\mathbf{t}_{c,\tau} &= \mathbf{0}, \\
 \dot{\gamma} &\geq 0, \\
 \psi\dot{\gamma} &= 0.
 \end{aligned} \tag{2.45}$$

Hierin ist ψ die Gleitfunktion. Ist diese null, tritt Gleiten auf. Gleichung (2.45)₄ ermöglicht in diesem Fall für $\psi = 0$, dass $\dot{\gamma}$ größer null sein kann. Folglich ist mit Gleichung (2.45)₂ die relative Tangentialgeschwindigkeit $\mathbf{v}_{\tau,\text{rel}}$ im Gleitfall ungleich null und wirkt in entgegengesetzter Richtung zur Tangentialspannung $\mathbf{t}_{c,\tau}$. Ist die Gleitfunktion kleiner null, resultiert $\dot{\gamma} = 0$ aus Gleichung (2.45)₄ und letztendlich $\mathbf{v}_{\tau,\text{rel}} = \mathbf{0}$ aus Gleichung (2.45)₂. Der Fall $\psi \leq 0$ beschreibt also das Haften der Kontaktträger, bei dem keine relative Bewegung erlaubt ist.

2.2.4 Kontaktbedingungen des bilateralen Kontakts

Wie zu Beginn des Abschnitts 2.2 erwähnt, wird in Kapitel 6 auch bilateraler Kontakt behandelt. Dieser Kontakttyp stellt eine Vereinfachung des unilateralen Kontakts dar und unterscheidet sich im Wesentlichen durch die Kontaktbedingungen. Diese werden im Folgenden kurz dargestellt.

Bilateraler Kontakt beschreibt die Interaktion von zwei Körpern, die über ihren Kontakttrand sowohl Druck- als auch Zugspannungen austauschen. Des Weiteren findet auf dem Kontakttrand zu keinem Zeitpunkt eine relative Verschiebung der materiellen Punkte zueinander statt. Zur Veranschaulichung kann als Gedankenmodell ein Kontinuum dienen, das durchgeschnitten wird. Die beiden Teile müssen sich aber so verhalten, als wenn der Schnitt nie durchgeführt worden wäre. Mit den bilateralen Kontaktbedingungen wird dieses Verhalten abgebildet.

Im Gegensatz zu den Kontaktbedingungen des unilateralen Kontakts lassen sich die Kontaktbedingungen des bilateralen Kontakts einfacher formulieren. Eine Aufteilung der Kontaktbedingungen in Normalen- und Tangentialrichtung ist nicht nötig, da keine Relativverschiebungen auf dem Kontakttrand zugelassen werden. Dadurch gilt, dass die Projektion (2.35) für jeden materiellen Punkt $\mathbf{x}^{(1)}(\mathbf{X}^{(1)}, t)$ jederzeit auf denselben materiellen Punkt $\bar{\mathbf{x}}^{(2)}(\mathbf{X}^{(2)}, t)$ des Kontakttrandes $\gamma_c^{(2)}$ weist. Da sich die beiden Teile des Kontinuums weder separieren noch überlappen dürfen, muss die Differenz beider Ortsvektoren immer null sein:

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}^{(1)}) = \mathbf{x}^{(1)} - \bar{\mathbf{x}}^{(2)}(\mathbf{x}^{(1)}) = \mathbf{0}. \quad (2.46)$$

Dieser Kontakttyp ist mathematisch wesentlich einfacher zu behandeln, da bilaterale Kontaktprobleme nicht zu Ungleichungen führen.

Die Notwendigkeit von bilateralem Kontakt wird meist erst im diskretisierten Modell offensichtlich. Mithilfe des bilateralen Kontakts ist es möglich, Probleme zu behandeln, die entlang des Kontakttrandes nicht konform diskretisiert sind. Im Falle einer Finite-Elemente-Diskretisierung können deshalb beide Teile des Kontinuums separat vernetzt

werden, ohne auf eine konforme Vernetzung am Kontaktrand achten zu müssen. Dieser Anwendungsbereich wird dem Gebiet der Netzkopplung zugewiesen, weshalb dieser Begriff in der vorliegenden Arbeit synonym zu bilateralem Kontakt verwendet wird.

2.3 Strategie zum Einbringen der Kontaktbedingungen

Im Folgenden wird eine Strategie zum Einbringen der Kontaktbedingungen in das elastostatische Randwertproblem aus Unterabschnitt 2.1.4 vorgestellt. Die Kontaktbedingungen aus den Gleichungen (2.44) und (2.45) bzw. (2.46) schränken die Verschiebung \mathbf{u} ein. Mathematisch gesehen handelt es sich dabei um Nebenbedingungen, für deren Berücksichtigung unterschiedliche Methoden aus dem Gebiet der Optimierung existieren.

In dieser Arbeit kommt ausschließlich die Lagrange-Multiplikator-Methode zum Einsatz, die für allgemeine Nebenbedingungen z. B. in BELYTSCHKO U. A. (2014) und STRANG (1986) beschrieben ist. Angewendet auf Kontaktprobleme sei auf die Kontaktliteratur von WRIGGERS (2006) und LAURSEN (2003) verwiesen. In den beiden zuletzt genannten Quellen werden zusätzlich weitere Methoden zum Einbringen der Kontaktbedingungen beschrieben, unter anderen die Penalty-Methode, die Augmented-Lagrange-Methode, die Perturbed-Lagrange-Methode und die Nitsche-Methode.

Charakteristisch für die Lagrange-Multiplikator-Methode ist das Einbringen eines zusätzlichen Feldes von Unbekannten, dem sogenannten Lagrange-Multiplikator bzw. Lagrange-Multiplikator-Feld $\boldsymbol{\lambda}$. Über dieses werden die Nebenbedingungen in das Gleichungssystem eingebracht. Am anschaulichsten lässt sich die Lagrange-Multiplikator-Methode für statische Kontaktprobleme mit einem elastischen Potenzial erklären, siehe z. B. LAURSEN (2003). Aus dieser Anschauung ergibt sich, dass der Lagrange-Multiplikator der negativen Kontaktspannung entspricht:

$$\boldsymbol{\lambda} = -\mathbf{t}_c^{(1)}. \quad (2.47)$$

An dieser Stelle wird auf die Darstellung des Gleichungssystems verzichtet, da dieses im folgenden Abschnitt 2.4 für den allgemeineren Fall des reibungsbehafteten Kontakts über die Methode der gewichteten Residuen hergeleitet wird.

Die exakte Erfüllung der Kontaktbedingungen ist eine weitere wichtige Eigenschaft der Lagrange-Multiplikator-Methode. Für die Kontaktbedingungen in Normalenrichtung bedeutet dies z. B., dass die Nichtdurchdringungsbedingung $g_n \geq 0$ exakt eingehalten wird. Dies ist als entscheidender Vorteil zu einigen anderen Strategien zum Einbringen von Kontaktbedingungen zu sehen, die unphysikalische Durchdringungen zulassen.

Die nachteilige Eigenschaft der zusätzlichen Unbekannten ist häufig ein Argument gegen die Lagrange-Multiplikator-Methode. Motiviert durch die Arbeit von WOHLMUTH (2000) wird in dieser Arbeit allerdings ein sogenanntes duales Lagrange-Multiplikator-Feld verwendet. Aufgrund dieser Wahl des Lagrange-Multiplikator-Feldes kann das zusätzliche Feld von Unbekannten ohne hohen numerischen Aufwand aus dem Gleichungssystem herauskondensiert werden und die ursprüngliche Größe des Gleichungssystems bleibt erhalten. Details zum dualen Feld und der Kondensation werden in Unterabschnitt 3.4.2 und Abschnitt 4.4 gegeben.

Abschließend sei erwähnt, dass die Kontaktbedingungen des unilateralen Kontakts Ungleichungen sind. Die Behandlung dieses Typs von Nebenbedingungen ist mathematisch schwierig und erfolgt nicht allein mit der Lagrange-Multiplikator-Methode. In dieser Arbeit wird zusätzlich die in Abschnitt 4.2 beschriebene Aktive-Mengen-Strategie verwendet. Diese unterteilt den Kontaktrand $\Gamma_c^{(\alpha)}$, $\gamma_c^{(\alpha)}$ in inaktive Kontaktrandbereiche ($g_n > 0$) und aktive Kontaktrandbereiche ($g_n = 0$). Sich berührende Kontaktrandbereiche, das heißt die Kontaktzone, sind aktive Kontaktrandbereiche und die verbleibenden Bereiche des Kontakts zählen entsprechend zu den inaktiven Bereichen.

2.4 Schwache Form

In diesem Abschnitt wird die schwache Form des elastostatischen Randwertproblems hergeleitet. Die schwache Form stellt die Basis der in dieser Arbeit gewählten Diskretisierungsmethode, der FEM, dar. Ausgangspunkt ist die starke Form des Randwertproblems, die die Gleichgewichtsbedingung an jedem materiellen Punkt der Gebiete $\Omega^{(\alpha)}$ erfüllt. Die starke Form lässt sich mit den Gleichungen (2.30), (2.32) und (2.39) zusammenfassen:

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Div} \mathbf{P}^{(\alpha)} + \rho_0^{(\alpha)} \mathbf{b}^{(\alpha)} &= \mathbf{0} && \text{in } \Omega_0^{(\alpha)} \times [t_0, t_E], \\
 \mathbf{u}^{(\alpha)} &= \hat{\mathbf{u}}^{(\alpha)} && \text{auf } \Gamma_D^{(\alpha)} \times [t_0, t_E], \\
 \mathbf{P}^{(\alpha)} \mathbf{N}^{(\alpha)} &= \hat{\mathbf{T}}^{(\alpha)} && \text{auf } \Gamma_N^{(\alpha)} \times [t_0, t_E], \\
 \mathbf{P}^{(\alpha)} \mathbf{N}^{(\alpha)} &= \mathbf{T}_c^{(\alpha)} && \text{auf } \Gamma_c^{(\alpha)} \times [t_0, t_E].
 \end{aligned} \tag{2.48}$$

Gleichung (2.39) wird dabei analog zu Gleichung (2.9) in der Referenzkonfiguration ausgedrückt. Dadurch ergibt sich für den Kontaktrand die Randbedingung aus Gleichung (2.48)₄.

Die Herleitung der schwachen Form kann über unterschiedliche Wege erfolgen. Einer ist die Entwicklung aus einem Potenzial mit dem Prinzip vom Minimum der potentiellen Energie. Diese Herangehensweise wird hier nicht verfolgt, da auch der reibungsbehaftete

Fall berücksichtigt wird und dieser kein Potenzial besitzt. Stattdessen wird an dieser Stelle die Methode der gewichteten Residuen verwendet. Bei dieser Methode werden die Gleichungen (2.48)_{1,3,4} als Residuen \mathbf{R} der Form $\mathbf{R} = \mathbf{0}$ formuliert, mit einer Testfunktion $\delta \mathbf{u}$ multipliziert und über das Gebiet integriert. An der Aussage der Gleichungen ändert sich dadurch nichts. Wird $\delta \mathbf{u}$ zusätzlich als virtuelles Verschiebungsfeld identifiziert, ergibt sich über die Methode der gewichteten Residuen das Prinzip der virtuellen Verschiebungen (PvV). An das Verschiebungsfeld \mathbf{u} und das virtuelle Verschiebungsfeld $\delta \mathbf{u}$ werden zunächst nur zwei Bedingungen gestellt, die später durch weitere Einschränkungen ergänzt werden. Erstens müssen beide Felder so kontinuierlich sein, dass alle Ableitungen in den Gleichungen (2.48) definiert sind. Zweitens muss \mathbf{u} die Randbedingungen (2.48)₂ erfüllen und $\delta \mathbf{u}$ muss auf dem Dirichlet-Rand null sein.

Für die Herleitung der schwachen Form aus dem PvV wird in Unterabschnitt 2.4.1 zunächst der Beitrag der Kontinuumsmechanik angegeben. Anschließend erfolgt in Unterabschnitt 2.4.2 die Darstellung des Beitrags der Kontaktmechanik. Danach folgen in den Abschnitten 2.4.3 und 2.4.4 die schwache Form der Kontaktbedingungen und eine Gesamtdarstellung der schwachen Form des Kontaktproblems.

2.4.1 Beitrag der Kontinuumsmechanik

Der Beitrag der Kontinuumsmechanik zur schwachen Form kann für jeden materiellen Körper $\Omega^{(\alpha)}$ unabhängig aufgeschrieben werden. Zur übersichtlicheren Darstellung wird deshalb in diesem Unterabschnitt auf den Kopfzeiger $(\bullet)^{(\alpha)}$ verzichtet. Ausgangspunkt zur Herleitung der schwachen Form stellen die Gleichungen (2.48)₁ und (2.48)₃ dar. Wie oben beschrieben, werden diese unter Anwendung der Methode der gewichteten Residuen umformuliert und lauten:

$$\int_{\Omega_0} (\text{Div } \mathbf{P} + \rho_0 \mathbf{b}) \cdot \delta \mathbf{u} \, dV + \int_{\Gamma_N} (\hat{\mathbf{T}} - \mathbf{P}\mathbf{N}) \cdot \delta \mathbf{u} \, dA = 0. \quad (2.49)$$

Der darin enthaltene Ausdruck $\text{Div } \mathbf{P} \cdot \delta \mathbf{u}$ kann mit der Produktregel

$$\text{Div } \mathbf{P} \cdot \delta \mathbf{u} = \text{Div}(\mathbf{P}^T \delta \mathbf{u}) - \mathbf{P} \cdot \text{Grad } \delta \mathbf{u} \quad (2.50)$$

umformuliert werden. Der Ausdruck $\mathbf{P} \cdot \text{Grad } \delta \mathbf{u}$ in Gleichung (2.50) beschreibt das Skalarprodukt zweier Tensoren, dessen Ergebnis ein Skalar ist. In der Literatur wird das Skalarprodukt zweier Tensoren häufig auch zweifache Verjüngung oder inneres Produkt genannt und in der Form $\mathbf{P} : \text{Grad } \delta \mathbf{u}$ angegeben.

Einsetzen von Gleichung (2.50) in Gleichung (2.49) führt auf ein Volumenintegral des ersten Terms auf der rechten Seite von Gleichung (2.50). Dieses kann mittels der mehr-

dimensionalen partiellen Integration als das Randintegral angegeben werden:

$$\int_{\Omega_0} \text{Div}(\mathbf{P}^T \delta \mathbf{u}) \, dV = \int_{\Gamma} \mathbf{P}^T \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{N} \, dA = \int_{\Gamma} \mathbf{P} \mathbf{N} \cdot \delta \mathbf{u} \, dA = \int_{\Gamma_N} \mathbf{P} \mathbf{N} \cdot \delta \mathbf{u} \, dA. \quad (2.51)$$

Die letzte Gleichheitsbedingung in Gleichung (2.51) folgt aus der Tatsache, dass $\delta \mathbf{u}$ auf dem Dirichlet-Rand Γ_D null ist.

Werden die Gleichungen (2.50) und (2.51) in Gleichung (2.49) eingesetzt und mit -1 multipliziert, ergibt sich das PvV:

$$\delta W_{\text{PvV}}^F = \int_{\Omega_0} \mathbf{P} \cdot \text{Grad} \delta \mathbf{u} \, dV - \int_{\Omega_0} \rho_0 \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u} \, dV - \int_{\Gamma_N} \hat{\mathbf{T}} \cdot \delta \mathbf{u} \, dA = 0. \quad (2.52)$$

Gleichung (2.52) lässt sich auch über den symmetrischen zweiten Piola-Kirchhoff-Spannungstensor \mathbf{S} und seinen energetisch konjugierten Green-Lagrange'schen Verzerrungstensor \mathbf{E} darstellen. Aus den Gleichungen (2.11) und Gleichung (2.5) folgen die Zusammenhänge $\mathbf{P} = \mathbf{F} \mathbf{S}$ und $\text{Grad} \delta \mathbf{u} = \delta \mathbf{F}$. Mit diesen lässt sich die Variation des Green-Lagrange'schen Verzerrungstensors bestimmen:

$$\delta \mathbf{E} = \frac{1}{2} \left[(\mathbf{F}^T \text{Grad} \delta \mathbf{u})^T + (\mathbf{F}^T \text{Grad} \delta \mathbf{u}) \right] = \text{sym} (\mathbf{F}^T \text{Grad} \delta \mathbf{u}). \quad (2.53)$$

Durch Ausnutzung der Symmetrie der Variation des Green-Lagrange'schen Verzerrungstensors ergibt sich durch weitere Umformungen $\mathbf{P} \cdot \text{Grad} \delta \mathbf{u} = \mathbf{S} \cdot \delta \mathbf{E}$ und damit die endgültige Form des PvV:

$$\delta W_{\text{PvV}}^F = \underbrace{\int_{\Omega_0} \mathbf{S} \cdot \delta \mathbf{E} \, dV}_{\delta W_{\text{PvV}}^{\text{int}}} - \underbrace{\int_{\Omega_0} \rho_0 \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u} \, dV - \int_{\Gamma_N} \hat{\mathbf{T}} \cdot \delta \mathbf{u} \, dA}_{-\delta W_{\text{PvV}}^{\text{ext}}} = 0. \quad (2.54)$$

Der Anteil $\delta W_{\text{PvV}}^{\text{int}}$ beschreibt hierin die virtuelle innere Arbeit und $\delta W_{\text{PvV}}^{\text{ext}}$ die virtuelle äußere Arbeit.

Ohne die Felder \mathbf{u} und $\delta \mathbf{u}$ weiter einzuschränken, entspricht die schwache Form aus Gleichung (2.54) der starken Form der Kontinuumsmechanik. Durch das Verschieben der Ableitungen vom ersten Piola-Kirchhoff-Spannungstensor \mathbf{P} auf das virtuelle Verschiebungsfeld $\delta \mathbf{u}$ mithilfe der partiellen Integration existieren nur noch erste Ableitungen von \mathbf{u} in der schwachen Form. Dieser Schritt ermöglicht den Einsatz von Feldern mit schwächeren Anforderungen an die Differenzierbarkeit und ist eine wichtige Voraussetzung für die Anwendbarkeit der FEM. Erst durch die Finite-Elemente-Diskretisierung wird die starke Form nur noch approximiert.

KIKUCHI UND ODEN (1988) können die Sobolev-Räume $\mathcal{W}^{k,p}$ entnommen werden, in denen die Felder \mathbf{u} und $\delta\mathbf{u}$ definiert sein müssen, damit die schwache Form aus Gleichung (2.54) gültig ist. Für Neo-Hooke-Materialien ergibt sich z. B. der Sobolev-Raum $\mathcal{W}^{1,6}$. Mit $k = 1$ wird ausgedrückt, dass alle Funktionen und deren erste partielle Ableitungen im Lebesgue-Raum \mathcal{L}^p liegen müssen. Dieser wiederum beschreibt die Funktionen, deren \mathcal{L}^p -Norm endlich ist. Mit den bereits gegebenen Einschränkungen an den Rändern können nun die zulässigen Räume \mathcal{V} und \mathcal{U} für $\delta\mathbf{u}$ und \mathbf{u} angegeben werden:

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{u} \in \mathcal{V} \quad \mathcal{V} &= \{\delta\mathbf{u}: \Omega_0 \rightarrow \mathbb{R}^3 \mid \delta\mathbf{u} \in \mathcal{W}^{1,6}(\Omega_0), \delta\mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ auf } \Gamma_D\}, \\ \mathbf{u} \in \mathcal{U} \quad \mathcal{U} &= \{\mathbf{u}: \Omega_0 \rightarrow \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{u} \in \mathcal{W}^{1,6}(\Omega_0), \mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}} \text{ auf } \Gamma_D\}. \end{aligned} \quad (2.55)$$

2.4.2 Beitrag der Kontaktmechanik

Die gesamte virtuelle Arbeit δW_{P_vV} berechnet sich aus der Summe der virtuellen Arbeit der Festkörper $\delta W_{P_vV}^F$ und der Kontaktarbeit $\delta W_{P_vV}^c$:

$$\delta W_{P_vV} = \delta W_{P_vV}^F + \delta W_{P_vV}^c \quad (2.56)$$

Für die Herleitung von $\delta W_{P_vV}^c$ wird Gleichung (2.48)₄ als Residuum formuliert, mit der Testfunktion $\delta\mathbf{u}$ multipliziert und über den Kontaktrand integriert. Für jeden Kontaktrand $\Gamma_c^{(\alpha)}$ gilt:

$$\int_{\Gamma_c^{(\alpha)}} \left(\mathbf{T}_c^{(\alpha)} - \mathbf{P}^{(\alpha)} \mathbf{N}^{(\alpha)} \right) \cdot \delta\mathbf{u}^{(\alpha)} dA = 0. \quad (2.57)$$

Für Kontaktprobleme muss die mehrdimensionale partielle Integration (2.51) um das Integral über den Kontaktrand erweitert werden, da $\delta\mathbf{u}$ auf dem Kontaktrand nicht verschwindet. Für Kontaktprobleme gilt statt Gleichung (2.51) demnach:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_0^{(\alpha)}} \text{Div}(\mathbf{P}^{(\alpha)\text{T}} \delta\mathbf{u}^{(\alpha)}) dV &= \int_{\Gamma^{(\alpha)}} \mathbf{P}^{(\alpha)} \mathbf{N}^{(\alpha)} \cdot \delta\mathbf{u}^{(\alpha)} dA = \int_{\Gamma_N^{(\alpha)}} \mathbf{P}^{(\alpha)} \mathbf{N}^{(\alpha)} \cdot \delta\mathbf{u}^{(\alpha)} dA \\ &+ \int_{\Gamma_c^{(\alpha)}} \mathbf{P}^{(\alpha)} \mathbf{N}^{(\alpha)} \cdot \delta\mathbf{u}^{(\alpha)} dA. \end{aligned} \quad (2.58)$$

Mit den Gleichungen (2.57) und (2.58) verschwindet folglich das Integral $\int_{\Gamma_c^{(\alpha)}} \mathbf{P}^{(\alpha)} \mathbf{N}^{(\alpha)} \cdot \delta\mathbf{u}^{(\alpha)} dA$ in der gesamten virtuellen Arbeit aus Gleichung (2.56). Der verbleibende Anteil von Gleichung (2.57) wird mit -1 multipliziert und in der Momentankonfiguration

dargestellt². Diese Umformungen führen auf die virtuelle Kontaktarbeit in der Form

$$\delta W_{PvV}^c = - \sum_{\alpha=1}^2 \int_{\gamma_c^{(\alpha)}} \mathbf{t}_c^{(\alpha)} \cdot \delta \mathbf{u}^{(\alpha)} da. \quad (2.59)$$

In vorheriger Gleichung wird die Summe über beide in Kontakt stehenden Körper gebildet. Mit Gleichung (2.40)₂ kann Gleichung (2.59) als Integral ausschließlich über den Slave-Rand dargestellt werden. Folglich ist die Summe nicht mehr explizit sichtbar:

$$\delta W_{PvV}^c = - \int_{\gamma_c^{(1)}} \mathbf{t}_c^{(1)} \cdot \left(\delta \mathbf{u}^{(1)} - \left(\delta \mathbf{u}^{(2)} \circ P \right) \right) da. \quad (2.60)$$

Der Term $\delta \mathbf{u}^{(2)} \circ P$ drückt an dieser Stelle aus, dass das virtuelle Verschiebungsfeld des Kontaktrandes $\gamma_c^{(2)}$ mithilfe der Projektion aus Gleichung (2.35) bestimmt wird.

In dieser Arbeit werden die Kontaktbedingungen mit der Lagrange-Multiplikator-Methode eingebracht. Mit Gleichung (2.47) gilt der Zusammenhang $\mathbf{t}_c^{(1)} = -\boldsymbol{\lambda}$. Für die endgültige virtuelle Kontaktarbeit ergibt sich folglich:

$$\delta W_{PvV}^c = \int_{\gamma_c^{(1)}} \boldsymbol{\lambda} \cdot \left(\delta \mathbf{u}^{(1)} - \left(\delta \mathbf{u}^{(2)} \circ P \right) \right) da. \quad (2.61)$$

Um den zulässigen Raum \mathcal{M} des Lagrange-Multiplikators angeben zu können, wird zunächst der Spurraum $\mathcal{Q} = \mathcal{W}^{1/2,6/5}(\Gamma_c^{(1)})$ definiert. Der Lagrange-Multiplikator $\boldsymbol{\lambda}$ ist Teil des dualen Raumes \mathcal{Q}' , sodass sich nach HÜEBER (2008) mit der Definition der dualen Paarung $\langle \bullet, \bullet \rangle$ der Räume \mathcal{M} und \mathcal{U}

$$\langle \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\eta} \rangle = \int_{\gamma_c^{(1)}} \boldsymbol{\lambda} \boldsymbol{\eta} da \quad (2.62)$$

der zulässige Raum für $\boldsymbol{\lambda}$ zu

$$\mathcal{M} = \{ \delta \boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{M} : \langle \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\eta} \rangle \leq \langle \mu \lambda_n, \|\boldsymbol{\eta}_\tau\| \rangle_{\gamma_c^{(1)}}, \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{Q} \text{ mit } \eta_n \leq 0 \} \quad (2.63)$$

ergibt. Eine genauere Beschreibung des zulässigen Raumes \mathcal{M} von $\boldsymbol{\lambda}$ ist unter anderen in der genannten Arbeit von HÜEBER (2008) sowie in HAGER U. A. (2008) zu finden.

²Die Kontaktbedingungen müssen in der Momentankonfiguration formuliert werden, da zwei Punkte, die in der Referenzkonfiguration unterschiedliche Positionen einnehmen, in der Momentankonfiguration dieselben Position einnehmen können (WRIGGERS 2006).

2.4.3 Kontaktbedingungen

In dieser Arbeit wird zur Diskretisierung des Kontakts die Mortar-Methode verwendet. Deshalb werden die Kontaktbedingungen aus Unterabschnitt 2.2.3 ebenfalls in ihrer schwachen Form benötigt. Dazu ist es hilfreich, das Lagrange-Multiplikator-Feld in seine Anteile in Normalen- und Tangentialrichtung zu zerlegen. Die Zerlegung erfolgt ähnlich zur Zerlegung der Kontaktspannungen in den Gleichungen (2.41)–(2.43):

$$\boldsymbol{\lambda} = \lambda_n \mathbf{n}_c + \lambda_\tau^\xi \boldsymbol{\tau}^\xi + \lambda_\tau^\eta \boldsymbol{\tau}^\eta = \lambda_n \mathbf{n}_c + \boldsymbol{\lambda}_\tau. \quad (2.64)$$

Der Arbeit von HÜEBER (2008) folgend, werden die Kontaktbedingungen des unilateralen Kontakts als variationelle Ungleichungen formuliert:

$$g_n(\delta\lambda_n - \lambda_n) \geq 0, \quad (2.65)$$

$$\mathbf{v}_{\tau,\text{rel}} \cdot (\delta\boldsymbol{\lambda}_\tau - \boldsymbol{\lambda}_\tau) \leq 0. \quad (2.66)$$

Eine ausführliche Erklärung zur Äquivalenz zwischen den variationellen Ungleichungen (2.65) sowie (2.66) und den Kontaktbedingungen der Gleichungen (2.44) sowie (2.45) ist beispielsweise in HÜEBER (2008) oder GITTERLE (2012) zu finden. Die schwache Form der unilateralen Kontaktbedingungen ergibt sich aus der Integration der Ungleichungen (2.65) und (2.66):

$$\int_{\gamma_c^{(1)}} g_n(\delta\lambda_n - \lambda_n) da \geq 0, \quad (2.67)$$

$$\int_{\gamma_c^{(1)}} \mathbf{v}_{\tau,\text{rel}} \cdot (\delta\boldsymbol{\lambda}_\tau - \boldsymbol{\lambda}_\tau) da \leq 0. \quad (2.68)$$

In diesem Zusammenhang können $\delta\lambda_n$ und $\delta\boldsymbol{\lambda}_\tau$ als virtuelle Kontaktspannungen in Normalen- und Tangentialrichtung angesehen werden. Die Zerlegung von $\delta\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{M}$ in die Anteile $\delta\lambda_n$ und $\delta\boldsymbol{\lambda}_\tau$ erfolgt analog zu Gleichung (2.64).

2.4.4 Schwache Form des gesamten Kontaktproblems

Abschließend kann nun die vollständige schwache Form des Kontaktproblems aus den zuvor hergeleiteten Anteilen zusammengefasst werden. Es gilt, ein Verschiebungsfeld $\mathbf{u}^{(\alpha)}$ aus dem zulässigen Raum \mathcal{U} und ein Lagrange-Multiplikator-Feld aus dem zulässigen

Raum \mathcal{M} zu finden, sodass

$$\delta W_{\text{PvV}} = \sum_{\alpha=1}^2 \left(\underbrace{\int_{\Omega_0^{(\alpha)}} \mathbf{S}^{(\alpha)} \cdot \delta \mathbf{E}^{(\alpha)} \, dV}_{\delta W_{\text{PvV}}^{\text{int},(\alpha)}} - \underbrace{\int_{\Omega_0^{(\alpha)}} \rho_0^{(\alpha)} \mathbf{b}^{(\alpha)} \cdot \delta \mathbf{u}^{(\alpha)} \, dV - \int_{\Gamma_N^{(\alpha)}} \hat{\mathbf{T}}^{(\alpha)} \cdot \delta \mathbf{u}^{(\alpha)} \, dA}_{-\delta W_{\text{PvV}}^{\text{ext},(\alpha)}} \right) \quad (2.69)$$

$$+ \underbrace{\int_{\gamma_c^{(1)}} \boldsymbol{\lambda} \cdot (\delta \mathbf{u}^{(1)} - (\delta \mathbf{u}^{(2)} \circ P)) \, da}_{\delta W_{\text{PvV}}^c} = 0 \quad \forall \delta \mathbf{u}^{(\alpha)} \in \mathcal{V}^{(\alpha)},$$

$$\int_{\gamma_c^{(1)}} g_n (\delta \lambda_n - \lambda_n) \, da \geq 0 \quad \forall \delta \boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{M}, \quad (2.70)$$

$$\int_{\gamma_c^{(1)}} \mathbf{v}_{\tau, \text{rel}} \cdot (\delta \boldsymbol{\lambda}_\tau - \boldsymbol{\lambda}_\tau) \, da \leq 0 \quad \forall \delta \boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{M}. \quad (2.71)$$

Die virtuelle innere und äußere Arbeit in Gleichung (2.69) gelten für beide materiellen Körper, weshalb die Summe beider Anteile zu bilden ist. Die schwache Nichtdurchdringungsbedingung (2.70) und die schwache Reibungsbedingung (2.71) sind weiterhin als Ungleichung formuliert, da von einer unbekanntem Kontaktzone ausgegangen wird. Insgesamt stellen die Gleichungen (2.69)–(2.71) ein Sattelpunktproblem dar, das sich aufgrund der gewählten Lagrange-Multiplikator-Methode einstellt.

Für bilateralen Kontakt vereinfachen sich die Ungleichungen (2.70) und (2.71), da keine Relativbewegungen auf dem Kontaktrand zulässig sind. Die Kontaktbedingung lautet für diesen Fall:

$$\int_{\gamma_c^{(1)}} \delta \boldsymbol{\lambda} \cdot (\mathbf{u}^{(1)} - \mathbf{u}^{(2)}) \, da = 0, \quad \forall \delta \boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{M}. \quad (2.72)$$

Die angegebene schwache Form der uni- und bilateralen Kontaktprobleme stellt das mathematische Modell dar, dessen Lösung für die Untersuchung von Kontaktproblemen benötigt wird.

Finite-Elemente-Formulierung

Die Berechnung der analytischen Lösung der im vorherigen Kapitel hergeleiteten schwachen Form des Kontaktproblems ist nur für wenige Sonderfälle möglich. Auf dem Gebiet der numerischen Mechanik gibt es deshalb eine Vielzahl an Methoden, die das System von Differenzialgleichungen aus Kapitel 2 in ein System algebraischer Gleichungen überführen. Zu diesem Zweck wird das kontinuierliche Problem als ein diskretes formuliert. Dieser als Diskretisierung bezeichnete Schritt erfolgt sowohl in der Zeit als auch im Raum, wobei in dieser Arbeit die Zeitdiskretisierung nicht behandelt wird, da nur quasistatische Probleme betrachtet werden. Die räumliche Diskretisierung erfolgt mit der FEM, die in der Festkörpersimulation seit Jahren erfolgreich eingesetzt wird.

Auch für die Diskretisierung von Kontaktproblemen wird bereits seit einigen Jahrzehnten die FEM verwendet. Die ersten Beiträge in diesem Bereich von FRANCAVILLA UND ZIENKIEWICZ (1975) sowie HUGHES U. A. (1976) wurden bereits vor über 40 Jahren veröffentlicht. Seitdem werden die Finite-Elemente-Formulierungen für Kontaktprobleme weiterentwickelt und ermöglichen immer anspruchsvollere Simulationen auf diesem Gebiet. In dieser Arbeit wird zur Kontaktdiskretisierung die Mortar-Methode verwendet, die zu den Diskretisierungsmethoden mit der höchsten Genauigkeit zählt.

Gegenstand dieses Kapitels ist es, die Finite-Elemente-Diskretisierung der Mortar-Methode in ihren Grundzügen zu beschreiben. Hierzu gibt Abschnitt 3.1 zunächst die Idee verschiebungsbasierter finiter Elemente wieder. Im darauffolgenden Abschnitt 3.2 werden die virtuelle innere und äußere Arbeit in ihrer diskretisierten Form angegeben. Es folgt in Abschnitt 3.3 eine Übersicht zu gängigen Strategien der Kontaktdiskretisierung. In Abschnitt 3.4 wird explizit auf die Kontaktdiskretisierung mit der Mortar-Methode eingegangen. Im Zuge der Kontaktdiskretisierung werden die Aspekte der Finite-Elemente-Formulierung identifiziert, deren Betrachtung und Diskussion die Schwerpunkte dieser Arbeit darstellen. Dies ist erstens die Identifikation sogenannter

Kontaktintegrale, deren Berechnungsmethoden in Kapitel 5 beschrieben werden. Zweitens wird die Diskretisierung der Kontaktspannungen mit dualen Formfunktionen geschildert. In Kapitel 6 wird die Auswirkung dieser Diskretisierung auf die Genauigkeit der Kontaktspannungen diskutiert.

3.1 Verschiebungsbasierte finite Elemente

Dieser Abschnitt beschreibt die räumliche Finite-Elemente-Diskretisierung der verschiebungsbasierten FEM, das heißt einer FEM, deren primäre Unbekannte die Verschiebung ist. Diese Diskretisierung wird in der vorliegenden Arbeit verwendet, um die Festkörper zu berechnen. Auf dem Kontaktrand wird die in Abschnitt 3.4 beschriebene Kontaktdiskretisierung angewendet.

Es ist nicht der Anspruch dieses Abschnitts eine umfassende Einführung in die FEM zu geben. Hierfür sei beispielhaft auf die umfassende Literatur von BATHE (2002), ZIENKIEWICZ U. A. (2005) sowie BELYTSCHKO U. A. (2014) verwiesen. Für eine kompaktere Zusammenfassung sind die Vorlesungsmanuskripte von FELIPPA (2016) sowie VON SCHEVEN UND BISCHOFF (2016) zu empfehlen.

3.1.1 Das isoparametrische Konzept

Die Grundidee aller Diskretisierungsmethoden ist die Überführung des kontinuierlichen Problems mit einer unendlichen Anzahl an Freiheitsgraden auf ein Problem mit einer endlichen Anzahl an Freiheitsgraden. Bei der FEM wird das zu untersuchende Gebiet Ω in eine endliche Anzahl n_{ele} an finiten Elementen unterteilt:

$$\Omega \approx \Omega^h = \bigcup_{e=1}^{n_{\text{ele}}} \Omega_e. \quad (3.1)$$

In vorheriger Gleichung ist \cup der Assemblierungsoperator. Die finiten Elemente sind untereinander über gemeinsame Knoten verbunden, an denen die Freiheitsgrade definiert sind. Im betrachteten Fall entsprechen die Freiheitsgrade den Knotenverschiebungen. Zwischen den Knoten, also innerhalb der finiten Elemente, werden Ansätze für die Geometrie und für die Lösung gewählt. Die Ansätze enthalten im Allgemeinen nicht die exakte Geometrie bzw. Lösung, sondern approximieren diese über relativ simple Formfunktionen.

Der Polynomgrad der Formfunktionen und die Anzahl der finiten Elemente bestimmen die Approximationsgenauigkeit der FEM. Im Rahmen dieser Arbeit werden für

zweidimensionale Probleme vierknotige und für dreidimensionale Probleme achtknotige finite Elemente verwendet. Die zugehörigen Formfunktionen N_I sind bi- bzw. trilineare Lagrange-Polynome und interpolieren die Knotenwerte innerhalb der finiten Elemente. Es ist zweckmäßig für jedes Element ein natürliches Koordinatensystem $\boldsymbol{\xi} = (\xi, \eta)$ bzw. $\boldsymbol{\xi} = (\xi, \eta, \zeta)$ einzuführen und die Formfunktionen in diesem Koordinatensystem zu definieren.

Prinzipiell kann die Geometrie des Körpers mit anderen Formfunktionen approximiert werden als die Lösungsfunktion. Werden dieselben Formfunktionen verwendet, entspricht das Vorgehen dem isoparametrischen Konzept. Dieses Konzept kommt in vielen Finite-Elemente-Programmen zum Einsatz und wird auch in dieser Arbeit verfolgt. Dem isoparametrischen Konzept folgend kann die approximierete Geometrie und das approximierete Verschiebungsfeld im finiten Element e wie folgt angegeben werden:

$$\mathbf{X}_e \approx \mathbf{X}_e^h(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{I=1}^{n_{\text{nd,ele}}} N_I(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{X}_I, \quad (3.2)$$

$$\mathbf{u}_e \approx \mathbf{u}_e^h(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{I=1}^{n_{\text{nd,ele}}} N_I(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{d}_I. \quad (3.3)$$

In den vorherigen Gleichungen bezeichnet der Fußzeiger $(\bullet)_I$ die Zugehörigkeit der Größe zu Knoten I und der Kopfzeiger $(\bullet)^h$ drückt aus, dass es sich um eine diskretisierte Größe handelt. N_I ist die Formfunktion von Knoten I und \mathbf{d} der globale Vektor der diskreten Knotenverschiebungen. $\mathbf{d}_I = [d_{Ix} \quad d_{Iy} \quad d_{Iz}]^T$ ist entsprechend der Vektor der diskreten Knotenverschiebungen von Knoten I . Der Endwert $n_{\text{nd,ele}}$ der Summen entspricht der Anzahl der Knoten des betrachteten finiten Elements e .

In dieser Arbeit werden die virtuellen Verschiebungen mit denselben Formfunktionen approximiert wie das Verschiebungsfeld. Dieser Bubnov-Galerkin-Ansatz führt auf

$$\delta \mathbf{u}_e \approx \delta \mathbf{u}_e^h(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{I=1}^{n_{\text{nd,ele}}} N_I(\boldsymbol{\xi}) \delta \mathbf{d}_I, \quad (3.4)$$

wobei $\delta \mathbf{d}_I$ die virtuellen Knotenverschiebungen von Knoten I sind. Werden für virtuelle Größen andere Ansätze als für die wirklichen Größen gewählt, stellt dies einen Petrov-Galerkin-Ansatz dar. Aus Gründen der Übersichtlichkeit wird in den Gleichungen (3.1)–(3.4) auf den Kopfzeiger $(\bullet)^{(\alpha)}$ zur Identifikation des Körpers verzichtet. Die angegebenen Gleichungen gelten getrennt für alle betrachteten Körper.

3.1.2 Konvergenzanforderungen

Die in der vorliegenden Arbeit verwendeten linearen Ansatzfunktionen $N_I(\boldsymbol{\xi})\mathbf{d}_I$ und Testfunktionen $N_I(\boldsymbol{\xi})\delta\mathbf{d}_I$ erfüllen die Anforderungen an die Differenzierbarkeit aus den Gleichungen (2.55). Damit die Konvergenz der FEM gewährleistet ist, muss diese konsistent und stabil formuliert sein. Die diesbezüglichen Anforderungen an die Ansatzfunktionen werden für verschiebungsbasierte finite Elemente indirekt durch das Theorem von Lax-Wendroff beschrieben. Durch die Erfüllung der Anforderungen wird sichergestellt, dass mit zunehmender Netzfeinheit die numerische Lösung gegen die Lösung des mathematischen Modells strebt. Details hierzu können der oben angegebenen Literatur zur FEM entnommen werden. An dieser Stelle werden ausschließlich die Grundzüge der Konsistenz erläutert, da diese in Unterabschnitt 3.4.2 und in Kapitel 6 nochmals wichtig werden, wenn die Diskretisierung des Lagrange-Multiplikator-Feldes und seine physikalische Bedeutung als Kontaktspannung behandelt werden.

Die Konsistenz einer Diskretisierung stellt den eindeutigen Zusammenhang zwischen dem diskreten Modell und seiner mathematischen Repräsentation sicher. Eine entscheidende Rolle zur Beurteilung der Konsistenz spielt die höchste Ableitung der unbekanntenen Größe in der schwachen Form. Im hier betrachteten Fall also die höchste Ableitung der Verschiebung \mathbf{u} . Sie stellt den variationellen Index v dar und kann aus Gleichung (2.54) bzw. (2.53) zu $v = 1$ identifiziert werden.

Die verschiebungsbasierte FEM ist konsistent, wenn ihre Ansatzfunktionen vollständig und kompatibel sind. Die Ansatzfunktionen müssen alle Funktionen bis zur Polynomordnung v exakt repräsentieren können, um vollständig zu sein. Durch die gewählten bi- bzw. trilinearen Formfunktionen N_I ist dies gewährleistet. Zur Wahrung der Kompatibilität müssen die Ansatzfunktionen C^v -kontinuierlich innerhalb und C^{v-1} -kontinuierlich zwischen den finiten Elementen sein. Diese Bedingungen werden ebenfalls durch die verwendeten Formfunktionen N_I erfüllt. Zusammen mit der Stabilität, die über eine rangerhaltende numerische Integration und reguläre Elementformen sichergestellt wird, stellen die Vollständigkeit und die Kompatibilität die Konvergenz der Verschiebungen sicher.

Wenn die genannten Anforderungen an die Ansatzfunktionen und die numerische Integration erfüllt sind, konvergiert die Spannungslösung ebenfalls, da die Spannungen aus der Ableitung des Verschiebungsfeldes berechnet werden. Allerdings ist aufgrund der involvierten Ableitung die Konvergenzordnung für die Spannungen geringer. Diese Tatsache spielt für die Überlegungen zur Berechnung und Darstellung der Kontaktspannungen in Kapitel 6 eine Rolle und wird dort nochmals aufgegriffen.

3.2 Diskretisierung der schwachen Form der Kontinuumsmechanik

Das diskretisierte Verschiebungsfeld \mathbf{u}^h und das zugehörige virtuelle Verschiebungsfeld $\delta\mathbf{u}^h$ werden nun in Gleichung (2.54) bzw. Gleichung (2.69) eingesetzt, um die diskretisierte schwache Form $\delta W_{PvV}^{F,h}$ des Festkörpers zu erhalten. In Hinblick auf die Kontaktformulierung setzt sich $\delta W_{PvV}^{F,h}$ aus den Anteilen aller betrachteten Körper zusammen. Die Integration der einzelnen Terme erfolgt elementweise mit geeigneten numerischen Methoden, die die Stabilität der FEM gewährleisten. Durch Assemblierung der Elementanteile ergibt sich die übliche Schreibweise in Form von Knotenkräften:

$$\delta W_{PvV}^{\text{int}} = \sum_{\alpha=1}^2 \delta W_{PvV}^{\text{int},(\alpha)} \approx \delta W_{PvV}^{\text{int},h} = \delta\mathbf{d}^T \mathbf{f}_{\text{int}}(\mathbf{d}), \quad (3.5)$$

$$\delta W_{PvV}^{\text{ext}} = \sum_{\alpha=1}^2 \delta W_{PvV}^{\text{ext},(\alpha)} \approx \delta W_{PvV}^{\text{ext},h} = \delta\mathbf{d}^T \mathbf{f}_{\text{ext}}. \quad (3.6)$$

Eine detaillierte Herleitung der diskretisierten virtuellen inneren und äußeren Arbeit findet sich z. B. in BELYTSCHKO U. A. (2014). Die globalen Vektoren \mathbf{d} und $\delta\mathbf{d}$ in den Gleichungen (3.5) und (3.6) beinhalten alle diskreten Knotenverschiebungen und diskreten virtuellen Knotenverschiebungen. Die globalen Vektoren $\mathbf{f}_{\text{int}}(\mathbf{d})$ und \mathbf{f}_{ext} sind die diskreten inneren und äußeren Knotenkräfte. In dieser Arbeit wird davon ausgegangen, dass nur die inneren Knotenkräfte von den Verschiebungen abhängen, das heißt verformungsabhängige Lasten werden nicht berücksichtigt.

Der globale Vektor der virtuellen Knotenverschiebungen $\delta\mathbf{d}$ kann beliebig sein, muss an Rändern mit vorgegebenen Verschiebungsrandbedingungen aber den Wert null annehmen. Die diskretisierte virtuelle Arbeit der Festkörper $\delta W_{PvV}^{F,h}$ kann deshalb kompakt als diskretes Kräftegleichgewicht angegeben werden:

$$\delta W_{PvV}^{F,h} = \mathbf{f}_{\text{int}}(\mathbf{d}) - \mathbf{f}_{\text{ext}} = \mathbf{0}. \quad (3.7)$$

Gleichung (3.7) ist Ausgangspunkt zur Berechnung quasistatischer Festkörperprobleme. Obwohl es durch die Diskretisierung gelungen ist, die Differenzialgleichungen durch algebraische Gleichungen zu approximieren, ist die Erfüllung des diskreten Kräftegleichgewichts weiterhin nicht trivial. Grund hierfür ist die nichtlineare Abhängigkeit der diskreten inneren Knotenkräfte \mathbf{f}_{int} von den Knotenverschiebungen \mathbf{d} . In dieser Arbeit wird deshalb das nichtlineare Gleichungssystem linearisiert und die Lösung iterativ bestimmt. Die Beschreibung eines geeigneten Newton-Raphson-Verfahrens zur Lösung der nichtlinearen Gleichungen wird erst in Abschnitt 4.3 geschildert, nachdem das gesamte Kontaktproblem diskretisiert ist.

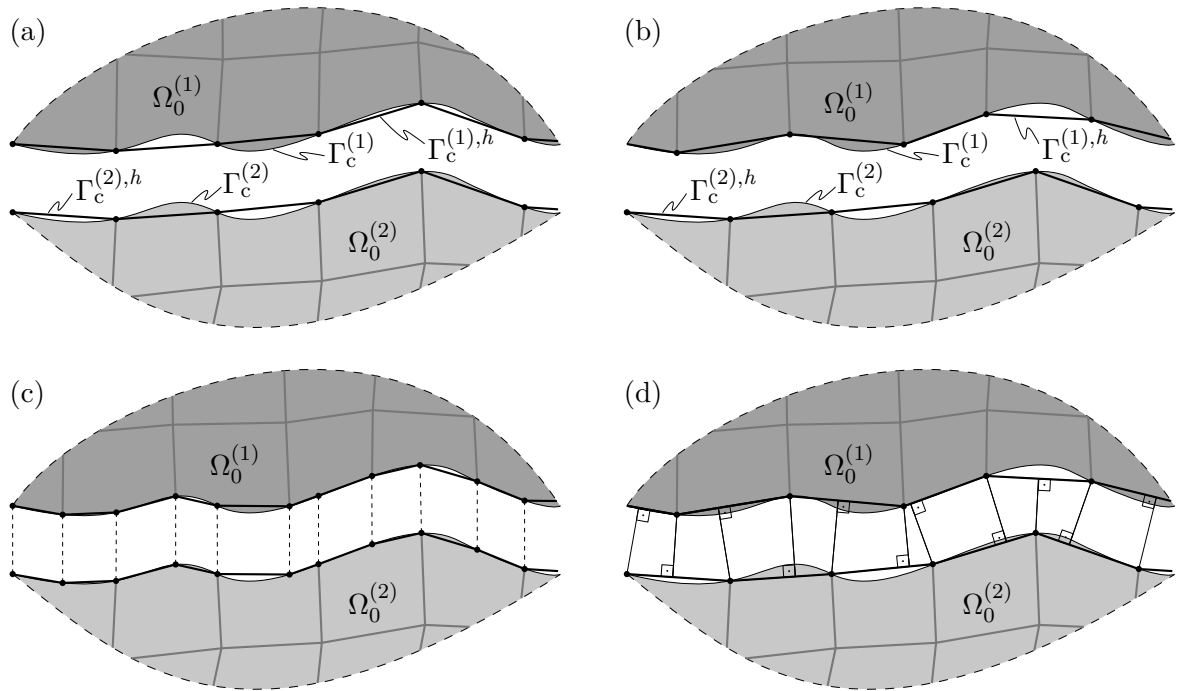


Abbildung 3.1: Diskretisierter Kontakttrand eines zweidimensionalen Kontaktproblems. (a) konformes Netz, (b) nichtkonformes Netz, (c) konformes Netz mit polygonalen Elementen, (d) nichtkonformes Netz mit Kontaktsegmenten.

3.3 Methoden zur Diskretisierung des Kontakts

Die Diskretisierung der virtuellen Kontaktarbeit $\delta W_{P_{vV}}^c$ aus Gleichung (2.61) und der Kontaktbedingungen aus den Gleichungen (2.67) und (2.68) ist wesentlich komplizierter als die Diskretisierung der Festkörperanteile. Hauptsächlich Grund hierfür ist die Nichtkonformität der diskretisierten Kontakttränder, der am Kontakt beteiligten Körper. Was Nichtkonformität bedeutet, veranschaulicht Abbildung 3.1 an Ausschnitten zweier fiktiver Kontakttränder, die unterschiedlich diskretisiert sind. Zur besseren Übersichtlichkeit sind beide Kontakttränder mit einem Abstand dargestellt. Abbildung 3.1 (a) illustriert eine konforme Konfiguration, bei der die Netze der diskretisierten Kontakttränder $\Gamma_c^{(\alpha),h}$ übereinstimmen und jeder Knoten des Randes $\Gamma_c^{(1),h}$ auf einem Knoten des Randes $\Gamma_c^{(2),h}$ liegt. Ein nichtkonformes Netz ist in Abbildung 3.1 (b) dargestellt.

Für die Diskretisierung des Kontakts wurden unterschiedliche Strategien entwickelt, um die Problematik der nichtkonformen Netze zu behandeln. Die gebräuchlichsten Strategien und ihre wesentlichen Eigenschaften werden im Folgenden kurz beschrieben. Ein entscheidender Unterschied zwischen den unterschiedlichen Diskretisierungsmethoden ist die Art und Weise, wie die Integrale der Kontaktterme numerisch berechnet werden.

An dieser Stelle werden nur die Ansätze unterschiedlicher Verfahren erwähnt, herausgestellt, welche Probleme mit den Methoden einhergehen, und wie diese behoben werden können. Ein ausführlicherer Überblick lässt sich in WRIGGERS (2006) finden.

Die Erfüllung der Ladyschenskaja-Babuška-Brezzi(LBB)-Bedingung (BABŮSKA UND AZIZ 1972; BREZZI 1974; LADYŽENSKAJA UND URAL'CEVA 1968) und das Bestehen des Patch-Tests sind Indikatoren, um eine Aussage über die Qualität von Kontaktalgorithmen treffen zu können. Mit dem Patch-Test kann die Genauigkeit der Diskretisierungsstrategie beurteilt werden. Für Kontaktprobleme ist dieser in TAYLOR UND PAPADOPOULOS (1991) beschrieben und mit ihm wird überprüft, ob die Kontaktdiskretisierung in der Lage ist, eine konstante Spannung über einen nichtkonform diskretisierten, ebenen Kontaktrand zu übertragen. Die LBB-Bedingung bzw. inf-sup-Bedingung für Kontakt ist in EL-ABBASI UND BATHE (2001) beschrieben und trifft eine Aussage über die Stabilität sowie die Konvergenzeigenschaften des Kontaktalgorithmus. Für die im Folgenden erläuterten Diskretisierungsstrategien ist angegeben, ob sie die Bedingungen erfüllen oder nicht. Die hierzu notwendigen Informationen sind EL-ABBASI UND BATHE (2001) entnommen.

