

Entwicklung kontinuumskompatibler Federmodelle

Michael Reck

**INSTITUT FÜR
STATIK UND DYNAMIK
DER LUFT- UND
RAUMFAHRTKONSTRUKTIONEN**

UNIVERSITÄT STUTTGART

Entwicklung kontinuumskompatibler Federmodelle

Von der Fakultät

**Luft- und Raumfahrttechnik und Geodäsie der Universität Stuttgart
zur Erlangung der Würde eines Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.)
genehmigte Abhandlung**

Vorgelegt von

**Dipl.-Ing. Michael Reck
aus Forchheim**

Hauptberichter:	Privatdozent Dr.-Ing. Ioannis Doltsinis
Mitberichter:	Prof. Dr.-Ing. Peter Middendorf
Mitberichter:	Prof. Dr.-Ing. Karl Schweizerhof

Tag der mündlichen Prüfung: 12.09.2017

**Institut für Statik und Dynamik der Luft- und Raumfahrtkonstruktionen
Universität Stuttgart**

2017

D93

ISBN 978-3-942807-06-7

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere die der Übersetzung, des Nachdrucks, des Vortrags, der Entnahme von Abbildungen und Tabellen, der Funksendung, der Mikroverfilmung oder der Vervielfältigung auf anderen Wegen und der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben, auch bei nur auszugsweiser Verwertung, vorbehalten. Eine Vervielfältigung dieses Werkes oder von Teilen dieses Werkes ist auch im Einzelfall nur in den Grenzen der gesetzlichen Bestimmungen des Urheberrechtsgesetzes der Bundesrepublik Deutschland vom 9. September 1965 in der jeweils geltenden Fassung zulässig. Sie ist grundsätzlich vergütungspflichtig. Zuwiderhandlungen unterliegen den Strafbestimmungen des Urheberrechtsgesetzes.

© Institut für Statik und Dynamik der Luft- und Raumfahrtkonstruktionen,
Universität Stuttgart, Stuttgart, 2017

Dieser Bericht kann über das Institut für Statik und Dynamik der Luft- und Raumfahrtkonstruktionen, Universität Stuttgart, Pfaffenwaldring 27, 70569 Stuttgart, Telefon: (0711) 6856-63612, Fax: (0711) 6856-63706, bezogen werden.

Vorwort

Diese Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Statik und Dynamik der Luft- und Raumfahrtkonstruktionen (ISD) der Universität Stuttgart als Nachfolgearbeit der Dissertation von Dr.-Ing. Manfred Hahn. Jedoch haben auch weitere Personen zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen. Hervorzuheben ist hierbei insbesondere Herr Priv.-Doz. Dr.-Ing. Ioannis Doltsinis, dem ich für die Übernahme des Hauptberichts dieser Arbeit sowie deren fachlicher Betreuung danken möchte. Des Weiteren soll auch der Beitrag der Mitberichter, Herr Prof. Dr.-Ing. Karl Schweizerhof und Herr Prof. Dr.-Ing. Peter Middendorf, nicht unerwähnt bleiben, die mit der Übernahme des Mitberichts und den damit verbundenen kritischen Fragen zu einer Verbesserung dieser Arbeit beigetragen haben.

Auch meinen Kollegen möchte ich für die gemeinsame produktive und schöne Zeit am Institut danken. Hervorzuheben sind hierbei die interessanten fachlichen Diskussionen mit Rafael Jarzabek, Manfred Hahn, Christian Messe und Karsten Keller. Auch Andrea Berghammer möchte ich einen besonderen Dank aussprechen für ihre Freundlichkeit und Hilfsbereitschaft.

Nicht zuletzt danke ich meiner Familie, insbesondere meiner Frau Sarah, für die fortwährende Unterstützung während der Abfassung dieser Arbeit.

Stuttgart, September 2017

Michael Reck

Inhaltsverzeichnis

Nomenklatur	xi
Kurzfassung	xv
Abstract	xvii
1. Einleitung	1
1.1. Motivation	1
1.2. Ziele der Arbeit	3
1.3. Aufbau der Arbeit	3
2. Diskrete numerische Methoden in der Mechanik	5
2.1. Theoretische Resultate der mikromechanischen diskreten Modellierung	6
2.2. Modellierung des makroskopischen Materialverhaltens	7
2.2.1. Federmodelle	7
2.2.2. Balkenmodelle	13
2.2.3. Die Diskrete-Elemente-Methode nach CUNDALL	15
2.2.4. Starrkörper-Feder-Modelle	16
2.2.5. Zusammenfassung	16
2.3. Netzgenerierung bei diskreten Modellen	17
2.3.1. Periodische Netze bei diskreten Modellen	17
2.3.2. Unregelmäßige Netze aus der DELAUNAY-Triangulation und ihren dualen VORONOI-Polygonen	18
3. Stabgittermodelle für unregelmäßige Netze	21
3.1. Herleitung von Stabgittermodellen	22
3.1.1. Allgemeine Herleitung der Federsteifigkeiten	22
3.1.2. Grenzen derartig hergeleiteter Modelle	24
3.2. Ein 2D-Stabgittermodell für Dreiecke	25
3.2.1. Beitrag einer Längsfeder zur Elastizitätsmatrix	26
3.2.2. Beitrag einer Winkelfeder zur Elastizitätsmatrix	27

3.2.3.	Bestimmung der Federsteifigkeiten	28
3.2.4.	Vereinfachungen für isotrope Materialien	30
3.3.	Ein 3D-Stabgittermodell für Tetraeder	33
3.3.1.	Beitrag einer Längsfeder zur Elastizitätsmatrix	33
3.3.2.	Beitrag einer Winkelfeder zur Elastizitätsmatrix	35
3.3.3.	Bestimmung der Federsteifigkeiten	37
3.4.	Beziehungen zur Lösung der Finiten Elemente	38
3.5.	Berechnung der Dehnungen bei Stabgittermodellen	39
3.5.1.	Berechnung der Zelldehnungen	40
3.5.2.	Berechnung der Knotendehnungen	41
3.5.3.	Berechnung der Dehnungen in Federverbindungen im zweidimensionalen Fall	42
3.6.	Ergebnisse linear-elastischer Rechnungen	43
3.6.1.	Ergebnisse für Probleme mit konstantem Dehnungsfeld	44
3.6.2.	Ergebnisse für einen Hohlzylinder unter Innendruck	45
4.	Ein elasto-plastisches Stabgittermodell	53
4.1.	Grundlagen der isotropen Kontinuumsplastizität	53
4.1.1.	Aufteilung der Verformung in elastischen und plastischen Anteil	54
4.1.2.	Berechnung des plastischen Anteils der Verformung	55
4.2.	Grenzen der Modellbildung für Stabgittermodelle	58
4.3.	Plastische Verformung im Federmodell	60
4.3.1.	Berechnung der plastischen Verformung	61
4.3.2.	Übertragung der plastischen Dehnung auf das zweidimensionale Federmodell	65
4.3.3.	Modifikation der Federsteifigkeiten bei plastischer Verformung	66
4.3.4.	Eine Anmerkung zur Konvergenz des Iterationsverfahrens	66
4.4.	Ergebnisse elasto-plastischer Simulationen	67
4.4.1.	Perfekte Plastizität	68
4.4.2.	Elastoplastizität mit lokaler Entfestigung	72
4.4.3.	Elastoplastizität mit Verfestigung	73
4.4.4.	Zusammenfassung der Ergebnisse	76
5.	Rissbildung und -fortschritt beim Stabgittermodell	77
5.1.	Bruchmechanik	77

5.2.	Rissmodellierung bei diskreten Makromodellen	82
5.2.1.	Punkt-Feder-Modelle	82
5.2.2.	Balkenmodelle	84
5.2.3.	Starrkörper-Feder-Modelle	85
5.2.4.	Zusammenfassung	86
5.3.	Sprödbbruchmodellierung im neuen Federmodell	87
5.3.1.	Berechnung der Verformung der Verbindungen	87
5.3.2.	Modelle für das Versagen der Verbindungen	91
5.3.3.	Notwendige Modellmodifikationen beim Versagen einer Verbindung	91
5.4.	Ergebnisse von Sprödbbruchrechnungen	97
5.4.1.	Bruch unter einer Belastung nach Rissmodus I	98
5.4.2.	Bruch unter einer gemischten Belastung nach Rissmodus I/II . . .	98
5.5.	Simulation eines duktilen Bruchs	103
6.	Zusammenfassung und Ausblick	105
6.1.	Zusammenfassung	105
6.2.	Ausblick	107
Anhänge		109
A. Herleitungen		109
A.1.	Schub- und Winkelfedern in diskreten Modellen	109
A.1.1.	Über die Verletzung des Momentengleichgewichts bei der Verwen- dung von Schubfedern	109
A.1.2.	Zur Äquivalenz von Schub- und Winkelfedern bei Erfüllung des Momentengleichgewichts	111
A.1.3.	Schlussfolgerungen für die Verwendung von Schubfedersystemen .	114
A.2.	DELAUNAY-Triangulation und VORONOI-Polygone	114
A.3.	Vereinfachungen der Federsteifigkeitsberechnung	116
A.4.	Volumenerhaltung der plastischen Verformung	118
A.5.	Energieabnahme beim Bruch einer Verbindung	119
B. Hinweise zu den Modelleigenschaften		121
B.1.	Verhalten unter endlichen Verzerrungen	121

C. Steifigkeitsmatrizen und Kräfte der Federelemente	125
C.1. Herleitung aus der inneren Energie	125
C.2. Die Normalkraftfeder	126
C.3. Die Winkelfeder	126
C.3.1. Vereinfachung für eine Winkelfeder zwischen drei Knoten	128
C.3.2. Vereinfachung für den zweidimensionalen Fall	128
Literaturverzeichnis	131

Nomenklatur

Im Folgenden sind die Formelzeichen und mathematischen Operatoren aufgeführt, die in der vorliegenden Arbeit wiederholt auftreten.

Koordinatensysteme

Vektoriell Symbol	Koordinaten	Bezeichnung
\mathbf{X}	X, Y, Z	Kartesisches Koordinatensystem
\mathbf{X}_r	r, θ, z	Zylinderkoordinatensystem
ξ	ξ, η	Mitdrehendes Koordinatensystem im Dreieck

Matrizen und Vektoren

Symbol	Einheit	Bezeichnung
$\mathbf{0}$	—	Nullmatrix
\mathbf{E}	$\frac{\text{N}}{\text{m}^2}$	Elastizitätsmatrix in VOIGT'scher Notation
$\tilde{\mathbf{E}}$	$\frac{\text{N}}{\text{m}^2}$	Beitrag einer Feder zur Kontinuumssteifigkeit
\mathbf{F}	N	Kraftvektor
\mathbf{F}	—	Deformationsgradient
\mathbf{H}	—	Tensorielle HENCKY-Dehnung
\mathbf{I}	—	Einheitsmatrix
\mathbf{K}	$\frac{\text{N}}{\text{m}}$	Steifigkeitsmatrix
\mathbf{n}	—	Normalenvektor
\mathbf{T}	—	Transformation zwischen Dehnungen und Federverformungen
\mathbf{u}	m	Verschiebungsvektor eines Knoten
ε	—	Dehnungstensor
$\hat{\varepsilon}$	—	Lineares Dehnungsmaß in VOIGT'scher Notation
λ	—	Plastische Variablen
ξ	m	Relative Koordinaten eines Knoten
σ	$\frac{\text{N}}{\text{m}^2}$	CAUCHY-Spannungstensor
$\hat{\sigma}$	$\frac{\text{N}}{\text{m}^2}$	CAUCHY-Spannung in VOIGT'scher Notation

Lateinische Symbole

Symbol	Einheit	Bezeichnung
a	m	Halbe Risslänge
A	m ²	Fläche
A_{Δ}	m ²	Fläche eines Dreiecks
E	$\frac{\text{N}}{\text{m}^2}$	Elastizitätsmodul
f	—	Fließfunktion
F	N	Skalare Kraft
\mathcal{G}	$\frac{\text{N}}{\text{m}}$	Energiefreisetzungsrate
H	—	Skalare HENCKY-Dehnung
k	Nm	Federsteifigkeit
K	Nm ^{−$\frac{3}{2}$}	Spannungsintensität
l	m	Länge (der Verbindung zweier Punkte)
l_v	m	Länge einer Kante eines VORONOI-Polygons
N	—	Anzahl der Federn in einer Federzelle
q	—	Verallgemeinerte, dimensionslose Verformung
t	m	Modelldicke
u, v, w	m	Verschiebungen eines Knoten

Griechische Symbole

Symbol	Einheit	Bezeichnung
α	—	Lagewinkel
γ	—	Schubwinkel
ε	—	Skalare Dehnung
$\tilde{\varepsilon}_l$	—	Längsdehnung einer Normalkraftfeder
λ	—	Streckung
ν	—	Querkontraktionszahl
Π	Nm	Arbeit
σ	$\frac{\text{N}}{\text{m}^2}$	Skalare Spannung
φ	—	Winkel in einem Dreieck
χ	—	Relative Intensität des plastischen Flusses
Ω	m ³	Volumen

Mathematische Operatoren

Operator	Bezeichnung
----------	-------------

$\ \cdot\ _2$	Länge (2-Norm) eines Vektors
Sp	Spur einer Matrix

Indices

Symbol	Bezeichnung
--------	-------------

0	Bezogen auf den Anfangszustand
∞	Im Unendlichen
a	Bezogen auf eine Winkelfeder
acc.	Akkumulierte Größe
c	Kontinuumsgröße
dev.	Deviatorischer Anteil eines Tensors
e	Bezogen auf den elastischen Anteil der Verformung
ges.	Gesamte Größe
n	Bezogen auf eine Normalkraftfeder
nom.	Nominale Größe
p	Bezogen auf den plastischen Anteil der Verformung
s	Bezogen auf eine Schubfeder
v	Vergleichsgröße
z	Bezogen auf eine Federzelle

Kurzfassung

Die numerische Simulation des Versagensverhaltens von Werkstoffen ist eine Problemstellung, die bis heute noch nicht vollständig gelöst ist. Neben den klassischen Kontinuumsmodellierungen wie den erweiterten Finiten Elementen werden hierfür oftmals diskrete Modelle verwendet. Diese bieten den Vorteil, dass das diskrete Phänomen des Risses durch einfaches Entfernen von diskreten Elementen modelliert werden kann, wohingegen Kontinuumsmethoden eine kontinuierliche Beschreibung des Verschiebungsfelds in der Nähe der Rissspitze erfordern.

Die Zuverlässigkeit bestehender diskreter Modelle ist jedoch durch signifikante Probleme in ihrer Modellierung stark eingeschränkt. So können sie bislang in der Regel homogene, klassische Kontinua nur unter Beschränkung auf isotrope Materialien bestimmter Querkontraktionszahlen abbilden. Zudem kann die Homogenität des diskreten Modells nur gewährleistet werden, indem periodische Rechengitter verwendet oder Kontinuumselemente wie Finite Elemente in das Modell eingebaut werden. Auch plastisches Verhalten – insbesondere die reine deviatorische Natur des plastischen Fließens – kann in diesen Modellen nicht abgebildet werden.

In dieser Arbeit wird ein neues, kontinuumskompatibles Federmodell für zwei- und dreidimensionale quasistatische Anwendungen entwickelt, das diesen Beschränkungen nicht unterworfen ist. Hierzu werden neue Federzellen eingeführt, die mithilfe einer Kombination aus Normalkraft- und Winkelfedern einen beliebigen konstanten Dehnungszustand bei einem homogenen Material abbilden können. Es wird gezeigt, dass dieses Modell somit in der Lage ist, für Netze aus Simplex-Zellen beliebiger Geometrie ein beliebiges homogenes Material mit anisotropen Elastizitätseigenschaften im linear-elastischen Fall zu approximieren. Sie verhalten sich damit im linear-elastischen Fall so wie die linearen Dreiecks- und Tetraederelemente, die aus der Methode der Finiten Elemente bekannt sind.

In der Folge wird das zweidimensionale Federmodell um eine Modellierung für elastoplastisches Materialverhalten mit isotroper Verfestigung erweitert und dargelegt, wie auch andere Plastizitätsformulierungen in das Federmodell integriert werden können. Bei dieser Plastizitätsmodellierung werden mithilfe des dehnungsbasierten Ansatzes

der Kontinuumsplastizität die plastischen Änderungen der Federn berechnet. Es wird demonstriert, dass das entwickelte Modell – erstmals für ein diskretes Modell – in der Lage ist, auch die Volumenerhaltung der plastischen Verformung exakt abzubilden. Zusätzlich wird auf den Effekt der Lokalisierung der plastischen Dehnung in Scherbändern eingegangen.

Abschließend wird eine Formulierung für die Simulation von Rissen für dieses Modell vorgestellt. Analog zu diskreten Modellen aus der Literatur werden dabei sowohl dehnungsbasierte Bruchkriterien für die Federn verwendet, die die Lage der Federn berücksichtigen, als auch solche, die unabhängig von der Orientierung der Federn sind. Es kann dabei gezeigt werden, dass dieses Rissmodell im Stande ist, in Versuchen ermittelte Risspfade zu reproduzieren, sofern ein geeignetes Bruchkriterium für die Federn gewählt wird. Auch der duktile Bruch kann mit diesem Ansatz bei Nutzung der entwickelten Plastizitätsformulierung approximiert werden.

Das neu entwickelte Modell ist damit in der Lage, die erwähnten Nachteile der aus der Literatur bekannten diskreten Federmodelle zu beheben, während es zugleich in der Risssimulation, für die solche Modelle regelmäßig verwendet werden, die Pfade des Risswachstums zuverlässig vorhersagen kann.

Abstract

One of the major problems which are yet to be solved by means of modern numerical simulations is the simulation of the fracture process of materials. To achieve this end, both simulation techniques describing the material as a continuous system and techniques using a discrete approach are used. The advantage of the latter is the fact that in these models a crack is simply formed by removal of a discrete element, whereas the former needs a description of the displacement field in the vicinity of the crack. However, discrete models currently described in literature show severe problems. The most pressing problem is that they cannot be used for modelling arbitrary homogeneous materials in computations with aperiodic meshes. While some models are able to model some homogeneous materials, they are still limited in their choice of the material parameters. In specific, these models allow only the use of isotropic materials with a fixed POISSON'S ratio. An additional problem of these models is that nonlinear phenomena of the continuous material such as plasticity cannot be modelled at all without violating constraints posed by the observation of these phenomena. For example, in the case of plastic deformation the strict deviatoric nature of the plastic flow cannot be enforced upon existing discrete models. This means that such models are so far not suitable for the fracture simulation of materials with a non-negligible plastic flow before fracture.

In this work, a new discrete lattice spring model for two- and three-dimensional quasi-static applications is proposed. With this model, which is comprised of normal springs and angular springs arranged in triangular and tetrahedral cells, an arbitrary homogeneous material can be approximated. Within the limits of a linear-elastic analysis, this approximation is exact for every constant strain field within each cell. It thus has in this case the same properties as constant strain triangles and constant strain tetrahedrons known from the Finite Element Method.

Following the introduction of this new lattice spring model, a method of modelling elasto-plastic behaviour in this model is proposed. Using a strain-driven plasticity model, both perfect plasticity and plasticity with hardening and softening can be reproduced with this approach. By mapping the continuum plastic flow resulting from this approach to the lattice springs, the discrete nature of the model is maintained. In addition, the

compliance with the deviatoric nature of the plastic flow in this approach is proven and localisation phenomena occurring in this model are discussed.

Finally, the fracture modelling within the context of the proposed model is discussed. Following literature, strain-driven fracture criteria are chosen for the model. These are applied both in a directional, that is along the axes of the springs, and in a rotationally invariant version. As is shown in simulations, the right choice of the fracture criterion leads to the development of crack paths during simulations, which closely follow those observed in experiments. This is the case for both brittle fracture and ductile fracture when using the proposed plasticity formulation.

It is thus justified to conclude that the proposed model can be used to solve the aforementioned problems of the discrete models in literature whilst their main advantage, that is the ability to predict crack paths with simple fracture models, is being retained.

1. Einleitung

1.1. Motivation

Für die Berechnung des mechanischen Verhaltens von Bauteilen hat sich die numerische Simulation als Standardwerkzeug des Ingenieurs etabliert. Die Gründe hierfür sind praktischer Natur: Durch die Entwicklung der Methode der Finiten Elemente (FEM) steht dem Ingenieur eine Methode zur Verfügung, mit der im linear-elastischen Fall einfach und schnell die zu erwartende Beanspruchung des Bauteils im Betrieb gut angenähert werden können. Selbst bei großen Verformungen ist es möglich, die Beanspruchungen näherungsweise vorherzusagen. Dennoch sind bei weitem noch nicht für alle Problemstellungen im Ingenieurwesen präzise Vorhersagen der Resultate mithilfe numerischer Simulation möglich. Dies betrifft insbesondere Problemstellungen, bei denen das Material des Bauteils versagt, wie zum Beispiel bei Brüchen aufgrund statischer Überbeanspruchung oder aufgrund von Materialermüdung durch dynamische Belastung. Es ist folglich nicht verwunderlich, dass sich die Forschung in den letzten Jahrzehnten auf genau dieses Thema, die Simulation des Versagensverhaltens von Werkstoffen und Bauteilen, konzentriert hat. Die Gründe für die Schwierigkeiten der Simulation des Materialversagens sind vielfältig. Zum einen ist es sehr schwierig, das Material hinreichend genau zu beschreiben. Dies ist nicht zuletzt deshalb der Fall, weil für den Versagensvorgang der lokale Zustand des Materials ausschlaggebend ist, welcher wiederum von der Ausrichtung der Körner in Metallen, Gitterdefekten, der Vorschädigung des Werkstoffs durch die Fertigung und Ähnlichem beeinflusst wird. Neben der Tatsache, dass diese Einflüsse selbst bei Testkörpern identischer Fertigung unterschiedlich und damit für die Simulation unbekannt sind, stehen oft auch nur globale, homogenisierte Werkstoffdaten zur Verfügung.

Ein weiteres Problem stellen die Simulationsmethodiken selbst dar. Zwar existiert eine Vielzahl von Methoden zur numerischen Simulation der Rissbildung, jedoch sind alle dieser Methoden mit Nachteilen behaftet. Auf der einen Seite existieren numerische Approximationen des Materials als Kontinuum, wie die Methode der Finiten Elemente. Hierbei müssen jedoch, um den diskontinuierlichen Effekt des Risses darstellen zu können, entweder Elemente aus der Diskretisierung entfernt werden, oder zusätzliche, diskontinuierliche

Ansatzfunktionen eingeführt werden, die diesen abbilden können (dies ist zum Beispiel bei XFEM [17, 111] der Fall), oder die Diskontinuität muss, wie bei der Modellierung mit Phasenfeldern [3], regularisiert und damit mathematisch geglättet werden [86]. Während ersteres einen enormen zusätzlichen Rechen- und Komplexitätsaufwand darstellt, wird bei letzterem die diskrete Struktur des Risses durch die Modellierung verfälscht, um den Riss als glatte Funktion darzustellen und damit mit stetigen Ansatzfunktionen approximieren zu können.

Im Gegensatz dazu erfreuen sich diskrete Methoden der Materialmodellierung, die im Kapitel 2 im Detail eingeführt werden, bei der Rissimulation hoher Beliebtheit. Sie bieten den Vorteil, dass aufgrund der kondensierten Darstellung der Materialeigenschaften in diskreten Massen und Feder- oder Strukturelementen die Rissimulation durch einfaches Entfernen ebendieser Elemente durchgeführt werden kann. Dies bietet zudem den Vorteil, dass die Phänomene der Rissbildung, des Risswachstums, der Risskoaleszens und der Rissverzweigung nicht separat behandelt werden müssen, sondern direkt als Ergebnis des Versagens der einzelnen Verbindungen entstehen. Die diskreten Modelle sind damit nach POTYONDY und CUNDALL [137] in der Lage, auf einfache Art die elastischen Eigenschaften eines Materials, Risse im Material, die Ausbildung anisotropen Verhaltens sowie die Schallemission durch ebendiese Risse, und viele weitere Eigenschaften von Materialien abzubilden.

Jedoch leiden auch die diskreten Modellierungen, die in der Literatur zu finden sind, unter Defekten: Sie sind weder im Stande, für klassische Kontinua bei unregelmäßigen Rechnernetzen ein beliebiges homogenes, linear-elastisches Material zu modellieren, noch können sie – aufgrund der Kondensation der Materialeigenschaften in diskrete Elemente – Kontinuumseffekte reproduzieren. Letzteres hat zur Folge, dass diese Modelle beispielsweise nicht im Stande sind, die Volumenerhaltung der plastischen Verformung abzubilden, womit bei der Simulation elasto-plastischen Materialverhaltens in diesen Modellen signifikante Fehler in den Ergebnissen entstehen. Ersteres lässt sich zwar durch die Nutzung periodischer Rechengitter in der Simulation teilweise beheben. Diese bringen jedoch den Nachteil mit sich, dass bei Bruchsimulationen die Risse der Ausrichtung des periodischen Netzes folgen, und die Rissbilder und Bauteilfestigkeiten somit stark von der Ausrichtung des Netzes abhängen¹.

Dennoch wurde vielfach gezeigt, dass diskrete numerische Verfahren gute Ergebnisse für die statische und dynamische Bruchsimulation bei vertretbarem Aufwand erzeugen können. Zusätzlich wurde kürzlich durch Untersuchungen am ISD gezeigt, dass auch für

¹ Dies wird auch als netzinduzierte Anisotropie bezeichnet.

die Lebensdauersimulation mechanisch und thermomechanisch belasteter Bauteile mit diskreten Methoden zufriedenstellende Ergebnisse für die Bruchlastspielzahl und das Bruchbild erreicht werden können [65,142].

1.2. Ziele der Arbeit

Das Ziel dieser Arbeit ist, ein neues diskretes Federmodell zu entwerfen, das die Vorteile der diskreten Modelle aus der Literatur – namentlich die einfache Modellierung von Rissen – reproduziert, ohne jedoch unter den Nachteilen dieser Modelle zu leiden. Hierzu müssen mehrere Anforderungen an das Modell gestellt werden: So soll es zum einen in der Lage sein, unabhängig vom gewählten Rechengitter ein beliebiges homogenes, linear-elastisches Materialverhalten zu reproduzieren, um die netzinduzierte Anisotropie der Ausrichtung der sich bildenden Risse zu eliminieren. Ein weiterer Vorteil dieser Anforderung ist, dass der Modellrand genauer erfasst werden kann als bei der Vorgabe periodischer Rechengitter. Zweitens soll das neue Modell in der Lage sein, Rissbilder aus Versuchen mit spröden Materialien ähnlich genau zu reproduzieren wie bereits vorhandene Modelle. Drittens soll die Möglichkeit der Modellierung der Kontinuumsplastizität in diskreten Modellen untersucht und, falls möglich, ein elasto-plastisches Materialmodell für das neu zu entwickelnde diskrete Verfahren eingeführt werden.

1.3. Aufbau der Arbeit

Diese Arbeit gliedert sich wie folgt: In Kapitel 2 wird die Grundidee der diskreten Modellierung des mechanischen Kontinuums vorgestellt. Außerdem wird sowohl auf die wichtigsten Vertreter dieser Modellklasse für die Risssimulation und den aktuellen Stand dieser Verfahren eingegangen, als auch das Vorgehen der Netzgenerierung für die numerische Simulation mit diskreten Modellen erläutert.

Kapitel 3 stellt das deformationsenergiebasierte Konzept der Herleitung von Federmodellen vor und nutzt dieses, um ein neues zwei- und ein dreidimensionales diskretes Federmodell zu entwickeln. Es wird gezeigt, dass diese Modelle alle Anforderungen erfüllen, die in den Zielen der Arbeit für die linear-elastische Modellierung genannt wurden.

In Kapitel 4 wird auf die Modellierung elasto-plastischen Materialverhaltens im neu entwickelten zweidimensionalen Federmodell eingegangen. Es wird dabei gezeigt, dass es bei diesem Modell möglich ist, eine Formulierung für das plastische Verhalten des Modells zu erstellen, die die Volumenerhaltung bei plastischen Deformationen exakt erfüllt. Bei-

spielrechnungen für Zugproben mit unterschiedlichen Materialien zeigen, dass mit diesem Modell sowohl Verfestigung, Entfestigung als auch die perfekte Plastizität berechnet werden können, und dass die Lokalisierung der plastischen Deformation aufgrund der Eigenschaften des Modells automatisch stattfindet.

Kapitel 5 geht auf die Modellierung des Bruchverhaltens im neu entwickelten zweidimensionalen Federmodell ein. Es wird dabei ersichtlich, dass mit diesem Modell alle aus der Literatur bekannten Versagenshypothesen erfasst werden können. Beispielrechnungen mit unterschiedlichen Kriterien zeigen, dass bei geeigneter Wahl des Versagenskriteriums eine Reproduktion der Rissbilder aus Versuchen aus der Literatur möglich ist. Zum Abschluss dieses Kapitels wird gezeigt, dass auch eine Kombination der Plastizitätsformulierung mit diesem Rissformalismus möglich ist, um duktilen Bruchverhalten zu simulieren.

Kapitel 6 fasst schließlich die Ergebnisse dieser Arbeit zusammen und gibt Anstöße zur Weiterentwicklung des neuen Federmodells.

2. Diskrete numerische Methoden in der Mechanik

Die Idee, ein mechanisches Kontinuum durch ein System diskreter Punkte zu beschreiben, die paarweise durch kraftübertragende Elemente verbunden sind, reicht weit zurück. So wurde ein solches System bereits im 19. Jahrhundert von NAVIER [118], POISSON [135], CAUCHY [34] und KIRSCH [92] verwendet, um das mechanische Gleichgewicht und die Differentialgleichung der Mechanik herzuleiten. Die mathematische Rechtfertigung hierfür wurde von KLEIN und WIEGHARDT [93] geliefert, die zeigen konnten, dass bei Stabwerken, deren Stäbe sich nicht schneiden, die Existenz eines Gleichgewichtszustands an allen Knoten mit der Existenz einer Spannungsfunktion nach AIRY [1] gleichbedeutend ist.

Es wurde jedoch bereits durch CAUCHY [33] festgestellt, dass der Elastizitätstensor des Materials, das mithilfe eines Stabgittermodells nachgebildet werden kann, in jedem Fall vierfache Symmetrie besitzt. Diese vierfache Symmetrie wird nach dem Entdecker auch als CAUCHY-Bedingung bezeichnet. Sie bedeutet eine starke Einschränkung der Materialien, die mit Stabwerken modelliert werden können, und insbesondere, dass bei der Modellierung isotroper Kontinua mithilfe eines Stabwerks die Querkontraktionszahl immer einen Wert von $\nu = \frac{1}{4}$ im dreidimensionalen Fall und $\nu = \frac{1}{3}$ im ebenen Spannungszustand annimmt¹. VOIGT [168] zeigt in seiner Arbeit, dass eine andere Querkontraktionszahl zum Beispiel durch die Annahme der Momentenübertragung zwischen den Punkten des Netzes bei Verdrehung dieser erzeugt werden kann².

¹ Trotz dessen, dass diese Bedingungen schon seit über einem Jahrhundert bekannt sind, versuchen nach KOT, NAGAHASHI und SZYMCZAK [96] immer noch viele Forscher, unter Anwendung von Normalkraftfedern diskrete Modelle anderer Querkontraktionszahl zu erzeugen.

² Es soll jedoch bereits hier erwähnt werden, dass bei der Verwendung nicht-zentraler Kräfte, zum Beispiel durch Schub- oder Winkelfedern, nach LAKES [99] Materialien beliebiger – auch negativer – Querkontraktionszahlen modelliert werden können.

2.1. Theoretische Resultate der mikromechanischen diskreten Modellierung

Eine auf BORN zurückgehende Reihe von Veröffentlichungen [23–26, 28, 53, 54, 109] widmet sich der analytischen Untersuchung des Verhaltens eines Materials nahe des absoluten Temperaturnullpunkts, bei dem die einzelnen Atome, die als punktförmig angenommen werden, rein über Normalkräfte, die sich aus Zweipunktpotentialen ergeben, interagieren. Die Ergebnisse dieser Untersuchungen sind vielfältig: So leitet BORN [25] her, dass auch bei der Herleitung der Materialdaten über die freie Energie des Atomsystems für kleine Deformationen³ die CAUCHY-Bedingung erfüllt wird, und dass die Stabilität eines Atomgitters gleichbedeutend ist mit der positiven Definitheit der makroskopischen Deformationsenergie. Als Resultat dieser Überlegungen stellt er fest, dass das kubisch-flächenzentrierte Atomgitter immer stabil ist, während das kubisch-raumzentrierte Gitter energetisch bedingt stabil und das einfache kubische Atomgitter immer instabil ist. Dies wird auch durch die numerischen Auswertungen der Ergebnisse mithilfe des Potentials nach JONES [84, 85] durch MISRA und BORN [109] bestätigt. Für hexagonale Gitter stellt BORN [23] unter Erweiterung der Theorie um die Tensornotation fest, dass nur das dichtestgepackte hexagonale Gitter stabil ist, nicht aber das hexagonale BRAVAIS-Gitter. PENG und POWER [133] erweitern diese Stabilitätskriterien für rhomboedrische Kristalle, während POWER [138] zeigt, dass der Nachweis makroskopischer Stabilität eines Kristalls auch die mikroskopische Stabilität impliziert.

BORN und FÜRTH [24] nutzen das BORN'sche Stabilitätskriterium hingegen, um den Versagensvorgang eines Atomgitters zu untersuchen. Die Ergebnisse für die Bruchspannungen nach dieser Methodik sind zwar verglichen mit Versuchen viel zu hoch, aber genauer als die Spannungen, die Mittels anderer Verfahren – als Beispiel wird die Arbeit von POLANYI [136] genannt – berechnet werden können. Die Autoren gehen davon aus, dass dies der Tatsache geschuldet ist, dass die Modellierung nicht in der Lage ist, Imperfektionen zu berücksichtigen. Außerdem wird in der Modellierung von einer Temperatur nahe des absoluten Nullpunkts ausgegangen und somit die Ortsänderung der Atome aufgrund der BRAUN'schen Bewegung ignoriert. Aufgrund dessen untersuchen FÜRTH und BORN [53, 54] den Einfluss der Temperatur auf das Elastizitäts- und Bruchmodell. Sie stellen dabei fest, dass die Änderung der Elastizitätsmoduli durch die Temperaturänderung im Modell gut mit Versuchen übereinstimmt, aber dennoch bei den

³ BORN berücksichtigt in dieser Arbeit nur lineare und quadratische Energieterme. Terme höherer Ordnung werden in einer späteren Arbeit von BORN und MISRA [28] untersucht.

Bruchspannungen hohe Abweichungen von 700% zwischen Versuch und Theorie beobachtet werden können. Diese Arbeiten zeigen somit, dass für eine theoretische Beschreibung des Bruchvorgangs, die im Einklang mit Versuchsergebnissen steht, die Betrachtung regelmäßiger Gitterstrukturen nicht ausreichend ist.

2.2. Modellierung des makroskopischen Materialverhaltens mit diskreten Modellen

Diskrete Modelle wurden in der Form von Stabwerken 1941 erstmals von HRENNIKOFF [70] zur Berechnung der Verformung makroskopischer kontinuierlicher Systeme eingeführt. In seiner Veröffentlichung führt er dazu mehrere Federzellen ein, mit denen das Verhalten eines isotropen mechanischen Kontinuums nachgebildet werden kann. Bei diesen Federzellen handelt es sich um Anordnungen von Stabfedern, mit denen ein Gebiet durch periodische Anordnung dieser vollständig diskretisiert werden kann. Außerdem führt er Zellen aus BERNOULLI-Balken ein, mithilfe derer das Biegeverhalten von Platten durch ein reines Balkenmodell modelliert werden kann. Neben Stabfedermodellen und Balkenmodellen, auf die in den Abschnitten 2.2.1 beziehungsweise 2.2.2 im Detail eingegangen wird, existieren noch viele weitere diskrete Modellierungsverfahren zur Berechnung makroskopischer Strukturen⁴. Die wichtigsten Vertreter dieser Verfahren, auf die im Folgenden ebenfalls detailliert eingegangen wird, sind die Methode der Diskreten Elemente nach CUNDALL [41, 42] (Abschnitt 2.2.3) sowie Starrkörper-Feder-Modelle (Abschnitt 2.2.4). Nicht nur die Modelle, sondern auch die Anwendungsbereiche von diskreten Modellen sind vielfältig. Sie reichen von linear-elastischen Berechnungen über Rissberechnungen ein- und mehrphasiger Stoffe bis zur vereinfachten Berechnung dynamischer, biegesteifer Systeme ohne rotatorische Freiheitsgrade [8] und sogar zur Computergrafik [104], wo diese Modelle aufgrund des geringen Rechenaufwands geschätzt werden.

2.2.1. Federmodelle

Punktmassen-Federmodelle (engl. *Lattice Spring Models* – LSM) sind die einfachsten Vertreter der diskreten Modellierungsverfahren. Diese Modelle versuchen, die elastischen Eigenschaften des Kontinuums ausschließlich mit Federn oder biegesteifen Stäben

⁴ Auf Methoden zur Simulation des mikromechanischen Verhaltens, wie zum Beispiel der Molekulardynamik, wird in dieser Arbeit nicht weiter eingegangen.

zwischen Knoten zu modellieren⁵. Für dynamische Rechnungen werden zusätzlich die Masseneigenschaften des Kontinuums auf diese Knoten konzentriert. Diese Modelle gehen auf die wegweisende Arbeit von HRENNIKOFF [70] zurück. Dieser nutzt Stäbe zur Entwicklung von Federzellen, um die makroskopischen elastischen Eigenschaften des Materials abzubilden. Diese Zellen haben jedoch zwei signifikante Nachteile: Zum einen lassen sich mit ihnen nur periodische Netze erzeugen, auf deren Probleme in Abschnitt 2.3.1 eingegangen wird. Zum anderen sind die vorgestellten Zellen nur in der Lage, eine Querkontraktionszahl von $\nu = \frac{1}{3}$ zu modellieren⁶. Die Einschränkung auf periodische Gitter wird durch die Arbeit von SPIERIG [160] behoben. Diese stellt Dreieckszellen mit beliebiger Form vor, die in der Lage sind, ein homogenes, isotropes Material zu modellieren. Dies wird dadurch ermöglicht, dass neben den Stäben, die nur Normalkräfte übertragen können, zusätzlich Getriebesysteme zwischen drei Knoten eines Dreiecks eingeführt werden. Eine andere frühe Idee, beliebige Querkontraktionszahlen abbilden zu können, basiert auf der Idee von BORN und HUANG [27], die Netzknoten zusätzlich zu den Normalkraftfedern mit Schubfedern zu verbinden. Hierbei muss jedoch darauf geachtet werden, dass diese Schubfedern, wie in Anhang A.1.1 gezeigt wird, im Allgemeinen das Momentengleichgewicht nicht erfüllen⁷ und Systeme, die solche Federn enthalten, nicht invariant gegenüber Rotation sind. KEATING [89] behebt diesen Nachteil dadurch, dass nicht mehr einzelne Schubfedern in das System eingebracht werden, sondern Winkelfedern, die bei einer Winkeländerung zwischen zwei Normalkraftfedern ein Gegenmoment erzeugen. Solche Federn wurden zuvor schon von KIRKWOOD [91] verwendet, um die Schwingungen langkettiger Moleküle zu berechnen. Ein so erzeugtes System aus Knoten und Federn ist invariant gegenüber Rotation und zudem in der Lage, das Kräfte- und Momentengleichgewicht an jedem Knoten zu erfüllen.

Durch die Entwicklung der Methode der Finiten Elemente ging das Interesse der Ingenieure an der Stabgittermethode zur Berechnung kontinuierlicher Systeme in den 1950er und 1960er Jahren stark zurück. Zeitgleich wurden Stabgittermodelle jedoch vermehrt zur Berechnung von Rissen genutzt, da die Kraftinteraktion in diesen Modellen Ähnlichkeiten zur Kraftinteraktion zwischen Atomen besitzt. So konnten THOMSON, HSIEH und RANA [164] zeigen, dass mithilfe von Stabgittermodellen eine Rissfortschrittsrechnung auf

⁵ Auch das umgekehrte Vorgehen, die Bestimmung der Verformung von Gitterstrukturen mit Kontinuumsmethoden, ist möglich [119, 129].

⁶ HRENNIKOFF stellt in der Arbeit zwar auch Zellen vor, die eine Querkontraktionszahl von $\nu \neq \frac{1}{3}$ modellieren sollen. Diese Zellen sind jedoch nur unter Zugbelastung bei einer nichtlinearen Betrachtung stabil und verhalten sich im Inneren der Zelle nicht homogen. Sie sind damit zum Beispiel für Rissimulationen ungeeignet.

⁷ Das Momentengleichgewicht an einer Schubfeder wird nur dann erfüllt, wenn die Feder die Länge $l = 0$ hat.

atomarer Ebene durchführbar ist. Dabei kann das Risswachstum im Gegensatz zur Kontinuumstheorie nach GRIFFITH [59] nicht nur stabil oder instabil verlaufen, sondern in der Nähe der kritischen Bruchspannung einen weiteren Zustand einnehmen. In diesem Zustand ist der Riss nach der GRIFFITH'schen Theorie zwar bereits instabil, kann sich aber aufgrund der diskreten Struktur des Atomgitters nicht weiter ausbreiten und ist somit durch das Atomgitter gefangen. Dieser Zustand wird auch als „*lattice-trapped*“ bezeichnet. Auch zur numerischen Simulation der dynamischen Rissausbreitung erfreuen sich Stabgittermodelle hoher Beliebtheit. SANDERS [149] nutzt beispielsweise ein Federmodell, das aus Normal- und Schubfedern aufgebaut ist, um die Ausbreitung von Wellen in Kristallen zu untersuchen. Eine Feststellung aus diesem Modell ist, dass sich bei diskreten Modellen durch lokale Moden, die in Kontinuumsmodellen nicht existieren, Spannungswellen auch überschallschnell ausbreiten können. WEINER und PEAR [172] konnten zeigen, dass die Rissausbreitungsgeschwindigkeit in einem solchen Modell gegen einen spannungsabhängigen Wert konvergiert, der, außer bei sehr hohen Spannungen, im Unterschallbereich des Materials liegt. Werden in dem Modell zusätzlich plastische Versetzungen im Material zugelassen, so kann beobachtet werden, dass der Riss nicht wächst, sondern durch die plastische Verformung abstumpft. ASHURST und HOOVER [7] hingegen untersuchen die dynamischen Eigenschaften von Stabgittermodellen, die nur Normalkraftfedern enthalten. Sie kommen dabei zu dem Schluss, dass auch ein Modell, das nur aus linear-elastischen Normalkraftfedern mit sprödem Bruchgesetz besteht, ausreichend komplex ist, um die vielfältigen Phänomene der Schädigung, der Rissbildung und der Wellenausbreitung zu beschreiben, während es zugleich einfach genug ist, die auftretenden Phänomene analytisch zu beschreiben. Zudem zeigen sie, dass das Federmodell bei der Verwendung gleichseitiger Dreiecke als Gitterzellen im linear-elastischen Fall äquivalent zur Berechnung mit der Methode der Finiten Elemente ist, wenn bei dieser lineare Dreieckselemente verwendet werden.

Der erste signifikante Beitrag zur Untersuchung von Stabgittermodellen mit aperiodischen Netzen findet sich bei OSTOJA-STARZEWSKI und WANG [124, 125]. Diese untersuchen die makroskopischen Eigenschaften eines Stabgitters, das durch DELAUNAY-Triangulation einer aperiodischen Punktwolke erzeugt wurde. Sie zeigen dabei, dass bei Netzverfeinerung die makroskopischen Elastizitäten gegen einen Wert konvergieren, der von der Methodik abhängt, mit der die Punkte in der Ebene verteilt werden. Außerdem untersuchen sie den Einfluss der geometrischen und physikalischen Unordnung⁸ auf die makroskopische Steifigkeit des Systems. Dabei zeigt sich, dass die geometrische Unordnung des Netzes

⁸ Die geometrische Unordnung beschreibt die Unregelmäßigkeit in der Position der Netzknoten, während die physikalische Unordnung die Streuung der Stab- und Federparameter beschreibt.

die Steifigkeit des Systems reduziert, während die physikalische Unordnung zu einer Versteifung des Modells führt. Aufbauend darauf untersuchen OSTOJA-STARZEWSKI, ALZEBDEH und JASIUK [122] Stabgittermodellierungen von Kompositmaterialien sowie den Einfluss, den das Verfahren für die Berechnung der Federsteifigkeiten auf die Querkontraktionszahl des Modells besitzt. Das Ergebnis dieser Untersuchung ist, dass bei der Wahl eines Gesetzes für die Steifigkeit k der Federn in Abhängigkeit von der Federlänge l und eines Parameters p , das der Beziehung $k \sim l^p$ folgt, die Querkontraktion eine Funktion des Parameters p ist. Dieses Ergebnis ist überraschend, da es auf den ersten Blick den Ergebnissen der Herleitungen von NAVIER [118], POISSON [135], CAUCHY [33] und VOIGT [168] widerspricht, nach der die Querkontraktionszahl in reinen Normalkraftsystemen konstant sein sollte. Die Ursache für dieses Verhalten wird in dieser Veröffentlichung jedoch nicht weiter diskutiert. Eine Erklärung für diese Differenzen ist die lokale Inhomogenität der Verformung aufgrund dessen, dass kein homogenes, isotropes Material modelliert wird. Somit ist die Bedingung der lokalen Isotropie, die für die Herleitung der CAUCHY-Bedingungen angenommen wurde, nicht mehr erfüllt und die globale Querkontraktion kann einen anderen Wert annehmen.