3.3.1 Node-to-Node-Diskretisierung

Die am einfachsten zu implementierende Kontaktdiskretisierung ist die sogenannte NTN-Diskretisierung. Bei dieser Diskretisierung können die integralen Kontaktterme direkt knotenweise bestimmt werden. Allerdings müssen die Netze entlang des Kontaktrandes konform vernetzt sein (siehe Abbildung 3.1 (a)), damit die knotenweise Berechnung zwischen jeweils einem Knoten des Slave- und einem Knoten des Master-Randes erfolgen kann. Mit der NTN-Methode diskretisierte Kontaktalgorithmen bestehen den Patch-Test und erfüllen die LBB-Bedingung.

Die Voraussetzung der Netzkonformität ist jedoch für allgemeine Probleme mit großen Deformationen nicht zu erfüllen. So wurde die Methode hauptsächlich in den ersten Jahren der computerorientierten Berechnung von Kontaktproblemen mit der FEM verwendet, unter anderen in FRANCAVILLA UND ZIENKIEWICZ (1975). In letzter Zeit steigt das wissenschaftliche Interesse an der NTN-Diskretisierung wieder, da es durch den Einsatz von polygonalen bzw. polyedrischen Elementen leichter ist, konform vernetzte Kontaktränder zu erzeugen.

In WRIGGERS U. A. (2016) wird mit der Virtuelle-Elemente-Methode (VEM) (BEIRÃO DA VEIGA U. A. 2012, 2014) eine generalisierte FEM angewendet. Diese ermöglicht den Einsatz polygonaler bzw. polyedrischer Elemente unter Verwendung von Approximationsräumen hohen Polynomgrades. Der Approximationsraum wird von polynomischen

Formfunktionen bestimmt. Neben diesen gibt es bei der VEM nicht-polynomische virtuelle Formfunktionen, die nicht explizit bestimmt werden müssen und der Methode ihren Namen verleihen. Der Einsatz finiter Elemente mit einer beliebigen Anzahl an Knoten ermöglicht es vergleichbar einfach konforme Netze zu erzeugen, wie durch Abbildung 3.1 (c) veranschaulicht wird. Für jeden Knoten wird auf dem Kontaktrand des anderen Körpers ein Knoten hinzugefügt. Es entsteht ein polygonales, konformes Netz, das die Anwendung der NTN-Diskretisierung ermöglicht. Ein ähnlicher Ansatz, allerdings nicht auf der VEM basierend, wird z. B. in JIN U. A. (2016) beschrieben.

3.3.2 Node-to-Segment-Diskretisierung

Bei der NTS-Diskretisierung wird die Kopplung zwischen den diskretisierten Körpern nicht knotenweise erzeugt, sondern erfolgt üblicherweise zwischen einem Slave-Knoten und einem Kontaktrandelement des Master-Randes. Bildlich gesprochen wird die Durchdringung von Knoten des Slave-Randes durch Kontaktrandelemente des Master-Randes verhindert. Kontaktrandelemente stellen im zweidimensionalen Fall Linien und im dreidimensionalen Fall Flächen dar. Aus der bildlichen Anschauung heraus wird die Möglichkeit zur Behandlung nichtkonformer Netze mit der NTS-Diskretisierung offensichtlich. Die Kontaktterme werden bei dieser Methode nicht numerisch integriert, sondern mittels Kollokation approximiert.

In ihrer einfachsten Form erfüllt die NTS-Diskretisierung die LBB-Bedingung, besteht aber nicht den Patch-Test. Sie ist vermutlich dennoch die am häufigsten verwendete Kontaktdiskretisierung. Grund hierfür sind ihre Einfachheit und auch eine Reihe an Modifikationen, die unter anderem das Bestehen des Patch-Tests ermöglichen, siehe z. B. CRISFIELD (2000) und TAYLOR UND PAPADOPOULOS (1991). Allerdings geschieht dies zulasten der Erfüllung der LBB-Bedingung (EL-ABBASI UND BATHE 2001) und der Einfachheit des Algorithmus. Ein weiterer Nachteil der NTS-Methode ist, dass die Kontaktspannungen aus Kontaktkräften berechnet werden müssen, da die Kontaktspannungen nicht explizit in der NTS-Formulierung vorhanden sind.

Von praktisch größerer Bedeutung für Kontaktprobleme sind allerdings die numerischen Instabilitäten, zu denen die NTS-Methode bei großen Gleitbewegungen neigt. Die Instabilitäten entstehen hauptsächlich dadurch, dass die Zuordnung eines Slave-Knotens zu einem Master-Element mithilfe der nach außen gerichteten Normalen nicht immer eindeutig, teilweise sogar unmöglich ist. Der Grund für die Instabilitäten liegt somit in der C^0 -kontinuierlichen Beschreibung des Randes infolge der Finite-Elemente-Diskretisierung und den daraus resultierenden Sprüngen in den Normalen des diskretisierten Master-Randes. ZAVARISE UND DE LORENZIS (2009) erklären dieses Problem sehr anschaulich.

Dieser Nachteil der NTS-Diskretisierung kann z. B. ausgeglichen werden, indem der Kontaktrand der Master-Seite mit C^1 - oder höher-kontinuierlichen Ansatzfunktionen diskretisiert wird. Der restliche Körper bleibt bei diesen Verfahren C^0 -kontinuierlich. Durch den glatteren Master-Rand bleibt der Algorithmus auch für große Gleitbewegungen stabil. Es gibt eine Vielzahl an Veröffentlichungen, die sich mit der Glättung von zwei- und dreidimensionalen Kontakträndern beschäftigen. Eine Übersicht über die Ansätze wird z. B. in LAURSEN (2003), WRIGGERS (2006) und DE LORENZIS U. A. (2014) gegeben. Die Umsetzung der Glättungsmethoden ist vor allem für dreidimensionale Probleme numerisch aufwendig.

Die Verwendung von isogeometrischen finiten Elementen auf der Basis von nicht-uniformen rationalen B-Splines (NURBS) führt ebenfalls auf höher-kontinuierliche Ränder. Dies geschieht aber nicht über eine Glättung, sondern ergibt sich intrinsisch durch die höhere Kontinuität zwischen den Elementen. Diese Kontinuität stellt den ausschlaggebenden Unterschied zu den in dieser Arbeit verwendeten finiten Elementen dar, die auf Lagrange-Polynomen basieren. Die erste NTS-Diskretisierung mit NURBS-Ansatzfunktionen wird in MATZEN U. A. (2013) beschrieben. Kontrollknoten liegen bei NURBS-Diskretisierungen nicht zwingend auf der Geometrie des Körpers. MATZEN U. A. (2013) verwenden für die Kopplung der diskretisierten Körper deswegen Punkte, die sich auf dem Kontaktrand befinden. Entsprechende Algorithmen werden deshalb auch mit dem Begriff Point-to-Segment (PTS) assoziiert. Im Gegensatz zu den Glättungsmethoden kann mit einer NURBS-Diskretisierung die Einfachheit der NTS-Methode erhalten werden. Hinsichtlich des Bestehens des Patch-Tests ändert sich durch die Verwendung von NURBS allerdings nichts, sodass auch diese Algorithmen den Patch-Test nicht bestehen.

3.3.3 Segment-to-Segment-Diskretisierung

Der Patch-Test kann gewöhnlich bestanden werden, wenn sogenannte STS-Diskretisierungen verwendet werden. Mittlerweile gibt es eine Reihe von Kontaktdiskretisierungen, die zu den STS-Diskretisierungen gezählt werden. Die Gemeinsamkeiten aller STS-Diskretisierungen sind, dass sie

- Kontaktterme mithilfe numerischer Integration berechnen und
- interpolierte Verschiebungen und Kontaktspannungen verwenden.

Dies sind gleichzeitig entscheidende Unterschiede zu der zuvor beschriebenen NTS-Diskretisierung, bei der die Kontaktterme kolloziert und diskrete Kontaktkräfte anstelle von Kontaktspannungen verwendet werden. Durch die numerische Integration sind STS-Diskretisierungen numerisch stabiler als NTS-Diskretisierungen. Die numerische Umsetzung

der Integration ist entscheidend für die Genauigkeit des Algorithmus und ist in dieser Arbeit von besonderem Interesse.

Die erste STS-Diskretisierung wird in SIMO U. A. (1985) beschrieben. In der genannten Veröffentlichung wird vorgeschlagen, die Integration innerhalb sogenannter Segmente durchzuführen. Ein Segment beschreibt dabei den Bereich, in dem sich ein Slave- und ein Master-Element überlappen. Durch die stückweise Integration innerhalb der Segmente wird sichergestellt, dass die approximierten Felder und dadurch die Integranden jedes Segments mindestens C^1 -kontinuierlich sind. Je nach Funktionstyp ist bei glatten Integranden eine exakte numerische Integration mit gewöhnlichen Quadraturformeln möglich. In Abbildung 3.1 (d) ist die Einteilung in Segmente, wie sie in SIMO U. A. (1985) vorgeschlagen wird, für den zweidimensionalen Fall illustriert. In Kapitel 5 wird im Detail auf die Segmentierung und deren Notwendigkeit eingegangen.

Die STS-Formulierung aus SIMO U. A. (1985) besteht den Patch-Test exakt. In EL-ABBASI UND BATHE (2001) wird allerdings gezeigt, dass die STS-Formulierung aus SIMO U. A. (1985) und auch andere STS-Formulierungen die LBB-Bedingung nicht erfüllen. In derselben Veröffentlichung wird deshalb eine STS-Diskretisierung vorgestellt, die sowohl den Patch-Test besteht als auch die LBB-Bedingung erfüllt.

Neben den STS-Formulierungen, die Segmente als Integrationsgebiete verwenden, gibt es auch Formulierungen, die die Kontinuität des Integranden vernachlässigen. Diese Formulierung wurde zuerst in FISCHER UND WRIGGERS (2005, 2006) beschrieben und ist im Vergleich zu den segmentbasierten STS-Formulierungen numerisch weniger aufwendig (FARAH U. A. 2014). Das Integrationsgebiet ist bei diesen Formulierungen jeweils ein Slave-Element. Allerdings ist die Kontinuität des Integranden nicht mehr gewährleistet, da ein Slave-Element mit mehreren Master-Elementen überlappen kann und es zwischen den Master-Elementen Knicke in den approximierten Feldern gibt. Durch den daraus resultierenden Integrationsfehler wird der Patch-Test nicht mehr exakt bestanden. Die Einordnung der zuletzt beschriebenen Formulierung zu den STS-Formulierungen ist nicht ganz eindeutig. Gelegentlich wird die beschriebene Diskretisierung auch Gauß-Point-to-Segment(GPTS)-Diskretisierung bezeichnet, da die Kopplung hier zwischen den Integrationspunkten bzw. Gaußpunkten des Slave-Randes und dem Master-Rand erfolgt (DE LORENZIS U. A. 2014). Meistens wird die von FISCHER UND WRIGGERS (2005) präsentierte Formulierung aber der Mortar-Methode zugeordnet.

3.3.4 Die Mortar-Methode

Eine klare Trennung zwischen STS-Diskretisierungen und Mortar-Diskretisierungen ist erneut schwer auszumachen. In Anlehnung an EL-ABBASI UND BATHE (2001) werden in dieser Arbeit alle Kontaktdiskretisierungen, die die Kontaktterme in irgendeiner Form

numerisch integrieren, als STS-Formulierungen eingestuft. In diesem Sinne zählt auch die Mortar-Diskretisierung zu den STS-Formulierungen. Anders als bei den meisten STS-Formulierungen ist der Ursprung der Mortar-Methode allerdings dem Gebiet der Mathematik zuzuordnen und nicht dem des Ingenieurwesens. Gegenüber anderen STS-Formulierungen hat sie aufgrund ihrer rigorosen mathematischen Formulierung einige Vorteile.

Die Mortar-Methode wurde ursprünglich entwickelt, um die Vorteile der FEM und der Spektralmethode zu kombinieren. Zum ersten Mal erwähnt wurde die Mortar-Methode in diesem Kontext in MADAY U. A. (1988) und BERNARDI U. A. (1993, 1994). Sie zählt zu den Gebietszerlegungsmethoden und ermöglicht die Kopplung von unterschiedlich diskretisierten Teilgebieten mit nichtkonformen Netzen. Entwickelt wurde sie zur Kopplung von Teilgebieten, die mit spektralen Elementen diskretisiert sind, und Teilgebieten, die mit finiten Elementen diskretisiert sind. Im Allgemeinen ist die Mortar-Methode aber in der Lage alle Diskretisierungen variationeller Formulierungen miteinander zu koppeln (BERNARDI U. A. 1993). Teilgebiete können so weitestgehend unabhängig voneinander betrachtet werden und mithilfe der Mortar-Methode Informationen untereinander austauschen. Aufgrund dieser sehr allgemeingültigen mathematischen Formulierung gibt es heute viele Anwendungsbereiche für die Mortar-Methode. Zu diesen zählt die Behandlung von Netzkopplungsproblemen (bilateraler Kontakt) und von unilateralen Kontaktproblemen. Letztgenannte unterscheiden sich von den meisten anderen Anwendungsbereichen durch die Kopplungsbedingungen, die in Form der unilateralen Kontaktbedingungen über Ungleichungen ausgedrückt werden.

In der Literatur existieren zwei Methoden zum Einbringen der Kopplungsbedingungen mit der Mortar-Methode. In den bereits genannten Veröffentlichungen werden die Kopplungsbedingungen direkt an den Knoten, durch eine Kopplung der Freiheitsgrade der beteiligten Kopplungsränder, erzwungen. Als Alternative wird in BEN BELGACEM (1999) eine schwache Erfüllung über ein Lagrange-Multiplikator-Feld vorgeschlagen. Letztgenannte Methode wird in dieser Arbeit verwendet und ist variationell konsistent. Angewendet auf Kontaktprobleme hat das für die Kontaktbedingung in Normalenrichtung folgende Auswirkung: Die Nichtdurchdringung wird nicht an diskreten Punkten eingehalten, sondern im integralen Sinne. Ebenso werden die Bedingungen in Tangentialrichtung im Integral eingehalten und nicht punktweise. Dies ist der Grund, weshalb die Kontaktbedingungen aus den Gleichungen (2.67) und (2.68) schwach formuliert sind.

Das Lagrange-Multiplikator-Feld ist ein zusätzliches Feld von Unbekannten, das im Zuge der Diskretisierung durch Ansatzfunktionen approximiert wird. In SESHAIYER UND SURRI (2000) ist beschrieben, welchen Anforderungen die Ansatzfunktionen genügen müssen, damit die Mortar-Methode die LBB-Bedingungen erfüllt. Unter Beachtung der Anforderungen wird die optimale Konvergenz der Mortar-Methode gewährleistet (SESHAIYER

UND SURI 2000). Optimal bedeutet in diesem Zusammenhang: Mit einer Gebietszerlegung und Kopplung der Gebiete entlang des nichtkonformen Randes wird mit der Mortar-Methode die gleiche Konvergenzrate erzielt wie ohne Gebietszerlegung und konformer Diskretisierung. Für unilaterale Kontaktprobleme kann die Konvergenzrate allerdings geringer sein, wenn die Lösung nicht ausreichend glatt ist (HÜEBER UND WOHLMUTH 2005a; WOHLMUTH U. A. 2012). Auf die in dieser Arbeit gewählten Ansatzfunktionen wird in Unterabschnitt 3.4.2 eingegangen, wenn das Lagrange-Multiplikator-Feld diskretisiert wird. Neben diesen optimalen Eigenschaften ist das Bestehen des Patch-Tests ein weiterer Vorteil der Mortar-Methode. Als nachteilig hingegen gilt ihr relativ hoher numerischer Aufwand, der hauptsächlich der numerischen Integration der Kontaktterme geschuldet ist.

Duale Mortar-Methode

Die Mortar-Methode kann prinzipiell mit der Penalty-Methode, der Augmented-Lagrange-Methode oder anderen Regularisierungsmethoden kombiniert werden. Für Kontaktprobleme ist dies möglich, indem ein direkter Zusammenhang zwischen dem Verschiebungsfeld in Form des Abstandes und dem Lagrange-Multiplikator-Feld, das der Kontaktspannung entspricht, hergestellt wird. Umsetzungen der Penalty-Methode oder der Augmented-Lagrange-Methode finden sich z. B. in YANG U. A. (2005) bzw. PUSO UND LAURSEN (2004a). In dieser Arbeit wird die Lagrange-Multiplikator-Methode verwendet, um die methodenspezifischen Nachteile (z. B. Verletzung der Nichtdurchdringungsbedingung) der oben genannten Regularisierungsmethoden zu vermeiden. Allerdings hat die Lagrange-Multiplikator-Methode den Nachteil, dass sie zusätzliche Unbekannte einführt. Dadurch wird das Gleichungssystem erstens größer und hat zweitens die Form eines Sattelpunktproblems, wodurch es für iterative Löser nur bedingt geeignet ist. Für Kontaktprobleme kommt außerdem die veränderliche Größe der aktiven Kontaktzone erschwerend hinzu, die eine variierende Größe des Gleichungssystems bewirkt. Für die Speicherverwaltung der numerischen Umsetzung ist dies nachteilig.

Die Nachteile infolge des Lagrange-Multiplikator-Feldes können umgangen werden, indem die von WOHLMUTH (2000) vorgeschlagenen dualen Ansatzfunktionen für die Diskretisierung des Lagrange-Multiplikator-Feldes verwendet werden. Diese Kontaktdiskretisierung, im Folgenden duale Mortar-Methode genannt, ermöglicht eine effiziente Kondensation der diskreten Lagrange-Multiplikator-Werte. Das Gleichungssystem bleibt dadurch immer gleich groß und hat dieselbe Größe wie im kontaktfreien Fall. Des Weiteren ermöglicht die duale Mortar-Methode die schwachen Kopplungsbedingungen punktweise zu formulieren, sodass im Prinzip eine NTS-Formulierung entsteht, die numerisch stabil ist und die Kontaktbedingungen im schwachen, integralen Sinne erfüllt (HÜEBER UND

WOHLMUTH 2009; WOHLMUTH 2011). Die effiziente Kondensation und die Möglichkeit zur punktwisen Formulierung lassen eine relativ simple numerische Umsetzung der dualen Mortar-Methode zu.

3.4 Diskretisierung des Kontakts mit der Mortar-Methode

In dieser Arbeit wird zur Diskretisierung des Kontakts die in Unterabschnitt 3.3.4 kurz eingeführte Mortar-Methode verwendet. Dieser Abschnitt beschreibt die Diskretisierung der Kontaktgleichungen aus Kapitel 2. Im einzelnen werden die virtuelle Kontaktarbeit aus Gleichung (2.61) und die Kontaktbedingungen aus den Gleichungen (2.67) und (2.68) in ihrer diskretisierten Form angegeben.

3.4.1 Diskretisierung des Normalenfeldes und der Tangenten

Wie in Abschnitt 2.2 erwähnt, ist es hilfreich, die Kontaktgrößen in Normalen- und Tangentialrichtung anzugeben. Selbstverständlich gilt dies auch für das diskretisierte System, weshalb dieser Unterabschnitt zunächst die Diskretisierung der Normalen und der Tangenten beschreibt. Anhand dieser erfolgt die Zerlegung in Normalen- und Tangentialrichtung im diskretisierten System.

Die betrachteten Körper werden, wie in Abschnitt 3.1 beschrieben, mit linearen finiten Elementen diskretisiert. Dadurch ergeben sich Kontaktränder, die im Allgemeinen Knicke zwischen den Elementen aufweisen und damit C^0 -kontinuierlich sind. Für nicht-konforme Netze und gekrümmte Kontaktränder sind die diskretisierten Kontaktränder deshalb nicht mehr identisch, das heißt $\gamma_c^{(1),h} \neq \gamma_c^{(2),h}$. In dieser Arbeit wird der diskretisierte Slave-Rand $\gamma_c^{(1),h}$ für die Berechnung der Kontaktintegrale $\int_{\gamma_c}(\bullet) da \approx \int_{\gamma_c^{(1),h}}(\bullet) da$ gewählt und die Kontaktgrößen werden mit der Normalen und den Tangenten des Slave-Randes in ihre entsprechenden Anteile zerlegt.

Infolge des C^0 -kontinuierlichen Randes ergibt sich aus diesem ein Normalenfeld, das C^{-1} -kontinuierlich ist und damit Sprünge enthält. Diese Sprünge erschweren für einige Konfigurationen die Bestimmung von Segmenten, die in dieser Arbeit für die numerische Integration verwendet werden. Abbildung 3.1 (d) illustriert für eine zweidimensionale Konfiguration eine Segmentierung mit einem C^{-1} -kontinuierlichen Normalenfeld, die keine Probleme verursacht. Für allgemeine Konfiguration kann es aber durchaus zu mehrdeutigen Segmentierungen kommen, wie in YANG U. A. (2005) ausführlich erklärt wird. In derselben Veröffentlichung wird deshalb die Konstruktion eines kontinuierlichen

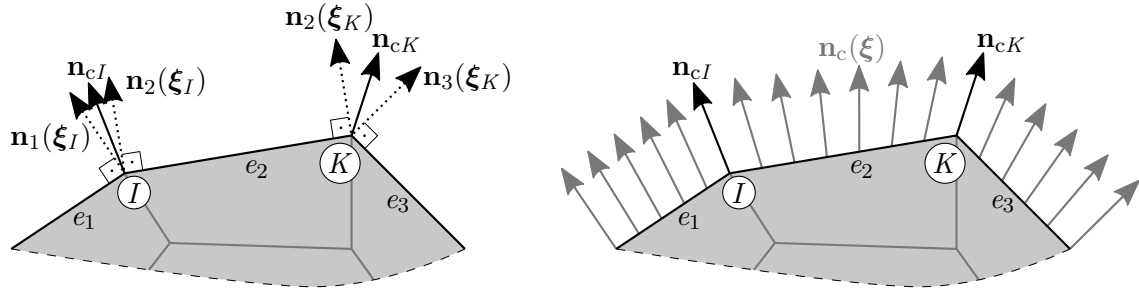


Abbildung 3.2: Bestimmung eines kontinuierlichen Normalenfeldes \mathbf{n}_c .

Normalenfeldes vorgeschlagen. Eine derartige Konstruktion ermöglicht eine allgemeingültige Segmentierung und wird in dieser Arbeit leicht modifiziert übernommen.

Die Grundidee von YANG U. A. (2005) ist die Mittelung der Elementnormalen an den Knoten und wird in Abbildung 3.2 für den zweidimensionalen Fall veranschaulicht. Bei zweidimensionalen Problemen stellt der diskretisierte Kontakttrand einen Polygonzug dar. Zunächst werden für jeden Knoten die Elementnormalen an der Stelle des jeweiligen Knotens ermittelt und anschließend werden diese Normalen gemittelt. In der mathematischen Beschreibung der gemittelten Normalen $\mathbf{n}_{c,I}$ an Knoten I

$$\mathbf{n}_{c,I} = \frac{\sum_{e=1}^{n_{se,I}} \mathbf{n}_e(\boldsymbol{\xi}_I)}{\|\sum_{e=1}^{n_{se,I}} \mathbf{n}_e(\boldsymbol{\xi}_I)\|} \quad (3.8)$$

ist $n_{se,I}$ die Anzahl der an Knoten I angrenzenden Slave-Elemente. $\mathbf{n}_e(\boldsymbol{\xi}_I)$ ist die Normale von Slave-Element e , die an den natürlichen Koordinaten $\boldsymbol{\xi}$ von Knoten I ausgewertet wird. Für die Beschreibung von Größen des Randes, wie der Normalen $\mathbf{n}_{c,I}$, werden für die Slave- und Master-Elemente natürliche Koordinatensysteme $\boldsymbol{\xi}$ definiert.

Das kontinuierliche Normalenfeld \mathbf{n}_c berechnet sich durch das Interpolieren der gemittelten Normalen $\mathbf{n}_{c,I}$ über den Slave-Rand. Je Slave-Element e gilt

$$\mathbf{n}_{c,e}(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{I=1}^{n_{s,e}} N_I(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{n}_{c,I}. \quad (3.9)$$

In vorheriger Gleichung ist $n_{s,e}$ die Anzahl der Knoten von Slave-Element e und $N_I(\boldsymbol{\xi})$ sind die Formfunktionen des Slave-Elements. Die Normalen werden somit auf dieselbe Art interpoliert wie z. B. die Verschiebung innerhalb der finiten Elemente. Bei der diskreten Kontaktnormalen \mathbf{n}_c wird hier und im Folgenden auf den Kopfzeiger $(\bullet)^h$ zur besseren Lesbarkeit verzichtet.

Das allgemeine Vorgehen zur Ermittlung des kontinuierlichen Normalenfeldes ist im zwei- und dreidimensionalen Fall identisch. Allerdings stellt der Kontakttrand bei dreidi-

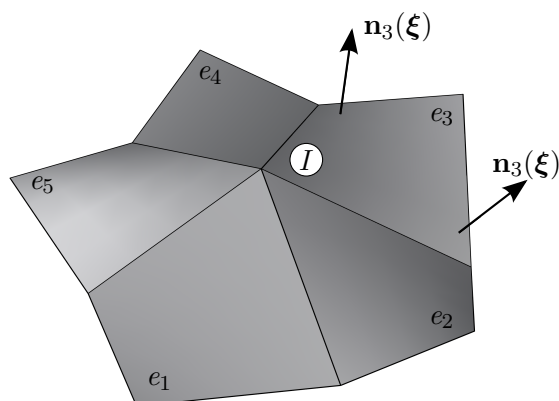


Abbildung 3.3: Kontakttrand eines dreidimensionalen Problems.

dimensionalen Problemen eine Fläche im Raum dar. Ein Teil einer solchen wird in Abbildung 3.3 anhand von fünf Elementen exemplarisch illustriert. Folgendes wird ersichtlich: Im dreidimensionalen Fall sind die Elementnormalen im Allgemeinen nicht konstant und ein Knoten kann theoretisch eine beliebige Anzahl von angrenzenden Slave-Elementen besitzen. Im zweidimensionalen Fall sind die Elementnormalen hingegen konstant und die Anzahl der angrenzenden Slave-Elemente ist auf maximal zwei begrenzt.

Neben der Normalen müssen auch die Tangenten an aktiven Slave-Knoten diskretisiert werden. Es ist aber nicht nötig, ein kontinuierliches Feld anzugeben, da die Tangenten nicht zur Segmentierung benötigt werden. Die Knotentangente im zweidimensionalen Fall lautet mit der Normalen \mathbf{e}_3 der Betrachtungsebene und der Normalen des Slave-Knotens:

$$\boldsymbol{\tau}_I^\xi = \mathbf{e}_3 \times \mathbf{n}_I. \quad (3.10)$$

Auch im dreidimensionalen Fall steht die Normale senkrecht auf den Tangenten, sodass $\mathbf{n}_{c,I} \cdot \boldsymbol{\tau}_I^\xi = 0$ und $\mathbf{n}_{c,I} \cdot \boldsymbol{\tau}_I^\eta = 0$ gilt. Außerdem müssen die Tangenten senkrecht zueinander sein:

$$\boldsymbol{\tau}_I^\eta = \mathbf{n}_{c,I} \times \boldsymbol{\tau}_I^\xi. \quad (3.11)$$

Wie bereits in Unterabschnitt 2.2.1 erwähnt, ist diese Bedingung alleine nicht ausreichend für eine eindeutige Definition der Tangenten. Die Tangentialebene ist zwar eindeutig definiert, innerhalb derer könnte aber jedes rechtwinklige Paar $(\boldsymbol{\tau}_I^\xi, \boldsymbol{\tau}_I^\eta)$ als Tangentenpaar dienen. In dieser Arbeit wird für dreidimensionale Probleme die Tangente $\boldsymbol{\tau}_I^\xi$ ebenfalls mit Gleichung (3.10) berechnet, um eine eindeutige Definition zu erhalten. Für den Sonderfall, dass $\mathbf{n}_I = \mathbf{e}_3$ ist, entspricht $\boldsymbol{\tau}_I^\xi = \mathbf{e}_1$. Die Tangente $\boldsymbol{\tau}_I^\eta$ ergibt sich aus Gleichung (3.11).

3.4.2 Diskretisierung des Lagrange-Multiplikator-Feldes

Neben dem Verschiebungsfeld \mathbf{u} stellt das Lagrange-Multiplikator-Feld das zweite unbekannte Feld in der hier verwendeten Kontaktformulierung dar. Im nächsten Schritt wird dieses diskretisiert. Formal erfolgt die Diskretisierung analog zur Diskretisierung der Verschiebung aus Gleichung (3.3) und ergibt sich elementweise zu

$$\lambda_e \approx \lambda_e^h(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{I=1}^{n_{s\lambda,e}} \Xi_I^{(1)}(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{z}_I. \quad (3.12)$$

Das diskrete Lagrange-Multiplikator-Feld ist in dieser Arbeit auf dem Slave-Rand definiert und hat an Slave-Knoten I die diskreten Knotenwerte \mathbf{z}_I . Ferner beschreibt Ξ in Gleichung (3.12) die Formfunktionen des Lagrange-Multiplikator-Feldes und $n_{s\lambda,e}$ die Anzahl aller Slave-Knoten des Slave-Elements e , an denen ein diskreter Lagrange-Multiplikator definiert ist. In dieser Arbeit gilt $n_{s\lambda,e} = n_{s,e}$, sodass an jedem Slave-Knoten ein diskreter Lagrange-Multiplikator definiert ist.

An dieser Stelle sei nochmals auf den Zusammenhang (2.47) zwischen dem Lagrange-Multiplikator-Feld und der Kontaktspannung \mathbf{t}_c hingewiesen. Die diskreten Lagrange-Multiplikatoren \mathbf{z} entsprechen demzufolge diskreten Knotenspannungen. Die einzelnen Einträge einer Knotenspannung \mathbf{z}_I entsprechen den Spannungskomponenten in die globalen Koordinatenrichtungen. Die Komponenten haben also dieselben Richtungen wie die diskreten Knotenverschiebungen \mathbf{d}_I . Für reibungsfreie Probleme wäre es möglich, nur einen skalaren Lagrange-Multiplikator zu betrachten, der der Kontaktspannung $t_{c,n}$ in Normalenrichtung entspricht. Derartige Formulierungen führen auf symmetrische Gleichungssysteme. Theoretisch könnten reibungsfreie Formulierungen auch mit den genannten vektorwertigen diskreten Lagrange-Multiplikatoren \mathbf{z} auf symmetrische Gleichungssysteme führen. Für die Diskretisierung der Kontaktbedingungen ist es allerdings praktikabel, die virtuellen diskreten Lagrange-Multiplikatoren nicht in die Anteile der globalen Koordinatenrichtungen zu zerlegen, sondern in die Anteile in Normalen- und Tangentialrichtung. Aufgrund der unterschiedlichen Zerlegung der wirklichen und virtuellen Größen ergibt sich dadurch selbst für reibungsfreie Probleme ein unsymmetrisches Gleichungssystem. Wird Reibung betrachtet, müssen die diskreten Lagrange-Multiplikatoren \mathbf{z} vektorwertig sein und unabhängig von der Zerlegung der virtuellen und wirklichen diskreten Lagrange-Multiplikatoren ergibt sich ein unsymmetrisches Gleichungssystem. In dieser Arbeit werden sowohl für reibungsfreie als auch für reibungsbehaftete Probleme vektorwertige diskrete Lagrange-Multiplikatoren verwendet.

Für die Wahl der Formfunktionen Ξ zur Approximation des Lagrange-Multiplikator-Feldes werden in dieser Arbeit zwei unterschiedliche Ansätze verfolgt. Einerseits kommen gewöhnliche Lagrange-Formfunktionen zum Einsatz, wie sie auch für die Verschie-

bungsapproximation verwendet werden. Ist dies der Fall, wird die Formulierung im weiteren Verlauf Standard-Mortar-Methode genannt. Diese Methode wird vor allem für Vergleichszwecke in Kapitel 6 verwendet. Hauptsächlich werden aber sogenannte duale Formfunktionen verwendet, die im Zusammenhang mit der Mortar-Methode zum ersten Mal in WOHLMUTH (2000) beschrieben wurden. Im weiteren Verlauf werden diese Formulierungen als duale Mortar-Methoden bezeichnet. In dieser Arbeit werden ausschließlich stückweise lineare Formfunktionen verwendet. Diese sind im Folgenden beschrieben und erfüllen die LBB-Bedingungen (WOHLMUTH 2000, 2001). Formfunktionen höheren Polynomgrades sind z. B. in PUSO U. A. (2008) für die Standard-Mortar-Methode und in POPP U. A. (2012) für die duale Mortar-Methode angegeben.

Die Wahl der Formfunktionen für das Lagrange-Multiplikator-Feld hat eine direkte Auswirkung auf die Genauigkeit der Kontaktspannung, da sich beide Größen entsprechen und die Formfunktionen zum Interpolieren der diskreten Knotenwerte verwendet werden. In Kapitel 6 wird der Einfluss der Formfunktionen auf die Genauigkeit der Kontaktspannung im Detail untersucht. Die folgenden Methoden sind folglich eine wichtige Grundlage für Kapitel 6.

Standard-Mortar-Methode

Die naheliegendste Approximation des Lagrange-Multiplikator-Feldes erfolgt über denselben Typ Formfunktion wie bei der Approximation der Verschiebungen und der Geometrie. In dieser Arbeit entspricht dieser Ansatz der Approximation mit (bi-)linearen Lagrange-Formfunktionen. Für die Formfunktionen in Gleichung (3.12) gilt somit $\Xi_I = N_I^{(1)}$. Das Lagrange-Multiplikator-Feld ist auf dem Slave-Rand $\Gamma_c^{(1)}$ definiert und die Dimension des Randes ist immer um eins geringer als die Dimension des zugrunde liegenden Körpers. Werden also im zweidimensionalen Fall bilineare Formfunktionen für die vierknotigen finiten Elemente verwendet, wird das Lagrange-Multiplikator-Feld mit linearen Ansatzfunktionen approximiert. Exemplarisch ist eine lineare Formfunktion links in Abbildung 3.4 veranschaulicht. Die Gleichungen beider Formfunktionen lauten:

$$N_1^{(1)}(\xi) = \frac{1}{2}(1 - \xi), \quad N_2^{(1)}(\xi) = \frac{1}{2}(1 + \xi). \quad (3.13)$$

Bei dreidimensionalen Problemen ist der Rand eine Fläche im Raum. Die achtknotigen Hexaederelemente werden durch trilineare Ansatzfunktionen beschrieben und dementsprechend wird das Lagrange-Multiplikator-Feld mit den vier bilinearen Formfunktio-

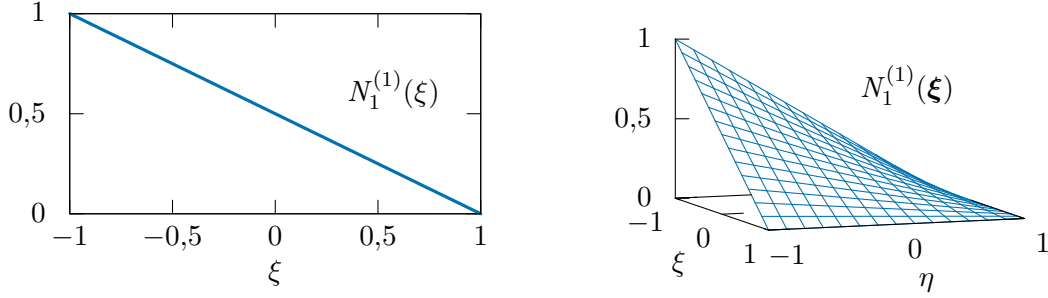


Abbildung 3.4: Standard-Lagrange-Formfunktion des Lagrange-Multiplikator-Feldes im Parameterraum $\boldsymbol{\xi}$ für zwei- und dreidimensionale Kontaktprobleme. Exemplarisch angegeben für Knoten 1 eines Slave-Elements.

nen

$$\begin{aligned}
 N_1^{(1)}(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta), & N_2^{(1)}(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta), \\
 N_3^{(1)}(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta), & N_4^{(1)}(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta),
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

beschrieben. Die bilineare Formfunktion $N_1^{(1)}$ ist rechts in Abbildung 3.4 dargestellt. Für alle Standard-Lagrange-Formfunktionen N_I ist Folgendes charakteristisch: Sie sind an Knoten I eins und an allen anderen Knoten null. Außerdem ist die Summe aller Formfunktionen innerhalb eines finiten Elements eins, sodass $\sum_{I=1}^{n_{\text{nd,ele}}} N_I = 1$. Der Endwert $n_{\text{nd,ele}}$ der Summe entspricht der Anzahl der Knoten des betrachteten Elements.

Die Standard-Mortar-Methode wird normalerweise mit einem Bubnov-Galerkin-Ansatz zur Approximation des virtuellen Lagrange-Multiplikator-Feldes kombiniert. Es werden demzufolge dieselben Formfunktionen verwendet wie für die Approximation des wirklichen Feldes – ähnlich wie es bei den virtuellen Verschiebungen in Gleichung (3.4) der Fall ist. Das virtuelle Lagrange-Multiplikator-Feld lautet damit:

$$\delta \boldsymbol{\lambda}_e \approx \delta \boldsymbol{\lambda}_e^h(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{I=1}^{n_{s,e}} N_I^{(1)}(\boldsymbol{\xi}) \delta \mathbf{z}_I. \tag{3.15}$$

In Gleichung (3.15) sind $\delta \mathbf{z}_I$ diskrete virtuelle Lagrange-Multiplikator-Werte von Knoten I .

In dieser Arbeit werden keine Dirichlet-Randbedingungen auf dem Slave-Rand aufgebracht. Des Weiteren werden nur Konfigurationen betrachtet, bei denen maximal zwei Kontaktränder an einem Knoten aufeinandertreffen. Wenn die beiden zuvor genannten

Fälle betrachtet werden sollen, müssen die Formfunktionen in den Elementen modifiziert werden, die einen Knoten enthalten für den obige Fälle gelten. Die Behandlung sogenannter cross-points ist beispielsweise in PUSO UND LAURSEN (2003) beschrieben.

Duale Mortar-Methode

Die Standard-Mortar-Methode spielt in dieser Arbeit eine untergeordnete Rolle. Der Fokus liegt auf der Anwendung der dualen Mortar-Methode. Bei dieser Methode werden in Gleichung (3.12) sogenannte duale Formfunktionen Φ_I verwendet, um den Lagrange-Multiplikator zu approximieren, das heißt $\Xi_I = \Phi_I$. Wesentliche Eigenschaft der dualen Formfunktionen ist die Erfüllung der Biorthogonalitätsbedingung

$$\int_{\gamma_{c,e}^{(1)}} \Phi_I(\boldsymbol{\xi}) N_K(\boldsymbol{\xi}) \, da = \delta_{IK} \int_{\gamma_{c,e}^{(1)}} N_K(\boldsymbol{\xi}) \, da. \quad (3.16)$$

Die angegebene Biorthogonalitätsbedingung gilt elementweise, sodass in vorheriger Gleichung $\gamma_{c,e}^{(1)}$ das Gebiet eines Slave-Elements darstellt. In Gleichung (3.16) beschreibt δ_{IK} das Kronecker-Symbol mit der Eigenschaft

$$\delta_{IK} = \begin{cases} 1 & \text{für } I = K, \\ 0 & \text{für } I \neq K. \end{cases} \quad (3.17)$$

Somit sagt die Biorthogonalitätsbedingung Folgendes aus: Das Integral des Produkts einer dualen mit einer gewöhnlichen Formfunktion wird null, wenn $I \neq K$. In den folgenden Unterabschnitten zeigen sich die Vorteile, die diese Entkopplung der Knotenwerte von Knoten I und K mit sich bringt.

WOHLMUTH (2001) präsentiert einige Formfunktionen, die die Biorthogonalitätsbedingung aus Gleichung (3.16) erfüllen. An dieser Stelle werden nur (bi-)lineare Funktionen angegeben. Für zweidimensionale Kontaktprobleme sind die dualen Formfunktionen unabhängig von der Geometrie des linearen Slave-Elements und können immer zu

$$\Phi_1^{(1)}(\xi) = \frac{1}{2}(1 - 3\xi), \quad \Phi_2^{(1)}(\xi) = \frac{1}{2}(1 + 3\xi) \quad (3.18)$$

angegeben werden. Der Verlauf der dualen Formfunktion $\Phi_1^{(1)}$ ist für den Fall eines zweidimensionalen Problems in Abbildung 3.5 links illustriert.

Im dreidimensionalen Fall sind die dualen Formfunktionen im Allgemeinen abhängig von der Form des Slave-Elements. Nur für den speziellen Fall von Slave-Elementen, die die Form eines Parallelogramms haben, können die bilinearen dualen Formfunktionen

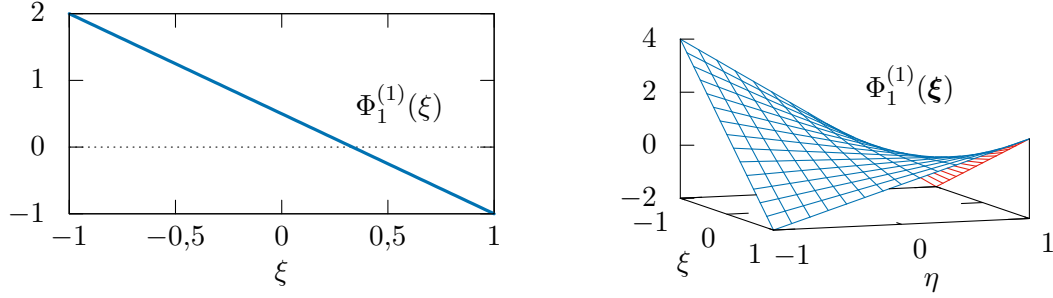


Abbildung 3.5: Duale Formfunktion des Lagrange-Multiplikator-Feldes im Parameterraum ξ für zwei- und dreidimensionale Kontaktprobleme. Exemplarisch angegeben für Knoten 1 eines Slave-Elements, das im dreidimensionalen die Form eines Parallelogramms hat.

direkt zu

$$\begin{aligned}
 \Phi_1^{(1)}(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 - 3\xi)(1 - 3\eta), & \Phi_2^{(1)}(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 + 3\xi)(1 - 3\eta), \\
 \Phi_3^{(1)}(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 + 3\xi)(1 + 3\eta), & \Phi_4^{(1)}(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 - 3\xi)(1 + 3\eta)
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

angegeben werden. Die duale Formfunktion $\Phi_1^{(1)}(\xi, \eta)$ ist für diesen Fall rechts in Abbildung 3.5 veranschaulicht. Im Gegensatz zu den Standard-Lagrange-Formfunktionen haben dualen Formfunktionen an allen Knoten Werte ungleich null. Wie bei den Standard-Lagrange-Formfunktionen ist auch für die dualen Formfunktionen die Summe aller Formfunktionen an einem Punkt gleich eins, das heißt $\sum_{I=1}^{n_{\text{nd,ele}}} \Phi_I = 1$.

Die Berechnung bilinearer dualer Formfunktionen für allgemeine Elementgeometrien wird in FLEMISCH UND WOHLMUTH (2007) und HARTMANN U. A. (2007) beschrieben. Grundlage der Berechnung ist der Ansatz

$$\Phi_I(\xi) = \sum_{K=1}^{n_{s,e}} a_{IK} N_K^{(1)}(\xi). \tag{3.20}$$

Folglich lassen sich die dualen Formfunktionen als Linearkombination der gewöhnlichen Formfunktionen darstellen. Die konstanten Faktoren a_{IK} sind Einträge der Matrix $\mathbf{A}_e \in$

$\mathbb{R}^{4 \times 4}$. Zusammen mit den Matrizen $\mathbf{D}_e \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ und $\mathbf{M}_e \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ und deren Einträgen

$$d_{IK} = \delta_{IK} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N_I^{(1)}(\boldsymbol{\xi}) J(\boldsymbol{\xi}) \, d\xi \, d\eta, \quad (3.21)$$

$$m_{IK} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N_I^{(1)}(\boldsymbol{\xi}) N_K^{(1)}(\boldsymbol{\xi}) J(\boldsymbol{\xi}) \, d\xi \, d\eta \quad (3.22)$$

berechnet sich die Matrix \mathbf{A}_e zu

$$\mathbf{A}_e = \mathbf{D}_e \mathbf{M}_e^{-1}. \quad (3.23)$$

Zur Bestimmung der Einträge d_{IK} und m_{IK} wird über den Parameterraum des Slave-Elements integriert, weshalb für die Transformation des Flächenelements da die Jacobi-Determinante

$$J = \left\| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \eta} \right\| \quad (3.24)$$

benötigt wird. Ist die Jacobi-Determinante konstant, hat das Slave-Element in kartesischen Koordinaten die Form eines Parallelogramms und es ergeben sich die dualen Formfunktionen aus Gleichung (3.19).

Für die integralen Kontaktterme ist das Integrationsgebiet die Kontaktzone. Wie in Unterabschnitt 3.4.1 bereits erwähnt, wird in dieser Arbeit über den Slave-Rand integriert. Für bestimmte Konfigurationen muss nur über Teilgebiete von Slave-Elementen integriert werden. In diesen Fällen gilt die Biorthogonalitätsbedingung (3.16) für die Kontaktintegrale nicht, auch wenn diese bis auf das Integrationsgebiet dieselbe Form haben wie die linke Seite von Gleichung (3.16). Die dualen Formfunktionen müssen in diesen Fällen auf andere Art und Weise ermittelt werden. Geschieht dies nicht, ist die Formulierung inkonsistent. Die Lösung dieses Problems ist die Formulierung der Biorthogonalitätsbedingung (3.16) als Integral über die tatsächliche Kontaktzone der einzelnen Slave-Elemente. Entsprechende Ansätze werden für zweidimensionale Probleme in CICHOSZ UND BISCHOFF (2011) und für dreidimensionale Probleme in POPP U. A. (2013) präsentiert und in dieser Arbeit umgesetzt.

In dieser Arbeit wird der virtuelle Lagrange-Multiplikator mit einem Bubnov-Galerkin-Ansatz diskretisiert. Das Feld des virtuellen Lagrange-Multiplikators wird demnach mit dualen Ansatzfunktionen approximiert und hat elementweise die diskrete Form

$$\delta \boldsymbol{\lambda}_e \approx \delta \boldsymbol{\lambda}_e^h(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{I=1}^{n_{s,e}} \Phi_I^{(1)}(\boldsymbol{\xi}) \delta \mathbf{z}_I. \quad (3.25)$$

Alternativ wird in POPP U. A. (2013) ein Petrov-Galerkin-Ansatz vorgeschlagen, der Standard-Lagrange-Formfunktionen zur Approximation des virtuellen Lagrange-Multiplikators verwendet:

$$\delta \boldsymbol{\lambda}_e \approx \delta \boldsymbol{\lambda}_e^h(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{I=1}^{n_{s,e}} N_I^{(1)}(\boldsymbol{\xi}) \delta \mathbf{z}_I. \quad (3.26)$$

SITZMANN U. A. (2016) verwenden den Petrov-Galerkin-Ansatz mit finiten Elementen höherer Ordnung. Die Vorteile des Petrov-Galerkin-Ansatzes werden vor allem für grobe Netze mit stark gekrümmten Slave-Rändern ersichtlich. Für diese Konfigurationen können nur mit dem Petrov-Galerkin-Ansatz physikalisch sinnvolle Abstände berechnet werden. Gleichzeitig wirkt sich der Petrov-Galerkin-Ansatz nicht negativ auf die gewünschte Entkopplung der Knotenwerte aus, da das wirkliche Lagrange-Multiplikatorfeld weiterhin mit dualen Ansatzfunktionen approximiert wird.

3.4.3 Diskretisierung der virtuellen Kontaktarbeit

Mit den diskretisierten virtuellen Verschiebungen $\delta \mathbf{u}^h$ aus Gleichung (3.4) und dem diskretisierten Lagrange-Multiplikator-Feld $\boldsymbol{\lambda}^h$ aus Gleichung (3.12) kann nun die virtuelle Kontaktarbeit aus Gleichung (2.61) diskretisiert werden. Einsetzen und Umformen der genannten Gleichungen führen letztendlich auf die diskretisierte virtuelle Kontaktarbeit

$$\begin{aligned} \delta W_{\text{PvV}}^{c,h} &= \int_{\gamma_c^{(1),h}} \sum_{I=1}^{n_s} \Xi_I^{(1)} \mathbf{z}_I \cdot \left(\sum_{K=1}^{n_s} N_K^{(1)} \delta \mathbf{d}_K^{(1)} - \sum_{L=1}^{n_m} (N_L^{(2)} \circ P^h) \delta \mathbf{d}_L^{(2)} \right) da \\ &= \sum_{I=1}^{n_s} \sum_{K=1}^{n_s} \mathbf{z}_I \cdot \underbrace{\int_{\gamma_c^{(1),h}} \Xi_I^{(1)} N_K^{(1)} da}_{D_{IK}} \delta \mathbf{d}_K^{(1)} \\ &\quad - \sum_{I=1}^{n_s} \sum_{L=1}^{n_m} \mathbf{z}_I \cdot \underbrace{\int_{\gamma_c^{(1),h}} \Xi_I^{(1)} (N_L^{(2)} \circ P^h) da}_{M_{IL}} \delta \mathbf{d}_L^{(2)}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

In dieser Gleichung ist P^h die diskrete Version der Projektion aus Gleichung (2.35). Die Werte n_s und n_m stehen für die Anzahl der Slave- bzw. Master-Knoten. Charakterisierend für die Mortar-Methode sind die beiden Integrale D_{IK} und M_{IL} , die üblicherweise Mortar-Integrale genannt werden. Deren numerische Berechnung ist vor allem für dreidimensionale Probleme rechenaufwendig. Die numerische Berechnung der Mortar-Integrale stellt die größte Herausforderung der Mortar-Methode dar. Zeitgleich bietet

sie Potenzial für Modifikationen, um den Algorithmus effizienter zu gestalten. An dieser Stelle ist zunächst wichtig festzuhalten, dass die Berechnung der Mortar-Integrale näherungsweise möglich ist. Details zu der Berechnung folgen in Kapitel 5, in dem zuerst konventionelle Methoden zur numerischen Berechnung der Mortar-Integrale geschildert und anschließend alternative Methoden präsentiert werden.

In Gleichung (3.27) werden die nicht näher spezifizierten Formfunktionen Ξ verwendet. Im Folgenden wird nur noch die Formulierung der dualen Mortar-Methode mit $\Xi_I = \Phi_I$ angegeben, da diese Formulierung in der vorliegenden Arbeit hauptsächlich eingesetzt wird. Mit $\Xi_I = \Phi_I$ entspricht das Mortar-Integral D_{IK} elementweise der linken Seite der Biorthogonalitätsbedingung aus Gleichung (3.16). Demzufolge ist $D_{IK} = 0$ und D_{II} wird wie folgt vereinfacht:

$$D_{II} = \int_{\gamma_c^{(1),h}} N_I^{(1)} da, \quad I = 1, \dots, n_s. \quad (3.28)$$

Das Mortar-Integral M_{IL} kann nicht auf dieselbe Weise vereinfacht werden, da die Formfunktionen in M_{IL} auf unterschiedlichen Rändern definiert sind und diese im Allgemeinen nicht übereinstimmen. Innerhalb eines Slave-Elements kann es dementsprechend Knicke in $N_L^{(2)} \circ P^h$ geben, die dazu führen, dass die Biorthogonalitätsbedingung nicht mehr gilt.

Es ist zielführend, die Mortar-Integrale in sogenannte Mortar-Matrizen zu schreiben, damit die diskretisierte virtuelle Kontaktarbeit in Form von diskreten Knotenkräften angegeben werden kann. Somit entspricht die Schreibweise derjenigen der inneren und äußeren Knotenkräfte \mathbf{f}_{int} und \mathbf{f}_{ext} aus den Gleichungen (3.5) und (3.6). Die Mortar-Matrizen setzen sich aus Untermatrizen zusammen, die jeweils zu zwei Knoten der Kontaktträger gehören und wie folgt angegeben werden:

$$\mathbf{D}[I, I] = D_{II} \mathbf{I}_{n_d}, \quad I = 1, \dots, n_s, \quad (3.29)$$

$$\mathbf{M}[I, L] = M_{IL} \mathbf{I}_{n_d}, \quad I = 1, \dots, n_s, \quad L = 1, \dots, n_m. \quad (3.30)$$

Die Dimension der Untermatrizen $\mathbf{D}[I, I]$ und $\mathbf{M}[I, L]$ ergibt sich aus der Dimension n_d des Problems. Die Matrix \mathbf{I}_{n_d} aus den vorherigen Gleichungen beschreibt daher eine Einheitsmatrix der Dimension n_d . Insgesamt gilt für die Dimension der Mortar-Matrizen: $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{(n_d n_s) \times (n_d n_s)}$ und $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{(n_d n_s) \times (n_d n_m)}$. Unter Verwendung der dualen Mortar-Methode gibt es keine Kopplung zwischen zwei verschiedenen Knoten in der Mortar-Matrix \mathbf{D} . Die Mortar-Matrix \mathbf{D} ist folglich eine Diagonalmatrix. Dies ist nicht der Fall bei der Standard-Mortar-Methode und ist als entscheidender Vorteil der dualen Mortar-Methode anzusehen.

Bevor die Knotenkräfte infolge des Kontakts angegeben werden können, müssen die Vektoren mit den wirklichen und virtuellen Knotenverschiebungen sortiert werden. Die Vektoren werden dafür in drei Untermengen aufgeteilt. Eine Untermenge enthält Größen derjenigen Knoten, die nicht Teil eines Kontaktrandes sind. Vektoren dieser Untermenge erhalten den Fußzeiger $(\bullet)_{\mathcal{N}}$ und haben die Dimension $(\bullet)_{\mathcal{N}} \in \mathbb{R}^{n_{nc}n_d}$. Wobei n_{nc} der Anzahl derjenigen Knoten entspricht, die nicht Knoten der Kontaktränder sind, das heißt $n_{nc} = n_{nd} - (n_s + n_m)$. Die zweite Untermenge mit dem Fußzeiger $(\bullet)_{\mathcal{S}}$ enthält Größen von Knoten des Slave-Randes. Die Dimension der Vektoren kann angegeben werden zu $(\bullet)_{\mathcal{S}} \in \mathbb{R}^{n_s n_d}$. Die verbleibende Menge der Größen der Master-Knoten wird in Vektoren der Form $(\bullet)_{\mathcal{M}} \in \mathbb{R}^{n_m n_d}$ sortiert. Der Vektor der Knotenverschiebungen \mathbf{d} und der Vektor der virtuellen Knotenverschiebungen $\delta \mathbf{d}$ können nun in der Form

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} \mathbf{d}_{\mathcal{N}} \\ \mathbf{d}_{\mathcal{M}} \\ \mathbf{d}_{\mathcal{S}} \end{bmatrix}, \quad \delta \mathbf{d} = \begin{bmatrix} \delta \mathbf{d}_{\mathcal{N}} \\ \delta \mathbf{d}_{\mathcal{M}} \\ \delta \mathbf{d}_{\mathcal{S}} \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

angegeben werden.

Mit dem globalen Vektor der diskreten Lagrange-Multiplikatoren \mathbf{z} und nach Einsetzen der Gleichungen (3.29)–(3.31) in die diskrete virtuelle Kontaktarbeit aus Gleichung (3.27) ergibt sich die kompakte Schreibweise

$$\delta W_{PvV}^{c,h} = \delta \mathbf{d}_{\mathcal{S}}^T \mathbf{D}^T \mathbf{z} - \delta \mathbf{d}_{\mathcal{S}}^T \mathbf{M}^T \mathbf{z} = \delta \mathbf{d}^T \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -\mathbf{M}^T \\ \mathbf{D}^T \end{bmatrix} \mathbf{z} = \delta \mathbf{d}^T \mathbf{f}_c(\mathbf{d}, \mathbf{z}). \quad (3.32)$$

Hierin sind $\mathbf{f}_c(\mathbf{d}, \mathbf{z})$ die Knotenkräfte infolge des Kontakts. An dieser Stelle ist zur Verdeutlichung explizit angegeben, dass \mathbf{f}_c sowohl von den Knotenverschiebungen als auch von den diskreten Lagrange-Multiplikatoren abhängt. Die Abhängigkeit in den Verschiebungen ist dabei nichtlinear. Bei Netzkopplungsproblemen ist \mathbf{f}_c unabhängig von den Verschiebungen, da auch die Mortar-Matrizen nicht von den Verschiebungen abhängen. Bei Netzkopplungsproblemen müssen die Matrizen demzufolge nur zu Beginn der Berechnung ermittelt werden. Bei Kontaktproblemen ändern sich die Mortar-Matrizen im Verlauf der Berechnung und erfordern eine Neuberechnung nach jeder Änderung der Geometrie. Mit Gleichung (3.29) gilt offensichtlich $\mathbf{D}^T = \mathbf{D}$, wenn die duale Mortar-Methode verwendet wird.

3.4.4 Diskretisierung der Kontaktbedingungen

Als Nächstes werden die Kontaktbedingungen aus den Gleichungen (2.70) und (2.71) diskretisiert. An dieser Stelle kommt ein wesentlicher Vorteil der dualen Mortar-Methode

zum Tragen. Die Diskretisierung des Lagrange-Multiplikators mit dualen Ansatzfunktionen ermöglicht es, die Kontaktbedingungen in Normalen- und Tangentialrichtung knotenweise zu formulieren. Die numerische Behandlung ist dadurch ähnlich einfach wie bei NTS-Diskretisierungen und die weiterhin schwache, integrale Erfüllung der Kontaktbedingungen führt gleichzeitig auf einen stabilen Kontaktalgorithmus. Die Äquivalenz zwischen den variationellen Kontaktbedingungen und den knotenweisen Kontaktbedingungen wird in HÜEBER (2008) gezeigt. Die diskretisierten Kontaktbedingungen werden der letztgenannten und der Arbeit von GITTERLE (2012) folgend ohne weitere Herleitungen angegeben. Die Gleichungen ergeben sich nach einigen Umformungen durch Einsetzen der diskretisierten Felder \mathbf{u}^h und $\boldsymbol{\lambda}^h$ sowie deren virtuellen Größen in die schwache Form der Kontaktbedingungen aus den Gleichungen (2.70) und (2.71).

Die Kontaktbedingungen in Normalenrichtung werden in Abhängigkeit des sogenannten gewichteten Knotenabstandes \tilde{g}_I formuliert. Die Definition dieser integralen Knotengröße lautet:

$$\tilde{g}_I = \int_{\gamma_c^{(1),h}} \Phi_I g_n^h \, da. \quad (3.33)$$

In vorheriger Gleichung steht g_n^h für den Abstand aus Gleichung (2.36) in der diskretisierten Form. Die numerische Integration in \tilde{g}_I erfolgt in Analogie zur Berechnung der Mortar-Integrale und wird deshalb ebenfalls in Kapitel 5 detaillierter beschrieben.

Die knotenweisen Kontaktbedingungen können in einer Form angegeben werden, die von der Schreibweise den kontinuierlichen Kontaktbedingungen aus Gleichungen (2.44) entspricht. Die Kontaktbedingungen werden allerdings nicht an jedem materiellen Punkt, sondern nur an den Slave-Knoten aufgestellt:

$$\begin{aligned} \tilde{g}_I &\geq 0, \\ z_{n,I} &\geq 0, \\ z_{n,I} \tilde{g}_I &= 0, \end{aligned} \quad (3.34)$$

mit $I = 1, \dots, n_s$. In den vorherigen Gleichungen ist $z_{n,I}$ der Anteil in Normalenrichtung des diskreten Lagrange-Multiplikators an Knoten I . Die Zerlegung des diskreten Lagrange-Multiplikators erfolgt auf ähnliche Weise wie die Zerlegung des kontinuierlichen Lagrange-Multiplikator-Feldes $\boldsymbol{\lambda}$ in Gleichung (2.64):

$$z_{n,I} = \mathbf{n}_{cI} \cdot \mathbf{z}_I, \quad \mathbf{z}_{\tau,I} = \boldsymbol{\tau}_I^T \mathbf{z}_I. \quad (3.35)$$

Die Matrix $\boldsymbol{\tau}_I$ fasst darin die Tangenten des Knotens I zusammen. Sie ist die diskrete Entsprechung von $\boldsymbol{\tau}$ aus Gleichung (2.38):

$$\boldsymbol{\tau}_I = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\tau}_I^\xi & \boldsymbol{\tau}_I^\eta \end{pmatrix}. \quad (3.36)$$

Auch die diskreten Kontaktbedingungen in Tangentialrichtung entsprechen in ihrer äußeren Form den Kontaktbedingungen des Kontinuums aus den Gleichungen (2.45). Wie in GITTERLE U. A. (2010) vorgeschlagen, werden zeitabhängige Größen inkrementell dargestellt, da in dieser Arbeit quasistatische Probleme behandelt werden. Dafür werden die zeitabhängige Tangentialgeschwindigkeit $\mathbf{v}_{\tau,\text{rel}}(\mathbf{X}^{(1)}, t)$ und der zeitabhängige Parameter $\dot{\gamma}$ mit einem impliziten Euler-Verfahren zeitlich diskretisiert und anschließend mit dem Zeitschritt Δt multipliziert. Die diskreten Kontaktbedingungen in Tangentialrichtung können für jeden Slave-Knoten der Finite-Elemente-Diskretisierung mit dem Knotenindex $I = 1, \dots, n_s$ angegeben werden:

$$\begin{aligned} \psi_I &= \|\mathbf{z}_{\tau,I}\| - \mu z_{n,I} \leq 0, \\ \tilde{\mathbf{u}}_{\tau,I} - \tilde{\gamma}_I \mathbf{z}_{\tau,I} &= \mathbf{0}, \\ \tilde{\gamma}_I &\geq 0, \\ \psi_I \tilde{\gamma}_I &= 0. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Die Größen $\tilde{\mathbf{u}}_{\tau,I}$ und $\tilde{\gamma}_I$ stellen darin die in GITTERLE U. A. (2010) verwendeten inkrementellen Größen der diskretisierten Tangentialgeschwindigkeit $\mathbf{v}_{\tau,\text{rel}}^h(\mathbf{X}^{(1)}, t)$ und des diskretisierten Parameters $\dot{\gamma}^h$ dar. Bei $\tilde{\mathbf{u}}_{\tau,I}$ handelt es sich um das Gleitinkrement, das bei quasistatischen Problemen ein Maß zur Beschreibung der Tangentialverschiebung von Knoten I zwischen zwei Pseudozeitschritten ist. Das Gleitinkrement von Knoten I lässt sich in Abhängigkeit der Mortar-Matrizen angeben:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{u}}_{\tau,I} &= -\boldsymbol{\tau}_I^T(t_k) \left((\mathbf{D}[I,I](t_k) - \mathbf{D}[I,I](t_{k-1})) \mathbf{x}_I^{(1)}(t_k) \right) \\ &\quad + \boldsymbol{\tau}_I^T(t_k) \left(\sum_{L=1}^{n_m} (\mathbf{M}[I,L](t_k) - \mathbf{M}[I,L](t_{k-1})) \mathbf{x}_L^{(2)}(t_k) \right). \end{aligned} \quad (3.38)$$

In vorheriger Gleichung ist t_k die Pseudozeit zum Zeitschritt k und $t_{k-1} = t_k - \Delta t$ die Pseudozeit des vorherigen Zeitschrittes. Die Berechnung des Gleitinkrementes $\tilde{\mathbf{u}}_{\tau,I}$ benötigt demzufolge die Mortar-Matrizen \mathbf{D} und \mathbf{M} sowohl im aktuellen Zeitschritt t_k als auch im vorherigen Zeitschritt t_{k-1} . GITTERLE U. A. (2010) verwenden zur Herleitung des Gleitinkrementes aus Gleichung (3.38) eine objektive diskrete Tangentialverschiebung, die in ähnlicher Weise in PUSO UND LAURSEN (2004b) beschrieben wird.

Bemerkenswert bei den Kontaktbedingungen der dualen Mortar-Methode ist deren knotenweise Formulierung. Für die Standard-Mortar-Methode ist eine derartige Formulie-

rung nicht konsistent möglich, wird aber in der Literatur trotzdem so umgesetzt, da der Fehler gering ist (HÜEBER 2008; POPP 2012). Auch in dieser Arbeit werden die Kontaktbedingungen der Standard-Mortar-Methode knotenweise ausgewertet, wenn diese Methode für Vergleichszwecke verwendet wird.

3.5 Gesamtformulierung des Kontaktproblems

In den vorherigen Abschnitten dieses Kapitels wurde die Finite-Elemente-Diskretisierung aller Gleichungen aus Abschnitt 2.4.4 angegeben. Zunächst wurde die Diskretisierung der Geometrie und des Gleichgewichts der Kontinuumsmechanik beschrieben. Mit der dualen Mortar-Methode wurde eine geeignete Methode zur Diskretisierung des Kontakts präsentiert. Diese wurde anschließend verwendet, um die Kontaktarbeit und die Kontaktbedingungen in ihrer diskreten Form anzugeben. An dieser Stelle werden die bisher getrennt betrachteten Gleichungen zusammengefasst und das Gleichungssystem des gesamten diskreten Kontaktproblems angegeben.

Die Diskretisierung der virtuellen Arbeit aus Gleichung (2.69) setzt sich zusammen aus der diskretisierten inneren und äußeren Arbeit, gegeben in den Gleichungen (3.5) und (3.6), sowie der diskretisierten Kontaktarbeit aus Gleichung (3.32). Das resultierende Gleichgewicht muss für virtuelle Knotenverschiebungen $\delta \mathbf{d}$ gelten, die beliebig sind, aber an Rändern mit vorgegebenen Verschiebungsrandbedingungen den Wert null annehmen. Folglich lässt sich das Gleichgewicht kompakt angeben:

$$\mathbf{r}(\mathbf{d}, \mathbf{z}) = \mathbf{f}_{\text{int}}(\mathbf{d}) - \mathbf{f}_{\text{ext}} + \mathbf{f}_c(\mathbf{d}, \mathbf{z}) = \mathbf{0}. \quad (3.39)$$

Hierin stellt $\mathbf{r}(\mathbf{d}, \mathbf{z})$ den Residuumsvektor dar, der im Gleichgewichtszustand dem Nullvektor entspricht und anderenfalls mögliche Ungleichgewichtskräfte enthält. Die Abhängigkeit von den Knotenverschiebungen \mathbf{d} und den diskreten Lagrange-Multiplikatoren \mathbf{z} ist hier nochmals explizit angegeben, um die Existenz der beiden unbekanntem Felder zu verdeutlichen. Die Abhängigkeit von den Knotenverschiebungen \mathbf{d} ist dabei nichtlinear. Dirichlet- und Neumann-Randbedingungen sind in dem Gleichgewicht aus Gleichung (3.39) bereits berücksichtigt. Die Kontaktbedingungen hingegen werden gesondert angegeben. Die Kontaktbedingungen in Normalenrichtung (3.34) und in Tangentialrichtung (3.37) können unter Verwendung der dualen Mortar-Methode knotenweise je Slave-Knoten angegeben werden. Die entsprechenden Gleichungen und Ungleichungen

sind hier nochmals zusammengefasst:

$$\begin{aligned}
 \tilde{g}_I &\geq 0, & \psi_I &= \|\mathbf{z}_{\tau,I}\| - \mu z_{n,I} \leq 0, \\
 z_{n,I} &\geq 0, & \tilde{\mathbf{u}}_{\tau,I} - \tilde{\gamma}_I \mathbf{z}_{\tau,I} &= \mathbf{0}, \\
 z_{n,I} \tilde{g}_I &= 0 & \tilde{\gamma}_I &\geq 0, \\
 & & \psi_I \tilde{\gamma}_I &= 0.
 \end{aligned} \tag{3.40}$$

Die Kontaktbedingungen gelten für die Knoten des Slave-Randes und damit gilt für den Knotenindex: $I = 1, \dots, n_s$. Die Lösung des gesamten Kontaktproblems (3.39)–(3.40) ist vor allem aufgrund zweier Eigenschaften schwierig. Erstens infolge der Ungleichungen der Kontaktbedingungen und zweitens infolge der Nichtlinearität. Letztgenannte resultiert aus den üblichen Nichtlinearitäten der Kontinuumsmechanik, nämlich der materiellen und geometrischen Nichtlinearität. Außerdem kommen die Nichtlinearitäten der Kontaktarbeit und der Kontaktbedingungen hinzu. Strategien zum Umgang mit diesen Schwierigkeiten und damit zur Lösung des Kontaktproblems werden im nachfolgenden Kapitel geschildert.

4

Lösungsstrategie

Dieses Kapitel beschreibt die in dieser Arbeit verwendete Strategie zum Lösen der nichtlinearen Gleichungen und Ungleichungen, die sich infolge der Finite-Elemente-Diskretisierung ergeben. Zur Lösung der diskretisierten Gleichungen werden bewährte Strategien eingesetzt, deren Beschreibungen sich deshalb auf das Wesentliche beschränken. Genauere Erläuterungen können der jeweils angegebenen Literatur entnommen werden. Ziel dieses Kapitels ist hauptsächlich die Vermittlung von zwei Aspekten. Erstens wird die Grundidee der Lösungsstrategie präsentiert, damit in den kommenden Kapiteln verständlich ist, wie die numerischen Experimente berechnet werden. Zweitens wird ein Vorteil der dualen Mortar-Methode gegenüber der Standard-Mortar-Methode herausgestellt. Der Vorteil besteht in der Möglichkeit, die unbekanntenen Lagrange-Multiplikatoren aus dem Gleichungssystem herauszukondensieren.

Der Aufbau dieses Kapitels orientiert sich an dem Ablauf des Lösungsalgorithmus. In der vorliegenden Arbeit werden die Ungleichungen mithilfe einer sogenannten primal-dualen Aktive-Mengen-Strategie in Gleichungen überführt, da der Umgang mit diesen einfacher ist als mit Ungleichungen. Die primal-duale Aktive-Mengen-Strategie erfordert die rechenaufwendige Abstandsberechnung der Kontaktränder. In Abschnitt 4.1 wird deshalb zunächst ein Kontaktsuchalgorithmus beschrieben, der effizient Paare von Slave- und Master-Elementen findet, für die eine genaue Berechnung des Abstandes sinnvoll ist. Erst anschließend wird in Abschnitt 4.2 mit der primal-dualen Aktive-Mengen-Strategie eine Methode vorgestellt, um die Ungleichungen in Gleichungen zu überführen. Diese Gleichungen sind nach wie vor nichtlinear in den Verschiebungen und werden mit dem in Abschnitt 4.3 beschriebenen inkrementell-iterativen Newton-Raphson-Verfahren gelöst. Aufgrund der verwendeten primal-dualen Aktive-Mengen-Strategie können alle auftretenden Nichtlinearitäten innerhalb einer Iterationsschleife gelöst werden. Eine Veranschaulichung des Verfahrens findet sich in Abschnitt 4.4. Im letztgenannten Abschnitt wird ebenfalls der Vorteil der dualen Mortar-Methode hervorgehoben.

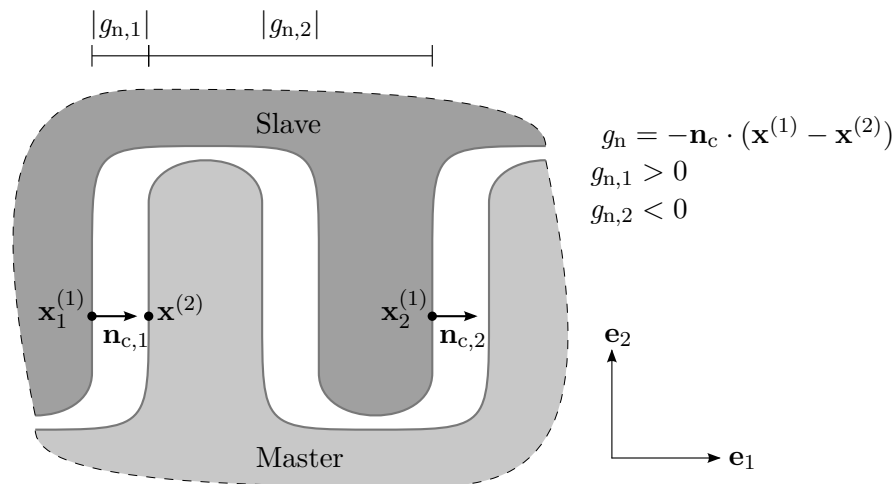


Abbildung 4.1: Kontakttrandkonfiguration, die ohne Kontaktsuche zur Fehlinterpretation der Aktivität führt.

4.1 Kontaktsuche

Mit der Kontaktsuche werden Paare von Slave- und Master-Elementen identifiziert, die möglicherweise in Kontakt miteinander sind. Das heißt, es werden Elemente gesucht, die räumlich nahe beieinanderliegen. Es ist dabei unbedeutend, ob die Elemente tatsächlich in Kontakt miteinander stehen oder nicht. Die Überprüfung des Kontakts geschieht in einem separaten Schritt anhand des gewichteten Abstandes aus Gleichung (3.33) und ist numerisch aufwendiger als die Kontaktsuche. Ziel der Kontaktsuche ist die Reduktion des numerischen Aufwands der Abstandsberechnung, indem sie nur für Paare durchgeführt wird, für die sich die Berechnung lohnt. Ohne Kontaktsuche müsste der gewichtete Abstand zwischen jedem Slave-Knoten und jedem Master-Element ermittelt werden und der Algorithmus wäre dadurch vor allem für große Probleme sehr rechenaufwendig.

Neben dieser Beschleunigung des Algorithmus hat die Kontaktsuche noch ein weiteres Ziel: Die Berechnung negativer Abstände soll vermieden werden, wenn eigentlich keine Durchdringung der betrachteten Randelemente vorliegt. Dieser Zusammenhang wird anhand von Abbildung 4.1 erklärt. Zur vereinfachten Darstellung wird das Verhalten nur für materielle Punkte und deren Abstand g_n angegeben, gilt aber ebenso für das diskretisierte Kontaktproblem und den gewichteten Abstand \tilde{g}_I aus Gleichung (3.33). Zwischen den Punkten $\mathbf{x}_1^{(1)}$ und $\mathbf{x}^{(2)}$ erfolgt die Abstandsberechnung mit Gleichung (2.36). Für die dargestellte Konfiguration ergibt sich ein positiver Abstand und folgerichtig identifiziert der Algorithmus einen inaktiven Kontaktrand. Ohne Kontaktsuche werden auch für weiter entfernte Kontaktränder die Abstände berechnet. Dementsprechend auch zwischen den Punkten $\mathbf{x}_2^{(1)}$ und $\mathbf{x}^{(2)}$. Durch die Orientierung der Normalen $\mathbf{n}_{c,2}$ und dem Vek-

tor $(\mathbf{x}_2^{(1)} - \mathbf{x}^{(2)})$ ergibt sich ein negativer Abstand, obwohl sich die Kontaktränder nicht durchdringen. Der negative Abstand führt im Algorithmus zur Fehlinterpretation der Aktivität und damit zu Fehlern in den Ergebnissen. Durch die Kontaktsuche muss daher der Bereich, in dem der mögliche Kontaktpartner gesucht wird, sinnvoll eingegrenzt werden.

Die Kontaktsuche ist demzufolge entscheidend für die Effizienz und die Zuverlässigkeit des Kontaktalgorithmus. Das Auffinden sinnvoller Paare von Slave- und Master-Elementen kann über unterschiedliche Methoden erfolgen, die sich hinsichtlich ihrer numerischen Komplexität unterscheiden. Ein Überblick über einige Methoden unter Angabe der Komplexität lässt sich in WRIGGERS (2006) finden. In dieser Arbeit wird ein Kontaktsuchalgorithmus verwendet, der für Kontaktprobleme mit großen Deformationen sehr effizient ist und beispielsweise in YANG UND LAURSEN (2008a) beschrieben wird. Bei diesem Kontaktsuchalgorithmus werden die Kontaktränder durch hierarchisch aufgebaute Hüllkörper umschrieben und mithilfe von Binärbäumen wird effizient geprüft, ob sich die Hüllkörper überschneiden. Das Vorgehen wird im Folgenden anhand von Abbildung 4.2 für zweidimensionale Probleme knapp geschildert und kann im Detail in YANG UND LAURSEN (2008a) oder YANG (2009) nachgelesen werden.

Zuerst werden die verwendeten Hüllkörper beschrieben. Diese umschreiben die Geometrie des Kontaktrandes und dessen Teilgebiete durch relativ simple Geometrien. In dieser Arbeit kommen dafür Polytope, auch k -Discrete-Oriented-Polytopes (k -DOPs) genannt, zum Einsatz. Für zweidimensionale Probleme werden 8-DOPs verwendet, die in Abbildung 4.2 durch gestrichelte und gepunktete Linien visualisiert werden. Bei dreidimensionalen Problemen werden 18-DOPs eingesetzt, um die Teilgebiete der Kontaktränder zu umschreiben. Die Hüllkörper müssen zu jedem Knoten des umschriebenen Kontaktrandes einen gewissen Abstand haben. Dadurch umschreiben sie das Teilgebiet des Kontaktrandes relativ genau, nehmen aber immer ein größeres Gebiet ein als das Teilgebiet des Kontaktrandes. Nach der kurzen Beschreibung der Hüllkörper folgt nun die Datenstruktur, mit der diese abgespeichert werden. Die Hüllkörper werden zunächst jeweils für den gesamten Slave- und Master-Rand gebildet und ihre Daten werden an den Wurzelknoten zweier getrennter Binärbäume gespeichert. Dies entspricht Ebene 1 in Abbildung 4.2. Durch geeignete Methoden werden anschließend die einzelnen Kontaktränder in jeweils zwei Teilgebiete aufgeteilt, deren Hüllkörper gebildet und deren Informationen an den Kindknoten gespeichert. Diese Teilungsprozedur wird fortgeführt, bis keine weitere Unterteilung mehr möglich ist, da alle Teilgebiete einzelne Slave- bzw. Master-Elemente sind. Die Blattknoten der Binärbäume speichern demnach die Informationen der Hüllkörper einzelner Slave- bzw. Master-Elemente. In Abbildung 4.2 entspricht das Ebene 3 und wird durch die Angabe der Slave- bzw. Master-Elementnummern unter den Blattknoten der Binärbäume verdeutlicht. Für gewöhnlich müssen die Binärbäume nur zu

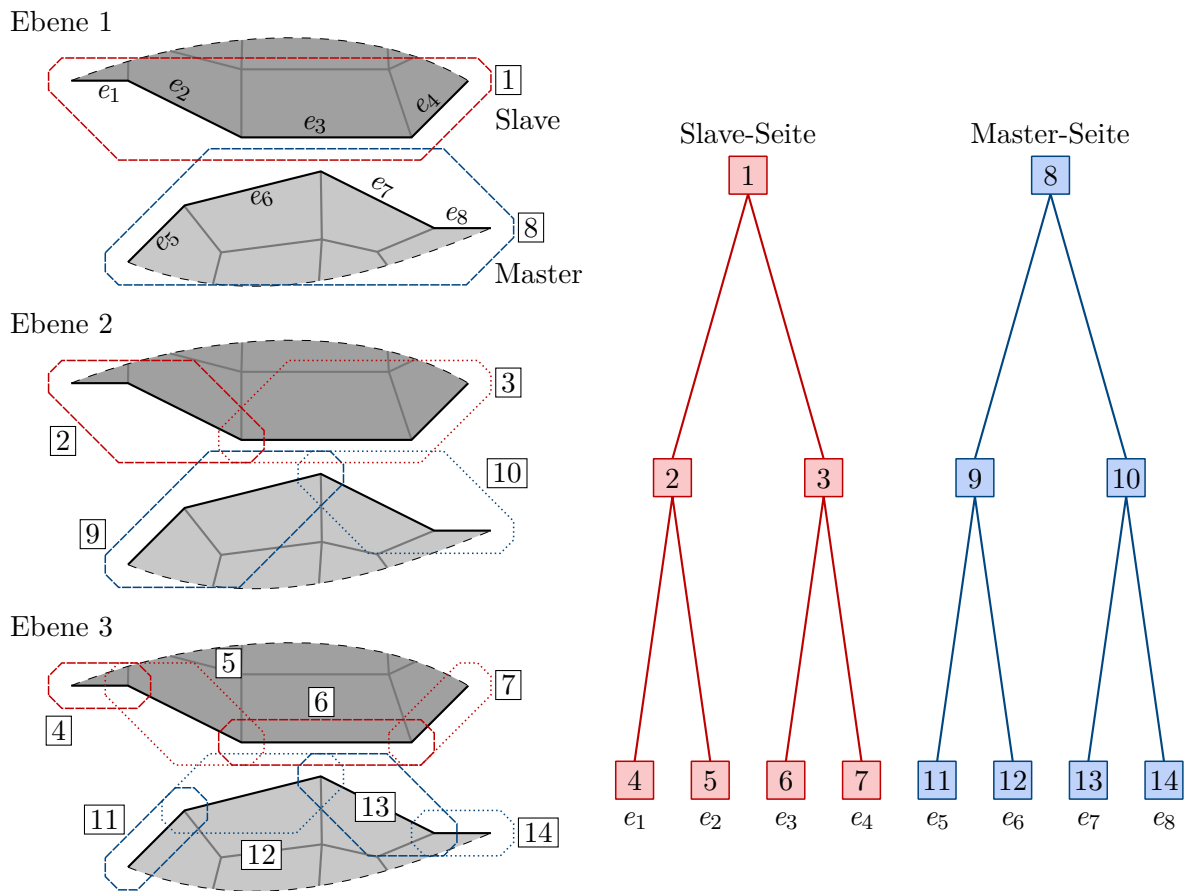


Abbildung 4.2: Fiktive Kontakttränder mit Visualisierung der Hüllkörper und der zugehörigen Binärbäume für die Kontaktsuche.

Beginn des Kontaktalgorithmus erstellt werden. Es müssen lediglich die Geometriedaten der Hüllkörper aktualisiert werden, sobald sich die Kontakttränder verformen.

Ziel des Kontaktsuchalgorithmus ist es, die Paare von Slave- und Master-Elementen zu finden, deren Hüllkörper sich überschneiden. Die Überschneidung zu prüfen ist aufgrund der verwendeten k -DOPs trivial. Der Kontaktsuchalgorithmus wäre aber trotzdem ineffizient, wenn jede mögliche Paarung direkt geprüft würde. Daher werden die Binärbäume genutzt, um eine effiziente Suche zu ermöglichen. In der folgenden Schilderung des Kontaktsuchalgorithmus wird zur besseren Lesbarkeit von der Überschneidung von Binärbaumknoten gesprochen, gemeint ist aber immer die Überschneidung von den zugehörigen Hüllkörpern. Der Kontaktsuchalgorithmus durchläuft die Binärbäume ausgehend von den Wurzelknoten und prüft diese auf ihre Überschneidung. Wird eine Überschneidung festgestellt, wird zunächst der linke Kindknoten des Binärbaums der Master-Seite auf Überschneidungen geprüft. Gibt es eine Überschneidung, wird der nächste linke Kindknoten geprüft. Gibt es keine Überschneidung, muss der weitere Verlauf des Teil-

baumes nicht geprüft werden und es erfolgt die Prüfung des rechten Kindknotens. Bei einer Überschneidung mit dem rechten Kindknoten werden dessen Kindknoten auf dieselbe Weise geprüft – wieder zunächst der linke und anschließend der rechte Kindknoten. Auf diese Art wird zunächst der Binärbaum der Master-Seite durchlaufen, bis ein Blattknoten erreicht wird. Für jeden erreichten Blattknoten wird nachfolgend der Binärbaum der Slave-Seite analog zum eben beschriebenen Vorgehen durchlaufen. Sobald zwei Blattknoten sich überschneiden, wird dieses Paar eines Slave- und Master-Elements als mögliches Kontaktpaar gespeichert. In dem Beispiel aus Abbildung 4.2 ist das für folgende Paare der Fall: (e_2, e_6) , (e_3, e_6) und (e_3, e_7) , bzw. für die Blattknotenpaare $(5, 12)$, $(6, 12)$ und $(6, 13)$. Diese Kontaktrandelemente liegen nahe beieinander und für diese Paare würden die Berechnungen der Abstände und der Mortar-Integrale erfolgen.

4.2 Primal-duale Aktive-Mengen-Strategie

Mit der im vorherigen Abschnitt beschriebenen Kontaktsuche wird lediglich die Möglichkeit von Kontaktereignissen beurteilt. In diesem Abschnitt wird geschildert, wie jeder Slave-Knoten der Finite-Elemente-Diskretisierung einer Menge zugeordnet wird, die seinen tatsächlichen Kontaktzustand beschreibt. Die Slave-Knoten können entweder inaktiv oder aktiv sein und im letztgenannten Fall wird zusätzlich zwischen Gleit- und Haftzuständen unterschieden. Durch diese Unterteilung ist es möglich, die Ungleichungen der Kontaktbedingungen (3.40) für die jeweiligen Mengen in Gleichungen zu überführen. Das hier verwendete Vorgehen entspricht der in HINTERMÜLLER U. A. (2002), HÜEBER UND WOHLMUTH (2005b) und HÜEBER U. A. (2008) beschriebenen primal-dualen Aktive-Mengen-Strategie. Deren Anwendung auf konsistent linearisierte Probleme mit großen Deformationen wird beispielsweise in POPP U. A. (2009) sowie GITTERLE U. A. (2010) geschildert.

Bei dieser Strategie werden alle Knoten des Slave-Randes über die folgenden Bedingungen in die Menge der aktiven Knoten \mathcal{A} und die Menge der inaktiven Knoten \mathcal{I} unterteilt:

$$\mathcal{A} = \{I \in \mathcal{S} \mid z_{n,I} - c_n \tilde{g}_I > 0\}, \quad c_n > 0, \quad (4.1)$$

$$\mathcal{I} = \{I \in \mathcal{S} \mid z_{n,I} - c_n \tilde{g}_I \leq 0\}, \quad c_n > 0. \quad (4.2)$$

Jeder Slave-Knoten wird einer der beiden Mengen zugewiesen, sodass $\mathcal{S} = \mathcal{A} \cup \mathcal{I}$ und $\mathcal{A} \cap \mathcal{I} = \emptyset$. In den Gleichungen (4.1) und (4.2) ist c_n ein Parameter, der keinen Einfluss auf die Zuordnung zu den Mengen hat, aber die Konvergenz der im nächsten Abschnitt beschriebenen iterativen Lösungsstrategie beeinflusst (HÜEBER UND WOHLMUTH 2005b). Die Slave-Knoten, die mit dem Master-Rand in Kontakt stehen, gehören

zur Menge \mathcal{A} , die wiederum in zwei Mengen unterteilt wird. Diese sind die Menge der haftenden Knoten \mathcal{H} sowie die Menge der gleitenden Knoten \mathcal{G} und können identifiziert werden über die Bedingungen

$$\mathcal{H} = \{I \in \mathcal{A} \mid \|\mathbf{z}_{\tau,I} + c_t \tilde{\mathbf{u}}_{\tau,I}\| - \mu(z_{n,I} - c_n \tilde{g}_I) < 0\}, \quad c_n > 0, \quad c_t > 0, \quad (4.3)$$

$$\mathcal{G} = \{I \in \mathcal{A} \mid \|\mathbf{z}_{\tau,I} + c_t \tilde{\mathbf{u}}_{\tau,I}\| - \mu(z_{n,I} - c_n \tilde{g}_I) \geq 0\}, \quad c_n > 0, \quad c_t > 0. \quad (4.4)$$

Ebenso wie der Parameter c_n beeinflusst der Parameter c_t nicht die Zuordnung zu den Mengen, sondern wirkt sich lediglich auf die Konvergenz der iterativen Lösungsstrategie aus. Eine Zuordnung der aktiven Slave-Knoten zu einer der beiden Teilmengen \mathcal{H} und \mathcal{G} ist eindeutig möglich, sodass $\mathcal{A} = \mathcal{H} \cup \mathcal{G}$ und $\mathcal{H} \cap \mathcal{G} = \emptyset$.

Durch die Unterteilung in die genannten Mengen ist die Formulierung der Ungleichungen als Gleichungen möglich. An der Nichtlinearität des Kontakts ändert das nichts. Diese äußert sich nun in der Nichtlinearität der Zuordnung zu den genannten Teilmengen. Es ist nicht möglich die Gleichungen (4.1)–(4.4) zu linearisieren und es ist deshalb nicht möglich die Nichtlinearität infolge des Kontakts innerhalb derselben Newton-Raphson-Iterationsschleife zu behandeln wie die geometrische und materielle Nichtlinearität. Um dies zu ermöglichen, werden die Kontaktbedingungen aus den Gleichungen (3.40) deshalb üblicherweise in Form von sogenannten Komplementaritätsfunktionen ausgedrückt. Diese repräsentieren nicht nur die Kontaktbedingungen, sondern nehmen intern zusätzlich eine Unterteilung in die genannten Teilmengen vor. Für die Kontaktbedingungen in Normalenrichtung lautet die Komplementaritätsfunktion:

$$C_{n,I}(\mathbf{z}_I, \mathbf{d}) = z_{n,I} - \max(0, z_{n,I} - c_n \tilde{g}_I) = 0, \quad c_n > 0. \quad (4.5)$$

Die Kontaktbedingungen der Tangentialrichtung werden durch die vektorwertige Komplementaritätsfunktion

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{\tau,I}(\mathbf{z}_I, \mathbf{d}) = & \max(\mu(z_{n,I} - c_n \tilde{g}_I), \|\mathbf{z}_{\tau,I} + c_t \tilde{\mathbf{u}}_{\tau,I}\|) \mathbf{z}_{\tau,I} \\ & - \mu \max(0, z_{n,I} - c_n \tilde{g}_I) (\mathbf{z}_{\tau,I} + c_t \tilde{\mathbf{u}}_{\tau,I}) = \mathbf{0}, \quad c_n > 0, c_t > 0 \end{aligned} \quad (4.6)$$

ausgedrückt. Für die Betrachtung zweidimensionaler Probleme reduziert sich die Komplementaritätsfunktion (4.6) auf eine skalare Gleichung. Die genannten Komplementaritätsfunktionen sind nichtlinear von den Verschiebungen und linear von den Lagrange-Multiplikatoren abhängig. Im Gegensatz zu den Gleichungen (4.1)–(4.4) können sie aber linearisiert werden, obwohl sie aufgrund der max-Funktionen nicht glatt sind. Mithilfe der Komplementaritätsfunktionen kann demnach das im folgenden Abschnitt beschriebene nichtglatte Newton-Raphson-Verfahren angewendet werden und alle auftretenden Nichtlinearitäten können innerhalb einer Iterationsschleife behandelt werden.

4.3 Linearisierung des Gleichungssystems

Die nichtlinearen Gleichungen des quasistatischen Kontaktproblems werden in diesem Abschnitt innerhalb eines Newton-Raphson-Verfahrens linearisiert. Die Ausführungen zu diesem inkrementell-iterativen Verfahren beschränken sich weitestgehend auf die Schritte, die nötig sind, um die Möglichkeit zur Kondensation der Lagrange-Multiplikatoren ersichtlich zu machen. Zur Bestimmung der unbekanntenen Vektoren \mathbf{d} und \mathbf{z} werden das Gleichgewicht aus Gleichung (3.39) und die Kontaktbedingungen in Form der Komplementaritätsfunktionen (4.5) und (4.6) betrachtet. Diese lauten zusammengefasst:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(\mathbf{d}_{k+1}, \mathbf{z}_{k+1}) &= \mathbf{f}_{\text{int}}(\mathbf{d}_{k+1}) - \mathbf{f}_{\text{ext}} + \mathbf{f}_c(\mathbf{d}_{k+1}, \mathbf{z}_{k+1}) = \mathbf{0}, \\ C_{n,I}(\mathbf{z}_{I,k+1}, \mathbf{d}_{k+1}) &= 0 \quad \forall I \in \mathcal{S}, \\ \mathbf{C}_{\tau,I}(\mathbf{z}_{I,k+1}, \mathbf{d}_{k+1}) &= \mathbf{0} \quad \forall I \in \mathcal{S}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Der Grundgedanke zur Lösung der diskreten nichtlinearen Gleichungen besteht in der Lösung mehrerer linearer Gleichungen, die sich aus der Linearisierung des Gleichungssystems (4.7) ergeben. Die Lösung der nichtlinearen Gleichungen wird folglich iterativ approximiert. Die äußeren Lasten werden zusätzlich inkrementell aufgebracht, um die Nichtlinearität der Gleichungen je Inkrement zu reduzieren und somit die Iteration zu vereinfachen. Ausgehend von einem bekannten und zulässigen Gleichgewichtszustand $(\mathbf{d}_k, \mathbf{z}_k)$ für das Lastniveau $\mathbf{f}_{\text{ext},k}$ wird per Iteration der zulässige Gleichgewichtszustand $(\mathbf{d}_{k+1}, \mathbf{z}_{k+1})$ für das Lastniveau $\mathbf{f}_{\text{ext},k+1}$ gesucht. Bei quasistatischen Problemen und der hier verwendeten Lastkontrolle nimmt das Lastniveau die Rolle der Pseudozeit ein. Mit dem Lastniveau kann demnach die Deformationsevolution beschrieben werden.

Die Linearisierung einer nichtlinearen Gleichung der Form $\mathbf{a}(\mathbf{d}, \mathbf{z}) = \mathbf{0}$ wird allgemein in der Form

$$\text{lin } \mathbf{a}(\mathbf{d}, \mathbf{z}) = \mathbf{a}(\mathbf{d}^i, \mathbf{z}^i) + \Delta \mathbf{a}(\mathbf{d}^i, \mathbf{z}^i) = \mathbf{0} \quad (4.8)$$

angegeben. In vorheriger Gleichung müssten alle Variablen den Fußzeiger $(\bullet)_{k+1}$ tragen, da sie für dieses Lastniveau gelöst werden. Allerdings wird hier und im Folgenden zur besseren Lesbarkeit auf diesen Fußzeiger verzichtet. Der Kopfzeiger $(\bullet)^i$ zeigt an, auf welchen Iterationsschritt sich die Größe bezieht. Die Abkürzung $\Delta \mathbf{a}(\mathbf{d}^i, \mathbf{z}^i)$ ist wie folgt definiert:

$$\Delta \mathbf{a}(\mathbf{d}^i, \mathbf{z}^i) = \left. \frac{\partial \mathbf{a}(\mathbf{d}, \mathbf{z})}{\partial \mathbf{d}} \right|_{\mathbf{d}^i, \mathbf{z}^i} \Delta \mathbf{d}^{i+1} + \left. \frac{\partial \mathbf{a}(\mathbf{d}, \mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}} \right|_{\mathbf{d}^i, \mathbf{z}^i} \Delta \mathbf{z}^{i+1}. \quad (4.9)$$

Hierin gilt für die iterativen Verbesserungen: $\Delta \mathbf{d}^{i+1} = \mathbf{d}^{i+1} - \mathbf{d}^i$ und $\Delta \mathbf{z}^{i+1} = \mathbf{z}^{i+1} - \mathbf{z}^i$.

Zunächst wird die Linearisierung des Gleichgewichts aus Gleichung (4.7)₁ betrachtet und die Terme, die von den Lagrange-Multiplikatoren abhängen, werden farbig hervorgehoben, da diese später für die Kondensation wichtig sind. Der erste Term der rechten Seite von Gleichung (4.9) lautet für $\text{lin } \mathbf{r}$:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{d}} \Delta \mathbf{d}^{i+1} \right|_{\mathbf{d}^i, \mathbf{z}^i} &= \underbrace{\frac{\partial \mathbf{f}_{\text{int}}(\mathbf{d}^i)}{\partial \mathbf{d}}}_{\mathbf{K}_T} \Delta \mathbf{d}^{i+1} + \underbrace{\frac{\partial \mathbf{f}_{\text{ext}}}{\partial \mathbf{d}}}_{=0} \Delta \mathbf{d}^{i+1} + \frac{\partial \mathbf{f}_c(\mathbf{d}^i, \mathbf{z}^i)}{\partial \mathbf{d}} \Delta \mathbf{d}^{i+1} \\ &= \mathbf{K}_T \Delta \mathbf{d}^{i+1} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -\Delta \mathbf{M}^T \\ \Delta \mathbf{D}^T \end{bmatrix}^i \mathbf{z}^i. \end{aligned} \quad (4.10)$$

In dieser Gleichung steht \mathbf{K}_T für die aus der numerischen Strukturmechanik bekannte tangentielle Systemsteifigkeitsmatrix des Zustandes $(\mathbf{d}^i, \mathbf{z}^i)$. Die Linearisierungen der Mortar-Matrizen $\Delta \mathbf{M}$ und $\Delta \mathbf{D}$ werden in dieser Arbeit nicht im Detail angegeben, können aber beispielsweise in POPP u. A. (2010) nachgeschlagen werden. Der zweite Term von Gleichung (4.9) ergibt sich zu

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{z}} \Delta \mathbf{z}^{i+1} \right|_{\mathbf{d}^i, \mathbf{z}^i} &= \overbrace{\frac{\partial \mathbf{f}_{\text{int}}(\mathbf{d}^i)}{\partial \mathbf{z}} \Delta \mathbf{z}^{i+1} + \frac{\partial \mathbf{f}_{\text{ext}}}{\partial \mathbf{z}} \Delta \mathbf{z}^{i+1}}^{=0} + \frac{\partial \mathbf{f}_c(\mathbf{d}^i, \mathbf{z}^i)}{\partial \mathbf{z}} \Delta \mathbf{z}^{i+1} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -\mathbf{M}^T \\ \mathbf{D}^T \end{bmatrix}^i \Delta \mathbf{z}^{i+1}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Mit den diskreten Kontaktkräften

$$\mathbf{f}_c(\mathbf{d}^i, \mathbf{z}^i) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -\mathbf{M}^T \\ \mathbf{D}^T \end{bmatrix}^i \mathbf{z}^i \quad (4.12)$$

aus Gleichung (3.32) kann die gesamte Linearisierung von Gleichung (4.7)₁ angegeben werden:

$$\begin{aligned} \text{lin } \mathbf{r}(\mathbf{d}, \mathbf{z}) &= \mathbf{K}_T \Delta \mathbf{d}^{i+1} + \overbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -\mathbf{M}^T \\ \mathbf{D}^T \end{bmatrix}^i \mathbf{z}^i + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -\mathbf{M}^T \\ \mathbf{D}^T \end{bmatrix}^i \Delta \mathbf{z}^{i+1}}^{\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -\mathbf{M}^T \\ \mathbf{D}^T \end{bmatrix}^i \mathbf{z}^{i+1}} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -\Delta \mathbf{M}^T \\ \Delta \mathbf{D}^T \end{bmatrix}^i \mathbf{z}^i \\ &= \mathbf{f}_{\text{ext}} - \mathbf{f}_{\text{int}}(\mathbf{d}^i). \end{aligned} \quad (4.13)$$

Da die Gleichungen nur linear von den Lagrange-Multiplikatoren abhängen, können die grün und blau dargestellten Terme in Gleichung (4.13) wie dargestellt zusammengefasst werden. Auch für die verbleibenden Linearisierungen wird der Zusammenhang $\Delta \mathbf{z}^{i+1} = \mathbf{z}^{i+1} - \mathbf{z}^i$ verwendet, sodass direkt nach \mathbf{z}^{i+1} gelöst wird und nicht nach $\Delta \mathbf{z}^{i+1}$.

Die Linearisierung von Gleichung (4.7)₁ ist an dieser Stelle detaillierter dargestellt, da die Struktur der farbig dargestellten Terme die Kondensation der Lagrange-Multiplikatoren ermöglicht. Auf die Linearisierung der Gleichungen (4.7)₂ und (4.7)₃ wird hingegen nur knapp eingegangen. Für eine umfassende Beschreibung sei auf GITTERLE (2012) verwiesen. Die Linearisierung der Komplementaritätsfunktionen unterscheidet sich von $\text{lin } \mathbf{r}$ durch die nichtglatten max-Funktionen. Die mathematische Behandlung dieser wird beispielsweise in HINTERMÜLLER U. A. (2002) und HÜEBER UND WOHLMUTH (2005b) erläutert. Letztendlich läuft es auf Folgendes heraus: Entsprechend der Mengen \mathcal{I} , \mathcal{A} , \mathcal{G} und \mathcal{H} ergeben sich aus den Komplementaritätsfunktionen der Normalen- und Tangentialrichtung (Gleichungen (4.5) und (4.6)) die fünf Komplementaritätsfunktionen

$$C_{n,\mathcal{I},I}(\mathbf{z}_I^i, \mathbf{d}^i) = z_{n,I}^i = 0, \quad (4.14)$$

$$C_{n,\mathcal{A},I}(\mathbf{z}_I^i, \mathbf{d}^i) = -c_n \tilde{g}_I^i = 0, \quad (4.15)$$

$$\mathbf{C}_{\tau,\mathcal{I},I}(\mathbf{z}_I^i, \mathbf{d}^i) = \|\mathbf{z}_{\tau,I}^i + c_t \tilde{\mathbf{u}}_{\tau,I}^i\| \mathbf{z}_{\tau,I}^i = \mathbf{0}, \quad (4.16)$$

$$\mathbf{C}_{\tau,\mathcal{H},I}(\mathbf{z}_I^i, \mathbf{d}^i) = \mu(z_{n,I}^i - c_n \tilde{g}_I^i) \mathbf{z}_{\tau,I}^i - \mu(z_{n,I}^i - c_n \tilde{g}_I^i) (\mathbf{z}_{\tau,I}^i + c_t \tilde{\mathbf{u}}_{\tau,I}^i) = \mathbf{0}, \quad (4.17)$$

$$\mathbf{C}_{\tau,\mathcal{G},I}(\mathbf{z}_I^i, \mathbf{d}^i) = \|\mathbf{z}_{\tau,I}^i + c_t \tilde{\mathbf{u}}_{\tau,I}^i\| \mathbf{z}_{\tau,I}^i - \mu(z_{n,I}^i - c_n \tilde{g}_I^i) (\mathbf{z}_{\tau,I}^i + c_t \tilde{\mathbf{u}}_{\tau,I}^i) = \mathbf{0}. \quad (4.18)$$

Deren Linearisierung erfolgt in gewohnter Weise, da keine max-Funktionen mehr vorhanden sind. Die Linearisierung der Funktionen der inaktiven Knoten, also die Linearisierung der Gleichungen (4.14) und (4.16), führt konsequenterweise auf $\mathbf{z}_I^{i+1} = \mathbf{0}$. Aus der Linearisierung der Gleichung (4.15) folgt $\Delta \tilde{g}_I^i = -\tilde{g}_I^i$. Die Linearisierung der verbleibenden Gleichungen ergibt deutlich komplexere Ausdrücke. Für die detaillierte Darstellung dieser Ausdrücke, der Linearisierung des gewichteten Knotenabstandes $\Delta \tilde{g}_I^i$ und aller anderen benötigten Linearisierungen sei nochmals auf die Arbeiten von POPP U. A. (2010) und GITTERLE (2012) verwiesen. Die Implementierung der konsistenten Linearisierung aller Terme ist aufwendig, wird aber benötigt, um die quadratische Konvergenz der Newton-Raphson-Iteration zu ermöglichen.

4.4 Identifikation eines Vorteils der dualen Mortar-Methode

Der Ablauf der in den vorangegangenen Abschnitten vorgestellten Lösungsstrategie kann durch den in Abbildung 4.3 dargestellten Programmablauf zusammengefasst werden.