Ein letztes großes Hindernis bei der Nutzung von Federmodellen, der komplexe Formalismus zur Berechnung der Federsteifigkeiten, die für ein homogenes, isotropes, elastisches Material benötigt werden, wurde durch die Arbeit von MONETTE und ANDERSON [113] überwunden. Diese nutzen erstmals eine dehnungsenergiebasierte Herleitung für die Federsteifigkeiten und ersetzen damit die übliche Berechnung dieser über Kräftegleichgewichte und die Kompatibilität der Verformungen an den Knoten. Die energiebasierte Methodik hat dabei den Vorteil, dass das Vorgehen unabhängig von der Topologie der Zelle ist, für die die Federsteifigkeiten bestimmt werden sollen. Damit ist dieses Verfahren sehr gut automatisierbar und garantiert gleichzeitig die Invarianz der Federsteifigkeiten gegenüber einer Rotation der Federzelle, da sie auf der skalaren Größe der Dehnungsenergie basiert. Diese Methodik, die auch im Folgenden verwendet wird, wird in Abschnitt 3.1 detailliert vorgestellt. Neben der Einführung dieser neuen Berechnungsweise für die Steifigkeiten enthält diese Arbeit von MONETTE und ANDERSON eine gute Zusammenfassung der Netzabhängigkeit der Federbelastung bei periodischen Netzen. Diese zeigt dabei unter anderem für periodische Dreiecksnetze, dass bei einer homogenen einachsigen Belastung des Modells die Federn, die in Belastungsrichtung ausgerichtet sind, um 50% höher belastet sind als Federn, die gegenüber der Belastungsrichtung um 60° verdreht liegen. Die energiebasierte Methodik wurde unabhängig davon bei GRIFFITHS und MUSTOE [60] eingeführt, um die Federsteifigkeiten für ein Federsystem, bei dem die Normal- und

Schubfedern in regelmäßigen Dreiecken angeordnet sind, zu bestimmen. Eine gute Zusammenfassung dieses Verfahrens mit Beispielen für die Herleitung der Federsteifigkeiten für Stabgittermodelle mit Normalfedern, Normal- und Winkelfedern, sowie für Balkensysteme zur Modellierung mikropolarer COSSERAT-Kontinua⁹ findet sich bei OSTOJA-STARZEWSKI, SHENG und ALZEBDEH [123] und OSTOJA-STARZEWSKI [127]. Zusätzlich werden in letzterer Veröffentlichung auch Stabgitter betrachtet, bei denen Federn nicht nur zwischen Nachbarknoten existieren, sondern auch zwischen Knoten, die zwei Gitterlagen voneinander entfernt liegen. Durch ein solches Modell kann ein nichtlokales Kontinuum nach ERINGEN [49, 50] modelliert werden¹⁰. Diese Arbeit wurde im weiteren von OSTOJA-STARZEWSKI und WANG [126] unter der Bezeichnung *Particle Model* sowie von WANG ET AL. [170] unter dem Namen *Hybrid Lattice Particle Model* um die Masseneigenschaften des Materials erweitert, um die Dynamik einer Rissbildung zu simulieren. Diese Modelle erzeugen für den Grenzfall, dass die Partikel Atome am absoluten Temperaturnullpunkt darstellen, dieselben Ergebnisse wie eine Simulation der Molekulardynamik.

In der jüngeren Vergangenheit wurden neben linear-elastischem Material mit Sprödbruchgesetzen zunehmend auch komplexere Materialmodellierungen für die Stabgittermodelle verwendet. PAZDNIAKOU und ADLER [130] beispielsweise verwenden ein dreidimensionales Stabgitter zur Simulation poröser Festkörper. Sie stellen dabei fest, dass für diese Klasse von Materialien ein Stabgitter die Wellenausbreitung nur dann adäquat abbilden kann, wenn die Wellenlänge der Anregung um ein Vielfaches größer ist als die Zelllänge des Stabgitters. BUXTON, CARE und CLEAVER [31] führen dagegen bei dreidimensionalen Stabgittermodellen eine Plastizitätsformulierung ein, indem sie an jedem Knoten des Stabwerks eine Kontinuumsspannung berechnen und die Federsteifigkeiten über die Annahmen der Kontinuumsplastizitätstheorie aufgrund dieser Spannungen reduzieren. Es wird jedoch festgehalten, dass bei diesem Verfahren die Volumenerhaltung des Kontinuums bei plastischer Verformung nur dadurch gewährleistet werden kann, dass künstliche, volumenerhaltende Kräfte an den Knoten aufgebracht werden. O'BRIEN [120] verwendet Stabwerke, bei denen als Verbindungselemente zwischen den Knoten viskoelastische MAXWELL-KELVIN-VOIGT- und ZENER-Elemente verwendet werden, um die Ausbreitung seismischer Wellen im Zwei- und Dreidimensionalen zu untersuchen. Ebenfalls mit der Ausbreitung von Wellen und Rissen, die durch diese entstehen, beschäftigt sich die Arbeit von ZHAO [179], KAZERANI, ZHAO und ZHAO [88] sowie ZHAO, FANG und ZHAO [181]. Sie verwenden dazu dreidimensionale Stabgittermodelle unter dem Namen *Distinct Lat-*

⁹ Benannt nach der Arbeit der COSSERAT-Brüder [40].

¹⁰ Ein Federmodell mit Interaktionen von Knoten, die mehr als zwei Gitterlagen voneinander entfernt sind, ist beispielsweise bei TARASOV [163] zu finden.

tice Spring Method, bei dem die Modellknoten mit Normalkraft- und Schubfedern mit linear-elastischem sowie mit dehnratenabhängigem Material verbunden sind. ZHAO und ZHAO [182] erweitern diese Modelle zu einem Mehrfeldmodell, indem sie zusätzlich zu den Verschiebungsfreiheitsgraden des Modells Dehnungsfreiheitsgrade an den Knoten einführen. Durch dieses zusätzliche Feld kann die überhöhte Steifigkeit des Modells bei nichtkonstanten Dehnungsfeldern reduziert werden. Um das Problem der mangelnden Invarianz der Schubfedern gegenüber Rotation in diesem Modell zu beheben, wird dieses zudem von ZHAO [180] um eine vierte räumliche Dimension erweitert. Durch diese ist er in der Lage, ein Modell zu generieren, das nur aus Normalkraftfedern besteht und dennoch eine freie Wahl der Querkontraktionszahl des Materials erlaubt.

Auch für das Schädigungsverhalten von Materialien wurden verschiedene Gesetzmäßigkeiten für die Federn entwickelt. Neben Ansätzen für die Rissbildung, auf die im Detail in Abschnitt 5.2.1 eingegangen wird, ist hier insbesondere auf zwei Arbeiten von KRAJČINOVIC und RINALDI [98] sowie RINALDI ET AL. [145] hinzuweisen. Diese verwenden eine kontinuierliche Schädigungsfunktion, bei der die maximalen Dehnungen, die eine Feder erfahren hat, zu einer Abminderung der Steifigkeit dieser führt, um neben dem Rissverhalten auch Plastizität mit Verfestigung und Entfestigung zu modellieren. Dieses Vorgehen ist jedoch nur bei einem monotonen Verlauf der Last möglich.

Auch andere physikalische Felder können in die Stabgittermodellierung einbezogen werden. Als Beispiel hierfür sei die Herleitung für das thermische Feld bei HAHN ET AL. [66] und das thermomechanische Feld bei HAHN [64] genannt. BUXTON ET AL. [32] dagegen nutzen Stabgittermodelle für eine gekoppelte Struktur-Fluid-Simulation. Hierzu koppeln sie das Stabgitter mit einer diskreten Fluid-Modellierung, der sogenannten BOLTZMANN-Gitter-Methode (engl. *Lattice Boltzmann Method*). GALE und LEWIS [55] wiederum nutzen Federmodelle für die Formfindung von ebenen Stoffzuschnitten mit dem Ziel, nach dem Zusammensetzen eine vorgegebene, dreidimensionale Form zu erhalten. Sie bilden dazu ein Membranmodell aus Normalkraft- und Winkelfedern, das zusätzlich die Vorzugsrichtungen der Stoffe abbilden kann.

Trotz der unterschiedlichen Anwendungen und Herleitungsmethoden leiden diese Punkt-Feder-Modelle alle unter einem gemeinsamen Defekt: Sie sind nur bei periodischen Gittern in der Lage, ein homogenes Materialverhalten abzubilden, was zu den in Abschnitt 2.3.1 angesprochenen Problemen der netzinduzierten Anisotropie und der Modellierung der Ränder führt. Zur Lösung dieser Probleme wurden bereits mehrere unterschiedliche Ansätze vorgestellt: GRASSL, BAŽANT und CUSATIS [57] sowie GRASSL und BAŽANT [56] verwenden zum Beispiel unregelmäßige Dreieckszellen, in deren Kanten Stäbe liegen.

Die Stabquerschnitte werden dabei dadurch bestimmt, dass das Material im Inneren der Zelle gleichmäßig auf die Stäbe verteilt wird. Hierdurch wird die Anisotropie des modellierten Materials gegenüber anderen Modellen zwar leicht reduziert, jedoch nicht vollständig entfernt. RINALDI ET AL. [146] bestimmen die Stabfläche dagegen, indem sie die Steifigkeit eines finiten Elements betrachten, das zwischen einem Knoten und der Kante des VORONOI-Polygons orthogonal zu der Verbindung zum Nachbarknoten liegt. GUSEV [63] verfolgt einen ähnlichen Ansatz. Er geht davon aus, dass die Steifigkeitsmatrizen einer Federzelle und eines finiten Elements gleich sein müssen, um sich bei gleicher Last gleich zu verformen. Somit können die Federsteifigkeiten dadurch bestimmt werden, dass die Linearkombination ihrer Steifigkeitsmatrizen der Steifigkeitsmatrix des finiten Elements entspricht. Das Resultat seiner Berechnung ist ein System aus Normalkraft- und Schubfedern, die zwar das Material für konstante Dehnungsfelder exakt abbilden, aber lediglich im linearen Fall das Momentengleichgewicht erfüllen. BEEB ET AL. [16] dagegen bestimmen die Eigenschaften von Federn in unregelmäßigen Dreiecksgittern, indem sie davon ausgehen, dass die Federn eine Interpolation eines ihnen zugrunde liegenden, regelmäßigen (Atom-)Gitters darstellen. Die Arbeit von SORG und BISCHOFF [159] verfolgt eine ähnliche Idee. Sie geht davon aus, dass mit Stabgittern nur regelmäßige Dreiecksnetze ein homogenes Materialverhalten abbilden können. Um dennoch nicht zur genauen Erfassung der Modellränder das gesamte Rechengebiet mit einem sehr feinen Dreiecksnetz modellieren zu müssen, koppeln sie das Stabgitter mit der Methode der Finiten Elemente. Mit diesen können die Ränder des Modells abgebildet und die Netzfeinheit variiert werden. Jedoch können auch diese Methoden das Problem der Modellierung eines homogenen Materials bei aperiodischen Netzen nicht vollständig lösen.

2.2.2. Balkenmodelle

Wie in Abschnitt 2.2.1 angesprochen, ist ein grundlegendes Problem von Federmodellen, dass diese nur dann bei homogenen Materialien andere Querkontraktionszahlen als $\nu = \frac{1}{3}$ und $\nu = \frac{1}{4}$ im zwei- beziehungsweise dreidimensionalen Fall modellieren können, wenn sie neben Normalkraftfedern zusätzliche Kraftübertragungselemente enthalten. Neben der Verwendung von Schub- und Winkelfedern, die bereits in ebendiesem Abschnitt erwähnt wurden, ist die Verwendung von momentenübertragenden Elementen wie Stabbalken zur Verbindung der Knotenpunkte eine weitere Möglichkeit. Diese Modelle erfreuen sich trotz der Tatsache, dass sie nicht gegen ein klassisches Kontinuum, sondern gegen ein mikropolares COSSERAT-Kontinuum konvergieren, hoher Beliebtheit.

Während in früheren Arbeiten, zum Beispiel bei HRENNIKOFF [70] und TURNER ET AL. [166]¹¹, das Ziel dieser Balkenmodelle war, Kontinuumsplatten vereinfacht zu berechnen, werden in neuerer Zeit Balkenmodelle meist zur Modellierung des Bruchverhaltens zwei- und dreidimensionaler Kontinua verwendet. So verwenden HERRMANN, HANSEN und ROUX [68] zu diesem Zweck ein zweidimensionales Gitter aus Balken, die in quadratischen Zellen angeordnet sind. Im Gegensatz zu reinen Federmodellen wurden jedoch schon früh Zellen entwickelt, die auch bei aperiodischen Netzen ein homogenes Materialverhalten zeigen. Hierzu stellen SCHLANGEN und GARBOCZI [152] für das gesamte Netz eines zweidimensionalen Modells ein globales Gleichungssystem für die Balkenquerschnitte und -flächenträgheitsmomente auf, indem sie fordern, dass das Modell einen konstanten Dehnungszustand exakt abbildet. Die Notwendigkeit der globalen Berechnung dieser Größen ergibt sich daraus, dass die Modifikation der Position eines einzelnen Knotens dazu führt, dass weit entfernte Balkengeometrien modifiziert werden müssen, um den konstanten Dehnungszustand noch zu reproduzieren. Sie verwenden sowohl periodische als auch aperiodische Gitter in einer nachfolgenden Publikation [153], um den Einfluss des periodischen Rechengitters auf die Rissbildung im zweidimensionalen Fall zu zeigen. Wie schon bei Federmodellen führt die Verwendung eines periodischen Rechengitters zu einer netzinduzierten Anisotropie des Risswachstums.

Der allgemeine Einfluss der geometrischen Irregularität des Netzes auf die elastischen Eigenschaften des Balkengitters wird von ZHU, HOBDELL und WINDLE [183] untersucht. Sie stellen dabei anhand von Zellen hexagonaler Form fest, dass bei diesen die geometrische Irregularität bei konstanter Balkengeometrie zwar die Steifigkeit des Modells erhöht, jedoch keinen Einfluss auf die Querkontraktionszahl hat. MOUSANEZHAD ET AL. [114] sowie MITSCHKE ET AL. [110] bestätigen dieses Ergebnis durch ihre Untersuchungen der Querkontraktionszahl zweidimensionaler Balkenmodelle, bei denen sie feststellen, dass die Querkontraktionszahl der Balkenmodelle in erster Linie von der Topologie und Geometrie der regelmäßigen Zellen des Balkengitters abhängt.

Dreidimensionale Balkenmodelle werden sowohl für die Simulation räumlicher Kontinua, als auch für die Modellierung von Schalensystemen verwendet. So nutzen LILLIU und VAN MIER [103] sowie von KOZICKI [97] dreidimensionale Balkenmodelle zur Modellierung des Spröbruchverhaltens von Beton und Stahlbeton. Die Stahlverstärkungen können dabei durch Balken höherer Steifigkeit und Festigkeit in das System eingebracht werden. DUBUS, SEKIMOTO und FOURNIER [47], WITTEL ET AL. [174] sowie WITTEL [175]

¹¹ In dieser Arbeit wird von Versuchen berichtet, ein finites Plattenelement mit der Methode nach HRENNIKOFF herzuleiten. Aufgrund von Schwierigkeiten bei der Erfüllung der Randbedingungen von Platten, die keine rechteckige Form besitzen, wurden diese Versuche jedoch aufgegeben.

dagegen untersuchen das Verhalten von Schalen, die mit Gittern aus Balken modelliert werden. Letzterer untersucht dabei die dynamische Rissausbreitung in Scheiben und Schalen mit Balkenmodellen sowie den Einfluss der geometrischen und physikalischen Irregularität auf das Modell. Dabei wird festgestellt, dass die geometrische Irregularität in erster Linie die Steifigkeit des Modells verringert, während die Zunahme der physikalischen Irregularität bei einer Bruchsimulation in erster Linie die ertragbare Last des Modells reduziert.

Ein weiteres Einsatzgebiet der Balkenmodelle ist die Modellierung diskontinuierlicher zellulärer Medien. Beispiele hierfür finden sich bei WITTEL, DILL-LANGER und KRÖPLIN [176], die diese Modelle zur Modellierung des Versagensverhaltens von Holz nutzen, sowie bei SANDS [150], der ein Balkenmodell irregulärer Geometrie verwendet, um die Rissausbreitung in Keramiken zu bestimmen.

2.2.3. Die Diskrete-Elemente-Methode nach CUNDALL

Die Diskrete-Elemente-Methode (DEM) verfolgt einen anderen Ansatz als die bisher vorgestellten Gittermodelle¹². Die Eigenschaften des Materials werden hier nach einer Idee von CUNDALL [41] sowie CUNDALL und STRACK [42] nicht in Knoten und kraftübertragenden Elementen kondensiert. Stattdessen wird das Material in Starrkörper aufgeteilt, die bei Kontakt über Kontaktfedern Kräfte aufeinander übertragen können. Da beim Lösen des Kontakts keinerlei Kräfte mehr übertragen werden, eignen sich solche Modelle natürlicherweise zur Simulation von Granulaten und anderem Schüttgut. Solange Kontakt zwischen den einzelnen Elementen vorliegt, können diese Modelle jedoch durch eine geeignete Anpassung der Kontaktsteifigkeiten so eingestellt werden, dass die resultierende Verformung der eines beliebigen Feder- oder Balkenmodells entspricht. Auch die Modellierung elektrischer und thermischer Felder ist mit diskreten Elementen möglich, wie die Veröffentlichung von HUBERT ET AL. [73] zeigt. Die wichtigsten Erweiterungen dieser Methode seit der ursprünglichen Entwicklung sind die Schubkraftübertragung und Abrollwiderstände der Partikel (IWASHITA und ODA [81]) sowie die Einordnung in den Kontext der Theorie der zellulären Automatentheorie (PSAKHIE ET AL. [140]). Einen guten, ausführlichen Überblick über die Methode der Diskreten Elemente ist zum Beispiel bei LUDING [106] zu finden.

¹² Der Begriff der Diskrete-Elemente-Methode wird in der Literatur manchmal auch zur Bezeichnung von Stabgittermodellen verwendet. In dieser Arbeit werden hiermit jedoch nur Modelle bezeichnet, in denen nach CUNDALL die Interaktion von Starrkörpern über Kontakt modelliert wird.

2.2.4. Starrkörper-Feder-Modelle

Die Grundidee der Starrkörper-Feder-Modelle (engl. *Rigid-Body-Spring Models*) geht im wesentlichen auf KAWAI [87] zurück. KAWAI wählt dabei einen Ansatz, bei dem Starrkörper über Federn miteinander verbunden werden, um sowohl ebene Scheibenprobleme als auch Balken- und Plattenprobleme zu berechnen. Der wesentliche Unterschied dieser Methode zur Methode der Diskreten Elemente ist, dass die Federn auch dann Kräfte übertragen können, wenn kein Kontakt zwischen den Starrkörpern vorliegt. In einem analogen Vorgehen erweitern ZUBELEWICZ und BAŽANT [184] die Diskrete-Elemente-Methode um eine zulässige Zugbelastung der Federn und sind damit in der Lage, das Bruchverhalten von Beton unter Zugbelastung zu simulieren. Auch zu Balkennetzwerken bestehen bei dieser Methode Ähnlichkeiten. So zeigen CHANG ET AL. [35] auf, dass bei der Verwendung von Normalkraft-, Querkraft- und Drehfedern in den Kontaktflächen diese beiden Modellklassen gleichwertig sind.

Wie andere diskrete Modelle leidet auch das Starrkörper-Feder-Modell unter Defekten. Es zeigt bei periodischen Gittern ebenfalls richtungsabhängige Versagenseigenschaften (JIRÁSEK und BAŽANT [83]) und ist in der Wahl der Materialparameter eingeschränkt. Nach BOLANDER und SAITO [21] können diese Modelle nur dann ein homogenes, isotropes Materialverhalten abbilden, wenn sie zusätzlich zu den Normalkraftfedern an den Kontaktflächen der Starrkörper Schubfedern enthalten, die die gleiche Steifigkeit besitzen wie die Normalkraftfedern. In einem solchen Modell stellt sich jedoch aufgrund der isotropen Steifigkeit zwischen den Kontaktflächen immer eine Querkontraktionszahl von $\nu = 0$ ein. Werden die Starrkörper bei diesen Modellen als VORONOI-Polygone einer Punktwolke aufgefasst, so können andere Querkontraktionszahlen zum Beispiel dadurch im Modell verwendet werden, dass nach BOLANDER ET AL. [20] zusätzlich dreieckige Finite Elemente in die duale DELAUNAY-Triangulation eingefügt werden. Andere Möglichkeiten, eine andere Querkontraktionszahl bei gleichzeitiger Homogenität des Materialverhaltens zu erreichen, sind die Skalierung der Federsteifigkeiten über die geometrischen Eigenschaften der VORONOI-Polygone nach CHRIST [38], sowie das Einführen volumenerhaltende Hilfskräfte oder -spannungen nach ASAHINA ET AL. [5, 6].

2.2.5. Zusammenfassung

Im Obigen wurde anhand der Literatur gezeigt, dass bislang noch kein diskretes Modell existiert, das den Anforderungen der Ingenieure genügt. So existiert zwar in den Starrkörper-Feder-Modellen ein diskretes Modell, bei dem für isotrope Werkstoffe die

Querkontraktion frei eingestellt werden kann, jedoch geschieht dies auf Kosten der diskreten Natur der kraftübertragenden Elemente: Es müssen hierzu finite Elemente in das Modell integriert werden. Zwar ist auch mit Balkenmodellen die makroskopische Modellierung eines beliebigen isotropen Materials möglich. Da jedoch gezeigt werden kann, dass diese Modelle bei Netzverfeinerung nicht gegen ein klassisches, sondern gegen ein COSSERAT-Kontinuum konvergieren, können auch diese Modelle bei der Modellierung klassischer Kontinua nicht beliebig verfeinert werden. Reine Federmodelle dagegen sind bislang nicht in der Lage, homogene Kontinua für beliebige Netze abzubilden.

Es besteht folglich ein Bedarf nach einem diskreten Modell, das keinen dieser Nachteile besitzt: Es sollte in der Lage sein, beliebige linear-elastische, homogene Kontinua bei beliebig unregelmäßigen Netzen zu modellieren und bei Netzverfeinerung gegen die klassische Kontinuumslösung konvergieren.

2.3. Netzgenerierung bei diskreten Modellen

Wie in der obigen Einführung der diskreten Modelle gezeigt wurde, sind die diskreten Modelle aus der Literatur nicht in der Lage, für allgemeine Rechengitter ein homogenes Materialverhalten abzubilden. Somit spielt bei diesen Modellen die Erzeugung ebendieser Netze eine wesentliche Rolle für die Ergebnisse der Simulation. Dem Modellierer stehen dabei prinzipiell zwei unterschiedliche Möglichkeiten der Netzgenerierung zur Verfügung.

2.3.1. Periodische Netze bei diskreten Modellen

Eine Möglichkeit der Netzerzeugung ist die Generierung periodischer Gitter aus Dreiecken, Vierecken oder Hexaedern. Für diese sind viele der vorgestellten diskreten Verfahren in der Lage, ein homogenes Materialverhalten abzubilden. Die Nachteile dieser Methode sind jedoch erheblich: Es können weder Ränder stetig approximiert werden, die nicht in Richtung der Periodizität des Netzes verlaufen, noch sind die Ergebnisse von Bruchsimulationen bei regelmäßigen Netzen invariant gegenüber der Netzausrichtung, wie von BEALE und SROLOVITZ [15] und MONETTE und ANDERSON [113] gezeigt wird. Dieses Verhalten, das auch als netzinduzierte Anisotropie bezeichnet wird, hat zur Folge, dass, wie in Abbildung 2.1 zu sehen ist, für die Richtung des Risswachstums eine der Richtungen der Periodizität des Netzes stark bevorzugt wird.

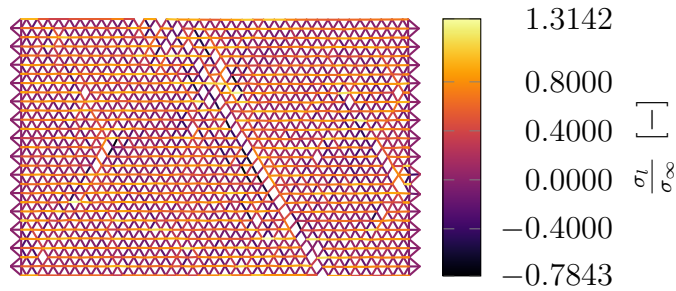
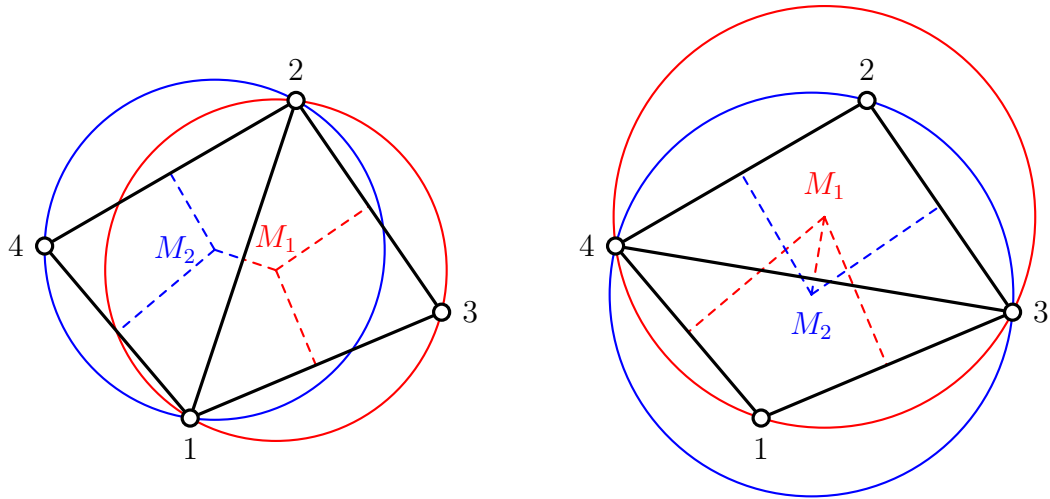


Abbildung 2.1.: Bildung eines Risses in einem periodischen Stabgittermodell, das in horizontaler Richtung mit einer Spannung σ_∞ belastet ist. Wie zu sehen ist, brechen hierbei die Stäbe entlang der Netzausrichtung. Der Grund hierfür ist, dass die Belastung der Stäbe σ_l direkt von ihrer Ausrichtung bezüglich der äußeren Last σ_∞ abhängt.

2.3.2. Unregelmäßige Netze aus der DELAUNAY-Triangulation und ihren dualen VORONOI-Polygonen

Die Nachteile der regelmäßigen Gitter können durch die Verwendung unstrukturierter Gitter behoben werden. Mittels unstrukturierter Netze kann sowohl der Rand beliebig fein aufgelöst werden, als auch die Existenz einer global einheitlichen Ausrichtung des Netzes, der bei einer Rissimulation das Risswachstum folgt, vermieden werden. Dies geschieht jedoch bei den meisten Modellen auf Kosten der Möglichkeit, ein homogenes Materialverhalten abbilden zu können. Unstrukturierte Gitter werden bei diskreten Feder- und Balkenmodellen üblicherweise über die DELAUNAY-Triangulation einer Punktwolke erzeugt, während für Diskrete-Elemente-Modelle und Starrkörper-Feder-Modelle in der Regel die VORONOI-Polygone eines Satzes von Knoten als Gitter verwendet werden.

Die DELAUNAY-Triangulation eines Satzes von Knoten ist eine Menge von Dreiecken, die so beschaffen sind, dass innerhalb der Umkreise dieser Dreiecke keiner der Knoten liegt (siehe auch Abbildung 2.2). Sie ist somit eindeutig, solange nicht vier Knoten existieren, die auf einem gemeinsamen Umkreis liegen, in dessen Inneren kein weiterer Knoten liegt. Ein Beispiel für eine solche Triangulation eines rechteckigen Gebiets ist in Abbildung 2.3 zu sehen. Zu jeder DELAUNAY-Triangulation existiert ein dualer Satz von VORONOI-Polygonen, die in derselben Abbildung gestrichelt dargestellt sind. Die Kanten dieser Polygone verlaufen zwischen den Umkreismittelpunkten benachbarter Dreiecke und damit orthogonal zur Kante, an der sich diese Dreiecke berühren. Die VORONOI-Polygone umschließen damit jeweils alle Punkte, die näher an den Knoten der DELAUNAY-Triangulation in ihrem Inneren liegen, als an anderen Knoten der Triangulation, und lassen sich damit als Einflussbereiche dieser interpretieren. Aufgrund dieser



(a) DELAUNAY-Triangulation der Punkte (b) Triangulation mit vertauschter Diagonalen

Abbildung 2.2.: Zwei unterschiedliche Möglichkeiten, Triangulationen für einen Satz von vier Knoten zu bestimmen, mit den Kanten der dualen VORONOI-Polygone (gestrichelt) sowie den Umkreismittelpunkten M_1 und M_2 der beiden Dreiecke. Bei der DELAUNAY-Triangulation (a) liegen keine Knoten innerhalb der Umkreise der Dreiecke, und die Summe der Längen der kollinearen Kantenabschnitte der VORONOI-Polygone ist positiv.

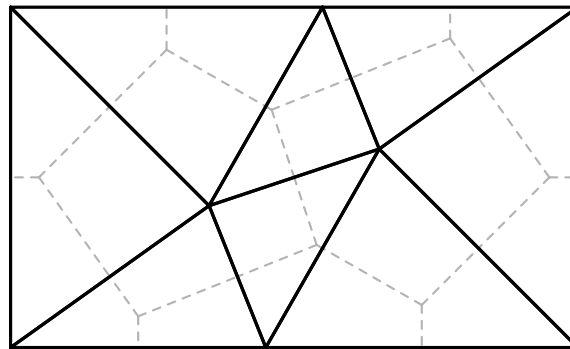


Abbildung 2.3.: DELAUNAY-Triangulation eines rechteckigen Gebiets. Die VORONOI-Polygone, die gestrichelt dargestellt sind, sind im Allgemeinen Vielecke, die einen einzigen Knoten enthalten. Die Ecken dieser Polygone sind gerade die Umkreismittelpunkte der dualen DELAUNAY-Triangulation.

Eigenschaft, für jeden Punkt im Raum einen Bezugsknoten zu definieren, werden die VORONOI-Polygone bei Starrkörper-Feder-Modellen regelmäßig verwendet, um die Form der Starrkörper zu definieren, während ihre Kanten bei Federmodellen genutzt werden, um bei Risssimulationen den Verlauf von Rissen darzustellen [128].

Für die numerische Simulation bietet die Verwendung einer DELAUNAY-Triangulation als Netz signifikante Vorteile, die auf der Eigenschaft der Triangulation basieren, den minimalen Innenwinkel $\varphi_{\min.}$ der Dreiecke zu maximieren [101]. Nach MILLER ET AL. [108] ist dieser wiederum direkt korreliert mit dem Fehler, der bei einer numerischen Approximation der POISSON'schen Gleichung mit Dreieckselementen auftritt. BABUŠKA und AZIZ [11] zeigen dagegen, dass bei der Finite-Elemente-Simulation der maximale Innenwinkel $\varphi_{\max.}$ eines Dreieckselements ausschlaggebend für den Fehler der Simulation ist. Dieser jedoch ist immer kleiner als $\varphi_{\max.} \leq \pi - 2\varphi_{\min.}$, womit ein großer minimaler Innenwinkel direkt einen kleinen maximalen Innenwinkel bedingt.

Zudem existieren für die DELAUNAY-Triangulation einer ebenen Geometrie Verfahren, die in der Lage sind, einen minimalen Innenwinkel aller Dreiecke der Triangulation, und somit eine obere Grenze für den Fehler der Simulation zu garantieren. Erste Triangulationsverfahren dieser Art sind die Algorithmen nach RUPPERT [148] und nach CHEW [37]¹³. Für letzteren Algorithmus wurde dabei nachgewiesen, dass der Algorithmus für alle Geometrien, die keine Winkel enthalten, die kleiner als 60° sind, Netze generieren kann, deren minimaler Innenwinkel größer ist als 26.56° , während zugleich die Anzahl der generierten Dreiecke bis auf einen konstanten Faktor, der unabhängig von der Geometrie ist, minimal ist [158]. Außerdem existieren neuere Algorithmen nach ERTEN und ÜNGÖR [51, 52], die durch eine optimale Wahl der Knotenpunkte des Netzes in der Lage sind, sowohl größere minimale Innenwinkel als auch maximale Innenwinkel der Dreiecke bei der Netzgenerierung zu garantieren¹⁴.

Für einen ausführlicheren Einblick in die Theorie der DELAUNAY-Triangulationen sei hier lediglich auf AURENHAMMER und KLEIN [9] verwiesen. Die für diese Arbeit wichtigen geometrischen Beziehungen zwischen DELAUNAY-Triangulationen und VORONOI-Polygonen sind für den interessierten Leser im Anhang A.2 zusammengefasst.

¹³ Diese sind beispielsweise in SHEWCHUKS Netzgenerator *Triangle* [157], der im Rahmen dieser Arbeit verwendet wurde, implementiert.

¹⁴ ERTEN und ÜNGÖR stellen eine Implementierung ihres Verfahrens, den Netzgenerator *aCute*, zur Verfügung. Auch diese wird im Rahmen der vorliegenden Arbeit verwendet.

3. Stabgittermodelle für unregelmäßige Netze

In Kapitel 2 wurden bereits die Nachteile der in der Literatur verwendeten Stabgittermodelle aufgezeigt: Sie sind nur für regelmäßige Netze in der Lage, ein homogenes Materialverhalten zu modellieren. Wie jedoch bereits in Abschnitt 2.3.1 gezeigt wurde, führen regelmäßige Netze bei einer Versagenssimulation zu einer netzinduzierten Anisotropie der Rissbildung und -ausbreitung.

Um dieses Phänomen bei Stabgittermodellen zu vermeiden, wurden in der Vergangenheit unterschiedliche Ansätze angewandt. Zum einen ist es möglich, die physikalischen Eigenschaften des Materials, wie zum Beispiel die Bruchfestigkeit R_m oder die Fließgrenze $R_{P0.2}$, über eine Wahrscheinlichkeitsverteilung zu definieren. In der Regel wird hierbei die Wahrscheinlichkeitsverteilung nach WEIBULL [171] verwendet [65]. Für jede Simulation wird dann eine separate Realisierung des stochastischen Modells generiert. Dieser Vorgang wird als das Einbringen einer *physikalischen Unordnung* bezeichnet. Als zweite Möglichkeit kann eine *geometrische Unordnung* in das System eingebracht werden. Hierbei werden die Netzknoten eines periodischen Gitters bei jeder Realisierung des Modells aus ihrer regelmäßigen Position zufällig verschoben, ohne dabei jedoch die Topologie des Netzes zu modifizieren. Die Änderung der Ausrichtung der Stäbe soll dazu führen, dass das Versagen nicht mehr der Periodizität des Netzes folgt, sondern entsprechend der Ergebnisse aus Bruchversuchen stattfindet. Wie in Abschnitt 3.1 deutlich wird, führt diese geometrische Unordnung dazu, dass die Materialeigenschaften im Modell *lokal* nicht mehr homogen sind und nicht mehr mit dem vorgegebenen Material übereinstimmen, was das physikalische Verhalten eines solchen Modells schwer vorhersehbar macht.

Nachfolgend wird ein anderer Weg beschritten, um die Nachteile bestehender Modelle zu beheben. Wie dabei gezeigt wird, ist es bei geeigneter Wahl des Referenzvolumens für die Herleitung und bei einer geeigneten Anordnung von Federn möglich, für beliebige Netze aus Dreiecken beziehungsweise Tetraedern im linear-elastischen, statischen Fall ein homogenes, beliebig anisotropes Material abzubilden. Nach einer kurzen Einführung in die Theorie der Herleitung solcher Modelle, die im wesentlichen OSTOJA-STARZEWSKI [127] folgt, wird dieses Modell in Anlehnung an die eigene Veröffentlichung [143] für den zwei- und den dreidimensionalen Fall hergeleitet.

3.1. Theoretische Grundlagen der Herleitung von Stabgittermodellen

Für die Herleitung eines Stabgittermodells werden zwei Ansätze benötigt: Die Federstruktur in einem vorgegebenen Bereich des Materials – der Referenzzelle – sowie eine Berechnungsvorschrift, mithilfe derer die Steifigkeiten dieser Federn bestimmt werden können. Während die Struktur der Referenzzelle prinzipiell beliebig gewählt werden kann, existieren für die grundlegende Berechnung der Federsteifigkeiten im Wesentlichen zwei Ansätze. Der erste, auf HRENNIKOFF [70] basierende Ansatz, nutzt die Tatsache aus, dass bei konstanter äußerer Spannung die Verformung des Stabgitters und des Kontinuums identisch sein müssen. Mithilfe bekannter Last- und Verformungszustände können aus diesem Ansatz die Gleichungen zur Bestimmung der Federsteifigkeiten aufgestellt werden. Der genaue Ablauf der Berechnung hängt dabei jedoch von der Struktur der zugrundeliegenden Zelle ab und ist daher nur schwer zu automatisieren. Dafür ist es bei diesem Verfahren möglich, auch für Zellen, die sich intern nicht homogen verformen, die Federsteifigkeiten zu berechnen. Dieser Ansatz wird hier jedoch nicht weiter verfolgt.

Das zweite Vorgehen stützt sich auf die Idee, dass die elastische Dehnungsenergie der Zelle und des Kontinuums für einen beliebigen, konstanten Dehnungszustand identisch sein müssen (MONETTE und ANDERSON [113], OSTOJA-STARZEWSKI [127]). Der Vorteil dieser Methode, die im Folgenden verwendet wird, ist die einfache Umsetzung, da die gesamte Dehnungsenergie der Federzelle über die Addition der skalaren Dehnungsenergien der einzelnen Federn berechnet werden kann. Dabei muss lediglich darauf geachtet werden, dass die Verformung der Zelle, für die diese Berechnung durchgeführt wird, tatsächlich für jeden Lastzustand durch einen konstanten Dehnungszustand beschrieben werden kann.

3.1.1. Herleitung der allgemeinen Bestimmungsgleichung für die Federsteifigkeiten über die Dehnungsenergie

Die Dehnungsenergie Π_c , die in einem elastisch verformten Kontinuum gespeichert ist, hat allgemein die Form

$$\Pi_c = \int_{\Omega} \int_{\hat{\epsilon}} \hat{\sigma}^T \cdot d\hat{\epsilon} \, d\Omega, \quad (3.1)$$

wobei $\hat{\sigma}$ das Spannungsmaß in VOIGT'scher Notation, $\hat{\epsilon}$ das energetisch konjugierte Dehnungsmaß in VOIGT'scher Notation und Ω das Volumen des betrachteten Körpers

bezeichnet. Mithilfe der Elastizitätsmatrix \mathbf{E} für ein linear-elastisches Material mit $\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{E} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$, das für die Herleitung der Federzellen betrachtet werden soll, vereinfacht sich diese Dehnungsenergie (3.1) zu

$$\Pi_c = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \cdot \mathbf{E} \cdot \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \, d\Omega. \quad (3.2)$$

Für die Berechnung der Federsteifigkeiten k_j einer homogenen Zelle z wird nun angenommen, dass die Dehnung über das gesamte Volumen Ω_z der Zelle konstant ist. Durch diese Annahme kann das Integral der Dehnungsenergie in Gleichung (3.2) ausgewertet werden.

$$\Pi_{c,z} = \int_{\Omega_z} \frac{1}{2} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \cdot \mathbf{E} \cdot \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \, d\Omega_z \approx \frac{1}{2} \Omega_z \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \cdot \mathbf{E} \cdot \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (3.3)$$

Die Auswirkung dieser Annahme wird in Abschnitt 3.1.2 genauer dargelegt.

Die Dehnungsenergie der N linear-elastischen Federn der Zelle des Federmodells ist gerade die Summe der Dehnungsenergien der einzelnen Federn.

$$\Pi_z = \sum_{j=1}^N \frac{1}{2} k_j q_j^2 \quad (3.4)$$

Hierbei bezeichnet k_j die Steifigkeit der j -ten Feder, während q_j die verallgemeinerte Verformung ebendieser darstellt. Bei gleicher Verformung des Kontinuumssystems und des Federsystems können diese Verformungen des Federsystems als Funktion oder, im linearen Fall, als linearisierte Funktion des Dehnungszustands des Kontinuums beschrieben werden.

$$q_j = f_j(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}) \approx \underbrace{\frac{\partial f_j(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}})}{\partial \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}}}_{\mathbf{T}_j} \Big|_{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}=\mathbf{0}} \cdot \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{T}_j \cdot \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (3.5)$$

Wird dies nun in die Forderung eingesetzt, dass die Dehnungsenergie beider Systeme identisch sein muss, so erhält man

$$\sum_{j=1}^N \frac{1}{2} k_j q_j^2 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N k_j \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \cdot \mathbf{T}_j^T \mathbf{T}_j \cdot \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \stackrel{!}{=} \frac{1}{2} \Omega_z \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \cdot \mathbf{E} \cdot \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}. \quad (3.6)$$

Da Gleichung 3.6 für jeden beliebigen konstanten Dehnungszustand erfüllt sein muss,

folgt direkt

$$\sum_{j=1}^N k_j \mathbf{T}_j^T \mathbf{T}_j = \Omega_z \sum_{j=1}^N \tilde{\mathbf{E}}_j(k_j) \stackrel{!}{=} \Omega_z \mathbf{E}. \quad (3.7)$$

Hierbei ist

$$\tilde{\mathbf{E}}_j = \frac{1}{\Omega_z} k_j \mathbf{T}_j^T \mathbf{T}_j \quad (3.8)$$

gerade der Beitrag der Feder j zur Elastizitätsmatrix des Materials. Diese Matrixgleichung (3.7) enthält aufgrund der Symmetrie der Elastizitätsmatrix im zweidimensionalen Fall maximal 6 und im dreidimensionalen Fall maximal 21 linear unabhängige Gleichungen. Die Federsteifigkeiten können somit eindeutig für ein beliebiges Material bestimmt werden, sofern es gelingt, genau 6 Federn im zweidimensionalen beziehungsweise 21 Federn im dreidimensionalen Fall so zu wählen, dass diese Gleichungen linear unabhängig voneinander sind.

3.1.2. Grenzen derartig hergeleiteter Modelle

Für die in Abschnitt 3.1.1 eingeführte Herleitung wurde angenommen, dass im Federsystem nur infinitesimale Verformungen vorliegen, da nur in diesem Falle die Linearisierung der Abbildung der Federverformungen auf Kontinuumsdehnungen nach Gleichung (3.5) gerechtfertigt ist. Dies führt, wie in Anhang B.1 gezeigt ist, dazu, dass die nach Gleichung (3.7) berechneten Federsteifigkeiten nur bei linearen Rechnungen exakt das geforderte Materialverhalten zeigen. Während bei Problemstellungen mit endlichen Verdrehungen das Material noch richtig abgebildet werden kann, wenn die Federn rotationsinvariant formuliert werden, wäre es bei Problemen mit endlichen Verzerrungen zur Erhaltung der Materialeigenschaften nötig, die Federsteifigkeiten während der Simulation anhand der momentanen Verzerrung der Zelle neu zu berechnen. Dies liefe jedoch dem Vorteil dieser Modelle, der lokalen, diskreten Definition der Materialparameter in den Federn, zuwider und ist daher nicht zu empfehlen.

Auch nichtlineares Materialverhalten kann mit der hier vorgestellten Herleitung nicht modelliert werden. Der Grund hierfür ist die Annahme eines linear-elastischen Materialverhaltens in Gleichung (3.2), die erforderlich ist, um ein lineares Gleichungssystem für die Federkonstanten zu erhalten. Soll ein nichtlinear-elastisches Material modelliert werden, so wäre, wie bei der Simulation endlicher Verzerrungen, wieder eine Neuberechnung der Federsteifigkeiten aufgrund der momentanen Verformung nötig.

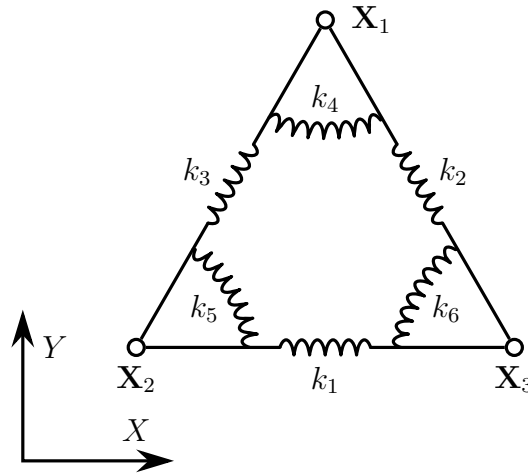


Abbildung 3.1.: Anordnung der Federn in einer Dreieckszelle.

3.2. Ein zweidimensionales Stabgittermodell für beliebige Dreiecke

Wie in Abschnitt 3.1.1 angemerkt wurde, sind für den Fall eines zweidimensionalen Kontinuums 6 linear unabhängige Federn notwendig, um ein beliebiges, linear-elastisches Material abbilden zu können. Da zugleich ein exakt konstanter Dehnungszustand dargestellt werden soll und dies ohne kinematische Nebenbedingungen nur mit einem System aus drei linear verbundenen Punkten möglich ist, wird im Folgenden eine dreieckige Federzelle nach Abbildung 3.1 verwendet. Diese Federzelle besitzt eine Normalkraftfeder in jeder Verbindung zweier Knoten und Winkelfedern zwischen jedem Satz aus zwei Normalkraftfedern. Die Nutzung von Winkelfedern hat im Gegensatz zu den bei diskreten Modellen weit verbreiteten Schubfedern den Vorteil, dass sie invariant gegenüber Starrkörperrotationen sind. Außerdem erfüllen letztere im linearen Fall das Momentengleichgewicht nur in Ausnahmefällen. Dies ist im Anhang A.1.1 im Detail ausgeführt.

Für die Bestimmung der Steifigkeiten der einzelnen Federn werden die Beiträge dieser zur Dehnungsenergie als Funktion der Kontinuumsdehnung benötigt, aus denen wiederum die Beträge der Federn zur Kontinuumssteifigkeit extrahiert werden können. Diese werden im Folgenden hergeleitet.

3.2.1. Beitrag einer Längsfeder zur Elastizitätsmatrix

Die Dehnungsenergie in einer Längsfeder ist die Energie, die durch die Längenänderung, die die Verformung dieser vollständig beschreibt, in der Feder gespeichert ist. Die Längenänderung kann dabei auf unterschiedliche Arten ausgedrückt werden. Die einfachste Wahl ist es, die absolute Änderung der Länge der Feder Δl zu betrachten. Der Nachteil dieser Wahl ist, dass dieser Verformungsfreiheitsgrad dimensionsbehaftet ist. Alternativ kann die längenbezogene Änderung der Federlänge, die Dehnung $\tilde{\varepsilon}_l$ der Feder, betrachtet werden, um die Herleitung dimensionslos zu machen. Letzterer Weg wird hier besprochen. Die Dehnungsenergie Π_n einer einzelnen Längsfeder mit Steifigkeit k_n lässt sich somit darstellen als

$$\Pi_n = \frac{1}{2} k_n \tilde{\varepsilon}_l^2. \quad (3.9)$$

Mithilfe einer Drehtransformation kann diese Dehnung, die nach Abbildung 3.2 in einem Winkel von α gegenüber der X -Achse vorliegt, über die Dehnungen des Kontinuums, in das diese Feder eingebettet ist, ausgedrückt werden.

$$\tilde{\varepsilon}_l = \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha \\ \sin^2 \alpha \\ \cos \alpha \sin \alpha \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 2 \varepsilon_{xy} \end{bmatrix} = \frac{1}{l^2} \begin{bmatrix} \Delta X^2 \\ \Delta Y^2 \\ \Delta X \Delta Y \end{bmatrix}^T \cdot \hat{\varepsilon} = \mathbf{T}_n \cdot \hat{\varepsilon} \quad (3.10)$$

Der Beitrag dieser Längsfeder zur Elastizitätsmatrix ergibt sich folglich nach Gleichung (3.7) zu

$$\tilde{\mathbf{E}}_{n,j} = \frac{k_n}{\Omega_z} \mathbf{T}_n^T \mathbf{T}_n = \frac{k_n}{\Omega_z l^4} \begin{bmatrix} \Delta X^4 & \Delta X^2 \Delta Y^2 & \Delta X^3 \Delta Y \\ \Delta X^2 \Delta Y^2 & \Delta Y^4 & \Delta X \Delta Y^3 \\ \Delta X^3 \Delta Y & \Delta X \Delta Y^3 & \Delta X^2 \Delta Y^2 \end{bmatrix}. \quad (3.11)$$

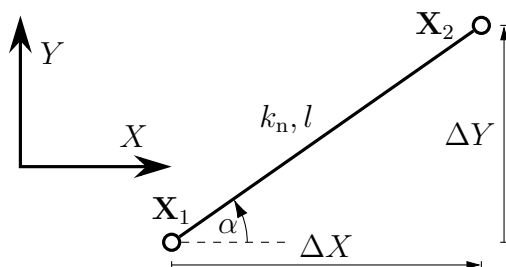


Abbildung 3.2.: Lage einer Normalkraftfeder im zweidimensionalen Raum.