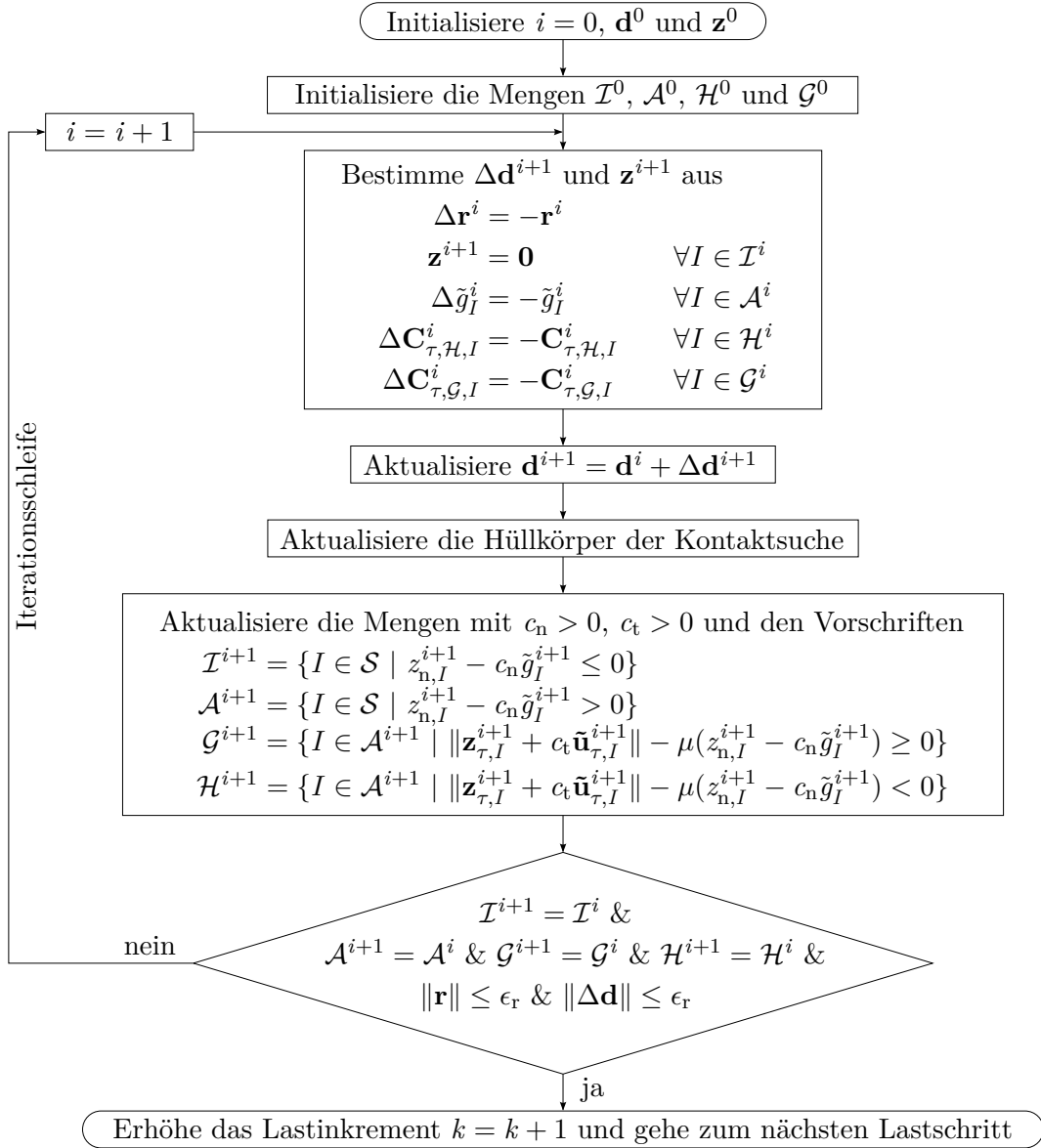


Abbildung 4.3: Ablauf der Newton-Raphson-Iterationsschleife der primal-dualen Aktive-Mengen-Strategie.

Dieser zeigt eine Newton-Raphson-Iterationsschleife der primal-dualen Aktive-Mengen-Strategie. Aus dem Ablauf wird ersichtlich, dass die Geometriedaten der Hüllkörper der Kontaktsuche aktualisiert werden, sobald sich die Verschiebungen ändern. Die Iterationsschleife endet, wenn die beiden dargestellten Euklid'schen Normen die Fehlerschranke ϵ_r unterschreiten und sich die Mengen im betrachteten Iterationsschritt nicht ändern. Ein weiterer Schritt des Programmablaufs ist das Lösen des linearisierten Gleichungssystems nach den Verschiebungsinkrementen $\Delta \mathbf{d}^{i+1}$ und den Lagrange-Multiplikatoren \mathbf{z}^{i+1} . Anhand des Gleichungssystems kann ein Vorteil der dualen Mortar-Methode verdeutlicht

werden, weshalb dieses hier nochmals angegeben wird:

$$\begin{aligned}
 \Delta \mathbf{r}^i &= -\mathbf{r}^i, \\
 \mathbf{z}^{i+1} &= \mathbf{0} \quad \forall I \in \mathcal{I}^i, \\
 \Delta \tilde{g}_I^i &= -\tilde{g}_I^i \quad \forall I \in \mathcal{A}^i, \\
 \Delta \mathbf{C}_{\tau, \mathcal{H}, I}^i &= -\mathbf{C}_{\tau, \mathcal{H}, I}^i \quad \forall I \in \mathcal{H}^i, \\
 \Delta \mathbf{C}_{\tau, \mathcal{G}, I}^i &= -\mathbf{C}_{\tau, \mathcal{G}, I}^i \quad \forall I \in \mathcal{G}^i.
 \end{aligned} \tag{4.19}$$

Die Gleichungen (4.19)₃₋₅ ergeben sich aus der Linearisierung der Komplementaritätsfunktionen (4.14)–(4.18). Die erste Zeile des Gleichungssystems (4.19) ist die Linearisierung des Gleichgewichts aus Gleichung (4.13) in kompakter Schreibweise. In der kompakten Schreibweise steht das vollständige Residuum \mathbf{r} auf der rechten Seite. In Gleichung (4.13) hingegen sind die Kontaktkräfte Teil der linken Seite, damit direkt nach \mathbf{z}^{i+1} gelöst werden kann. Die daraus resultierende rechte Seite $\mathbf{f}_{\text{int}} - \mathbf{f}_{\text{ext}}$ wird im Folgenden mit $\tilde{\mathbf{r}}$ bezeichnet.

Der Vorteil der dualen Mortar-Methode wird bereits durch die Betrachtung der ersten Gleichung des linearisierten Gleichungssystems (4.19) offensichtlich. Die folgende Matrixformulierung des Gleichungssystems stellt deshalb nur diese Gleichung explizit dar und deutet die Gleichungen der Kontaktbedingungen lediglich an:

$$\begin{bmatrix}
 \mathbf{K}_{\mathcal{N}\mathcal{N}} & \mathbf{K}_{\mathcal{N}\mathcal{M}} & \mathbf{K}_{\mathcal{N}\mathcal{S}} & \mathbf{0} \\
 \mathbf{K}_{\mathcal{M}\mathcal{N}} & \tilde{\mathbf{K}}_{\mathcal{M}\mathcal{M}} & \tilde{\mathbf{K}}_{\mathcal{M}\mathcal{S}} & -\mathbf{M}_{\mathcal{S}}^{\text{T}} \\
 \mathbf{K}_{\mathcal{S}\mathcal{N}} & \tilde{\mathbf{K}}_{\mathcal{S}\mathcal{M}} & \tilde{\mathbf{K}}_{\mathcal{S}\mathcal{S}} & \mathbf{D}_{\mathcal{S}}^{\text{T}} \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 \Delta \mathbf{d}_{\mathcal{N}} \\
 \Delta \mathbf{d}_{\mathcal{M}} \\
 \Delta \mathbf{d}_{\mathcal{S}} \\
 \mathbf{z}
 \end{bmatrix}
 = -
 \begin{bmatrix}
 \mathbf{r}_{\mathcal{N}} \\
 \tilde{\mathbf{r}}_{\mathcal{M}} \\
 \tilde{\mathbf{r}}_{\mathcal{S}} \\
 \vdots
 \end{bmatrix}. \tag{4.20}$$

Zur besseren Übersichtlichkeit wird an dieser Stelle auf die Kopf- und Fußzeiger der Iteration und des Lastinkrementes verzichtet. In den vorherigen Gleichungen stellen \mathbf{K} Untermatrizen der tangentialen Steifigkeitsmatrix des Kontaktproblems dar. Die angegebenen Fußzeiger verdeutlichen, zu welcher Menge von Knoten die einzelnen Untermatrizen zählen. Die Untermatrizen $\tilde{\mathbf{K}}$, die mit einer Tilde markiert sind, unterscheiden sich von den entsprechenden Untermatrizen der Matrix \mathbf{K}_{T} um den Anteil der linearisierten Kontaktkraft, der in Gleichung (4.13) rot dargestellt ist. Der Vorteil der dualen Mortar-Methode liegt in der Diagonalgestalt der Mortar-Matrix \mathbf{D} . Dadurch lassen sich die diskreten Lagrange-Multiplikatoren \mathbf{z} einfach aus dem Gleichungssystem herauskondensieren. Aus der dritten Zeile von Gleichungssystem (4.20) folgt:

$$\mathbf{z} = \mathbf{D}_{\mathcal{S}}^{-\text{T}} \left(-\tilde{\mathbf{r}}_{\mathcal{S}} - \mathbf{K}_{\mathcal{S}\mathcal{N}} \Delta \mathbf{d}_{\mathcal{N}} - \tilde{\mathbf{K}}_{\mathcal{S}\mathcal{M}} \Delta \mathbf{d}_{\mathcal{M}} - \tilde{\mathbf{K}}_{\mathcal{S}\mathcal{S}} \Delta \mathbf{d}_{\mathcal{S}} \right). \tag{4.21}$$

Selbstverständlich ist dieser Schritt auch mit der Standard-Mortar-Methode möglich, aber im genannten Fall ist die Berechnung der Inversen der Mortar-Matrix \mathbf{D} wesentlich aufwendiger, da \mathbf{D} keine Diagonalmatrix ist.

Mit den kondensierten Lagrange-Multiplikatoren aus Gleichung (4.21) kann das Gleichungssystem (4.20) umformuliert werden und die einzig verbleibende Unbekannte ist die iterative Verbesserung der Verschiebung $\Delta \mathbf{d}$. Das vollständig reduzierte Gleichungssystem ist für die in dieser Arbeit verwendete Reibungsformulierung detailliert in GITTERLE U. A. (2010) gegeben. Die Berechnung der Lagrange-Multiplikatoren und damit der diskreten Kontaktspannungen erfolgt in einer Nachlaufrechnung mit Gleichung (4.21).

Die Kondensation des Lagrange-Multiplikators schließt die Darstellung der in dieser Arbeit verwendeten Lösungsstrategie ab. In den beiden folgenden Kapiteln werden detailliert zwei Aspekte der Kontaktformulierung untersucht. Die Lösungen der dort angeführten numerischen Experimente werden mit der eben umrissenen Lösungsstrategie bestimmt.

5

Effiziente numerische Berechnung der Kontaktintegrale

Die vorangegangenen Kapitel beschreiben die Kontaktformulierung, die in dieser Arbeit verwendet wird. In Kapitel 3 werden sogenannte Mortar-Integrale eingeführt, ohne auf deren Berechnung näher einzugehen. Die Mortar-Integrale stellen die Einträge der Mortar-Matrizen \mathbf{D} und \mathbf{M} dar und können mit Gleichung (3.27) bzw. (3.28) für duale Formulierungen wie folgt angegeben werden:

$$D_{II} = \int_{\gamma_c^{(1),h}} N_I^{(1)} da, \quad (5.1)$$

$$M_{IL} = \int_{\gamma_c^{(1),h}} \Phi_I^{(1)}(N_L^{(2)} \circ P^h) da. \quad (5.2)$$

Neben den Mortar-Integralen stellt der gewichtete Knotenabstand \tilde{g}_I das dritte Kontaktintegral der Mortar-Formulierung dar. Seine Definition aus Gleichung (3.33) wird hier nochmals angegeben:

$$\tilde{g}_I = \int_{\gamma_c^{(1),h}} \Phi_I g_n^h da. \quad (5.3)$$

An dieser Stelle wird nun auf die numerische Berechnung der genannten Kontaktintegrale eingegangen. Eine genauere Betrachtung zeigt die Schwierigkeiten auf, die es bei der numerischen Berechnung der Kontaktintegrale gibt, und offenbart die Rechenintensität der numerischen Integration – vor allem bei dreidimensionalen Problemen.

Die Berechnung der Integrale ist aufgrund zweier Aspekte kompliziert. Ein Aspekt betrifft das Integrationsgebiet γ_c . Dieses ist für nichtkonforme Netze nicht eindeutig, da

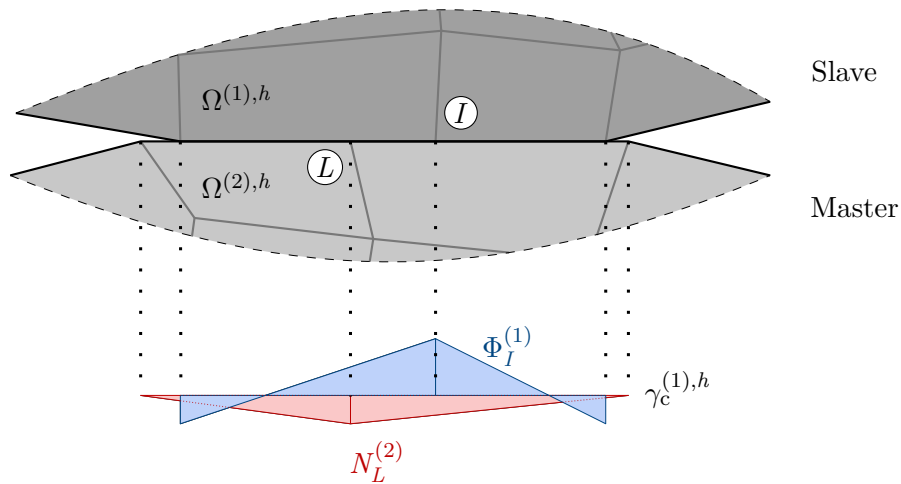


Abbildung 5.1: Ausschnitt eines diskretisierten Kontaktproblems mit Visualisierung der Formfunktionen der Knoten I und L .

die diskretisierten Slave- und Master-Ränder nicht übereinstimmen. Die Wahl des Integrationsgebiets fällt daher meist auf einen der beiden Kontaktränder. In dieser Arbeit wird, wie in Kapitel 3 bereits erwähnt und in den Gleichungen (5.1)–(5.3) angezeigt, der diskretisierte Slave-Rand $\gamma_c^{(1),h}$ als Integrationsgebiet verwendet. Der zweite Aspekt, der die numerische Integration erschwert, ist die nur stückweise vorhandene Glattheit der Integranden. Beispielsweise ist der Integrand eines Mortar-Integrals M das Produkt aus einer Formfunktion des Slave-Randes mit einer Formfunktion des Master-Randes. Abbildung 5.1 veranschaulicht ein zweidimensionales Kontaktproblem und gibt eine Visualisierung der Formfunktionen wieder, die zur Berechnung des Mortar-Integrals M_{IL} benötigt werden. Augenscheinlich ist der Integrand für allgemeine Konfigurationen weder auf dem gesamten Kontaktrand noch innerhalb einzelner Slave- oder Master-Elemente glatt.

Für den Umgang mit der fehlenden Kontinuität gibt es verschiedene Strategien, deren prinzipielle Überlegungen im folgenden Abschnitt 5.1 dargestellt werden. In dieser Arbeit wird eine Strategie verfolgt, die das Integrationsgebiet in Segmente unterteilt, innerhalb derer die Kontinuität gewährleistet ist. Gängige Vorgehensweisen zur Berechnung der Mortar-Integrale mithilfe von Segmenten werden für zwei- und dreidimensionale Probleme in Abschnitt 5.2 behandelt. Diese sind genau, aber vor allem im dreidimensionalen Fall vergleichsweise rechenintensiv. Im Rahmen dieser Arbeit wurde deshalb für dreidimensionale Probleme eine Methode entwickelt, die eine effizientere Integration ermöglicht. Dieser neue Ansatz wird ab Abschnitt 5.3 dieses Kapitels präsentiert und untersucht. Die Beschreibung der entwickelten Methode erfolgt anhand der dualen Mortar-Methode, gilt aber ebenso für die Standard-Mortar-Methode.

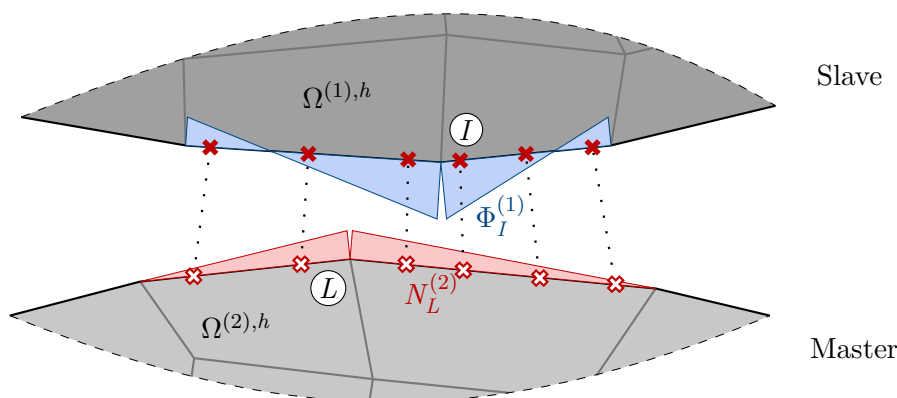


Abbildung 5.2: Veranschaulichung der elementbasierten numerischen Integration. Darstellung der Integrationspunkte als rot ausgefüllte Kreuze und deren Projektionen als rote, weiß ausgefüllte Kreuze.

5.1 Strategien zur Berechnung der Kontaktintegrale

In den Veröffentlichungen zur Mortar-Methode werden hauptsächlich zwei Strategien verfolgt, um die Kontaktintegrale zu berechnen. Beide Strategien verwenden zur numerischen Integration Gauß-Quadraturformeln. Sie unterscheiden sich allerdings hinsichtlich der einzelnen Integrationsgebiete, innerhalb derer die Gauß-Quadraturformeln angewendet werden. Einen umfassenden Vergleich der beiden Strategien und deren Beschreibung lässt sich in FARAH U. A. (2014) finden. Zur eindeutigen Bezeichnung der beiden Strategien werden in der vorliegenden Arbeit die von FARAH U. A. (2014) vorgeschlagenen Bezeichnungen segmentbasierte Integration und elementbasierte Integration übernommen.

Elementbasierte Integration

Die elementbasierte Integration wird in FISCHER UND WRIGGERS (2005, 2006) präsentiert. Bei dieser Methode wird die Gauß-Quadraturformel auf den Slave-Elementen angewendet. Abbildung 5.2 veranschaulicht die elementbasierte numerische Integration für ein zweidimensionales Kontaktproblem. Die Abbildung zeigt einen Kontakttrand und die Formfunktionen, die zur Berechnung des Mortar-Integrals M_{IL} benötigt werden. Beispielhaft werden drei Integrationspunkte je Slave-Element dargestellt. Zur Auswertung der Formfunktion $N_L^{(2)}$ des Master-Randes an den Integrationspunkten werden die Integrationspunkte auf den Master-Rand projiziert. Aus Abbildung 5.2 wird ein entscheidender Nachteil der elementbasierten Integration ersichtlich: Die Knicke des Integranten werden ignoriert. Daraus resultiert ein Fehler bei der Berechnung des Integrals. Der Fehler kann meist reduziert werden, wenn genauere numerische Integrationsformeln

mit mehr Integrationspunkten verwendet werden. FARAH U. A. (2014) zeigen allerdings, dass das nicht immer der Fall ist. Der Fehler kann je nach Position des Knicks für genauere Integrationsformeln sogar größer sein. Bei Betrachtung des gesamten Problems ist eine höhere Anzahl an Integrationspunkten aber meist von Vorteil.

Segmentbasierte Integration

Die Idee der segmentbasierten Integrationsstrategien ist die Gewährleistung der exakten numerischen Integrierbarkeit des Integranden mit gewöhnlichen Quadraturformeln. Dies geschieht, indem die Slave-Elemente in Gebiete unterteilt werden, innerhalb derer der Integrand keine Knicke hat. Die entsprechenden Gebiete werden in dieser Arbeit Segmente genannt und der Prozess zum Auffinden der Segmente wird als Segmentierung bezeichnet. Die segmentbasierte Integration ist durch die Beachtung der Kontinuität genauer als die elementbasierte Integration und ermöglicht das exakte Bestehen des Patch-Tests. Allerdings ist der numerische Aufwand der segmentbasierten Integration höher als der numerische Aufwand der elementbasierten Integration, wenn entsprechend der jeweiligen Strategie gängige Integrationsformeln verwendet werden.

Neben der Genauigkeit sprechen noch weitere Vorteile für die segmentbasierte Integration. Gemäß den Untersuchungen in FARAH U. A. (2014) ist die segmentbasierte Integration vorzuziehen, wenn

- es Slave-Elemente gibt, die nur zum Teil zur aktiven Kontaktzone zählen,
- Reibung berücksichtigt wird oder
- finite Elemente höherer Ordnung verwendet werden.

In der vorliegenden Arbeit wird aufgrund der genannten Vorteile diese Art der Integration verwendet und in Abschnitt 5.2 detailliert behandelt. Der einzige wirkliche Nachteil der segmentbasierten Integration ist ihr hoher numerischer Aufwand. Dieses Manko kann für praktische Anwendungen allerdings ein entscheidendes Kriterium sein, weshalb in Abschnitt 5.3 Möglichkeiten untersucht werden, um die segmentbasierte Integration dreidimensionaler Probleme effizienter zu gestalten. Zunächst wird im folgenden Abschnitt allerdings anhand gängiger Implementierungen gezeigt, wodurch der numerische Aufwand im Detail entsteht.

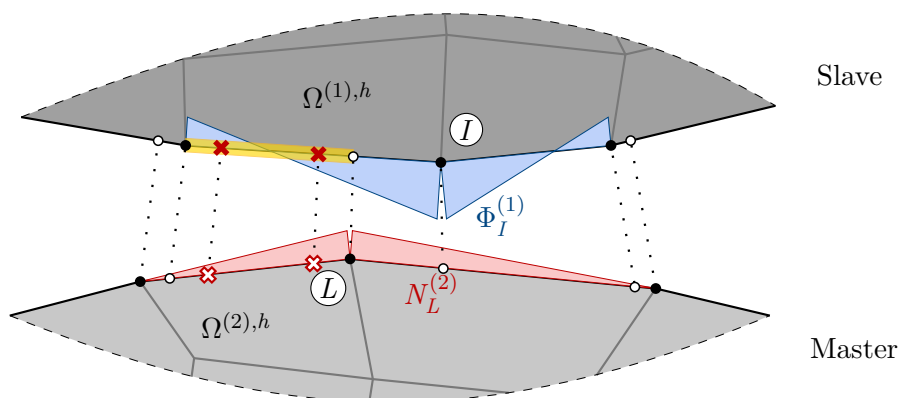


Abbildung 5.3: Veranschaulichung der Segmentierung und der segmentbasierten numerischen Integration für zweidimensionale Probleme. Darstellung der Integrationspunkte als Kreuze und der Kontaktrandknoten als Kreise. Tatsächliche Größen sind ausgefüllt dargestellt, projizierte Größen haben ein weiß ausgefülltes Symbol.

5.2 Konventionelle segmentbasierte Integrationsmethoden

In diesem Abschnitt wird gezeigt, wie die Segmentierung und die numerische Integration üblicherweise durchgeführt werden. Obwohl die in Abschnitt 5.3 präsentierte Modifikation nur für die Betrachtung dreidimensionaler Probleme sinnvoll ist, werden im folgenden Unterabschnitt 5.2.1 die wesentlichen Schritte der segmentbasierten Integration für zweidimensionale Fälle beschrieben. Erstens kann für diesen Fall der Vorgang der Segmentierung übersichtlicher illustriert werden. Zweitens erfolgen die Untersuchungen der Kontaktspannungen in Kapitel 6 hauptsächlich anhand von zweidimensionalen Problemen, weshalb der Vollständigkeit halber auch die zweidimensionale Integration erklärt wird.

5.2.1 Zweidimensionale Kontaktprobleme

Das prinzipielle Vorgehen zur numerischen Integration zweidimensionaler Kontaktprobleme wird anhand von Abbildung 5.3 erläutert. Die Abbildung zeigt denselben Ausschnitt eines Kontaktproblems wie Abbildung 5.2. Wie bereits erwähnt, sind die diskretisierten Slave- und Master-Ränder im Regelfall nicht identisch, weshalb zur Segmentierung und Integration Projektionen einiger Größen zwischen den Rändern nötig sind. Hierfür wird in dieser Arbeit immer das kontinuierliche Normalenfeld \mathbf{n}_c des Slave-Randes aus Gleichung (3.9) verwendet.

Die Segmentierung erfolgt separat für jedes Slave-Element. Ihr Ziel ist es, das Slave-Element in Bereiche zu unterteilen, innerhalb derer es mit nur genau einem Master-Element überlappt. Diese Bereiche stellen die Segmente dar und ein solches ist in Abbildung 5.3 in Gelb visualisiert. Zur Bestimmung der Segmente eines Slave-Elements werden die Knoten des Slave-Elements auf den Master-Rand projiziert. Außerdem werden die Knoten benachbarter Master-Elemente auf den Slave-Rand projiziert. Die Nachbarschaft einzelner Slave- und Master-Elemente ergibt sich aus der in Abschnitt 4.1 beschriebenen Kontaktsuche. Mithilfe der projizierten Punkte können, wie in Abbildung 5.3 gezeigt wird, die Segmente festgelegt werden. Innerhalb der Segmente gibt es keine Knicke in den Formfunktionen und die Kontaktintegrale können auf diese Weise stückweise berechnet werden. Durch das Einführen lokaler Koordinaten innerhalb der Segmente können Gauß-Quadraturformeln zur numerischen Integration eingesetzt werden. In dieser Arbeit werden, wie in Abbildung 5.3 angedeutet, zwei Gauß-Punkte je Segment zur numerischen Integration der Kontaktintegrale zweidimensionaler Probleme verwendet. Berechnungsvorschriften zum Bestimmen der Projektionspunkte und weitere algorithmische Einzelheiten können beispielsweise YANG U. A. (2005) oder POPP U. A. (2009) entnommen werden.

Die gesamten Kontaktintegrale ergeben sich aus der Summe der entsprechenden Anteile der Segmente. Ausschließlich die Kontinuität betrachtend, ist eine derart komplizierte Integration nur für die Kontaktintegrale M und \tilde{g} notwendig, da der Integrand des Kontaktintegrals D auch ohne Segmente innerhalb der Slave-Elemente glatt ist. Dennoch werden in dieser Arbeit alle Kontaktintegrale auf die eben beschriebene Weise berechnet, da so die Impulserhaltung sichergestellt werden kann (PUSO UND LAURSEN 2004a).

5.2.2 Dreidimensionale Kontaktprobleme – Triangulierung

Die segmentbasierte numerische Berechnung der Kontaktintegrale ist für dreidimensionale Probleme wesentlich komplizierter als im zweidimensionalen Fall. Der Grundgedanke ist aber derselbe: Es werden Segmente gesucht, innerhalb derer der Integrand der Kontaktintegrale mindestens C^1 -kontinuierlich ist. Allerdings sind die Segmente bei dreidimensionalen Problemen polygonale Flächen und keine Linien, was den direkten Einsatz von gewöhnlichen Quadraturformeln erschwert. Außerdem kommt bei dreidimensionalen Problemen hinzu, dass die Kontakt-Ränder auch bei den hier verwendeten linearen finiten Elementen gekrümmt sein können. Ein Algorithmus, der trotz der genannten Schwierigkeiten die Kontaktintegrale dreidimensionaler Probleme sehr genau berechnet, wurde von PUSO UND LAURSEN (2003) für Netzkopplungsprobleme vorgestellt und seitdem in ähnlicher Form mehrmals auf Kontaktprobleme angewendet, siehe beispielsweise PUSO UND LAURSEN (2004a), YANG UND LAURSEN (2008b), DICKOPF UND KRAUSE (2009), POPP U. A. (2010) oder SITZMANN U. A. (2016).

Der Ablauf des Algorithmus von PUSO UND LAURSEN (2003) wird im Folgenden schrittweise erläutert und anhand von Abbildung 5.4 für ein exemplarisches Kontaktproblem illustriert. Abbildung 5.4 (a) zeigt das exemplarische Kontaktproblem zwischen einem Zylinder und einem hyperbolischen Paraboloid. In Abbildung 5.4 (b) sind die diskretisierten Kontaktränder dargestellt. Das Elementpaar, für das die Integration beschrieben wird, ist farblich hervorgehoben. Anhand dieser Abbildung wird die mögliche Krümmung der Kontaktränder offensichtlich.

Das betrachtete Paar eines Slave- und eines Master-Elements ist in Abbildung 5.4 (c) nochmals vergrößert dargestellt. Für jedes Paar, das durch die Kontaktsuche als benachbart identifiziert wurde, müssen folgende Schritte ausgeführt werden:

1. **Konstruktion einer Hilfsebene im Mittelpunkt des Slave-Elements.** Die Normale der Ebene \mathbf{n}_0 entspricht der am Mittelpunkt ($\xi = \eta = 0$) des Slave-Elements ausgewerteten Normalen \mathbf{n}_c aus Gleichung (3.9).
2. **Projektion der Knoten der Slave- und Master-Elemente in die Hilfsebene in Richtung der Normalen \mathbf{n}_0 .** Durch diesen Schritt werden die möglicherweise gekrümmten Slave- und Master-Elemente als ebene Elemente approximiert, was das Auffinden der Segmente vereinfacht. Die projizierten Elemente sind in Abbildung 5.4 (d) durch Strichpunktlinien bzw. Strichlinien visualisiert.
3. **Bestimmung des Segments als Überschneidungspolygon aus den projizierten Slave- und Master-Elementen.** Algorithmen zum Auffinden des Überschneidungspolygons werden normalerweise Clipping-Algorithmen genannt. Eine effiziente und robuste Umsetzung eines solchen Algorithmus findet sich beispielsweise in der Clipper-Bibliothek von Angus Johnson. Für viereckige Slave- und Master-Elemente haben die Segmente zwischen drei und acht Ecken. Zur Anwendbarkeit der folgenden Schritte müssen sie konvex sein. Letztgenannter Punkt wird gewährleistet, wenn die Normalenvektoren beider Elemente ungefähr die gleiche Richtung (ohne Berücksichtigung des Richtungssinns) haben (PUSO UND LAURSEN 2003). In Abbildung 5.4 (d) ist die Umrandung des Segments gelb dargestellt.
4. **Unterteilung des Segments in dreieckige Integrationszellen.** Innerhalb der Segmente sind die Integranden der Kontaktintegrale glatt. Trotzdem ist es aufgrund der allgemeinen polygonalen Formen der Segmente nicht ohne Weiteres möglich, direkt über diese numerisch zu integrieren. Allgemeingültige Quadraturformeln existieren nur für drei- und viereckige Polygone. Deswegen werden die Polygone üblicherweise in Dreiecke unterteilt, um dort gewöhnliche Quadraturformeln anwenden zu können. Hierfür wird zunächst der Schwerpunkt des Segments bestimmt, der sich aufgrund der konvexen Form immer im Segment selbst befindet. Als Nächstes werden die dreieckigen Integrationszellen gebildet, indem der

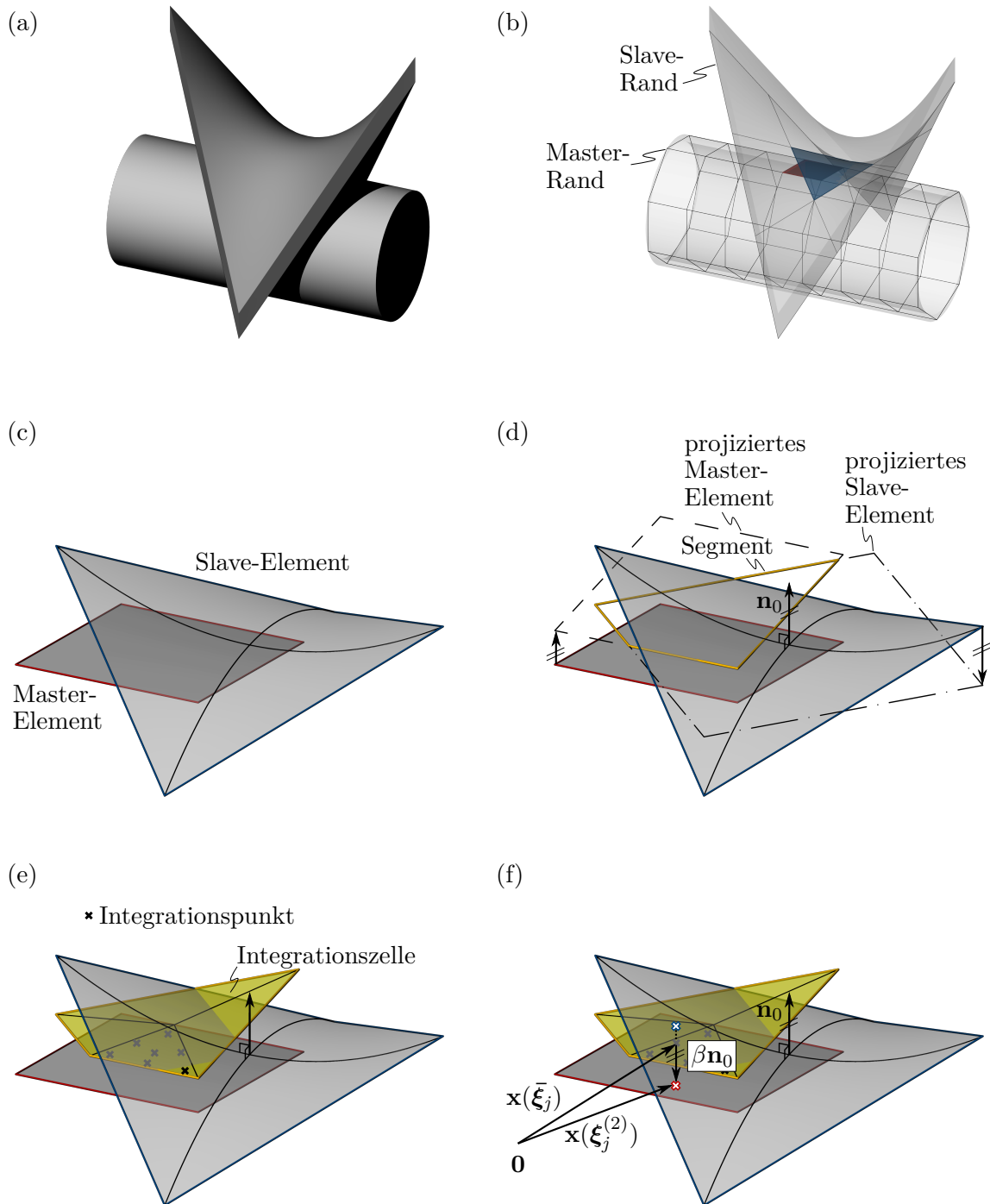


Abbildung 5.4: Veranschaulichung der Segmentierung und der segmentbasierten numerischen Integration für dreidimensionale Probleme. Die Erklärung der einzelnen Schritte erfolgt in Unterabschnitt 5.2.2.

Schwerpunkt mit den Ecken des Segments verbunden wird. Diese Unterteilung wird im Folgenden Triangulierung genannt. Für jede dreieckige Integrationszelle wird ein lokales Koordinatensystem $\bar{\xi}$ definiert. Mit diesem Koordinatensystem werden entsprechend der gewählten Quadraturformel die Integrationspunkte innerhalb der Integrationszellen verteilt. Die Unterteilung des Segments in dreieckige Integrationszellen ist in Abbildung 5.4 (e) gezeigt. In derselben Abbildung ist für eine Integrationszelle exemplarisch eine mögliche Verteilung der Integrationspunkte dargestellt.

5. **Projektion der Integrationspunkte auf die tatsächlichen Kontaktränder**, um an den projizierten Stellen die Formfunktionen der Kontaktintegrale auswerten zu können. Die Projektion erfolgt in Richtung der Normalen \mathbf{n}_0 und ist in Abbildung 5.4 (f) für einen Integrationspunkt visualisiert.
6. **Berechnung des Segmentanteils an den Kontaktintegralen**. Die numerische Integration erfolgt über die Quadraturformeln der einzelnen Integrationszellen. Der Segmentanteil ergibt sich aus der Summe aller Integrationszellenanteile und lautet:

$$D_{II}^{\text{seg}} = \sum_{i=1}^{n_{ic}} \sum_{j=1}^{n_{ip}} w_j N_I^{(1)}(\xi^{(1)}(\bar{\xi}_j)) J_i, \quad (5.4)$$

$$M_{IL}^{\text{seg}} = \sum_{i=1}^{n_{ic}} \sum_{j=1}^{n_{ip}} w_j \Phi_I^{(1)}(\xi^{(1)}(\bar{\xi}_j)) N_L^{(2)}(\xi^{(2)}(\bar{\xi}_j)) J_i, \quad (5.5)$$

$$\tilde{g}_I^{\text{seg}} = \sum_{i=1}^{n_{ic}} \sum_{j=1}^{n_{ip}} w_j \Phi_I(\xi^{(1)}(\bar{\xi}_j)) g_n^h(\xi^{(1)}(\bar{\xi}_j), \xi^{(2)}(\bar{\xi}_j)) J_i. \quad (5.6)$$

In den vorherigen Gleichungen steht n_{ic} für die Anzahl der Integrationszellen des betrachteten Segments, n_{ip} für die Anzahl der Integrationspunkte der verwendeten Quadraturformel, w_j für das Gewicht des j -ten Integrationspunktes und J_i für die Jacobi-Determinante der i -ten Integrationszelle.

Mit den Gleichungen (5.4)–(5.6) werden nur die Anteile eines Segments berechnet, weshalb die Bezeichnungen der Integrale den zusätzlichen Kopfzeiger $(\bullet)^{\text{seg}}$ tragen. Die gesamten Kontaktintegrale ergeben sich aus der Summe über alle Segmente.

Anforderung an die Quadraturformeln

Bei der Wahl der Quadraturformel stellt sich die Frage, wie genau die numerische Integration sein muss bzw. um was für Funktionen es sich bei den Integranden handelt. An dieser Stelle wird exemplarisch der Integrand des Mortar-Integrals M_{IL} genauer untersucht, da dieser die größten Anforderungen an die numerische Integration stellt. Bevor

das Integral durch die numerische Integration approximiert wird, lautet dieses für die i -te dreieckige Integrationszelle:

$$M_{IL}^{\text{cell}} = \int_0^1 \int_0^{1-\bar{\xi}} \Phi_I^{(1)}(\boldsymbol{\xi}^{(1)}(\bar{\boldsymbol{\xi}})) N_L^{(2)}(\boldsymbol{\xi}^{(2)}(\bar{\boldsymbol{\xi}})) J_i \, d\bar{\eta} \, d\bar{\xi}. \quad (5.7)$$

Die Jacobi-Determinante J_i der dreieckigen Integrationszelle ist konstant und entspricht dem zweifachen Flächeninhalt des Dreiecks. Die Formfunktionen $N^{(\alpha)}$ und $\Phi^{(1)}$ sind bilineare Funktionen, also Polynome zweiten Grades. Allerdings sind sie auf den Slave- bzw. Master-Elementen in den Elementkoordinaten $\boldsymbol{\xi}^{(\alpha)}$ definiert. Zur Integration über die Elementkoordinaten $\bar{\boldsymbol{\xi}}$ der Integrationszellen müssen die Elementkoordinaten $\boldsymbol{\xi}^{(\alpha)}$ in Abhängigkeit von $\bar{\boldsymbol{\xi}}$ dargestellt werden. Dieser Zusammenhang kann aus der Projektionsgleichung

$$\underbrace{\sum_{I=1}^{n_{\text{nde}}^{(\alpha)}} \left(N_I^{(\alpha)}(\boldsymbol{\xi}^{(\alpha)}) \mathbf{x}_I^{(\alpha)} \right)}_{\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}^{(\alpha)})} - \beta \mathbf{n}_0 - \underbrace{\sum_{k=1}^{n_{\text{nd}}^{\text{cell}}} N_k^{\text{cell}}(\bar{\boldsymbol{\xi}}) \mathbf{x}_k^{\text{cell}}}_{\mathbf{x}(\bar{\boldsymbol{\xi}})} = \mathbf{0}. \quad (5.8)$$

hergestellt werden. Über dieses Gleichungssystem kann für jeden Ortsvektor $\mathbf{x}(\bar{\boldsymbol{\xi}})$ eines Punktes der Integrationszelle der Ortsvektor des Projektionspunktes $\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}^{(\alpha)})$ auf dem Slave- bzw. Master-Element gefunden werden.

Die Bedeutung der einzelnen Vektoren der Projektionsgleichung (5.8) lässt sich mit Abbildung 5.5 erklären. Die Abbildung ist eine Vergrößerung von Abbildung 5.4 (f) unter Angabe weiterer Details. Die Ortsvektoren $\mathbf{x}(\bar{\boldsymbol{\xi}})$ der Punkte der Integrationszelle werden in der Projektionsgleichung (5.8) als Interpolation der Eckpunkte $\mathbf{x}_k^{\text{cell}}$ der Integrationszelle dargestellt. In der Interpolation steht $n_{\text{nd}}^{\text{cell}}$ für die Anzahl der Eckpunkte der Integrationszelle und N_k^{cell} für die Formfunktionen der Integrationszelle. Letztgenannte sind im Fall der dreieckigen Integrationszellen die gewöhnlichen Ansatzfunktionen linearer Dreieckselemente. Auch die Ortsvektoren $\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}^{(\alpha)})$ der Punkte auf den Slave- bzw. Master-Elementen werden als Interpolation der Elementknoten formuliert. Hierin ist $n_{\text{nde}}^{(\alpha)} = 4$ die Anzahl der Knoten je Slave- bzw. Master-Element und $N_I^{(\alpha)}$ sind die Ansatzfunktionen der Slave- bzw. Master-Elemente. Der verbleibende Vektor $\beta \mathbf{n}_0$ ist der Vektor, der die Punkte verbindet. Die Richtung des Vektors $\beta \mathbf{n}_0$ ist die bekannte Projektionsrichtung.

Letztendlich ist die Projektionsgleichung (5.8) ein Gleichungssystem bestehend aus drei Gleichungen mit den drei Unbekannten β , $\xi^{(\alpha)}$ und $\eta^{(\alpha)}$. Die Elementkoordinaten $\bar{\xi}$ und $\bar{\eta}$ sind bekannt, da über die Fläche der Integrationszelle integriert wird. Je nachdem wie das Slave- bzw. Master-Element geformt ist, ergibt sich ein anderer Zusammenhang zwischen den Elementkoordinaten $\boldsymbol{\xi}$ und $\bar{\boldsymbol{\xi}}$. Haben die Slave- bzw. Master-Elemente die

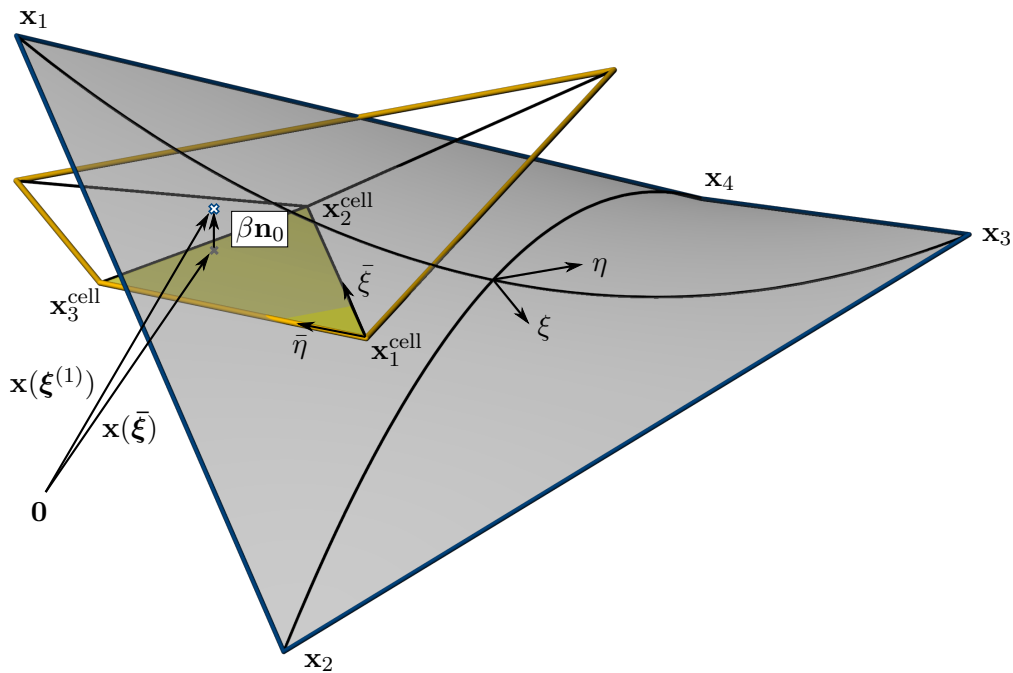


Abbildung 5.5: Projektion von Punkten der Integrationszelle auf das Slave-Element.

Form eines Rechtecks oder eines Parallelogramms, besteht ein linearer Zusammenhang zwischen den Elementkoordinaten. Folglich erhöht sich der Polynomgrad des Integranden durch die Projektion nicht und ist für das Mortar-Integral M infolge des Produkts aus zwei bilinearen Formfunktionen gleich vier. Sind die Slave- bzw. Master-Elemente allerdings allgemein verzerrt, haben also nicht die Form eines Parallelogramms, ist der Zusammenhang zwischen den Elementkoordinaten nichtlinear und der Integrand der Kontaktintegrale stellt eine gebrochenrationale Funktion dar. Eine exakte numerische Integration gebrochenrationaler Funktionen ist nicht möglich. Die zuvor gestellte Frage nach der richtigen Wahl der Quadraturformel ist daher nicht eindeutig zu beantworten. In dieser Arbeit wird, wenn nichts anderes angegeben wird, eine Gauß-Quadraturformel mit sieben Integrationspunkte je dreieckiger Integrationszelle verwendet (COWPER 1973). Diese Wahl entspricht der Empfehlung von PUSO UND LAURSEN (2004a). Mit dieser Quadraturformel können Polynome fünften Grades exakt integriert werden. Dadurch können für Probleme mit unverzerrten Slave- und Master-Elementen die Kontaktintegrale ohne Fehler berechnet werden.

Erläuterung des numerischen Aufwands zur Berechnung der Kontaktintegrale

Die in den Gleichungen (5.4)–(5.6) benötigten Projektionen der Integrationspunkte j erfolgen mit Gleichung (5.8), indem für die Elementkoordinaten der Integrationszelle

die Koordinaten des Integrationspunktes eingesetzt werden, das heißt $\bar{\xi} = \bar{\xi}_j$. Eine für diese Arbeit wichtige Eigenschaft der Projektionsgleichung wird hier nochmals betont: Im allgemeinen Fall verzerrter Slave- bzw. Master-Elemente ist die Projektionsgleichung infolge der bilinearen Formfunktionen $N^{(\alpha)}$ nichtlinear in $\xi^{(\alpha)}$ sowie $\eta^{(\alpha)}$ und bedingt den Einsatz eines iterativen Verfahrens. Das Lösen der Projektionsgleichung ist daher ein Grund für den hohen numerischen Aufwand von Mortar-Methoden und die Effizienz des Algorithmus hängt offensichtlich mit der Anzahl der Integrationspunkte zusammen.

Für die elementbasierte Integration, wie sie in FISCHER UND WRIGGERS (2005, 2006) vorgestellt wird, ist aus diesem Grund der numerische Aufwand meist geringer. Neben der entfallenden Segmentierung und Triangulierung werden meist deutlich weniger Integrationspunkte zur Integration der Kontaktintegrale verwendet. Außerdem ist die Projektion der Integrationspunkte lediglich in eine Richtung nötig, nämlich vom Slave auf den Master-Rand. Allerdings hat die elementbasierte Integration die in Abschnitt 5.1 genannten Nachteile.

Eine segmentbasierte Integrationsmethode, die weniger Integrationspunkte benötigt als die gewöhnliche Triangulierung nach PUSO UND LAURSEN (2003) und dennoch alle Vorteile segmentbasierter Integrationen besitzt, wird in POPP (2012) und im Rahmen der IGA in HESCH UND BETSCH (2012) beschrieben. Bei dieser Methode wird das Segment ebenfalls in dreieckige Integrationszellen unterteilt, allerdings ohne hierfür den Schwerpunkt des Segments zu verwenden. Stattdessen werden die Integrationszellen gebildet, indem die Eckpunkte des Segments direkt so miteinander verbunden werden, dass Dreiecke entstehen. Damit die Dreiecke möglichst große Innenwinkel besitzen und folglich die Integrationspunkte bestmöglich über das Segment verteilt werden, wird diese Unterteilung mithilfe einer Art Delaunay-Triangulierung durchgeführt. Streng genommen handelt es sich aber nicht um eine echte Delaunay-Triangulierung, da durch die Bedingung, die an die Triangulierung gestellt wird, nicht alle Dreiecke die Umkreisbedingung von Delaunay-Netzen erfüllen. Siehe beispielsweise CHEW (1989) für eine Erläuterung der Umkreisbedingung. Die Bedingung an die Delaunay-Triangulierung, wie sie in POPP (2012) verwendet wird, ist, dass keine weiteren Punkte erzeugt werden dürfen. Es werden also nur die Eckpunkte des Segments benutzt. Für das Segment aus dem Beispiel in Abbildung 5.4 ist diese Triangulierung in Abbildung 5.6 veranschaulicht.

In den folgenden Abschnitten werden bisher nicht näher untersuchte Möglichkeiten zur Reduktion der Integrationspunkte bei segmentbasierten Integrationsmethoden vorgestellt. In Abschnitt 5.5 werden diese und die eben beschriebenen Triangulierungen anhand von numerischen Experimenten hinsichtlich der Ergebnisgenauigkeit und ihrer Rechenintensität untersucht.

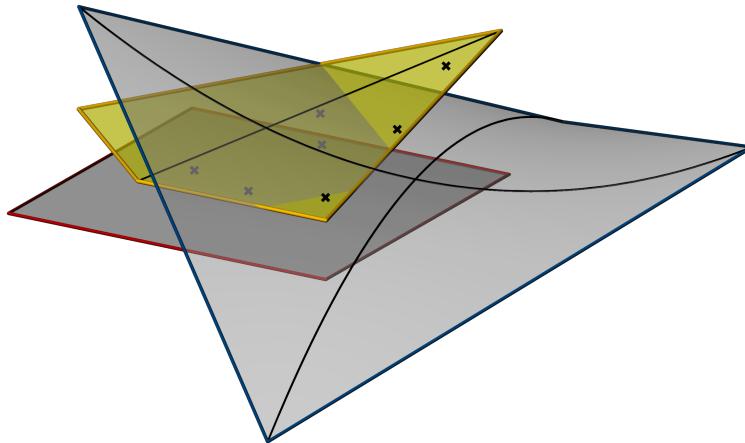


Abbildung 5.6: Delaunay-Triangulierung für das Segment aus Abbildung 5.4.

5.3 Alternative segmentbasierte Integrationsmethoden für dreidimensionale Kontaktprobleme

Die Unterteilung des Kontaktrandes in Segmente erzeugt stückweise Kontaktintegrale, deren Integranden glatt sind. Auf diese Weise ist die Integration zwar sehr genau, allerdings auch rechenaufwendig. In diesem Abschnitt werden deshalb alternative Methoden für die Berechnung der Kontaktintegrale vorgestellt (siehe auch WILKING UND BISCHOFF (2017)). Im Zusammenhang mit der Berechnung von Kontaktintegralen wurden die in diesem Abschnitt vorgestellten Methoden nach Kenntnis des Autors bisher noch nicht näher untersucht. In Betracht gezogen werden ausschließlich Alternativen, die die Segmentierung beibehalten, um die Glattheit des Integranden zu gewährleisten. Für jedes Paar eines Slave- und Master-Elements entspricht das gesamte Integrationsgebiet somit demselben Segment wie bei den Triangulierungen des vorherigen Abschnitts. Die alternativen Integrationsmethoden sollen weniger Integrationspunkte benötigen, um über die Segmente zu integrieren und dadurch die Anzahl der rechenintensiven Projektionen reduzieren. Damit die Alternativen konkurrenzfähig zu den Triangulierungen des vorherigen Kapitels sind, müssen sie im Vergleich dazu Folgendes erfüllen:

- geringerer Rechenaufwand,
- vergleichbare Ergebnisqualität.

Außerdem sollte es mit den Alternativen möglich sein, einfache Kontaktprobleme mit unverzerrten Slave- und Master-Elementen exakt zu berechnen. Herausfordernd bei der Berechnung der Kontaktintegrale ist der Fall gebrochenrationaler Funktionen im Integranden. Dieser Fall tritt für verzerrte Slave- oder Master-Elemente auf und schließt

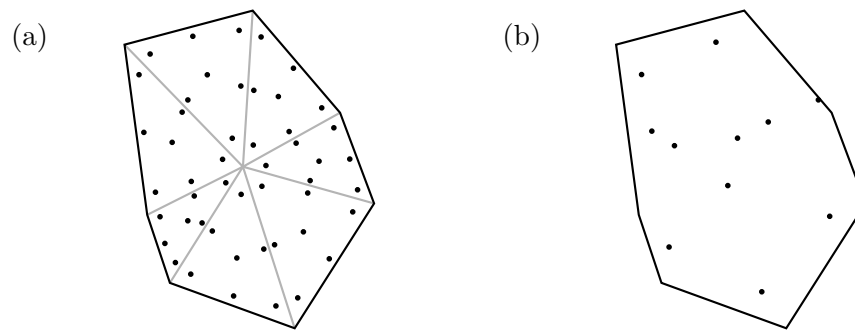


Abbildung 5.7: Position der Integrationspunkte eines heptagonalen Segments. (a) Triangulierung und Ausgangsverteilung mit 49 Integrationspunkten. (b) Stützpunkte einer Quadraturformel mit 11 Integrationspunkten, berechnet mit der Methode aus XIAO UND GIMBUTAS (2010).

eine exakte numerische Integration aus. Die alternativen Methoden sollten den Fehler dennoch möglichst gering halten.

5.3.1 Polygonale Integrationszellen

Die in Unterabschnitt 5.2.2 beschriebene Triangulierung der Segmente wird vorgenommen, da Segmente Polygone mit drei bis acht Ecken sind und für diese keine allgemeinen Quadraturformeln existieren. Für Dreiecke lassen sich die Stützstellen der Integrationspunkte in den lokalen Elementkoordinaten des Referenzelements angeben und anschließend durch geeignete Transformationen auf beliebig geformte Dreiecke anwenden. Für allgemeine Polygone ist dies nicht möglich. Es besteht aber die Möglichkeit, für eine gegebene Form eines Polygons eine Quadraturformel anzugeben. Eine von XIAO UND GIMBUTAS (2010) vorgestellte Möglichkeit wird im Folgenden zusammengefasst sowie hinsichtlich ihrer Eignung zur Integration über die Segmente beurteilt.

Das Ziel der Methode von XIAO UND GIMBUTAS (2010) ist es, für ein gegebenes Polygon eine Quadraturformel der gewünschten Integrationsordnung mit möglichst wenigen Integrationspunkten zu bestimmen. Die Ordnung der Quadraturformel soll in der folgenden Erklärung exemplarisch fünf sein, damit der Integrand für unverzerrte Slave- und Master-Elemente exakt integriert werden kann. Die Idee der Methode ist folgende: Ausgehend von einer bekannten Verteilung von Integrationspunkten werden nach und nach Integrationspunkte entfernt und für die verbleibenden Integrationspunkte neue Stützstellen und Gewichte gesucht. Die Ausgangsverteilung der Integrationspunkte wird so gewählt, dass sie Polynome des gewünschten Grades exakt integriert. Hierfür kann beispielsweise die Triangulierung aus Unterabschnitt 5.2.2 eingesetzt und jedes Dreieck mit je sieben Integrationspunkten integriert werden. In Abbildung 5.7 (a) ist exemplarisch

die Triangulierung und die Verteilung der Integrationspunkte für ein heptagonales Segment visualisiert. Mit dieser Quadraturformel wird ein Satz von Basisfunktionen, hier Legendre-Polynome ϕ , exakt über das Gebiet des Segments Ω^{seg} integriert. Der Satz von Basisfunktionen enthält alle zweidimensionalen Legendre-Polynome bis zum Polynomgrad fünf, also 21 Funktionen. Die Anzahl der Basisfunktionen wird im Folgenden mit r abgekürzt, die Anzahl der Integrationspunkte mit s . Letztgenannte beträgt für das Beispiel aus Abbildung 5.7 zu Beginn der Berechnung $s = 7 \cdot 7 = 49$.

In den $r = 21$ Zeilen des Gleichungssystems, das der Methode zugrunde liegt, steht für jede Basisfunktion ϕ_i deren numerische Integration der Form $\int \phi_i(\mathbf{x}) da = \sum w_j \phi_i(\mathbf{x}_j)$:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \int_{\Omega^{\text{seg}}} \phi_1(\mathbf{x}) da \\ \int_{\Omega^{\text{seg}}} \phi_2(\mathbf{x}) da \\ \vdots \\ \int_{\Omega^{\text{seg}}} \phi_r(\mathbf{x}) da \end{bmatrix}}_{\mathbf{a}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \phi_1(\mathbf{x}_1) & \cdots & \phi_1(\mathbf{x}_s) \\ \phi_2(\mathbf{x}_1) & \cdots & \phi_2(\mathbf{x}_s) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_r(\mathbf{x}_1) & \cdots & \phi_r(\mathbf{x}_s) \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \underbrace{\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_s \end{bmatrix}}_{\mathbf{w}}. \quad (5.9)$$

Auf der linken Seite des vorherigen Gleichungssystems stehen die exakten Integrale aller r Basisfunktionen, die mithilfe der Ausgangsverteilung der Integrationspunkte berechnet werden. Der Vektor der linken Seite \mathbf{a} ändert sich während des gesamten Ablaufs der Methode nicht. Auf der rechten Seite steht in jeder Zeile die numerische Integration jeder Basisfunktion. Darin sind \mathbf{x}_i die Stützstellen $\mathbf{x}_i = [x_i, y_i]^T$ der Quadraturformel und w_i die Gewichte der Stützstellen. Die genannten Größen \mathbf{x}_i und w_i sind unbekannt und werden in dem Vektor $\mathbf{y} = [x_1, y_1, w_1, \dots, x_s, y_s, w_s]^T$ zusammengefasst. Das Gleichungssystem (5.9) wird genutzt, um neue Quadraturformeln zu ermitteln, und dafür meist als Residuum der Form $\mathbf{c} = \mathbf{a} - \mathbf{B}\mathbf{w} = \mathbf{0}$ formuliert. Es handelt sich um ein nichtlineares Gleichungssystem in den Unbekannten \mathbf{y} , das über ein inkrementell-iteratives Verfahren gelöst wird. Die Inkremente bestehen darin, dass ausgehend von der Ausgangsverteilung nach und nach ein Integrationspunkt gelöscht wird. Innerhalb jedes Inkrementes wird \mathbf{y} so bestimmt, dass der Fehler des Gleichungssystems (5.9) minimiert wird. Diese Lösungsstrategie für das vorliegende nichtlineare Ausgleichsproblem wird Gauß-Newton-Verfahren bezeichnet und ist eine Erweiterung des Newton-Raphson-Verfahrens, vergleiche Abschnitt 4.3.

In Gleichung (5.9) entspricht das Löschen eines Integrationspunktes dem Löschen einer Spalte der Matrix \mathbf{B} und des entsprechenden Eintrags in \mathbf{w} . Welcher Integrationspunkt am besten gelöscht wird, ist in XIAO UND GIMBUTAS (2010) beschrieben. Die iterative Verbesserung der neuen Quadraturformel lässt sich wie folgt berechnen:

$$\Delta \mathbf{y}^{i+1} = -\bar{\mathbf{J}}^+ \mathbf{c}(\mathbf{y}^i). \quad (5.10)$$

Hierin ist $\bar{\mathbf{J}}^+$ die Pseudoinverse der Matrix $\bar{\mathbf{J}} = \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial \mathbf{y}}$. Die Verwendung dieser verallgemeinerten Inverse ist nötig, da die Anzahl der Gleichungen nicht der Anzahl der Unbekannten entspricht und die Matrix $\bar{\mathbf{J}}$ damit nicht quadratisch ist. Nach jeder erfolgreichen Iteration wird ein weiterer Integrationspunkt entfernt und, ausgehend von der vorherigen Verteilung, wird eine neue Quadraturformel ermittelt. Das Ende des Algorithmus ist erreicht und somit die Quadraturformel mit den wenigsten Integrationspunkten gefunden, wenn das Gauß-Newton-Verfahren nicht mehr konvergiert. Dies kann z. B. geschehen, weil die Ausgangsverteilung des Inkrementes sich nicht im Konvergenzradius befindet. Für das heptagonale Segment aus Abbildung 5.7 ist es möglich, mit der beschriebenen Methode eine Quadraturformel zu finden, die 11 statt der ursprünglich 49 Integrationspunkte benötigt. In Abbildung 5.7 (b) ist die zugehörige Verteilung der Integrationspunkte dargestellt.

Mit den Quadraturformeln, die auf diese Weise ermittelt werden, ist es möglich, Polynome bis zum gewünschten Grad zu integrieren. Allerdings ist die numerische Integration nicht exakt, da es sich um ein nichtlineares Ausgleichsproblem handelt und das Gauß-Newton-Verfahren die Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems (5.9) nur approximiert. Durch die Wahl einer niedrigen Fehlerschranke des Gauß-Newton-Verfahrens ist es dennoch möglich, sehr genaue Quadraturformeln zu erhalten. Beispielsweise ist für das heptagonale Segment aus Abbildung 5.7 der relative Fehler der berechneten Quadraturformel kleiner als 10^{-11} , wenn Polynome bis zum Grad fünf integriert werden. Die Fehler können demzufolge gering gehalten werden. Zusätzlich ist die Anzahl an Integrationspunkten verglichen zur Triangulierung deutlich geringer. Trotzdem stellt die in diesem Unterabschnitt beschriebene Methode keine sinnvolle Alternative zur Triangulierung dar. Ursächlich hierfür ist der Rechenaufwand, der zur Ermittlung der Quadraturformeln benötigt wird. Für jeden Integrationspunkt, der eingespart werden soll, müsste ein nichtlineares Gleichungssystem gelöst und dafür die Pseudoinverse aus Gleichung (5.10) berechnet werden.

Da die Quadraturformeln von der Form der Segmente abhängen, müssten diese Berechnungen für jedes Segment jedes Iterationsschrittes des globalen Newton-Raphson-Verfahrens erfolgen. Das würde den Rechenaufwand des Algorithmus erhöhen. Die eben zusammengefasste Alternative wird daher in dieser Arbeit nicht weiter untersucht. Jedoch werden für die im folgenden Unterabschnitt beschriebenen viereckigen Integrationszellen Quadraturformeln verwendet, die mit dem eben beschriebenen Algorithmus ermittelt werden. Für viereckige Integrationszellen ist eine Neuberechnung der Quadraturformel nicht nötig.

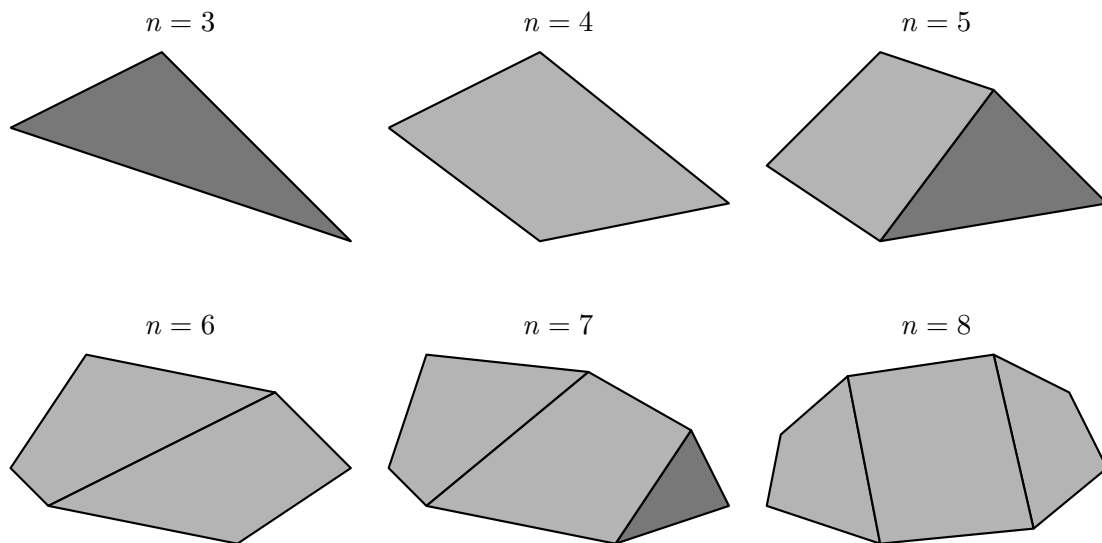


Abbildung 5.8: Quadrangulierung für unterschiedliche n -Ecke. Dreieckige Integrationszellen sind dunkelgrau, viereckige Integrationszellen hellgrau dargestellt.

5.3.2 Viereckige Integrationszellen – Quadrangulierung

Das Problem der alternativen Integrationsmethode des vorherigen Unterabschnitts ist hauptsächlich die Geometrieabhängigkeit der Quadraturformeln. In diesem Unterabschnitt wird deshalb eine Unterteilung in Integrationszellen untersucht, deren Quadraturformeln in einem lokalen Elementkoordinatensystem angegeben werden können. Dadurch gelten sie unabhängig von der Form der Integrationszellen. Das Vorgehen ähnelt demnach den Triangulierungen aus Unterabschnitt 5.2.2, allerdings werden an dieser Stelle viereckige Integrationszellen verwendet. In Analogie zum Begriff Triangulierung wird die Unterteilung des Segments in viereckige Integrationszellen in dieser Arbeit Quadrangulierung genannt. Theoretisch ist es möglich, jede polygonale Fläche ausschließlich in Vierecke zu unterteilen. Da es allerdings das Ziel ist, möglichst wenige Integrationspunkte und damit möglichst wenige Integrationszellen zu erzeugen, werden bei der hier beschriebenen Quadrangulierung die Segmente jeweils in möglichst wenige Vierecke und maximal ein Dreieck unterteilt. Folglich werden Segmente mit einer geraden Anzahl an Ecken ausschließlich in Vierecke und Segmente mit einer ungeraden Anzahl an Ecken in Vierecke und ein Dreieck unterteilt. Abbildung 5.8 zeigt für jede mögliche Anzahl an Ecken exemplarisch anhand eines Beispielsegments die Unterteilung, die sich aufgrund der Quadrangulierung ergibt. Neben den dargestellten Unterteilungen sind noch weitere Unterteilungen vorstellbar, die genau dieselbe Anzahl an Drei- und Vierecken besitzen, wobei aber andere Eckpunkte miteinander verbunden werden. In dieser Arbeit wird vor der Unterteilung in die Integrationszellen eine Delaunay-Triangulierung (siehe Unterabschnitt 5.2.2) ausgeführt und in einem weiteren Schritt werden benachbarte Dreiecke

zu viereckigen Integrationszellen verbunden. Auf diese Weise ist die Quadrangulierung eindeutig und sehr kleine Innenwinkel in den Integrationszellen werden vermieden.

Detaillierte Betrachtung des Integranden der Kontaktintegrale

Infolge der viereckigen Integrationszellen ändert sich an der Form der numerischen Berechnung der Kontaktintegrale im Vergleich zu den Gleichungen (5.4)–(5.6) relativ wenig. Der Segmentanteil setzt sich weiterhin aus der Summe über die Integrationszellen und der Summe über die Integrationspunkte zusammen. Bei der Quadrangulierung können die einzelnen Integrationszellen allerdings dreieckig oder viereckig sein. Entsprechend ihrer Geometrie besitzen sie Quadraturformeln mit einer unterschiedlichen Anzahl an Integrationspunkten.

Ein wesentlicher Unterschied zu den Triangulierungen liegt in der Jacobi-Determinante der viereckigen Integrationszellen, die in Gleichung (3.24) angegeben ist. Die Jacobi-Determinante ist für ebene, allgemein verzerrte Vierecke linear in den lokalen Elementkoordinaten $\bar{\xi}$ der Integrationszelle. Nur im Sonderfall parallelogrammförmiger Integrationszellen ist sie konstant. Wird die Quadrangulierung zur Unterteilung der Segmente verwendet, lauten die Gleichungen zur numerischen Berechnung des Segmentanteils der Kontaktintegrale für den allgemeinen Fall veränderlicher Jacobi-Determinanten demnach:

$$D_{II}^{\text{seg}} = \sum_{i=1}^{n_{ic}} \sum_{j=1}^{n_{ip}} w_j N_I^{(1)}(\xi^{(1)}(\bar{\xi}_j)) J_i(\bar{\xi}_j), \quad (5.11)$$

$$M_{IL}^{\text{seg}} = \sum_{i=1}^{n_{ic}} \sum_{j=1}^{n_{ip}} w_j \Phi_I^{(1)}(\xi^{(1)}(\bar{\xi}_j)) N_L^{(2)}(\xi^{(2)}(\bar{\xi}_j)) J_i(\bar{\xi}_j), \quad (5.12)$$

$$\tilde{g}_I^{\text{seg}} = \sum_{i=1}^{n_{ic}} \sum_{j=1}^{n_{ip}} w_j \Phi_I(\xi^{(1)}(\bar{\xi}_j)) g_n^h(\xi^{(1)}(\bar{\xi}_j), \xi^{(2)}(\bar{\xi}_j)) J_i(\bar{\xi}_j). \quad (5.13)$$

Für allgemein verzerrte viereckige Integrationszellen erhöht sich infolge der Jacobi-Determinante der Polynomgrad des Integranden der Kontaktintegrale um eins.

Der Zusammenhang zwischen den lokalen Elementkoordinaten ξ des Slave- bzw. Master-Elements und den lokalen Elementkoordinaten $\bar{\xi}$ der viereckigen Integrationszellen ist der zweite wesentliche Unterschied zwischen den Triangulierungsmethoden und der Quadrangulierungsmethode. Dieser Zusammenhang wird über die Projektionsgleichung (5.8) hergestellt und bewirkt bei allgemein verzerrten viereckigen Integrationszellen eine weitere Erhöhung des Polynomgrades der Integranden. In Projektionsgleichung (5.8) sind $N_k^{\text{cell}}(\bar{\xi})$ die Formfunktionen der viereckigen Integrationszellen und damit die gewöhnlichen bilinearen Formfunktionen vierknotiger linearer Elemente. Infolge derer ist für

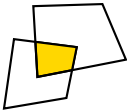

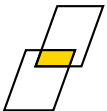
		Triangulierung	Quadrangulierung
	Slave- und/oder Master-Element verzerrt	gebrochenrationale Funktion	gebrochenrationale Funktion
	Slave- und Master-Element parallelogrammförmig (viereckige Integrationszelle verzerrt)	Polynom, Grad 4 (2/2)	Polynom, Grad 9 (5/5)
	Slave- und Master-Element parallelogrammförmig (viereckige Integrationszelle parallelogrammförmig)	Polynom, Grad 4 (2/2)	Polynom, Grad 4 (2/2)

Tabelle 5.1: Art des Integranden in Abhängigkeit der Form des Slave- und Master-Elements sowie der Form der Integrationszelle. Für polynomische Integranden ist ihr Grad angegeben sowie der Grad jeder Variable (Grad von $\bar{\xi}$ /Grad von $\bar{\eta}$).

allgemein verzerrte viereckige Integrationszellen die Funktion, die ξ in Abhängigkeit von $\bar{\xi}$ ausdrückt, ein bilineares Polynom. Die Terme $N^{(\alpha)}(\xi^{(\alpha)}(\bar{\xi}))$ und $\Phi^{(1)}(\xi^{(1)}(\bar{\xi}))$ der Kontaktintegrale sind folglich biquadratische Polynome. Zusammen mit der linearen Jacobi-Determinante kann der Integrand des Mortar-Integrals M demzufolge den Polynomgrad neun annehmen. In die einzelnen Richtungen $\bar{\xi}$ und $\bar{\eta}$ ist der Grad maximal fünf. Zur Erinnerung sei Folgendes angemerkt: Bei dreieckigen Integrationszellen ist der Zusammenhang zwischen den lokalen Elementkoordinaten linear und die Jacobi-Determinante konstant, der Grad des Integranden von M ist folglich maximal vier.

Sind sowohl die Slave- und Master-Elemente als auch die viereckige Integrationszelle parallelogrammförmig, ist für diese Konstellation der Integrand der Kontaktintegrale (5.1)–(5.3) ebenfalls maximal vom Grad vier. Die bisherigen Überlegungen zur Art des Integranden gelten nur für unverzerrte Slave- und Master-Elemente. Sind diese verzerrt, ist der Integrand kein Polynom mehr, sondern eine gebrochenrationale Funktion. In Tabelle 5.1 ist sowohl für die Quadrangulierungsmethode als auch für die Triangulierungsmethode zusammengefasst, welcher Integrand für welche Konstellation vorliegt.

Im Normalfall liegt bei Kontaktproblemen mit großen Deformationen immer die erste Konstellation aus Tabelle 5.1 vor, sodass es mit numerischen Integrationsmethoden nicht

Gewicht w	ξ	η
0,3176606115128	0,0177586820208	-0,9659285494001
0,3176606115128	-0,0177586820208	0,9659285494001
0,5518002998955	0,7788710544650	-0,5715708301252
0,5518002998955	-0,7788710544650	0,5715708301252
0,5591105171631	-0,7703781288542	-0,5829672991828
0,5591105171631	0,7703781288542	0,5829672991828
1,1428571428571	0,0000000000000	0,0000000000000

Tabelle 5.2: Quadraturformel nach XIAO UND GIMBUTAS (2010) für das Referenzelement $[-1, 1]^2$. Relativer Fehler für Polynome fünften Grades ist kleiner als 10^{-11} .

möglich ist, die Kontaktintegrale exakt zu berechnen. Die Quadraturformel der Triangulierungsmethoden wird in Unterabschnitt 5.2.2 so gewählt, dass zumindest für den Sonderfall unverzerrter Slave- und Master-Elemente die Kontaktintegrale exakt berechnet werden können. Die Wahl der Quadraturformeln für die viereckigen Integrationszellen ist vergleichbar motiviert: Es soll ebenfalls möglich sein, für die zweite Konstellation aus Tabelle 5.1 die Kontaktintegrale exakt zu berechnen. Demnach werden Quadraturformeln fünfter Ordnung benötigt. Der Grad des Integranden ist zwar insgesamt neun, aber der Grad jeder einzelnen Variable $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$ ist maximal fünf. Zumindest bei Gauß-Quadraturformeln für Vierecke ist nur der Grad jeder einzelnen Variablen entscheidend und damit sind Gauß-Quadraturformeln fünfter Ordnung ausreichend. Bei den Quadraturformeln für Dreiecksflächen gibt es diese Entkopplung der Variablen nicht.

Quadraturformeln für viereckige Integrationszellen

Die Quadraturformeln von Vierecken werden normalerweise bezüglich des Referenzelements $[-1, 1]^2$ angegeben und können auf beliebig verzerrte Vierecke transformiert werden. Im Rahmen dieser Arbeit werden vorrangig Gauß-Quadraturformeln verwendet. Mit diesen können Polynome bis zum Grad $2n_{ip} - 1$ exakt integriert werden. n_{ip} steht dabei für die Anzahl der Integrationspunkte je Richtung. Die zweidimensionale Gauß-Quadraturformel, die Polynome bis zum Grad fünf exakt integriert, hat demnach neun Integrationspunkte.

Neben dieser Gauß-Quadraturformel wird auch eine Quadraturformel untersucht, die sich aus dem in Unterabschnitt 5.3.1 beschriebenen Algorithmus von XIAO UND GIMBUTAS (2010) ergibt. Wie in dem genannten Unterabschnitt beschrieben, sind diese Quadraturformeln nicht exakt. Der Fehler kann mit einer niedrigen Fehlerschranke des Gauß-Newton-Verfahrens aber kleingehalten werden. In Tabelle 5.2 ist eine Quadratur-

formel mit sieben Integrationspunkten gegeben, die Polynome bis zum Grad fünf mit einem Fehler kleiner als 10^{-11} berechnet. Wird im Folgenden im Kontext mit dieser Quadraturformel das Adjektiv „exakt“ verwendet, ist tatsächlich „annähernd exakt“ gemeint.

Potenzial zur Reduktion der Integrationspunkte

Zu Beginn dieses Abschnitts wurde die Reduktion der Anzahl der Integrationspunkte zum Ziel gesetzt, um den Kontaktalgorithmus effizienter zu gestalten. Wie groß dieses Potenzial im Vergleich zu den dreieckigen Integrationszellen ist, wird anhand von Abbildung 5.9 verdeutlicht. Die Abbildung zeigt die Anzahl der benötigten Integrationspunkte in Abhängigkeit der Anzahl der Ecken n eines Segments. Die Integrationsmethoden, die miteinander verglichen werden, sind die zuvor beschriebenen:

- **Tri (7/- IP)**: Triangulierung nach PUSO UND LAURSEN (2003) (siehe Unterabschnitt 5.2.2) mit 7 Integrationspunkten je dreieckiger Integrationszelle,
- **Del-Tri (7/- IP)**: Delaunay-Triangulierung nach POPP (2012) (siehe Unterabschnitt 5.2.2) mit 7 Integrationspunkten je dreieckiger Integrationszelle,
- **Quad (7/9 IP)**: Quadrangulierung nach Unterabschnitt 5.3.2 mit 7 Integrationspunkten je dreieckiger Integrationszelle und 9 Integrationspunkten (Gauß-Quadraturformel) je viereckiger Integrationszelle,
- **Quad (7/7 IP)**: Quadrangulierung nach Unterabschnitt 5.3.2 mit 7 Integrationspunkten je dreieckiger Integrationszelle und 7 Integrationspunkten (Quadraturformel nach XIAO UND GIMBUTAS (2010)) je viereckiger Integrationszelle.

In obiger Aufstellung folgt nach der Abkürzung zur Bezeichnung der Methode zur Unterteilung des Segments in Klammern die Angabe der Integrationspunkte für jede dreieckige und, wenn es sich um eine Quadrangulierungsmethode handelt, für jede viereckige Integrationszelle. Alle aufgelisteten Integrationsmethoden integrieren Polynome bis zum Grad fünf exakt. Aus Abbildung 5.9 wird das Einsparpotenzial infolge der Quadrangulierung ersichtlich. Für fast jede Anzahl an Segmentecken ist die Anzahl an Integrationspunkten geringer, wenn viereckige Integrationszellen verwendet werden. Für den Fall achteckiger Segmente ist die Anzahl der Integrationspunkte infolge der Quadrangulierung weniger als die Hälfte im Vergleich zu Tri (7/- IP). Lediglich im Falle eines dreieckigen Segments ist die Anzahl der Integrationspunkte im Vergleich zur Delaunay-Triangulierung identisch, da für diesen Fall auch bei der Quadrangulierung nur eine dreieckige Integrationszelle erzeugt wird, siehe Abbildung 5.8.

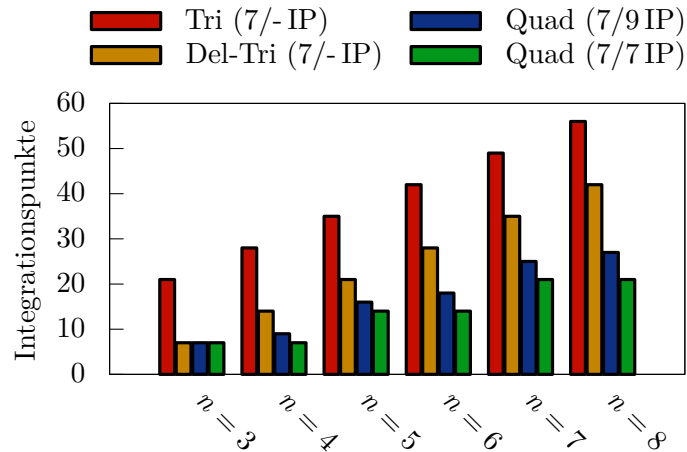


Abbildung 5.9: Anzahl der benötigten Integrationspunkte für unterschiedliche n -eckige Segmente und unterschiedliche Integrationsmethoden fünfter Ordnung.

Mit Abbildung 5.9 wird allein das Potenzial zur Effizienzsteigerung der Integrationsmethoden mit viereckigen Integrationszellen gezeigt. Wie genau die Integrationsmethoden im Vergleich zu Integrationsmethoden sind, die ausschließlich dreieckige Integrationszellen verwenden, wird in den beiden folgenden Abschnitten untersucht.

5.4 Gezielte Untersuchung der Integrationsgenauigkeit für unterschiedliche Fehlerquellen

In diesem Abschnitt wird die Integrationsgenauigkeit der viereckigen Integrationszellen für unterschiedliche Problemstellungen untersucht. Hierfür werden Werte der Mortar-Integrale D und M mit allen präsentierten segmentbasierten Integrationsmethoden berechnet und verglichen. Anhand der Berechnungen wird untersucht, wie groß der Integrationsfehler ist, wenn sich infolge der viereckigen Integrationszellen der Grad des Integranden erhöht. Außerdem wird der Fehler infolge gebrochenrationaler Integranden quantifiziert und zwischen den untersuchten Methoden verglichen.

Für die Untersuchungen dieses Abschnitts werden keine vollständigen Kontaktprobleme berechnet, sondern lediglich der Kontaktintegralanteil von einem Slave- und einem Master-Element. Durch die Variation der räumlichen Anordnung dieses Elementpaares werden einige Sonderfälle abgedeckt, aber auch allgemeinere Fälle betrachtet. Abbildung 5.10 zeigt die Geometrie des untersuchten Elementpaares. Die Elemente sind

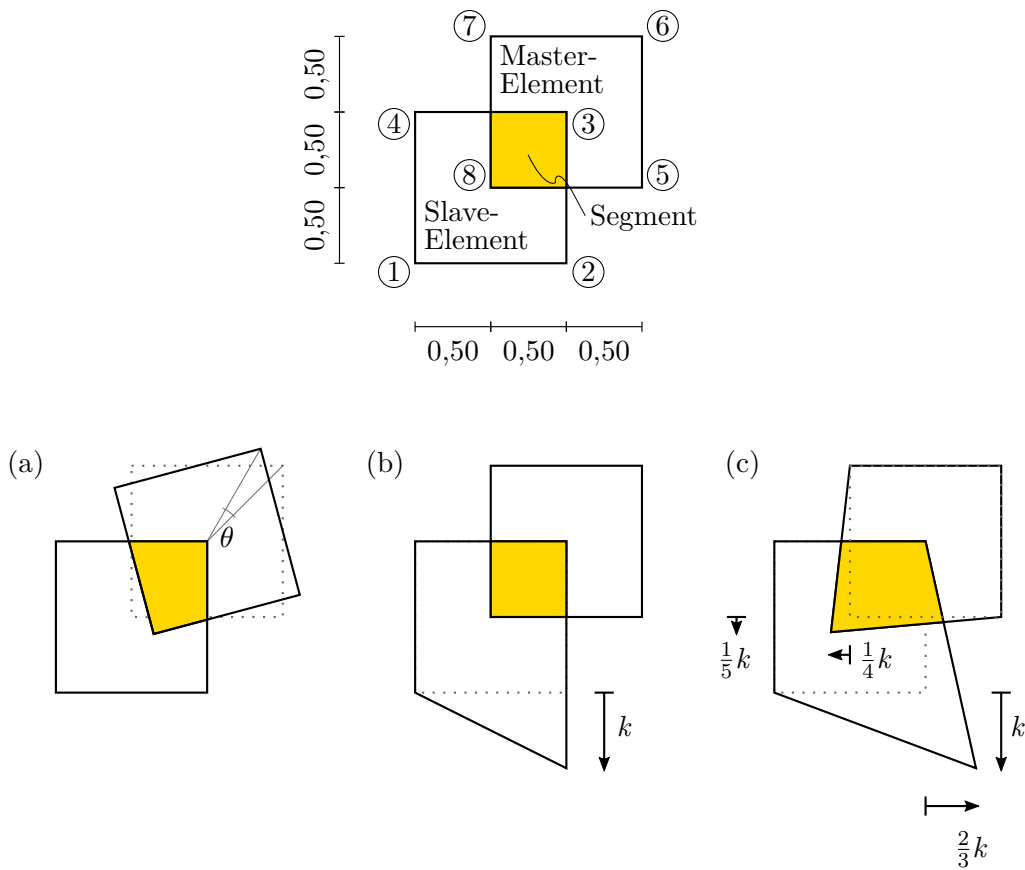


Abbildung 5.10: Paar eines Slave- und eines Master-Elements. Ausgangsgeometrie mit Visualisierung der Segmentform. Konfigurationen zur Untersuchung des (a) Einflusses verzerrter viereckiger Segmente, (b) Einflusses gebrochenrationaler Integranden und (c) kombinierten Einflusses beider zuvor genannten Faktoren.

in der Ausgangskonfiguration quadratisch und eben. Zur Berechnung der Kontaktintegrale wird über das gelb visualisierte Segment integriert, das in der Ausgangslage eine quadratische Form besitzt. Bei der Quadrangulierung wird demnach eine viereckige Integrationszelle zur numerischen Integration benötigt. Bei den Triangulierungsmethoden wird das Segment in vier bzw. zwei dreieckige Integrationszellen unterteilt. Wie in Abschnitt 5.3.2 beschrieben wird, hat der Integrand der Mortar-Integrale für diesen Sonderfall maximal den Grad vier und kann dadurch mit den genannten Quadraturformeln fünfter Ordnung exakt integriert werden. Anhand der Abbildung 5.10 (a)–(c) wird veranschaulicht, wie die Geometrie der beiden Elemente variiert wird, um bestimmte Einflussfaktoren, die die Integration erschweren, einzeln und kombiniert zu betrachten. Die Berechnungen erfolgen mit der Software Maple. Als Referenzlösung dient, wenn nicht anderes angegeben ist, die zugehörige analytische Lösung.

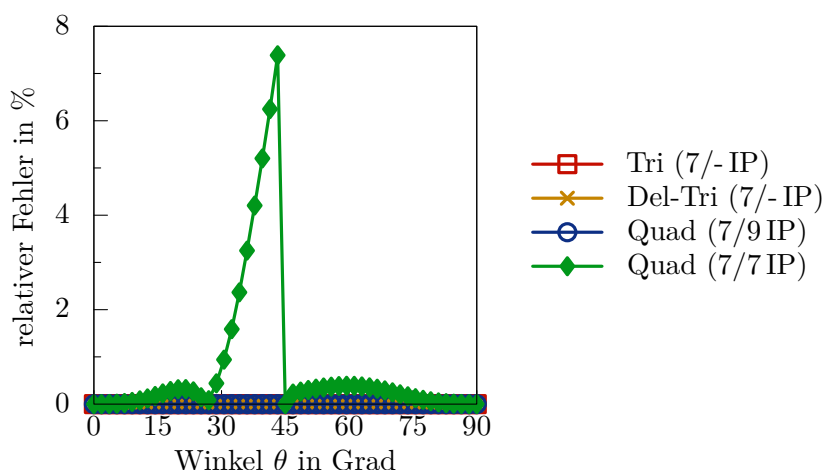


Abbildung 5.11: Relativer Fehler von Mortar-Integral M_{26} für unterschiedlich stark verzerrte viereckige Segmente, siehe Abbildung 5.10 (a).

5.4.1 Einfluss verzerrter viereckiger Segmente

Zunächst wird die Integrationsgenauigkeit für den Fall allgemein verzerrter viereckiger Integrationszellen und unverzerrter Slave- und Master-Elemente untersucht. Wie in Abbildung 5.10 (a) dargestellt ist, wird das Problem dafür für verschiedene Drehwinkel θ des Master-Elements ausgewertet. Die stärkste Verzerrung des Segments ergibt sich für einen Winkel von circa 45° . Für exakt 45° wird das Segment dreieckig und alle Integrationsmethoden verwenden dreieckige Integrationszellen. Gemäß Tabelle 5.1 erhöht sich aufgrund der verzerrten viereckigen Integrationszellen der Polynomgrad des Integranden für die Quadrangulierungsmethoden auf maximal fünf je Variable. Für die Triangulierungsmethoden ist der Polynomgrad unabhängig von θ vier. Die Kontaktintegrale sollten sich demnach exakt berechnen lassen.

Abbildung 5.11 zeigt exemplarisch den Fehler in M_{26} in Abhängigkeit unterschiedlicher Winkel θ . Es wird der relative Fehler $|M_{26} - M_{26}^{\text{ref}}|/|M_{26}^{\text{ref}}|$ angegeben, der entsprechend auch in den verbleibenden Fehlerdiagrammen dieses Kapitels verwendet wird. M_{26}^{ref} ist dabei der Wert des Mortar-Integrals der Referenzlösung. Die Ergebnisse sind für die anderen Mortar-Integrale M_{IL} ähnlich und daher nicht dargestellt. Bis auf Quad (7/7 IP) sind alle betrachteten Integrationsmethoden in der Lage M_{26} exakt zu bestimmen. Mit der Integrationsmethode Quad (7/7 IP) ist der Fehler vor allem für stark verzerrte Integrationszellen, also für $\theta \approx 45^\circ$, groß. Mit Quad (7/7 IP) lässt sich M_{26} nicht exakt berechnen, da die Integrationsordnung dieser Quadraturformel sich auf den gesamten Grad des Integranden bezieht. Dies ist ein wesentlicher Unterschied zur Gauß-Quadraturformel und wird anhand dieses Problems offensichtlich. Bei exakt 45° ist der Fehler null, da für

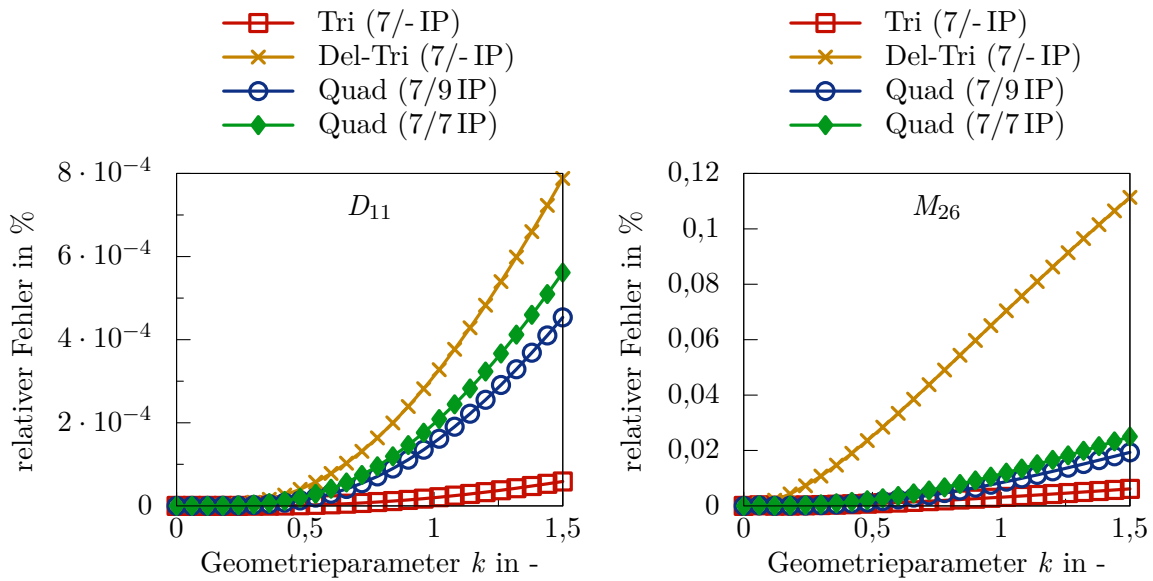


Abbildung 5.12: Relativer Fehler von Mortar-Integral D_{11} (links) und M_{26} (rechts) für unterschiedlich verzerrte Slave-Elemente, siehe Abbildung 5.10 (b).

diesen Winkel das Segment dreieckig ist und eine dreieckige Integrationszelle entsteht, mit deren Quadraturformel es möglich ist, das Integral exakt zu berechnen.

5.4.2 Einfluss gebrochenrationaler Integranden

Nachfolgend wird die Integrationsgenauigkeit bei gebrochenrationalen Integranden untersucht. Die gebrochenrationalen Terme entstehen durch die Projektion der Integrationspunkte auf die Slave- und Master-Elemente, wenn diese nicht parallelogrammförmig sind. Zur Identifikation der resultierenden Integrationsungenauigkeit wird eine Reihe von Problemen untersucht, bei denen das Slave-Element verzerrt und das Segment unverzerrt ist. Die Verzerrung des Slave-Elements wird durch den Geometrieparameter k gesteuert. Siehe hierzu die Veranschaulichung in Abbildung 5.10 (b). Infolge des unverzerrten Segments erhöht sich der Polynomgrad des Integranden auch durch die viereckigen Integrationszellen nicht zusätzlich. Sich ergebende Integrationsfehler sind demnach ausschließlich auf die gebrochenrationalen Funktionen zurückzuführen. Abbildung 5.12 zeigt den Fehler in Abhängigkeit des Geometrieparameters k beispielhaft für die Mortar-Integrale D_{11} und M_{26} . Für $k = 0$ ist der Fehler für alle betrachteten Methoden identisch null. Mit zunehmenden Werten für den Geometrieparameter k steigt der Fehler aller Methoden an, da sich der Einfluss der gebrochenrationalen Terme im Integranden des jeweiligen Mortar-Integrals vergrößert. Die Entwicklung der Fehler ähnelt sich für bei-

de Integrale, allerdings sind die Fehler für Mortar-Integral D_{11} deutlich geringer als für Mortar-Integral M_{26} . Der Grund hierfür liegt im geringeren Grad des Integranden, da in Mortar-Integral D_{11} nur eine Formfunktion vorkommt und nicht das Produkt zweier Formfunktionen wie in Mortar-Integral M_{26} . Den geringsten Fehler weist die Methode Tri (7/- IP) auf. Der Integrationsfehler, der sich mit den Methoden mit viereckigen Integrationszellen ergibt, ist kaum größer als für Tri (7/- IP), solange das Slave-Element nur moderat verzerrt ist. Erst für stärkere Verzerrungen weichen die gezeigten Kurven zunehmend voneinander ab. Im Vergleich zwischen den Methoden Quad (7/9 IP) und Quad (7/7 IP) ist die Integrationsgenauigkeit der Gauß-Quadraturformel höher, wenn es gebrochenrationale Funktionen zu integrieren gilt. Die größten Fehler weist die Integrationsmethode auf, bei der eine Delaunay-Triangulierung zur Unterteilung des Segments durchgeführt wird. Obwohl dieselbe Quadraturformel verwendet wird wie für Tri (7/- IP), ist der Fehler von Del-Tri (7/- IP) deutlich größer. Die Ursache liegt in der geringen Anzahl an Integrationspunkten für das betrachtete Segment. Der Fehler bei der Integration gebrochenrationaler Funktionen lässt sich reduzieren, wenn mehr Integrationspunkte verwendet werden. Bemerkenswert ist, dass die Quadraturformeln der viereckigen Integrationszellen trotz einer geringeren Anzahl an Integrationspunkten für dieses Beispiel genauer sind als Del-Tri (7/- IP).

5.4.3 Kombiniertes Einfluss beider Faktoren

Zum Abschluss der Untersuchungen dieses Abschnitts wird die Geometrie der Ausgangskonfiguration so verändert, dass beide zuvor getrennt untersuchten Einflüsse auf den Integranden kombiniert auftreten. Durch eine Verzerrung des Slave- und des Master-Elements wird das viereckige Segment verzerrt und folglich steigt für die Quadrangulierungsmethoden der Grad des polynomischen Anteils des Integranden. Weiterhin führt die Verzerrung des Slave- und des Master-Elements zu gebrochenrationalen Anteilen im Integranden. Der Grad der Verzerrung wird durch den Geometrieparameter k gesteuert. Abbildung 5.10 (c) zeigt die Geometrie der Elemente in Abhängigkeit des Geometrieparameters k . Die Integrationsfehler sind beispielhaft für die Mortar-Integrale D_{11} und M_{26} in Abbildung 5.13 dargestellt. Als Referenzlösung dient für diese Problemstellung eine numerische Lösung. Die numerische Referenzlösung wird berechnet, indem das Segment mithilfe des Schwerpunktes in dreieckige Integrationszellen unterteilt und über jede dreieckige Integrationszelle mit einer Quadraturformel mit 453 Integrationspunkten integriert wird. Die Quadraturformel wird in XIAO UND GIMBUTAS (2010) beschrieben und ist exakt für Polynome bis zum Grad 50. Für gebrochenrationale Integranden wird die Quadraturformel als ausreichend genau betrachtet.

Aufgrund der kombinierten Betrachtung der Einflussfaktoren sind die Fehler für alle Methoden größer als in den vorherigen Untersuchungen. Für zunehmende Werte von k

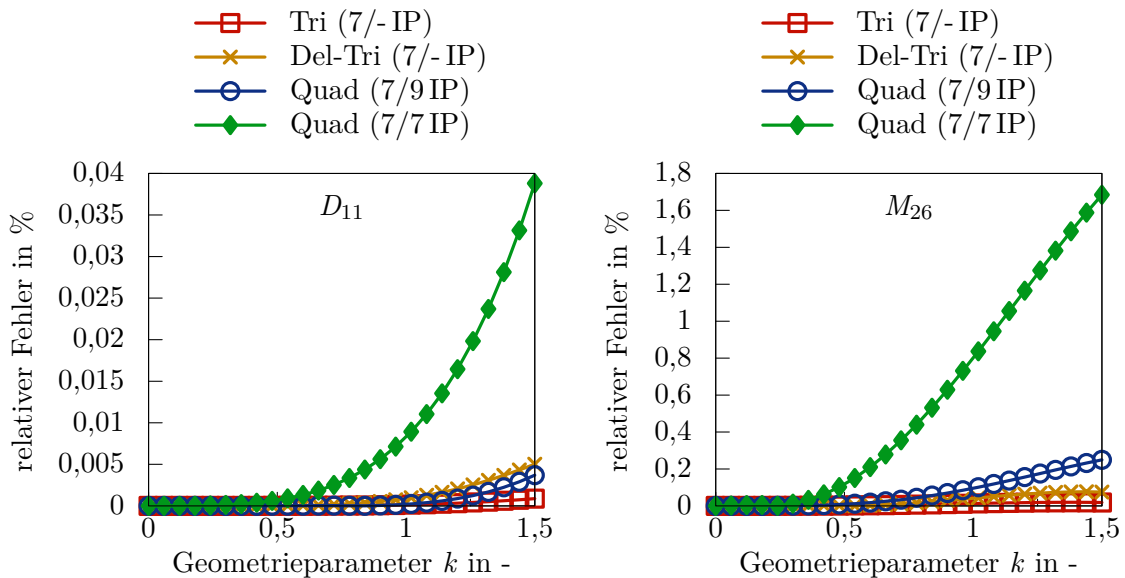


Abbildung 5.13: Relativer Fehler von Mortar-Integral D_{11} (links) und M_{26} (rechts) für unterschiedlich verzerrte Segmente sowie Slave- und Master-Elemente, siehe Abbildung 5.10 (c).

nimmt auch der Fehler der Methoden zu. Der Fehler von Quad (7/7 IP) nimmt dabei am stärksten zu. Die großen Fehler resultieren hauptsächlich aus der Integrationsungenauigkeit dieser Methode bei verzerrten viereckigen Integrationszellen, vergleiche mit den Ergebnissen aus Unterabschnitt 5.4.1.

Im Gegensatz zur Problemstellung des vorherigen Unterabschnitts ist für dieses Beispiel die Integrationsgenauigkeit von Del-Tri (7/- IP) besser als die von Quad (7/9 IP). Dies gilt zumindest für Mortar-Integral M_{26} . Durch die stärkere Verzerrung im Vergleich zu Unterabschnitt 5.4.2 ist der Anteil der gebrochenrationalen Terme im Integranden größer. Integrationsmethode Del-Tri (7/- IP) scheint den Integranden aufgrund der höheren Anzahl an Integrationspunkten genauer integrieren zu können. Aus selbigem Grund ist die Genauigkeit von Tri (7/- IP) nochmals besser im Vergleich zu allen anderen betrachteten Methoden. Abgesehen von den Fehlern von Quad (7/7 IP) sind die Fehler aller Methoden gering und unterscheiden sich kaum, solange die Verzerrung der Elemente moderat ist.

5.4.4 Vorläufige Beurteilung der Integrationsmethoden

Die präsentierten Integrationsmethoden Quad (7/9 IP) und Quad (7/7 IP) werden in den vorherigen Unterabschnitten 5.4.1–5.4.3 mit den konventionellen Integrationsmetho-

den Del-Tri (7/- IP) und Tri (7/- IP) verglichen. Schlussfolgernd für die Untersuchungen dieses Abschnitts werden die Beobachtungen beurteilt.

Mit Quad (7/7 IP) können nur die Probleme exakt berechnet werden, deren Integrand einen Polynomgrad von fünf und geringer hat. Die numerische Untersuchung in Unterabschnitt 5.4.1 zeigt, dass sich die Integrationsordnung fünf der Quadraturformel der Integrationsmethode Quad (7/7 IP) auf die Summe der Exponenten der enthaltenen Variablen bezieht. Mit Quad (7/7 IP) können demnach nur Polynome vom Typ $\bar{\xi}^p \bar{\eta}^q$, $p + q \leq 5$ exakt integriert werden. Sobald die viereckige Integrationszelle verzerrt ist, erhöht sich der Polynomgrad einiger Monome der Integranden auf einen Wert über fünf. Je stärker die Verzerrung ist, desto größer wird der Einfluss dieser Monome und desto größer wird der Integrationsfehler von Quad (7/7 IP), vergleiche Abbildung 5.11. Bei Gauß-Quadraturformeln bezieht sich die Ordnung auf die Exponenten der einzelnen Variablen, sodass eine Gauß-Quadraturformel fünfter Ordnung Monome vom Typ $\bar{\xi}^p \bar{\eta}^q$, $p \leq 5$, $q \leq 5$ exakt integrieren kann. Aufgrund dieser Tatsache lassen sich alle Probleme, die mit den Integrationsmethoden Tri (7/- IP) und Del-Tri (7/- IP) exakt berechnet werden können, auch mit Quad (7/9 IP) exakt berechnen.

Im Allgemeinen sind die Integranden der Kontaktintegrale aber gebrochenrationale Funktionen bzw. enthalten gebrochenrationale Terme. Gebrochenrationale Integranden treten auf, sobald die Slave- und Master-Elemente verzerrt sind. Diese Probleme können erwartungsgemäß mit keiner der untersuchten Integrationsmethoden exakt berechnet werden. Für diese Fälle scheint es hilfreich zu sein, möglichst viele Integrationspunkte zu verwenden. Integrationsmethode Del-Tri (7/- IP) führt für alle betrachteten Untersuchungen auf die geringsten Integrationsfehler. Ein Vergleich zwischen Quad (7/9 IP) und Del-Tri (7/- IP) zeigt bisher keinen eindeutigen Vorteil einer Methode. Obwohl Quad (7/9 IP) weniger Integrationspunkte verwendet, siehe Abbildung 5.9, ist der Integrationsfehler teilweise kleiner. Allerdings ist der Fehler von Quad (7/9 IP) für stark verzerrte Elemente größer als für Del-Tri (7/- IP), siehe Unterabschnitt 5.4.3.

Die Untersuchungen dieses Abschnitts legen nahe, die Verzerrung der Slave- und Master-Elemente möglichst gering zu halten, da der Integrationsfehler aller Integrationsmethoden mit zunehmender Verzerrung ansteigt. Wenigstens für die Ausgangsgeometrie lässt sich das durch eine entsprechende Vernetzung sicherstellen. Vor allem für diese Netze scheint Quad (7/9 IP) eine vielversprechende Alternative zu den Triangulierungsmethoden zu sein.

5.5 Numerische Experimente

Die numerischen Experimente dieses Abschnitts stellen im Gegensatz zu den Untersuchungen des vorherigen Abschnitts komplette Kontaktprobleme dar. Anhand dieser wird nicht nur die Genauigkeit der präsentierten Integrationsmethoden verglichen, sondern auch ihr numerischer Aufwand quantifiziert. Der numerische Aufwand wird relativ zur konventionellen Integrationsmethode Tri (7/-IP) angegeben und unter anderem an der Anzahl der Integrationspunkte festgemacht, die zur Berechnung der Kontaktintegrale nötig ist. Die Genauigkeit wird über die Abweichung zu einer numerischen Referenzlösung (Ref) ausgedrückt, da für die meisten betrachteten nichtlinearen Experimente keine analytischen Referenzlösungen existieren. Die Kontaktintegrale der numerischen Referenzlösung werden berechnet wie die der Referenzlösung in Unterabschnitt 5.4.3. Die Segmente werden mithilfe des Schwerpunktes trianguliert und es werden 453 Integrationspunkte je dreieckiger Integrationszelle verwendet. Ansonsten gibt es keinen Unterschied zu den übrigen Berechnungen, das heißt das Finite-Elemente-Netz etc. ist identisch. Auf diese Weise wird der Fehler in der Kontaktintegralberechnung isoliert und vergleichbar gemacht.