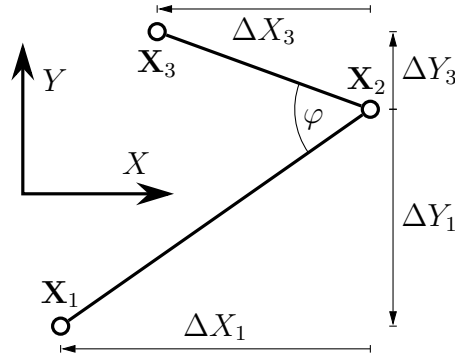


Abbildung 3.3.: Lage einer Winkelfeder im zweidimensionalen Raum.

Diese Form für den Beitrag der Längsfeder zur Elastizitätsmatrix liefert zugleich die CAUCHY'schen Bedingungen. Da für die Einträge des Beitrags in jedem Fall $\tilde{E}_{12} = \tilde{E}_{33}$ gilt, kann, sofern ein Federsystem nur aus Längsfedern besteht, das Verhältnis zwischen Schubsteifigkeit und Querdehnsteifigkeit des Modells nicht frei eingestellt werden. Für den isotropen Fall folgt aus dieser Bedingung zudem, dass nur eine Querkontraktionszahl von $\nu = \frac{1}{3}$ im Fall ebener Spannung und $\nu = \frac{1}{4}$ in Fall ebener Dehnung modelliert werden kann.

3.2.2. Beitrag einer Winkelfeder zur Elastizitätsmatrix

Eine Winkelfeder ist eine Feder, die nach Abbildung 3.3 zwischen den drei Punkten $\mathbf{X}_1 = [X_1 \ Y_1]$, $\mathbf{X}_2 = [X_2 \ Y_2]$ und $\mathbf{X}_3 = [X_3 \ Y_3]$ liegt. Die Feder erzeugt dann eine Gegenkraft, wenn sich der Winkel $\varphi = \angle(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3)$ durch eine Verschiebung $\mathbf{u}_i = [u_i \ v_i]$ am Knoten i ändert. Bei Verwendung der Kurzschreibweise

$$\begin{aligned} \Delta X_1 &= X_1 - X_2 & \Delta X_3 &= X_3 - X_2 \\ \Delta Y_1 &= Y_1 - Y_2 & \Delta Y_3 &= Y_3 - Y_2 \end{aligned} \quad (3.12a)$$

$$\begin{aligned} \Delta x_1 &= X_1 + u_1 - X_2 - u_2 & \Delta x_3 &= X_3 + u_3 - X_2 - u_2 \\ \Delta y_1 &= Y_1 + v_1 - Y_2 - v_2 & \Delta y_3 &= Y_3 + v_3 - Y_2 - v_2 \end{aligned} \quad (3.12b)$$

für die Richtungskomponenten der Strecken, zwischen denen der Winkel liegt, kann die Winkeländerung als

$$\Delta\varphi = \underbrace{\arctan\left(\frac{|\Delta x_1 \Delta y_3 - \Delta y_1 \Delta x_3|}{\Delta x_1 \Delta x_3 + \Delta y_1 \Delta y_3}\right)}_{\varphi} - \underbrace{\arctan\left(\frac{|\Delta X_1 \Delta Y_3 - \Delta Y_1 \Delta X_3|}{\Delta X_1 \Delta X_3 + \Delta Y_1 \Delta Y_3}\right)}_{\varphi_0} \quad (3.13)$$

dargestellt werden. Aufgrund der linearen Dehnungs-Verschiebungs-Beziehung kann die Linearisierung der Winkeländerung bezüglich der Dehnungen nach Gleichung (3.5) über eine Linearisierung der Winkeländerung bezüglich der Verschiebungen mit anschließender Transformation dieser in den Dehnungsraum durchgeführt werden. Die Linearisierung der Winkeländerung (3.13) bezüglich der Verschiebungen berechnet sich hierbei zu

$$\Delta\varphi \approx \frac{\partial\Delta\varphi}{\partial\mathbf{u}} \Delta\mathbf{u} = \Delta\varphi_0 + \begin{bmatrix} \frac{\Delta y_1}{\Delta x_1^2 + \Delta y_1^2} \\ \frac{-\Delta x_1}{\Delta x_1^2 + \Delta y_1^2} \\ \frac{-\Delta y_3}{\Delta x_3^2 + \Delta y_3^2} \\ \frac{\Delta x_3}{\Delta x_3^2 + \Delta y_3^2} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Delta u_1 - \Delta u_2 \\ \Delta v_1 - \Delta v_2 \\ \Delta u_3 - \Delta u_2 \\ \Delta v_3 - \Delta v_2 \end{bmatrix}, \quad (3.14)$$

wobei $\Delta\varphi_0$ die momentane Winkeländerung der Feder ist. Betrachtet man den Anfangszustand, in dem die momentanen Verschiebungen und die Winkeländerung zu Null werden, und setzt die Dehnungs-Verschiebungs-Abbildung

$$\Delta u = \varepsilon_{xx} \Delta X + 2 c_{xy} \varepsilon_{xy} \Delta Y \quad \Delta v = 2 (1 - c_{xy}) \varepsilon_{xy} \Delta X + \varepsilon_y \Delta Y, \quad (3.15)$$

bei der c_{xy} der Anteil der Schubdehnung $2\varepsilon_{xy}$ ist, die durch eine Änderung der X -Verschiebung bei einer Y -Differenz der Knoten verursacht wird, in diese Gleichung ein, so ergibt sich die Winkeländerung als Funktion der Kontinuumsdehnung zu

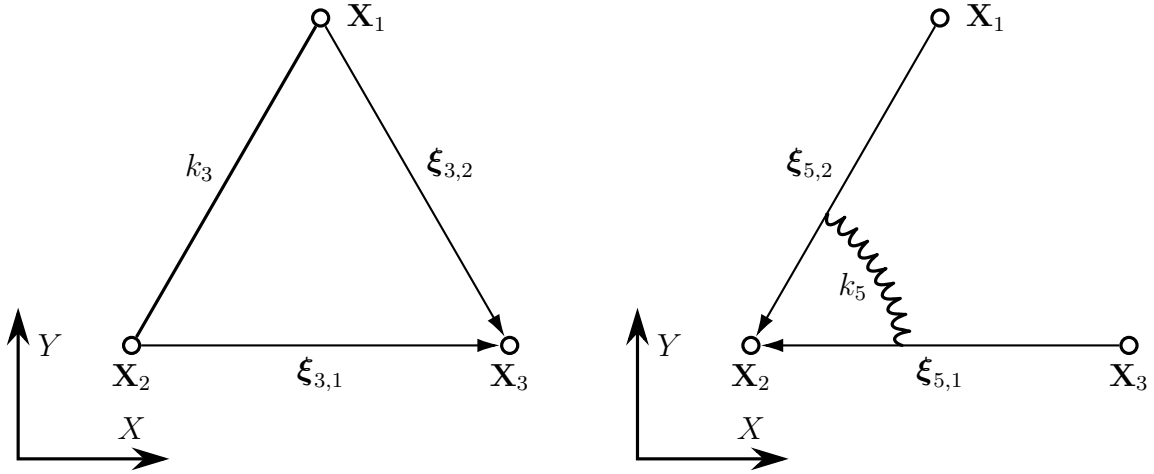
$$\begin{aligned} \Delta\varphi &\approx \frac{\Delta X_1 \Delta Y_3 - \Delta X_3 \Delta Y_1}{(\Delta X_1^2 + \Delta Y_1^2)(\Delta X_3^2 + \Delta Y_3^2)} \begin{bmatrix} \Delta Y_1 \Delta Y_3 - \Delta X_1 \Delta X_3 \\ \Delta X_1 \Delta X_3 - \Delta Y_1 \Delta Y_3 \\ -\Delta Y_1 \Delta X_3 - \Delta X_1 \Delta Y_3 \end{bmatrix}^T \cdot \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \\ &= \mathbf{T}_a \cdot \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Hierbei ist anzumerken, dass sich sämtliche Terme mit dem Faktor c_{xy} gegenseitig auslöschen. Der Beitrag einer Winkelfeder zur Elastizitätsmatrix des Materials ergibt sich aus dieser Abbildung der Kontinuumsdehnungen auf die Winkeländerung mit Gleichung (3.8) zu

$$\tilde{\mathbf{E}}_a = \frac{k_a}{\Omega_z} \mathbf{T}_a^T \mathbf{T}_a.$$

3.2.3. Bestimmung der Federsteifigkeiten

Zur Bestimmung der Federsteifigkeiten des Dreiecks werden die Beiträge der Federn zur Elastizitätsmatrix den Gleichungen (3.11) und (3.16) entsprechend addiert und



(a) Relative Koordinaten für eine Längsfeder. (b) Relative Koordinaten für eine Winkelfeder.

Abbildung 3.4.: Definition der Vektoren $\xi_{i,j} = [\xi_{i,j} \ \eta_{i,j}]$, die für die einfachere Darstellung der Lösung für die Federsteifigkeiten verwendet werden, am Beispiel der Längsfeder 3 und der Winkelfeder 5. [143]

nach Gleichung (3.7) mit der gewünschten Elastizitätsmatrix gleichgesetzt. Aufgrund der Symmetrie der Elastizitätsmatrix ergeben sich dadurch 6 Gleichungen¹ für die 6 Federsteifigkeiten, die bei einer Zelle nach Abbildung 3.1 verwendet werden. Diese 6 Gleichungen sind genau dann linear unabhängig, wenn die drei Knoten der Federzelle nicht kollinear sind, die Dreieckszelle also nicht zu einer Linie degeneriert ist. Somit können die Federsteifigkeiten für jedes beliebige Dreieck bestimmt werden. Bei der Verwendung von zwei Vektoren $\xi_{j,1} = [\xi_{j,1} \ \eta_{j,1}]$ und $\xi_{j,2} = [\xi_{j,2} \ \eta_{j,2}]$ zur Beschreibung der Geometrie des Dreiecks, die nach Abbildung 3.4 bezüglich der Lage der Feder mit Index j im Dreieck definiert sind, sind die Lösungen für die Steifigkeiten der Längs- beziehungsweise Winkelfedern jeweils identisch:

$$k_{n,j} = \Omega_z \begin{bmatrix} d_{n,j}^{(11)} \\ d_{n,j}^{(12)} \\ d_{n,j}^{(16)} \\ d_{n,j}^{(22)} \\ d_{n,j}^{(26)} \\ d_{n,j}^{(66)} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{12} \\ E_{16} \\ E_{22} \\ E_{26} \\ E_{66} \end{bmatrix} \quad k_{a,j} = \Omega_z \begin{bmatrix} d_{a,j}^{(11)} \\ d_{a,j}^{(12)} \\ d_{a,j}^{(16)} \\ d_{a,j}^{(22)} \\ d_{a,j}^{(26)} \\ d_{a,j}^{(66)} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{12} \\ E_{16} \\ E_{22} \\ E_{26} \\ E_{66} \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

¹ Es wird dabei entweder die obere oder die unter Dreiecksmatrix betrachtet.

Mit der Bezeichnung $A_\Delta = \frac{\Omega_z}{t}$ für die Fläche der Dreieckszelle, die sich durch Division des Zellvolumens Ω_z mit der Modelldicke t ergibt, vereinfachen sich die Parameter d zu

$$d_{n,i}^{(11)} = \frac{(\xi_1 - \xi_2)^2 + (\eta_1 - \eta_2)^2}{4 A_\Delta^2} \eta_1 \eta_2 \quad (3.18a)$$

$$d_{n,i}^{(12)} = \frac{(\xi_1 - \xi_2)^2 + (\eta_1 - \eta_2)^2}{4 A_\Delta^2} (\xi_1 \xi_2 + \eta_1 \eta_2) \quad (3.18b)$$

$$d_{n,i}^{(16)} = \frac{(\xi_1 - \xi_2)^2 + (\eta_1 - \eta_2)^2}{4 A_\Delta^2} (-\xi_1 \eta_2 - \xi_2 \eta_1) \quad (3.18c)$$

$$d_{n,i}^{(22)} = \frac{(\xi_1 - \xi_2)^2 + (\eta_1 - \eta_2)^2}{4 A_\Delta^2} \xi_1 \xi_2 \quad (3.18d)$$

$$d_{n,i}^{(26)} = \frac{(\xi_1 - \xi_2)^2 + (\eta_1 - \eta_2)^2}{4 A_\Delta^2} (-\xi_1 \eta_2 - \xi_2 \eta_1) \quad (3.18e)$$

$$d_{n,i}^{(66)} = 0 \quad (3.18f)$$

$$d_{a,i}^{(11)} = -\frac{\|\boldsymbol{\xi}_1\|_2^2 \|\boldsymbol{\xi}_2\|_2^2}{16 A_\Delta^4} \eta_1 \eta_2 (\eta_1 - \eta_2)^2 \quad (3.18g)$$

$$d_{a,i}^{(12)} = -\frac{\|\boldsymbol{\xi}_1\|_2^2 \|\boldsymbol{\xi}_2\|_2^2}{16 A_\Delta^4} \left(\xi_1 \xi_2 \left((\xi_1 - \xi_2)^2 - \eta_1 \eta_2 \right) + \eta_1 \eta_2 \left((\eta_1 - \eta_2)^2 - \xi_1 \xi_2 \right) - \dots \right. \\ \left. \dots (\xi_1 - \xi_2)^2 (\eta_1 - \eta_2)^2 + \xi_1^2 \eta_1^2 + \xi_2^2 \eta_2^2 \right) \quad (3.18h)$$

$$d_{a,i}^{(16)} = -\frac{\|\boldsymbol{\xi}_1\|_2^2 \|\boldsymbol{\xi}_2\|_2^2}{16 A_\Delta^4} (\eta_1 - \eta_2) \left(\xi_1 \eta_2^2 - \xi_2 \eta_1^2 - 3 \eta_1 \eta_2 (\xi_1 - \xi_2) \right) \quad (3.18i)$$

$$d_{a,i}^{(22)} = -\frac{\|\boldsymbol{\xi}_1\|_2^2 \|\boldsymbol{\xi}_2\|_2^2}{16 A_\Delta^4} \xi_1 \xi_2 (\xi_1 - \xi_2)^2 \quad (3.18j)$$

$$d_{a,i}^{(26)} = -\frac{\|\boldsymbol{\xi}_1\|_2^2 \|\boldsymbol{\xi}_2\|_2^2}{16 A_\Delta^4} (\xi_1 - \xi_2) \left(\eta_1 \xi_2^2 - \eta_2 \xi_1^2 - 3 \xi_1 \xi_2 (\eta_1 - \eta_2) \right) \quad (3.18k)$$

$$d_{a,i}^{(66)} = -\frac{\|\boldsymbol{\xi}_1\|_2^2 \|\boldsymbol{\xi}_2\|_2^2}{16 A_\Delta^4} \left(\xi_1 \xi_2 - \xi_1^2 - \eta_1 \eta_2 + \eta_1^2 \right) \left(\xi_1 \xi_2 - \xi_2^2 - \eta_1 \eta_2 + \eta_2^2 \right) . \quad (3.18l)$$

Die resultierenden Federsteifigkeiten sind im Allgemeinen nicht positiv. Die Federzelle als Ganzes verhält sich jedoch wie das Referenzmaterial unter konstanter Dehnung und ist somit für ein elastisch stabiles Material immer stabil.

3.2.4. Vereinfachungen für isotrope Materialien

Da die Elastizitätsmatrix im Falle eines isotropen Materials ausschließlich durch den Elastizitätsmodul E und die Querkontraktionszahl ν definiert ist, lassen sich die Glei-

chungen (3.18) zur Bestimmung der Federsteifigkeiten weiter vereinfachen². Nutzt man als geometrische Größen zur Beschreibung der Steifigkeiten der Längsfedern in diesem Fall die Länge der Feder l und die Länge des Segments des VORONOI-Polygons l_v , das die Feder schneidet³, so ergibt sich für die Federsteifigkeit

$$k_n = \begin{cases} \frac{E t}{1-\nu} l l_v & \text{Ebener Spannungszustand} \\ \frac{E t}{(1+\nu)(1-2\nu)} l l_v & \text{Ebener Dehnungszustand,} \end{cases} \quad (3.19)$$

wobei t die Dicke des Modells beschreibt. Da die Länge der Kanten des VORONOI-Polygons im Falle einer DELAUNAY-Triangulation außer an den Rändern der Triangulation immer positiv ist, kann damit garantiert werden, dass die Steifigkeiten der Längsfedern im Inneren des Modells immer positiv sind. An den Rändern der Triangulation ist nach Gleichung (A.15d) diese Länge gerade dann positiv, wenn der Gegenwinkel der Seite der Dreieckszelle, die an der Modellkante liegt, spitzwinklig ist. Dies wiederum kann über die Netzerzeugung nach Abschnitt 2.3.2 garantiert werden.

Auch für die Winkelfedern ist im Falle eines isotropen Materials eine Vereinfachung der Lösung für die Steifigkeiten möglich. Bezeichnet man die Winkel des Dreiecks, in denen die Feder nicht liegt, mit φ_2 und φ_3 , so können die Federsteifigkeiten wie folgt berechnet werden.

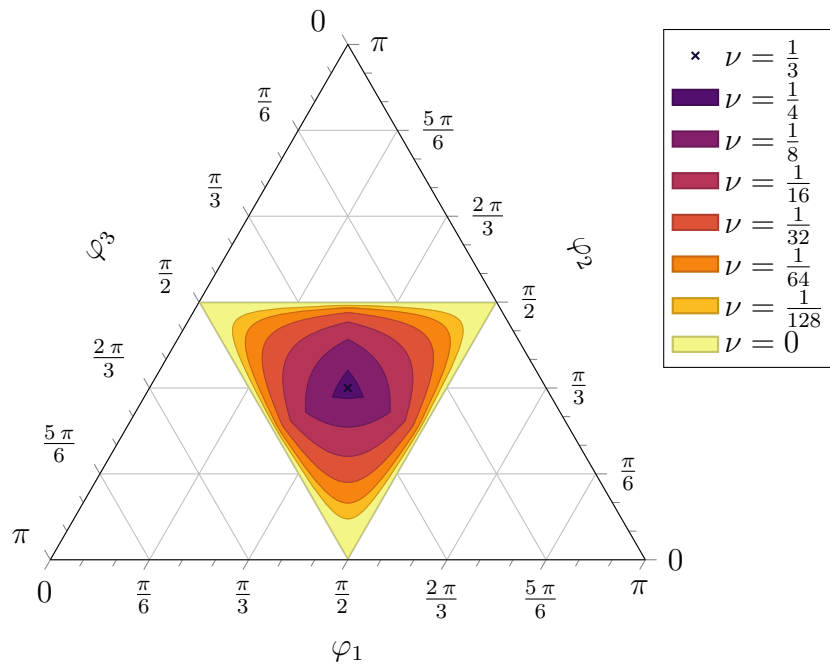
$$k_a = \begin{cases} \frac{E \Omega}{1-\nu} \frac{1}{\sin^2 \varphi} \left(\frac{1+3\nu}{\tan \varphi_2 \tan \varphi_3} - 2\nu \right) & \text{Ebener Spannungszustand} \\ \frac{E \Omega}{(1+\nu)(1-2\nu)} \frac{1}{\sin^2 \varphi} \left(\frac{1+2\nu}{\tan \varphi_2 \tan \varphi_3} - 2\nu \right) & \text{Ebener Dehnungszustand} \end{cases} \quad (3.20)$$

Diese Federsteifigkeiten sind im Falle eines gleichseitigen Dreiecks äquivalent zu denen, die bei GRIFFITHS und MUSTOE [60] sowie bei OSTOJA-STARZEWSKI [127] zu finden sind, was die Korrektheit der hier hergeleiteten Ergebnisse bestätigt. Im Gegensatz zu den Längsfedern hängt bei den Winkelfedern das Vorzeichen der Steifigkeiten nicht nur von der Form des Dreiecks, sondern auch von der Querkontraktionszahl ν des Materials ab. Eine allgemeine, rein geometrische Interpretation der Steifigkeiten ist somit für die Winkelfedern nicht mehr möglich.

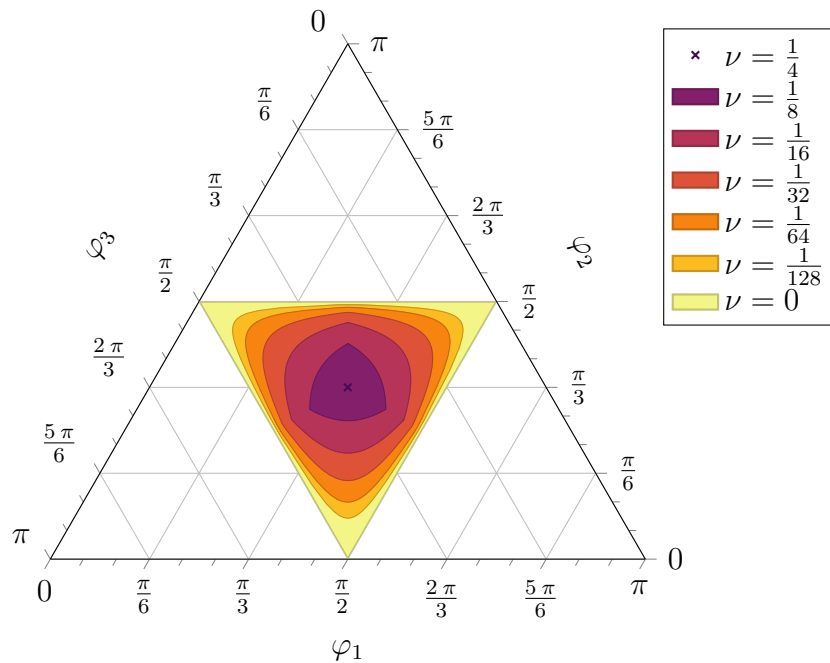
In Abbildung 3.5 sind für die Fälle des ebenen Spannungs- und Dehnungszustands die Winkelbereiche eingezeichnet, für die alle Federsteifigkeiten positiv sind. Auch hier zeigt sich wieder die Konsistenz mit den Ergebnissen der eben genannten Autoren: Diese zeigen für periodische Dreiecksnetze, dass die Steifigkeiten der Schubfedern genau

² Vereinfachungen für orthotrope und anisotrope Materialien sind im Anhang A.3 zu finden.

³ Für eine genauere Beschreibung dieser Größe siehe Anhang A.2.



(a) Positive Steifigkeiten beim ebenen Spannungszustand.



(b) Positive Steifigkeiten beim ebenen Dehnungszustand.

Abbildung 3.5.: Darstellung der Winkelbereiche, innerhalb derer alle Federsteifigkeiten positiv sind, in Abhängigkeit von der Querkontraktionszahl ν des isotropen Materials.

dann größer null sind, wenn die Querkontraktionszahl des Materials kleiner als $\nu = \frac{1}{3}$ im Fall eines ebenen Spannungszustands und kleiner als $\nu = \frac{1}{4}$ im Fall eines ebenen Dehnungszustands ist. Zusätzlich zu diesen Ergebnissen ist zu sehen, dass der Bereich der Innenwinkel des Dreiecks, bei dem alle Steifigkeiten k_n und k_a positiv sind, mit sinkender Querkontraktionszahl zunimmt. Bei einer Querkontraktionszahl von $\nu = 0$ sind gerade alle Steifigkeiten positiv, solange die Dreieckszelle nicht stumpfwinklig wird.

3.3. Ein dreidimensionales Stabgittermodell für beliebige Tetraeder

Analog zur Dreieckszelle für ein zweidimensionales Kontinuum kann auch im dreidimensionalen Falle eine Federzelle einfachstmöglicher Form mit der richtigen Zahl an linear unabhängigen Federn – 21 Stück – gefunden werden. Somit ist es wieder möglich, eindeutige Federsteifigkeiten zu bestimmen und zugleich ein beliebiges, anisotropes Material im Modell abzubilden. Eine solche Tetraederzelle, wie sie in Abbildung 3.6 zu sehen ist, besteht aus 6 Längsfedern, die sämtliche Ecken paarweise verbinden, sowie aus 15 Winkelfedern, die zwischen allen Paaren von Kanten eingebaut werden. Diese 15 Winkelfedern lassen sich weiter unterteilen in 12 Winkelfedern (k_7 bis k_{18}), die jeweils benachbarte Kanten verbinden, und 3 Winkelfedern (k_{19} bis k_{21}), die gegenüberliegende Kanten verbinden. Diese beiden Gruppen von Winkelfedern unterscheiden sich im Wesentlichen dadurch, dass erstere nur Reaktionskräfte auf drei der Eckknoten des Tetraeders erzeugen, während letztere eine Steifigkeit einbringen, die zwischen allen vier Ecken des Tetraeders wirkt.

Wie im zweidimensionalen Fall werden im Folgenden die Beiträge dieser Federn zur Materialsteifigkeit ermittelt, um im Anschluss die Steifigkeiten der Federn bestimmen zu können.

3.3.1. Beitrag einer Längsfeder zur Elastizitätsmatrix

Analog zur zweidimensionalen Längsfeder, die in Abschnitt 3.2.1 behandelt wurde, wird auch hier wieder die Dehnung $\tilde{\varepsilon}_l$ zur Beschreibung der Verformung der Längsfeder betrachtet, um eine dimensionslose Herleitung zu erhalten. Diese kann analog zum zweidimensionalen Fall aus der Kontinuumsdehnung ermittelt werden. Hierbei wird eine Längsfeder betrachtet, die zwischen den beiden Punkten $\mathbf{X}_1 = [X_1 \ Y_1 \ Z_1]$ und $\mathbf{X}_2 = [X_2 \ Y_2 \ Z_2]$ liegt. Die Feder hat somit den Richtungsvektor $\Delta\mathbf{X} = \mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_1$.

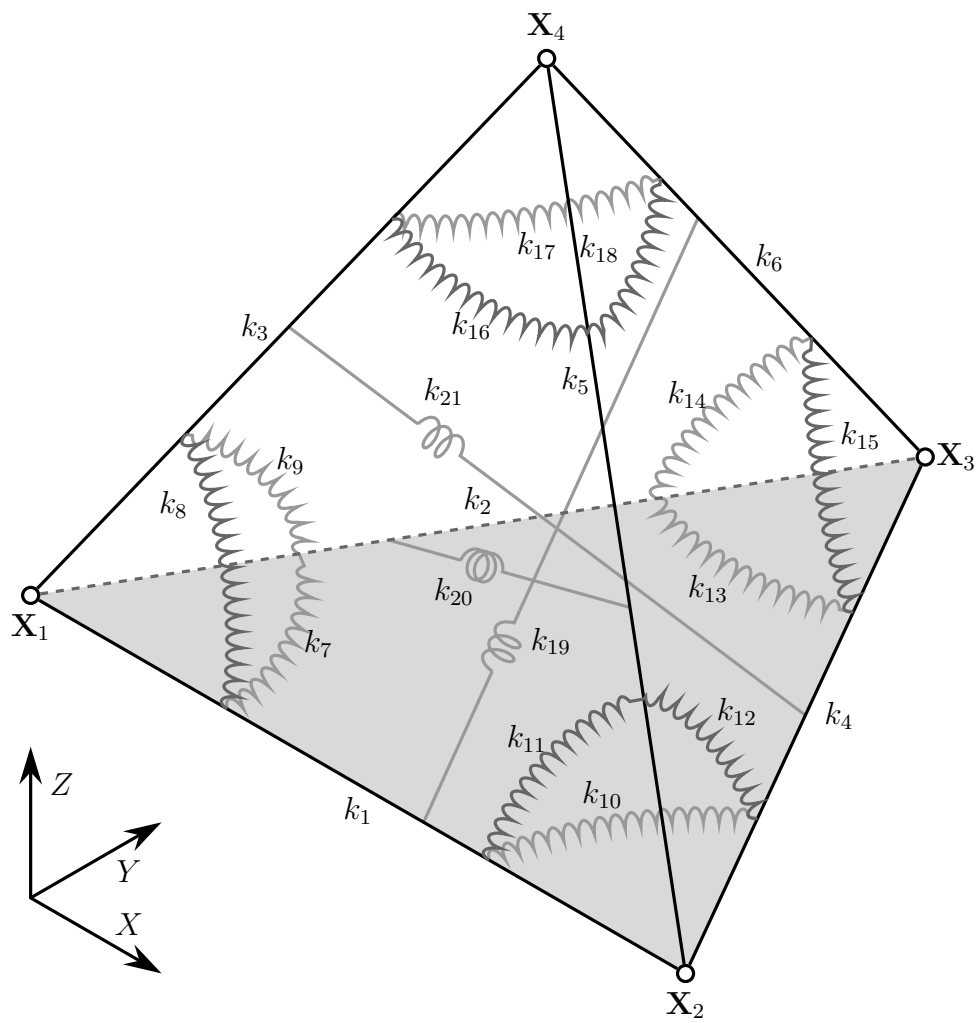


Abbildung 3.6.: Anordnung der Federn in einer Tetraederzelle. [143]

Damit ergibt sich für die Dehnungstransformation die folgende Beziehung:

$$\tilde{\varepsilon}_l = \frac{1}{\Delta X^2 + \Delta Y^2 + \Delta Z^2} \begin{bmatrix} \Delta X^2 \\ \Delta Y^2 \\ \Delta Z^2 \\ \Delta Y \Delta Z \\ \Delta Z \Delta X \\ \Delta X \Delta Y \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2 \varepsilon_{yz} \\ 2 \varepsilon_{zx} \\ 2 \varepsilon_{xy} \end{bmatrix}^T = \mathbf{T}_n \cdot \hat{\varepsilon} \quad (3.21)$$

Der Beitrag zur Elastizitätsmatrix ergibt sich wiederum nach Gleichung (3.8) zu

$$\tilde{\mathbf{E}}_n = \frac{k_n}{\Omega_z} \mathbf{T}_n^T \mathbf{T}_n.$$

3.3.2. Beitrag einer Winkelfeder zur Elastizitätsmatrix

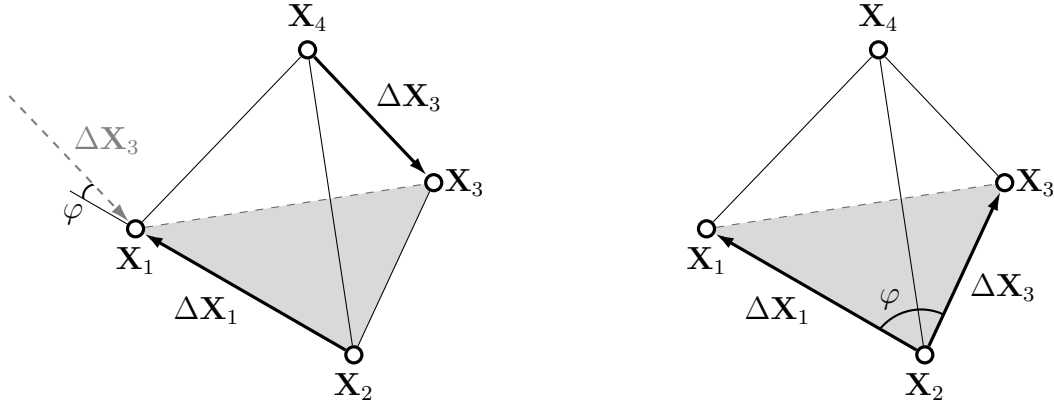
In der Einleitung des Abschnitts 3.3 wurde bereits dargelegt, dass im dreidimensionalen Modell zwei unterschiedliche Winkelfedern existieren: Winkelfedern zwischen gegenüberliegenden Kanten, die eine Steifigkeit zwischen vier Punkten erzeugen, sowie Winkelfedern zwischen benachbarten Kanten, die nur eine Steifigkeit zwischen drei Punkten erzeugen. Mathematisch betrachtet unterscheiden sich diese jedoch nur dadurch, dass bei letzteren Federn zwei Punkte der Vierpunkt-Winkelfeder zusammengesoben wurden (siehe auch Abbildung 3.7). Im Allgemeinen Falle der Winkelfeder, die im Winkel $\angle (\overrightarrow{\mathbf{X}_1 \mathbf{X}_2}, \overrightarrow{\mathbf{X}_3 \mathbf{X}_4})$ zwischen vier Punkten liegt, berechnet sich die Winkeländerung dieser Feder gerade als

$$\Delta\varphi = \varphi - \varphi_0, \quad (3.22)$$

mit

$$\begin{aligned} \tan \varphi &= \frac{\|(\mathbf{X}_2 + \mathbf{u}_2 - \mathbf{X}_1 - \mathbf{u}_1) \times (\mathbf{X}_4 + \mathbf{u}_4 - \mathbf{X}_3 - \mathbf{u}_3)\|_2}{(\mathbf{X}_2 + \mathbf{u}_2 - \mathbf{X}_1 - \mathbf{u}_1) \cdot (\mathbf{X}_4 + \mathbf{u}_4 - \mathbf{X}_3 - \mathbf{u}_3)} \\ \tan \varphi_0 &= \frac{\|(\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_1) \times (\mathbf{X}_4 - \mathbf{X}_3)\|_2}{(\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_1) \cdot (\mathbf{X}_4 - \mathbf{X}_3)}, \end{aligned} \quad (3.23)$$

wobei \mathbf{u}_i gerade der Verschiebungsvektor am Punkt i ist. Mit der Kurzschreibweise $\Delta\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2$, $\Delta\mathbf{X}_3 = \mathbf{X}_3 - \mathbf{X}_4$ ergibt sich für die Linearisierung der Winkeländerung



(a) Winkelfeder zwischen gegenüberliegenden Kanten. (b) Winkelfeder zwischen benachbarten Kanten.

Abbildung 3.7.: Darstellung der Kanten, zwischen denen die Winkelfedern bei einem Tetraeder eingebaut werden. Der drei-Punkt-Fall kann dadurch erzeugt werden, dass der Ausgangspunkt der Kante ΔX_3 in den Ausgangspunkt der Kante ΔX_1 verschoben wird.

bezüglich der Verschiebungen im unverformten Zustand in Blockschreibweise

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &\approx \left. \frac{\partial\Delta\varphi}{\partial\mathbf{u}_i} \right|_{\mathbf{u}_i=0} \cdot \mathbf{u}_i \\ &= \frac{\begin{bmatrix} (\Delta\mathbf{X}_1 \cdot \Delta\mathbf{X}_3 - \|\Delta\mathbf{X}_1\|_2 \|\Delta\mathbf{X}_3\|_2) \|\Delta\mathbf{X}_3\|_2^2 \\ (\Delta\mathbf{X}_3 \cdot \Delta\mathbf{X}_1 - \|\Delta\mathbf{X}_3\|_2 \|\Delta\mathbf{X}_1\|_2) \|\Delta\mathbf{X}_1\|_2^2 \end{bmatrix}^T}{\|\Delta\mathbf{X}_1\|_2 \|\Delta\mathbf{X}_3\|_2 \|\Delta\mathbf{X}_1 \times \Delta\mathbf{X}_3\|_3} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_4 - \mathbf{u}_3 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Die Verschiebungsdifferenzen in dieser Gleichung können wie im zweidimensionalen Fall wieder als Funktion der Dehnungen dargestellt werden.

$$\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} \Delta X_1 & 0 & 0 & 0 & (1 - c_{zx}) \Delta Z_1 & c_{xy} \Delta Y_1 \\ 0 & \Delta Y_1 & 0 & c_{yz} \Delta Z_1 & 0 & (1 - c_{xy}) \Delta X_1 \\ 0 & 0 & \Delta Z_1 & (1 - c_{yz}) \Delta Y_1 & c_{zx} \Delta X_1 & 0 \end{bmatrix} \hat{\mathbf{e}} \quad (3.25a)$$

$$\mathbf{u}_4 - \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} \Delta X_3 & 0 & 0 & 0 & (1 - c_{zx}) \Delta Z_3 & c_{xy} \Delta Y_3 \\ 0 & \Delta Y_3 & 0 & c_{yz} \Delta Z_3 & 0 & (1 - c_{xy}) \Delta X_3 \\ 0 & 0 & \Delta Z_3 & (1 - c_{yz}) \Delta Y_3 & c_{zx} \Delta X_3 & 0 \end{bmatrix} \hat{\mathbf{e}} \quad (3.25b)$$

Hierbei sind die Koeffizienten c_{xy} , c_{yz} und c_{zx} analog zum zweidimensionalen Fall die Anteile der Schubdehnungen, die durch eine Änderung der Verschiebung in $\{x, y, z\}$ -Richtung bei einer Positionsdifferenz in $\{y, z, x\}$ -Richtung zustande kommen und ΔX_i ,

ΔY_i und ΔZ_i die Koordinaten des Vektors $\Delta \mathbf{X}_i$. Einsetzen dieser Gleichungen (3.25) in die linearisierte Winkeländerung (3.24) liefert die Winkeländerung aufgrund der Dehnung des Kontinuums, in das die Feder eingebettet ist.

$$\Delta\varphi \approx \underbrace{\left[\begin{array}{l} (\Delta X_1^2 \|\Delta \mathbf{X}_3\|_2^2 + \Delta X_3^2 \|\Delta \mathbf{X}_1\|_2^2) \Delta \mathbf{X}_1 \cdot \Delta \mathbf{X}_3 - \dots \\ \dots 2 \Delta X_1 \Delta X_3 \|\Delta \mathbf{X}_1\|_2^2 \|\Delta \mathbf{X}_3\|_2^2 \\ (\Delta Y_1^2 \|\Delta \mathbf{X}_3\|_2^2 + \Delta Y_3^2 \|\Delta \mathbf{X}_1\|_2^2) \Delta \mathbf{X}_1 \cdot \Delta \mathbf{X}_3 - \dots \\ \dots 2 \Delta Y_1 \Delta Y_3 \|\Delta \mathbf{X}_1\|_2^2 \|\Delta \mathbf{X}_3\|_2^2 \\ (\Delta Z_1^2 \|\Delta \mathbf{X}_3\|_2^2 + \Delta Z_3^2 \|\Delta \mathbf{X}_1\|_2^2) \Delta \mathbf{X}_1 \cdot \Delta \mathbf{X}_3 - \dots \\ \dots 2 \Delta Z_1 \Delta Z_3 \|\Delta \mathbf{X}_1\|_2^2 \|\Delta \mathbf{X}_3\|_2^2 \\ (\Delta Y_1 \Delta Z_1 \|\Delta \mathbf{X}_3\|_2^2 + \Delta Y_3 \Delta Z_3 \|\Delta \mathbf{X}_1\|_2^2) \Delta \mathbf{X}_1 \cdot \Delta \mathbf{X}_3 - \dots \\ \dots (\Delta Y_1 \Delta Z_3 + \Delta Y_3 \Delta Z_1) \|\Delta \mathbf{X}_1\|_2^2 \|\Delta \mathbf{X}_3\|_2^2 \\ (\Delta X_1 \Delta Z_1 \|\Delta \mathbf{X}_3\|_2^2 + \Delta X_3 \Delta Z_3 \|\Delta \mathbf{X}_1\|_2^2) \Delta \mathbf{X}_1 \cdot \Delta \mathbf{X}_3 - \dots \\ \dots (\Delta X_1 \Delta Z_3 + \Delta X_3 \Delta Z_1) \|\Delta \mathbf{X}_1\|_2^2 \|\Delta \mathbf{X}_3\|_2^2 \\ (\Delta X_1 \Delta Y_1 \|\Delta \mathbf{X}_3\|_2^2 + \Delta X_3 \Delta Y_3 \|\Delta \mathbf{X}_1\|_2^2) \Delta \mathbf{X}_1 \cdot \Delta \mathbf{X}_3 - \dots \\ \dots (\Delta X_1 \Delta Y_3 + \Delta X_3 \Delta Y_1) \|\Delta \mathbf{X}_1\|_2^2 \|\Delta \mathbf{X}_3\|_2^2 \end{array} \right]^T}_{\mathbf{T}_a} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (3.26)$$

Hierbei löschen sich wieder sämtliche Terme, die die Parameter c_{xy} , c_{yz} und c_{zx} enthalten, gegenseitig aus.

Der resultierende Beitrag dieser Winkelfeder zur Elastizitätsmatrix ergibt sich nach Gleichung (3.8) zu

$$\tilde{\mathbf{E}}_a = \frac{k_a}{\Omega_z} \mathbf{T}_a^T \mathbf{T}_a. \quad (3.27)$$

Der Fall einer Winkelfeder zwischen benachbarten Kanten lässt sich hieraus erzeugen, indem nach Abbildung 3.7 $\Delta \mathbf{X}_3 = \mathbf{X}_3 - \mathbf{X}_2$ gesetzt wird.

3.3.3. Bestimmung der Federsteifigkeiten

Aufgrund der Symmetrie der Elastizitätsmatrix stehen im dreidimensionalen Fall zur Bestimmung der 21 Federsteifigkeiten der Tetraederzelle nach Abbildung 3.6 maximal 21 unabhängige Gleichungen in der Matrixgleichung (3.7) zur Verfügung. Diese sind linear unabhängig, sofern die vier Punkte der Federzelle nicht koplanar liegen. Die

Federsteifigkeiten sind somit für die Tetraederzelle eindeutig berechenbar. Aufgrund der Größe des resultierenden Gleichungssystems ist es bislang nicht gelungen, die Lösung für diese Steifigkeiten analytisch zu bestimmen. Folglich muss für die Verwendung dieser Zellen in einer numerischen Simulation das Gleichungssystem (3.7) für jede Tetraederzelle numerisch gelöst werden, um die Federsteifigkeiten des Modells zu erhalten. Jedoch weisen zahlreiche numerische Versuche darauf hin, dass Steifigkeiten der Längsfedern in diesen Zellen analog zum Fall der zweidimensionalen Dreieckszelle bei isotropen Materialien genau dann positiv sind, wenn die VORONOI-Fläche, die diese schneidet, positiv ist.

3.4. Beziehungen zur Lösung der Finiten Elemente

Die in den Abschnitten 3.2 und 3.3 vorgestellten Dreiecks- und Tetraederzellen wurden unter der Annahme eines konstanten Dehnungsfelds im Inneren der Zellen hergeleitet. Diese Annahme ist dieselbe, die auch für lineare Dreiecks- und Tetraederelemente bei der Methode der Finiten Elemente getroffen wird. Hieraus kann die Schlussfolgerung gezogen werden, dass beide Modelle im linear-elastischen Fall zu identischen Ergebnissen führen müssen.

Dies kann überprüft werden, indem die Steifigkeitsmatrizen beider Modelle für dasselbe Material verglichen werden. Hierzu sind grundsätzlich zwei unterschiedliche Vorgehensweisen möglich. Bei der ersten Methode wird die Elastizität des Kontinuums vorgegeben und aus diesem die Federsteifigkeiten der Federzellen bestimmt. Mit diesen wird dann die Steifigkeitsmatrix des Federsystems berechnet und mit der FE-Steifigkeitsmatrix verglichen. Während diese Methode im zweidimensionalen Fall grundsätzlich auch analytisch möglich ist, kann sie im dreidimensionalen Fall mangels analytischer Funktionen für die Federsteifigkeiten nur numerisch und damit fehlerbehaftet durchgeführt werden. Bei der zweiten Methode, die in jedem Fall analytisch möglich ist, werden die Federsteifigkeiten als bekannt angenommen. Aus diesen kann nach Gleichung (3.7) die Elastizitätsmatrix des äquivalenten Kontinuumsmaterials berechnet werden, das wiederum für die Berechnung der FE-Steifigkeitsmatrix verwendet wird. Diese kann nachfolgend mit der Steifigkeitsmatrix der Federzelle verglichen werden.

Beide Möglichkeiten bestätigen dabei, dass das Federmodell und das Finite-Elemente-Modell im linear-elastischen Fall identisch sind. Dies hat den Vorteil, dass alle Eigenschaften Finiten-Elemente-Modelle mit linearen Dreiecks- beziehungsweise Tetraederelementen auch für die hier entwickelten Federmodelle gelten. Einige Beispiele hierfür sind:

- Die Zellen zeigen lineares Konvergenzverhalten bei Netzverfeinerung [13] und

$$\mathbf{K} \left(\begin{array}{c} \text{Dreieck mit linearer Dehnung} \end{array} \right) = \frac{4}{3} \cdot \mathbf{K} \left(\begin{array}{c} \text{Dreieck mit konstantem Dehnungsfeld} \end{array} \right) - \frac{1}{3} \cdot \mathbf{K} \left(\begin{array}{c} \text{Dreieck mit konstantem Dehnungsfeld} \end{array} \right)$$

Abbildung 3.8.: Eine Dreieckszelle mit linearem Dehnungsfeld kann im Zweidimensionalen aus der Summe von fünf Dreieckszellen gleicher Form gebildet werden, die nur ein konstantes Dehnungsfeld darstellen können.

verhalten sich bei nichtkonstanten Dehnungsfeldern viel zu steif [107].

- Es ist im zweidimensionalen Fall möglich, Federzellen mit linearem Dehnungsfeld aus den Federzellen mit konstantem Dehnungsfeld zu erzeugen, indem mehrere dieser Federzellen gleicher Form nach Abbildung 3.8 zusammengebaut werden [4, 131]. Im dreidimensionalen Fall ist dies nicht möglich, da zusätzlich Federzellen anderer Form benötigt würden, die die Mittelknoten auf den Kanten einer Fläche des Tetraeders mit dem gegenüberliegenden Eckknoten verbinden [132].
- Zellen gleicher Form besitzen auch bei unterschiedlicher Größe im zweidimensionalen Fall dieselbe Steifigkeitsmatrix [162].

3.5. Berechnung der Dehnungen bei Stabgittermodellen

Ogleich es sich bei Stabgittermodellen um diskrete Modelle handelt, kann es doch bisweilen sinnvoll sein, Kontinuumsgrößen wie die Dehnung bei ihnen zu berechnen. Diese sind zum Beispiel hilfreich, um die Ergebnisse solcher Modelle mit analytischen Lösungen oder Finite-Elemente-Lösungen diverser Problemstellungen zu vergleichen. Außerdem sind Kontinuumsdehnungen oder -spannungen erforderlich, um bei Bruchrechnungen netzunabhängige Lösungen zu erhalten (siehe hierzu Kapitel 5) und um bei plastischem Verhalten die Volumenerhaltung der plastischen Deformation zu gewährleisten (Kapitel 4).

Da im Stabgittermodell keine inhärente Kontinuumsdehnung vorliegt, kann diese auf unterschiedliche Weise berechnet werden. In den folgenden Abschnitten werden die drei wichtigsten Methoden zur Berechnung der Kontinuumsdehnungen in Stabgittern vorgestellt, die Berechnung der Dehnung in jeder Zelle analog zu Kontinuumsmodellen, die Berechnung der Dehnung an den Knoten, die zum Beispiel von BUXTON ET AL. [31] und ZHAO [179] angewendet wird, sowie die Berechnung der Kontinuumsdehnungen in einzelnen Federverbindungen.

3.5.1. Berechnung der Zelldehnungen

Für die zellenweise Berechnung der Kontinuumsdehnung wird dieselbe Annahme getroffen wie schon bei der Herleitung der Steifigkeiten für die Dreieckszelle in Gleichung (3.3), nämlich die Annahme des konstanten Dehnungsfelds. Diese Annahme impliziert zugleich das lineare Verschiebungsfeld, so dass sämtliche Ableitungen der Verschiebungen nach den Richtungskoordinaten, die in die Dehnung eingehen, durch die entsprechenden Differenzenquotienten ersetzt werden können.

Die Kontinuumsdehnung kann aus dem Deformationsgradienten bestimmt werden, der mit \mathbf{F} bezeichnet wird. Dieser ist gerade die Ableitung der Momentankoordinaten der Punkte eines Systems nach ihren Ursprungskoordinaten, und somit mit der Annahme eines linearen Verschiebungsfelds

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{I} + \frac{\Delta \mathbf{u}}{\Delta \mathbf{X}}, \quad (3.28)$$

wobei \mathbf{I} die Einheitsmatrix der entsprechenden Dimension ist. Die Ableitung der Verschiebungen nach den Richtungskoordinaten, der Verschiebungsgradient, kann nun über die Differenzen der Verschiebungen und der Knotenpositionen bestimmt werden.

$$\begin{bmatrix} u_2 - u_1 \\ v_2 - v_1 \\ w_2 - w_1 \\ u_3 - u_1 \\ \vdots \\ w_4 - w_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial X} & \frac{\partial u}{\partial Y} & \frac{\partial u}{\partial Z} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\partial v}{\partial X} & \frac{\partial v}{\partial Y} & \frac{\partial v}{\partial Z} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\partial w}{\partial X} & \frac{\partial w}{\partial Y} & \frac{\partial w}{\partial Z} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial u}{\partial X} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{\partial w}{\partial Z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_2 - X_1 \\ Y_2 - Y_1 \\ Z_2 - Z_1 \\ X_3 - X_1 \\ \vdots \\ Z_4 - Z_1 \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

Gleichung (3.29) beschreibt dabei den dreidimensionalen Fall des Tetraeders, in dem für die 9 Ableitungen $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}}$ dann genau 9 linear unabhängige Gleichungen existieren. Im zweidimensionalen Fall des Dreiecks reduziert sich diese Gleichung auf vier Gleichungen für die Koeffizienten des Verschiebungsgradienten. Aus dem Deformationsgradienten können anschließend entsprechend den Methoden der Kontinuumsmechanik⁴ sämtliche Dehnungsmaße bestimmt werden. Als Beispiel sei hier die Ingenieurdehnung genannt, da diese auch in sämtlichen Herleitungen verwendet wurde.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\mathbf{F} + \mathbf{F}^T) - \mathbf{I} \quad (3.30)$$

⁴ Eine empfehlenswerte Einführung dazu kann der Leser bei ALTENBACH [2] finden.

Der Hauptvorteil der Berechnung der Dehnungen auf Zellebene ist die Konsistenz dieser Methode. Im Gegensatz zu anderen Methoden nutzt sie dieselben Annahmen, die auch für die Berechnung der Steifigkeiten – und somit der Verschiebungen des Modells – getroffen werden und ermittelt so exakt die Dehnungen, die auch während der Berechnung der Knotenverschiebungen indirekt verwendet werden. Wie auch bei der Methode der Finiten Elemente geben die Dehnungssprünge über die Zellgrenzen hinweg einen Hinweis darauf, wie gut die lokale Approximationsgüte des Modells ist.

3.5.2. Berechnung der Knotendehnungen

Bei der knotenweisen Berechnung der Kontinuumsdehnungen wird angenommen, dass die Dehnungen an jedem Netzknoten als Mittelung der Dehnungen der benachbarten Zellen berechnet werden können. Hierzu wird an jedem Netzknoten j ein Gleichungssystem aufgestellt, das für jeden benachbarten Netzknoten i Gleichungen für die Bestimmung des Verschiebungsgradienten enthält, die wiederum den ersten drei Zeilen in Gleichung (3.29) entsprechen.

$$\begin{bmatrix} u_j - u_i \\ v_j - v_i \\ w_j - w_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial X} & \frac{\partial u}{\partial Y} & \frac{\partial u}{\partial Z} \\ \frac{\partial v}{\partial X} & \frac{\partial v}{\partial Y} & \frac{\partial v}{\partial Z} \\ \frac{\partial w}{\partial X} & \frac{\partial w}{\partial Y} & \frac{\partial w}{\partial Z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_j - X_i \\ Y_j - Y_i \\ Z_j - Z_i \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

Da jeder Knoten im zweidimensionalen Fall mindestens zwei sowie im dreidimensionalen Fall zumindest drei Nachbarknoten besitzt, ist dieses Gleichungssystem immer eindeutig lösbar oder überbestimmt. Für den Fall, dass das Gleichungssystem überbestimmt ist, kann eine Lösung mithilfe der Methode der kleinsten Fehlerquadrate (engl. *least-squares-solution*) bestimmt werden. Der Vorteil dieses Verfahrens ist, dass der Fehler der Dehnungsergebnisse, wie in Abschnitt 3.6.2 gezeigt wird, gegenüber der zellenweisen Berechnung stark reduziert ist. Dies geschieht jedoch auf Kosten der Interpretierbarkeit der Ergebnisse: Zum einen stellen diese Ergebnisse nicht die Kontinuumsdehnungen dar, die in der numerischen Simulation verwendet werden. Stattdessen handelt es sich um eine Mittelung dieser. Zum anderen sind die Ergebnisse für die Dehnung bei der knotenweisen Berechnung glatt, es kann also nicht mehr aus den Sprüngen der Dehnungsergebnisse zwischen den Zellen die Approximationsgüte der Simulation bestimmt werden.

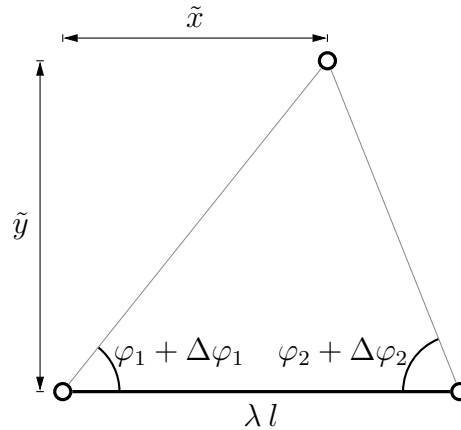


Abbildung 3.9.: Geometrie der Verformung eines Systems aus einer Längsfeder der Länge l und zwei benachbarten Winkel Federn. Die Verformung wird dabei über die Winkeländerungen $\Delta\varphi_1$, $\Delta\varphi_2$ sowie die Streckung der Längsfeder λ vollständig beschrieben.

3.5.3. Berechnung der Dehnungen in Federverbindungen im zweidimensionalen Fall

Zusätzlich zur Berechnung der Zell- und Knotendehnungen kann bei den in dieser Arbeit entwickelten Federzellen die Kontinuumsdehnung auch an den kraftübertragenden Elementen selbst, den Federn, bestimmt werden. Da gezeigt werden kann, dass die Winkel Federn dieser Modelle rotationsinvarianten Schubfederaufbauten entsprechen (siehe Anhang A.1.2), kann der Zusammenbau der Normalkraft Federn und der den Winkel Federn äquivalenten Schub Federn, die wie in Abbildung 3.9 dargestellt zwischen zwei Knoten wirken, als kraftübertragendes Element zum Zweck der Dehnungsbestimmung interpretiert werden. In einem mitdrehenden Koordinatensystem, dessen x -Achse zu jeder Zeit in der Längsfeder i liegt, kann der Deformationsgradient des Federsystems wie folgt bestimmt werden.

$$\tilde{x} = \lambda l \frac{\tan(\varphi_2 + \Delta\varphi_2)}{\tan(\varphi_1 + \Delta\varphi_1) + \tan(\varphi_2 + \Delta\varphi_2)} \quad (3.32a)$$

$$\tilde{y} = \lambda l \frac{\tan(\varphi_1 + \Delta\varphi_1) \tan(\varphi_2 + \Delta\varphi_2)}{\tan(\varphi_1 + \Delta\varphi_1) + \tan(\varphi_2 + \Delta\varphi_2)} \quad (3.32b)$$

$$F_{11} = \lambda \quad (3.32c)$$

$$F_{21} = 0 \quad (3.32d)$$

$$F_{22} = \lambda \frac{\tan(\varphi_1 + \Delta\varphi_1) \tan(\varphi_2 + \Delta\varphi_2) (\tan \varphi_1 + \tan \varphi_2)}{\tan \varphi_1 \tan \varphi_2 (\tan(\varphi_1 + \Delta\varphi_1) + \tan(\varphi_2 + \Delta\varphi_2))} = \frac{\tilde{y}}{\tilde{y}_0} \quad (3.32e)$$

$$F_{12} = \frac{F_{22}}{\tan(\varphi_1 + \Delta\varphi_1)} - \frac{\lambda}{\tan \varphi_1} = \frac{\tilde{x} - \lambda \tilde{x}_0}{\tilde{y}_0} \quad (3.32f)$$

Hierbei bezeichnen \tilde{x}_0 und \tilde{y}_0 die Längen \tilde{x} und \tilde{y} der Zelle im unbelasteten Zustand.

Diese Berechnung des Deformationsgradienten kann für jede der Zellen, an die eine Längsfeder angrenzt, separat durchgeführt werden. Aufgrund der Annahme einer konstanten Dehnung innerhalb der Zelle ist dabei das Ergebnis jeweils äquivalent zur Dehnungsberechnung pro Zelle. Der einzige Unterschied liegt darin, dass bei der verbindungbezogenen Berechnung des Deformationsgradienten ein mitdrehendes Maß bestimmt wird. Sofern gewünscht, kann zusätzlich die gemittelte Dehnung einer Verbindung, die an zwei Zellen angrenzt, durch einfache oder gewichtete Mittelwertbildung der einzelnen Dehnungen bestimmt werden.

Der Vorteil dieser Berechnungsmethodik ist, dass sie die Deformation in den kraftübertragenden Elementen des Modells bestimmt und zudem auch auf Zellen erweitert werden kann, die keine geschlossenen Dreiecke mehr sind. Ein Beispiel hierfür wird im Zuge der Bruchsimulation in Abschnitt 5.3.1 vorgestellt.

3.6. Ergebnisse linear-elastischer Rechnungen

In diesem Abschnitt werden die Lösungen der neu entwickelten Federzellen mit bereits existierenden Modellen aus der Literatur verglichen. Hierzu wurden zwei fundamentale Problemstellungen gewählt, für die analytische Lösungen vorliegen, mit denen die Lösungen der numerischen Simulationen verglichen werden können: Das erste Problem ist ein Quader, der mit einer konstanten Spannung belastet ist (Abschnitt 3.6.1). Dieser Test entspricht im Wesentlichen dem aus der Methode der Finiten Elemente bekannten Patch-Test nach IRONS [77], der im Fall kompatibler Verschiebungsfelder eine Aussage über die Konvergenz des Modells trifft [78, 161]. Das zweite Beispielproblem in Abschnitt 3.6.2 ist ein Hohlzylinder unter Innendruck. Anhand dieses Beispiels kann das Modellverhalten bei einem nichtkonstanten Dehnungsfeld nachvollzogen werden und Aussagen über den Fehler getroffen werden.

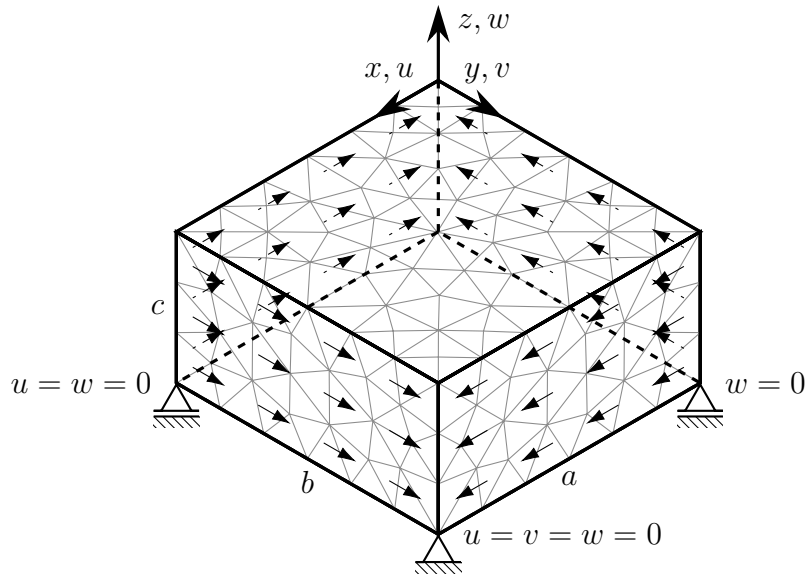
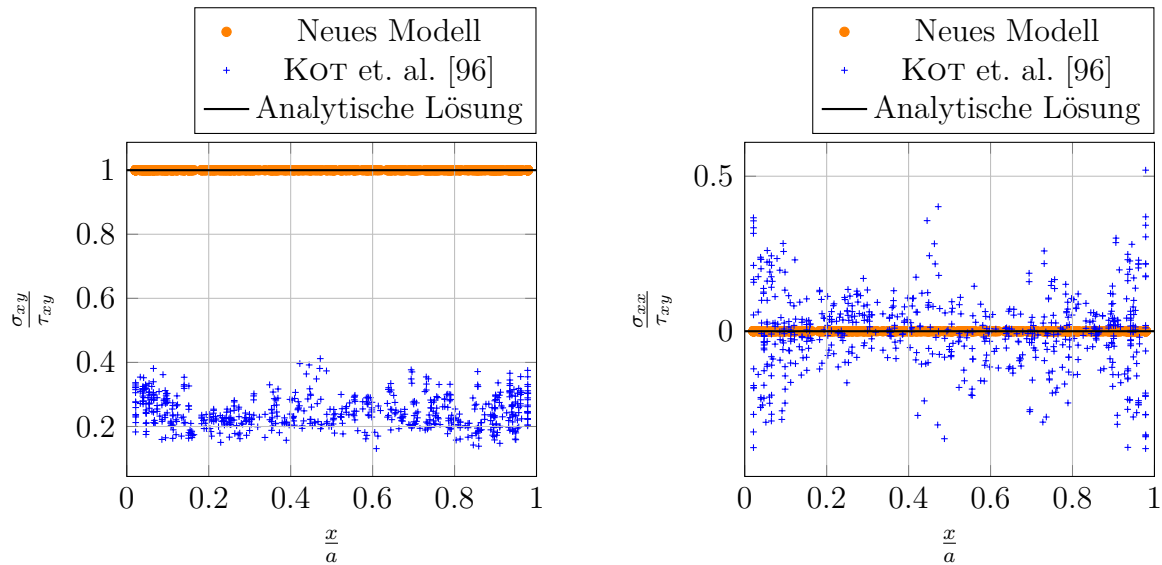


Abbildung 3.10.: Modell eines Quaders für den Test mit konstanter Spannung. Der verwendete Quader besitzt die Dimensionen $a = 1$ m, $b = 1$ m und $c = \frac{1}{2}$ m und ist mit einer Schubspannung von $\tau_{xy} = 1 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$ in der x - y -Ebene belastet. Das verwendete Netz ist an der Oberfläche des Quaders in grau dargestellt.

3.6.1. Ergebnisse für Probleme mit konstantem Dehnungsfeld

Für den Vergleich der Ergebnisse bei einem konstanten äußeren Spannungsfeld wird nach Abbildung 3.10 ein unter konstantem x - y -Schub belasteter, statisch bestimmt gelagerter Quader verwendet. Nach der Kontinuumstheorie sollte sich in diesem Fall im Inneren des Quaders ein konstantes Spannungsfeld einstellen, bei dem die x - y -Schubspannung gerade der äußeren Spannung entspricht, während alle anderen Spannungskomponenten zu Null werden. Neben der Lösung für das in dieser Arbeit entwickelte Federmodell ist in Abbildung 3.11 die Lösung für das Modell nach KOT ET AL. [96] als Beispiel für ein Modell, bei dem nur Normalkraftfedern verwendet werden, dargestellt. Bei diesem Modell werden die Federsteifigkeiten als $k_j = 5 E \Omega_j$ berechnet, wobei E der Elastizitätsmodul des Materials und Ω_j die Summe der Volumina der an die Feder angrenzenden Tetraederzellen ist.

Wie in Abbildung 3.11 zu erkennen ist, ist das in dieser Arbeit entwickelte Modell wie erwartet in der Lage, das konstante Spannungsfeld exakt abzubilden, während das Normalkraftmodell die Schubspannung stark unterschätzt und stattdessen einen großen Teil der Kräfte über Normalspannungen überträgt (Abbildung 3.11b). Dieses Verhalten von Systemen, die ausschließlich aus Normalkraftfedern aufgebaut sind, ist typisch für



(a) Schubspannung in den Zellen.

(b) Normalspannung in den Zellen.

Abbildung 3.11.: Spannungsergebnisse bezogen auf die äußere Spannung für einen Quader unter konstanter Spannung.

alle Modelle dieser Klasse.

3.6.2. Ergebnisse für einen Hohlzylinder unter Innendruck

Um das Verhalten des neu entwickelten Modells bei nichtkonstanten Spannungsfeldern zu untersuchen, wird das Modell eines dickwandigen Hohlzylinders aus isotropem Material unter Innendruck verwendet. Für die Simulation wird hierbei aufgrund der Symmetrie nur ein zweidimensionales Viertelmodell nach Abbildung 3.12 modelliert. Dieses Problem hat den Vorteil, dass eine analytische Lösung nach LAMÉ und CLAPEYRON [100, S. 516ff] bekannt ist. Diese Lösung lässt sich bei Verwendung eines (r, θ, z) -Zylinderkoordinatensystems für einen Hohlzylinder mit einem Innenradius r_i , einem Außenradius von r_a und einem Innendruck von p_i als

$$\sigma_{rr} = \frac{p_i r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} \left(1 - \frac{r_a^2}{r^2} \right) \quad \sigma_{\theta\theta} = \frac{p_i r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} \left(1 + \frac{r_a^2}{r^2} \right) \quad \sigma_{r\theta} = 0 \quad (3.33)$$

darstellen und hängt somit nur vom Radius r , nicht aber vom Umfangswinkel θ ab. Eine weitere Eigenschaft dieser Lösung ist, dass bei ebenen Verformungsproblemen die Spannung in Längsrichtung (z -Richtung) des Zylinders konstant ist und somit der

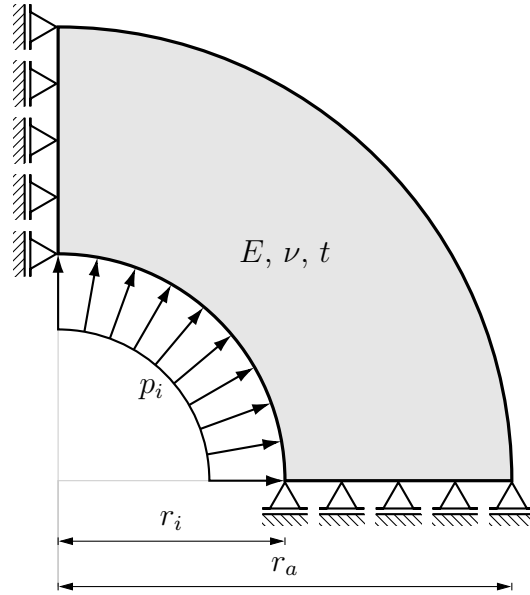


Abbildung 3.12.: Modell eines Hohlzylinders unter Innendruck. Für die Simulation wird $r_i = \frac{1}{2} r_a$ und $\nu = \frac{1}{4}$ verwendet. Alle weiteren Größen haben aufgrund der Linearität des Problems keinen Einfluss auf die Spannungsergebnisse.

Approximationsfehler der Simulation mithilfe dieser Größe gut abgeschätzt werden kann.

$$\sigma_{zz} = \nu (\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}) = 2\nu \frac{p_i r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} \quad (3.34)$$

Um das hier entwickelte Modell mit bestehenden Modellen zu vergleichen, wurden aus der Literatur zwei weitere zweidimensionale Modelle für unregelmäßige Rechnetze ausgewählt.

Beim ersten Vergleichsmodell nach GRASSL und BAŽANT [56] werden die Federsteifigkeiten ähnlich zum dreidimensionalen Modell nach KOT ET AL. [96] über den Elastizitätsmodul E des Materials und über die Geometrie der angrenzenden Dreieckszellen berechnet. Bezeichnet man die Fläche der an die Feder angrenzenden Dreiecke mit A_Δ , die Länge der Feder mit l_i und die Dicke der zu berechnenden Scheibe mit t , so ist die Federsteifigkeit

$$k_i = \frac{E A_i}{l_i} \quad \text{mit} \quad A_i = t \frac{A_\Delta}{3 l_i}. \quad (3.35)$$

Hierbei ist A_i die Querschnittsfläche eines Stabes, der dieselbe Steifigkeit besitzt wie die Feder. Im Gegensatz zur Veröffentlichung von GRASSL und BAŽANT wird in dieser Arbeit ein Stabquerschnitt von $A_i = t \frac{A_\Delta}{3 l_i}$ verwendet, da sonst die Steifigkeit des Gesamtsystems

tems verglichen mit dem Kontinuumsmodell um den Faktor 3 zu gering ist. Dies kann zum Beispiel überprüft werden, indem die Stabflächen für ein periodisches Gitter aus gleichseitigen Dreiecken mit der Lösung nach HRENNIKOFF [70] verglichen werden.

Als zweites Vergleichsmodell wird eine Modifikation des HRENNIKOFF'schen Modells [70] verwendet. Bei dieser Modifikation wird die Stabfläche des Stabwerkmodells so berechnet, als läge ein periodisches Gitter aus gleichseitigen Dreiecken vor. Jedoch wird anstelle der Länge der Stäbe im gleichseitigen Gitter die tatsächliche Länge der Stäbe verwendet [142]. Dies ist notwendig, da das Netz bei diesem Verfahren nicht durch Verzerrung eines periodischen Gitters erzeugt wird und somit im Gegensatz zu anderen Arbeiten [64, 65] keine Länge des unverzerrten Gitters vorhanden ist, aus der die Stabsteifigkeit berechnet werden kann. Somit ergibt sich die Steifigkeit der Stabfedern als $\frac{\sqrt{3}}{4} E t$.

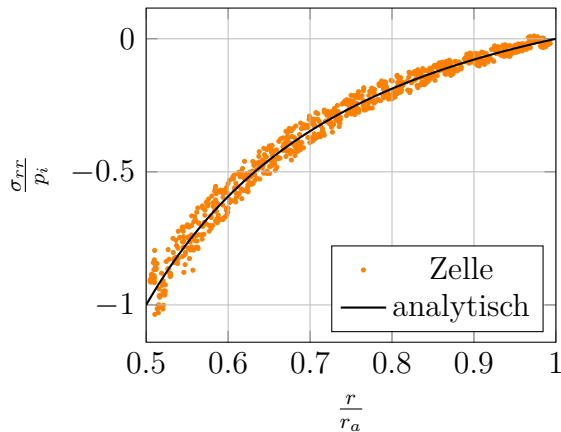
Die Ergebnisse der drei Modelle für die Radialspannung und die Spannung in Längsrichtung⁵ des Zylinders bei ebener Verformung sind in den Abbildungen 3.13 beziehungsweise 3.14 zu sehen. Es ist dabei klar zu erkennen, dass das in diesem Kapitel entwickelte Federmodell die analytische Lösung für die Spannungen wesentlich genauer abbilden kann als die Vergleichsmodelle, da die Streuung der Ergebnisse um die analytische Lösung wesentlich geringer ist. Dies ist sowohl für die Spannungsauswertung in den Zellen als auch an den Knoten der Fall, wobei für alle Modelle die Spannungsergebnisse an den Knoten wesentlich weniger streuen als die Spannungsergebnisse in den Zellen. Weiterhin ist auffällig, dass die Streuung der Ergebnisse des Modells nach GRASSL und BAŽANT, das explizit für unregelmäßige Netze hergeleitet wurde, kaum geringer ist als die Streuung des modifizierten Modells nach HRENNIKOFF. Dies lässt darauf schließen, dass Modelle, die nur aus Normalfedern bestehen, prinzipiell für unregelmäßige Gitter große Streuungen in den Ergebnissen liefern, unabhängig davon, ob sie für regelmäßige oder unregelmäßige Gitter formuliert wurden.

Ein detaillierterer Vergleich der Berechnung der Spannungen in Zellen, an Knoten und an Verbindungen ist in Abbildung 3.15 zu sehen. Hierbei ist zu erkennen, dass sowohl die Berechnung der Spannungen an den Knoten als auch die Berechnung der Spannungen in den Verbindungen weniger stark streuen als die Spannungen in den Zellen und somit genauer sind. Der Grund hierfür ist bei beiden Methoden ähnlich: Bei der knotenweisen Berechnung der Spannungen nach Abschnitt 3.5.2 wird die Dehnung – und somit die Spannung – als gewichtetes Mittel der Zellspannungen berechnet, die diesen Knoten umgeben. Wie in Abbildung 3.16c zu sehen ist, oszilliert der Fehler in angrenzenden Dreieckszellen bei nichtkonstanten Dehnungen häufig um einen Fehler von Null. Durch

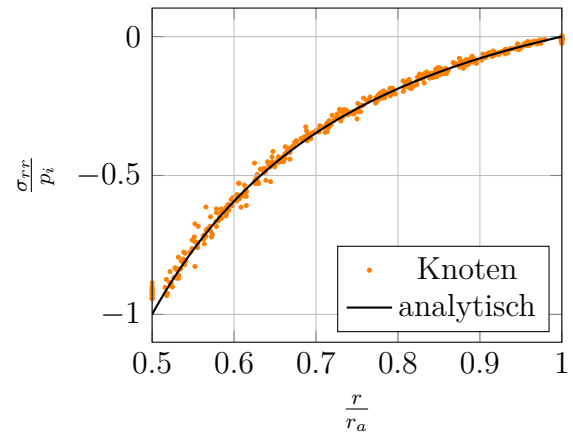
⁵ Die Tangentialspannungen verhalten sich ähnlich zu den Radialspannungen und sind daher nicht dargestellt.

die Mittelwertbildung wird somit in den Knoten der Fehler reduziert (Abbildung 3.16d). Dieser Effekt ist auch schon in den Ergebnissen der Spannungen selbst zu sehen. In Abbildung 3.16a kann beobachtet werden, dass entlang der Tangentialrichtung immer gerade die Zellen eine höhere Spannung aufweisen, die eine Spitze besitzen, die in Radialrichtung nach innen zeigt. Durch die Mittelung bei der Spannungsberechnung an den Knoten ist die Spannung bei der Berechnung an den Knoten in Tangentialrichtung dagegen fast konstant (Abbildung 3.16b). Gleiches gilt für die Berechnung der Spannungen und Dehnungen in den Federverbindungen nach Abschnitt 3.5.3. Diese Berechnung entspricht im Falle von Dreieckszellen gerade der Mittelwertbildung der Spannung der Zellen, an die die Verbindung angrenzt. Durch das entgegengesetzte Vorzeichen des Spannungsfehlers bei benachbarten Zellen wird dadurch der Fehler in der Verbindung wieder wesentlich kleiner ausfallen.

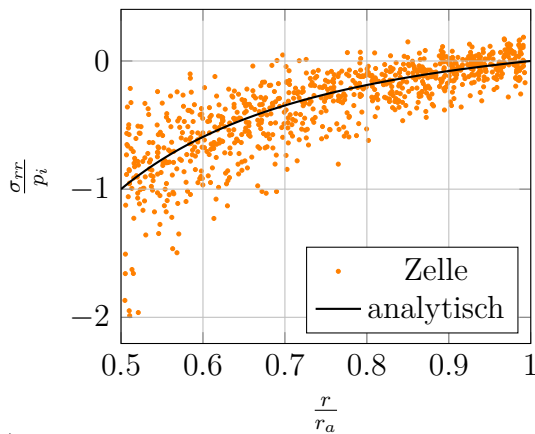
Wie bereits in Abschnitt 3.5.2 angesprochen, wird trotzdem empfohlen, die Spannungen und Dehnungen innerhalb der Zellen zu berechnen, da diese die direkten, unverfälschten Werte der numerischen Simulation widerspiegeln. Die Sprünge zwischen diesen Werten liefern somit zusätzlich eine Aussage über die Approximationsgüte und den Fehler in der numerischen Simulation.



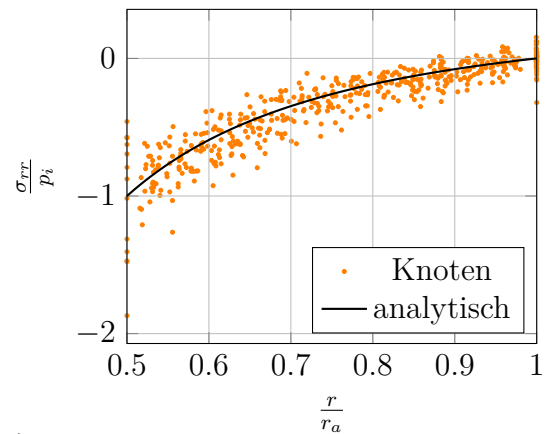
(a) Spannung in der Zelle: Neues Modell.



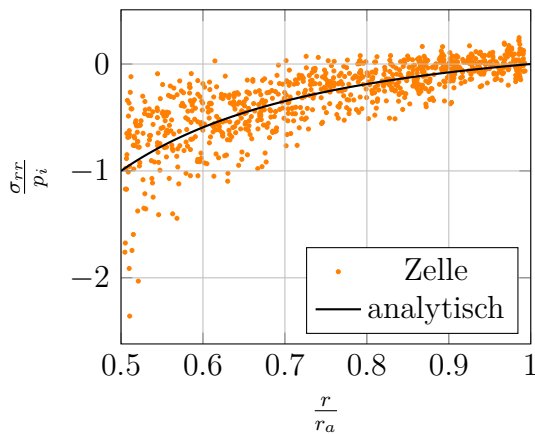
(b) Spannung an den Knoten: Neues Modell.



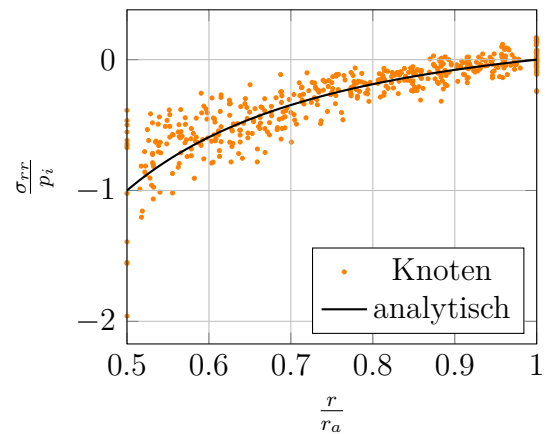
(c) Spannung in der Zelle: Modell nach GRASSL und BAŽANT [56].



(d) Spannung an den Knoten: Modell nach GRASSL und BAŽANT [56].

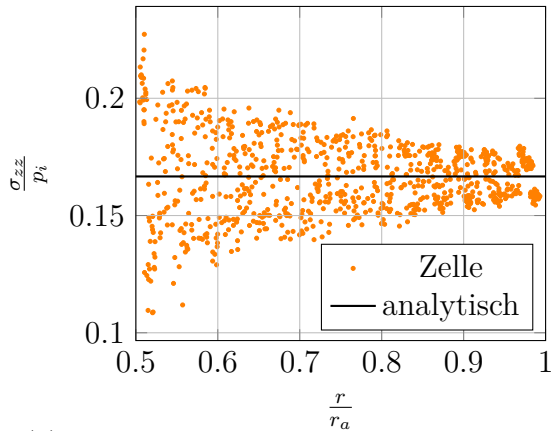


(e) Spannung in der Zelle: HRENNIKOFF-ähnliches Modell.

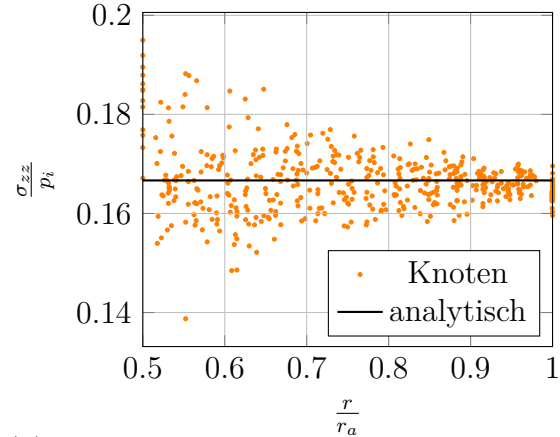


(f) Spannung an den Knoten: HRENNIKOFF-ähnliches Modell.

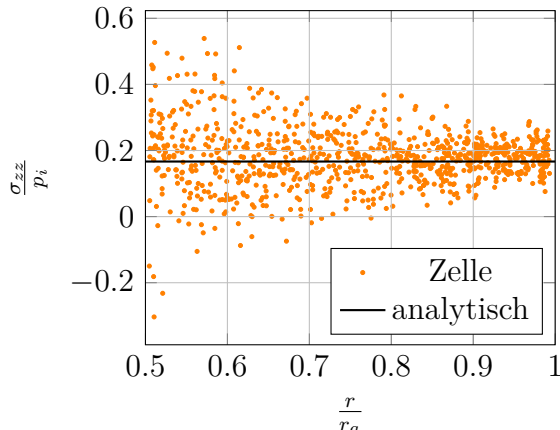
Abbildung 3.13.: Auf den Innendruck bezogene Radialspannungen $\frac{\sigma_{rr}}{p_i}$ in den Zellen (a,c,e) und an den Knoten (b,d,f) für die unterschiedlichen Modelle. Die bezogenen Spannungen sind über den gesamten Winkelbereich über dem bezogenen Radius $\frac{r}{r_a}$ aufgetragen.



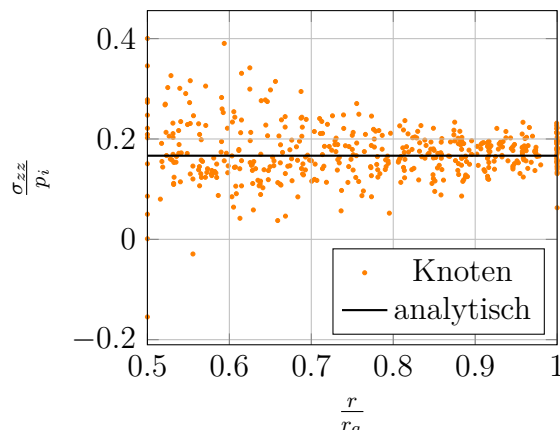
(a) Spannung in der Zelle: Neues Modell.



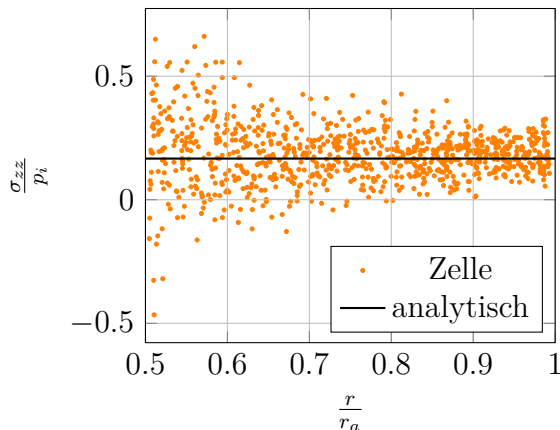
(b) Spannung an den Knoten: Neues Modell.



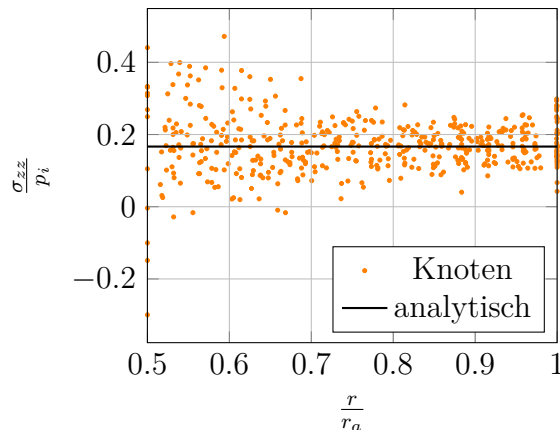
(c) Spannung in der Zelle: Modell nach GRASSL und BAŽANT [56].



(d) Spannung an den Knoten: Modell nach GRASSL und BAŽANT [56].

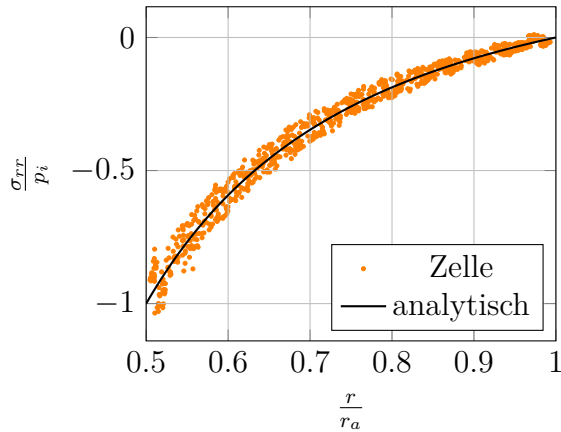


(e) Spannung in der Zelle: HRENNIKOFF-ähnliches Modell.

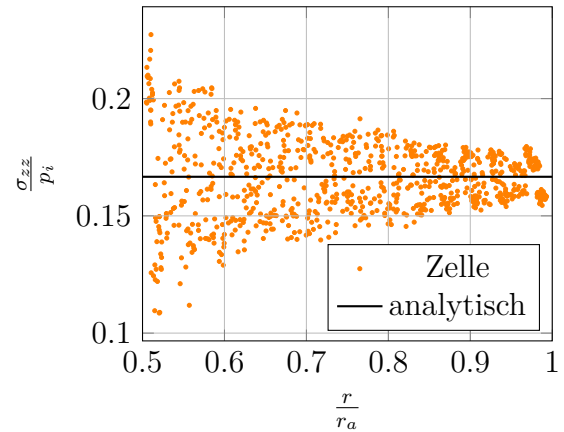


(f) Spannung an den Knoten: HRENNIKOFF-ähnliches Modell.

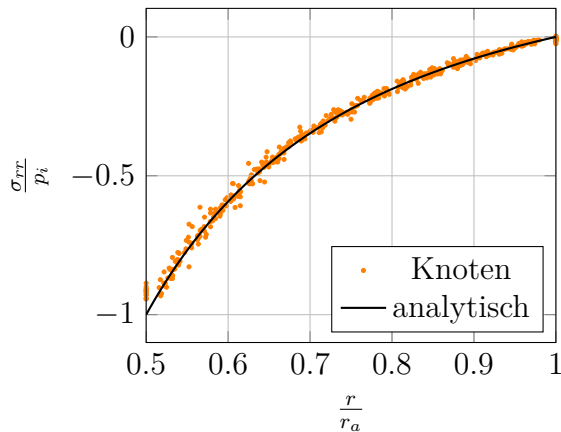
Abbildung 3.14.: Auf den Innendruck bezogene Spannungen in Dickenrichtung $\frac{\sigma_{zz}}{p_i}$ in den Zellen (a,c,e) und an den Knoten (b,d,f) für die unterschiedlichen Modelle. Die bezogenen Spannungen sind über den gesamten Winkelbereich über dem bezogenen Radius $\frac{r}{r_a}$ aufgetragen.



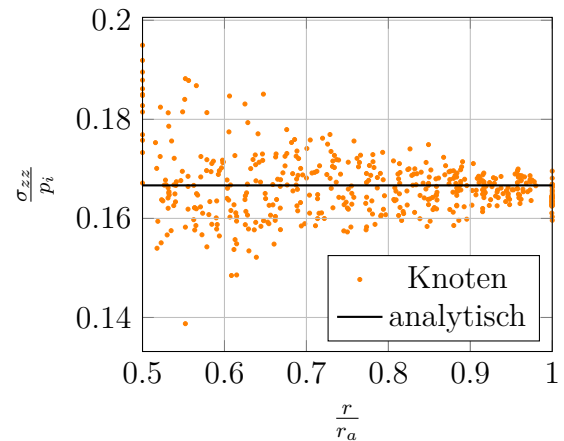
(a) Radialspannung in der Zelle.



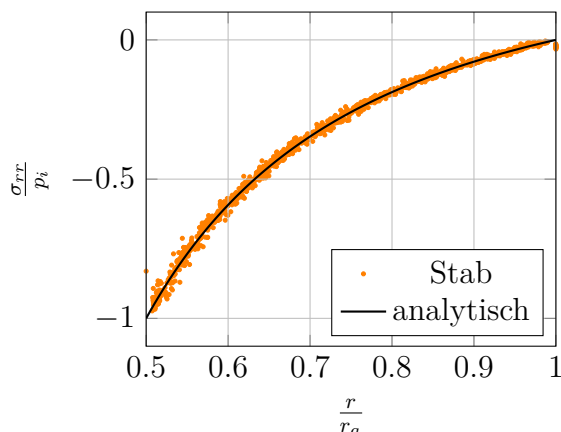
(b) z-Normalspannung in der Zelle



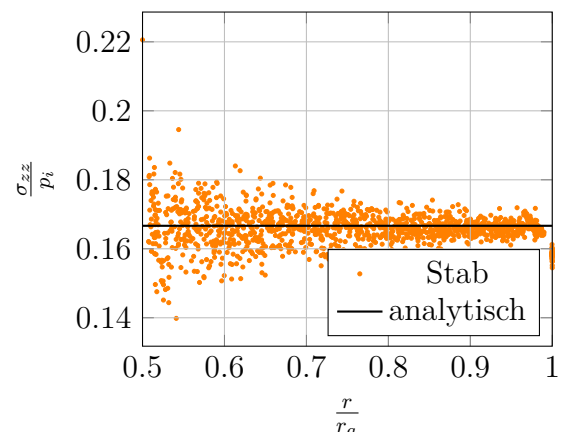
(c) Radialspannung an den Knoten.



(d) z-Normalspannung an den Knoten.



(e) Radialspannung in den Verbindungen.



(f) z-Normalspannung in den Verbindungen.

Abbildung 3.15.: Vergleich der Berechnung der bezogenen Spannungen in der Zelle (a,b), an den Knoten (c,d) und in den Verbindungen (e,f) für das neu entwickelte Modell. Die bezogenen Spannungen sind über den gesamten Winkelbereich über dem bezogenen Radius $\frac{r}{r_a}$ aufgetragen.

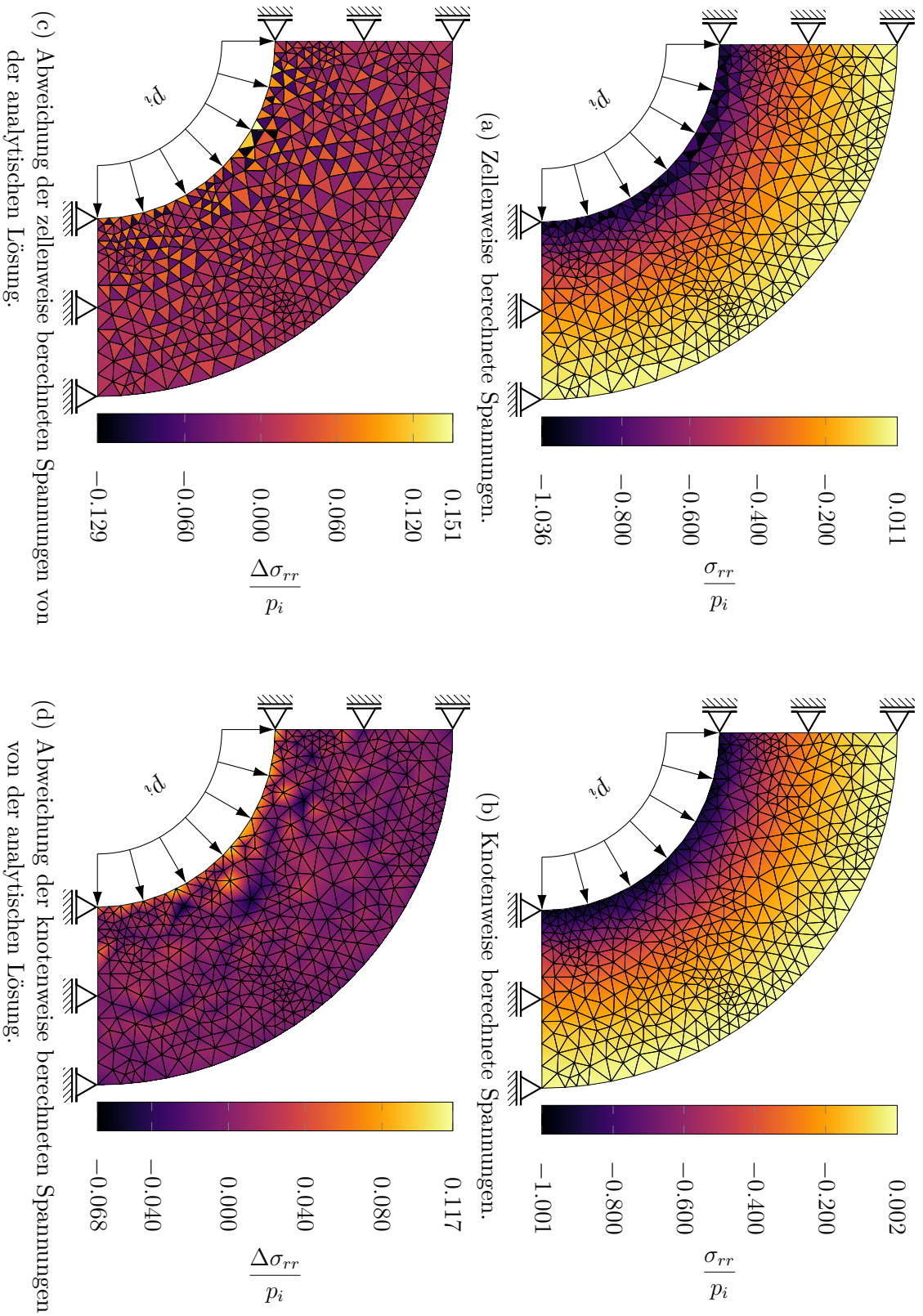


Abbildung 3.16.: Verlauf von Radialspannung und -spannungsfelder für die knoten- und zellenweise Berechnung der Spannungen.