Alle folgenden Berechnungen dieses Kapitels erfolgen mit dem Finite-Elemente-Programm NumPro des Instituts für Baustatik und Baudynamik der Universität Stuttgart. Dabei werden geometrische Nichtlinearitäten berücksichtigt. Die Fehlerschranke für den globalen Newton-Raphson-Algorithmus wird zu $\epsilon_r = 10^{-8}$ angenommen, sofern nichts anderes angegeben wird. Als Materialien werden in diesem Abschnitt ausschließlich Neo-Hooke-Materialien mit fiktiven Materialdaten verwendet, die keinem real existierenden Material entsprechen. Es werden keine Einheiten angegeben, wenn die Experimente aus der Literatur motiviert sind und dort ebenfalls ohne Einheiten angeführt werden. Für diese Experimente gilt ein konsistentes Einheitensystem. Coulomb'sche Reibung wird ausschließlich in den Experimenten der Unterabschnitte 5.5.2 und 5.5.3 berücksichtigt. Für die anderen Experimente gilt $\mu = 0$. Die Parameter c_n und c_t der Komplementaritätsfunktionen entsprechen dem gemittelten Elastizitätsmodul der verwendeten Materialien, wenn sie nicht explizit aufgeführt werden. In den Systembildern sind die Körper, deren Oberflächen als Slave-Ränder dienen, in einem dunkleren Grau abgebildet als die Körper, deren Oberflächen als Master-Ränder dienen.

5.5.1 Patch-Test

Das erste numerische Experiment dieses Abschnitts ist ein klassischer Kontakt-Patch-Test. Mit diesem wird überprüft, ob die Kontaktformulierung mit den betrachteten Integrationsmethoden in der Lage ist eine konstante Spannung über einen nichtkonform

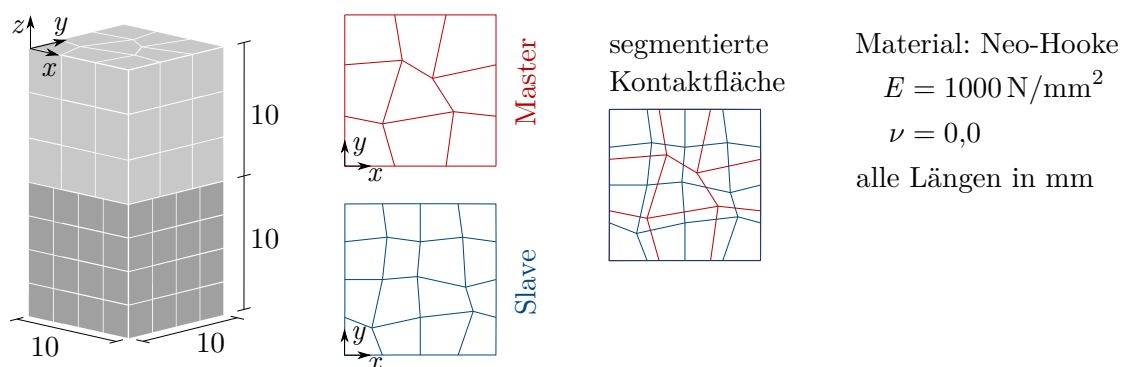


Abbildung 5.14: Patch-Test: Geometrie, Materialdaten und Diskretisierung.

diskretisierten Kontaktrand zu übertragen. Der hier untersuchte Kontakt-Patch-Test ist in Abbildung 5.14 unter Angabe der Geometrie- und Materialdaten dargestellt. Auf der Unterseite des unteren Würfels sind die Verschiebungen in die globale z -Richtung festgehalten. Auf der Oberseite des oberen Würfels wird in z -Richtung die Verschiebung $\hat{u}_z = -1$ vorgegeben. In die beiden anderen Raumrichtungen sind die zwei Würfel zwangungsfrei gegen Starrkörperbewegungen festgehalten. Infolge der vorgegebenen einachsigen Verschiebung ist eine konstante Spannung σ_{zz} in den Körpern zu erwarten. Eine Kontaktformulierung besteht den Patch-Test, wenn sie diesen Spannungszustand exakt abbilden kann. Segmentbasierte Mortar-Formulierungen bestehen den gezeigten Kontakt-Patch-Test exakt, wenn beide Würfel mit Quadern vernetzt werden und die Slave- und Master-Elemente demnach unverzerrt sind¹. Für diese Diskretisierung sind die Integranden der Kontaktintegrale Polynome und lassen sich folglich exakt integrieren. Dies gilt auch für die in Unterabschnitt 5.3.2 präsentierte Quadrangulierung unter Verwendung der Integrationsmethoden Quad (7/9 IP) und Quad (7/7 IP). Das exakte Bestehen des Patch-Tests ist nicht möglich, wenn die Slave- und Master-Elemente verzerrt sind und infolgedessen die Integranden der Kontaktintegrale gebrochenrationale Funktionen sind.

Wie groß der Fehler der einzelnen Integrationsmethoden ist, wird für das Finite-Elemente-Netz aus Abbildung 5.14 untersucht. Die x - und y -Koordinaten der Finite-Elemente-Knoten sind in Tabelle 5.3 angegeben. Das Netz entspricht ungefähr dem Netz, das in PUSO UND LAURSEN (2004a) für ähnliche Untersuchungen verwendet wird. Als Referenzwert dient der Wert von σ_{zz} einer analytischen Berechnung des Problems. Die relativen Fehler sind für unterschiedliche Integrationsmethoden in Tabelle 5.4 angeführt. Der globale Newton-Raphson-Algorithmus konvergiert unter Verwendung der Integrationsmethode Quad (7/7 IP) nicht unter die gegebene Fehlerschranke von $\epsilon_r = 10^{-6}$. Es

¹Im Grunde genommen genügt die Forderung nach parallelogrammförmigen Slave- und Master-Elementen.

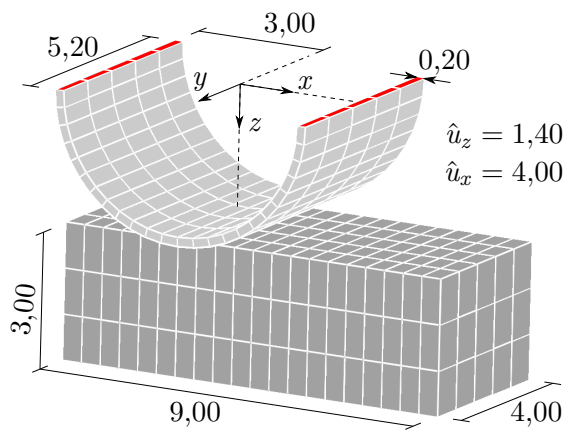
Master-Seite		Slave-Seite		
0,0/0,0	0,0/6,7	0,0/0,0	8,5/2,9	2,8/7,8
3,3/0,0	3,8/7,0	2,5/0,0	10,0/2,5	5,0/7,5
6,7/0,0	5,8/5,8	5,0/0,0	0,0/5,0	7,8/7,8
10,0/0,0	10,0/6,7	7,5/0,0	2,5/5,0	10,0/7,5
0,0/3,3	0,0/10,0	10,0/0,0	4,8/5,2	0,0/10,0
2,5/2,8	3,3/10,0	0,0/2,5	8,0/4,5	2,5/10,0
7,2/3,6	6,7/10,0	1,8/1,8	10,0/5,0	5,0/10,0
10,0/3,3	10,0/10,0	5,0/2,5	0,0/7,5	7,5/10,0
				10,0/10,0

Tabelle 5.3: Patch-Test: Koordinaten der Finite-Elemente-Knoten in der x - y -Ebene, (x -Koordinate/ y -Koordinate). Alle Angaben in mm.

Integrationsmethode	Integrationsordnung	relativer Fehler
Tri (7/- IP)	5	$7,9 \cdot 10^{-7}$
Tri (13/- IP)	7	$3,5 \cdot 10^{-8}$
Del-Tri (7/- IP)	5	$1,2 \cdot 10^{-5}$
Del-Tri (13/- IP)	7	$1,7 \cdot 10^{-6}$
Quad (7/7 IP)	5	-
Quad (7/9 IP)	5	$6,1 \cdot 10^{-6}$
Quad (13/16 IP)	7	$1,1 \cdot 10^{-9}$

Tabelle 5.4: Patch-Test: Fehler in σ_{zz} für unterschiedliche Integrationsmethoden und Integrationsordnungen.

ist anzunehmen, dass die Ungenauigkeit dieser Integrationsmethode für gebrochenrationale Integranden Ursache dafür ist. Die anderen Integrationsmethoden fünfter Ordnung zeigen ein nicht-quadratisches Konvergenzverhalten, sind aber in der Lage unter die gegebene Fehlerschranke zu konvergieren und bestehen den Patch-Test annäherungsweise. Neben den Integrationsmethoden fünfter Ordnung werden für diesen Patch-Test auch Integrationsmethoden siebter Ordnung untersucht, die je dreieckiger Integrationszelle 13 Integrationspunkte (COWPER 1973) und je viereckiger Integrationszelle eine Gauß-Quadraturformel mit 16 Integrationspunkten verwenden. Für die in Tabelle 5.4 aufgeführten Integrationsmethoden siebter Ordnung konvergiert der globale Newton-Raphson-Algorithmus innerhalb zweier Iterationsschritte und der Fehler ist jeweils geringer als der Fehler der entsprechenden Integrationsmethode fünfter Ordnung. Infolge der höheren Anzahl an Integrationspunkten und der höheren Genauigkeit sind diese Integrationsmethoden besser geeignet, um gebrochenrationale Funktionen zu integrieren.



Material: Neo-Hooke

Quader

$$E = 1$$

$$\nu = 0,3$$

halber Hohlzylinder

$$E = 1000$$

$$\nu = 0,3$$

Reibung

$$\mu = 0,2$$

Abbildung 5.15: Ironing-Problem: Geometrie, Materialdaten, Diskretisierung und Darstellung des verformten Systems im Endzustand (Animation der Verformung in der elektronischen Version dieser Arbeit).

Für diesen Patch-Test lässt sich feststellen, dass die viereckigen Integrationszellen unter Verwendung der Gauß-Quadraturformeln zu vergleichbaren Ergebnissen führen wie die Integrationsmethoden mit ausschließlich dreieckigen Integrationszellen. Im Vergleich zu Del-Tri (7/-IP) sind die Ergebnisse von Quad (7/9IP) sogar genauer und bestätigen damit die Beobachtungen des Unterabschnitts 5.4.2. Der Vergleich zu den Integrationsmethoden höherer Ordnung zeigt, dass die Konvergenz des globalen Newton-Raphson-Algorithmus durch die Genauigkeit der Berechnung der Kontaktintegrale beeinflusst wird.

5.5.2 Ironing-Problem

Als Nächstes werden die Integrationsmethoden anhand eines sogenannten Ironing-Problems untersucht. Mit Ironing-Problemen kann eine Kontaktformulierung auf ihre Eignung für Kontaktprobleme mit großen Deformationen untersucht werden. Das hier untersuchte Ironing-Problem ist in Abbildung 5.15 dargestellt und entspricht dem in GITTERLE (2012) in Unterabschnitt 4.6.4 behandelten Beispiel. Der abgebildete Quader ist an seiner Unterseite in alle Raumrichtungen gehalten. Die in der Abbildung rot eingefärbten Flächen stellen die in alle Raumrichtungen gelagerten Flächen des halben Hohlzylinders dar. Simuliert wird eine Auflagerverschiebung des halben Hohlzylinders.

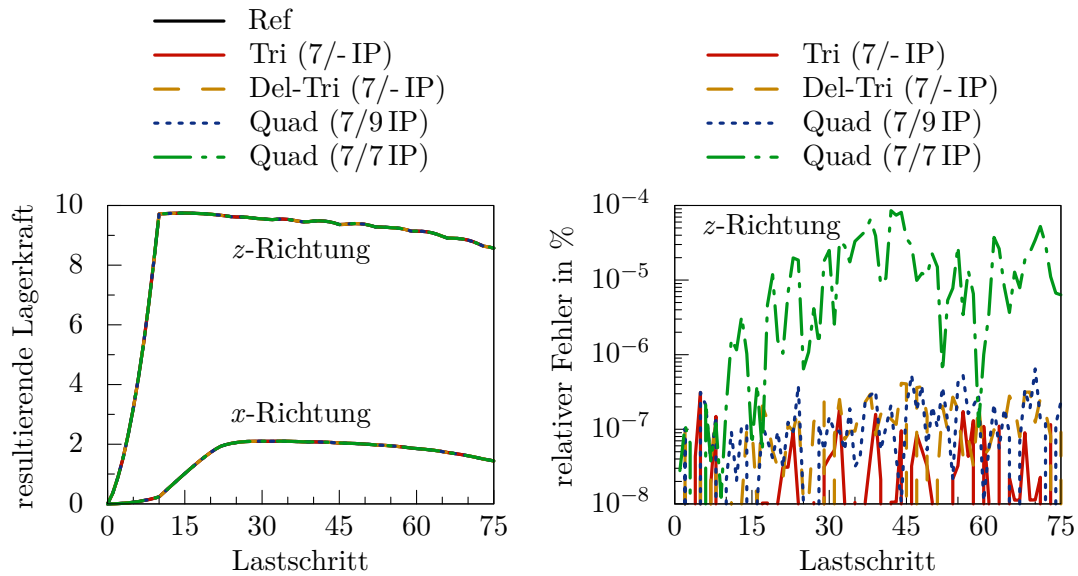


Abbildung 5.16: Ironing-Problem: Summe der Auflagerkräfte des halben Hohlzylinders dargestellt über die Lastschritte. Totale Werte in x - und z -Richtung (links), Abweichung zur Referenzlösung für die z -Richtung (rechts).

Dafür wird dieser in 10 Lastschritten um insgesamt $\hat{u}_z = 1,4$ in z -Richtung in den Quader gedrückt und anschließend in 65 weiteren Lastschritten um insgesamt $\hat{u}_x = 4,0$ in x -Richtung über die Oberfläche des Quaders geschoben. Das deformierte System zum Ende der Belastung ist ebenfalls in Abbildung 5.15 zu sehen. Aufgrund des größeren Elastizitätsmoduls ist der halbe Hohlzylinder wesentlich steifer als der Quader und verformt sich deshalb weniger.

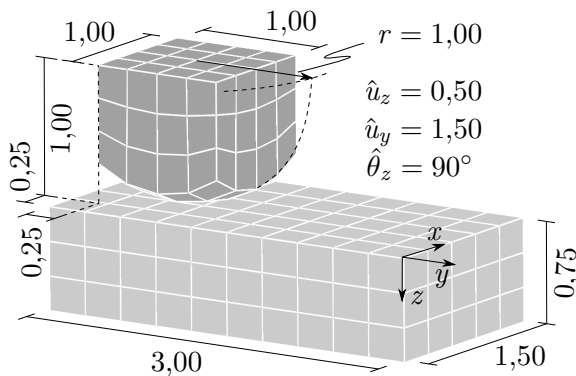
Für die Berechnung werden die Parameter c_n und c_t der Komplementaritätsfunktionen zu 10 angenommen. Der Reibungskoeffizient des Reibungsgesetzes von Coulomb beträgt $\mu = 0,2$. Die Genauigkeit der unterschiedlichen Integrationsmethoden wird anhand der aufsummierten Auflagerkräfte des halben Hohlzylinders verglichen. Das linke Diagramm in Abbildung 5.16 zeigt die Entwicklung der Auflagerkräfte in x - und z -Richtung über die Lastschritte. Die aufsummierte Auflagerkraft in z -Richtung nimmt innerhalb der ersten 10 Lastschritte stetig zu, da der halbe Hohlzylinder immer tiefer in den Quader gedrückt wird und dadurch der Widerstand steigt. In den verbleibenden 65 Lastschritten bleibt die Auflagerverschiebung in z -Richtung konstant. Demnach steigt die Auflagerkraft nicht weiter an. Die aufsummierte Auflagerkraft in x -Richtung ist während des Eindrückvorgangs des halben Hohlzylinders annähernd null. Erst mit Beginn der horizontalen Auflagerverschiebung des halben Hohlzylinders steigt die Kurve deutlich an. Infolge der Haftbedingung bewegt sich zu Beginn ein Großteil der Kontaktträger nicht relativ zueinander und es entstehen tangential Kontaktspannungen, die durch

Integrationsmethode	Integrations- punktauswertungen, relativ in %	Rechenzeit, relativ in %
Tri (7/- IP)	100	100
Del-Tri (7/- IP)	50	55
Quad (7/9 IP)	33	39
Quad (7/7 IP)	26	34

Tabelle 5.5: Ironing-Problem: Vergleich des numerischen Aufwands für unterschiedliche Integrationsmethoden.

die Auflager in x -Richtung aufgenommen werden. Die tangentialen Kontaktspannungen steigen, bis sie ihr Maximum, das durch das Reibungsgesetz definiert ist, erreichen. Danach bleiben sie annähernd konstant und dementsprechend bleibt auch die aufsummierte Auflagerkraft in x -Richtung auf einem Niveau. Gegen Ende der Auflagerverschiebung nehmen die Auflagerkräfte leicht ab, da der halbe Hohlzylinder das Ende des Quaders erreicht und dessen Widerstand dadurch geringer wird. Für die Kurven der unterschiedlichen Integrationsmethoden lassen sich im linken Diagramm in Abbildung 5.16 keine Abweichungen zur Kurve der numerischen Referenzlösung erkennen. Im rechten Diagramm derselben Abbildung sind deswegen die relativen Fehler in der Auflagerkraft in z -Richtung dargestellt. Die Ordinatenachse ist im logarithmischen Maßstab aufgetragen. Die Abweichung zur Referenzlösung ist für die Integrationsmethode Quad (7/7 IP) am größten. Der Fehler ist mit maximal $8,54 \cdot 10^{-5} \%$ zwar klein, aber im Vergleich zu den anderen Integrationsmethoden um zwei Zehnerpotenzen größer. Die Fehler der anderen Integrationsmethoden sind in etwa gleich groß, wobei die Fehler von Tri (7/- IP) meist kleiner sind als für Quad (7/9 IP) und Del-Tri (7/- IP). Ein Vergleich des Fehlers der Auflagerkräfte in x -Richtung führt zu ähnlichen Relationen und ist daher nicht explizit aufgeführt.

Anhand von Tabelle 5.5 kann der numerische Aufwand der Integrationsmethoden verglichen werden. In der genannten Tabelle sind die Werte nicht absolut angegeben, sondern relativ zur Integrationsmethode Tri (7/- IP). Es ist dargestellt, wie viele Integrationspunkte zur Berechnung der Kontaktintegrale ausgewertet werden. Außerdem sind in der Tabelle die relativen Rechenzeiten aller Integrationsmethoden angegeben. Im Vergleich zu Tri (7/- IP) benötigen die anderen Integrationsmethoden deutlich weniger Integrationspunkte. Die Reduktion der Auswertungen der Integrationspunkte stimmt sehr gut mit dem vorhergesagten Reduktionspotenzial aus Abbildung 5.9 überein. Abbildung 5.9 muss dabei für den Fall $n = 4$ betrachtet werden, da im untersuchten Beispiel hauptsächlich viereckige Segmente entstehen. Ein Vergleich der Rechenzeiten zeigt ähnliche relative Verhältnisse und damit den direkten Zusammenhang zwischen der Anzahl der



Material: Neo-Hooke

Reibung

$$E = 1$$

$$\mu = 0,15$$

$$\nu = 0,2$$

Abbildung 5.17: Ironing-Problem mit rotierendem Körper: Geometrie, Materialdaten, Diskretisierung und Darstellung des verformten Systems im Endzustand (Animation der Verformung in der elektronischen Version dieser Arbeit).

Integrationspunkte und dem numerischen Aufwand. Die Angaben in Tabelle 5.5 beziehen sich auf die Implementierung in NumPro. Durch die Reduktion der Auswertungen der Integrationspunkte wird aber jede numerische Umsetzung effizienter. Der relative Zeitgewinn kann allerdings von den hier angegebenen Werten abweichen.

5.5.3 Ironing-Problem mit rotierendem Körper

Die Segmente des vorherigen numerischen Experiments sind überwiegend viereckig. Deshalb wird nun ein Ironing-Problem untersucht, bei dem eine Vielzahl unterschiedlich geformter Segmente entsteht. Das Problem ähnelt dem numerischen Beispiel aus Abschnitt 4.6 in DE LORENZIS U. A. (2014) und ist in Abbildung 5.17 veranschaulicht. Die Lagerung des unteren Quaders entspricht der Lagerung des vorherigen Experiments. Der obere Körper ist in diesem Experiment die Schnittmenge eines Quaders und einer Kugel mit dem Radius $r = 1,0$. An seiner Oberseite sind alle Verschiebungen vorgegeben. Ähnlich zum vorangegangenen Experiment wird in 10 Lastschritten zunächst die vertikale Verschiebung $\hat{u}_z = 0,5$ aufgebracht und anschließend folgt in 50 Lastschritten die Aufbringung der horizontalen Verschiebung $\hat{u}_y = 1,5$. Zusätzlich wird der obere Körper während der horizontalen Bewegung um seine zur z -Achse parallelen Schwerachse um 90° rotiert. Die Elastizitätsmoduln der beiden Körper sind gleich, sodass sich beide ähnlich steif verhalten. In diesem Experiment wird die Coulomb'sche Reibung

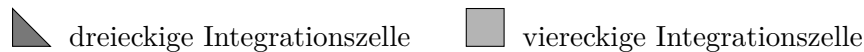


Abbildung 5.18: Ironing-Problem mit rotierendem Körper: Drei- und viereckige Integrationszellen, die sich infolge der Quadrangulierung im Lastschritt 34 ergeben (Animation aller Lastschritte in der elektronischen Version dieser Arbeit).

über den Reibungskoeffizienten $\mu = 0,15$ berücksichtigt. Die Parameter der Komplementaritätsfunktionen werden zu $c_n = c_t = 50$ angenommen, damit das gewünschte Konvergenzverhalten eintritt.

Abbildung 5.17 zeigt rechts die sich einstellende Verformung des Systems zum Ende der aufgebrachtten Auflagerverschiebung. Die Verformung der Körper zum Lastschritt 34 ist links in Abbildung 5.18 dargestellt. Außerdem ist rechts in derselben Abbildung visualisiert, wie die Kontaktzone bei den Quadrangulierungsmethoden in drei- und viereckige Integrationszellen unterteilt wird. Es wird deutlich, dass durch die vorgegebene Rotation sehr stark verzerrte viereckige Integrationszellen entstehen. Das blau und rot dargestellte Netz des Slave- und Master-Randes ist infolge der Reibung und der Querkontraktion ebenfalls verzerrt.

Die Genauigkeit der Integration wird wie im vorangegangenen Experiment anhand der aufsummierten Auflagerkräfte beurteilt. Der Verlauf der Auflagerkräfte in y - und z -Richtung ist links in Abbildung 5.19 dargestellt. Die Verläufe können auf ähnliche Weise wie im vorherigen Experiment erklärt werden. Aus den Kurven des linken Diagramms lässt sich nicht beurteilen, welche Integrationsmethode genauer ist. Deswegen sind im rechten Diagramm exemplarisch die Fehler für die aufsummierte Auflagerkraft in z -Richtung aufgetragen. Die Skale der Ordinatenachse ist dabei logarithmisch. Die Fehler von Quad (7/7 IP) sind erneut um Zehnerpotenzen größer als die Fehler der anderen betrachteten Integrationsmethoden. Aus dem Vergleich der ebenfalls angegebenen gemittelten Fehler ergibt sich ein leichter Vorteil von Quad (7/9 IP) gegenüber Del-Tri (7/- IP). Beinahe in jedem Lastschritt und auch im Mittel sind die Fehler von Tri (7/- IP) die geringsten im gesamten Vergleich. Insgesamt sind die Fehler dieses Experiments im

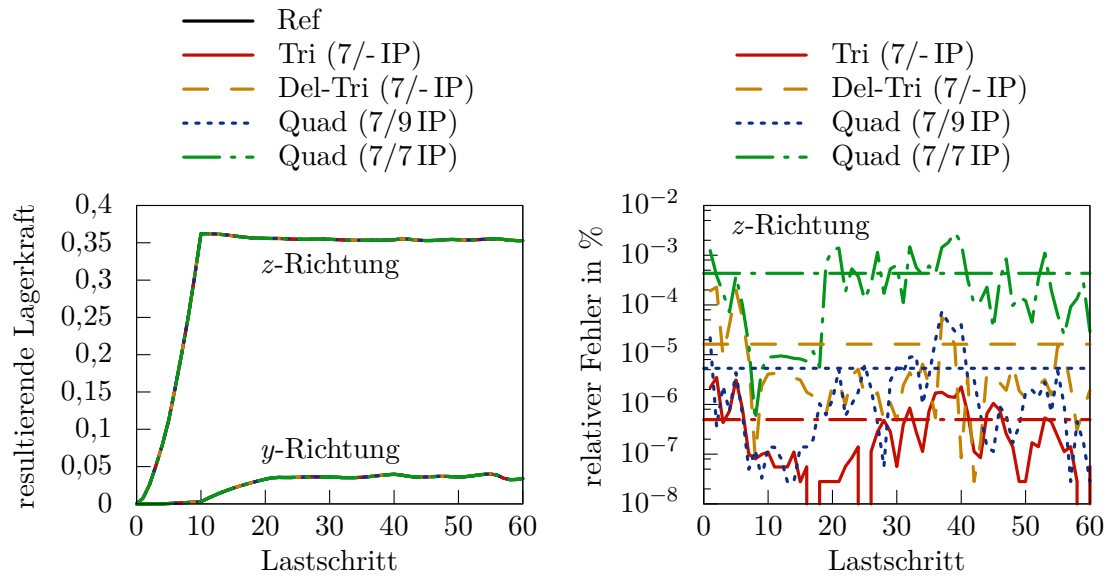


Abbildung 5.19: Ironing-Problem mit rotierendem Körper: Summe der Auflagerkräfte des halben Hohlzylinders dargestellt über die Lastschritte. Totale Werte in x - und z -Richtung (links), Abweichung zur Referenzlösung für die z -Richtung in jedem Lastschritt und gemittelt über alle Lastschritte (rechts).

Vergleich zum vorherigen etwas größer, da die Integration aufgrund des komplizierteren Problems schwieriger ist.

Die Effizienz der einzelnen Integrationsmethoden wird wieder durch einen Vergleich der Anzahl der Integrationspunkte und der Rechenzeit beurteilt. Die relativen Werte dieser Größen sind in Tabelle 5.6 angegeben. Die Verhältnisse zwischen den Methoden sind ähnlich zu denen des vorherigen Unterabschnitts. Durch die viereckigen Integrationszellen werden deutlich weniger Integrationspunkte benötigt und der Algorithmus dadurch effizienter. Im Gegensatz zu den großen Unterschieden in den Fehlern der Auflagerkräfte beträgt der Unterschied in der eingesparten Zeit zwischen den Methoden Quad (7/9 IP) und Quad (7/7 IP) lediglich 3 Prozentpunkte.

5.5.4 Konvergenzuntersuchung

Mit dem letzten Experiment dieses Kapitels werden die präsentierten Integrationsmethoden hinsichtlich ihres Konvergenzverhaltens bei Netzverfeinerung untersucht. Das im Folgenden untersuchte Problem ist in CICHOSZ UND BISCHOFF (2011) als zweidimensionales Problem beschrieben und wird hier als dreidimensionales Problem gemäß

Integrationsmethode	Integrations- punktauswertungen, relativ in %	Rechenzeit, relativ in %
Tri (7/- IP)	100	100
Del-Tri (7/- IP)	50	58
Quad (7/9 IP)	35	45
Quad (7/7 IP)	29	42

Tabelle 5.6: Ironing-Problem mit rotierendem Körper: Vergleich des numerischen Aufwands für unterschiedliche Integrationsmethoden.

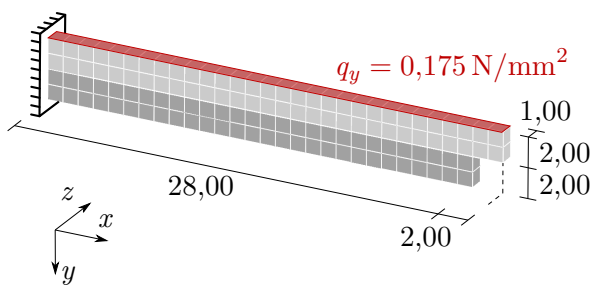
Abbildung 5.20 untersucht. Das System besteht aus zwei Kragarmen, von denen der obere auf seiner Oberseite durch eine konstante Flächenlast in positive y -Richtung belastet ist. Die Last wird in insgesamt 175 Lastschritten aufgebracht. Über die Kontaktfläche zwischen den beiden Kragarmen wird dem unteren Kragarm die Verformung des oberen Kragarms aufgezwungen, sodass sich die in Abbildung 5.20 rechts veranschaulichte Deformation des Systems ergibt.

Für dieses Problem wird der Fehler in der inneren Energie, auch Verzerrungsenergie genannt, untersucht. Die inkrementelle Änderung dieser Energie lässt sich näherungsweise über die Berechnungsvorschrift

$$\Delta e_{\text{int}}^h \approx \frac{1}{2} \mathbf{D} \mathbf{d} \cdot (\mathbf{f}_{\text{int}}(\mathbf{d}_k) + \mathbf{f}_{\text{int}}(\mathbf{d}_{k+1})) \quad (5.14)$$

ermitteln. Hierin ist $\mathbf{D} \mathbf{d} = \mathbf{d}_{k+1} - \mathbf{d}_k$ die inkrementelle Veränderung des Verschiebungsvektors zwischen den auskonvergierten Gleichgewichtszuständen k und $k+1$. Die innere Energie wird für unterschiedliche Finite-Elemente-Netze und jeweils für jede betrachtete Integrationsmethode berechnet. Die Netze werden, wenn möglich, aus regelmäßigen Hexaedern aufgebaut und können über ihre Elementgröße h charakterisiert werden. Die Elementgröße h entspricht dabei der Kantenlänge der Elemente. Nur für das betrachtete Netz mit $h = 2$ mm ist die Kantenlänge in z -Richtung nicht gleich h , sondern 1 mm. Das in Abbildung 5.20 dargestellte Netz hat die charakteristische Größe $h = 1$ mm. Als numerische Referenzlösung dient für dieses Experiment die Lösung einer Berechnung mit einem Netz mit 14500 Elementen und einer Elementgröße von $h = 0,2$ mm. Für die Referenzlösung werden die Kontaktintegrale mit der Integrationsmethode Tri (7/- IP) berechnet.

Die Fehler der Integrationsmethoden sind in Abbildung 5.21 doppelt-logarithmisch dargestellt. Mit der Integrationsmethode Quad (7/7 IP) konvergiert der globale Newton-Raphson-Algorithmus für dieses Experiment nicht unter die gegebene Fehlerschranke von $\epsilon_r = 10^{-8}$. Die Fehler dieser Methode sind deshalb nicht dargestellt. Alle anderen



Material: Neo-Hooke

$$E = 200 \text{ N/mm}^2$$

$$\nu = 0,3$$

alle Längen in mm

Abbildung 5.20: Konvergenzuntersuchung: Geometrie, Belastung, Materialdaten, Diskretisierung und Darstellung des verformten Systems nach Lastschritt 90 (Animation der Verformung in der elektronischen Version dieser Arbeit).

Integrationsmethoden haben praktisch dieselben Fehler und mit abnehmender Elementgröße konvergiert dieser mit der optimal möglichen Ordnung gegen die Referenzlösung. Die optimale Ordnung ist 2 für lineare finite Elemente bei Betrachtung der inneren Energie.

5.6 Zusammenfassende Beurteilung der Integrationsmethoden

In diesem Kapitel wurden mit Quad (7/9 IP) und Quad (7/7 IP) zwei alternative Integrationsmethoden zur Berechnung der Kontaktintegrale vorgestellt. Die entwickelten Integrationsmethoden verwenden eine Quadrangulierung des Segments und viereckige Integrationszellen für die numerische Integration. Anhand gezielter numerischer Untersuchungen wurde in Abschnitt 5.4 die Ergebnisqualität der Integrationsmethoden für unterschiedliche Einflüsse beurteilt. Die dabei gewonnenen Erkenntnisse konnten in Abschnitt 5.5 durch numerische Experimente größerer Kontaktprobleme bestätigt werden.

Die präsentierte Integrationsmethode Quad (7/7 IP) verwendet für viereckige Integrationszellen eine Quadraturformel fünfter Ordnung, die mit dem Algorithmus aus XIAO UND GIMBUTAS (2010) berechnet wird. Die Ordnung bezieht sich auf den gesamten Grad des Integranden und nicht auf den einzelner Variablen. Dadurch lassen sich mit dieser

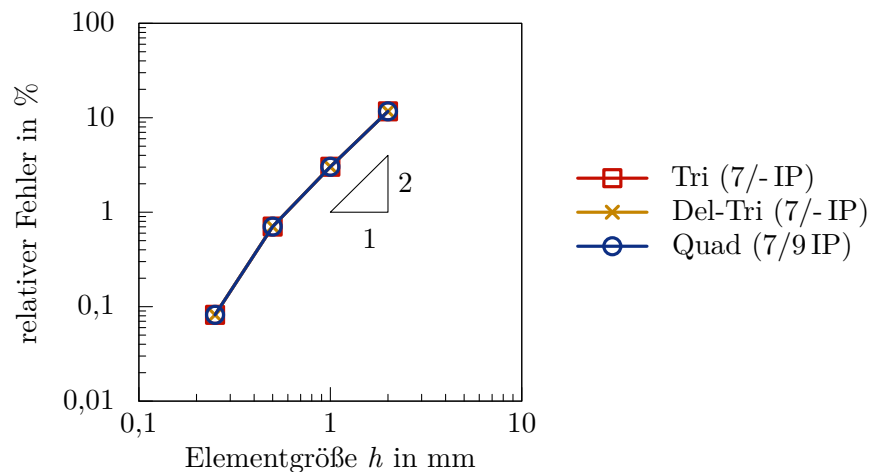


Abbildung 5.21: Konvergenzuntersuchung: Konvergenz der inneren Energie bei Netzverfeinerung.

Methode nur Probleme mit parallelogrammförmigen Slave- und Master-Elementen sowie parallelogrammförmigen viereckigen Integrationszellen exakt berechnen. Für alle anderen Probleme führt diese Integrationsmethode die Berechnung der Kontaktintegrale im Vergleich zu den anderen betrachteten Methoden am ungenauesten aus. Auch wenn der Fehler für einige numerische Experimente (siehe Unterabschnitt 5.5.2 und 5.5.3) von geringer Bedeutung zu sein scheint und durch die Methode die Rechenzeit verkürzt werden kann, ist diese Integrationsmethode nicht zu empfehlen. Ursächlich hierfür sind die Konvergenzprobleme, die bei einigen Experimenten beobachtet werden können. Siehe auch WILKING UND BISCHOFF (2017) für ein weiteres numerisches Experiment, bei dem es zu Konvergenzproblemen kommt.

Die zweite entwickelte Integrationsmethode Quad (7/9 IP) integriert über die viereckigen Integrationszellen mit einer Gauß-Quadraturformel fünfter Ordnung. Dadurch lassen sich mit Quad (7/9 IP) alle Probleme exakt berechnen, die auch mit den Triangulierungsmethoden Tri (7/- IP) und Del-Tri (7/- IP) exakt berechnet werden können. Allerdings werden dafür weniger Integrationspunkte und somit weniger Rechenzeit benötigt. Kontaktintegrale, deren Integrand eine gebrochenrationale Funktion ist, werden mit Quad (7/9 IP) je nach Problem ähnlich genau berechnet wie mit Del-Tri (7/- IP). Die numerischen Untersuchungen in Unterabschnitt 5.4.3 deuten auf einen größeren Fehler von Quad (7/9 IP) hin, wenn die Slave- und Master-Elemente stark verzerrt sind. Für kein untersuchtes numerisches Experiment weist Quad (7/9 IP) schlechtere Konvergenzeigenschaften in der globalen Newton-Raphson-Iteration auf als Del-Tri (7/- IP) oder Tri (7/- IP).

Von den detailliert untersuchten Integrationsmethoden erfolgt die numerische Berechnung der Kontaktintegrale fast ausnahmslos am genauesten mit Tri (7/-IP). Diese Integrationsmethode verwendet aber auch weit mehr Integrationspunkte als die übrigen Methoden und der Kontaktalgorithmus ist dadurch weniger effizient. In der Gesamtschau stellt die Integrationsmethode Quad (7/9IP) für die betrachteten Probleme einen guten Kompromiss zwischen der Integrationsgenauigkeit und der Effizienz bei der Kontaktintegralberechnung dar.

L^2 -Projektion zur Verbesserung der Kontaktspannungen dualer Mortar-Formulierungen

Im vorherigen Kapitel wird eine Methode beschrieben, die die Berechnung der Kontaktintegrale der Mortar-Methode effizienter gestaltet. Unabhängig davon befasst sich dieses Kapitel mit der Genauigkeit der Kontaktspannung dualer Mortar-Formulierungen. Die Kontaktspannungen sind die Spannungen, die in der aktiven Kontaktzone zwischen den in Kontakt stehenden Körpern entsteht. Bei bilateralen Kontaktproblemen können die Kontaktspannungen sowohl Druck- als auch Zugspannungen sein. Bei unilateralen Kontaktproblemen hingegen treten lediglich Druckspannungen auf, da sich anderenfalls der Kontakt löst.

Die Kontaktspannungen können prinzipiell aus den Spannungen der in Kontakt tretenden Körper ermittelt werden. Dafür müssten die Spannungswerte der Körper von den Integrationspunkten im Inneren der Körper auf die Kontaktoberfläche extrapoliert werden. Wie in Abschnitt 3.1.2 bereits erwähnt, werden die Spannungswerte an den Integrationspunkten aus den Ableitungen der primären Variablen, dem Verschiebungsfeld, berechnet. Die Genauigkeit der Spannungen ist deshalb geringer als die des Verschiebungsfeldes.

In dieser Arbeit werden die Kontaktspannungen über eine andere Herangehensweise bestimmt. Hierfür wird ausgenutzt, dass die Kontaktbedingungen mit der Lagrange-Multiplikator-Methode eingebracht werden. Auf diese Weise werden die Kontaktspannungen über die Relation (2.47) als unbekanntes Feld behandelt und können ohne Ableitung direkt aus den Lagrange-Multiplikatoren berechnet werden. Dadurch sind die Kontaktspannungen dieser Herangehensweise genauer als die aus dem Verschiebungsfeld berechneten Kontaktspannungen.

Die Genauigkeit der Kontaktspannungen hängt allerdings auch von der Diskretisierung des Lagrange-Multiplikator-Feldes ab. So ist die Genauigkeit bei Verwendung der Standard-Mortar-Methode im Regelfall höher als bei Verwendung der dualen Mortar-Methode. Um die Vorteile der dualen Mortar-Methode nutzen zu können und zusätzlich möglichst genaue Kontaktspannungen zu erhalten, wird in diesem Kapitel eine Methode zur Verbesserung der Kontaktspannungen dualer Mortar-Methoden entwickelt. Anschließend wird die Ergebnisqualität der entwickelten Methode anhand einiger numerischer Experimente mit der Ergebnisqualität der bisherigen Methoden zur Kontaktspannungsberechnung verglichen.

6.1 Rückrechnung der Kontaktspannungen aus den Lagrange-Multiplikatoren

Nach Gleichung (2.47) gilt zwischen der Kontaktspannung $\mathbf{t}_c^{(1)}$ und dem Lagrange-Multiplikator-Feld $\boldsymbol{\lambda}$ der Zusammenhang $\mathbf{t}_c^{(1)} = -\boldsymbol{\lambda}$. Das Lagrange-Multiplikator-Feld ist neben den Verschiebungen das zweite unbekannte Feld der Kontaktformulierung. Im Zuge der Diskretisierung erfolgt die Approximation elementweise mithilfe von Gleichung (3.12), die an dieser Stelle nochmals angegeben wird:

$$\boldsymbol{\lambda}_e \approx \boldsymbol{\lambda}_e^h(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{I=1}^{n_{s,e}} \Xi_I^{(1)}(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{z}_I. \quad (6.1)$$

In dieser Gleichung sind Ξ_I die Formfunktionen des Lagrange-Multiplikator-Feldes, vergleiche Unterabschnitt 3.4.2. Die diskreten Lagrange-Multiplikatoren \mathbf{z}_I stellen mit Gleichung (2.47) die negativen diskretisierten Kontaktspannungen an den Slave-Knoten I dar. Der approximierte Verlauf der Kontaktspannungen ergibt sich durch eine Interpolation der Knotenwerte $-\mathbf{z}_I$ analog zu Gleichung (6.1). Je nachdem welche Mortar-Methode verwendet wird, unterscheiden sich die Werte der diskreten Lagrange-Multiplikatoren \mathbf{z}_I . Zusätzlich haben die Eigenschaften der Formfunktionen $\Xi_I = N_I$ bzw. $\Xi_I = \Phi_I$ einen Einfluss auf den Verlauf und die Genauigkeit der Kontaktspannungen.

6.1.1 Standard-Mortar-Methode

Bei der Standard-Mortar-Methode erfolgt die Diskretisierung des Lagrange-Multiplikator-Feldes mithilfe von Lagrange-Formfunktionen, das heißt $\Xi_I = N_I$. Die diskreten Lagrange-Multiplikatoren \mathbf{z} ergeben sich aus der Lösung des Gleichungssystems (4.20).

Mit den obigen Überlegungen werden die diskretisierten Kontaktspannungen $\mathbf{t}_c^{(1),h}$ der Standard-Mortar-Methode elementweise wie folgt bestimmt:

$$\mathbf{t}_{c,e}^{\text{SMM}} = - \sum_{I=1}^{n_{s,e}} N_I^{(1)}(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{z}_I^{\text{SMM}}. \quad (6.2)$$

In dieser Gleichung und im Folgenden wird auf den Kopfzeiger $(\bullet)^{(1),h}$, der anzeigt, dass es sich um die diskretisierten Kontaktspannungen des Slave-Randes handelt, zur besseren Übersichtlichkeit verzichtet. Der verwendete Kopfzeiger $(\bullet)^{\text{SMM}}$ zeigt die Zugehörigkeit der Größen zur Standard-Mortar-Methode an.

Die linearen Formfunktionen N_I aus den Gleichungen (3.13) und (3.14) können alle Polynome bis zum Grad eins exakt repräsentieren. Innerhalb der Elemente sind die Formfunktionen C^∞ -kontinuierlich und zwischen den Elementen sind sie C^0 -kontinuierlich. Aufgrund dieser Eigenschaften sind die in Gleichung (6.2) interpolierten Kontaktspannungen innerhalb der Slave-Elemente (bi-)linear und haben keine Sprünge zwischen den Elementen.

6.1.2 Duale Mortar-Methode

Bei der dualen Mortar-Methode wird das Lagrange-Multiplikator-Feld mit dualen Formfunktionen Φ_I approximiert. Die diskreten Lagrange-Multiplikatoren \mathbf{z} werden bei dualen Mortar-Formulierungen aus dem Gleichungssystem (4.20) herauskondensiert und in einer Nachlaufrechnung mithilfe von Gleichung (4.21) bestimmt. Analog zu Gleichung (6.2) werden die Kontaktspannungen der dualen Mortar-Methode wie folgt angegeben:

$$\mathbf{t}_{c,e}^{\text{dMM}} = - \sum_{I=1}^{n_{s,e}} \Phi_I^{(1)}(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{z}_I^{\text{dMM}}. \quad (6.3)$$

Der Kopfzeiger $(\bullet)^{\text{dMM}}$ zeigt die Zugehörigkeit der Größen zur dualen Mortar-Methode an.

Durch die Interpolation mit den dualen Formfunktionen Φ_I wirken sich die Eigenschaften dieser Formfunktionen auch auf die Kontaktspannungen aus. Die (bi-)linearen dualen Formfunktionen können nur konstante Funktionen exakt repräsentieren und sind zwischen den Elementen C^{-1} -kontinuierlich. Folglich sind die Kontaktspannungen stückweise (bi-)linear, haben aber Sprünge zwischen den Elementen. Dadurch ist es nicht möglich, einen kontinuierlichen Kontaktspannungsverlauf abzubilden, wie er physikalisch zu erwarten ist, wenn zwei kontinuierliche elastische Körper in Kontakt treten (JOHNSON 1987).

An dieser Stelle sei angemerkt, dass die dualen Formfunktionen zur Diskretisierung des Lagrange-Multiplikator-Feldes geeignet sind, obwohl sie eine geringere Kontinuität und Vollständigkeit im Vergleich zu den Formfunktionen N_I aufweisen. Ermöglicht wird die Verwendung der dualen Formfunktionen durch den geringen variationellen Index $v = 0$ des Lagrange-Multiplikator-Feldes in der Kontaktformulierung. Demnach erfüllen die dualen Formfunktionen die Anforderungen an die Konsistenz aus Unterabschnitt 3.1.2.

Dennoch sind die dualen Formfunktionen aufgrund ihrer Diskontinuität zwischen den Elementen ungeeignet zur Interpolation der Kontaktspannungen. HÜEBER U. A. (2005) schlagen deswegen eine elementweise Interpolation der diskreten Knotenwerte $\mathbf{z}_I^{\text{dMM}}$ mit linearen Formfunktionen N_I vor, die zu kontinuierlichen Kontaktspannungen $\tilde{\mathbf{t}}_c^{\text{dMM}}$ führt:

$$\tilde{\mathbf{t}}_{c,e}^{\text{dMM}} = - \sum_{I=1}^{n_{s,e}} N_I^{(1)}(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{z}_I^{\text{dMM}}. \quad (6.4)$$

Die beschriebene Interpolation ist als Postprocessing der Kontaktspannung anzusehen und ändert die duale Mortar-Methode nicht. Die resultierenden Kontaktkräfte der Kontaktspannungen $\mathbf{t}_c^{\text{dMM}}$ und $\tilde{\mathbf{t}}_c^{\text{dMM}}$ entsprechen sich, sodass Folgendes gilt:

$$\int_{\gamma_c^{(1),h}} \mathbf{t}_c^{\text{dMM}} \, da = \int_{\gamma_c^{(1),h}} \tilde{\mathbf{t}}_c^{\text{dMM}} \, da. \quad (6.5)$$

6.2 Einführungsbeispiel

Die im vorherigen Abschnitt beschriebenen Kontaktspannungsberechnungen werden in diesem Abschnitt anhand eines bilateralen Kontaktbeispiels auf ihre Genauigkeit untersucht. Zur besseren Übersichtlichkeit werden die zu vergleichenden Methoden zur Kontaktspannungsberechnung hier nochmals zusammengefasst und abgekürzt:

- **SMM**: Standard-Mortar-Methode, kontinuierliche Kontaktspannungen $\mathbf{t}_c^{\text{SMM}}$, siehe Gleichung (6.2),
- **dMM**: duale Mortar-Methode, diskontinuierliche Kontaktspannungen $\mathbf{t}_c^{\text{dMM}}$, siehe Gleichung (6.3),
- **dMM-lin-Int**: duale Mortar-Methode, über lineare Interpolation der diskreten dualen Lagrange-Multiplikator-Werte kontinuierliche Kontaktspannungen $\tilde{\mathbf{t}}_c^{\text{dMM}}$, siehe Gleichung (6.4).

Die Fehler in den Kontaktspannungen werden für die in Abbildung 6.1 oben links gezeigte Scheibe mit Loch beurteilt. Die Scheibe hat eine unendliche Ausdehnung und ist, wie

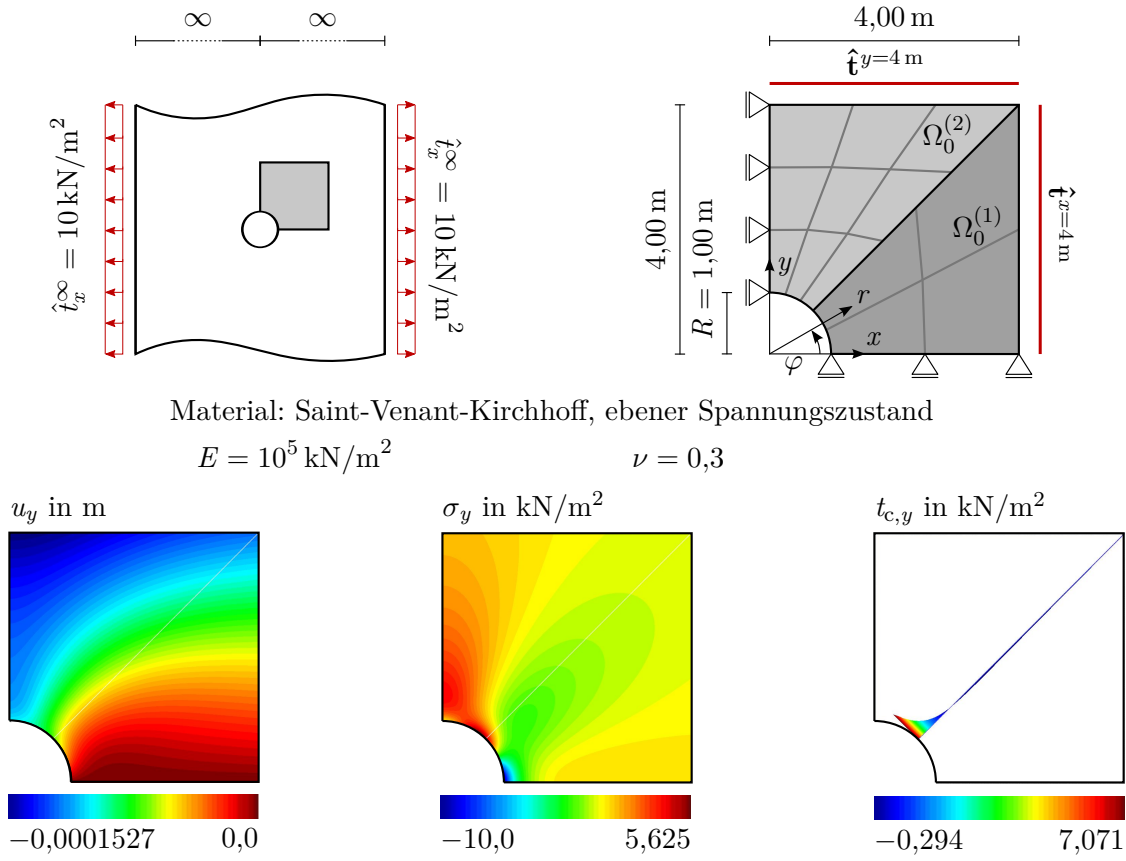


Abbildung 6.1: Einführungsbeispiel: Geometrie (gesamt und Berechnungsmodell), Materialdaten, Diskretisierung von Netzlevel 0 und Visualisierung der analytischen Lösungen von u_y , σ_y und $t_{c,y}$.

in der Abbildung dargestellt, durch konstante Lasten beansprucht. Das Problem wird geometrisch und materiell linear berechnet und hat die analytische Lösung

$$\sigma_r = \frac{\hat{t}_x^\infty}{2} \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) + \frac{\hat{t}_x^\infty}{2} \left(1 - 4 \frac{R^2}{r^2} + 3 \frac{R^4}{r^4} \right) \cos(2\varphi), \quad (6.6)$$

$$\sigma_\varphi = \frac{\hat{t}_x^\infty}{2} \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right) - \frac{\hat{t}_x^\infty}{2} \left(1 + 3 \frac{R^4}{r^4} \right) \cos(2\varphi), \quad (6.7)$$

$$\sigma_{r\varphi} = -\frac{\hat{t}_x^\infty}{2} \left(1 + 2 \frac{R^2}{r^2} - 3 \frac{R^4}{r^4} \right) \sin(2\varphi), \quad (6.8)$$

$$u_r = \frac{\hat{t}_x^\infty r \cos(2\varphi)}{2E} \left((1 + \nu) + 4 \frac{R^2}{r^2} - (1 + \nu) \frac{R^4}{r^4} \right) + \frac{\hat{t}_x^\infty r}{2E} \left((1 - \nu) + (1 + \nu) \frac{R^2}{r^2} \right), \quad (6.9)$$

$$u_\varphi = -\frac{\hat{t}_x^\infty r \sin(2\varphi)}{2E} \left((1 + \nu) + 2(1 - \nu) \frac{R^2}{r^2} + (1 + \nu) \frac{R^4}{r^4} \right). \quad (6.10)$$

Tatsächlich berechnet wird nur der grau hinterlegte Teil der Scheibe, der rechts oben in Abbildung 6.1 nochmals vergrößert dargestellt ist. Die Ränder entlang der x - und y -Achse liegen auf den Symmetrieachsen und werden entsprechend gelagert. Auf die Ränder bei $x = 4 \text{ m}$ und $y = 4 \text{ m}$ wird die exakte freigeschnittene Spannung aufgebracht, die sich aus der analytischen Lösung (6.6)–(6.8) berechnen lässt.