4. Ein elasto-plastisches Stabgittermodell

Eines der großen Probleme diskreter Federmodelle aus der Literatur ist die Modellierung über die Elastizität hinausgehender mehrdimensionaler Vorgänge im Kontinuumsmaterial wie das Phänomen der Plastizität. In diesem Kapitel wird gezeigt, wie das Phänomen der isotropen, assoziierten Kontinuumsplastizität in das zweidimensionale diskrete Federmodell, das in Kapitel 3 entwickelt wurde, implementiert werden kann. Nach einer kurzen Einführung in die Teile der Kontinuumsplastizität, die hierzu benötigt werden, wird die Anwendung auf das Federmodell vorgestellt und gezeigt, dass dieses im Gegensatz zu anderen diskreten Modellen in der Lage ist, die Volumenerhaltung bei plastischer Verformung exakt zu erfüllen. Außerdem wird an Beispielen veranschaulicht, dass das neu entwickelte Federmodell prinzipiell in der Lage ist, sowohl die perfekte Plastizität als auch Verfestigung und Entfestigung des Materials abzubilden.

4.1. Grundlagen der isotropen Kontinuumsplastizität

Materialien zeigen im Allgemeinen irreversibles Verhalten, sobald gewisse Grenzwerte der lokalen Verformung überschritten werden. Diese Irreversibilitäten können sich in der Rissbildung oder der plastischen Verformung äußern. Die plastischen Verformungen entstehen dabei dadurch, dass sich im Material auf atomarer Ebene Gleitebenen bilden, entlang derer sich das Material irreversibel gegeneinander verschiebt [69]. Die Kontinuumsplastizität behandelt dieses Phänomen nicht in der Größenordnung der einzelnen Gleitebenen, sondern als gemittelt, makroskopisch beobachtbares Verhalten.

In diesem Abschnitt werden die Grundlagen der Kontinuumsplastizität, die in dieser Arbeit benötigt werden, kurz vorgestellt. Für einen breiteren Überblick über das Thema der Kontinuumsplastizität sei hier jedoch auf die Lehrbücher von HILL [69], KHAN und HUANG [90] sowie DOLTSINIS [44, 45] verwiesen.

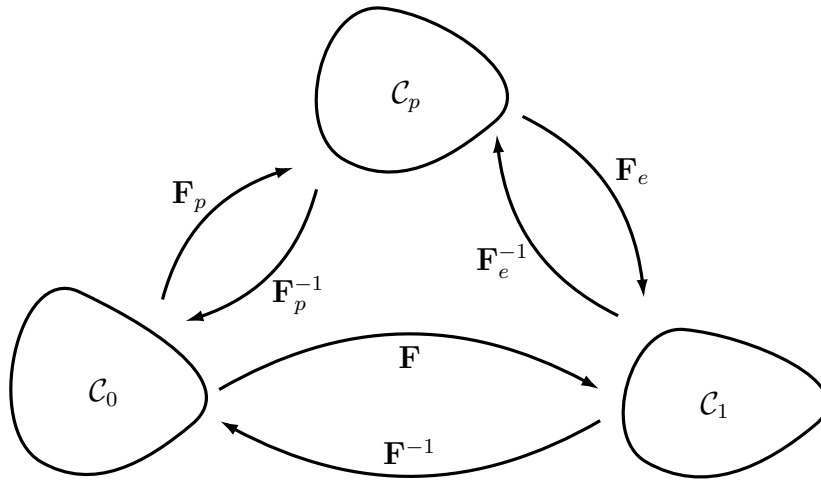


Abbildung 4.1.: Verformung eines Körpers aus dem Anfangszustand \mathcal{C}_0 in den Endzustand \mathcal{C}_1 . Diese Abbildung erfolgt in der Elastoplastizität über einen künstlichen Zwischenzustand \mathcal{C}_p , in dem das plastisch verformte Material spannungsfrei ist.

4.1.1. Aufteilung der Verformung in elastischen und plastischen Anteil

Die mathematische Beschreibung der Plastizität bei endlichen Verformungen geht davon aus, dass die Gesamtverformung eines mechanischen Systems, die durch den Deformationsgradienten \mathbf{F} beschrieben wird, in einen elastischen und einen plastischen Anteil zerlegt werden kann. Diese Zerlegung kann auf unterschiedliche Art erfolgen: GREEN und NAGHDI [58] beispielsweise nutzen in ihrer Arbeit eine additive Zerlegung des GREEN-LAGRANGE'schen Dehnungsmaßes, während LEE [102], wie in Abbildung 4.1 zu sehen ist, davon ausgeht, dass die Gesamtdeformation dadurch erhalten werden kann, dass auf einen spannungsfreien, plastisch verformten Deformationszustand¹ eine zusätzlich elastische Verformung aufgebracht wird. Wird die Gesamtdeformation über den Deformationsgradienten \mathbf{F} , der plastische Anteil der Deformation über den plastischen Deformationsgradienten \mathbf{F}_p und der elastische Anteil der Deformation über den elastischen Deformationsgradienten \mathbf{F}_e beschrieben, so ist die Beziehung dieser nach LEE

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_e \mathbf{F}_p. \quad (4.1)$$

¹ Dieser plastische Deformationszustand ist im Allgemeinen nicht kompatibel. Erst durch die zusätzliche elastische Deformation wird die Kompatibilität der Gesamtverformung erreicht. Diese Inkompatibilität des plastischen Deformationszustands ist somit auch die Ursache der Residualspannungen im plastisch verformten System.

Aus der Abbildung (4.1) kann durch Umformen bei bekanntem plastischen Deformationsgradienten der elastische Anteil der Deformation zu

$$\mathbf{F}_e = \mathbf{F} \mathbf{F}_p^{-1} \quad (4.2)$$

bestimmt werden. Für den Fall infinitesimaler elastischer Dehnungen wird oftmals die multiplikative Zerlegung der Gesamtdeformation durch eine additive Zerlegung $\mathbf{F} = \mathbf{F}_e + \mathbf{F}_p$ ersetzt.

4.1.2. Berechnung des plastischen Anteils der Verformung

Plastische Verformung tritt in Materialien dann auf, wenn die Belastung des Materials einen kritischen Wert überschreitet. Die Belastung des Materials wird dabei entweder über die Spannung $\boldsymbol{\sigma}$ oder den elastischen Anteil der Dehnung $\boldsymbol{\varepsilon}_e$ beschrieben. In dieser Arbeit wird im Gegensatz zu klassischen Plastizitätsformulierungen [69] der dehnungsbezogene Ansatz gewählt. Dieser hat gegenüber dem spannungsbezogenen Ansatz den Vorteil, dass die Spezialfälle der perfekten Plastizität und der Entfestigung nach NAGHDI und TRAPP [116, 117] sowie NAGHDI [115] keiner gesonderten numerischen Behandlung bedürfen. Der Grund hierfür ist, dass das plastische Dehnungsinkrement immer als eine eindeutige Funktion der Gesamtdehnung, nicht aber der Spannung ausgedrückt werden kann. Aus demselben Grund können nach YODER und IWAN [178] auch Materialgesetze mit Fließfunktionen, die nicht stetig differenzierbar sind, wesentlich einfacher in dehnungsbasierten Plastizitätsmodellen erfasst werden.

Für die mathematische Formulierung der Kontinuumsplastizität in dehnungsbezogener Form werden wie auch bei der spannungsbezogenen Form im Wesentlichen drei Kernelemente benötigt [44, 90]: Die Fließbedingung, die Fließregel und die Evolutionsgleichungen der plastischen Variablen. Die Fließbedingung gibt dabei an, ob ein im Material plastisches Fließen stattfindet. Sie ist eine Ungleichung der Form

$$f(\boldsymbol{\varepsilon}_e) \leq 0, \quad (4.3)$$

die den elastischen Anteil der Dehnung über die Fließfunktion $f(\boldsymbol{\varepsilon}_e)$ mit einer maximal zulässigen Dehnung vergleicht. Wird die zulässige elastische Dehnung überschritten, so ist die Fließbedingung (4.3) verletzt und plastisches Fließen findet solange statt, bis der elastische Dehnungsanteil die zulässige elastische Dehnung erreicht. Um diesen Vergleich durchführen zu können, wird der elastische Dehnungsanteil $\boldsymbol{\varepsilon}_e$ mittels einer

Vergleichshypothese in eine skalare Vergleichsdehnung überführt. Für unterschiedliche Materialien existieren dabei unterschiedliche Versagenshypthesen, wie die Hypothesen nach HUBER [71, 72] und VON MISES [169], TRESCA [165], MOHR-COULOMB [112, S. 209ff] und DRUCKER und PRAGER [46].

In dieser Arbeit wird ausschließlich die Vergleichshypothese nach VON MISES verwendet, die insbesondere für isotrope Metalle geeignet ist. Nach der VON MISES-Hypothese wird plastisches Fließen, wie auch im Versuch bei Metallen nach BRIDGMAN [30] gezeigt wurde, nur durch deviatorische Verformungen verursacht. Im Widerspruch zu den Versuchen von BRIDGMAN berücksichtigt diese Theorie jedoch nicht die Änderung der plastischen Eigenschaften eines Materials unter hydrostatischem Druck. Somit ist das plastische Fließen bei Betrachtung des Spannungsraums nur von der deviatorischen Spannung

$$\boldsymbol{\sigma}_{\text{dev.}} = \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3} \text{Sp } \boldsymbol{\sigma} \quad (4.4a)$$

oder, aufgrund des als isotrop angenommenen Materialverhaltens, nur vom deviatorischen Anteil der elastischen Dehnung

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{e,\text{dev.}} = \boldsymbol{\varepsilon}_e - \frac{1}{3} \text{Sp } \boldsymbol{\varepsilon}_e = \frac{\boldsymbol{\sigma}_{\text{dev.}}}{G} \quad (4.4b)$$

abhängig. Die deviatorischen Spannungen und deviatorischen elastischen Dehnungen sind dabei über den skalaren Schubmodul G miteinander direkt verknüpft. Die Fließfunktion ergibt sich im Spannungsraum aus der äquivalenten Energie der Vergleichsspannung und der deviatorischen Spannung zu

$$f(\boldsymbol{\sigma}) = \sqrt{\frac{3}{2} \boldsymbol{\sigma}_{\text{dev.}} : \boldsymbol{\sigma}_{\text{dev.}}} - \sigma_v(\boldsymbol{\lambda}), \quad (4.5a)$$

woraus sich wiederum über die Äquivalenz der Dehnungsenergie der Vergleichsgrößen und der deviatorischen Größen die Fließfunktion im Dehnungsraum zu

$$f(\boldsymbol{\varepsilon}_e) = \sqrt{\frac{2}{3} \boldsymbol{\varepsilon}_{e,\text{dev.}} : \boldsymbol{\varepsilon}_{e,\text{dev.}}} - \varepsilon_v(\boldsymbol{\lambda}) \quad (4.5b)$$

ergibt. Die Größen $\sigma_v(\boldsymbol{\lambda})$ und $\varepsilon_v(\boldsymbol{\lambda})$ sind dabei die zulässige Vergleichsspannung beziehungsweise -dehnung. Diese hängen jeweils von der bisherigen Belastungsgeschichte ab, die durch einen Satz plastischer Variablen $\boldsymbol{\lambda}$ modelliert wird.

Das zweite Kernelement der plastischen Theorie, die Fließregel, gibt an, in welcher

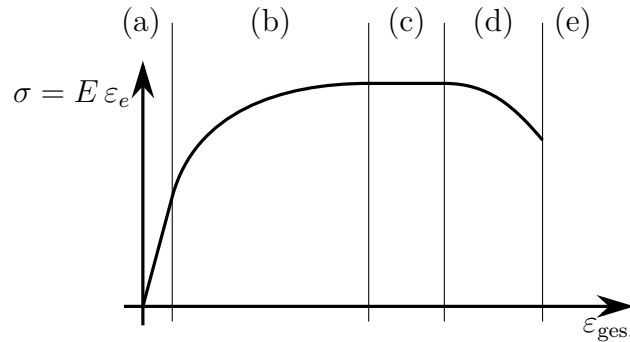


Abbildung 4.2.: Verlauf der zulässigen Spannung $\sigma = E \varepsilon_e$ als Funktion der Gesamtdehnung $\varepsilon_{\text{ges.}}$. Dargestellt sind ein linear-elastischer Bereich (a), ein Bereich mit Verfestigung (b), ein perfekt-plastischer Bereich (c), ein Bereich mit Entfestigung (d) sowie der Bruch des Materials bei (e).

Richtung die plastische Verformung stattfindet. Hierbei existieren im Wesentlichen zwei Ansätze: Die assoziierte Fließregel nimmt an, dass der plastische Fluss in Richtung des Gradienten der Fließfunktion stattfindet. Diese Annahme, die für metallische Werkstoffe makroskopisch näherungsweise erfüllt ist, führt für die VON MISES'sche Fließbedingung dazu, dass der plastische Fluss in Richtung der deviatorischen Dehnung zeigt.

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{\varepsilon}_e)}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_e} = \frac{1}{f(\boldsymbol{\varepsilon}_e)} \frac{2}{3} \boldsymbol{\varepsilon}_{e,\text{dev.}} \quad (4.6)$$

Findet plastischer Fluss in einer anderen Richtung statt, so spricht man von einer nichtassozierten Fließregel. In diesem Fall muss die Richtung des plastischen Fließens durch eine zusätzliche Gleichung angegeben werden.

Das letzte Kernelement der plastischen Theorie sind die Evolutionsgleichungen der plastischen Variablen $\boldsymbol{\lambda}$. Eine Veränderung dieser Variablen führt dabei dazu, dass der Raum der zulässigen elastischen Verformungszustände modifiziert wird. Im einfachsten Fall, der perfekten Plastizität, findet keine Evolution der plastischen Variablen statt. In der Folge bleibt die Fließfunktion gleich und somit der zulässige elastische Anteil der Verformung bei beliebiger Gesamtverformung nach Abbildung 4.2, Bereich (c), konstant.

Soll die Fließfläche – die Begrenzungsfläche der zulässigen elastischen Dehnungen im Dehnungsraum – durch die plastische Verformung modifiziert werden, so bieten sich die Möglichkeiten der isotropen Verfestigung und Entfestigung sowie der kinematischen Verfestigung an. Bei der isotropen Verfestigung und Entfestigung [69] wird die zulässige Vergleichsdehnung $\varepsilon_v(\boldsymbol{\lambda})$ bei einer Änderung der plastischen Variablen $\boldsymbol{\lambda}$ modifiziert. Dies entspricht, wie in Abbildung 4.3a zu sehen ist, einer Skalierung der Fließfläche im

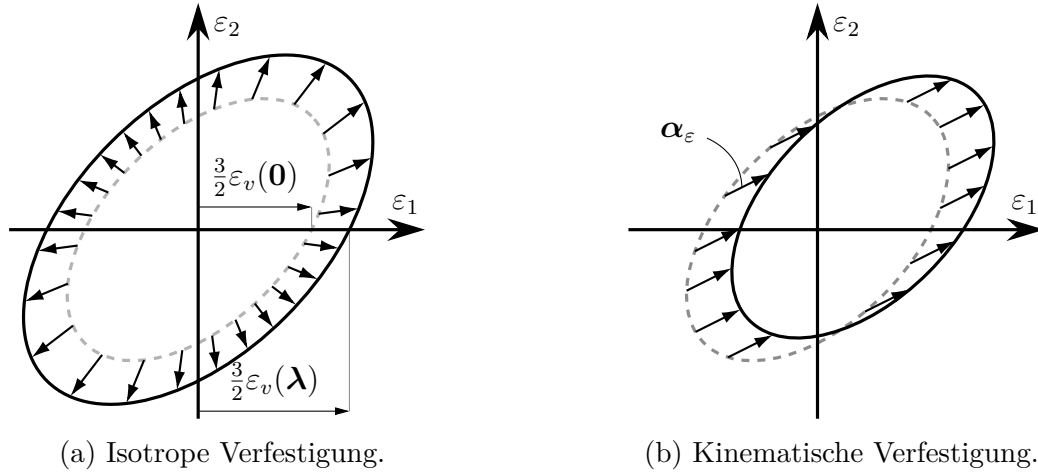


Abbildung 4.3.: Modifikation der Fließfläche im Hauptdehnungsraum bei isotroper und kinematischer Verfestigung für den Fall ebener Deformation. Die ursprüngliche Fließfläche ist gestrichelt in grau dargestellt.

Dehnungsraum bei konstantem Mittelpunkt. Die Skalierung der Fließfläche kann dabei sowohl als Funktion der akkumulierten plastischen Dehnung (Dehnungsverfestigung, engl. *strain hardening*) als auch als Funktion der plastisch dissipierten Energie (Arbeitsverfestigung, engl. *work hardening*) formuliert werden. Bei der kinematischen Verfestigung nach PRAGER [139] wird hingegen angenommen, dass die Ausdehnung der Fließfläche bei plastischer Verformung konstant bleibt und sich stattdessen der Mittelpunkt der Fließfläche nach Abbildung 4.3b verschiebt. Dies geschieht dadurch, dass die Terme der deviatorischen Dehnung in der Fließfunktion (4.5b) mithilfe eines tensorwertigen Parameters α_ε modifiziert werden.

$$f_{\text{kin.}}(\varepsilon_e) = \sqrt{\frac{2}{3} (\varepsilon_{e,\text{dev.}} - \alpha_\varepsilon(\lambda)) : (\varepsilon_{e,\text{dev.}} - \alpha_\varepsilon(\lambda)) - \varepsilon_v} \quad (4.7)$$

Es wird somit davon ausgegangen, dass nicht mehr die deviatorische Dehnung, sondern die Differenz der deviatorischen Dehnung zum Parameter α_ε für die plastische Dehnung verantwortlich ist. Kinematische und isotrope Verfestigung können zudem gemeinsam in einem gemischten Modell angewendet werden.

4.2. Grenzen der Modellbildung für Stabgittermodelle

Die Modellierung der Kontinuumsplastizität ist bei Federmodellen grundsätzlich ein problematisches Unterfangen. Der Hauptgrund hierfür ist, dass bei Federmodellen sämtli-

che Eigenschaften des Materials in Federn kondensiert werden. Da diese wiederum nur eine eindimensionale Steifigkeit und Deformationsmöglichkeit besitzen, kann weder die mehrdimensionale Fließbedingung erfasst, noch der mehrdimensionale plastische Fluss ohne weiteres in diese eingebracht werden. Dies zeigt sich insbesondere daran, dass die einzelnen Federn die Volumenerhaltung des plastischen Flusses, die im Kontinuum angenommen wird, nicht erfüllen können. Hierfür wäre sowohl die Berechnung eines mehrdimensionalen Verformungszustands innerhalb der Federn erforderlich als auch die Möglichkeit, mehrdimensionale plastische Deformationen auf die Federn aufzubringen. Ein weiteres Problem entsteht bei der Plastizitätsmodellierung mit Federmodellen dadurch, dass diese Modelle, wie im Anhang B.1 gezeigt wird, bei großen Verzerrungen ihre elastischen Eigenschaften ändern. Diese Änderung muss dabei entweder als Fehler in Kauf genommen werden, oder die Federsteifigkeiten des Modells müssen bei plastischer Verformung während der Simulation modifiziert werden. Obgleich die Modifikation der Federsteifigkeiten zur Erhaltung der elastischen Eigenschaften des Kontinuums möglich wäre, widerspricht dieses Vorgehen der Idee der Federmodelle, wonach die Federn alleinige Träger der mechanischen Eigenschaften des Modells sein sollen und somit nicht aufgrund eines momentanen Kontinuumszustands modifiziert werden sollten.

Aufgrund dieser Problematiken ist die Modellierung plastischen Verhaltens außerhalb einfacher Traglastuntersuchungen bei regelmäßigen Normalkraftfedermodellen mit perfekter eindimensionaler Plastizität, wie sie bei ROUX und HANSEN [147] sowie LOPEZ-SANCHO, GUINEA und LOUIS [105] zu finden sind, bei Federmodellen bislang kaum untersucht worden. Ausnahmen hierfür sind beispielsweise die Arbeiten von HAHN [64] und von BUXTON, CARE und CLEAVER [31]. Ersterer verwendet für die Erfassung der Plastizität im Stabgittermodell ein eindimensionales Plastizitätsgesetz, bei dem die momentane plastische Verformung eine Funktion der eindimensionalen Stabspannung ist. Mit einem solchen Modell kann jedoch, wie bei JARZABEK [82] gezeigt wird, die Volumenerhaltung bei plastischer Verformung nicht gewährleistet werden, da das plastische Fließen immer in Richtung der Stäbe erfolgt. Durch diese Einschränkung des plastischen Flusses wird dieser zudem anisotrop, wobei die zulässigen Richtungen des plastischen Flusses nur von der Gittergeometrie abhängen. Letztere Arbeit [31] versucht, diese Anisotropie zu beheben, indem als Kriterium für den plastischen Fluss nicht die Dehnungen der Normalfedern selbst, sondern die Kontinuumsdehnungen an den Knoten verwendet werden. Hierbei werden die momentanen tangentialen Steifigkeiten der Federn des Modells über die tangentielle Kontinuumssteifigkeit an den Knoten abgemindert. Als Materialgesetz wird hierbei das dreiparametrische Modell nach RAMBERG und OSGOOD [141] verwendet. Trotz der Formulierung der plastischen Verformung über die Kontinuumsstressspannungen

an den Knoten kann diese Methode die Volumenerhaltung der plastischen Verformung nicht gewährleisten. Stattdessen erreicht die Querkontraktion der plastischen Verformung eine obere Grenze von $\nu_p \leq \frac{1}{4}$. Die Volumenerhaltung bei plastischer Verformung könnte bei diesem Modell somit nur durch Einführung künstlicher, volumenerhaltender Kräfte erreicht werden.

4.3. Plastische Verformung im Federmodell

In der Kontinuumsplastizität wird angenommen, dass der lokale Spannungszustand, der proportional zum lokalen elastischen Dehnungsanteil ist, sowie seine Änderung ausschlaggebend für die lokale plastische Verformung sind. Da der Vorgang der plastischen Verformung irreversibel und somit pfadabhängig ist, wird in der numerischen Behandlung dieses Vorgangs ein inkrementelles Vorgehen genutzt. Hierbei wird der quasistatische Belastungsvorgang, der in der Realität stetig verläuft, in finite Belastungsschritte eingeteilt, und die Erfüllung der Gleichgewichtsbedingungen und der Fließbedingung wird nur an diesen Schritten erzwungen². Die plastische Deformation $\Delta \mathbf{F}_p^{(i)}$ eines Lastschritts i wird somit aus der elastischen Deformation $\mathbf{F}_e^{(i-1)}$ des vorherigen Lastschritts sowie der Änderung der Gesamtdeformation $\Delta \mathbf{F}^{(i)}$ des momentanen Lastschritts berechnet.

Um dies auf die Federmodelle zu übertragen, wird auch bei diesen eine lokale elastische Dehnung benötigt, die wiederum zu einer lokalen plastischen Verformung führt. Da bei Federmodellen die Federn die Träger der mechanischen Eigenschaften sind, empfiehlt es sich, auch die plastische Dehnung in diesen Federn zu modellieren. Es wird somit für die Plastizitätsformulierung bei Federmodellen der mehrdimensionale Dehnungszustand in den Federn selbst benötigt. Dieser kann nach Abschnitt 3.5.3, in der die Berechnung der Kontinuumsdehnungen in einzelnen Verbindungen vorgestellt wurde, für jede Federverbindung ermittelt werden. Somit kann für jede Federverbindung aus dem Dehnungszustand, der sich aus der Deformation einer Normalkraftfeder und der Deformation der angrenzenden Winkelfedern ergibt, die plastische Deformation gerade dieser Federn berechnet werden.

In Abschnitt 3.5.3 wurde zudem darauf eingegangen, dass je Normalfeder pro angrenzender Zelle ein separater Dehnungszustand berechnet werden kann. Während die Wahl der letztendlichen Formulierung im elastischen Fall keinen Einfluss auf die Ergebnisse einer Simulation hat, ist bei der Einführung plastischer Deformation die Bestimmung der

² Eine Ausnahme ist die sogenannte Subinkrementierung für die Plastizität, bei der die Fließbedingung auch an Zwischenzuständen innerhalb eines Belastungsschritts erzwungen wird.

plastischen Dehnung ein entscheidender Einflussfaktor. Hierfür stehen grundsätzlich zwei unterschiedliche Möglichkeiten für die Bestimmung des Dehnungszustands in der Feder zur Verfügung:

- a) Es wird für jede Federzelle, die an eine Normalkraftfeder angrenzt, ein separater Dehnungszustand berechnet. Dieser entspricht im Falle einer Dreieckszelle genau dem Dehnungszustand, der in der Zelle selbst berechnet werden kann. Aus diesem Dehnungszustand wird der plastische Fluss der Federn bestimmt, die zu der Federzelle gehören.
- b) Der Dehnungszustand wird über eine Mittelung aus den Dehnungszuständen nach Punkt a) berechnet, sofern die Normalkraftfeder der Verbindung Bestandteil zweier Federzellen ist.

Wird der Dehnungszustand nach Möglichkeit b) gemittelt bestimmt, so zeigen numerische Versuche ein instabiles Verhalten der plastischen Verformung, das jedoch bislang nicht erklärt werden kann. Aufgrund dessen wird im Folgenden die Berechnung des Dehnungszustands für den plastischen Fluss nach Methode a) verwendet.

4.3.1. Berechnung der plastischen Verformung

Um zu zeigen, dass plastisches Verhalten mithilfe eines Federmodells modelliert werden kann, wird nachfolgend das einfachstmögliche Modell verwendet: Es wird angenommen, dass bei plastischem Fließen nur isotrope Verfestigung und Entfestigung stattfinden. Diese wird wiederum als Funktion der akkumulierten plastischen Dehnung $H_{p,acc}$ modelliert. Als Eingangsgröße für die Berechnung des plastischen Deformationsinkrements wird die momentane elastische Deformation \mathbf{F}_e gewählt. Der Grund hierfür ist, dass diese im Stabgittermodell ohne Weiteres dadurch bestimmt werden kann, dass bei der Berechnung der Deformation in den Verbindungen nach Gleichung (3.32) lediglich die elastischen Anteile der Federstreckungen $\lambda_{e,i}$ und Winkeländerungen $\Delta\varphi_{e,ij}$ betrachtet werden, während zugleich als Referenzzustand der kräftefreie, plastische Zustand der Federn verwendet wird. Als Dehnungsmaß für die plastische Dehnung wird aufgrund der Additivität bei gleichen Hauptrichtungen das logarithmische Dehnungsmaß nach HENCKY [67],

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2} \ln \mathbf{F}^T \mathbf{F}, \quad (4.8)$$

verwendet.

Zur Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems, das sich bei der Berechnung der plas-

tischen Verformung ergibt, wird ein iteratives Lösungsverfahren nach NEWTON und RAPHSON verwendet. Unter den oben genannten Annahmen kann in jeder Iteration n des Lösungsverfahrens eines Lastinkrements das plastische Dehnungsinkrement wie folgt bestimmt werden (siehe auch Box 1). Nach der linearisierten Berechnung der Verformungen der Iteration muss zuerst überprüft werden, ob die Fließbedingung in diesem Verformungszustand erfüllt wird. Hierzu wird die Gesamtdeformation, die während des momentanen Lastinkrements aufgebracht wurde,

$$\mathbf{F}_{\text{ges.}}^{[n]} = \mathbf{F}_e^{[n]} \mathbf{F}_p^{[n-1]}, \quad (4.9)$$

im Zustand der momentanen Iteration n aus dem momentanen elastischen Prädiktor $\mathbf{F}_e^{[n]}$ und der plastischen Deformation, die im momentanen Lastschritt aufgebracht wurde, $\mathbf{F}_p^{[n-1]}$, berechnet. Erfüllt diese nicht die Fließbedingung

$$f(\mathbf{H}_{\text{ges.}}^{[n]}) = \sqrt{\frac{2}{3} \mathbf{H}_{\text{dev.}}^{[n]} : \mathbf{H}_{\text{dev.}}^{[n]}} - H_v(\boldsymbol{\lambda}^{[0]}) \leq 0, \quad (4.10)$$

wobei

$$\mathbf{H}_{\text{dev.}} = \mathbf{H} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \text{Sp } \mathbf{H} \quad (4.11)$$

der deviatorische Anteil der HENCKY-Dehnung ist, so findet im momentanen Lastschritt plastisches Fließen statt. Aufgrund dessen, dass eine assoziierte Fließregel verwendet wird, ist die Richtung des plastischen Flusses mit der Richtung des deviatorischen Anteils der elastischen Dehnung identisch. Aufgrund der Additivität der HENCKY-Dehnung bei gleichen Hauptdehnungsrichtungen ist somit

$$\Delta \mathbf{H}_p^{[n]} = \chi \mathbf{H}_{e,\text{dev.}}^{[n]}, \quad (4.12)$$

wobei χ ein noch zu bestimmender skalarer Parameter ist. Dieser kann bestimmt werden, indem gefordert wird, dass die elastische Restdehnung nach der plastischen Verformung genau die Fließbedingung erfüllt.

$$f(\mathbf{H}_{e,\text{dev.}}^{[n]}(\chi)) = (1 - \chi) \underbrace{\sqrt{\frac{2}{3} \mathbf{H}_{e,\text{dev.}}^{[n]} : \mathbf{H}_{e,\text{dev.}}^{[n]}}}_{H_{e,\text{dev.}}} - H_v(\boldsymbol{\lambda}^{[0]} + \Delta \boldsymbol{\lambda}^{[n]}(\chi)) \stackrel{!}{=} 0 \quad (4.13)$$

Dieses Verfahren der orthogonalen Rückprojektion des Dehnungszustands auf die neue Fließfläche, das auf WILKINS [173] zurückgeht, ist auch unter dem Namen der radialen

Rückführung (*radial return*) bekannt. Die Lösung der nichtlinearen Gleichung (4.13) nach χ kann dabei wieder über ein NEWTON'sches Iterationsverfahren bestimmt werden. Die Iterationsvorschrift für die relative Intensität des plastischen Flusses χ ist dabei

$$\chi^{[m]} = \chi^{[m-1]} - \frac{f^{[m-1]}}{H_{e,\text{dev.}} \left(1 + \frac{\partial H_v}{\partial H_{p,\text{acc.}}} \frac{\partial H_{p,\text{acc.}}}{\partial \chi} \right)}, \quad (4.14a)$$

wobei die partielle Ableitung

$$\frac{\partial H_{p,\text{acc.}}}{\partial \chi} \approx \frac{\Delta H_{p,\text{acc.}}}{\Delta \chi} \quad (4.14b)$$

durch einen linearen Differenzenkoeffizienten approximiert wird. Die Berechnung der Änderung der plastischen akkumulierten Vergleichsdehnung $\Delta H_{p,\text{acc.}}$ folgt dabei den Gleichungen (4.9) und (4.11), wobei die elastische Deformation durch die plastische Deformation der momentanen Iteration ersetzt wird. Als Konvergenzkriterium des NEWTON-Verfahrens wird in dieser Arbeit der Fehler der Fließbedingung nach Gleichung (4.13) verwendet.

Nach der Konvergenz des plastischen Dehnungsincrementes muss schlussendlich noch das Inkrement des plastischen Deformationsgradienten bestimmt werden. Da nach LEE [102] die rotatorischen Anteile der elastischen und der plastischen Deformation nicht eindeutig bestimmt sind, muss hier eine Annahme für den rotatorischen Anteil des plastischen Deformationsinkrementes $\Delta \mathbf{F}_p$ getroffen werden. Da bei einem Federmodell die Ausrichtung der Normalkraftfeder in der Verbindung zweier Punkte immer der Bewegung dieser Punkte folgt, bietet sich hier die Annahme an, die Schubdeformation, die eine Verschiebung senkrecht zur Federrichtung erzeugt, zu Null zu setzen. Bei der Wahl eines mitdrehenden Koordinatensystems, dessen 1-Richtung der Ausrichtung der Feder entspricht, entspricht dies der Forderung, dass die Einträge des Deformationsgradienten

$$\Delta F_{p12} = 0 \qquad \Delta F_{p13} = 0 \quad (4.15)$$

entsprechen müssen (letztere Forderung ist dabei nur im dreidimensionalen Fall zu erfüllen). Damit kann der plastische Deformationsgradient eindeutig mittels

$$\Delta \mathbf{F}_p = \mathbf{R}(\boldsymbol{\beta}) e^{\Delta \mathbf{H}_p} \quad (4.16)$$

bestimmt werden, wobei die Drehmatrix \mathbf{R} von einem beziehungsweise zwei Winkeln $\boldsymbol{\beta}$ im zwei- beziehungsweise dreidimensionalen Raum abhängt.

1. Berechne die Gesamtverformung des Lastschritts nach Gl. (4.9).

$$\mathbf{F}_{\text{ges.}}^{[n]} = \mathbf{F}_e^{[n]} \mathbf{F}_p^{[n-1]}$$

2. Überprüfe die Fließbedingung Gl. (4.10); ist diese erfüllt, setze $\Delta H_p^{[n]} = \mathbf{0}$ und gehe zu Schritt 4.

$$f(\mathbf{H}_{\text{ges.}}^{[n]}) = \sqrt{\frac{2}{3} \mathbf{H}_{\text{dev.}}^{[n]} : \mathbf{H}_{\text{dev.}}^{[n]}} - H_v(\boldsymbol{\lambda}^{[0]}) \leq 0$$

3. Berechne die zusätzliche plastische Dehnung nach den Gleichungen (4.12) und (4.14).

$$\Delta \mathbf{H}_p^{[n]} = \chi \mathbf{H}_{e,\text{dev.}}^{[n]}$$

Dabei wird χ mithilfe eines NEWTON-Verfahrens bestimmt.

$$\chi^{[m]} = \chi^{[m-1]} - \frac{f^{[m-1]}}{H_{e,\text{dev.}} \left(1 + \frac{\partial H_v}{\partial H_{p,\text{acc.}}} \frac{\partial H_{p,\text{acc.}}}{\partial \chi} \right)}$$

Als Konvergenzkriterium dient der Fehler der Fließbedingung (4.13).

4. Bestimme die neue plastische Deformation des Lastschritts nach Gleichung (4.16).

$$\Delta \mathbf{F}_p = \mathbf{R}(\boldsymbol{\beta}) e^{\Delta \mathbf{H}_p}$$

Box 1: Ablaufplan für die Berechnung des plastischen Dehnungszinkrements in jeder Iteration n eines Lastschritts.

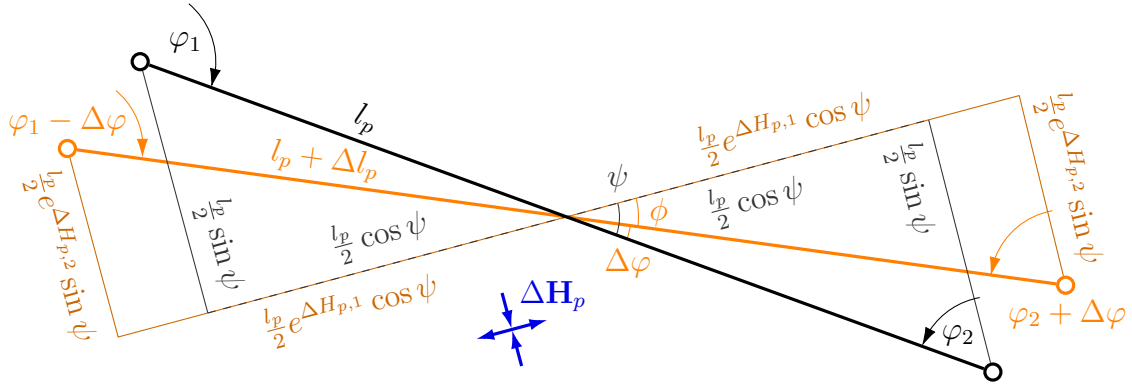


Abbildung 4.4.: Verformung eines Verbindungselements aufgrund des plastischen Dehnungsinkrements $\Delta \mathbf{H}_p$ im zweidimensionalen Kontinuum. Die Änderung der Federlängen und -winkel durch die plastische Verformung ergeben sich aus rein geometrischen Überlegungen.

4.3.2. Übertragung der plastischen Dehnung auf das zweidimensionale Federmodell

Bei der im Abschnitt 4.3.1 berechneten plastischen Verformung handelt es sich bislang um eine Kontinuumsgröße, die bezüglich der Normalkraftfedern berechnet wurde. Diese muss im Folgenden auf die Federn, die als Teil des Verbindungselements diese plastische Verformung erzeugt haben, übertragen werden, um die Modellkonsistenz zu wahren. Hierzu wird eine geometrische Überlegung nach Abbildung 4.4 verwendet. Bei Betrachtung des plastischen Flusses $\Delta \mathbf{H}_p$ im Hauptachsensystem, dessen Achsen gegenüber der Normalkraftfeder um einen Winkel von ψ geneigt sind, ergeben sich die Änderung der Federlänge mit unbelasteter Länge l_p sowie die Winkeländerung der angrenzenden Winkelfedern zu

$$l_p + \Delta l_p = l_p \sqrt{(e^{\Delta H_{p,1}} \cos \psi)^2 + (e^{\Delta H_{p,2}} \sin \psi)^2} \quad (4.17a)$$

$$\Delta \varphi = \psi - \phi = \psi - \arctan \left(\frac{e^{\Delta H_{p,2}} \sin \psi}{e^{\Delta H_{p,1}} \cos \psi} \right). \quad (4.17b)$$

Wird die plastische Verformung auf diese Art auf das Federmodell übertragen, so kann gezeigt werden, dass auch im Federmodell die plastische Deformation rein deviatorisch ist. Ein Beweis hierfür ist im Anhang A.4 zu finden.

4.3.3. Modifikation der Federsteifigkeiten bei plastischer Verformung

Neben der Übertragung der plastischen Deformation auf die Federn des Federmodells können bei diesem zusätzlich die elastischen Steifigkeiten der Federn als Funktion der plastischen Verformung modifiziert werden. Das Ergebnis einer solchen Modifikation soll dabei den Zweck verfolgen, die elastischen Eigenschaften der Federzellen auch bei plastischer Verformung zu erhalten. Zugleich soll diese Modifikation aber nur von der Feder selbst sowie ihrer plastischen Deformation abhängen, um die diskrete Struktur des Modells zu erhalten. Eine komplette Neuberechnung aller Federsteifigkeiten nach Gleichung (3.7) wird hier somit ausgeschlossen.

Eine Methode zur Berechnung der Modifikation der Federsteifigkeiten ergibt sich aus der Annahme, dass die Dehnungsenergie Π_e einer Feder bei gleicher elastischer Dehnung ε_e vor und nach plastischer Deformation (Index p) gleich sein soll. Wendet man diese Annahme auf eine Normalkraftfeder an, deren krafterzeugende Verformung über die Dehnung definiert ist, so führt die Forderung gleicher Dehnungsenergie auf

$$\Pi_e = \frac{1}{2}k \varepsilon_e^2 = \frac{1}{2}k_p \varepsilon_{e,p}^2 = \Pi_{e,p} \quad \Leftrightarrow \quad k_p = k. \quad (4.18)$$

Als direktes Resultat dieser Forderung ergibt sich somit, dass die Steifigkeit der Normalkraftfeder nicht zu modifizieren ist. Ein analoges Resultat kann auch bei Betrachtung der Normalkraftfeder als Stab gewonnen werden. Unter der Annahme, dass die plastische Deformation des Stabs das Volumen ebendieses Stabs nicht verändert, müsste mit der elastischen Dehnungsenergie als $\Pi_e = \int_{\Omega} E \varepsilon_e^2 d\Omega$ der Elastizitätsmodul des Stabs konstant gehalten werden, um bei gleicher elastischer Dehnung dieselbe Dehnungsenergie zu erhalten.

Für die Winkelfedern führt ein zu den Normalkraftfedern analoges Vorgehen auf die Forderung, dass auch diese konstant zu halten sind. Eine anschauliche Erklärung wie im Falle der Normalkraftfeder ist hierfür jedoch nicht bekannt.

4.3.4. Eine Anmerkung zur Konvergenz des Iterationsverfahrens

Im hier entwickelten Plastizitätsmodell werden bislang in den Gleichgewichtsiterationen eines Lastinkrements die elastisch berechneten Federsteifigkeiten auch dann für die Berechnung genutzt, wenn sich das Material bereits plastisch verformt. Es wird folglich nicht die tatsächliche Tangentialsteifigkeit des Materials, in die die elasto-plastischen

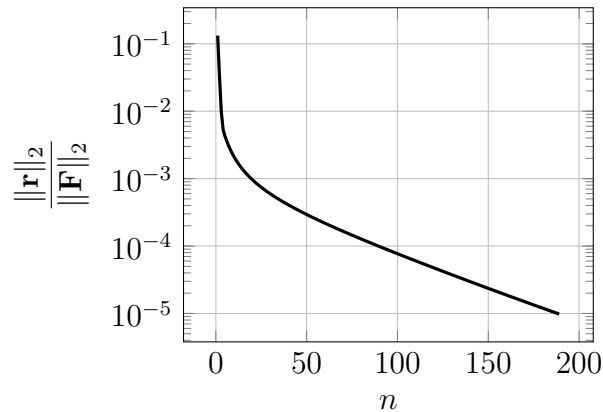


Abbildung 4.5.: Verlauf des auf die äußere Last \mathbf{F} bezogenen Kraftfehlers \mathbf{r} über den Gleichgewichtsiterationen n .

Eigenschaften des Materials eingehen, in der Simulation verwendet, sondern die Steifigkeit des elastischen Materials. Es liegt somit keine konsistente Linearisierung der Gleichungen zur Bestimmung des Verschiebungsincrements vor, was dazu führt, dass die quadratische Konvergenzgeschwindigkeit des NEWTON-RAPHSON-Verfahrens nicht erreicht werden kann. Dies wird auch durch eine Betrachtung des Verlaufs des normierten Kraftfehlers über den Gleichgewichtsiterationen deutlich. Wie in Abbildung 4.5 zu sehen ist, nimmt der Fehler über die Iterationen nur sublinear ab. Als Folge dieser niedrigen Konvergenzordnung wurde jedoch lediglich eine hohe Rechendauer der Simulationen festgestellt. Konvergenzprobleme konnten bei sämtlichen berechneten Testfällen nicht beobachtet werden.

4.4. Ergebnisse elasto-plastischer Simulationen

Für die Untersuchung der elasto-plastischen Modellierung für das entwickelte Federmmodell wird dieses bei Rechnungen der einfachstmöglichen Proben mit einer rechteckigen Geometrie eingesetzt. Es werden dabei für ein Material mit elastischen Eigenschaften nach Tabelle 4.1 die drei unterschiedlichen Arten der lokalen Verfestigung eingesetzt. In Abschnitt 4.4.1 wird der Fall der perfekten Plastizität behandelt, bei der keine Verfestigung vorliegt und somit die Tangente der Spannungs-Dehnungs-Kurve horizontal verläuft. Darauf folgend werden in den Abschnitten 4.4.2 und 4.4.3 die Fälle der Entfestigung und Verfestigung betrachtet, bei denen die Tangenten der Spannungs-Dehnungs-Kurven eine negative beziehungsweise positive Steigung besitzen. Die Probe ist nach Abbildung 4.6 am linken Ende in x -Richtung gelagert und wird durch eine vorgegebene Verschiebung

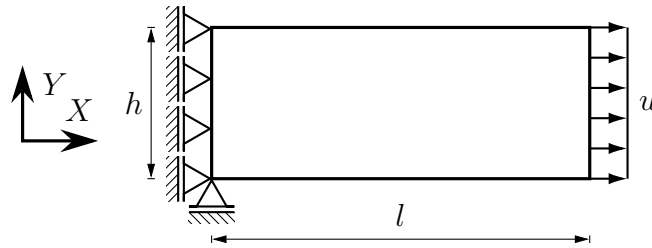


Abbildung 4.6.: Geometrie der rechteckigen Zugprobe, die zur Demonstration der unterschiedlichen Plastizitätsmodelle genutzt wird.

Modelleigenschaft	Symbol	Wert
Elastizitätsmodul	E	70 GPa
Querkontraktionszahl	ν	0.25
Länge des Rechtecksmodells	l	5 mm
Höhe des Rechtecksmodells	h	1 mm
Maximale Fläche der Dreieckszellen	A_{Δ}	$5 \cdot 10^{-3} \text{ mm}^2$

Tabelle 4.1.: Modelleigenschaften für die Simulation des elasto-plastischen Modells. Die Fließfunktion des Materials wird in den folgenden Beispielen separat definiert. Die maximale Fläche der Zellen ist für das gröbste Netz angegeben. Für das feine und sehr feine Netz ist dieser Wert um einen Faktor von 5 beziehungsweise 10 verringert.

am rechten Ende belastet. Um Starrkörperverschiebungen zu unterbinden, ist sowohl am rechten als auch am linken Ende der Probe der jeweils unterste Knoten zusätzlich in y -Richtung gelagert.

4.4.1. Perfekte Plastizität

Für den ersten Testfall der perfekten Plastizität wird im Simulationsmodell die Verfestigung bei plastischer Verformung deaktiviert. Zusätzlich zu den Modellparametern nach Tabelle 4.1 wird definiert, dass nach Abbildung 4.7 ab einer elastischen VON MISES-Vergleichsdehnung von $H = 0.010$ plastische Deformation stattfinden soll.

In Abbildung 4.8 sind die Ergebnisse des nominalen Spannungs-Dehnungsverlaufs für die Simulation des Federmodells und die Lösung für ein homogenes Kontinuum dargestellt. Hierbei bezeichnet die Nominalspannung σ_{nom} die Kraft pro Anfangsquerschnitt des Rechtecksmodells, während die Nominaldehnung H_{nom} die Längenänderung des Modells logarithmisch auf die Ausgangslänge bezieht. In diesen Ergebnissen ist zweierlei zu sehen: Zum einen ist ab Beginn der plastischen Verformung die Nominalspannung am Federmodell geringer als die des Kontinuumsmodells. Die Ursache hierfür liegt darin begründet,

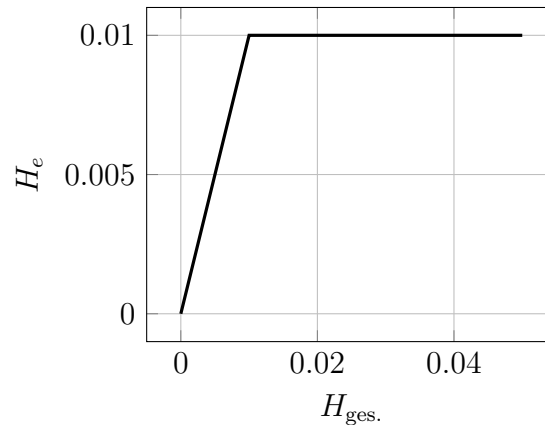


Abbildung 4.7.: Verlauf der zulässigen elastischen Vergleichsdehnung H_e als Funktion der Gesamtdehnung $H_{ges.}$ im einachsigen Zugversuch, der für das elastisch-ideal plastische Material angenommen wurde.

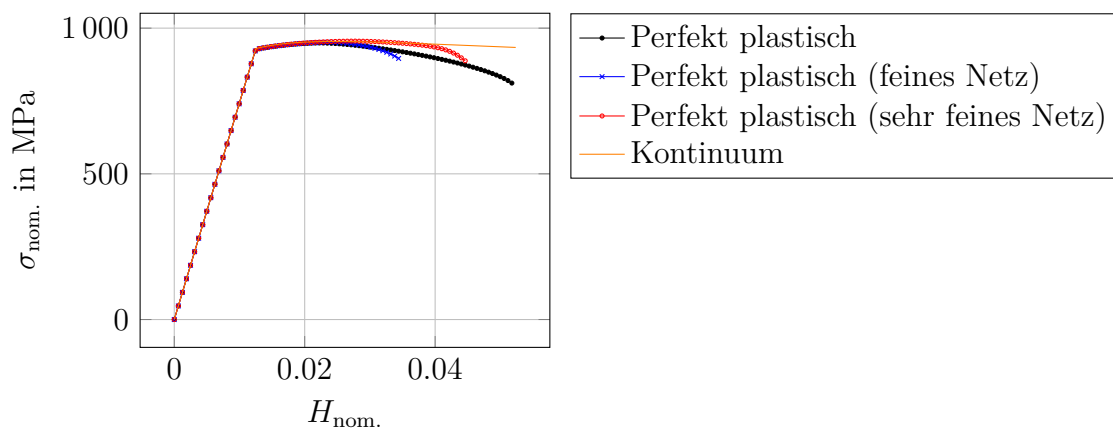


Abbildung 4.8.: Verlauf der Nominalspannung $\sigma_{nom.}$ über der logarithmischen Nominaldehnung $H_{nom.}$ bei einer Rechtecksprobe mit perfekter Plastizität. Dargestellt sind die Lösungen der Simulation mit drei unterschiedlichen Netzfeinheiten sowie die Lösung eines homogenen Kontinuumsmodells zum Vergleich.

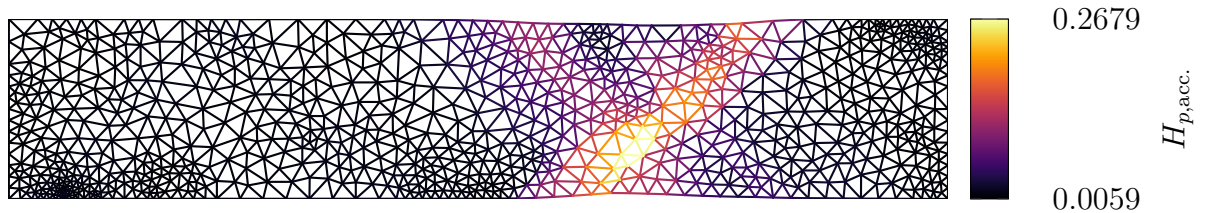
Rechnung	$\sigma_{nom.,max.}$	$H_{nom.}(\sigma_{nom.,max.})$
Kontinuum	953.854 MPa	0.024600
grobes Netz	948.821 MPa	0.022251
feines Netz	951.290 MPa	0.023472
sehr feines Netz	955.518 MPa	0.027737

Tabelle 4.2.: Zusammenfassung der Nominalspannungen $\sigma_{nom.,max.}$ und -dehnungen $H_{nom.}(\sigma_{nom.,max.})$, bei denen die globale Entfestigung für die perfekt plastischen Modelle einsetzt.

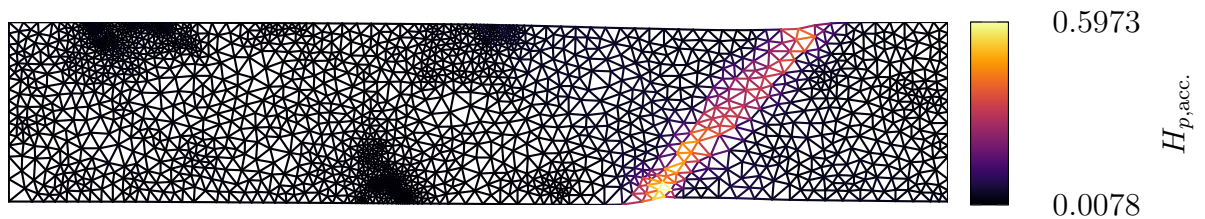
dass aufgrund der Änderung der elastischen Eigenschaften des Federmodells durch die Verformung die lokalen Verformungen der Federn gegenüber einem homogenen Kontinuumsmodell Fluktuationen zeigen. Dies führt in der Folge dazu, dass Teile des Modells beginnen, sich plastisch zu verformen, bevor die Grenz-Nennspannung für plastisches Fließen beim Kontinuum erreicht ist. Folglich ist bei gleicher globaler Längenänderung die erforderliche Kraft für diese Deformation geringer.

Zum anderen ist im Bereich hoher Verformung ab etwa $H_{\text{nom.}} > 0.022$ zu sehen, dass sowohl zwischen den Simulationsergebnissen selbst als auch zwischen den Simulationsergebnissen und der Kontinuumslösung deutliche Abweichungen existieren, die mit zunehmender Nominaldehnung wachsen. Dies kann anhand der unterschiedlichen Lokalisierung der plastischen Deformation bei unterschiedlichen Netzen erklärt werden, die wiederum Unterschiede im globalen Entfestigungsverhalten erzeugt. Zwar setzt die Lokalisierung, wie in Tabelle 4.2 zu sehen ist, für alle Modelle bei einer ähnlichen Nominalspannung ein. Die Nominaldehnung, bei der dieses Verhalten auftritt, unterscheidet sich jedoch signifikant. Dies kann mit der Bildung der Scherbänder in den Modellen erklärt werden, die sich im Zuge der Lokalisierung der plastischen Dehnung bilden. Diese verlaufen zwar allesamt, wie in Abbildung 4.9 zu sehen ist, wie erwartet in Richtung der Hauptschubspannung von 45° , unterscheiden sich jedoch zwischen den einzelnen numerischen Simulationen stark in ihrer Anzahl und ihren Schnittmustern. Während beim groben Netz (a) die Ausbildung zweier sich innerhalb der Zugprobe kreuzender Scherbänder zu beobachten ist, bildet sich beim feinen Netz (b) nur ein einziges Scherband. Beim sehr feinen Netz (d) hingegen schneiden sich die beiden Scherbänder am Rand der Probe. Dies hat zur Folge, dass die Einschnürung bei gleicher äußerer Verformung für diese drei numerischen Simulationen unterschiedlich stark ausgeprägt ist und somit für die resultierende Nominalspannung bei gleicher Nominaldehnung unterschiedliche Werte bestimmt werden können.

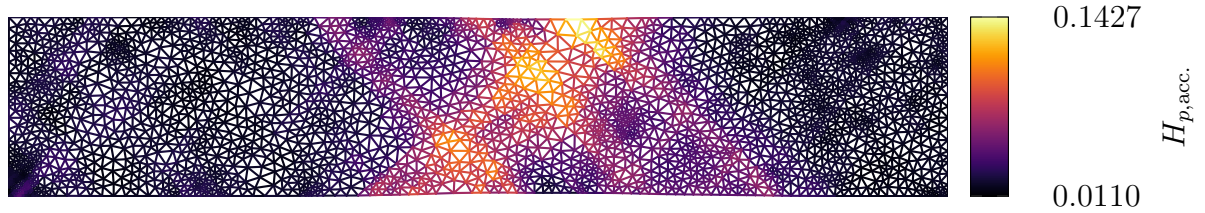
Zusätzlich ist anzumerken, dass bei letzterem Netz die Lokalisierung der plastischen Dehnung erst bei größerer äußerer Verformung auftritt. Dies ist im Vergleich der Abbildungen 4.9a und 4.9b mit der Abbildung 4.9c zu erkennen, die alle bei derselben äußeren Gesamtverschiebung aufgezeichnet wurden. Die Ursache hierfür ist bisher noch nicht bekannt. Es wird jedoch angenommen, dass die Ursache in einem zu schwachen Konvergenzkriterium für den relativen Kraftfehler der numerischen Simulation von 10^{-5} zu finden ist. Dieses wiederum kann aufgrund der Begrenzung der zur Verfügung stehenden Rechenleistung nicht strenger gewählt werden.



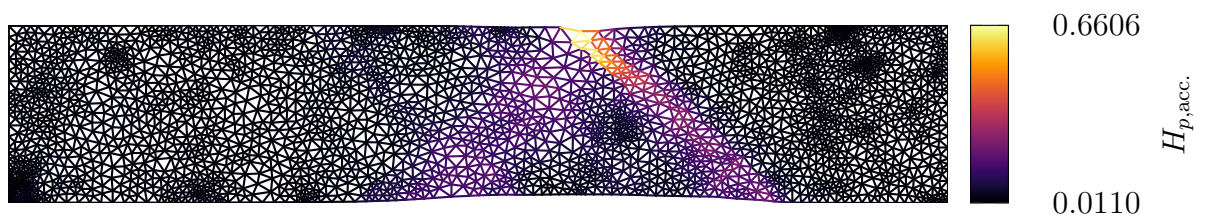
(a) Lokalisierung der Plastizität bei grobem Netz, dargestellt bei $H_{\text{ges.}} = \ln 1.0285$.



(b) Lokalisierung der Plastizität bei feinem Netz, dargestellt bei $H_{\text{ges.}} = \ln 1.0285$.



(c) Plastische Verformung des sehr feinen Netzes bei $H_{\text{ges.}} = \ln 1.0285$. Es tritt noch keine scharfe Lokalisierung der plastischen Verformung auf.



(d) Lokalisierung der Plastizität bei sehr feinem Netz, dargestellt bei $H_{\text{ges.}} = \ln 1.037$.

Abbildung 4.9.: Lokalisierung der Plastizität bei einer Berechnung mit perfekter Plastizität und unterschiedlicher Netzfeinheit bei gleicher Verschiebung des rechten Rands. Die akkumulierte plastische Dehnung $H_{p,acc.}$ ist im verformten Netz farblich dargestellt.

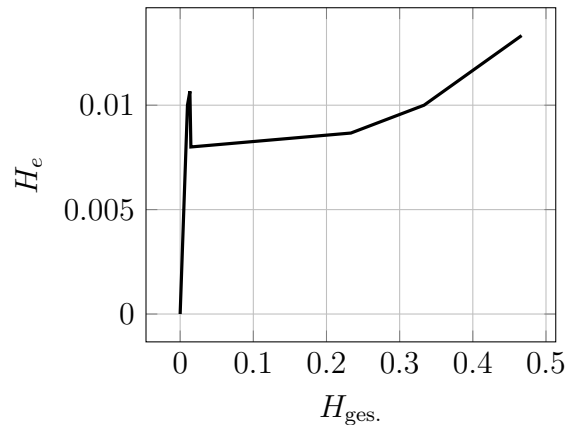


Abbildung 4.10.: Verlauf der zulässigen elastischen Vergleichsdehnung H_e als Funktion der Gesamtdehnung $H_{ges.}$ im einachsigen Zugversuch, der für das Material mit Entfestigung angenommen wurde.

4.4.2. Elastoplastizität mit lokaler Entfestigung

Im zweiten Testfall wird ein Material mit lokaler Entfestigung verwendet. Bei diesem Material, dessen elasto-plastisches Deformationsverhalten in Abbildung 4.10 dargestellt ist, findet jenseits der Elastizitätsgrenze bei einer Dehnung von $H = 0.010$ nach einem kurzen Deformationsbereich mit Verfestigung eine Entfestigung des Materials statt. Hierbei nimmt die zulässige elastische Dehnung bei zunehmender plastischer Dehnung stark ab. Dies führt in der Praxis dazu, dass die plastische Verformung einer Zugprobe dieses Materials in schmalen Scherbändern lokalisiert und die Probe lokal einschnürt. Während bei Kontinuumsmodellen bei Vernachlässigung der numerischen Ungenauigkeit³ der Berechnung für diese Lokalisierung Lokalisationskeime – zum Beispiel geometrische Imperfektionen – in das Modell eingebracht werden müssen, entstehen diese beim Federmodell durch die Änderung der elastischen Eigenschaften der Zellen durch die Verformung von selbst. Sie sind somit durch die Imperfektion des mathematischen Modells bei finiten Deformationen *immer* in der Simulation enthalten.

Wie in Abbildung 4.12 zu sehen ist, bilden sich bei der Simulation mit einem entfestigenden Material räumlich stark begrenzte Scherbänder unter dem Winkel der Hauptschubdehnungen von 45° im Modell aus. Die Position dieser Scherbänder hängt dabei vom gewählten Netz ab. Nach Abbildung 4.11 findet die Lokalisierung der plastischen Verformung jedoch im Gegensatz zur Simulation mit einem perfekt plastischen Material bei derselben

³ Durch numerische Fehler entstehen auch bei Kontinuumsmodellen Unregelmäßigkeiten im Deformationsfeld, die als Lokalisationskeime dienen. Diese können, wie in [45, Abb. 10.3] gezeigt wird, zum Beispiel durch lokale Netzverfeinerung angeregt werden.

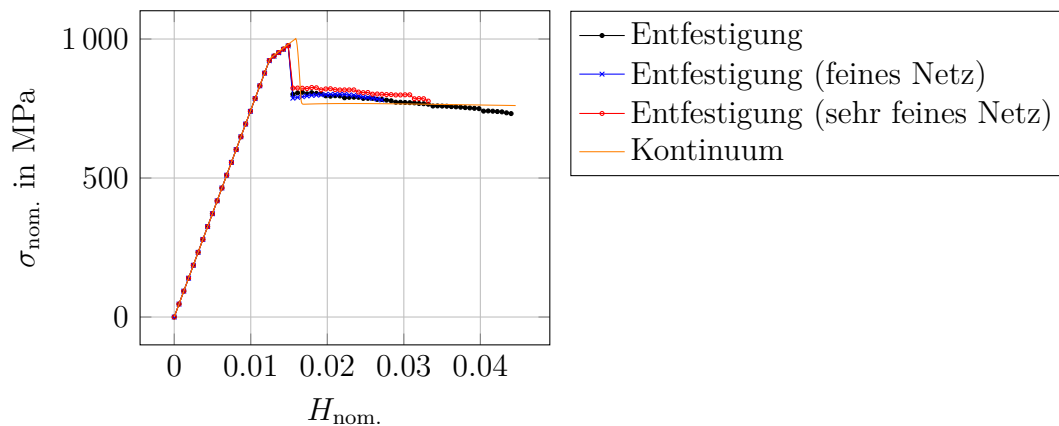
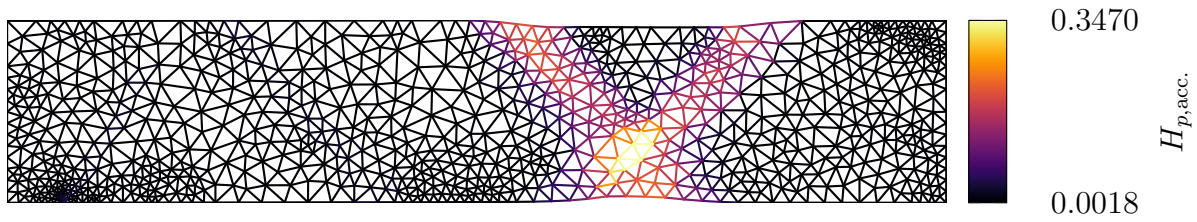


Abbildung 4.11.: Verlauf der Nominalspannung $\sigma_{\text{nom.}}$ über der logarithmischen Nominaldehnung $H_{\text{nom.}}$ bei einer Rechteckprobe mit einem Plastizitätsgesetz mit Entfestigung. Dargestellt sind die Lösungen der Simulation mit drei unterschiedlichen Netzfeinheiten sowie die Lösung eines homogenen Kontinuumsmodells zum Vergleich.

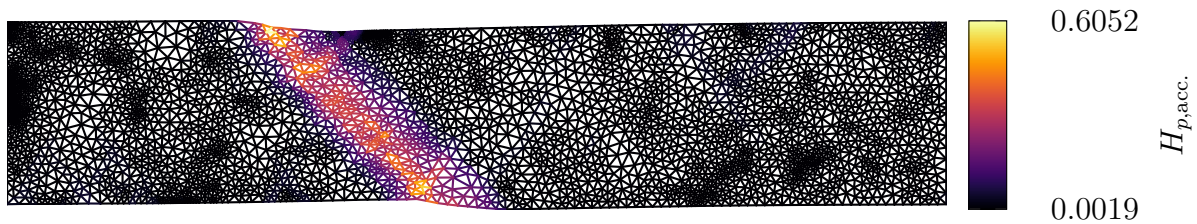
äußeren Verformung des Gesamtmodells statt. Dies lässt darauf schließen, dass bei einem Material mit lokaler Entfestigung die Last, die zur Initiierung der globalen Entfestigung nötig ist, beim hier entwickelten Plastizitätsmodell unabhängig vom gewählten Netz ist. Bei Betrachtung des Modellverhaltens nach der Lokalisierung der Plastizität ist jedoch festzustellen, dass die Last-Verschiebungskurven Unterschiede aufweisen. Diese können jedoch, wie im ideal-plastischen Fall, mit der unterschiedlichen Ausbildung der Scherbänder erklärt werden, die wiederum, wie in Abbildung 4.12 zu sehen ist, zu unterschiedlich starken Einschnürungen der Proben führen.

4.4.3. Elastoplastizität mit Verfestigung

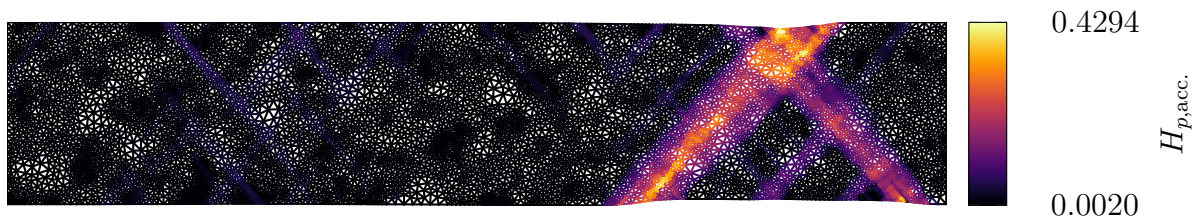
Der letzte Testfall zeigt das Verhalten des Federmodells bei Verwendung eines Plastizitätsgesetzes, bei dem über den gesamten Bereich der plastischen Verformung eine Verfestigung des Materials stattfindet. Wie in Abbildung 4.13 zu sehen ist, wird hierzu ein Material verwendet, bei dem die zulässige elastische Dehnung eine stückweise lineare Funktion der Gesamtdehnung ist. Hierbei wird erwartet, dass keine Lokalisierung der plastischen Dehnung in Scherbändern stattfindet, sondern dass die plastische Verformung über die gesamte Zugprobe näherungsweise homogen ist. Vollständige Homogenität der plastischen Verformung kann hierbei mit dem verwendeten Federmodell nicht erreicht werden, da nach Abschnitt B.1 selbst die elastischen Eigenschaften des Modells unter Verformung nicht homogen sind.



(a) Lokalisierung der Plastizität bei grobem Netz, dargestellt bei $H_{\text{ges.}} = \ln 1.0225$.



(b) Lokalisierung der Plastizität bei feinem Netz, dargestellt bei $H_{\text{ges.}} = \ln 1.0225$.



(c) Lokalisierung der Plastizität bei sehr feinem Netz, dargestellt bei $H_{\text{ges.}} = \ln 1.0225$.

Abbildung 4.12.: Lokalisierung der Plastizität bei einer Berechnung mit Entfestigung und unterschiedlicher Netzfeinheit bei gleicher Verschiebung des rechten Rands. Die akkumulierte plastische Dehnung $H_{p,acc.}$ ist im verformten Netz farblich dargestellt.

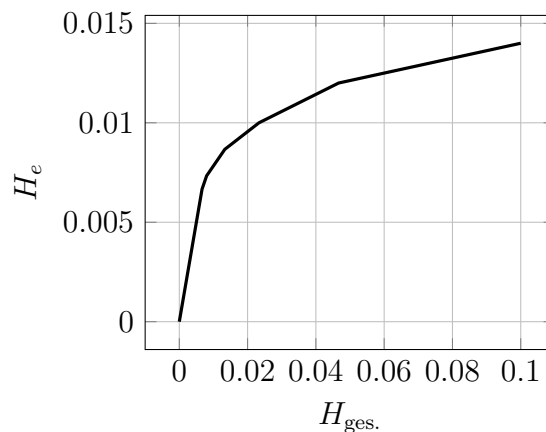


Abbildung 4.13.: Verlauf der zulässigen elastischen Vergleichsdehnung H_e als Funktion der Gesamtdehnung $H_{\text{ges.}}$ im einachsigen Zugversuch, der für das Material mit Verfestigung angenommen wurde.

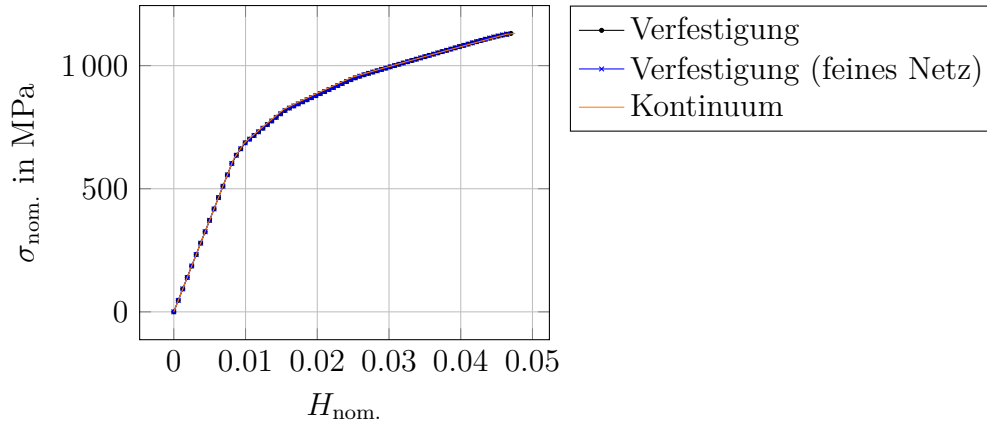


Abbildung 4.14.: Vergleich der Last-Verschiebungskurve der rechteckigen Zugprobe mit einem Plastizitätsgesetz mit Verfestigung. Dargestellt sind die numerischen Lösungen mit zwei unterschiedlichen Netzen sowie die Lösung eines homogenen Kontinuumsmodells. Die Lösungen der unterschiedlichen Modelle fallen in diesem Fall zusammen.

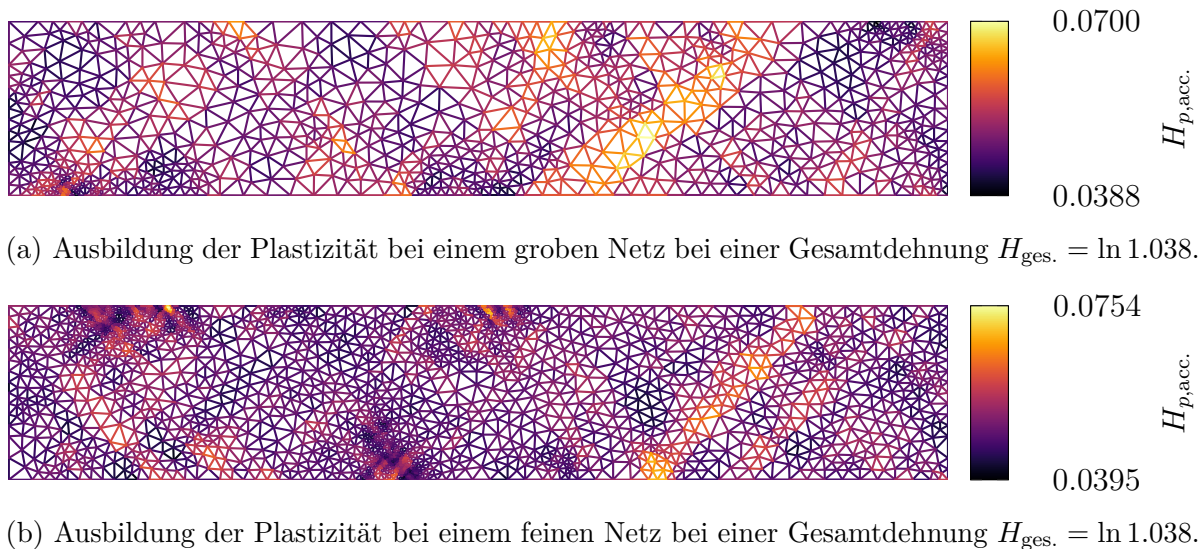


Abbildung 4.15.: Ausbildung der plastischen Dehnung bei einem Material mit Verfestigung. Die akkumulierte plastische Dehnung $H_{p,acc.}$ ist im verformten Netz farblich dargestellt.

Bei Betrachtung der Nennspannungs-Nenndehnungs-Kurven nach Abbildung 4.14 kann festgestellt werden, dass die Ergebnisse des Federmodells über den gesamten Dehnungsverlauf sehr gut mit denen der Kontinuumslösung übereinstimmen. Hierbei ist die Ergebnisqualität unabhängig von der Netzgeometrie. Der Grund hierfür ist, dass die analytische Lösung dieses Problems über den gesamten Lastverlauf ein homogenes elastisch-plastisches Dehnungsfeld ist. Es muss jedoch angemerkt werden, dass selbst bei kleineren plastischen Dehnungen die Änderung der lokalen elastischen Eigenschaften der Federzellen durch die Verformung bereits starke Inhomogenitäten der plastischen Verformung im Modell erzeugt. Dies ist in Abbildung 4.15 zu erkennen, in der die plastischen Dehnungen zweier unterschiedlicher Netze bei einer Nominaldehnung von $H_{\text{ges.}} = \ln 1.038$ dargestellt sind: Hierbei treten für beide Netze Regionen im Modell auf, für die die plastische Vergleichsdehnung näherungsweise doppelt so groß ist wie in der direkten Nachbarschaft dieser Regionen.

4.4.4. Zusammenfassung der Ergebnisse

Anhand der Ergebnisse dieses Abschnitts konnte gezeigt werden, dass das entwickelte Modell für die Modellierung plastischen Verhaltens bei Federmodellen in der Lage ist, die Kontinuumsplastizität anzunähern. Hierbei sind insbesondere zwei Punkte hervorzuheben:

1. Aufgrund dessen, dass sich die elastischen Eigenschaften des Federmodells unter Verformung ändern, sind die Ergebnisse bei Simulationen mit endlichen Verformungen selbst dann inhomogen, wenn nach der analytischen Lösung ein homogener Verformungszustand vorliegen sollte. In der Folge sind diese Modelle nur näherungsweise in der Lage, homogenes elasto-plastisches Verhalten zu reproduzieren.
2. Das Fehlen der Homogenität der elastischen Eigenschaften der Federmodelle unter Verformung bietet für die Simulation von Lokalisationsphänomenen in der Plastizität sowohl Vor- als auch Nachteile. Vorteilhaft ist hierbei, dass durch diese Eigenschaft im Modell automatisch Lokalisationskeime entstehen. Dies ist jedoch zugleich der Nachteil: Der Ort der Lokalisierung ist bei gegebener Belastung direkt von der Netzgeometrie abhängig. Dies kann jedoch auch zur Repräsentation der tatsächlichen Mikrostruktur metallischer Materialien eingesetzt werden, in der die Lokalisierung der Plastizität direkt von der Ausrichtung und Vorbelastung der Körner des Materials abhängt. Hierzu sind jedoch genauere Untersuchungen des Modellverhaltens sowie der etwaigen Ähnlichkeiten zum Verhalten metallischer Werkstoffe unter elastischer Verformung erforderlich.

5. Rissbildung und -fortschritt beim Stabgittermodell

Wie bereits in der Einführung in Abschnitt 1.1 angesprochen, ist eines der Hauptziele der diskreten Modelle die einfachere Modellierung von Rissphänomenen. Dieses Kapitel widmet sich nach einer kurzen Einführung in die Bruchmechanik der Rissimulation mit dem entwickelten zweidimensionalen Modell aus Normalkraft- und Winkelfedern.

5.1. Bruchmechanik

Die Ingenieurdisziplin der Bruchmechanik widmet sich der Untersuchung des Bruchverhaltens, also der Auftrennung von Festkörpern entlang von Rissen [61]. Aufgrund der Bedeutung des Versagensvorgangs für die Festigkeitsabschätzung erfährt dieses Gebiet schon seit langem große Aufmerksamkeit¹. Erste Berechnungen der Spannungen in Kontinua in der direkten Umgebung eines Risses sind bei KOLOSOV [94] und INGLIS [76] zu finden. Letzterer bestimmt in seiner Veröffentlichung die Spannungsverläufe, die sich an elliptischen Rissen und Rissen mit näherungsweise elliptischer Spitze bilden, wenn diese in einem unendlichen Kontinuum eingebettet sind. Er stellt dabei fest, dass sich für die maximale Normalspannung quer zum Riss

$$\sigma_{\max.} = \sigma_{\infty} \left(1 + 2 \sqrt{\frac{a}{\rho}} \right) \quad (5.1)$$

ergibt, wobei σ_{∞} die äußere Spannung im Unendlichen, a die halbe Risslänge und ρ den Krümmungsradius der Rissoberfläche in der Risspitze bezeichnet.

Die heute verwendete Kontinuumstheorie des Versagens von Festkörpern geht auf GRIFITH [59] zurück. Dieser stellt aufgrund der Widersprüche zwischen den Bruchspannungen,

¹ In den Worten von MOHR [112, S. 192], welche bis heute noch aktuell sind: „Zu den wichtigsten Grundlagen der Festigkeitslehre gehört daher die Kenntnis der Umstände, von welchen die Elastizitätsgrenzen und die Bruchgrenzen der Baustoffe abhängig sind. Unzählige Versuche wurden angestellt, um diese Grenzen kennen zu lernen, aber zu einwandfreien Ergebnissen ist man bis heute nicht gelangt.“

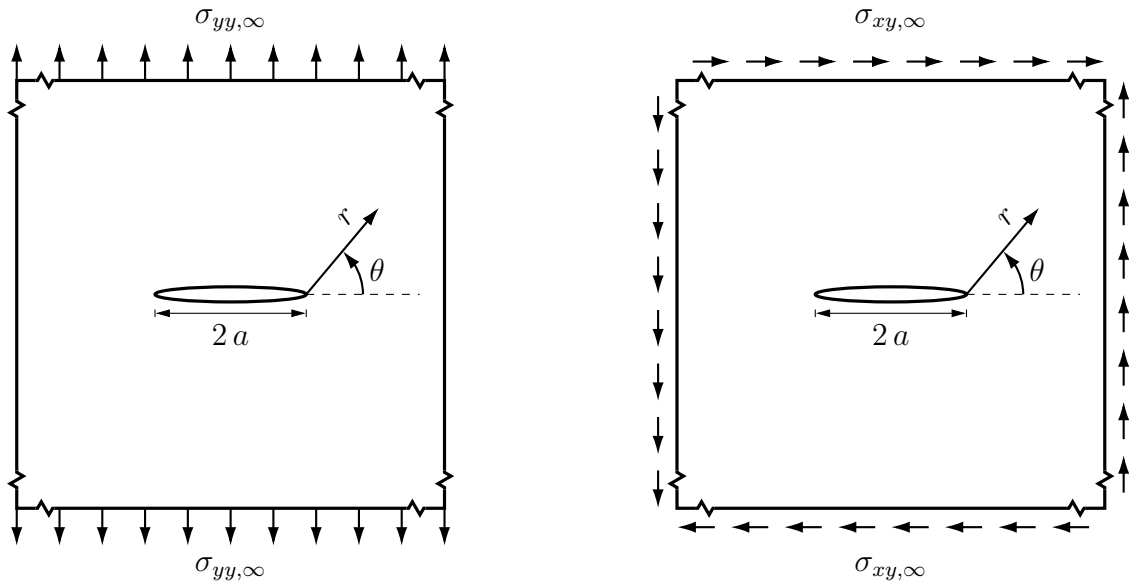
die aus den elastisch berechneten Spannungen nach INGLIS [76] hervorgehen, und den Bruchspannungen in Experimenten mit Versuchsproben unterschiedlicher Oberflächenrauigkeit fest, dass die elastisch berechnete Spannung in einer Kerbe kein geeignetes Kriterium für den Bruch darstellt. Als Grund hierfür bestimmt er in Versuchen die plastischen Verformungen in der Kerbe. Anstelle der Verwendung von Spannungskriterien geht er in seiner Arbeit davon aus, dass die Theorie, dass das mechanische Gleichgewicht gerade der Punkt ist, an dem das Gesamtpotential im betrachteten System minimal ist, auch für den Rissvorgang gelten muss. Hierzu muss lediglich die Oberflächenenergie der neu entstandenen Rissoberflächen mitberücksichtigt werden. Risswachstum findet nach GRIFFITH also genau dann statt, wenn die Erweiterung des Risses zu einer Abnahme der gesamten, potentiellen Energie des betrachteten Systems führt. Dies ist bei einer Belastung des Kontinuums senkrecht zum Riss der Länge $2a$ genau dann der Fall, wenn die äußere Spannung einen kritischen Wert

$$\sigma_{\text{krit.}} = \sqrt{\frac{2ET}{\pi a}} \quad (5.2)$$

überschreitet. Hierbei bezeichnet E den Elastizitätsmodul und T die Oberflächenspannung des Materials.

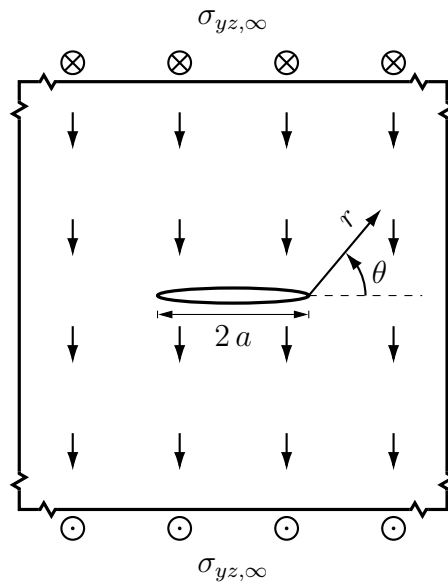
OROWAN [121] liefert eine weitere theoretische Begründung des Energiekriteriums für den Rissfortschritt. In seiner Arbeit zeigt er, dass dieses Kriterium äquivalent zur maximalen Kohäsion der Atome an der Riss Spitze ist. Zugleich stellt er jedoch fest, dass das GRIFFITH'sche Kriterium nur für den elastischen Fall (oder den Fall einer vernachlässigbar kleinen plastischen Zone an der Riss Spitze) gerechtfertigt ist. Für den Fall eines duktilen Bruchs schlägt er stattdessen vor, die Oberflächenenergie der GRIFFITH'schen Betrachtung durch die plastische Oberflächenarbeit zu ersetzen.

IRWIN [79,80] dagegen ergänzt in seiner Arbeit das GRIFFITH'sche Konzept der Abnahme der gesamten potentiellen Energie bei einem Rissfortschritt, indem er einen Zusammenhang zwischen der äußeren Belastung des Kontinuums und der Energieabnahme des Gesamtsystems bei einer Vergrößerung eines scharfen Risses im elastischen Material beschreibt. Hierbei stellt er fest, dass die sogenannte Energiefreisetzungsrate \mathcal{G} , die die Abnahme der potentiellen Energie bei einem infinitesimalen Risswachstum beschreibt, im linear-elastischen Fall direkt mit der äußeren Belastung des Kontinuums verknüpft ist. Er unterscheidet dabei zwischen drei unterschiedlichen Rissmodi, die in Abbildung 5.1 zu sehen sind. Der Rissmodus I (Abbildung 5.1a) beschreibt einen scharfen Riss der Länge $2a$, der in ein unendliches Kontinuum eingebettet ist, das wiederum orthogonal



(a) Rissmodus I: Zugbelastung quer zum Riss.

(b) Rissmodus II: Schubbelastung in der Ebene senkrecht zur Risspitze.



(c) Rissmodus III: Schub in der Ebene, die von der Risspitze und der Normalen der Rissebene aufgespannt wird.

Abbildung 5.1.: Darstellung der unterschiedlichen Rissmodi. Die Rissöffnung ist dabei der Anschaulichkeit halber stark vergrößert dargestellt. Die Risspitze verläuft dabei entlang des Vektors, der aus der Zeichenebene heraus zeigt.

zum Riss mit einer Zugspannung $\sigma_{yy,\infty}$ belastet ist. Für die Energiefreisetzung bei einer infinitesimalen Risserweiterung ergibt sich dabei

$$\mathcal{G}_I = \frac{\sigma_{yy,\infty}^2 \pi a}{\tilde{E}}, \quad (5.3)$$

wobei im ebenen Spannungszustand $\tilde{E} = E$ und im ebenen Dehnungszustand $\tilde{E} = \frac{E}{1-\nu^2}$ ist. Verwendet man für die Beschreibung der äußeren Last anstelle der Spannung im Unendlichen die sogenannte Spannungsintensität

$$K_I = \sqrt{\mathcal{G}_I \tilde{E}} = \sigma_{yy,\infty} \sqrt{\pi a}, \quad (5.4)$$

so lässt sich die Spannungsverteilung in der direkten Umgebung des Risses als

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xz} \end{bmatrix} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \begin{bmatrix} 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} + \mathcal{O}(r) \\ 1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} + \mathcal{O}(r) \\ \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} + \mathcal{O}(r) \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

beschreiben². Da für den scharfen Riss unter Last in jedem Fall die Energiefreisetzungsrates positiv und die Spannungen in der Rissspitze unendlich sind, wird für das Kriterium der Energiefreisetzungsrates \mathcal{G} angenommen, dass diese für ein Wachstum des Risses nicht nur positiv sein muss, sondern eine kritische Rissfreisetzungsrates $\mathcal{G}_{\text{krit.}}$ überschreiten muss. Diese kritische Größe, die als Ähnlichkeitsgröße den notwendigen Belastungszustand für das Risswachstum beschreibt, muss wiederum anhand eines Versuchs ermittelt werden, da sie anhand analytischer Methoden bislang nicht bestimmt werden kann³. Für den Fall einer reinen Belastung des Risses nach dem Rissmodus I ist das Überschreiten einer kritischen Energiefreisetzungsrates $\mathcal{G}_{\text{krit.}}$ gerade äquivalent zur Überschreitung einer kritischen Spannungsintensität $K_{I,\text{krit.}}$.

Für die Rissmodi II und III – Schubbelastung in der Ebene orthogonal zur Rissspitze nach Abbildung 5.1b und Schubbelastung in der Ebene, die durch die Rissspitze und die Normale der Rissoberfläche aufgespannt wird (siehe Abbildung 5.1c), können gleichermaßen die Spannungskomponenten, die ungleich Null sind, in unmittelbarer Nähe zur

² Eine Herleitung dieser Beziehungen ist beispielsweise bei PEREZ [134] zu finden.

³ Siehe hierzu auch Herleitungen der Bruchspannungen von Kristallgittern nach BORN und FÜRTH [24], die bereits in Abschnitt 2.1 angesprochen wurden.

Rissspitze als Funktion der Spannungsintensitäten formuliert werden.

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xz} \end{bmatrix} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \begin{bmatrix} \sin \frac{\theta}{2} \left(2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right) + \mathcal{O}(r) \\ \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} + \mathcal{O}(r) \\ \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right) + \mathcal{O}(r) \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{bmatrix} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \begin{bmatrix} -\sin \frac{\theta}{2} + \mathcal{O}(r) \\ \cos \frac{\theta}{2} + \mathcal{O}(r) \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

Auch hier kann die Beziehung zwischen den Spannungsintensitäten und der Energiefreisetzungsrate für den Fall einer reinen Belastung im Rissmodus II beziehungsweise III aufgestellt werden.

$$\mathcal{G}_{II} = \frac{K_{II}^2}{\tilde{E}} \qquad \mathcal{G}_{III} = \frac{K_{III}^2}{2G} \quad (5.8)$$

Für den Fall einer gemischten Belastung in den unterschiedlichen Rissmodi kann die Energiefreisetzungsrate als Summe der Energiefreisetzungsraten der unterschiedlichen Rissmodi berechnet werden.

RICE [144] stellt mit dem sogenannten J -Integral eine alternative Methodik vor, um die Energiefreisetzungsrate bei einem Risswachstum zu bestimmen. Nach dieser Methode ist die Abnahme des Gesamtpotentials bei einem geraden Risswachstum um da in Richtung \mathbf{n}_a gerade

$$\mathcal{G} da = da \mathbf{n}_a \cdot \underbrace{\int_{\partial\Omega} \left(w \mathbf{I} - \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \right)^T \cdot \boldsymbol{\sigma} \right) \cdot \mathbf{n} d\partial\Omega}_{\mathbf{J}}, \quad (5.9)$$

wobei w die volumenspezifische Dehnungsenergie, $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{F} - \mathbf{I}$ der Verschiebungsgradient und \mathbf{n} der Normalenvektor auf der Oberfläche $\partial\Omega$ ist. Das J -Integral ist dabei unabhängig vom Volumen, über dessen Oberfläche integriert wird. Somit kann es auch bei nichtlinearen Materialien berechnet werden, deren Verhalten in der Nähe der Rissspitze unbekannt ist, indem das betrachtete Volumen so weit ausgedehnt wird, dass seine Oberflächen in einem Teil des Materials liegen, dessen Eigenschaften bekannt sind. Aufgrund dessen, dass die Berechnung unabhängig von den Rissmodi ist, kann dieses Verfahren zur Berechnung der Energiefreisetzungsraten bei gemischter Belastung verwendet werden.

5.2. Rissmodellierung bei makroskopischen diskreten Modellen

5.2.1. Punkt-Feder-Modelle

Federgittermodelle besitzen bei der Modellierung von Rissen gegenüber Kontinuumsmodellen eine Vielzahl von Vorteilen. So ist die Einbeziehung von Rissen in diese Klasse von Modellen gegenüber Kontinuumsmodellen stark vereinfacht. Während bei letzteren zusätzliche Komplexität in das Verformungsverhalten der Modelle eingefügt werden muss – zum Beispiel zusätzliche Rissansatzfunktionen bei den erweiterten finiten Elementen (XFEM) – wird ein Riss in ein diskretes Federmodell durch das Entfernen einer Feder-Verbindung eingefügt. Dies hat zur Folge, dass die unterschiedlichen Phasen des Bruchs, die Rissinitiation und das Risswachstum, mit ein und derselben Formulierung behandelt werden können. Weiterhin haben SHARAFISABA und NAZEM [156] gezeigt, dass dies dazu führt, dass Rissverzweigung und sekundäre Scherrisse bei Federmodellen keiner separaten Behandlung bedürfen, während diese Risse bei den erweiterten finiten Elementen ohne separate Behandlung nicht auftreten.

Auch die Kriterien, die für das Reißen der Federn angenommen werden, zeichnen sich meist durch eine elegante Schlichtheit aus. So wird bei Federmodellen, die nur aus Normalkraftfedern aufgebaut sind, regelmäßig nur die Streckung einer einzelnen Feder als Kriterium verwendet. Da diese Modelle, wie in Kapitel 4 angesprochen wurde, plastisches Verhalten nicht darstellen können, wird dabei ein Materialmodell angenommen, das sich bis zu einer Grenzdehnung $\varepsilon_{\text{krit.}}$, bei der abruptes Versagen auftritt, linear-elastisch verhält. Beispiele hierfür sind bei ASHURST und HOOVER [7], JIRÁSEK und BAŽANT [83], OSTOJA-STARZEWSKI und C. WANG [126] sowie bei WANG ET AL. [170] zu finden.

Alternativ können bei Normalfedermodellen auch Schädigungsmodelle implementiert werden, die der *Overlay*-Methode nach BESSELING [18] ähneln. Bei diesen Modellen wird bei Erreichen der Grenzdehnung $\varepsilon_{\text{krit.}}$ im Stab kein abruptes Versagen, sondern graduelles Versagen angenommen. KRAJČINOVIC und RINALDI [98] sowie RINALDI ET AL. [145] schwächen beispielsweise die Federsteifigkeiten mithilfe eines Schädigungsparameters ab, der von der bisher maximal erreichten Dehnung der Feder abhängt. Der Verlauf des Schädigungsparameters wird dabei häufig über die geforderte Sekantensteifigkeit des Spannungs-Dehnungs-Verlaufs der Feder gewonnen. Für die zulässige Dehnung wird in diesen Modellen meist die Bruchdehnung des Materials aus dem Versuch genutzt. KOSTESKI ET AL. [95] hingegen berechnen die kritische Dehnung mit Hilfe der Konzepte

der linear-elastischen Bruchmechanik und der GRIFFITHS'schen spezifischen Bruchenergie und wählen einen linearen Schädigungsverlauf so, dass bei Erreichen der Maximaldehnung des Stabs ε_{\max} die durch den Bruch dissipierte Energie der theoretischen Bruchenergie entspricht.

Auch bei nichtlokalen Federmodellen, die den Vorteil bieten, die Querkontraktionszahl des Modells frei einstellen zu können, kann dieses eindimensionale Bruchkriterium angewandt werden. CHEN und LIU [36] beispielsweise nutzen ein dreidimensionales Federmodell, bei dem die einzelnen Knoten nicht nur mit ihren direkten Nachbarn verbunden sind, sondern zusätzlich Federverbindungen zu den Knoten vorliegen, die zwei Gitterlagen entfernt liegen. In diesen Modellen müssen entsprechend für die Federn, die mit Nachbarknoten verbunden sind, andere Bruchkriterien gewählt werden als für Federn, die zu weiter entfernten Knoten führen.

Diese eindimensionalen Bruchkriterien für die Federn des Modells führen jedoch zu einem signifikanten Nachteil bei der Rissrechnung: Die Rissausbreitung hängt bei diesen Modellen stark von der Netzgeometrie ab. MONETTE und ANDERSON [113] demonstrieren dies für Federmodelle mit periodischen Dreiecks- und Viereckszellen. Dabei stellen sie fest, dass für reine Normalfedermodelle bei homogener, eindimensionaler Verformung Normalkraftfedern, die um 60° gegenüber der Belastungsrichtung verdreht sind, verglichen mit Federn, die in Belastungsrichtung liegen, erst bei einer um 50% höheren Verformung brechen. Sie zeigen jedoch zugleich, dass diese Anisotropie durch das Einführen von Winkelfedern zwischen den Stäben und die Nutzung eines deformationsenergiebasierten Bruchkriteriums reduziert werden kann.