Wie in SEITZ U. A. (2016) vorgeschlagen, wird der untersuchte Bereich in zwei Körper aufgeteilt. Die Netze des bilateralen Kontaktproblems werden mit der Mortar-Methode gekoppelt. Die Abweichungen zur Referenzlösung werden für Netze unterschiedlicher Feinheit berechnet, um eine Aussage über die Konvergenzraten der Fehler treffen zu können. Das Systembild zeigt das größte untersuchte Netz. Dieses wird Netzlevel 0 genannt. Höhere Netzlevel und damit feinere Netze werden erzeugt, indem jeweils ein Viereckselement in vier Viereckselemente unterteilt wird. Für dieses Problem ist das Verhältnis der Elementanzahl des Slave-Randes zur Elementanzahl des Master-Randes für jedes dieser Netze $s : m = 2 : 3$.

Bevor untersucht wird, wie sich die Kontaktspannungen der Standard-Mortar-Methode und der dualen Mortar-Methode unterscheiden, wird gezeigt, dass die Verschiebungslösung beider Methoden praktisch identisch ist. Hierfür werden für beide Methoden die Fehler in den Verschiebungen u_y und in den Cauchy-Spannungen σ_y berechnet. Zusätzlich werden beide Fehler auch für eine verschiebungsbasierte Finite-Elemente-Berechnung (uFE) bestimmt, bei der der gesamte Bereich als ein Körper ohne Kontakt betrachtet wird. Bei dieser Berechnung entspricht das Netz nicht dem in Abbildung 6.1 gezeigten Netz. Stattdessen wird die Scheibe konform vernetzt, also mit $s : m = 1 : 1$. Bei der größten untersuchten Diskretisierung dieser Art werden beide Gebiete $\Omega_0^{(\alpha)}$ so vernetzt wie $\Omega_0^{(1)}$ in Abbildung 6.1. Als Referenzlösungen dienen die analytischen Lösungen, die in Abbildung 6.1 visualisiert sind.

Die doppelt-logarithmischen Diagramme der Abbildung 6.2 zeigen die Fehler aller drei Methoden in der L^2 -Norm für unterschiedliche Netzfeinheiten und deuten die Konvergenzraten der Fehler an. Für diese Untersuchungen von Größen im Gebiet der Scheibe entspricht die charakteristische Elementgröße der längsten Diagonalen der verwendeten finiten Elemente. Die asymptotischen Konvergenzraten der Mortar-Methoden entsprechen der Konvergenzrate von uFE und den optimal zu erwartenden Konvergenzraten, siehe z. B. HUGHES (2000). Der Fehler der Verschiebung hat eine asymptotische Konvergenzrate von zwei. Die asymptotische Konvergenzrate des Fehlers der Spannungen ist nur eins, da die Spannungen aus den Ableitungen der Verschiebungen berechnet werden. Die Fehler beider Mortar-Methoden sind praktisch identisch. Mögliche Abweichungen in den Kontaktspannungen sind daher nicht durch Abweichungen im Verschiebungsfeld \mathbf{u}

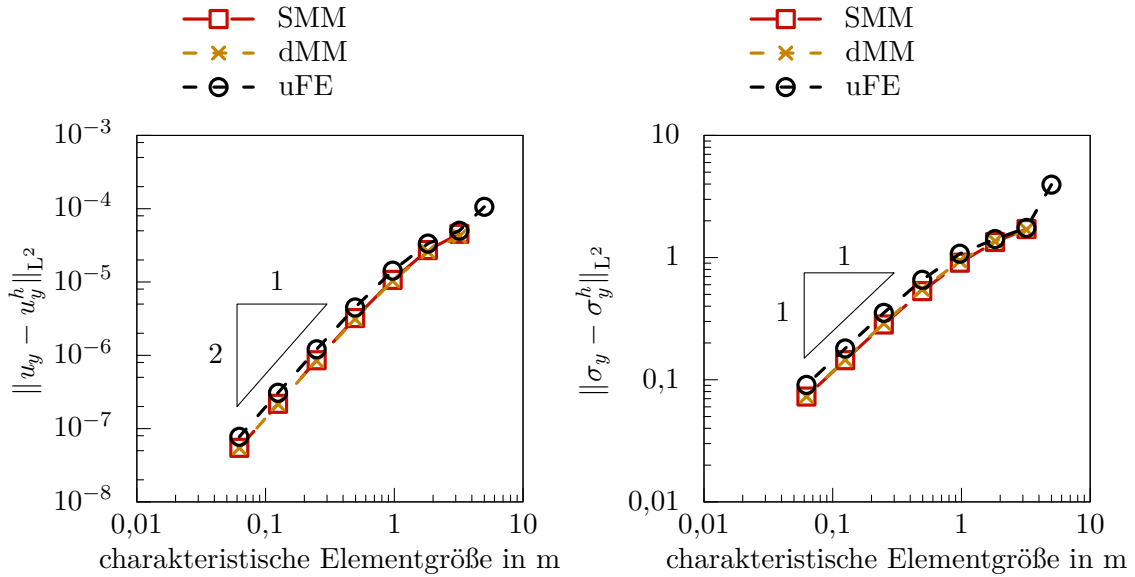


Abbildung 6.2: Einführungsbeispiel: Absoluter Fehler von u_y (links) und σ_y (rechts) in der L^2 -Norm in Abhängigkeit der Netzfeinheit.

zu begründen. Die Fehler von uFE sind größer als die der Mortar-Methode, da die Elemente des Netzes von uFE im gesamten Gebiet aufgrund des Verhältnisses $s : m = 1 : 1$ in etwa gleich groß sind. Damit ist die Lösung in der gesamten Scheibe in etwa gleich genau. Bei den Netzen der Mortar-Methoden bestimmt der grob vernetzte Slave-Körper die charakteristische Elementgröße. Die Lösung im feiner vernetzten Master-Körper ist genauer und folglich auch die Lösung des gesamten Gebiets.

Als Nächstes wird die Genauigkeit der Kontaktspannungen untersucht. WOHLMUTH (2001) gibt den Fehler der Lagrange-Multiplikatoren in einer netzabhängigen gewichteten L^2 -Norm an. In dieser Arbeit wird diese Norm analog zur Quantifizierung des Fehlers in den Kontaktspannungen verwendet. Ihre Definition lautet:

$$\|\mathbf{t}_c - \mathbf{t}_c^h\|_{L^2}^h = \sqrt{\sum_{e=1}^{n_{se}} h_e \|\mathbf{t}_c - \mathbf{t}_c^h\|_{L^2;e}^2}. \quad (6.11)$$

In vorheriger Gleichung sind n_{se} die Anzahl der Slave-Elemente, \mathbf{t}_c die Kontaktspannungen der Referenzlösung und \mathbf{t}_c^h eine der untersuchten diskreten Kontaktspannungen. h_e stellt die charakteristische Länge des e -ten Slave-Elements dar, das heißt für zweidimensionale Probleme die Länge des Slave-Elements und für dreidimensionale Probleme die

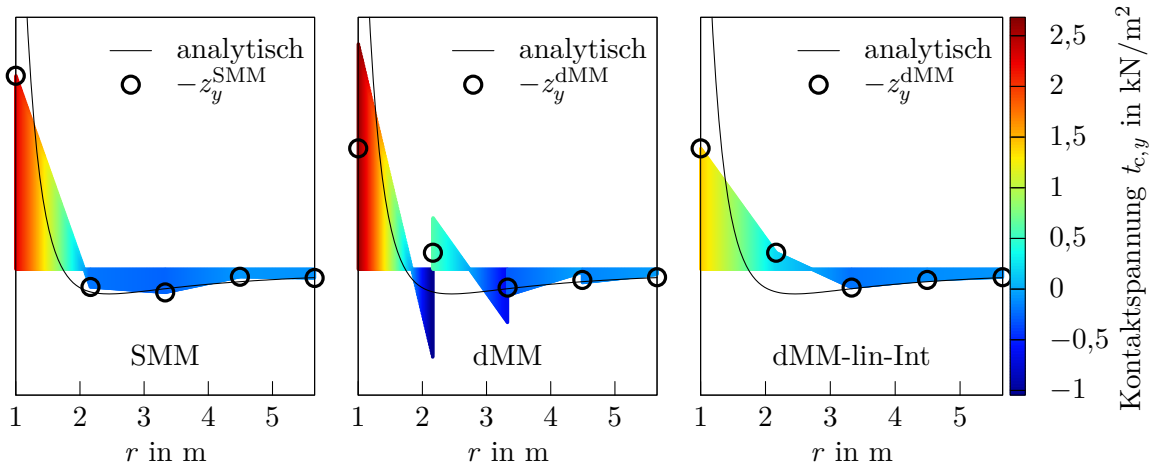


Abbildung 6.3: Einführungsbeispiel: Kontaktspannung $t_{c,y}$ unterschiedlicher Methoden zur Kontaktspannungsberechnung für Netzlevel 1.

längste Diagonale des Slave-Elements. Der Ausdruck

$$\|\mathbf{t}_c - \mathbf{t}_c^h\|_{L^2;e}^2 = \int_{\gamma_{c;e}^{(1),h}} (\mathbf{t}_c - \mathbf{t}_c^h)^T (\mathbf{t}_c - \mathbf{t}_c^h) da \quad (6.12)$$

beschreibt die L^2 -Norm des e -ten Slave-Elements.

Exemplarisch wird die y -Komponente des Spannungsvektors des Kontaktrandes betrachtet. Der Verlauf der Kontaktspannung $t_{c,y}$ ist rechts unten in Abbildung 6.1 gezeigt. Im Bereich des Lochs gibt es eine Spannungskonzentration, die Spannung bleibt aber endlich. Abbildung 6.3 zeigt den Spannungsverlauf der bisher betrachteten Methoden zur Rückrechnung der Kontaktspannungen für Netzlevel 1, das heißt für ein Netz mit vier Slave-Elementen entlang der Kontaktlinie. Ebenfalls angedeutet sind die analytische Lösung und die diskreten Spannungswerte, die den negativen diskreten Lagrange-Multiplikator-Werten $-z_y$ entsprechen. Mit den Methoden SMM und dMM-lin-Int werden die diskreten Knotenwerte linear verbunden und es ergeben sich kontinuierliche Kontaktspannungen. Durch die dualen Formfunktionen in dMM ergeben sich diskontinuierliche Kontaktspannungen.

Der Fehler in den Kontaktspannungen in Abhängigkeit der Netzfeinheit ist in Abbildung 6.4 dargestellt. Die Fehler von SMM sind für alle Netze geringer als die Fehler in den Kontaktspannungen der dualen Mortar-Methode. Mit dMM-lin-Int können die Fehler im Vergleich zu dMM reduziert werden, sind aber immer noch größer als die von SMM. Die asymptotische Konvergenzrate des Fehlers von dMM ist mit circa 1,2 die geringste. Die asymptotischen Konvergenzraten der beiden anderen Methoden sind untereinander in etwa vergleichbar und betragen circa 1,75.

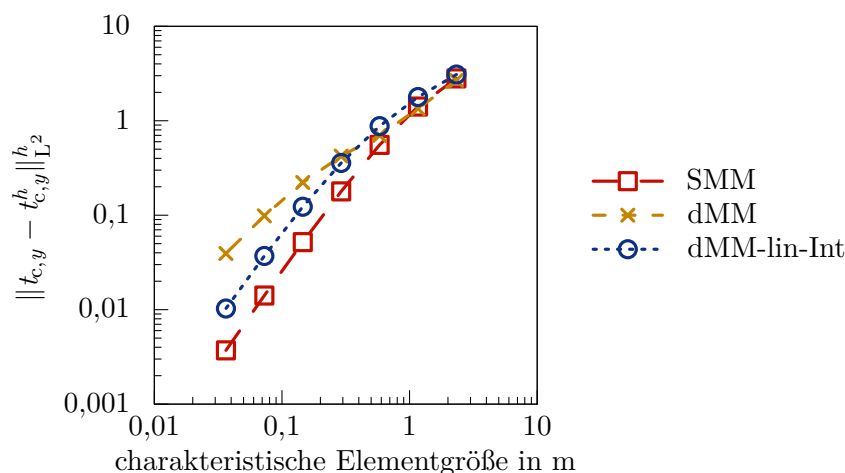


Abbildung 6.4: Einführungsbeispiel: Absoluter Fehler in $t_{c,y}$, angegeben in der gewichteten L^2 -Norm in Abhängigkeit der Netzfeinheit.

Zu erwartende Konvergenzraten für die gewichtete L^2 -Norm dualer Lagrange-Multiplikatoren werden z. B. in WOHLMUTH (2002) und LAMICHHANE UND WOHLMUTH (2002) diskutiert. Theoretisch ist eine Konvergenzrate von eins anzunehmen. Allerdings enthält die a-priori-Fehlerabschätzung zwei Terme, von denen ein Term die theoretisch zu erwartende Konvergenzrate von eins bestimmt. Nach WOHLMUTH (2002) ist der Einfluss dieses Terms beschränkt, sodass superkonvergentes Verhalten begründet werden kann. Alle betrachteten dualen Methoden haben für dieses Beispiel Konvergenzraten größer eins und zeigen damit superkonvergentes Verhalten, wobei dieses bei dMM-lin-Int stärker ausgeprägt ist.

6.3 Methode zur Verbesserung der Kontaktspannungen dualer Mortar-Formulierungen

Die duale Mortar-Methode hat gegenüber der Standard-Mortar-Methode vor allem den Vorteil, dass die Lagrange-Multiplikatoren effizient aus dem Gleichungssystem herauskondensiert werden können. Dieser Aspekt macht die duale Mortar-Methode deutlich effizienter, da weniger Unbekannte existieren. Wie der vorherige Abschnitt zeigt, sind die Fehler und deren Konvergenzraten für die Verschiebungslösung beider Mortar-Methoden praktisch identisch. Allerdings gilt dies nicht für die Fehler in den Kontaktspannungen. Diese sind größer für die duale Mortar-Methode und damit ist die Verwendung der dualen Mortar-Methode nachteilig, wenn genaue Kontaktspannungen von Bedeutung sind. Die Entwicklung einer Kontaktspannungsberechnung für die duale Mortar-Methode, die

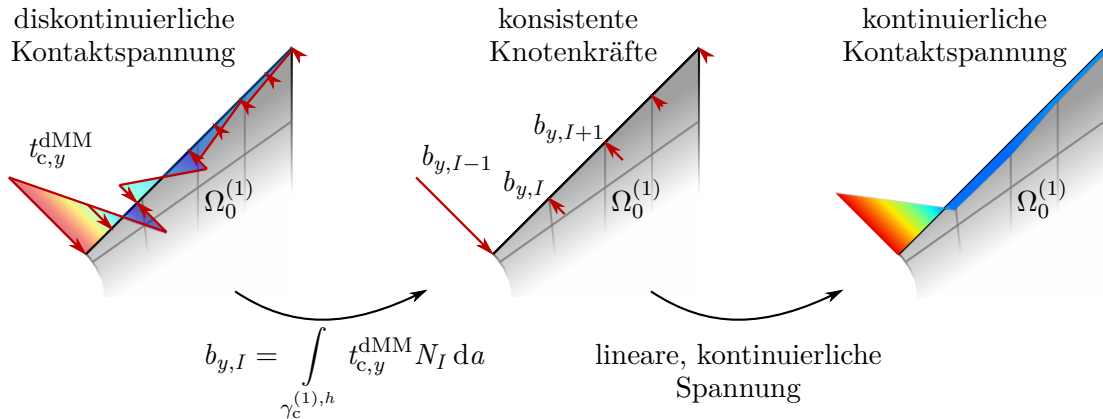


Abbildung 6.5: Schritte zur Berechnung kontinuierlicher Kontaktspannungen über konsistente Knotenkräfte am Beispiel des Problems aus Abschnitt 6.2.

zu genaueren Kontaktspannungen führt, ist Ziel dieses Abschnitts. Der hier präsentierte Ansatz kann als Alternative zu dMM-lin-Int verstanden werden.

6.3.1 Idee der Methode

Das Ziel der Methode ist, einen kontinuierlichen und somit physikalisch sinnvollen Kontaktspannungsverlauf für die duale Mortar-Methode zu erhalten. Die Idee ist es, die diskontinuierliche Charakteristik des Lagrange-Multiplikator-Feldes zu berücksichtigen und die diskreten Werte nicht einfach linear zu interpolieren.

Der entwickelte Ansatz ist in Abbildung 6.5 am Einführungsbeispiel aus Abschnitt 6.2 veranschaulicht. Die Kontaktspannung wird wie eine äußere Last behandelt, die auf den Kontaktrand wirkt. Wie bei der Behandlung äußerer, verteilter Lasten in der Finite-Elemente-Diskretisierung wird die Kontaktspannung in konsistente Knotenkräfte umgerechnet. Anschließend wird aus den konsistenten Knotenkräften wieder eine Spannung ermittelt. Dieser Schritt ist im Allgemeinen nicht eindeutig, erhält diese Eigenschaft aber unter der Bedingung, dass die Spannung kontinuierlich und stückweise linear sein muss. Mathematisch gesehen ist das eben beschriebene Vorgehen zur Ermittlung kontinuierlicher Kontaktspannungen eine stückweise lineare L^2 -Projektion der diskontinuierlichen Kontaktspannungen $\mathbf{t}_c^{\text{dMM}}$. Die wesentlichen Gleichungen dieser L^2 -Projektion werden im folgenden Unterabschnitt angegeben. Eine detailliertere Ausführung und Hinweise zur Implementierung können z. B. LARSON UND BENGZON (2013) entnommen werden.

6.3.2 Mathematische Interpretation der Methode

Die Berechnung der L^2 -Projektion der diskontinuierlichen Kontaktspannungen $\mathbf{t}_c^{\text{dMM}}$ aus Gleichung (6.3) wird exemplarisch für die y -Komponente des Kontaktspannungsvektors gezeigt. Der Vektor \mathbf{b}_y enthält die konsistenten Knotenkräfte. Die Einträge sind somit über die Vorschrift

$$b_{I,y} = \int_{\gamma_c^{(1),h}} t_{c,y}^{\text{dMM}} N_I \, da \quad \forall I \in \mathcal{S} \quad (6.13)$$

definiert. Zusätzlich wird die Matrix \mathbf{M}^{L^2} benötigt, die ähnlich wie eine Massenmatrix berechnet wird:

$$\mathbf{M}^{L^2} = [m_{IJ}^{L^2}] \in \mathbb{R}^{n_s \times n_s}, \quad m_{IJ}^{L^2} = \int_{\gamma_c^{(1),h}} N_I N_J \, da \quad \forall I, J \in \mathcal{S}. \quad (6.14)$$

Mit \mathbf{M}^{L^2} und \mathbf{b}_y wird ein lineares Gleichungssystem zur Bestimmung der neuen diskreten Spannungswerte $\bar{\mathbf{z}}_y$ aufgestellt:

$$\mathbf{M}^{L^2} \bar{\mathbf{z}}_y = \mathbf{b}_y. \quad (6.15)$$

Die aus Gleichung (6.15) ermittelten diskreten Spannungswerte $\bar{\mathbf{z}}_y$ werden zwischen den Knoten elementweise linear interpoliert:

$$\bar{t}_{c,y,e}^{\text{dMM}} = - \sum_{I=1}^{n_{s,e}} N_I(\boldsymbol{\xi}) \bar{z}_{Iy}. \quad (6.16)$$

Darin ist $\bar{t}_{c,y,e}^{\text{dMM}}$ die Kontaktspannung, die sich aus der L^2 -Projektion der diskontinuierlichen Kontaktspannung $t_{c,y}^{\text{dMM}}$ ergibt. Die L^2 -Projektion der anderen Komponenten von $\mathbf{t}_c^{\text{dMM}}$ erfolgt analog und entspricht der simultanen Lösung von Gleichung (6.15) für mehrere rechte Seiten \mathbf{b} .

Die eben beschriebene L^2 -Projektion wird im Weiteren wie folgt abgekürzt:

- **dMM- L^2 -Proj**: duale Mortar-Methode, über Postprocessing kontinuierliche Kontaktspannungen $\bar{\mathbf{t}}_c^{\text{dMM}}$, siehe Gleichung (6.16).

Die Resultierende der Kontaktspannung $\bar{\mathbf{t}}_c^{\text{dMM}}$ entspricht den Resultierenden von $\mathbf{t}_c^{\text{dMM}}$ und $\tilde{\mathbf{t}}_c^{\text{dMM}}$, sodass Gleichung (6.5) entsprechend auch für $\bar{\mathbf{t}}_c^{\text{dMM}}$ gilt. Es sei angemerkt, dass dMM- L^2 -Proj und dMM-lin-Int sich entsprechen, wenn in Gleichung (6.15) statt einer konsistenten „Massenmatrix“ \mathbf{M}^{L^2} eine konzentrierte „Massenmatrix“ verwendet wird.

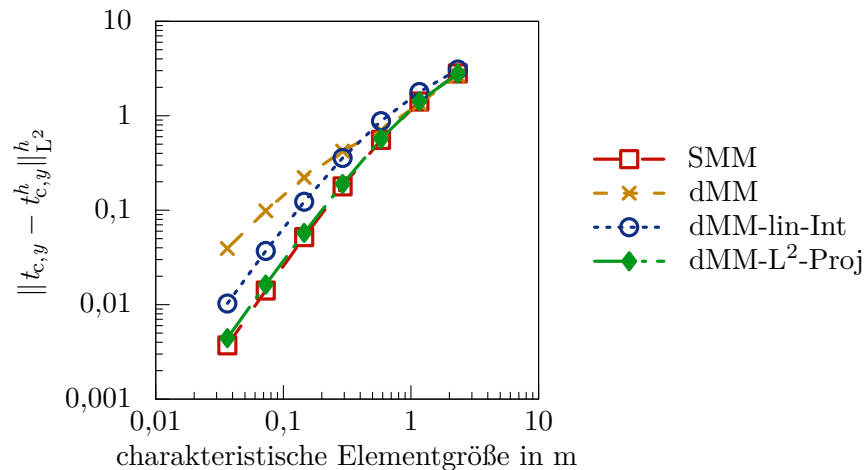


Abbildung 6.6: Einführungsbeispiel: Absoluter Fehler in $t_{c,y}$, angegeben in der gewichteten L^2 -Norm in Abhängigkeit der Netzfeinheit, inklusive dMM- L^2 -Proj.

6.3.3 Anwendung auf das Einführungsbeispiel

An dieser Stelle wird nun die Genauigkeit von dMM- L^2 -Proj mit der Genauigkeit der Methoden zur Berechnung der Kontaktspannungen aus Abschnitt 6.1 anhand des Beispiels aus Unterabschnitt 6.2 verglichen. Die Fehler in den Kontaktspannungen aller beschriebenen Methoden sind in Abbildung 6.6 für unterschiedliche Netzfeinheiten dargestellt. Bis auf die Fehlerkurve von dMM- L^2 -Proj entspricht das gezeigte Diagramm dem Diagramm aus Abbildung 6.4. Mit dMM- L^2 -Proj werden die Fehler der dualen Mortar-Methode reduziert und entsprechen in etwa den Fehlern von SMM. Folglich ist die Konvergenzrate des Fehlers von dMM- L^2 -Proj ebenfalls mit der Konvergenzrate des Fehlers von SMM vergleichbar. Ebenso wie dMM-lin-Int verbessert dMM- L^2 -Proj für dieses Beispiel die Konvergenzrate des Fehlers für die duale Mortar-Methode im Vergleich zu dMM.

6.4 Numerische Experimente

Die entwickelte L^2 -Projektion zeigt für das zweidimensionale Netzkopplungsproblem aus Unterabschnitt 6.2 eine Verbesserung der Genauigkeit in den Kontaktspannungen. In Hinblick auf die Kontaktspannungen ist damit die Genauigkeit der dualen Mortar-Methode auf dem Niveau der Genauigkeit der Standard-Mortar-Methode. In diesem Abschnitt wird nun untersucht, ob sich Ähnliches auch für dreidimensionale Netzkopplungsprobleme und für unilaterale Kontaktprobleme beobachten lässt.

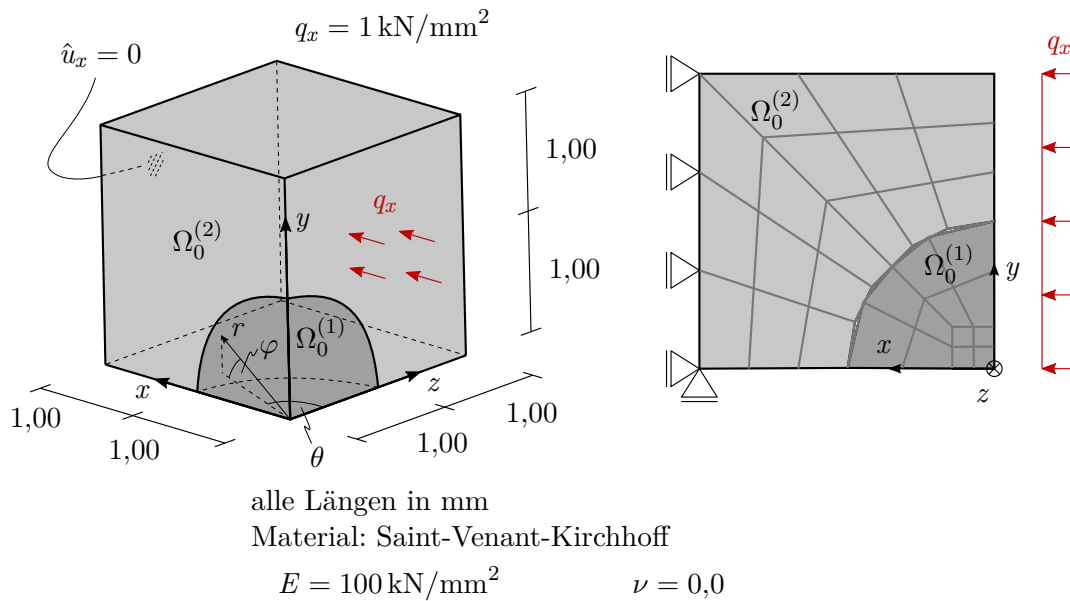


Abbildung 6.7: Dreidimensionales Netzkopplungsproblem: Geometrie, Diskretisierung von Netzlevel 0 und Materialdaten.

Ähnlich wie für das bereits untersuchte Netzkopplungsproblem wird der Fehler in den Kontaktspannungen in der gewichteten L^2 -Norm für unterschiedliche Netzfeinheiten betrachtet. Die Systembilder zur Beschreibung der Probleme zeigen dabei immer das größte untersuchte Finite-Elemente-Netz. Netze mit höherer Netzfeinheit werden erzeugt, wie es in Abschnitt 6.2 beschrieben ist. Die Systembilder sind so gestaltet, dass die Körper mit Slave-Rändern in einem dunkleren Grau abgebildet sind als die Körper mit Master-Rändern.

Alle unilateralen Kontaktprobleme werden unter Vernachlässigung der Reibung geometrisch nichtlinear untersucht. Die Fehlerschranke des globalen Newton-Raphson-Algorithmus wird für die unilateralen Kontaktprobleme zu $\epsilon_r = 10^{-6}$ festgelegt. Die Berechnung des dreidimensionalen Netzkopplungsproblems erfolgt geometrisch linear.

6.4.1 Dreidimensionales Netzkopplungsproblem

Zur Demonstration der Anwendbarkeit der entwickelten Methode auf dreidimensionale Probleme wird das in Abbildung 6.7 links gezeigte bilaterale Kontaktprobleme untersucht. Der gezeigte Würfel ist in zwei Gebiete unterteilt. Beide Gebiete werden separat vernetzt. Die Vereinigung beider Gebiete beschreibt einen Würfel der Kantenlänge 2 m. Das Gebiet $\Omega_0^{(1)}$ ist $1/8$ einer Kugel, sodass die Kontaktfläche gekrümmt ist. Die Lagerung des Würfels ist zwängungsfrei und verhindert reine Starrkörperbewegungen. Alle

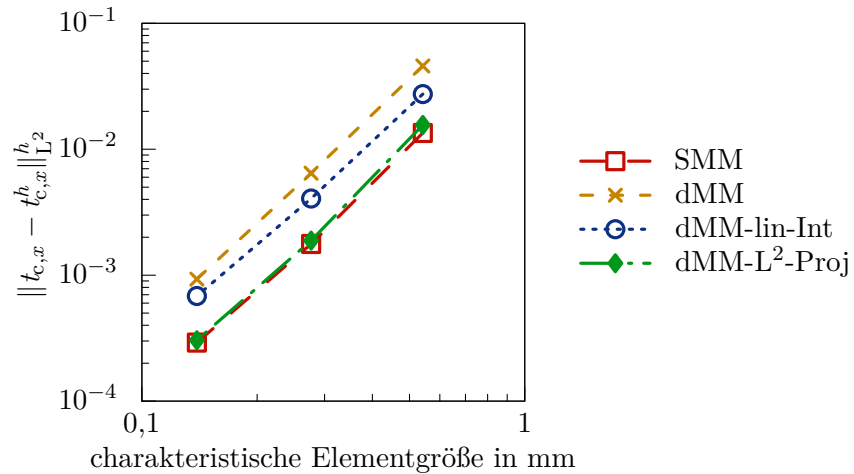


Abbildung 6.8: Dreidimensionales Netzkopplungsproblem: Absoluter Fehler in $t_{c,x}$, angegeben in der gewichteten L^2 -Norm in Abhängigkeit der Netzfeinheit.

Punkte der Oberfläche, deren Normale in positive x -Richtung weist, sind in x -Richtung gelagert. Die gegenüberliegende Oberfläche wird durch die konstante Druckspannung q_x belastet. Als Referenzlösung dient die analytische Lösung des Problems, die einer konstanten Spannung $\sigma_x = 1 \text{ kN/m}^2$ in dem Würfel entspricht. Alle anderen Spannungen sind aufgrund der Lagerung und Belastung im kontinuierlichen Fall null. Das Netz von Netzlevel 0 ist rechts in Abbildung 6.7 für eine Ansicht dargestellt. Das Netz wird schrittweise verfeinert, indem jedes hexaedrische Element in acht hexaedrische Elemente unterteilt wird. Alle untersuchten Netze weisen das Verhältnis $s : m = 2 : 3$ auf. Aufgrund der Krümmung des Kontaktrandes und der nichtkonformen Vernetzung sind die diskretisierten Kontaktränder nicht identisch, das heißt $\Gamma_c^{(1),h} \neq \Gamma_c^{(2),h}$.

Der Fehler in den Kontaktspannungen wird exemplarisch für den Anteil des Kontaktspannungsvektors in x -Richtung angegeben. Die analytische Referenzlösung von $t_{c,x}$ lautet wie folgt:

$$t_{c,x} = -\cos \varphi \sin \theta \text{ kN/mm}^2. \quad (6.17)$$

In dem Diagramm der Abbildung 6.8 ist der Fehler in den Kontaktspannungen über die Netzfeinheit aufgetragen. Alle betrachteten Methoden haben ähnliche Konvergenzraten. Wie im Einführungsbeispiel aus Abschnitt 6.2 ist der Fehler von dMM am größten. Der Fehler wird durch dMM-lin-Int verringert, ist aber immer noch größer als der von SMM. Mit der präsentierten Methode dMM- L^2 -Proj kann der Fehler der dualen Mortar-Formulierung auf das Niveau des Fehlers der Standard-Mortar-Formulierung reduziert werden.

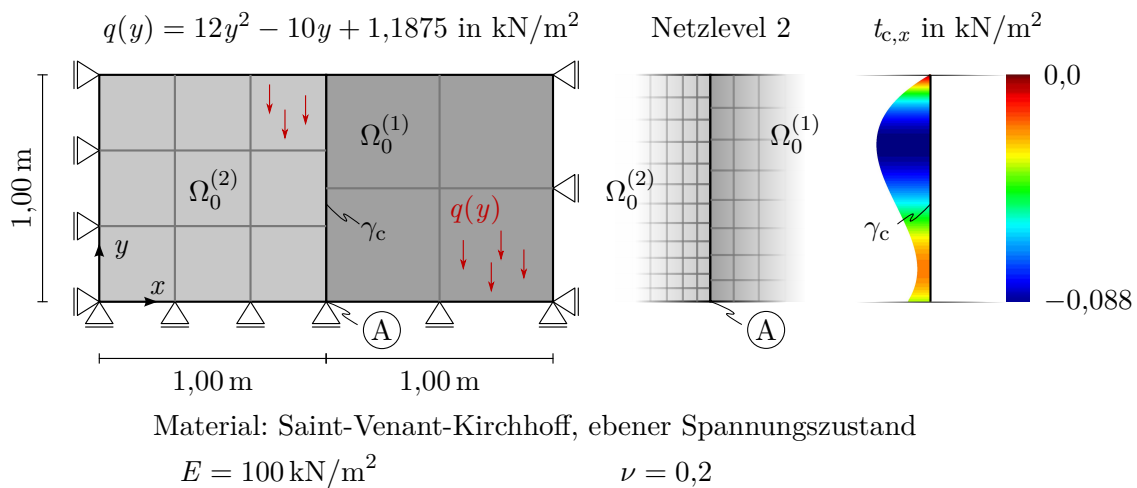


Abbildung 6.9: Unilaterales Kontaktproblem: Geometrie, Materialdaten, Diskretisierung von Netzlevel 0 und Netzlevel 2 sowie Visualisierung der Kontaktspannung $t_{c,x}$ der numerischen Referenzlösung.

6.4.2 Unilaterales Kontaktproblem

Das nächste numerische Experiment ist ein unilaterales Kontaktproblem. Es besteht aus zwei in der Referenzkonfiguration quadratischen Körpern, deren Anordnung und Lagerung in Abbildung 6.9 links gezeigt ist. Beide Körper werden mit einer Flächenlast beansprucht, die in y -Richtung wirkt. Die Intensität der Last variiert in y -Richtung. Die Last wird innerhalb eines Lastinkrementes aufgebracht.

Neben Netzen des dargestellten Verhältnisses $s : m = 2 : 3$, werden auch Netze des Verhältnisses $s : m = 3 : 2$ untersucht. Zusätzlich wird das Netz auf den Punkt A hin in beide Richtungen verfeinert. Auf diese Weise soll ausgeschlossen werden, dass die Ursache der bisherigen Beobachtungen in der Regelmäßigkeit der Netze liegt. Ohne die Verfeinerung läge jeder zweite Slave-Knoten auf einem Master-Knoten. Durch die Verfeinerung des Netzes liegen nur die Knoten der Enden der Kontaktträger aufeinander. In der Mitte von Abbildung 6.9 wird die Verfeinerung anhand des angedeuteten Finite-Elemente-Netzes von Netzlevel 2 verdeutlicht.

Als Referenzlösung dient eine numerische Lösung, die unter Verwendung der Standard-Mortar-Methode und einem Netz mit 350×350 Elementen je Quadrat berechnet wird. Durch die Querkontraktion ($\nu = 0,2$) dehnen die Körper sich in x -Richtung aus und drücken daher gegeneinander. Die resultierende Kontaktspannung in x -Richtung der Referenzlösung ist in Abbildung 6.9 rechts dargestellt.

Die Fehler in $t_{c,x}$ aller betrachteten Methoden sind in Abbildung 6.10 in Abhängigkeit der Netzfeinheit für $s : m = 2 : 3$ als auch $s : m = 3 : 2$ veranschaulicht. Auch für

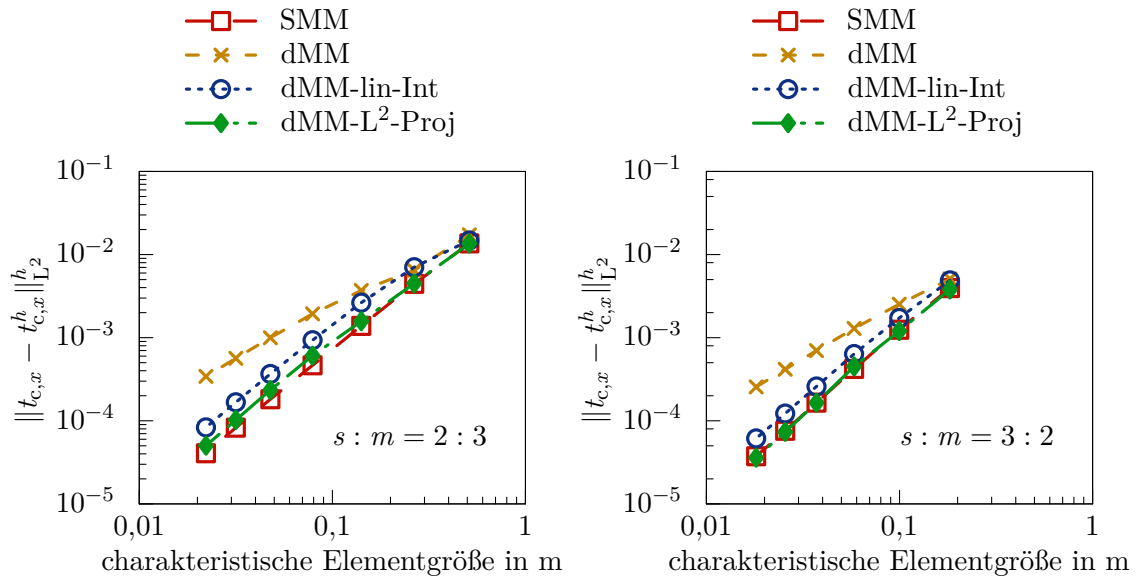
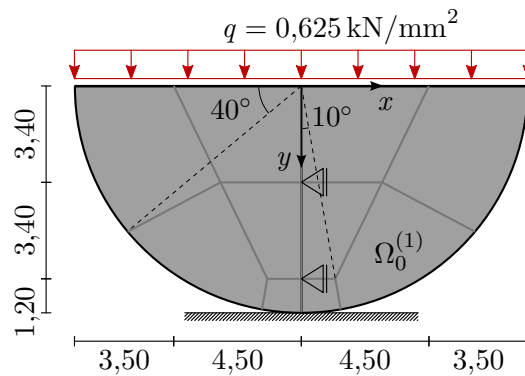


Abbildung 6.10: Unilaterales Kontaktproblem: Absoluter Fehler in $t_{c,x}$, angegeben in der gewichteten L^2 -Norm in Abhängigkeit der Netzfeinheit für $s : m = 2 : 3$ (links) sowie $s : m = 3 : 2$ (rechts).

dieses unilaterale Kontaktproblem ist es mit dMM- L^2 -Proj möglich, die Genauigkeit der Kontaktspannungen einer dualen Mortar-Formulierung auf das Niveau der Genauigkeit der Standard-Mortar-Methode zu bringen. Für $s : m = 2 : 3$ sind die Kontaktspannungen von dMM- L^2 -Proj geringfügig schlechter als für SMM, für $s : m = 3 : 2$ ist hingegen praktisch kein Unterschied sichtbar. Für dieses Beispiel ist erneut zu beobachten, dass die Konvergenzrate des Fehlers von dMM geringer ist als die Konvergenzraten der drei anderen Methoden.

6.4.3 Hertz'sches Kontaktproblem

Das dritte numerische Experiment dieses Abschnitts ist die in Abbildung 6.11 gezeigte Variante des klassischen Hertz'schen Kontaktproblems. Ein elastischer Halbzylinder wird gegen ein starres, ebenes Hindernis gedrückt. Hierfür wird der Halbzylinder durch eine konstante Flächenlast q belastet, die innerhalb von zwei Lastinkrementen aufgebracht wird. Als Referenzlösung dient die Lösung einer Berechnung des Problems mit der Standard-Mortar-Methode und Netzlevel 7.



alle Längen in mm

Material: Saint-Venant-Kirchhoff, ebener Verzerrungszustand

$$E = 200 \text{ kN/mm}^2$$

$$\nu = 0,3$$

Abbildung 6.11: Hertz'sches Kontaktproblem: Geometrie, Materialdaten und Diskretisierung von Netzlevel 0.

Das linke Diagramm der Abbildung 6.12 zeigt exemplarisch für Netzlevel 3 den Kontaktspannungsverlauf aller betrachteten Kontaktspannungen für eine Hälfte des Problems. Drei Beobachtungen werden an dieser Stelle hervorgehoben:

- Infolge von dMM und dMM- L^2 -Proj ergeben sich Zugspannungen in der Kontaktzone, die bei unilateralem Kontakt physikalisch nicht sinnvoll sind. Mit dMM- L^2 -Proj beschränken sich die Zugspannungen auf einen kleinen Bereich am Ende der Kontaktzone.
- Je nachdem welche Mortar-Formulierung verwendet wird, ergibt sich eine andere aktive Menge. Der letzte aktive Slave-Knoten liegt unter Verwendung der Standard-Mortar-Methode bei $|x| = 0,523$ mm. Wird das Problem mit der dualen Mortar-Methode berechnet, ermittelt der zugrundeliegende Algorithmus an diesem Kontaktrandende einen weiteren aktiven Slave-Knoten bei $|x| = 0,697$ mm.
- Der Kontaktspannungsverlauf von SMM hat bei $|x| = 0,523$ mm einen Spannungswert, der deutlich stärker von der Referenzlösung abweicht als an den anderen Slave-Knoten. Auch für die anderen untersuchten Netze ist diese Spannungsszillation für SMM sichtbar.

Die letzten beiden Punkte werden ebenfalls in SEITZ U. A. (2016) für ein ähnliches Hertz'sches Kontaktproblem unter Verwendung NURBS-basierter Mortar-Formulierungen beobachtet. Wie SEITZ U. A. (2016) ebenso vermuten, liegt die Ursache für die Spannungsszillation von SMM und die unterschiedliche aktive Menge wahrscheinlich in der Verwendung der knotenweise entkoppelten Kontaktbedingungen aus den Gleichun-

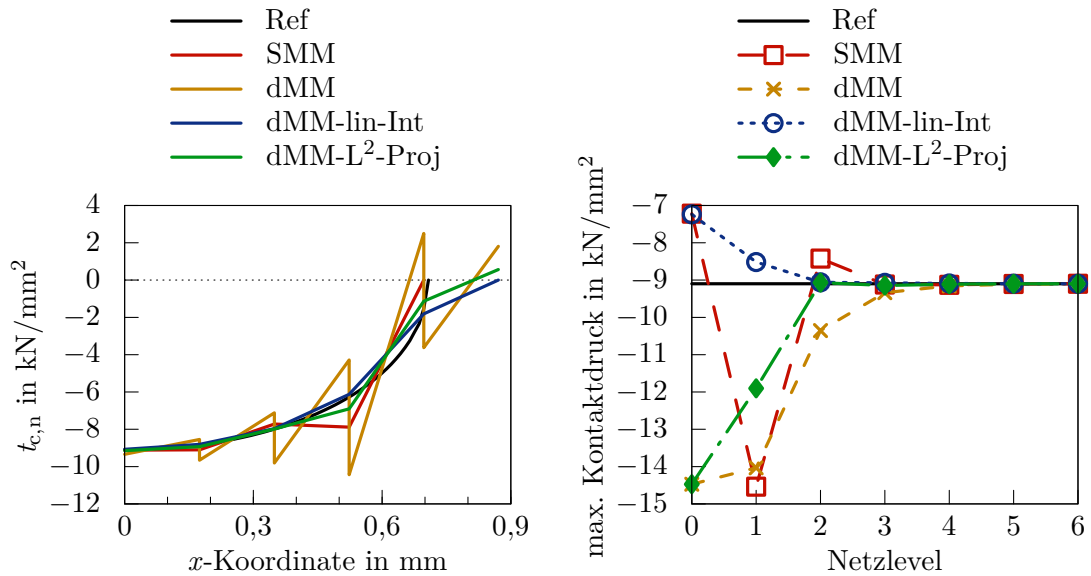


Abbildung 6.12: Hertz'sches Kontaktproblem: Verlauf der Kontaktspannung $t_{c,n}$ für Netzlevel 3 (links) und maximaler Kontaktdruck in Abhängigkeit der Netzfeinheit (rechts).

gen (3.34) und (3.37). Die Verwendung ist eigentlich für die Standard-Mortar-Methode nicht konsistent zulässig, vergleiche Unterabschnitt 3.4.4.

Anhand des rechten Diagramms der Abbildung 6.12 soll untersucht werden, wie genau die betrachteten Methoden den maximalen Kontaktstress am Scheitelpunkt des Halbzylinders abbilden. Hierfür ist diese Druckspannung über die Netzfeinheit aufgetragen. Mit der vorgeschlagenen Methode dMM- L^2 -Proj und mit dMM-lin-Int stimmt bereits bei Netzlevel 2 die maximale Druckspannung recht genau mit der numerischen Referenzlösung überein. Für SMM und dMM muss das Netz feiner sein, damit die Approximation des Kontaktstresses im Bereich der numerischen Referenzlösung liegt.

Das linke Diagramm der Abbildung 6.13 stellt den Fehler in $t_{c,n}$ in der gewichteten L^2 -Norm in Abhängigkeit der Netzfeinheit dar. Die asymptotischen Konvergenzraten aller Methoden gleichen sich in etwa. Im Gegensatz zu den bisher betrachteten Experimenten ist die Kontaktspannung von dMM- L^2 -Proj die beste Spannungsrepräsentation. Die Kontaktspannung von SMM ist weniger genau als die von dMM- L^2 -Proj und dMM-lin-Int. Ursächlich hierfür sind die oben erwähnten Spannungsoszillationen von SMM am Ende des Kontaktrandes.

Als Nächstes wird eine Variante des beschriebenen Hertz'schen Kontaktproblems mit veränderten Randbedingungen untersucht. Die Linie, auf der ursprünglich die Last q

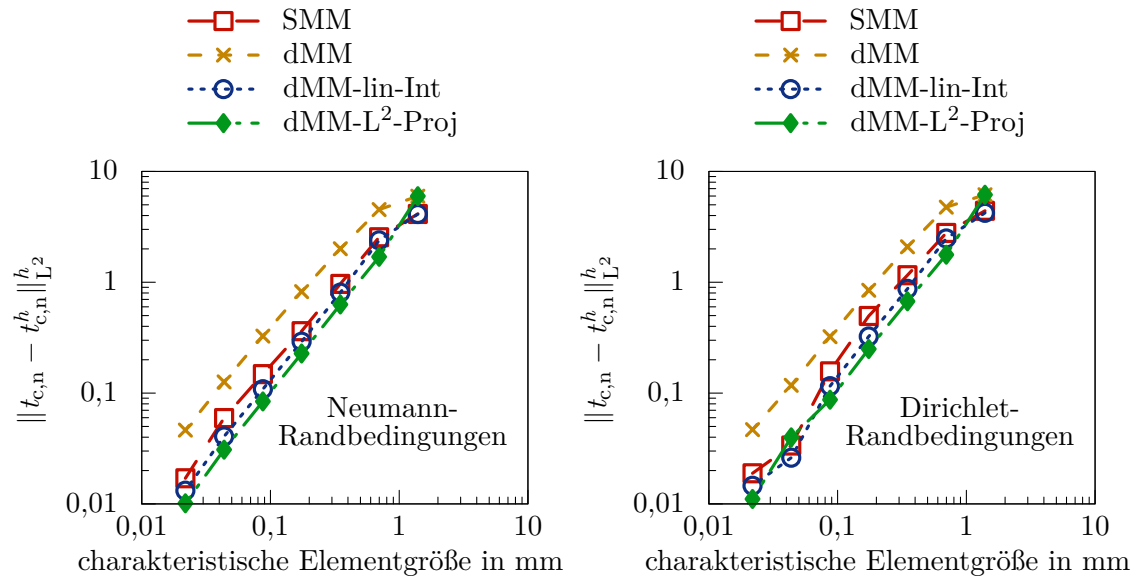
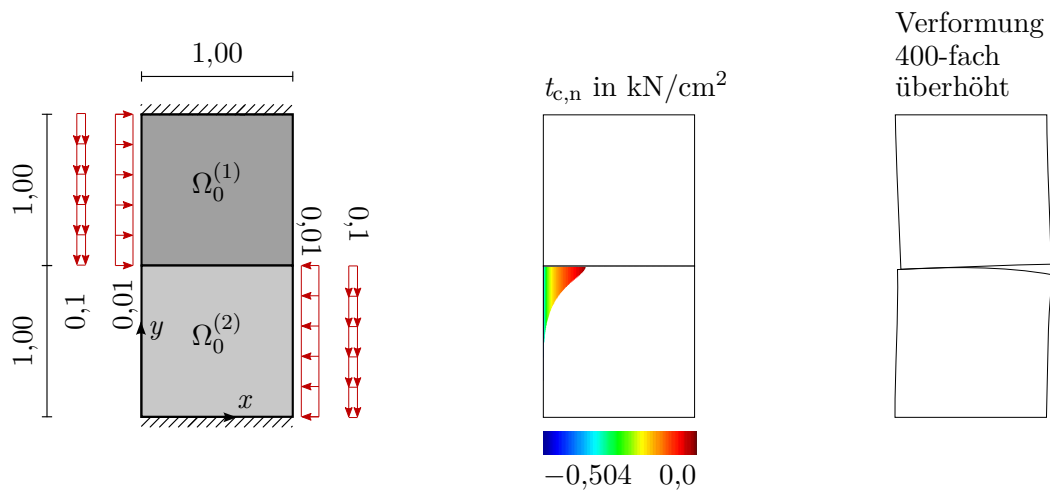


Abbildung 6.13: Hertz'sches Kontaktproblem: Absoluter Fehler in $t_{c,n}$, angegeben in der gewichteten L^2 -Norm in Abhängigkeit der Netzfeinheit für das Hertz'sche Kontaktproblem mit Neumann-Randbedingungen (links) und inhomogenen Dirichlet-Randbedingungen (rechts).

wirkte, wird nun in y -Richtung gelagert. Diese Lager werden in zwei Lastinkrementen um 0,1 mm in negative y -Richtung bewegt. Das Fehlerdiagramm der resultierenden Kontaktspannung $t_{c,n}$ ist rechts in Abbildung 6.13 dargestellt. Die Ergebnisqualität ist vergleichbar zu derjenigen der vorher betrachteten Variante. dMM- L^2 -Proj liefert für die meisten Netze die genauesten Kontaktspannungen. Allerdings sind für Netzlevel 5 (Elementgröße: 0,044 mm) die Kontaktspannungen von SMM und dMM-lin-Int genauer als die von dMM- L^2 -Proj. Bis auf dMM zeigen alle Methoden Unregelmäßigkeit für Netzlevel 5. Für Netzlevel 5 ist die unphysikalische Zugspannung der Kontaktspannung t_c^{dMM} am Ende der Kontaktzone sogar etwas größer als für Netzlevel 4. Die große Zugspannung wird folglich auch in der L^2 -Projektion von dMM- L^2 -Proj berücksichtigt und verursacht den Knick in der Konvergenzkurve.

6.4.4 Kontaktproblem mit Spannungssingularität

Das letzte numerische Experiment dieses Kapitel entspricht einem in HÜEBER UND WOHLMUTH (2003, 2005a) vorgeschlagenen unilateralen Kontaktproblem. Links in Abbildung 6.14 ist die Problemstellung mit den zwei nicht verbundenen Körpern $\Omega_0^{(\alpha)}$ ge-



alle Längen in cm, alle Lasten in kN/cm²
 Material: Saint-Venant-Kirchhoff, ebener Spannungszustand

$$\begin{aligned} \Omega_0^{(1)}: \quad E &= 2000 \text{ kN/cm}^2 & \nu &= 0,4 \\ \Omega_0^{(2)}: \quad E &= 1500 \text{ kN/cm}^2 & \nu &= 0,2 \end{aligned}$$

Abbildung 6.14: Kontaktproblem mit Spannungssingularität: Geometrie, Materialdaten, Visualisierung der Kontaktspannung $t_{c,n}$ der numerischen Referenzlösung und Darstellung der Verformung.

zeigt. Die Körper haben unterschiedliche Materialkonstanten und werden durch die abgebildeten Lasten beansprucht. Diese werden in einem Lastinkrement aufgebracht. Die sich einstellende Verformung ist gering und rechts in Abbildung 6.14 überhöht veranschaulicht. Das größte Finite-Elemente-Netz diskretisiert jeden Körper mit einem Element. Alle untersuchten Netze weisen in der Referenzkonfiguration ein konformes Netz auf.