In der Folge existieren eine Vielzahl von Bruchkriterien, die diese Mehrdimensionalität des Verformungszustands einbinden. Diese Modelle nutzen entweder ein separates Bruchkriterium für Normal- und Schubbelastung, wie zum Beispiel das *Distinct Lattice Spring Model* bei ZHAO [179] sowie ZHAO, FANG und ZHAO [181], oder berechnen aus der Gesamtbelastung analog zu den Vergleichsspannungshypothesen einen vergleichbaren, eindimensionalen Belastungszustand. Ein Beispiel für letzteres ist in der Arbeit von BRAUN und FERNÁNDEZ-SÁEZ [29] zu finden, die aus dem mehrdimensionalen Dehnungszustand analog zum RANKINE-Kriterium die größte Hauptdehnung als orientierungsunabhängiges Bruchkriterium für die Feder nutzen. Da innerhalb einer Feder selbst jedoch kein vollständiger Dehnungszustand vorliegt, müssen sie hierzu die Dehnungen der Knoten, mit denen die Feder verbunden ist, bestimmen, und diese auf die Feder übertragen.

5.2.2. Balkenmodelle

Auch bei Balkenmodellen können mit einfachen Bruchkriterien gute Ergebnisse für die Bruchlasten und Rissverläufe erzielt werden. So nutzen SCHLANGEN und GARBOCZI [152] sowie SARKAR ET AL. [151] für ihr Balkenmodell ein Bruchkriterium, in das, wie bei Normalfedermodellen, nur die Streckung der Balken eingeht. Die Begründung hierfür liefert SCHLANGEN [155], der in seiner Arbeit zeigt, dass das Einbeziehen der Balkenkrümmungen keinen Einfluss auf die Richtungsabhängigkeit des Bruchs hat. Somit hängt die Rissbildung sowohl bei der Nutzung als auch bei der Vernachlässigung der Krümmung der Balken im Bruchkriterium nach Aussage dieser Arbeiten in erster Linie vom gewählten Netz und nicht von der tatsächlichen Belastung des Materials ab. Durch diese Tatsache liefert eine Berücksichtigung der Krümmung keinen wesentlichen Vorteil bei gleichzeitig zunehmender Modellkomplexität. Diese Richtungsabhängigkeit des Bruchs wird von SCHLANGEN und GARBOCZI in einer späteren Arbeit [153] analog zu anderen Federmodellen dadurch behoben, dass Kontinuumsdeformationen an den Knoten des Modells berechnet und diese als Bruchkriterium für die Balken herangezogen werden. KOZICKI [97] hingegen verringert die Richtungsabhängigkeit der Rissbildung von der Netzgeometrie dadurch, dass separate eindimensionale Bruchkriterien der maximalen Normal- und Schubdehnung sowie der maximalen Krümmung der Balken eingeführt werden. Mithilfe all dieser Kriterien ist es ihm damit möglich, die Bruchergebnisse sowohl von Drei- und Vierpunktbiegeversuchen bei Beton als auch von kombinierten Zug-Schub-Proben zu reproduzieren.

LILLIU und VAN MIER [103] hingegen beschreiten einen anderen Weg für die Bruchkriterien bei Balkenmodellen, indem sie die Krümmung des Balkens bei der Berechnung der Normalspannungen, die als Bruchkriterium genutzt werden, miteinbeziehen. Jedoch wird dabei nicht die maximale Biegespannung $\sigma_{b,max.}$, sondern eine gewichtete Biegespannung $\alpha \sigma_{b,max.}$ nach SCHLANGEN und VAN MIER [154] genutzt. Wird der Koeffizient α dabei zu Null gesetzt, so ergibt sich ein Kriterium, das wieder nur die Streckung des Balkens berücksichtigt. Da in diesem Fall aber bei zweidimensionalen Modellen sogenanntes *peeling*⁴ nach TZSCHICHHOLZ [167] auftritt, empfehlen LILLIU und VAN MIER, $\alpha = 0.005$ zu wählen. Für den dreidimensionalen Fall wird jedoch festgestellt, dass analog zur Erkenntnis von SCHLANGEN [155] der Beitrag der Biegespannung zum Bruch im Modell zu vernachlässigen ist ($\alpha = 0$). Der Fall der Berücksichtigung der maximalen Intensität der Biegespannung ($\alpha = 1$) wird von CHRISTODOULOU und TAN [39] an Balkenmodellen

⁴ Als *peeling* wird der Effekt bezeichnet, dass einzelne Lagen von Balken, die orthogonal zur Belastungsrichtung verlaufen, vom Modell abgezogen werden. Dies führt dazu, dass sich, wenn einzelne Elemente in Belastungsrichtung erhalten bleiben, mehrere parallele Risse direkt untereinander bilden.

untersucht, bei denen die Balken auf den Kanten von VORONOI-Polygonen liegen. Hierbei stellen sie fest, dass der Beitrag der Biegespannung zur extremalen Normalspannung der Balken regelmäßig unter 10% liegt, was wiederum ihre Vernachlässigung rechtfertigt.

5.2.3. Starrkörper-Feder-Modelle

Bei Starrkörper-Feder-Modellen findet in den Verbindungsebenen der einzelnen Zellen ein mehrdimensionaler Kraftfluss statt, der üblicherweise in einen Kraftfluss in Normalenrichtung und einen Kraftfluss in Tangentialrichtung aufgeteilt wird. In den Bruchkriterien werden dabei entweder die Teilkraftflüsse in Normal- und Tangentialrichtung, oder aber der gesamte Kraftfluss betrachtet. Ersteres ist beispielsweise bei ZUBELEWICZ und BAŽANT [184] zu finden. Sie nutzen als Bruchkriterium eine maximal zulässige Normal- und Schubkraft. Wird diese überschritten, so wird in diesem Modell nur die Normalsteifigkeit zwischen den Zellen entfernt. Dies soll der Tatsache Ausdruck verleihen, dass bei kleinen Verformungen auch im Riss noch tangentialer Kraftübertragung aufgrund von Reibung vorliegt. Regelmäßig werden bei dieser Modellklasse jedoch mehrdimensionale Schädigungsmodelle verwendet. So nutzen BOLANDER und SAITO [21] sowie YIP ET AL. [177] für die Modellierung der Rissbildung bei Beton eine Modifikation des Versagenskriteriums nach MOHR-COULOMB, die zusätzlich eine maximal zulässige Zugspannung enthält. Hierbei werden als Normal- und Tangentialspannung jedoch nicht die Kontinuumsspannungen verwendet, sondern die Spannungsvektoren auf der Oberfläche der Zellen. Die dadurch auftretende Anisotropie der Rissbildung kann wieder, wie bei Feder- und Balkenmodellen, durch die Verwendung der Kontinuumsspannungen in der Zelle selbst eliminiert werden [6, 19]. Die Risspfade bei der Verwendung eines solchen Modells sind jedoch selbst ohne die Verwendung der Kontinuumsspannungen in der Lage, die im Versuch ermittelten Risspfade gut abzubilden. Lediglich die Bruchlasten streuen bei einer Modifikation des Netzes stark, wobei diese Streuung bei feineren Auflösungen zunimmt. Der Grund hierfür ist nach ELIŠ und VOŘECHOVSKÝ [48] darin zu finden, dass bei diesen Modellen die dissipierte Bruchenergie stark von der Netzgeometrie und -feinheit abhängt.

Um dies zu beheben, nutzen BOLANDER ET AL. [20] sowie BOLANDER und SUKUMAR [22] das sogenannte *Crack-Band*-Konzept nach BAŽANT und OH [14]. Bei diesem Konzept wird davon ausgegangen, dass die Rissbildung nicht in der Verbindungsebene zwischen zwei Zellen, sondern orthogonal zur Richtung der Kraftübertragung zwischen diesen Zellen stattfindet. Diese Erweiterung führt zu einer Invarianz der durch den Riss dissipierten Energie von der Netzfeinheit und -geometrie.

Auch Schädigungsmodelle mit kontinuierlicher Schädigung werden für Starrkörper-Feder-Modelle genutzt. CUSATIS, PELESSONE und MENCARELLI [43] beispielsweise nutzen ein Kriterium, bei dem die zulässige effektive Spannung $\sigma_{\text{eff.,zul.}}$ in einer Federverbindung durch die bisher erreichte effektive Dehnung $\varepsilon_{\text{eff.,max.}}$ in dieser bestimmt wird.

$$\sigma_{\text{eff.,zul.}} = \sigma_{0,\text{zul.}} e^{-f(\varepsilon_{\text{eff.,max.}})} \quad (5.10)$$

Die effektiven Spannungen und Dehnungen werden dabei als gewichtetes quadratisches Mittel der Normal- und Schubkomponenten des Spannungsvektors in der Verbindung definiert. HWANG, BOLANDER und LIM [74] hingegen erweitern das Schädigungsmodell nach BOLANDER und SAITO [21] um ein viskoplastisches Schädigungsmodell. Hierzu ersetzen sie die Normal- und Querkraftfedern des Starrkörper-Feder-Modells durch viskoelastoplastische Elemente mit einer Schädigungskomponente. Durch diese Modifikation ist es möglich, bei Simulationen der Wellenausbreitung in Kontinua die Rissbildung durch elastische Wellen zu berechnen. In einer nachfolgenden Arbeit von HWANG und LIM [75] wurde zudem verifiziert, dass ein solches Modell auch bei stoßartigen Belastungen zuverlässige Ergebnisse für die Risspfade in Beton liefert.

5.2.4. Zusammenfassung

Bei Betrachtung der oben vorgestellten Modelle für die Rissrechnung, die bei diskreten Modellen angewendet werden, sind einige Gemeinsamkeiten in den Eigenschaften dieser zu erkennen. So basieren sie nicht auf den Konzepten der GRIFFITH'schen Bruchmechanik, sondern nutzen eine kritische Verformung oder Belastung der lastübertragenden Elemente zur Bestimmung des Risswachstums. Solche Kriterien sind jedoch nach OROWAN [121] äquivalent zum Kriterium der Energiefreisetzung bei einem Rissfortschritt, was die guten Übereinstimmungen der Simulationsergebnisse dieser Modelle mit Versuchsergebnissen erklärt. Eine weitere Gemeinsamkeit der Rissimulation mit diskreten Modellen ist, dass die Verwendung eines eindimensionalen Modells für das Versagensverhalten der Verbindungselemente in allen Fällen zu starken Streuungen in den Lasten führt, die für die Rissbildung aufgebracht werden müssen. Der Grund hierfür ist, dass die Belastung, die zum Bruch des Elements erforderlich ist, von der geometrischen Ausrichtung ebendieses Elements abhängt. Dennoch werden bei diesen Modellen die Risspfade, die im Versuch beobachtet werden können, gut abgebildet, sofern das Rechengitter nicht periodisch ist. Durch die Verwendung eines mehrdimensionalen Ansatzes für das Versagen der Verbindungselemente, der im Allgemeinen entweder über die Verformungen an den

Knoten oder einen mehrdimensionalen Verformungszustand der Verbindungselemente formuliert wird, kann die Abhängigkeit der Rissbildung von der Netzausrichtung jedoch bei allen Modellen verringert werden.

5.3. Spröbruchmodellierung im neu entwickelten Federmodell

Bei der Rissbildung und dem Risswachstum handelt es sich um Phänomene, die von der lokalen Belastung und den lokalen Eigenschaften des Materials abhängen. Dementsprechend muss auch im Federmodell gewährleistet werden, dass das Versagensverhalten der Verbindungselemente rein von der lokalen Verformung dieser Elemente abhängt. Hierbei wird analog zur Dehnungsberechnung nach Abschnitt 3.5.3 angenommen, dass sich eine kraftübertragende Verbindung aus einer Normalkraftfeder zwischen zwei Punkten sowie den Winkelfedern, die mit dieser verbunden sind, besteht. Im Gegensatz zu den Arbeiten anderer Autoren, die im vorigen Abschnitt vorgestellt wurden, ist dies bei einem diskreten Modell, das aus Normalkraft- und Winkelfedern besteht, ausreichend, um die Unabhängigkeit der Rissbildung von der Netzausrichtung zu ermöglichen. Der Grund hierfür ist, dass mit einem solchen Modell durch die Winkelfedern lokal bereits ein mehrdimensionaler Verformungszustand vorliegt, der für die Rissrechnung verwendet werden kann.

Für die numerische Rissberechnung werden im Wesentlichen drei Komponenten benötigt, die im Folgenden für das hier entwickelte Modell vorgestellt werden sollen. Diese Komponenten sind eine Annahme für die Berechnung der lokalen Deformation des Modells als Maß für die Belastung, eine Annahme für die lokale Beanspruchbarkeit des Modells, sowie ein Verfahren, um das lokale Versagen als Riss in das numerische Modell einzufügen.

5.3.1. Berechnung der Verformung der Verbindungen

Für die lokale Verformung der Verbindungen in einem diskreten Modell können, wie in Abschnitt 5.2 anhand der veröffentlichten Literatur gezeigt wurde, eine Vielzahl unterschiedlicher Modelle genutzt werden. Am weitesten verbreitet sind hierbei jedoch kraft- und dehnungsbasierte Beanspruchungsmodelle, wobei diese wiederum sowohl an Knoten als auch in den Verbindungen des Modells angewandt werden.

Für diese Arbeit findet im Folgenden eine Beschränkung auf verbindungsbezogene, dehnungsbasierte Beanspruchungsmodelle statt. Die Beanspruchung wird somit innerhalb

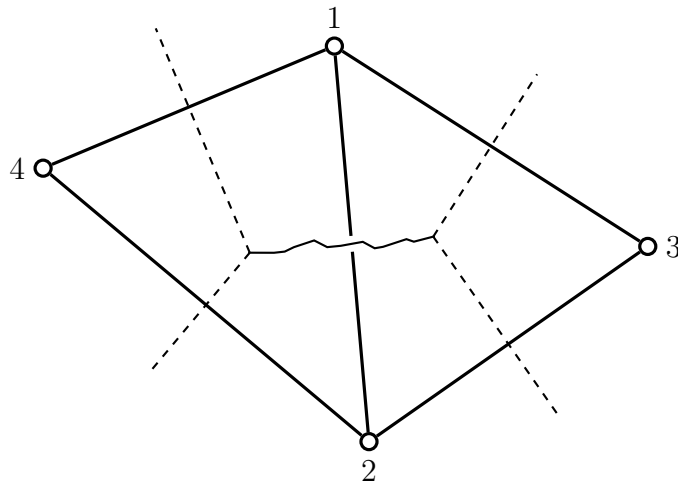


Abbildung 5.2.: Geometrie zweier benachbarter Zellen, deren gemeinsame Verbindung gebrochen ist. Die angenommene Rissfläche ist durch die gezackte Linie dargestellt.

einer jeden Verbindung über einen Dehnungszustand der Verbindung beschrieben. Hierbei muss zwischen zwei unterschiedlichen Fällen unterschieden werden. Der erste Fall ist der einer Verbindung, die in eine ungeschädigte Dreieckszelle eingebettet ist. Da innerhalb dieser Zelle ein konstantes Dehnungsfeld vorliegt, kann die Dehnung der Verbindung nach Abschnitt 3.5.3 bestimmt werden.

Im zweiten Fall, dem Fall einer Verbindung, die Teil einer Zelle ist, die einen Riss enthält, kann diese Annahme nicht mehr getroffen werden. Dies soll anhand eines Beispiels, das in Abbildung 5.2 dargestellt ist, demonstriert werden. Wird in diesem Beispiel durch Überbelastung die Verbindung, die zwischen den Knoten 1 und 2 liegt, entfernt, so liegt als resultierendes System eine Viereckszelle (im allgemeinen Falle eine Polygonzelle) vor. Innerhalb dieser Zelle ist jedoch die Annahme eines konstanten Dehnungszustands aus zwei Gründen nicht mehr gerechtfertigt. Erstens lässt sich die Bewegung von vier Punkten im Allgemeinen nicht mehr über einen konstanten Dehnungszustand beschreiben. Da die Knotenverschiebungen jedoch unabhängig voneinander sind, bedeutet dies im Umkehrschluss, dass im Gebiet zwischen diesen Knoten im Allgemeinen kein konstantes Dehnungsfeld vorliegen kann. Zweitens muss an der Rissfläche, die zwischen den Knoten 1 und 2 und damit innerhalb der Zelle liegt, das Kräftegleichgewicht erfüllt sein. Folglich muss, bei Vernachlässigung von Kontakt zwischen den Rissflächen, der Kraftfluss über diese Fläche zu Null werden. Die Normalspannung senkrecht zu dieser Fläche sowie die Schubspannungen in dieser Fläche müssen demnach verschwinden. Da diese Bedingungen entlang aller anderen Verbindungen im Allgemeinen nicht erfüllt sind, muss somit in

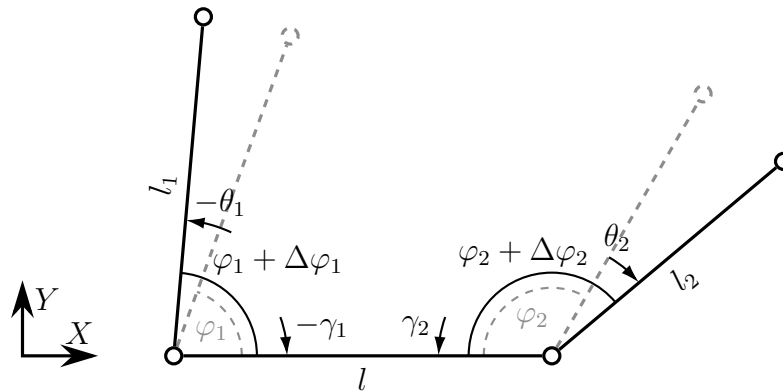


Abbildung 5.3.: Verformung eines Verbindungselements, das Teil einer Zelle mit mehr als drei Knoten ist.

der Zelle ein variabler Dehnungszustand herrschen. Um das veränderliche Dehnungsfeld einer Verbindung, die an einen Riss angrenzt, zu berücksichtigen, muss folglich eine neue Berechnungsmethodik für diese eingeführt werden. Diese sollte, um die Modellkonsistenz zu wahren, nur von Verformungsgrößen in den Elementen abhängen, die Teil der Verbindung sind.

Betrachtet man dazu eine einzelne Normalkraftfeder sowie die Winkelfedern, die mit dieser verbunden sind, so können nach Abbildung 5.3 aus den drei Deformationsmöglichkeiten des Systems drei Verformungsmoden angenommen werden:

1. Die Verbindung unterliegt bei einer Streckung $\lambda_{x,n}$ der Normalkraftfeder einer konstanten Normaldeformation

$$F_{xx,n} = \lambda_{x,n} - 1 \quad (5.11)$$

2. Eine der Winkelfedern wird gestaucht, während die andere gestreckt wird. Dies entspricht einer Schubdeformation der Verbindung. Unter Annahme einer konstanten Schubverformung in der Verbindung folgt bei ausschließlicher Betrachtung des Verformungsanteils der Winkelfedern nach Anhang A.1.2 aus geometrischen Überlegungen

$$F_{xy} = \tan \frac{\Delta \varphi_2}{2} - \tan \frac{\Delta \varphi_1}{2}. \quad (5.12)$$

3. Die Winkelfedern werden beide gestreckt oder beide gestaucht. Diese Verformung entspricht einer Biegeverformung. Aus geometrischen Überlegungen folgt die Krüm-

mung der Verbindung als

$$\kappa = \left(\tan \frac{\Delta\varphi_1}{2} + \tan \frac{\Delta\varphi_2}{2} \right) \frac{1}{l}, \quad (5.13)$$

wobei l die entlastete Länge der Normalkraftfeder bezeichnet. Wird zusätzlich angenommen, dass die VORONOI-Polygone die Einflussbereiche der Knoten darstellen und somit die Höhe der gebogenen Verbindung der Länge des Kantenabschnitts des VORONOI-Polygons orthogonal zur Verbindung innerhalb der Zelle entspricht, so kann die maximale Biegedeformation in der Verbindung wie folgt bestimmt werden.

$$F_{xx,\kappa} = 1 + \kappa l_v = 1 + \left(\tan \frac{\Delta\varphi_1}{2} + \tan \frac{\Delta\varphi_2}{2} \right) \frac{l_v}{l} \quad (5.14)$$

Die maximale Gesamtdeformation der Verbindung ergibt sich durch Überlagerung der einzelnen Deformationsmoden zu

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \lambda_{x,n} F_{xx,\kappa} & \varepsilon_{xy} \\ 0 & \lambda_y \end{bmatrix}. \quad (5.15)$$

Hierbei ist zu beachten, dass die Streckung quer zur Verbindung aus den Verformungen der Federn nicht berechnet werden kann⁵. Folglich muss auch für diese eine Annahme getroffen werden. Es bietet sich hierbei entweder die Berechnung der Querdehnung über die Querkontraktion aus der Gesamtstreckung in Längsrichtung als $F_{22} = 1 - \nu (F_{11} - 1)$ oder die Annahme eines querdehnungsfreien Zustands mit $F_{22} = 1$ an⁶.

Es bleibt anzumerken, dass die hier vorgestellte Berechnung der Dehnungen am Riss nicht in der Lage ist, die analytischen Spannungs- und Dehnungsfelder, die aus der linear-elastischen Bruchmechanik bekannt sind (siehe auch Gleichungen (5.5ff.)), zu reproduzieren. Dies ist jedoch bei numerischen Rechnungen unabhängig von der Wahl des Berechnungsverfahrens der Fall, sofern diese Singularitäten nicht, wie bei finiten Risspitzenelementen [12], explizit im Modell enthalten sind. Die vorgestellte Methodik stellt somit lediglich eine Näherung des Dehnungsfelds nahe des Risses im Rahmen der begrenzten Auflösung des numerischen Verfahrens dar.

⁵ Es können aus den drei Federdeformationen maximal drei linear unabhängige Dehnungsfelder bestimmt und überlagert werden.

⁶ Im folgenden Abschnitt 5.3.3 wird gezeigt, dass im Falle des Versagens einer Verbindung die Annahme $\nu = 0$ gewählt werden muss, womit beide vorgestellten Annahmen zusammenfallen.

5.3.2. Modelle für das Versagen der Verbindungen

Dadurch, dass im neu entwickelten Modell die Berechnung mehrdimensionaler Dehnungsmaße möglich ist, können zur Bestimmung der Beanspruchbarkeit der Federn sämtliche Vergleichshypothesen verwendet werden, die aus anderen diskreten Modellen und aus Kontinuumsmodellen bekannt sind. Um zu zeigen, wie die Wahl des Beanspruchungsmaßes die Rissbildung im Federmodell beeinflusst, findet im Folgenden jedoch eine Beschränkung auf fünf unterschiedliche Versagensmodelle statt:

- a) Versagen aufgrund einer maximalen Normaldehnung, wobei nur die Normaldehnung in Richtung der Längsfedern berücksichtigt wird (Abbildung 5.4a). In diesem Modell sind somit nur die Verformungen der Längsfedern ausschlaggebend für das Versagen einer Verbindung. Zudem wird Versagen nur bei Zug-, nicht jedoch bei Druckbelastung zugelassen.
- b) Versagen aufgrund einer maximalen Schubverformung. Hierbei werden nur der Schub in einem Koordinatensystem, bei dem die Längsfeder in einer der Achsen liegt, sowie der Schub aufgrund einer Normaldehnung in diesem Koordinatensystem berücksichtigt (Abbildung 5.4b). Für die Berechnung wird dabei je Längsfeder eine einzige Verformung berechnet.
- c) Versagen wie bei Modell b). Es wird dabei jedoch in jeder Längsfeder für jede an diese Feder angrenzende Zelle eine separate Verformung bestimmt (Abbildung 5.4c). Es wird angenommen, dass die gesamte Verbindung versagt, sobald eine der Verformungen die zulässige Grenzverformung überschreitet.
- d) Versagen nach dem Modell b), wobei aus der mehrdimensionalen Verformung die maximale Schubdehnung als Bruchkriterium dient (Abbildung 5.4d).
- e) Versagen nach Modell c). Auch hier wird anstelle der Schubdehnung in einer Richtung die maximale Schubdehnung verwendet (Abbildung 5.4e).

5.3.3. Notwendige Modellmodifikationen beim Versagen einer Verbindung

Beim Versagen einer Verbindung müssen sämtliche Elemente, die Teil dieser Verbindung sind, aus dem Modell entfernt werden. Diese sind, wie in Abbildung 5.5 zu sehen ist, neben der Normalkraftfeder der Verbindung die Anteile der Winkelfeder, die entlang jener verlaufen. Wird jedoch angenommen, dass der Riss entlang des VORONOI-Polygonsegments verläuft, das diese Verbindung schneidet, so ist anzunehmen, dass die Winkelsteifigkeiten an den Knoten 1 und 2 nach Abbildung 5.5 erhalten bleiben. Um aber zugleich eine

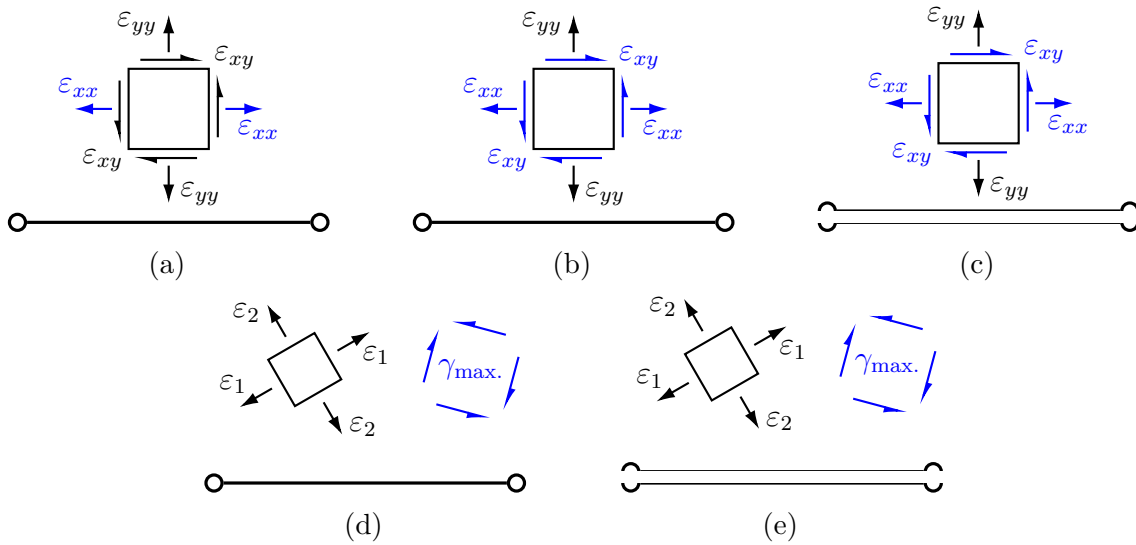


Abbildung 5.4.: Kriterien, die für das Versagen der Verbindungen angewandt werden. Die Dehnungen, die im Bruchkriterium berücksichtigt werden, sind in blau dargestellt.

direkte Kraftübertragung zwischen den Knoten 1 und 2 des Beispiels zu vermeiden, müssen die Winkelfedern an den Knoten 1 und 2 so kombiniert werden, dass sie in den Winkeln $\angle(\mathbf{X}_4, \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_3)$ beziehungsweise $\angle(\mathbf{X}_3, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_4)$ wirken. Dies entspricht den Winkeln ψ_i , die in derselben Abbildung gestrichelt dargestellt sind.

Methoden zur Kombination von Winkelfedern

Für die Berechnung der neuen Steifigkeiten der Winkelfedern ist prinzipiell ein beliebiges Vorgehen möglich. Im Folgenden werden mehrere Annahmen für diese Berechnung diskutiert. Die geometrischen Größen, die in diesen Annahmen verwendet werden, sind Abbildung 5.6 zu entnehmen.

- a) Die Annahme der Erhaltung der Dehnungsenergie der Winkelfedern beim Bruch der Normalfeder,

$$k_\varphi \Delta\varphi^2 + k_\theta \Delta\theta^2 = k_\psi (\Delta\varphi + \Delta\theta)^2, \tag{5.16}$$

liefert eine obere Grenze für die neue Federsteifigkeit, da bei der Wahl einer größeren Federsteifigkeit eine Zunahme der gespeicherten Dehnungsenergie bei einem Riss

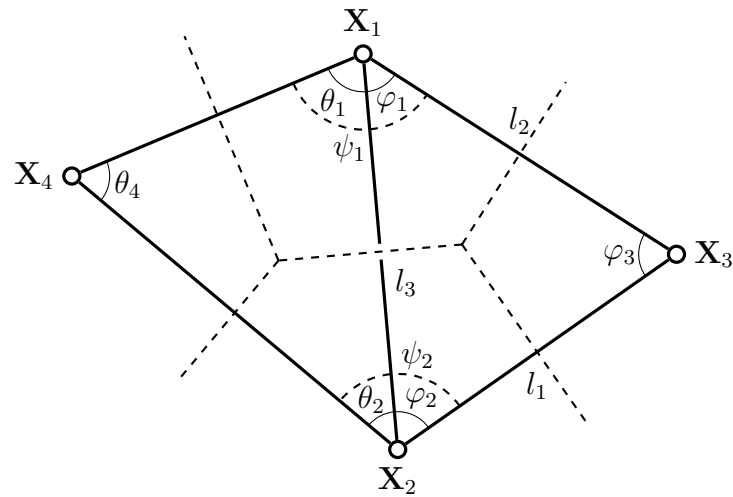


Abbildung 5.5.: Geometrie zweier Dreieckszellen, bei denen der sie verbindenden Stab versagt. Zusätzlich dargestellt sind die VORONOI-Polygone (gestrichelt) sowie die Winkel φ_i , θ_i sowie ψ_i der beiden Dreieckszellen beziehungsweise der Kombination dieser Zellen.

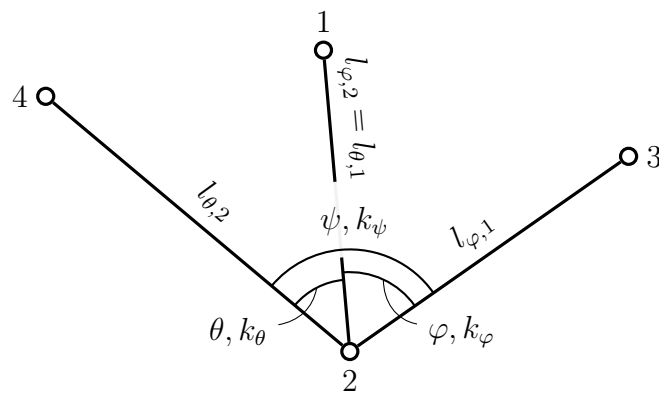


Abbildung 5.6.: Zusammenfassung der geometrischen Größen, die für den Zusammenbau zweier Winkelfedern verwendet werden.

nicht ausgeschlossen werden kann.

$$k_{\psi,\Pi} = \frac{k_{\varphi} \Delta\varphi^2 + k_{\theta} \Delta\theta^2}{(\Delta\varphi + \Delta\theta)^2} \quad (5.17)$$

Diese Annahme ist jedoch vom Standpunkt der Invarianz des Modells von der Reihenfolge der Rissbildung fragwürdig, da die neue Federsteifigkeit nach dieser Annahme eine Funktion der Verformung beim Bruch ist. Somit ist es nach dieser Methode denkbar, für dasselbe Rissbild unterschiedliche elastische Steifigkeitsergebnisse zu erhalten, die davon abhängen, in welcher Reihenfolge und bei welcher Last die einzelnen Verbindungen gerissen sind.

- b) Die Annahme der Reihenschaltung der beiden Winkelfedern geht davon aus, dass die Verdrehung des gebrochenen Stabs beliebig sein kann. Dies führt zu dem Ergebnis, dass die Last, die von beiden Winkelfedern getragen wird, gleich sein muss, und somit zu einer Reihenschaltung der Steifigkeiten.

$$k_{\psi,M} = \frac{k_{\varphi} k_{\theta}}{k_{\varphi} + k_{\theta}} \quad (5.18)$$

Die Annahme der Reihenschaltung der Winkelfedern erfüllt die Energiebedingung genau für $k_{\varphi} + k_{\theta} > 0$ (siehe auch Anhang A.5).

- c) Die Annahme einer gleichmäßigen Verformung der neuen Winkelfeder geht davon aus, dass sich die alten Winkelfedern innerhalb der neuen Winkelfeder gleichmäßig verformen. Die Winkeländerung pro Anfangswinkel soll dann mit $\frac{\Delta\varphi}{\varphi} = \frac{\Delta\theta}{\theta}$ für beide Federn gleich sein. Diese Annahme führt auf eine Steifigkeit der neuen Winkelfeder von

$$k_{\psi,V} = \frac{k_{\varphi} \varphi^2 + k_{\theta} \theta^2}{(\varphi + \theta)^2}. \quad (5.19)$$

Für diese Annahme kann allgemein nicht mehr ausgesagt werden, ob die Dehnungsenergie der Winkelfedern durch den Bruch der Verbindung bei konstanter Verformung des Modells zu- oder abnimmt⁷. Sie ist somit für die Verwendung in einem Modell für die Rissbildung ungeeignet.

- d) Die letzte Annahme nutzt die Tatsache aus, dass eine Winkelfeder nach Anhang A.1.2 äquivalent zu einem rotationsinvarianten Satz von Schubfedern ist. Somit ist

⁷ Man betrachte dazu den Fall $k_{\varphi} > 0, \Delta\varphi = 0, k_{\theta} = 0, \Delta\theta \neq 0$, für den die Dehnungsenergie der beiden Winkelfedern vor dem Bruch zu Null wird, nach dem Bruch jedoch in der resultierenden Winkelfeder eine Dehnungsenergie größer Null vorliegt.

es möglich, die Schubfedern, die in der versagenden Verbindung liegen, zu entfernen, und aus den beiden Schubfedern, die für jeden Knoten der Verbindung erhalten bleiben, eine neue Winkelfeder aufzubauen.

$$k_{\psi,\gamma} = \frac{l_{\varphi,1}^2 l_{\theta,2}^2}{l_{\varphi,1}^2 + l_{\theta,2}^2} \left(c_{\varphi} k_{\varphi} \frac{l_{\varphi,1}^2 + l_{\varphi,2}^2}{l_{\varphi,1}^2 l_{\varphi,2}^2} + c_{\theta} k_{\theta} \frac{l_{\theta,1}^2 + l_{\theta,2}^2}{l_{\theta,1}^2 l_{\theta,2}^2} \right) \quad (5.20)$$

Die Parameter c_{φ} und c_{θ} sind dabei Parameter, die den Einfluss der Schubfedern auf die neue Winkelfeder beschreiben. Zur Bestimmung dieser wird analog zur Herleitung der Äquivalenz zwischen Winkel- und Schubfedern gefordert, dass die starrkörperdrehungsfreie Verformung das Momentengleichgewicht erfüllen muss. Mithilfe dieser Forderung kann das Verhältnis der Gewichtung beider Federn zu

$$\frac{c_{\varphi}}{c_{\theta}} = \frac{k_{\theta} l_{\varphi,1}^2 (l_{\theta,1}^2 + l_{\theta,2}^2)}{k_{\varphi} l_{\theta,2}^2 (l_{\varphi,1}^2 + l_{\varphi,2}^2)} \quad (5.21)$$

bestimmt werden. Gleichung (5.21) zeigt, dass diese Form der Wichtung offensichtlich nur dann sinnvoll ist, wenn die Steifigkeiten der ursprünglichen Winkelfedern dasselbe Vorzeichen besitzen, da ansonsten eine der Federn mit negativem Gewicht in die Kombination beider Federn einginge. Die resultierende Federsteifigkeit der kombinierten Winkelfeder ergibt sich damit zu

$$k_{\psi,\gamma} = 2 c_{\varphi} k_{\varphi} \frac{l_{\theta,2}^2}{l_{\varphi,2}^2} \frac{l_{\varphi,1}^2 + l_{\varphi,2}^2}{l_{\varphi,1}^2 + l_{\theta,2}^2}, \quad (5.22)$$

wobei die Intensität über den Faktor c_{φ} noch unbestimmt ist. Auch hier kann jedoch, wie bei der Annahme der gleichmäßigen Verformung, die Abnahme der Dehnungsenergie durch den Bruch nicht garantiert werden, sofern ein konstanter Parameter c_{φ} gewählt wird.

Im Folgenden wird daher beim Bruch einer Verbindung eine Reihenschaltung nach Punkt b) der mit dieser Verbindung gekoppelten Winkelfedern durchgeführt, da diese Annahme die einzige ist, die sowohl unabhängig von der momentanen Belastung der Winkelfedern ist als auch die Möglichkeit bietet, die Abnahme der Dehnungsenergie des Systems durch den Bruch zu garantieren. Für letzteres muss nur gewährleistet sein, dass die Summe der Steifigkeiten beider Federn größer als Null wird. Dies kann jedoch, wie Abbildung 3.5 entnommen werden kann, nur dann garantiert werden, wenn die Dreieckszellen nicht stumpfwinklig sind und zugleich die Querkontraktion des Modells in den Dreieckszellen, die eine gebrochene Feder enthalten, beim Bruch zu Null gesetzt werden. Während ersteres

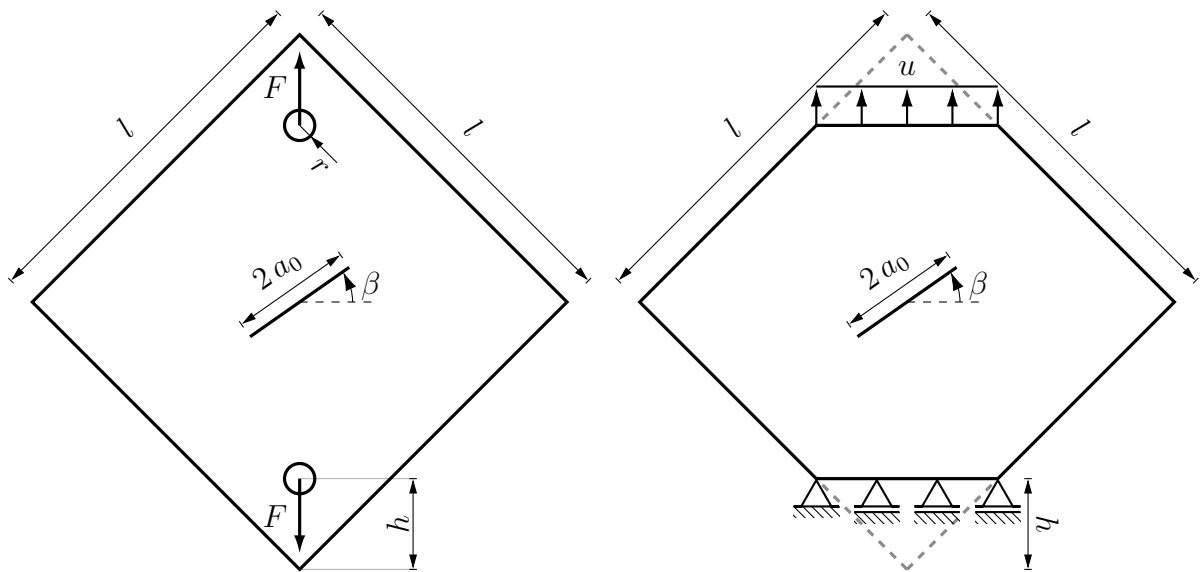
über die Netzgenerierung erreicht werden kann (siehe Abschnitt 2.3.2), ist letzteres eine Annahme, die zwar mit Sicherheit physikalisch falsch ist, aber dennoch im numerischen Modell getroffen werden muss, um die Abnahme der Dehnungsenergie bei einem Bruch bei gleichzeitiger Invarianz des Modells gegenüber der Reihenfolge des Versagensvorgangs zu garantieren⁸.

Über die Stabilität des Modells nach dem Versagen einer Verbindung

Nicht nur die Bedingung der Abnahme der Dehnungsenergie des Gesamtsystems bei konstanter Verformung während eines Bruchs stellt die Modellierung bei den gewählten Dreieckszellen vor Probleme. Zusätzlich besteht die Möglichkeit, dass die elastische Stabilität des Federsystems durch den Bruch einer Verbindung verloren geht. Grund hierfür sind negative Federsteifigkeiten, die sich bei der Berechnung dieser nach den Gleichungen (3.17) und (3.18) ergeben können. Zwar garantiert die vorgestellte Berechnungsmethodik für ein elastisch stabiles Material, dass die resultierende Federzelle stabil ist, da die Dehnungsenergie für ein beliebiges, konstantes Dehnungsfeld gleich sein muss. Es besteht jedoch die Möglichkeit, dass die elastische Stabilität der Zelle durch das Entfernen einer Feder mit positiver Federsteifigkeit verloren geht. Auch dies kann, wie die Bedingung der Abnahme der Dehnungsenergie beim Bruch, dadurch vermieden werden, dass in gebrochenen Zellen nur positive Federsteifigkeiten zugelassen werden. Entsprechend muss auch hierfür die Spitzwinkligkeit der Dreieckszellen garantiert und die Querkontraktion der geschädigten Zelle zu Null gesetzt werden.

Obwohl dieses Vorgehen zu einer Modifikation des Materials im Modell führt, stellt es, verglichen mit dem Risiko der instabilen Zellen, die bessere Alternative dar, da auch bei diesen alleine durch das Entfernen einzelner Federn das Material im Riss auf unphysikalische Weise modifiziert wird. Somit stellt die Modifikation der Querkontraktionszahl im Riss nichts anderes dar, als eine andere, unphysikalische Modifikation der Materialparameter im Riss, die jedoch zugleich die numerische Stabilität des Rechenverfahrens verbessert und unphysikalische, elastisch instabile Verformungen im Riss vermeidet.

⁸ Es muss hierbei jedoch beachtet werden, dass die Materialsteifigkeit eines isotropen Materials, das durch den Elastizitätsmodul E und die Querkontraktionszahl ν gegeben ist, bei einer Modifikation letzterer in manchen Richtungen eine Versteifung erfährt. Um dies zu vermeiden, wird im vorliegenden Modell zugleich der Elastizitätsmodul abgesenkt.



(a) In Experimenten verwendete Probe. (b) Für die numerische Rechnung modifizierte Probe.

Abbildung 5.7.: Bruchprobe nach AYATOLLAHI und ALIHA [10]. In Abbildung (a) ist die Probe dargestellt, wie sie im Versuch verwendet wird. In Abbildung (b) ist die Modifikation der Probe für numerische Simulationen dargestellt, die hier verwendet wird.

5.4. Ergebnisse von Spröbruchrechnungen

Für die Untersuchung des Rissverhaltens mit dem hier entwickelten Modell wird dieses auf numerische Bruchversuche mit einer diagonal belasteten Scheibe mit Anriss nach Abbildung 5.7 angewandt. Dieser Probenkörper, der von AYATOLLAHI und ALIHA [10] eingeführt wurde, bietet den Vorteil, dass je nach Winkel des Anrisses der Riss sowohl rein in den Rissmodi I und II, aber auch in einem gemischten Modus I/II belastet wird. Um die Vergleichbarkeit mit den Versuchen von AYATOLLAHI und ALIHA zu gewährleisten, werden die Simulationen mit denselben Materialdaten für PMMA und denselben Ausmaßen der Probe nach Tabelle 5.1 durchgeführt.

Von numerischer Seite wird bei dieser Simulation wie bei den elasto-plastischen Simulationen ein inkrementelles Vorgehen verwendet. Dabei wird in jedem Lastinkrement die Belastung genau so weit erhöht oder verringert, bis genau eine einzelne Verbindung ihre zulässige Belastung erreicht hat, und diese Verbindung aus dem Modell entfernt. Dieses Vorgehen wird so lange wiederholt, bis das Modell auseinandergebrochen ist.

Modelleigenschaft	Symbol	Wert
Elastizitätsmodul	E	2.94 GPa
Querkontraktionszahl	ν	0.38
Kantenlänge der Scheibe	l	150 mm
Länge des Anrisses	$2 a_0$	45 mm
Winkel des Anrisses	β	30°

Tabelle 5.1.: Modelleigenschaften für die Simulation des Sprödbruchs bei der diagonal belasteten Scheibe mit Anriss nach [10].

5.4.1. Bruch unter einer Belastung nach Rissmodus I

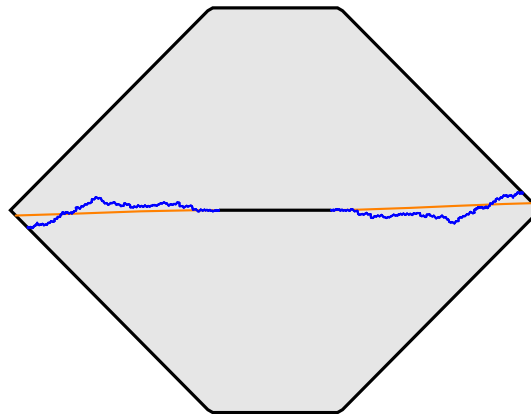
Für einen Mode I-Bruch wird bei der diagonal belasteten Scheibe der Anfangsriss nach Abbildung 5.7 unter einem Winkel von 0° in die Probe geschnitten. Der Riss sollte dann entsprechend der Versuche unter einem Winkel von ebenfalls 0° symmetrisch vom Anfangsriss nach außen wachsen.

Ein Vergleich der Ergebnisse der numerischen Simulation mit den Versuchsergebnissen, der in Abbildung 5.8 zu sehen ist, zeigt, dass dies nur bei drei der vorgestellten Bruchmodelle für die Verbindungen, dem richtungsabhängigen Normaldehnungskriterium sowie den richtungsunabhängigen Schubdehnungskriterien, der Fall ist. Bei den richtungsabhängigen Schubdehnungskriterien dagegen findet das Risswachstum unter einem Winkel von etwa $\pm 16^\circ$ statt. Diese Modelle müssen folglich als ungeeignet für die Rissimulation mit dem entwickelten Modell betrachtet werden.

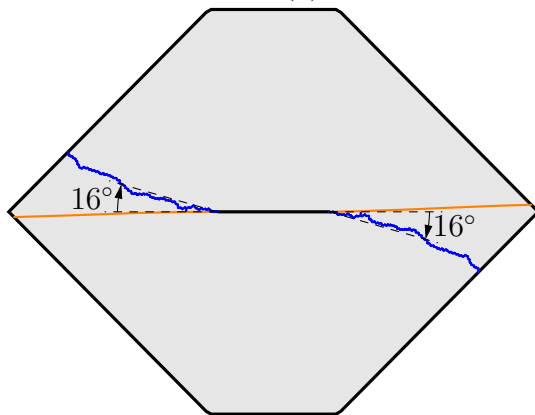
Das Normaldehnungskriterium sowie das richtungsunabhängige Schubdehnungskriterium sind ohne weiteres in der Lage, den Rissverlauf des Versuchs zu reproduzieren. Der signifikante Unterschied zwischen beiden Modellen ist, dass die Abweichungen zum Versuch beim Normaldehnungskriterium stärker schwanken. Der Grund hierfür ist, dass bei diesem Kriterium je Verbindungselement nur eine Dehnungskomponente in einer Richtung betrachtet wird, während die richtungsunabhängigen Schubdehnungskriterien sämtliche Richtungen betrachten. Dadurch liefern bei letzterem auch Schub- und Querdehnungsverformungen einen Betrag zur bruchrelevanten Belastung, die somit bei benachbarten Verbindungselementen weniger stark streut.