Für dieses Beispiel wird die Genauigkeit der Kontaktspannung $t_{c,n}$ untersucht. Als Referenzlösung dient die numerische Lösung von Netzlevel 8 unter Verwendung der Standard-Mortar-Methode. Deren Kontaktspannungsverlauf ist in der Mitte von Abbildung 6.14 visualisiert. Infolge der scharfen Kante des oberen Würfels weist der Kontaktspannungsverlauf eine Singularität auf. Abbildung 6.15 zeigt für alle untersuchten Netzfeinheiten die Fehler in $t_{c,n}$. Diese konvergieren für alle Methoden mit ähnlichen Raten von circa 1,1 gegen null. Diese asymptotischen Konvergenzraten entsprechen der in HÜEBER UND WOHLMUTH (2003, 2005a) beobachteten Konvergenzrate. Die Relation der Fehler ist auch für dieses Problem mit einer Spannungssingularität vergleichbar zu den meisten vorherigen Problemen. Die Kontaktspannungen von dMM sind deutlich ungenauer als diejenigen von SMM. Mit dMM-lin-Int sind die Fehler in der gewichteten L²-Norm geringer als die Fehler von dMM und mit dMM-L²-Proj können die Fehler auf das Niveau der Fehler von SMM reduziert werden.

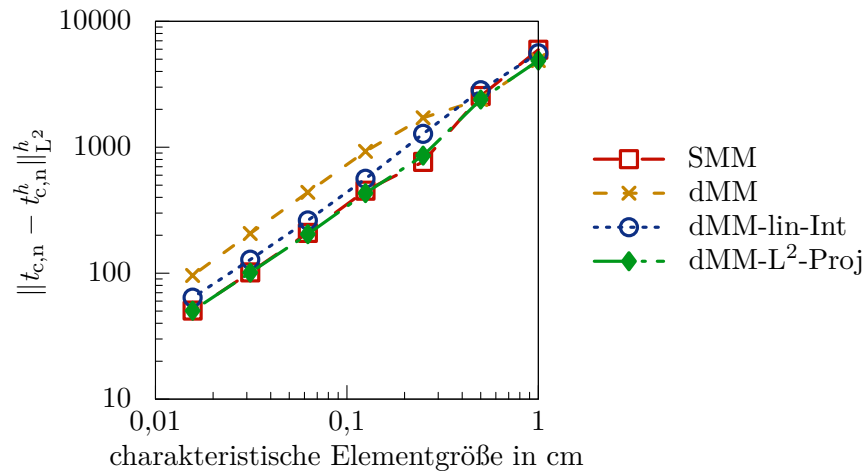


Abbildung 6.15: Kontaktproblem mit Spannungssingularität: Absoluter Fehler in $t_{c,n}$, angegeben in der gewichteten L^2 -Norm in Abhängigkeit der Netzfeinheit

6.5 Zusammenfassende Beurteilung der Kontaktspannungsqualität

Die in diesem Kapitel entwickelte Methode zur Berechnung kontinuierlicher Kontaktspannungen für duale Mortar-Formulierungen wurde für eine Reihe von numerischen Experimenten getestet. Hierfür wurde der Fehler der präsentierten L^2 -Projektion (dMM-L²-Proj) mit den Fehlern anderer Kontaktspannungen verglichen. Die Genauigkeit der Kontaktspannungen wurde für zwei- und dreidimensionale Netzkopplungsprobleme sowie unilaterale Kontaktprobleme untersucht.

Die asymptotischen Konvergenzraten der Fehler aller betrachteten Methoden zur Kontaktspannungsberechnung sind vergleichbar. Lediglich für die Beispiele aus Abschnitt 6.2 und Unterabschnitt 6.4.2 ist die Konvergenzrate des Fehlers der diskontinuierlichen Kontaktspannung von dMM geringer als für die anderen Methoden. Die Abweichung der asymptotischen Konvergenzraten tritt immer auf, wenn die Lösung des Problems nicht glatt ist. Grundsätzlich ist auch die Lösung des kontinuierlichen dreidimensionalen Netzkopplungsproblems aus Unterabschnitt 6.4.1 glatt. Trotzdem kann hier keine abweichende Konvergenzrate beobachtet werden, weil die Lösung des diskretisierten Problems nicht glatt ist. Ursächlich hierfür ist die nichtkonforme Diskretisierung des gekrümmten Kontaktrandes, die zu $\Gamma_c^{(1),h} \neq \Gamma_c^{(2),h}$ führt. Wird das dreidimensionale Netzkopplungsproblem konform vernetzt, ist die Lösung des diskreten Problems glatt und die Konvergenzrate von dMM unterscheidet sich gegenüber den anderen Methoden.

Die entwickelte Methode dMM- L^2 -Proj zeigt gegenüber den bisherigen Methoden zur Kontaktspannungsberechnung keine verbesserten Konvergenzraten. Dennoch ist der Fehler von dMM- L^2 -Proj für die untersuchten Beispiele fast ausnahmslos geringer als für alle anderen dualen Mortar-Formulierungen. Zusätzlich ist der Fehler in den Kontaktspannungen meist genauso gering wie der Fehler der Standard-Mortar-Methode. Mit dMM- L^2 -Proj wird in diesem Kapitel eine vielversprechende Möglichkeit vorgestellt, um Kontaktspannungen hoher Genauigkeit zu erhalten und zusätzlich die Vorteile einer dualen Mortar-Methode beibehalten zu können.

Zusammenfassung und Ausblick

Das Ziel dieser Arbeit war die Entwicklung einer robusten und effizienten dualen Mortar-Formulierung für zwei- und dreidimensionale Kontaktprobleme. Als wesentliche Innovationen haben sich dabei eine Effizienzsteigerung der numerischen Kontaktintegralberechnung und eine Verbesserung der Kontaktspannungen ergeben. Die nachfolgenden Abschnitte fassen die in dieser Arbeit gewonnenen Erkenntnisse zusammen und weisen auf mögliche Folgeuntersuchungen hin.

7.1 Zusammenfassung

Der präsentierte Kontaktalgorithmus basiert auf der Mortar-Methode. Eine wesentliche Herausforderung von Mortar-Formulierungen ist die Berechnung der Kontaktintegrale, da deren Integrand nur innerhalb von Segmenten glatt ist. Ohne eine Bestimmung der Gebiete mit glatten Integranden ist es unabhängig vom Funktionstyp des Integranden nicht möglich die numerische Integration mit gewöhnlichen Quadraturformeln exakt durchzuführen. Segmentbasierte Integrationen sind vor allem für dreidimensionale Probleme rechenintensiv. Es konnte dargelegt werden, dass hierfür hauptsächlich das Lösen der nichtlinearen Gleichung zur Projektion der Integrationspunkte auf die tatsächlichen Kontaktränder verantwortlich ist. Eine detaillierte Untersuchung des Integranden der Kontaktintegrale hat gezeigt, dass dieser im Allgemeinen eine gebrochenrationale Funktion ist. Nur für einige wenige Sonderfälle ist der Integrand polynomisch und somit mit Quadraturformeln exakt integrierbar.

Zur Reduktion des numerischen Aufwands wurden alternative segmentbasierte Integrationsmethoden diskutiert, die weniger Integrationspunkte benötigen. Die Alternativen wurden so gewählt, dass sie, in Bezug auf die Vergleichsmethoden, möglichst dieselben Sonderfälle exakt integrieren. Als Vergleichsmethoden dienten dabei die üblicherweise

verwendete Triangulierung nach PUSO UND LAURSEN (2003) bzw. eine leicht modifizierte Delaunay-Triangulierung. Beide Methoden integrieren die polygonalen Segmente mit dreieckigen Integrationszellen.

Zunächst wurde eine alternative Methode beschrieben, die es ermöglicht, direkt über die polygonalen Segmente zu integrieren, ohne diese vorher in Integrationszellen zu unterteilen. Allerdings übersteigt der numerische Aufwand zur Bestimmung der Quadraturformeln den numerischen Nutzen, der aus der Einsparung von Integrationspunkten resultiert. Als weitere Alternativen wurden Methoden untersucht, die das Segment in viereckige Integrationszellen unterteilen (Quadrangulierung). Innerhalb dieser Integrationszellen werden unterschiedliche Quadraturformeln verwendet. Das Hauptaugenmerk lag dabei auf der Untersuchung einer Gauß-Quadraturformel mit neun Integrationspunkten je viereckiger Integrationszelle. Obwohl die bilinearen Formfunktionen der viereckigen Integrationszelle den Polynomgrad des Integranden erhöhen, können mit dieser Quadrangulierungsmethode dieselben Sonderfälle exakt integriert werden wie mit den untersuchten Triangulierungsmethoden. Gleichzeitig werden weniger Integrationspunkte benötigt. Des Weiteren wurde für die viereckigen Integrationszellen eine Quadraturformel geringerer Integrationsordnung mit sieben Integrationspunkten untersucht.

Für die betrachteten Integrationsmethoden wurde eine Reihe numerischer Experimente durchgeführt. Mit den numerischen Experimenten konnten der Berechnungsaufwand und die Integrationsgenauigkeit für Kontaktprobleme evaluiert werden, die keine Sonderfälle sind. Die Integrationsmethode mit sieben Integrationspunkten je viereckiger Integrationszelle ist im Vergleich am wenigsten rechenintensiv. Allerdings ist die Integrationsgenauigkeit unvertretbar schlechter als die der anderen Methoden. Die Integration je viereckiger Integrationszelle mit der Gauß-Quadraturformel ist ebenfalls sehr effizient, gleichzeitig ist diese Methode aber deutlich genauer. Die Genauigkeit ist vergleichbar mit der Genauigkeit der rechenintensiveren Delaunay-Triangulierung. Die höchste Genauigkeit weist die Triangulierungsmethode nach PUSO UND LAURSEN (2003) auf. Dies gilt vor allem für stark verzerrte Slave- und Master-Elemente. Jedoch benötigt diese Methode auch bei Weitem am meisten Integrationspunkte und somit resultiert für diese der größte Berechnungsaufwand. Mit der Quadrangulierungsmethode unter Verwendung der Gauß-Quadraturformel wurde eine Methode vorgestellt, die sowohl genau als auch effizient ist und insofern eine lohnenswerte Alternative darstellt.

Um die Kontaktspannungen dualer Mortar-Methoden zu verbessern, wurde eine stückweise lineare L^2 -Projektion der diskontinuierlichen Kontaktspannungen präsentiert. Mit dieser Nachlaufrechnung können mit der dualen Mortar-Methode kontinuierliche Kontaktspannungen berechnet werden. Mit bi- und unilateralen numerischen Experimenten wurde die Genauigkeit dieser Kontaktspannung mit der Genauigkeit weiterer Kontaktspannungen verglichen. Gegenüber den diskontinuierlichen Kontaktspannungen der dua-

len Mortar-Methode zeigte sich eine Verbesserung durch die L^2 -Projektion hinsichtlich des Fehlers in der gewichteten L^2 -Norm. Auch im Vergleich zu den kontinuierlichen Kontaktspannungen nach HÜEBER U. A. (2005) verbesserte sich die Kontaktspannungsgenauigkeit durch die L^2 -Projektion. Dies gilt für fast alle betrachteten numerischen Experimente und deren untersuchte Finite-Elemente-Netze. Es konnte außerdem beobachtet werden, dass durch die L^2 -Projektion die Kontaktspannungsgenauigkeit der dualen Mortar-Methode auf dem Niveau der Kontaktspannungsgenauigkeit der Standard-Mortar-Methode liegt. Für die meisten untersuchten numerischen Experimente konnte praktisch kein Unterschied in den Fehlerkurven ausgemacht werden. Mit der präsentierten L^2 -Projektion lassen sich somit die Vorteile der dualen Mortar-Methode gegenüber der Standard-Mortar-Methode nutzen, ohne empfindliche Nachteile bei der Kontaktspannungsgenauigkeit in Kauf nehmen zu müssen.

7.2 Ausblick

Die numerische Berechnung der Kontaktintegrale wurde in dieser Arbeit für lineare finite Elemente effizienter gestaltet. Wie in PUSO U. A. (2008) und POPP U. A. (2010) für die Standard- bzw. duale Mortar-Methode beschrieben, sind die Segmente bei Verwendung quadratischer finiter Elemente ebenfalls polygonal. Die vorgeschlagene Modifikation zur Unterteilung des Segments in viereckige Integrationszellen sollte deshalb ebenfalls anwendbar sein, wenn das Kontaktproblem mit quadratischen finiten Elementen diskretisiert wird.

Wird die Mortar-Methode im Rahmen des isogeometrischen Konzepts unter Verwendung von NURBS-Formfunktionen eingesetzt, erfolgt ebenfalls eine Segmentierung. Zur Integration über die Segmente werden in HESCH UND BETSCH (2012), DITTMANN U. A. (2014) und SEITZ U. A. (2016) dreieckige Integrationszellen eingesetzt. Durch den Einsatz viereckiger Integrationszellen und entsprechender Gauß-Quadraturformeln ließe sich die Kontaktintegralberechnung eventuell auch für diese Formulierungen effizienter gestalten.

In dieser Arbeit wurde vor allem für stark verzerrte Slave- und Master-Elemente eine Dominanz gebrochenrationaler Terme im Integranden der Kontaktintegrale beobachtet. Folglich ist die numerische Berechnung der entsprechenden Integrale besonders ungenau. Es wäre daher unter Umständen hilfreich, einen Algorithmus zu entwickeln, der die Quadraturformel in Abhängigkeit der Elementverzerrung adaptiv auswählt. Auf diese Weise ließen sich Quadraturformeln höherer Ordnung bei stark verzerrten Elementen einsetzen und somit könnte der Integrationsfehler verringert werden. Während sich der

Berechnungsaufwand durch den Einsatz von Quadraturformeln niedrigerer Ordnung bei praktisch unverzerrten Elementen reduzieren ließe.

Die L^2 -Projektion zur Verbesserung der Kontaktspannungen dualer Mortar-Methoden wurde in dieser Arbeit vorgestellt und untersucht. Bislang wurde die Methode ausschließlich auf relativ simple bi- und unilaterale Kontaktprobleme angewendet, ohne von den verbesserten Kontaktspannungen zu profitieren. Anhand von Problemen, deren Verhalten von den Kontaktspannungen abhängt, könnte der Nutzen der vorgestellten Methode weiter evaluiert werden. Anwendungen wären beispielsweise Mortar-Formulierungen für Verschleißprobleme, siehe z. B. CAVALIERI UND CARDONA (2013) sowie FARAH U. A. (2017). Bei Verschleißproblemen bestimmt die Kontaktspannung die Abnutzung und damit das Problemverhalten. Des Weiteren wäre es denkbar, dass die modifizierten Kontaktspannungen die Ergebnisqualität thermomechanischer Kontaktprobleme verbessert. Formulierungen dieser Art, wie sie beispielsweise in WRIGGERS UND MIEHE (1994) sowie DITTMANN U. A. (2014) beschrieben sind, berücksichtigen den Zusammenhang zwischen den Kontaktspannungen und der Wärmeleitfähigkeit. Mithilfe der L^2 -Projektion könnte die Wärmeleitung genauer abgebildet werden.

Die genannten Weiterentwicklungen und Anwendungen der präsentierten Methoden stellen nur eine Auswahl dar. Auf Grundlage dieser Arbeit sind weitere Forschungsarbeiten auf dem Gebiet der Mortar-Methoden für Kontaktprobleme denkbar.

Literaturverzeichnis

ALTENBACH 2015

ALTENBACH, H.: *Kontinuumsmechanik: Einführung in die materialunabhängigen und materialabhängigen Gleichungen*. Berlin, Heidelberg : Springer Vieweg, 2015

BABŮSKA UND AZIZ 1972

BABŮSKA, A. ; AZIZ, A. K.: Survey lectures on the mathematical foundations of the finite element method. In: AZIZ, A. K. (Hrsg.): *The mathematical foundations of the finite element method with applications to partial differential equations*. New York : Academic Press, 1972

BAŞAR UND WEICHERT 2000

BAŞAR, Y. ; WEICHERT, D.: *Nonlinear continuum mechanics of solids: Fundamental mathematical and physical concepts*. Berlin, Heidelberg : Springer-Verlag, 2000

BATHE 2002

BATHE, K.-J.: *Finite-Elemente-Methoden*. Berlin, Heidelberg : Springer-Verlag, 2002

BATHE UND CHAUDHARY 1985

BATHE, K.-J. ; CHAUDHARY, A.: A solution method for planar and axisymmetric contact problems. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 21 (1985), Nr. 1, S. 65–88

BEIRÃO DA VEIGA U. A. 2012

BEIRÃO DA VEIGA, L. ; BREZZI, F. ; CANGIANI, A. ; MANZINI, G. ; MARINI, L. D. ; RUSSO, A.: Basic principles of virtual element methods. In: *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences* 23 (2012), Nr. 1, S. 199–214

BEIRÃO DA VEIGA U. A. 2014

BEIRÃO DA VEIGA, L. ; BREZZI, F. ; MARINI, L. D. ; RUSSO, A.: The hitchhiker's guide to the virtual element method. In: *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences* 24 (2014), Nr. 8, S. 1541–1573

BELYTSCHKO U. A. 2014

BELYTSCHKO, T. ; LIU, W. K. ; MORAN, B. ; ELKHODARY, K. I.: *Nonlinear finite elements for continua and structures*. Chichester : Wiley, 2014

BEN BELGACEM 1999

BEN BELGACEM, F: The mortar finite element method with Lagrange multipliers. In: *Numerische Mathematik* 84 (1999), Nr. 2, S. 173–197

BEN BELGACEM U. A. 1997

BEN BELGACEM, F. ; HILD, P. ; LABORDE, P.: Approximation of the unilateral contact problem by the mortar finite element method. In: *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series I - Mathematics* 324 (1997), Nr. 1, S. 123–127

BEN BELGACEM U. A. 1998

BEN BELGACEM, F. ; HILD, P. ; LABORDE, P.: The mortar finite element method for contact problems. In: *Mathematical and Computer Modelling* 28 (1998), Nr. 4–8, S. 263–271

BERNARDI U. A. 1993

BERNARDI, C. ; MADAY, Y. ; PATERA, A. T.: Domain decomposition by the mortar element method. In: KAPER, H. G. (Hrsg.) ; GARBEY, M. (Hrsg.) ; PIEPER, G. W. (Hrsg.): *Asymptotic and Numerical Methods for Partial Differential Equations with Critical Parameters*. Springer Netherlands, 1993 (NATO ASI Series 384), S. 269–286

BERNARDI U. A. 1994

BERNARDI, C. ; MAYDAY, Y. ; PATERA, A. T.: A new nonconforming approach to domain decomposition: the mortar element method. In: BRÉZIS, H. (Hrsg.) ; LIONS, J. L. (Hrsg.): *Nonlinear partial differential equations and their applications*. Harlow : Longman, 1994 (Collège de France Seminar XI), S. 13–51

BONET UND WOOD 1999

BONET, J. ; WOOD, R. D.: *Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis*. Cambridge : Cambridge University Press, 1999

BREZZI 1974

BREZZI, F.: On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from lagrangian multipliers. In: *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis - Modélisation Mathématique et Analyse Numérique* 8 (1974), S. 129–151

CAVALIERI UND CARDONA 2013

CAVALIERI, F. J. ; CARDONA, A.: Three-dimensional numerical solution for wear prediction using a mortar contact algorithm. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 96 (2013), Nr. 8, S. 467–486

CHEW 1989

CHEW, L. P.: Constrained delaunay triangulations. In: *Algorithmica* 4 (1989), Nr. 1-4, S. 97–108

CICHOSZ UND BISCHOFF 2011

CICHOSZ, T. ; BISCHOFF, M.: Consistent treatment of boundaries with mortar contact formulations using dual Lagrange multipliers. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 200 (2011), Nr. 9–12, S. 1317–1332

COWPER 1973

COWPER, G. R.: Gaussian quadrature formulas for triangles. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 7 (1973), Nr. 3, S. 405–408

CRISFIELD 2000

CRISFIELD, M. A.: Re-visiting the contact patch test. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 48 (2000), Nr. 3, S. 435–449

DE LORENZIS U. A. 2014

DE LORENZIS, L. ; WRIGGERS, P. ; HUGHES, T. J. R.: Isogeometric contact: a review. In: *GAMM-Mitteilungen* 37 (2014), Nr. 1, S. 85–123

DE LORENZIS U. A. 2012

DE LORENZIS, L. ; WRIGGERS, P. ; ZAVARISE, G.: A mortar formulation for 3D large deformation contact using NURBS-based isogeometric analysis and the augmented Lagrangian method. In: *Computational Mechanics* 49 (2012), Nr. 1, S. 1–20

DICKOPF UND KRAUSE 2009

DICKOPF, T. ; KRAUSE, R. H.: Efficient simulation of multi-body contact problems on complex geometries: a flexible decomposition approach using constrained minimization. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 77 (2009), Nr. 13, S. 1834–1862

DITTMANN U. A. 2014

DITTMANN, M. ; FRANKE, M. ; TEMIZER, İ. ; HESCH, C.: Isogeometric analysis and thermomechanical mortar contact problems. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 274 (2014), S. 192–212

EL-ABBASI UND BATHE 2001

EL-ABBASI, N. ; BATHE, K.-J.: Stability and patch test performance of contact discretizations and a new solution algorithm. In: *Computers & Structures* 79 (2001), Nr. 16, S. 1473–1486

FARAH U. A. 2016

FARAH, P. ; GITTERLE, M. ; WALL, W. A. ; POPP, A.: Computational wear and

contact modeling for fretting analysis with isogeometric dual mortar methods. In: *Key Engineering Materials* 681 (2016), S. 1–18

FARAH U. A. 2014

FARAH, P. ; POPP, A. ; WALL, W. A.: Segment-based vs. element-based integration for mortar methods in computational contact mechanics. In: *Computational Mechanics* 55 (2014), Nr. 1, S. 209–228

FARAH U. A. 2017

FARAH, P. ; WALL, W. A. ; POPP, A.: An implicit finite wear contact formulation based on dual mortar methods. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* (2017), S. zur Veröffentlichung angenommen

FELIPPA 2016

FELIPPA, C.: *Introduction to finite elements methods*. Unterlagen zur Vorlesung, Herbstsemester 2016. University of Colorado, USA, 2016

FISCHER UND WRIGGERS 2005

FISCHER, K. A. ; WRIGGERS, P.: Frictionless 2D contact formulations for finite deformations based on the mortar method. In: *Computational Mechanics* 36 (2005), Nr. 3, S. 226–244

FISCHER UND WRIGGERS 2006

FISCHER, K. A. ; WRIGGERS, P.: Mortar based frictional contact formulation for higher order interpolations using the moving friction cone. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 195 (2006), Nr. 37–40, S. 5020–5036

FLEMISCH UND WOHLMUTH 2007

FLEMISCH, B. ; WOHLMUTH, B. I.: Stable Lagrange multipliers for quadrilateral meshes of curved interfaces in 3D. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 196 (2007), Nr. 8, S. 1589–1602

FRANCAVILLA UND ZIENKIEWICZ 1975

FRANCAVILLA, A. ; ZIENKIEWICZ, O. C.: A note on numerical computation of elastic contact problems. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 9 (1975), Nr. 4, S. 913–924

GITTERLE 2012

GITTERLE, M.: *A dual mortar formulation for finite deformation frictional contact problems including wear and thermal coupling*, Technische Universität München, Dissertation, 2012

GITTERLE U. A. 2010

GITTERLE, M. ; POPP, A. ; GEE, M. W. ; WALL, W. A.: Finite deformation frictional

mortar contact using a semi-smooth Newton method with consistent linearization. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 84 (2010), Nr. 5, S. 543–571

HAGER U. A. 2008

HAGER, C. ; HÜEBER, S. ; WOHLMUTH, B. I.: A stable energy-conserving approach for frictional contact problems based on quadrature formulas. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 73 (2008), Nr. 2, S. 205–225

HALLQUIST U. A. 1985

HALLQUIST, J. O. ; GOUDREAU, G. L. ; BENSON, D. J.: Sliding interfaces with contact-impact in large-scale Lagrangian computations. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 51 (1985), Nr. 1, S. 107–137

HARTMANN U. A. 2007

HARTMANN, S. ; BRUNSSSEN, S. ; RAMM, E. ; WOHLMUTH, B. I.: Unilateral non-linear dynamic contact of thin-walled structures using a primal-dual active set strategy. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 70 (2007), Nr. 8, S. 883–912

HARTMANN UND RAMM 2008

HARTMANN, S. ; RAMM, E.: A mortar based contact formulation for non-linear dynamics using dual Lagrange multipliers. In: *Finite Elements in Analysis and Design* 44 (2008), Nr. 5, S. 245–258

HERTZ 1882

HERTZ, H. R.: Über die Berührung fester elastischer Körper. In: *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 92 (1882), S. 156–171

HESCH UND BETSCH 2009

HESCH, C. ; BETSCH, P.: A mortar method for energy-momentum conserving schemes in frictionless dynamic contact problems. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 77 (2009), Nr. 10, S. 1468–1500

HESCH UND BETSCH 2012

HESCH, C. ; BETSCH, P.: Isogeometric analysis and domain decomposition methods. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 213–216 (2012), S. 104–112

HILD 2000

HILD, P.: Numerical implementation of two nonconforming finite element methods for unilateral contact. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 184 (2000), Nr. 1, S. 99–123

HINTERMÜLLER U. A. 2002

HINTERMÜLLER, M. ; ITO, K. ; KUNISCH, K.: The primal-dual active set strategy as a semismooth Newton method. In: *SIAM Journal on Optimization* 13 (2002), Nr. 3, S. 865–888

HOLZAPFEL 2000

HOLZAPFEL, G. A.: *Nonlinear solid mechanics: A continuum approach for engineering*. Chichester : Wiley, 2000

HÜEBER 2008

HÜEBER, S.: *Discretization techniques and efficient algorithms for contact problems*, Universität Stuttgart, Dissertation, 2008

HÜEBER U. A. 2005

HÜEBER, S. ; MAIR, M. ; WOHLMUTH, B. I.: A priori error estimates and an inexact primal-dual active set strategy for linear and quadratic finite elements applied to multibody contact problems. In: *Applied Numerical Mathematics* 54 (2005), Nr. 3–4, S. 555–576

HÜEBER U. A. 2008

HÜEBER, S. ; STADLER, G. ; WOHLMUTH, B. I.: A primal-dual active set algorithm for three-dimensional contact problems with Coulomb friction. In: *SIAM Journal on Scientific Computing* 30 (2008), Nr. 2, S. 572–596

HÜEBER UND WOHLMUTH 2003

HÜEBER, S. ; WOHLMUTH, B. I.: An optimal a priori error estimate for non-linear multibody contact problems / SFB 404, Geschäftsstelle. Stuttgart, 2003. – Forschungsbericht

HÜEBER UND WOHLMUTH 2005A

HÜEBER, S. ; WOHLMUTH, B. I.: An optimal a priori error estimate for nonlinear multibody contact problems. In: *SIAM Journal on Numerical Analysis* 43 (2005), Nr. 1, S. 156–173

HÜEBER UND WOHLMUTH 2005B

HÜEBER, S. ; WOHLMUTH, B. I.: A primal–dual active set strategy for non-linear multibody contact problems. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 194 (2005), Nr. 27–29, S. 3147–3166

HÜEBER UND WOHLMUTH 2009

HÜEBER, S. ; WOHLMUTH, B. I.: Thermo-mechanical contact problems on non-matching meshes. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 198 (2009), Nr. 15–16, S. 1338–1350

HUGHES 2000

HUGHES, T. J. R.: *The finite element method: Linear static and dynamic finite element analysis*. Mineola : Dover Publications, 2000

HUGHES U. A. 2005

HUGHES, T. J. R. ; COTTRELL, J. A. ; BAZILEVS, Y.: Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 194 (2005), Nr. 39–41, S. 4135–4195

HUGHES U. A. 1977

HUGHES, T. J. R. ; TAYLOR, R. L. ; KANOKNUKULCHAI, W.: A finite element method for large displacement contact and impact problems. In: BATHE, K.-J. (Hrsg.) ; ODEN, J. T. (Hrsg.) ; WUNDERLICH, W. (Hrsg.): *Formulations and computational algorithms in finite element analysis: papers pres. at the U. S.-Germany symposium on finite element methods, held at M. I. T.* Cambridge : MIT Press, 1977

HUGHES U. A. 1976

HUGHES, T. J. R. ; TAYLOR, R. L. ; SACKMAN, J. L. ; CURNIER, A. ; KANOKNUKULCHAI, W.: A finite element method for a class of contact-impact problems. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 8 (1976), Nr. 3, S. 249–276

JIN U. A. 2016

JIN, S. ; SOHN, D. ; IM, S.: Node-to-node scheme for three-dimensional contact mechanics using polyhedral type variable-node elements. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 304 (2016), S. 217–242

JOHNSON 1987

JOHNSON, K. L.: *Contact mechanics*. Cambridge, New York : Cambridge University Press, 1987

KIKUCHI UND ODEN 1988

KIKUCHI, N. ; ODEN, J.: *Contact problems in elasticity*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1988

KIM UND YOUN 2012

KIM, J.-Y. ; YOUN, S.-K.: Isogeometric contact analysis using mortar method. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 89 (2012), Nr. 12, S. 1559–1581

KRAUSE UND WOHLMUTH 2000

KRAUSE, R. H. ; WOHLMUTH, B. I.: Nonconforming decomposition methods: techniques for linear elasticity. In: *East-West Journal of Numerical Mathematics* 8 (2000), Nr. 3, S. 177–206

KRAUSE UND WOHLMUTH 2002

KRAUSE, R. H. ; WOHLMUTH, B. I.: A Dirichlet–Neumann type algorithm for contact problems with friction. In: *Computing and Visualization in Science* 5 (2002), Nr. 3, S. 139–148

LADYŽENSKAJA UND URAL’CEVA 1968

LADYŽENSKAJA, O. A. ; URAL’CEVA, N. N.: *Linear and quasilinear elliptic equations*. New York : Academic Press, 1968 (Mathematics in science and engineering)

LAMICHHANE UND WOHLMUTH 2002

LAMICHHANE, B. P. ; WOHLMUTH, B. I.: Higher order dual Lagrange multiplier spaces for mortar finite element discretizations. In: *Calcolo* 39 (2002), S. 219–237

LARSON UND BENGZON 2013

LARSON, M. G. ; BENGZON, F.: *The finite element method: theory, implementation, and applications*. Berlin, Heidelberg : Springer-Verlag, 2013

LAURSEN 2003

LAURSEN, T. A.: *Computational contact and impact mechanics*. Berlin, Heidelberg : Springer-Verlag, 2003

LAURSEN UND SIMO 1993

LAURSEN, T. A. ; SIMO, J. C.: A continuum-based finite element formulation for the implicit solution of multibody, large deformation-frictional contact problems. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 36 (1993), Nr. 20, S. 3451–3485

MADAY U. A. 1988

MADAY, Y. ; MAVRIPLIS, C. ; PATERA, A. T.: Nonconforming mortar element methods: application to spectral discretizations. In: CHAN, T. F. (Hrsg.) ; GLOWINSKI, R. (Hrsg.) ; PÉRIAUX, J. (Hrsg.) ; WIDLUND, O. B. (Hrsg.): *Domain Decomposition Methods*. Los Angeles : SIAM, 1988, S. 392–418

MATZEN UND BISCHOFF 2016

MATZEN, M. E. ; BISCHOFF, M.: A weighted point-based formulation for isogeometric contact. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 308 (2016), S. 73–95

MATZEN U. A. 2013

MATZEN, M. E. ; CICHOSZ, T. ; BISCHOFF, M.: A point to segment contact formulation for isogeometric, NURBS based finite elements. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 255 (2013), S. 27–39

MCDEVITT UND LAURSEN 2000

MCDEVITT, T. W. ; LAURSEN, T. A.: A mortar-finite element formulation for frictional contact problems. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 48 (2000), Nr. 10, S. 1525–1547

PADMANABHAN UND LAURSEN 2001

PADMANABHAN, V. ; LAURSEN, T. A.: A framework for development of surface smoothing procedures in large deformation frictional contact analysis. In: *Finite Elements in Analysis and Design* 37 (2001), Nr. 3, S. 173–198

PAPADOPOULOS UND TAYLOR 1992

PAPADOPOULOS, P. ; TAYLOR, R. L.: A mixed formulation for the finite element solution of contact problems. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 94 (1992), Nr. 3, S. 373–389

PAPADOPOULOS UND TAYLOR 1993

PAPADOPOULOS, P. ; TAYLOR, R. L.: A simple algorithm for three-dimensional finite element analysis of contact problems. In: *Computers & Structures* 46 (1993), Nr. 6, S. 1107–1118

POPP 2012

POPP, A.: *Mortar methods for computational contact mechanics and general interface problems*, Technische Universität München, Dissertation, 2012

POPP U. A. 2009

POPP, A. ; GEE, M. W. ; WALL, W. A.: A finite deformation mortar contact formulation using a primal–dual active set strategy. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 79 (2009), Nr. 11, S. 1354–1391

POPP U. A. 2010

POPP, A. ; GITTERLE, M. ; GEE, M. W. ; WALL, W. A.: A dual mortar approach for 3D finite deformation contact with consistent linearization. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 83 (2010), Nr. 11, S. 1428–1465

POPP U. A. 2013

POPP, A. ; SEITZ, A. ; GEE, M. W. ; WALL, W. A.: Improved robustness and consistency of 3D contact algorithms based on a dual mortar approach. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 264 (2013), S. 67–80

POPP UND WALL 2014

POPP, A. ; WALL, W. A.: Dual mortar methods for computational contact mechanics – overview and recent developments. In: *GAMM-Mitteilungen* 37 (2014), Nr. 1, S. 66–84

POPP U. A. 2012

POPP, A. ; WOHLMUTH, B. I. ; GEE, M. W. ; WALL, W. A.: Dual quadratic mortar finite element methods for 3D finite deformation contact. In: *SIAM Journal on Scientific Computing* 34 (2012), Nr. 4, S. B421–B446

PUSO UND LAURSEN 2003

PUSO, M. A. ; LAURSEN, T. A.: Mesh tying on curved interfaces in 3D. In: *Engineering Computations* 20 (2003), Nr. 3, S. 305–319

PUSO UND LAURSEN 2004A

PUSO, M. A. ; LAURSEN, T. A.: A mortar segment-to-segment contact method for large deformation solid mechanics. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 193 (2004), Nr. 6-8, S. 601–629

PUSO UND LAURSEN 2004B

PUSO, M. A. ; LAURSEN, T. A.: A mortar segment-to-segment frictional contact method for large deformations. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 193 (2004), Nr. 45–47, S. 4891–4913

PUSO U. A. 2008

PUSO, M. A. ; LAURSEN, T. A. ; SOLBERG, J.: A segment-to-segment mortar contact method for quadratic elements and large deformations. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 197 (2008), Nr. 6–8, S. 555–566

SEITZ U. A. 2016

SEITZ, A. ; FARAH, P. ; KREMHELLER, J. ; WOHLMUTH, B. I. ; WALL, W. A. ; POPP, A.: Isogeometric dual mortar methods for computational contact mechanics. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 301 (2016), S. 259–280

SESHAIYER UND SURI 2000

SESHAIYER, P. ; SURI, M.: *hp* submeshing via non-conforming finite element methods. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 189 (2000), Nr. 3, S. 1011–1030

SIMO U. A. 1985

SIMO, J. C. ; WRIGGERS, P. ; TAYLOR, R. L.: A perturbed Lagrangian formulation for the finite element solution of contact problems. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 50 (1985), Nr. 2, S. 163–180

SITZMANN U. A. 2015

SITZMANN, S. ; WILLNER, K. ; WOHLMUTH, B. I.: A dual Lagrange method for contact problems with regularized frictional contact conditions: modelling micro slip. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 285 (2015), S. 468–487

SITZMANN U. A. 2016

SITZMANN, S. ; WILLNER, K. ; WOHLMUTH, B. I.: Variationally consistent quadratic finite element contact formulations for finite deformation contact problems on rough surfaces. In: *Finite Elements in Analysis and Design* 109 (2016), S. 37–53

STRANG 1986

STRANG, G.: *Introduction to applied mathematics*. Wellesley : Wellesley-Cambridge Press, 1986

TAYLOR UND PAPADOPOULOS 1991

TAYLOR, R. L. ; PAPADOPOULOS, P.: On a patch test for contact problems in two dimensions. In: WRIGGERS, P. (Hrsg.) ; WAGNER, W. (Hrsg.): *Nonlinear Computational Mechanics*, 1991, S. 690–702

TEMIZER U. A. 2012

TEMIZER, İ. ; WRIGGERS, P. ; HUGHES, T. J. R.: Three-dimensional mortar-based frictional contact treatment in isogeometric analysis with NURBS. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 209–212 (2012), S. 115–128

VON SCHEVEN UND BISCHOFF 2016

VON SCHEVEN, M. ; BISCHOFF, M.: *Finite Elemente für Tragwerksberechnungen*. Unterlagen zur Vorlesung, Sommersemester 2016. Universität Stuttgart, Deutschland, 2016

WILKING UND BISCHOFF 2017

WILKING, C. ; BISCHOFF, M.: Alternative integration algorithms for three-dimensional mortar contact. In: *Computational Mechanics* 59 (2017), Nr. 2, S. 203–218

WILLNER 2003

WILLNER, K.: *Kontinuums- und Kontaktmechanik: synthetische und analytische Darstellung*. Berlin : Springer-Verlag, 2003

WOHLMUTH 2000

WOHLMUTH, B. I.: A mortar finite element method using dual spaces for the Lagrange multiplier. In: *SIAM Journal on Numerical Analysis* 38 (2000), Nr. 3, S. 989–1012

WOHLMUTH 2001

WOHLMUTH, B. I.: *Discretization methods and iterative solvers based on domain decomposition*. Springer-Verlag, 2001

WOHLMUTH 2002

WOHLMUTH, B. I.: A comparison of dual Lagrange multiplier spaces for mortar

finite element discretizations. In: *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis* 36 (2002), Nr. 6, S. 995–1012

WOHLMUTH 2011

WOHLMUTH, B. I.: Variationally consistent discretization schemes and numerical algorithms for contact problems. In: *Acta Numerica* 20 (2011), S. 569–734

WOHLMUTH U. A. 2012

WOHLMUTH, B. I. ; POPP, A. ; GEE, M. W. ; WALL, W. A.: An abstract framework for a priori estimates for contact problems in 3D with quadratic finite elements. In: *Computational Mechanics* 49 (2012), Nr. 6, S. 735–747

WRIGGERS 2006

WRIGGERS, P.: *Computational contact mechanics*. Berlin, Heidelberg : Springer-Verlag, 2006

WRIGGERS U. A. 2001

WRIGGERS, P. ; KRSTULOVIC-OPARA, L. ; KORELC, J.: Smooth C^1 -interpolations for two-dimensional frictional contact problems. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 51 (2001), Nr. 12, S. 1469–1495

WRIGGERS UND MIEHE 1994

WRIGGERS, P. ; MIEHE, C.: Contact constraints within coupled thermomechanical analysis – A finite element model. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 113 (1994), Nr. 3, S. 301–319

WRIGGERS U. A. 2016

WRIGGERS, P. ; RUST, W. T. ; REDDY, B. D.: A virtual element method for contact. In: *Computational Mechanics* 58 (2016), Nr. 6, S. 1039–1050

WRIGGERS U. A. 1990

WRIGGERS, P. ; VU VAN, T. ; STEIN, E.: Finite element formulation of large deformation impact-contact problems with friction. In: *Computers & Structures* 37 (1990), Nr. 3, S. 319–331. – ISSN 0045-7949

XIAO UND GIMBUTAS 2010

XIAO, H. ; GIMBUTAS, Z.: A numerical algorithm for the construction of efficient quadrature rules in two and higher dimensions. In: *Computers & Mathematics with Applications* 59 (2010), Nr. 2, S. 663–676

YANG 2009

YANG, B.: *Mortar finite element methods for large deformation contact mechanics*. VDM Verlag Dr. Müller, 2009

YANG UND LAURSEN 2008A

YANG, B. ; LAURSEN, T. A.: A contact searching algorithm including bounding volume trees applied to finite sliding mortar formulations. In: *Computational Mechanics* 41 (2008), Nr. 2, S. 189–205

YANG UND LAURSEN 2008B

YANG, B. ; LAURSEN, T. A.: A large deformation mortar formulation of self contact with finite sliding. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 197 (2008), Nr. 6–8, S. 756–772

YANG U. A. 2005

YANG, B. ; LAURSEN, T. A. ; MENG, X.: Two dimensional mortar contact methods for large deformation frictional sliding. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 62 (2005), Nr. 9, S. 1183–1225

ZAVARISE UND DE LORENZIS 2009

ZAVARISE, G. ; DE LORENZIS, L.: The node-to-segment algorithm for 2D frictionless contact: classical formulation and special cases. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 198 (2009), Nr. 41–44, S. 3428–3451

ZIENKIEWICZ U. A. 2005

ZIENKIEWICZ, O. C. ; TAYLOR, R. L. ; ZHU, J. Z. ; ZIENKIEWICZ, O. C. ; ZIENKIEWICZ, O. C.: *The finite element method its basis and fundamentals*. Amsterdam, Boston : Elsevier Butterworth-Heinemann, 2005

Lebenslauf

Persönliche Angaben:

Name: Christoph Moritz Wilking
Geburtsdatum: 31. Dezember 1985
Geburtsort: Berlin
Eltern: Susanne Wilking,
Andreas Wilking

Schulische Ausbildung:

08/1992 – 07/1998 Carl-Sonnenschein-Grundschule, Berlin
08/1998 – 06/2005 Askanische Oberschule, Berlin
08/2002 – 07/2003 Colegio Humboldt, Puebla, Mexiko
06/2005 Allgemeine Hochschulreife

Universitäre Ausbildung:

10/2005 – 02/2011 Studium des Bauingenieurwesens an der Universität Stuttgart
09/2008 – 04/2009 Stipendiat im Rahmen der Internationale Studien- und Ausbildungspartnerschaften (ISAP) des DAAD an der University of Calgary, Kanada
02/2011 Diplomprüfung (mit Auszeichnung)
07/2011 Artur-Fischer-Preis
seit 04/2011 Akademischer Mitarbeiter am Institut für Baustatik und Baudynamik der Universität Stuttgart

Berichte des Instituts für Baustatik und Baudynamik der Universität Stuttgart

- 1 (1983) **P. Osterrieder:**
Traglastberechnung von räumlichen Stabwerken bei großen Verformungen mit finiten Elementen.
- 2 (1983) **T. A. Kompfner:**
Ein finites Elementmodell für die geometrisch und physikalisch nicht-lineare Berechnung von Stahlbetonschalen.
- 3 (1983) **A. Diack:**
Beitrag zur Stabilität diskret längsversteifter Kreiszylinderschalen unter Axialdruck.
- 4 (1984) **A. Burmeister, F.W. Bornscheuer, E. Ramm:**
Traglasten von Kugelbehältern mit Stützen und Formabweichungen unter Innendruck und Stützenlängskraft.
- 5 (1985) **H. Stegmüller:**
Grenzlastberechnungen flüssigkeitsgefüllter Schalen mit „degenerierten“ Schalenelementen.
- 6 (1987) **A. Burmeister:**
Dynamische Stabilität nach der Methode der finiten Elemente mit Anwendungen auf Kugelschalen.
- 7 (1987) **G. Kammler:**
Ein finites Elementmodell zur Berechnung von Trägern und Stützen mit offenem, dünnwandigem Querschnitt unter Berücksichtigung der Interaktion zwischen globalem und lokalem Versagen.
- 8 (1988) **A. Matzenmiller:**
Ein rationales Lösungskonzept für geometrisch und physikalisch nicht-lineare Strukturberechnungen.
- 9 (1989) **D. Tao:**
Die Technik der reduzierten Basis bei nichtlinearen finiten Element-Berechnungen.

- 10 (1989) **K. M. Weimar:**
Ein nichtlineares Balkenelement mit Anwendung als Längssteifen axialbelasteter Kreiszyylinder.
- 11 (1990) **K.-U. Bletzinger:**
Formoptimierung von Flächentragwerken.
- 12 (1990) **S. Kimmich:**
Strukturoptimierung und Sensibilitätsanalyse mit finiten Elementen.
- 13 (1991) **U. Andelfinger:**
Untersuchungen zur Zuverlässigkeit hybrid-gemischter Finiten Elemente für Flächentragwerke.
- 14 (1992) **N. Büchter:**
Zusammenführung von Degenerationskonzept und Schalentheorie bei endlichen Rotationen.
- 15 (1992) **T. J. Hofmann:**
Beitrag zur verfeinerten Balkentheorie.
- 16 (1994) **D. de Mesquita Roehl:**
Zur Berechnung von großen elastoplastischen Deformationen bei Flächentragwerken und Kontinua.
- 17 (1994) **R. Reitinger:**
Stabilität und Optimierung imperfektionsempfindlicher Tragwerke.
- 18 (1995) **R. L. M. Suanno:**
Ein dreidimensionales Simulationsmodell für Stahlbeton mit Plastizität und Schädigung.
- 19 (1995) **M. Braun:**
Nichtlineare Analysen von geschichteten, elastischen Flächentragwerken.
- 20 (1996) **N. Rehle:**
Adaptive Finite Element Verfahren bei der Analyse von Flächentragwerken.

- 21 (1996) C. Haußer:**
Effiziente Dreieckselemente für Flächentragwerke.
- 22 (1996) D. Kuhl:**
Stabile Zeitintegrationsalgorithmen in der nichtlinearen Elastodynamik dünnwandiger Tragwerke.
- 23 (1998) H. Schmidts:**
Zur effizienten Modellierung und Analyse von Hochhaustragwerken.
- 24 (1998) H. Wang:**
Interaktion des lokalen und globalen Stabilitätsverhaltens dünnwandiger Stäbe.
- 25 (1998) K. Maute:**
Topologie- und Formoptimierung von dünnwandigen Tragwerken.
- 26 (1998) B. Maurer:**
Karl Culmann und die graphische Statik.
- 27 (1998) F. Cirak:**
Adaptive Finite-Element-Methoden bei der nichtlinearen Analyse von Flächentragwerken.
- 28 (1998) M. Trautz:**
Zur Entwicklung von Form und Struktur historischer Gewölbe aus der Sicht der Statik.
- 29 (1999) H. Menrath:**
Numerische Simulation des nichtlinearen Tragverhaltens von Stahlverbundträgern.
- 30 (1999) M. Bischoff:**
Theorie und Numerik einer dreidimensionalen Schalenformulierung.
- 31 (1999) W. A. Wall:**
Fluid-Struktur-Interaktion mit stabilisierten Finiten Elementen.
- 32 (2000) E. Kuhl:**
Numerische Modelle für kohäsive Reibungsmaterialien.

- 33 (2001) A. Maute:**
Fehlerkontrolle bei Finite-Element-Methoden in der linearen Struktur-
dynamik.
- 34 (2001) S. Schwarz:**
Sensitivitätsanalyse und Optimierung bei nichtlinearem Strukturver-
halten.
- 35 (2001) A. Haufe:**
Dreidimensionale Simulation bewehrter Flächentragwerke aus Beton
mit der Plastizitätstheorie.
- 36 (2001) D. P. Mok:**
Partitionierte Lösungsansätze in der Strukturdynamik und der Fluid-
Struktur-Interaktion.
- 37 (2002) H. Steeb:**
Fehlerschätzer für FE-Berechnungen bei entfestigenden Materialien.
- 38 (2002) K. Krausz:**
Tragverhalten gemauerter Tonnengewölbe mit Stichkappen.
- 39 (2002) M. Hörmann:**
Nichtlineare Versagensanalyse von Faserverbundstrukturen.
- 40 (2003) V. Gravemeier:**
The Variational Multiscale Method for Laminar and Turbulent Incom-
pressible Flow.
- 41 (2004) R. Kemmler:**
Stabilität und große Verschiebungen in der Topologie- und Form-
optimierung.
- 42 (2004) G. A. D’Addetta:**
Discrete Models for Cohesive Frictional Materials.
- 43 (2004) M. Gee:**
Effiziente Lösungsstrategien in der nichtlinearen Schalenmechanik.

- 44 (2004) **T. Erhart:**
Strategien zur numerischen Modellierung transienter Impaktvorgänge bei nichtlinearem Materialverhalten.
- 45 (2005) **M. Leukart:**
Kombinierte anisotrope Schädigung und Plastizität bei kohäsiven Reibungsmaterialien.
- 46 (2006) **F. Huber:**
Nichtlineare dreidimensionale Modellierung von Beton- und Stahlbetontragwerken.
- 47 (2007) **A. Lipka:**
Verbesserter Materialeinsatz innovativer Werkstoffe durch die Topologieoptimierung.
- 48 (2007) **A. S. Hund:**
Hierarchische Mehrskalenmodellierung des Versagens von Werkstoffen mit Mikrostruktur.
- 49 (2007) **S. Hartmann:**
Kontaktanalyse dünnwandiger Strukturen bei großen Deformationen.
- 50 (2007) **T. M. Hettich:**
Diskontinuierliche Modellierung zur Versagensanalyse von Verbundmaterialien.
- 51 (2007) **C. Förster:**
Robust methods for fluid-structure interaction with stabilised finite elements.
- 52 (2009) **M. von Scheven:**
Effiziente Algorithmen für die Fluid-Struktur-Wechselwirkung.
- 53 (2010) **J. Kato:**
Material Optimization for Fiber Reinforced Composites applying a Damage Formulation.

- 54 (2010) C. F. Hilchenbach:**
Optimierung von Mehrphasenstrukturen mit lokalem Schädigungsverhalten.
- 55 (2011) I. Bruss:**
Dreidimensionale Schädigungsmodellierung heterogener Materialien.
- 56 (2012) B. J. Schneider:**
Polygonale diskrete Elemente zur Modellierung heterogener Materialien.
- 57 (2012) R. Etlender:**
Modellierung und Simulation der Wellenausbreitung in flexiblen hydraulischen Leitungen.
- 58 (2012) T. Cichosz:**
Stabile und konsistente Kontaktmodellierung in Raum und Zeit.
- 59 (2013) R. Echter:**
Isogeometric analysis of shells.
- 60 (2013) A. Tkachuk:**
Variational methods for consistent singular and scaled mass matrices.
- 61 (2013) J. Irslinger:**
Mechanische Grundlagen und Numerik dreidimensionaler Schalenelemente.
- 62 (2014) T. E. Pohl:**
Adaptive Methoden zur Pfadverfolgung bei Entfestigung.
- 63 (2014) A. Sorg:**
Adaptive diskret-kontinuierliche Modellierung von Materialien mit Mikrostruktur.
- 64 (2015) M. E. Matzen:**
Isogeometrische Modellierung und Diskretisierung von Kontaktproblemen.

65 (2016) V. M. Effinger:

Finite nichtlinear viskoelastische Modellierung offenzelliger Polymer-schäume.



Christoph Wilking

Diese Arbeit beschäftigt sich mit Computersimulationen von Kontaktproblemen unter Verwendung der Methode der finiten Elemente. Zur Diskretisierung des Kontakts wird die Mortar-Methode eingesetzt, für welche zwei Modifikationen vorgeschlagen werden.

Die erste Modifikation betrifft die numerische Berechnung der sogenannten Kontaktintegrale. Bei der zugehörigen Integration müssen im allgemeinen Fall polynomische Integranden über polygonale Flächen integriert werden. Zur Anwendung gewöhnlicher Quadraturformeln werden die Gebiete üblicherweise in dreieckige Integrationszellen unterteilt. In dieser Arbeit wird eine alternative Unterteilung in viereckige Integrationszellen vorgeschlagen, die dazu führt, dass weniger Integrationspunkte benötigt werden. Durch die in dieser Arbeit beschriebenen numerischen Experimente wird gezeigt, dass dadurch der numerische Aufwand der Integration deutlich reduziert werden kann, ohne die Integrationsgenauigkeit signifikant zu verschlechtern.

Die zweite Modifikation dient der Verbesserung der Kontaktspannungen für die duale Mortar-Methode. Bei dieser Methode wird das Lagrange-Multiplikator-Feld mit dualen Formfunktionen approximiert. Daraus resultiert der Vorteil, dass die duale Mortar-Methode im Vergleich zur Standard-Mortar-Methode effizienter ist. Allerdings sind die Kontaktspannungen der dualen Mortar-Methode weniger genau als diejenigen der Standard-Mortar-Methode. In dieser Arbeit wird für die duale Mortar-Methode eine Rückrechnung der Kontaktspannungen basierend auf einer L^2 -Projektion vorgestellt. Numerische Experimente zeigen, dass durch die vorgeschlagene L^2 -Projektion die Kontaktspannungsgenauigkeit der dualen Mortar-Methode verbessert wird und vergleichbar zu derjenigen der Standard-Mortar-Methode ist.