5.4.2. Bruch unter einer gemischten Belastung nach Rissmodus I/II

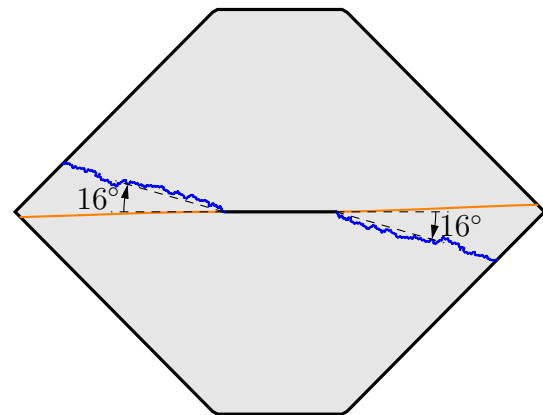
Ein ähnliches Bild zeigt sich für die gemischte Belastung in den Rissmodi I und II bei einem Anrisswinkel von 30° : Wie in Abbildung 5.9 zu sehen ist, sind auch hier das Normaldehnungskriterium sowie die richtungsunabhängigen Schubdehnungskriterien in



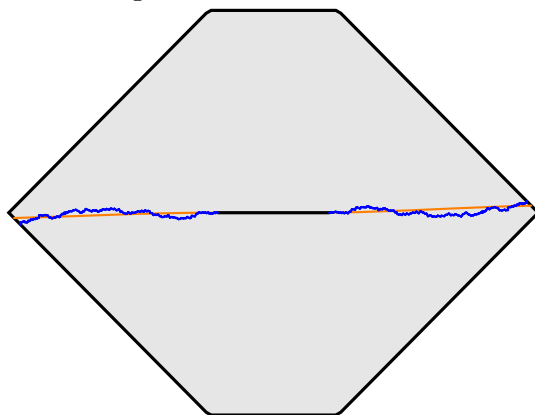
(a) Bruch nach dem Normaldehnungskriterium.



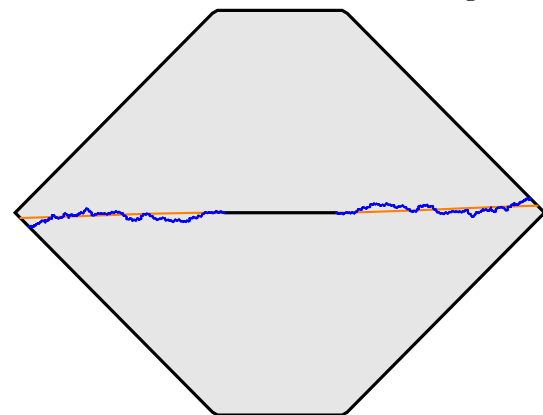
(b) Bruch nach dem richtungsabhängigen Schubkriterium mit einer Dehnung je Verbindung.



(c) Bruch nach dem richtungsabhängigen Schubkriterium mit einer Dehnung je benachbarter Zelle einer Verbindung.



(d) Bruch nach dem Schubkriterium mit einer Dehnung je Verbindung.



(e) Bruch nach dem Schubkriterium mit einer Dehnung je benachbarter Zelle einer Verbindung.

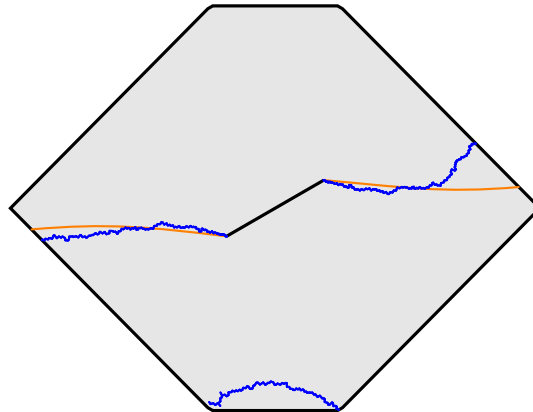
Abbildung 5.8.: Ergebnisse für die Rissverläufe im hier entwickelten Modell bei unterschiedlichen Bruchkriterien für den reinen Rissmodus I. Die Simulationen sind in blau dargestellt, während die Ergebnisse nach AYATOLLAHI und ALIHA [10] und orange zu sehen sind.

der Lage, den Risspfad, der im Versuch ermittelt wurde, nachzubilden. Die richtungsabhängigen Schubdehnungskriterien liefern jedoch, wie schon beim reinen Rissmodus I, ein Risswachstum unter einem Winkel von $\pm 16^\circ$. Dies lässt darauf schließen, dass das Risswachstum bei diesen Kriterien nur von der äußeren Last, nicht jedoch vom Anriss, der bereits im Modell vorhanden ist, abhängt.

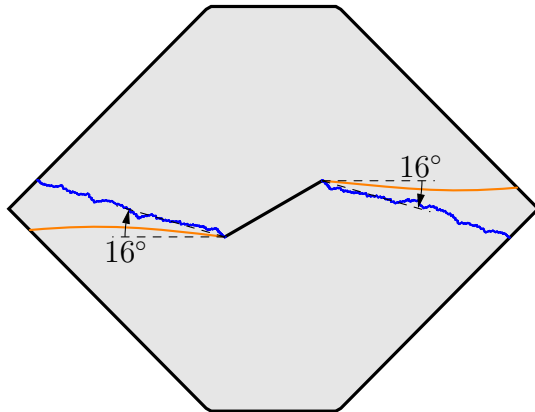
Auch die anderen Versagensmodelle zeigen bei diesem Versuch ihre Schwächen: Beim Normaldehnungskriterium 5.9a ist zu sehen, dass in der Nähe der unteren Lagerung Rissbildung stattfindet, und der rechte Riss einen Knick aufweist. Eine genauere Untersuchung des Risswachstums liefert den Grund hierfür. Wie in Abbildung 5.10a zu sehen ist, findet zu Beginn der Simulation ein unsymmetrisches Risswachstum statt, das im vollständigen Bruch der linken Seite der Probe im Lastschritt 244 mündet. Aufgrund der dadurch resultierenden einseitigen Lastübertragung durch die Probe werden die Lagerungen unsymmetrisch auf Biegung belastet, was wiederum zur Rissbildung am Lager selbst führt (Abbildung 5.10b)⁹. Dieser Riss am Lager wächst so lange, bis im Lastschritt 354 ein Gleichgewicht der ertragbaren Last an beiden Risspitzen erreicht ist. Ab diesem Zeitpunkt findet ein Wachstum beider Risse statt, bis die Probe nach Abbildung 5.9a vollständig versagt.

Dieses Bruchverhalten ist durch zwei Defekte des numerischen Modells bedingt. Der erste Defekt ist, dass das Modell nicht in der Lage ist, einen unendlich spitzen Riss darzustellen, da durch die endliche Länge der Verbindungselemente immer eine Glättung der Risspitze vorliegt. Dies hat zur Folge, dass die maximale Belastung im numerischen Modell nicht immer in der Risspitze vorliegt. Eine Bestätigung hierfür liefert die Last-Verschiebungskurve der Simulation, die in Abbildung 5.11 zu sehen ist. Dieser ist ebenfalls zu entnehmen, dass nach dem Bruch der ersten Verbindungen bei etwa 1% der Bruchverschiebung und 15% der Bruchkraft bereits Versagen der ersten Verbindungen auftritt. Im Gegensatz zu den Versuchen von AYATOLLAHI und ALIHA findet zu diesem Zeitpunkt jedoch kein instabiles Risswachstum statt. Die Zunahme der Gesamtbelastung, die für aufeinanderfolgende Brüche von Verbindungen benötigt wird, steht ebenfalls im Widerspruch mit der Bruchmechanik, nach der die notwendige äußere Last mit der Risslänge abnehmen sollte. Dies bestätigt, dass die Belastung an der Risspitze im Modell nicht genau genug abgebildet werden kann. Der zweite Defekt liegt in der mangelnden Nachgiebigkeit der Lagerung beim verwendeten Rechengitter. Hierdurch treten an den Rändern der Lagerung bei Belastung Spannungsüberhöhungen auf. Diese werden durch die Biegebelastung der Lagerung aufgrund des einseitigen Bruchs so verstärkt, dass die

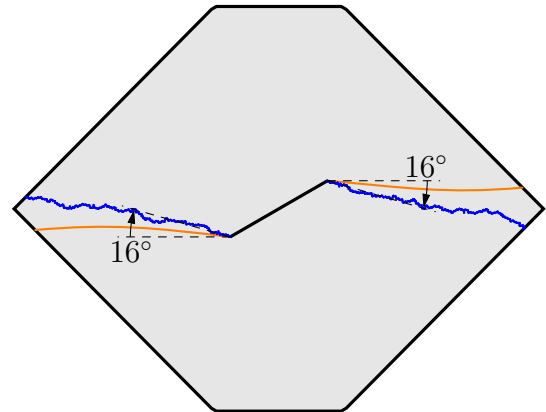
⁹ Dies ist der mangelnden Nachgiebigkeit der Lagerung geschuldet.



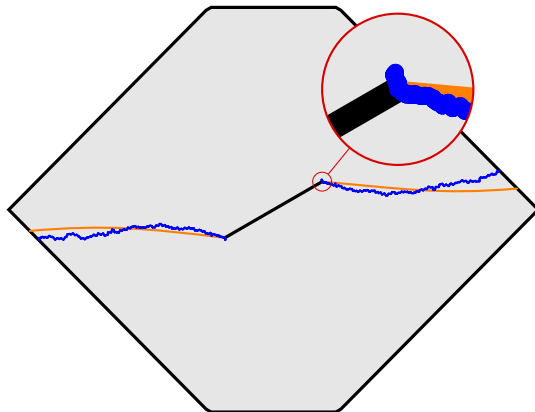
(a) Bruch nach dem Normaldehnungskriterium.



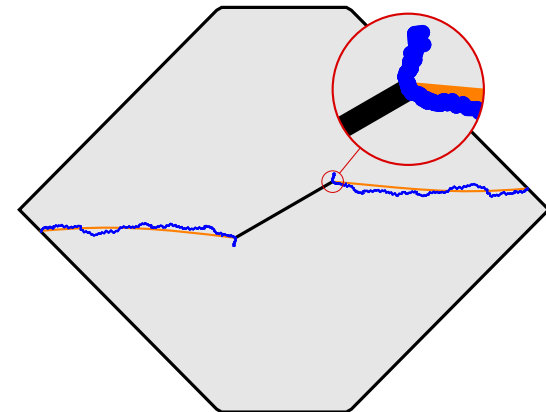
(b) Bruch nach dem richtungsabhängigen Schubkriterium mit einer Dehnung je Verbindung.



(c) Bruch nach dem richtungsabhängigen Schubkriterium mit einer Dehnung je benachbarter Zelle einer Verbindung.

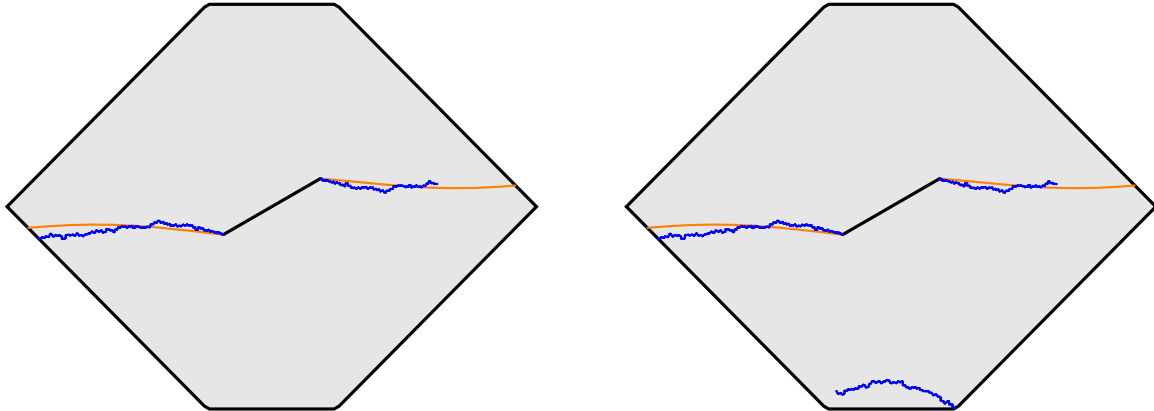


(d) Bruch nach dem Schubkriterium mit einer Dehnung je Verbindung.



(e) Bruch nach dem Schubkriterium mit einer Dehnung je benachbarter Zelle einer Verbindung.

Abbildung 5.9.: Ergebnisse für die Rissverläufe im hier entwickelten Modell bei unterschiedlichen Bruchkriterien für den gemischten Rissmodus I/II. Die Simulationen sind in blau dargestellt, während die Ergebnisse nach AYATOLLAHI und ALIHA [10] und orange zu sehen sind.



(a) Rissverlauf bei Lastschritt 244.

(b) Rissverlauf bei Lastschritt 354.

Abbildung 5.10.: Verlauf des Risswachstums für das Normaldehnungskriterium bei einem Anrisswinkel von 30° . Aufgrund des unsymmetrischen Risswachstums bei Lastschritt 244 ist die untere Lagerung einseitig belastet, was zur Rissbildung an dieser führt.

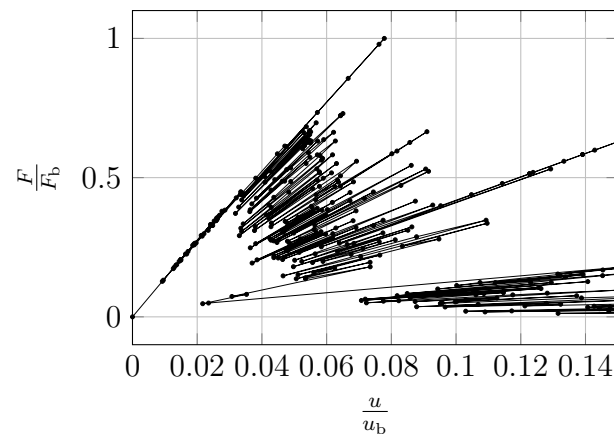


Abbildung 5.11.: Relativer Kraft-Verschiebungs-Verlauf der Simulation der diagonalen, unter einem 30° -Winkel angerissenen Platte für das richtungsabhängige Normaldehnungsbruchkriterium. Eine relative Kraft beziehungsweise Verschiebung von 1 ist genau die maximale Kraft beziehungsweise Verschiebung, die während der Simulation vor dem Bruch des Gesamtsystems auftritt. Die Punkte im Diagramm repräsentieren Zustände, an denen der Bruch einer Verbindung stattfindet.

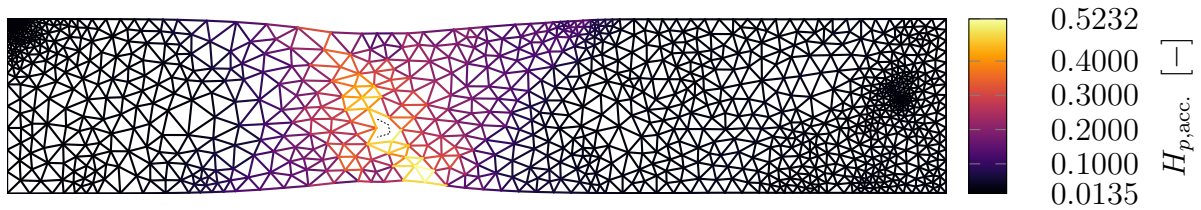
Verbindungselemente am Rand des Lagers die am stärksten belasteten Elemente des Modells sind und somit versagen.

Bei den richtungsunabhängigen Schubdehnungskriterien ist dagegen in den vergrößerten Ausschnitten der Abbildungen 5.9d und 5.9e zu erkennen, dass sich zusätzlich zum primären Riss, der dem des Versuches von AYATOLLAHI und ALIHA folgt, vom Anriss ausgehend ein weiterer, sekundärer Riss bildet. Auch hier liefert eine genauere Betrachtung die Ursachen dieses Risses: An den äußeren Enden des Anrisses bildet sich durch das Wachstum des primären Risses eine Innenkante im Material, die aufgrund der äußeren Belastung einer Drucklast unterliegt. Da diese Kante spitz ist, geht die Kontinuumsdruckspannung, die durch das Modell approximiert wird, an dieser Stelle gegen unendlich. Es bildet sich somit an dieser Stelle ein sekundärer Riss aufgrund der Druckbelastung. Das Wachstum dieses Risses ist im vorliegenden Modell nur deshalb möglich, weil eine Durchdringung der Rissoberflächen aufgrund der mangelnden Kontaktmodellierung zugelassen wird.

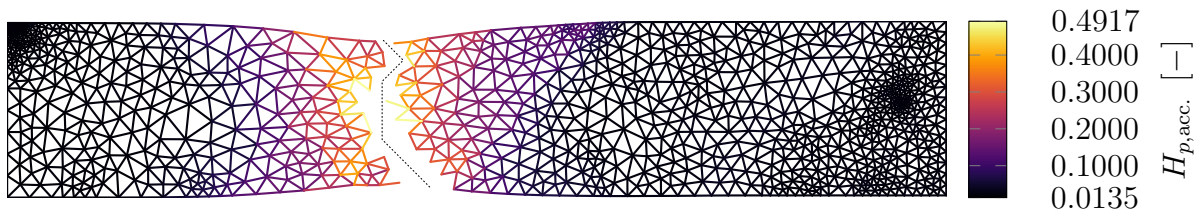
5.5. Simulation eines duktilen Bruchs

Im Gegensatz zu Federmodellen aus der Literatur ist das hier entwickelte Federmodell grundsätzlich in der Lage, sowohl den Sprödbbruch als auch die plastische Deformation eines homogenen, isotropen Materials zu modellieren. Dies wirft die Frage auf, ob dieses Modell auch in der Lage ist, die Kombination beider Verhaltensweisen, den duktilen Bruch, zu reproduzieren.

Zum Zwecke der Demonstration soll hier lediglich ein stark vereinfachtes Modell für das elasto-plastische Versagen verwendet werden. In diesem Modell wird angenommen, dass eine Verbindung versagt, sobald entweder ihre akkumulierte plastische Vergleichsdehnung einen kritischen Wert $H_{acc.,max.}$ überschreitet oder im Material die maximale Hauptdehnung in Zugrichtung einen Grenzwert $\varepsilon_{max.}$ übersteigt. Für die elastischen Eigenschaften des Materials werden dabei dieselben Größen wie bei den elasto-plastischen Simulationen verwendet. Diese sind in Tabelle 4.1 zu finden. Für die plastischen Eigenschaften wird angenommen, dass sich das Material perfekt plastisch nach Abbildung 4.7 verhält. Für die zulässige plastische Vergleichsdehnung wird ein Wert von $\varepsilon_{acc.,max.} = 0.5$ angenommen, während für die zulässige Zughauptdehnung ein Wert von $\varepsilon_{max.} = 0.02$ verwendet wird. Analog zu den elasto-plastischen Simulationen in Abschnitt 4.4 wird auch in dieser Simulation eine Rechtecksprobe nach Abbildung 4.6 unter Annahme eines ebenen Deformationszustands verwendet, die durch eine vorgegebene Verschiebung belastet wird. Die Ergebnisse der duktilen Bruchsimulation sind in Abbildung 5.12 dargestellt. Dabei



(a) Zustand des Systems bei einer nominalen Streckung von $\lambda_{\text{nom.}} = 1.06438$. Zu sehen ist die Rissinitiierung im Inneren des Modells.



(b) Zustand des Systems bei einer nominalen Streckung von $\lambda_{\text{nom.}} = 1.06688$. Die Probe ist vollständig durchgerissen.

Abbildung 5.12.: Simulation eines duktilen Bruchs. Der angenäherte Rissverlauf ist gestrichelt dargestellt.

zeigt Abbildung 5.12a die Initiierung des Bruchs in der Mitte der plastischen Zone, während Abbildung 5.12b den Zustand des Federsystems nach dem vollständigen Bruch zeigt. Hierbei ist zu sehen, dass selbst das einfache Modell, das in dieser Simulation verwendet wurde, die Versagensbilder von Versuchen, wie sie zum Beispiel bei MOHR [112] zu finden sind, näherungsweise reproduzieren kann. So findet, wie bei Versuchen mit Zugproben rechteckiger Querschnittsflächen, in deren Mittelfläche ein näherungsweise konstanter Deformationszustand vorliegt, die Rissinitiierung im Inneren der Probe aufgrund der elastischen Überbeanspruchung statt. Der Riss breitet sich nach der Initiierung fern des Probenrands entsprechend des Rissmodus I orthogonal zur Belastungsrichtung aus. In der Nähe des unteren Rands findet infolge dessen, dass im Inneren der Probe durch den Riss keine Stetigkeit der Verschiebungen gefordert wird, ein Abgleiten mit Bruch aufgrund hoher plastischer Verformung unter 45° statt. Ein signifikanter Unterschied zwischen Simulation und Versuch ist lediglich am oberen Rand der virtuellen Probe zu beobachten. Hier findet in unmittelbarer Nähe des Probenrandes ein Wechsel der Bruchrichtung von $+45^\circ$ auf -45° statt. Dieses Verhalten kann jedoch damit erklärt werden, dass diese beiden Richtungen im zweidimensionalen Modell im Gegensatz zu dreidimensionalen Versuchen äquivalent sind.

6. Zusammenfassung und Ausblick

6.1. Zusammenfassung

Nach Abschnitt 1.2 war das Ziel dieser Arbeit, ein Federmodell zu entwickeln, das sowohl in der Lage ist, ein homogenes Kontinuum für beliebige Rechengitter abzubilden als auch Risspfade, die im Versuch ermittelt wurden, zu reproduzieren. Eine Betrachtung der obigen Kapitel zeigt, dass diese Ziele erreicht und die Einschränkungen des Modells herausgearbeitet worden sind.

In Kapitel 3 wurde ein neues Federmodell entwickelt, das für den linear-elastischen Fall in der Lage ist, für ein beliebiges homogenes Kontinuum die analytische Spannungs- und Verschiebungslösung zu approximieren. Hierzu wurde im zweidimensionalen Fall eine neue, dreieckige Federzelle aus drei Normalkraftfedern und drei Winkelfedern entwickelt, die dieses Kontinuum unabhängig von ihrer Form für lineare Dehnungsfelder exakt abbilden kann. Als natürliche Erweiterung für den dreidimensionalen Raum wurde für diesen eine ebenfalls neue Tetraederzelle eingeführt. Diese besteht analog zur Dreieckszelle aus Normalkraftfedern zwischen jedem Paar an Eckknoten dieser Zelle und Winkelfedern zwischen jedem Paar an Kanten der Zellen. Auch diese Zelle ist in der Lage, bei beliebiger Geometrie ein konstantes Dehnungsfeld bei einem beliebigen, homogenen Kontinuum exakt abzubilden. Zudem konnte gezeigt werden, dass diese Zellen im linear-elastischen Fall genau dieselbe Steifigkeit besitzen wie lineare Dreiecks- und Tetraederelemente der Methode der Finiten Elemente.

In Kapitel 4 wurde das neu entwickelte zweidimensionale Federmodell um eine Modellierung der Elastoplastizität erweitert. Hierbei konnte gezeigt werden, dass dieses Modell auch das Kontinuumsphänomen der Plastizität – und erstmals für Federmodelle auch die Volumenerhaltung bei plastischer Verformung – für den Fall konstanter Dehnungsfelder in einer Zelle reproduzieren kann. Aufgrund der dehnungsbezogenen Formulierung ist das hierfür verwendete Plastizitätsmodell in der Lage, den plastischen Fluss sowohl für Verfestigung als auch für die perfekte Plastizität und Entfestigung eindeutig zu bestimmen. Im Federmodell bilden sich zudem Keime für die Lokalisierung der plastischen Verformung von selbst dadurch, dass durch die Imperfektion des mathematischen Modells

bei finiten Deformationen die elastischen Eigenschaften des Federgitters eine Funktion der momentanen Verformung sind. Hierdurch unterscheiden sich diese Modelle von reinen Kontinuumsmodellen, bei denen die Lokalisierungskeime das Resultat künstlich eingebrachter Imperfektionen oder numerischer Fehler sind. Eine Folge hiervon ist, dass die Ergebnisse elasto-plastischer Simulationen nach Abschnitt 4.4 zwar im Bereich der stabilen Verformung sehr gute Übereinstimmungen mit der homogenen Kontinuumslösung zeigen, nach Ausbildung der Lokalisierung jedoch starke Abweichungen von dieser Lösung (und auch zwischen unterschiedlichen Simulationen selbst) festgestellt werden können.

Kapitel 5 widmet sich schließlich der Bruchsimulation mit dem entwickelten zweidimensionalen Federmodell. Hierzu werden Verbindungen definiert, die sich aus einer Normalkraftfeder sowie allen Winkelfedern, die zu dieser benachbart liegen, zusammensetzen. Durch diese Wahl kann alleine aus den Federn einer Verbindung für diese ein mehrdimensionaler Dehnungszustand berechnet werden, der wiederum in das Versagenskriterium der Verbindung eingeht. Aufgrund dessen, dass ein mehrdimensionaler Dehnungszustand vorliegt, können sämtliche aus der Literatur bekannten Versagenskriterien angewandt werden. In der Folge wird das Verhalten des Modells bei einem Sprödbbruch und einem duktilen Bruch demonstriert. Für den Sprödbbruch wird dabei anhand eines Vergleichs mit Versuchsergebnissen aus der Literatur gezeigt, dass das entwickelte Modell bei einer geeigneten Wahl des Bruchkriteriums – zum Beispiel einem Normaldehnungskriterium – in der Lage ist, die im Versuch beobachteten Risspfade zu reproduzieren. Lediglich die Last, die für das sukzessive Versagen der Verbindungen erforderlich ist, stimmt nicht mit den Versuchen und der Theorie der Bruchmechanik überein. Auch bei der Simulation des duktilen Bruchs ergeben sich mit dem neu entwickelten Modell Rissbilder, die Rissbilder aus Versuchen approximieren.

Zusammenfassend kann gesagt werden, dass alle Ziele dieser Arbeit erfüllt wurden. Das entwickelte Modell ist in der Lage, homogene Kontinua in unregelmäßigen Rechengittern zu approximieren und besitzt daher in der Rissimulation nicht mehr den Nachteil regelmäßiger Gitter, entweder netzinduzierte Anisotropie der Rissbildung oder der Materialeigenschaften zu erzeugen. Die Möglichkeit, elasto-plastisches Materialverhalten zu simulieren, zeigt zudem, dass mit diesem Modell weitergehende Kontinuumsphänomene des Materials abgebildet werden können. Es handelt sich somit um ein kontinuumskompatibles Federmodell.

6.2. Ausblick

In der vorliegenden Arbeit wurden für das entwickelte Federmodell lediglich grundlegende Eigenschaften gezeigt, die jedoch noch viele Fragen offenlassen. Einige dieser, die in nachfolgenden Arbeiten untersucht werden sollten, werden im Folgenden kurz vorgestellt.

- I. In Abschnitt 3.4 wurde angesprochen, dass analog zum Vorgehen bei linearen Dreieckselementen der Methode der Finiten Elemente auch bei zweidimensionalen Federmodellen die Möglichkeit besteht, durch Kombination mehrerer ähnlicher Dreieckszellen eine Dreieckszelle zu erzeugen, die ein lineares Dehnungsfeld exakt darstellen kann. Da dies das Problem der zu großen Modellsteifigkeit der Federmodelle bei der Approximation variabler Dehnungsfelder verringern würde, sollte untersucht werden, ob auch mit diesen Modellen die Rissimulation und die Modellierung plastischen Verhaltens analog zum hier entwickelten Federmodell möglich ist.
- II. Die in dieser Arbeit eingeführten Federzellen ändern unter Verformung ihre elastischen Eigenschaften. Dieses Verhalten führt, wie in Abschnitt 4.4.4 angesprochen wurde, zur automatischen Bildung von Lokalisationskeimen für die plastische Verformung, und beeinflusst somit die Simulationsergebnisse für den Fall finiter Deformationen signifikant. Da auch in Versuchen die Lokalisierung plastischen Fließens vom mikromechanischen Aufbau des Materials abhängt, könnte die Untersuchung der Zusammenhänge und Unterschiede zwischen der Änderung der elastischen Eigenschaften der Federzellen und des tatsächlichen Materials unter elastischer Deformation Hinweise darauf liefern, ob und wie das Federmodell für die Nutzung bei großen Deformationen zu modifizieren ist.
- III. Für die numerische Simulation des elasto-plastischen Verhaltens der Dreieckszellen ist bislang keine konsistente Linearisierung der nichtlinearen Verformungs-Kraft-Beziehung der Federn vorhanden. Dies hat nach Abschnitt 4.3.4 zur Folge, dass für solche Simulationen bei den Iterationen eines Lastschritts nur sublineare Konvergenz vorliegt¹. Die konsistente Linearisierung der Gleichungen hingegen würde zu einem quadratischen Konvergenzverhalten und somit zu einer wesentlichen Reduktion der Gleichgewichtssiterationen und damit der Rechendauer führen.
- IV. Das Plastizitäts- und Bruchmodell wurde nur für ebene Probleme mit zweidimensionalen Modellen hergeleitet. Für die Berechnung räumlicher Probleme sollten diese Modelle für die dreidimensionale Tetraederzelle erweitert werden. Hierfür

¹ Dies führt dazu, dass bei Simulationen mit perfekter Plastizität und Entfestigung mehrere tausend Gleichgewichtssiterationen pro Lastschritt erforderlich sind.

sollte es aufgrund der Ähnlichkeit der Dreiecks- und der Tetraederzelle – beide sind Simplices des zugrunde liegenden n -dimensionalen Raumes – ausreichend sein, die vorgestellten zweidimensionalen Modellierungen um eine dritte Dimension zu erweitern.

- V. Bislang kann im hier entwickelten Federmodell die lineare Stabilität des Gesamtmodells nach dem Bruch einer Verbindung nur dann garantiert werden, wenn die Dreieckszellen spitzwinklig sind und die Querkontraktionszahl aller Dreieckszellen mit gebrochenen Federn zu Null gesetzt wird. Während ersteres durch ein geeignetes Verfahren der Netzerzeugung garantiert werden kann, ist zweiteres, die Modifikation des Modells, physikalisch nicht zu rechtfertigen. Hier sollte folglich ein anderer Ansatz gefunden werden, der ohne eine solche Modifikation des Materials in der Lage ist, die Stabilität des Modells zu garantieren. Damit einher geht eine Modifikation des Verfahrens zur Kombination der Winkelfedern, die mit den gebrochenen Normalkraftfedern verbunden sind. Diese werden im hier entwickelten Federmodell mittels einer Reihenschaltung zusammengeführt. Es sollte jedoch möglich sein, diese auf eine andere Art so zusammenzufügen, dass die Dehnungsenergie der Winkelfedern beim Bruch nicht zunimmt, während zugleich die neue Feder unabhängig von der Verformung des Gesamtsystems beim Bruch ist und die lineare Stabilität des intakten Rests der Zelle garantiert.
- VI. Bei der Simulation des spröden Bruchs wird bislang die Belastung in der Risspitze nicht ausreichend genau abgebildet. Dies führt dazu, dass Risse dazu tendieren, sich zu verzweigen, und dass im Gegensatz zur Theorie der Bruchmechanik die erforderliche Last für ein weiteres Risswachstum im Modell selbst dann zunimmt, wenn nach der Theorie ein instabiler Riss vorliegt. Hierbei ist aufgrund des $r^{-\frac{1}{2}}$ -Verlaufs der Spannungen in der Nähe der Risspitze nach der Bruchmechanik insbesondere zu untersuchen, inwiefern die Last, die für das Risswachstum erforderlich ist, von der Länge der Verbindungen in der Risspitze abhängt.

Anhang A. Herleitungen

A.1. Zur Verwendung von Schub- und Winkelfedern in diskreten Modellen

Wie in Abschnitt 2.2 angesprochen, verwenden zahlreiche Autoren bei diskreten Modellen Schub- und Normalkraftfedern zur Kraftübertragung, während im hier entwickelten Modell Winkelfedern anstelle der Schubfedern verwendet werden. Im Rahmen dieses Abschnitts wird die Begründung hierfür dargelegt und auf die Ähnlichkeiten und Unterschiede beider Modellierungsweisen eingegangen.

A.1.1. Über die Verletzung des Momentengleichgewichts bei der Verwendung von Schubfedern

Diskrete Modelle ohne rotatorische Freiheitsgrade, die Schubfedern verwenden, um Punkte zu verknüpfen, verletzen das Momentengleichgewicht. Dies wird anhand von Abbildung A.1 ersichtlich. Verformt sich das in dieser Abbildung dargestellte Federsystem durch eine Verschiebung v im Punkt 2, so wird an diesem Knoten eine Querkraft $F_y = -k_s v$ eingeleitet. Betrachtet man nun das Momentengleichgewicht um Punkt 1, so ist festzustellen, dass

$$0 = -l k_s v + M_z \quad (\text{A.1})$$

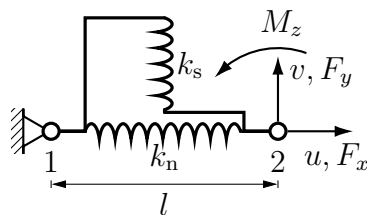
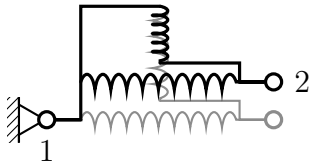
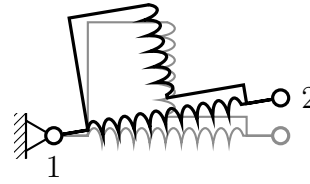


Abbildung A.1.: Schematische Darstellung der Verbindung zweier Punkte mit Abstand l mittels einer Normalkraftfeder und einer Schubfeder.



(a) Aufteilung entlang des ursprünglichen Richtungsvektors.



(b) Aufteilung entlang des momentanen Richtungsvektors.

Abbildung A.2.: Zwei Möglichkeiten zur Aufteilung der Deformation einer Normalfeder-Schubfeder-Verbindung in einen Normal- und einen Schubanteil.

ist, und somit außer bei einer Federlänge von $l = 0$ zusätzlich ein Moment an einem der beiden Knoten eingebracht werden muss, um dieses Gleichgewicht zu erfüllen. Aufgrund der Tatsache, dass die Knoten keine rotatorischen Freiheitsgrade besitzen, ist dies jedoch nicht möglich.

Einige Quellen [31, 181] geben zwar an, dass dies behoben werden kann, indem die Verdrehung der Knoten über eine Mittelung der Verschiebungen der Nachbarknoten bestimmt werden kann. Jedoch ist zu beachten, dass dies erst nach der Bestimmung der Verformung möglich ist, und somit selbst bei linear-elastischen Rechnungen ein Iterationsverfahren verwendet werden muss, um die Lösung zu finden, die neben dem Kräftegleichgewicht auch das Momentengleichgewicht erfüllt.

Ein weiteres Problem, das mit dem Problem der Erfüllung des Momentengleichgewichts eng verwandt ist, ist das der Aufteilung der Gesamtverformung zwischen zwei Punkten in einen Schub- und einen Normalanteil bei nichtlinearen Problemen. In diesem Fall muss der Momentanzustand der verdrehten Federn betrachtet werden, um das Gleichgewicht zu bilden. Da aber für jede Lage von zwei Punkten unendlich viele Möglichkeiten bestehen, die Verformung zwischen beiden in einen Normal- und einen Queranteil zu zerlegen, ist diese Zerlegung und damit die Kraftwirkung des Federsystems nicht eindeutig. Ein Beispiel für zwei unterschiedliche Möglichkeiten, die Verformung in Normal- und Schubanteil aufzuteilen, ist in Abbildung A.2 zu finden. Auch dies kann wieder über eine Bestimmung der Verdrehung der Knoten und eine Zerlegung der Verformung bezüglich dieses verdrehten Knotenzustands behoben werden.

Modelle mit Winkelfedern leiden nicht unter diesen Defekten, da bei diesen die Winkeländerung zwischen drei Punkten betrachtet wird. Diese wiederum kann immer eindeutig bestimmt werden. Da zudem die Winkelfedern rotationsinvariant aufgebaut werden können, erfüllen sie für jede beliebige Verformung das Kräfte- und Momentengleichgewicht.

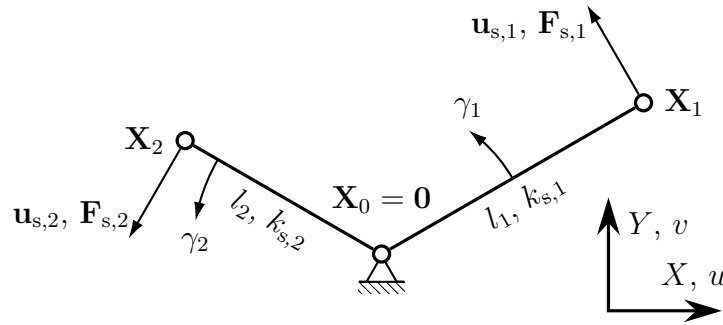


Abbildung A.3.: Definition eines Systems aus zwei Schubfedern sowie Knotenkräfte \mathbf{F}_s bei Knotenverschiebungen \mathbf{u}_s aufgrund eines Schubwinkels von γ .

A.1.2. Zur Äquivalenz von Schub- und Winkelfedern bei Erfüllung des Momentengleichgewichts

Schubfeder- und Winkelfedermodelle unterscheiden sich zwar in dem Punkt der Rotationsinvarianz des Systems und der Erfüllung des Momentengleichgewichts bei beliebigen Verformungen. Dennoch kann gezeigt werden, dass für den Fall einer linearen oder linearisierten Verformung ohne Starrkörperverdrehungen, bei der ein System aus zwei Schubfedern das Momentengleichgewicht erfüllt, dieses System zu einer Winkelfeder äquivalent ist. Hierzu wird nach Abbildung A.3 ein System aus zwei Schubfedern und drei Knoten betrachtet. In diesem System wird der Einfachheit halber angenommen, dass der Mittelknoten 0 im Ursprung liegt und fest eingespannt ist. Aufgrund dessen, dass sowohl Schub- als auch Winkelfedern invariant gegenüber einer Starrkörperverschiebung sind, sind die Ergebnisse der Betrachtung dennoch allgemein gültig.

Bestimmung der Beziehungen zwischen Schubfedersteifigkeiten für rotationsfreie Systeme im Momentengleichgewicht

Die linear unabhängigen Verschiebungsmöglichkeiten, die in diesem System eine Reaktionskraft erzeugen, sind mit $\mathbf{X}_1 = [X_1 \ Y_1]^T$ und $\mathbf{X}_2 = [X_2 \ Y_2]^T$

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{s,1} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \gamma_1 \begin{bmatrix} -Y_1 \\ X_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{u}_{s,2} \end{bmatrix} = \gamma_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -Y_2 \\ X_2 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.2})$$

Entsprechend ergeben sich die Kraftreaktionen dieser Verformungen an den Knoten und die Momente, die diese bezüglich des Knotens 0 erzeugen, zu

$$\mathbf{F}_1 = -k_{s,1} \mathbf{u}_1 = -k_{s,1} \gamma_1 \begin{bmatrix} -Y_1 \\ X_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{F}_2 = -k_{s,2} \mathbf{u}_2 = -k_{s,2} \gamma_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -Y_2 \\ X_2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

$$M_1 = -k_{s,1} \gamma_1 l_1^2 \quad M_2 = -k_{s,2} \gamma_2 l_2^2. \quad (\text{A.4})$$

Es soll nun gefordert werden, dass das Momentengleichgewicht des Schubfedersystems bei einer starrkörperrotationsfreien Bewegung das Momentengleichgewicht erfüllt. Hierzu ist zuerst diese Bewegung zu bestimmen.

Offensichtlich liegt eine Starrkörperrotation des Systems um den Knoten 0 genau dann vor, wenn $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$ ist, also bei einer Verschiebung von

$$\mathbf{u}_{\text{rot.}} = \gamma \begin{bmatrix} -Y_1 \\ X_1 \\ -Y_2 \\ X_2 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.5})$$

Die rotationsfreie Deformation ist gerade orthogonal zu dieser.

$$\begin{aligned} 0 = \mathbf{u}_{\text{rot.}} \cdot \mathbf{u}_{\text{def.}} &= \gamma \begin{bmatrix} -Y_1 \\ X_1 \\ -Y_2 \\ X_2 \end{bmatrix} \cdot \left(\gamma_{\text{def.,1}} \begin{bmatrix} -Y_1 \\ X_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \gamma_{\text{def.,2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -Y_2 \\ X_2 \end{bmatrix} \right) \\ &= \gamma \left(\gamma_{\text{def.,1}} l_1^2 + \gamma_{\text{def.,2}} l_2^2 \right) \\ \gamma_{\text{def.,1}} l_1^2 &= -\gamma_{\text{def.,2}} l_2^2 \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Einsetzen dieser Beziehung (A.6) in das Momentengleichgewicht – die Summe der Terme in Gleichung A.4 – liefert die Beziehung zwischen den Steifigkeiten der Schubfedern, die erforderlich sind, um bei der starrkörperdrehungsfreien Deformation das Momentengleichgewicht zu erfüllen.

$$\begin{aligned} 0 = M_1 + M_2 &= -\left(k_{s,1} \gamma_1 l_1^2 + k_{s,2} \gamma_2 l_2^2 \right) = -\gamma_1 l_1^2 (k_{s,1} - k_{s,2}) \\ k_{s,1} &= k_{s,2} = k_s \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Die Bedingung der Erfüllung des Momentengleichgewichts eines Systems aus zwei Schubfedern bei starrkörperrotationsfreier Bewegung ist somit äquivalent zur Bedingung, dass die Steifigkeiten der beiden Schubfedern gleich sein müssen.

Äquivalenz des rotationsfreien Verformungseigenmodes der Schub- und der Winkelfedersysteme

Um zu zeigen, dass das Schubfedersystem nach Abbildung A.3 für starrkörperdrehungsfreie Verformungen äquivalent zu einem System ist, bei dem die Schubfedern durch eine Winkelfeder ersetzt wurden, ist es ausreichend zu zeigen, dass dieses System bei geeigneter Wahl der Federsteifigkeiten denselben Eigenmode besitzen.

Die Steifigkeitsmatrix einer einzelnen Schubfeder, die zwei Punkte verbindet, zwischen denen ein Abstand $\mathbf{X} = [X \ Y]^T$ liegt, ist gerade

$$\mathbf{K}_s = k_s \mathbf{T}_s^T \mathbf{T}_s \quad \text{mit } \mathbf{T}_s = \frac{1}{\|\mathbf{X}\|_2} [-Y \ X \ Y \ -X]^T. \quad (\text{A.8})$$

Die Eigenmoden für das Schubfedersystem, die ungleich Null sind, ergeben sich aus der assemblierten Steifigkeitsmatrix des Gesamtsystems zu

$$\mathbf{v}_{s,1} = [-Y_1 \ X_1 \ 0 \ 0]^T \quad \lambda_{s,1} = k_s \quad (\text{A.9a})$$

$$\mathbf{v}_{s,2} = [0 \ 0 \ -Y_2 \ X_2]^T \quad \lambda_{s,2} = k_s \quad (\text{A.9b})$$

Aufgrund dessen, dass diese Eigenmoden denselben Eigenwert besitzen, ist auch jede Linearkombination der Eigenvektoren wieder ein Eigenvektor zum selben Eigenwert. Wird bei diesem System statt der Schubfedern eine Winkelfeder verwendet, so entspricht die Gesamtsteifigkeitsmatrix des Systems gerade der Elementsteifigkeit (ohne die Freiheitsgrade des eingespannten Knotens 0), die nach Gleichung (C.12) gerade

$$\mathbf{K}_a = k_a \mathbf{T}_a^T \mathbf{T}_a \quad \text{mit } \mathbf{T}_a = \frac{1}{\|\mathbf{X}_1\|_2 \|\mathbf{X}_2\|_2} \begin{bmatrix} -Y_1 \|\mathbf{X}_2\|_2^2 \\ X_1 \|\mathbf{X}_2\|_2^2 \\ -Y_2 \|\mathbf{X}_1\|_2^2 \\ X_2 \|\mathbf{X}_1\|_2^2 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.10})$$

Der einzige Eigenmode dieser Steifigkeitsmatrix, dessen Eigenwert ungleich Null ist, ist

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{T}_a \quad \lambda_a = k_a \|\mathbf{T}_a\|_2^2 = k_a \frac{\|\mathbf{X}_1\|_2^2 + \|\mathbf{X}_2\|_2^2}{\|\mathbf{X}_1\|_2^2 \|\mathbf{X}_2\|_2^2}. \quad (\text{A.11})$$

Offenbar ist mit $\mathbf{v}_a = \|\mathbf{X}_2\|_2^{-2}\mathbf{v}_{s,1} + \|\mathbf{X}_1\|_2^{-2}\mathbf{v}_{s,2}$ der Eigenvektor des Winkelfedersystems gerade eine Linearkombination der Eigenvektoren des Schubfedersystems. Damit sind beide Systeme für einen gleichen Eigenwert der Verformungsbewegung der Winkelfeder – die starrkörperdrehungsfreie Deformation – identisch, sofern der Eigenwert gleich ist. Diese Forderung führt auf die Beziehung

$$k_s = k_a \|\mathbf{T}_a\|_2^2 = k_a \frac{\|\mathbf{X}_1\|_2^2 + \|\mathbf{X}_2\|_2^2}{\|\mathbf{X}_1\|_2^2 \|\mathbf{X}_2\|_2^2} \quad (\text{A.12})$$

für das Verhältnis der Schub- und Winkelfedersteifigkeiten.

A.1.3. Schlussfolgerungen für die Verwendung von Schubfedersystemen

Trotz der Äquivalenz der beiden Systeme wird empfohlen, immer Winkelfedersysteme zu verwenden. Der Grund hierfür ist, dass bei der Wahl eines Schubfedersystems in einer linearisierten Rechnung die Invarianz des Schubfedersystems gegenüber Rotation nicht gewährleistet werden kann, da hierfür die Rotation des Kontinuums benötigt wird. Diese kann jedoch erst nach der Berechnung der Verformung des Systems bestimmt werden. Somit erfüllt das Schubfedersystem in linearen Rechnungen (und in jedem Iterationsschritt nichtlinearer Rechnungen) das Momentengleichgewicht weder lokal noch global. Diese Meinung wird jedoch nicht von allen Autoren vertreten (siehe zum Beispiel BUXTON [31], ZHAO [179], ZHAO, FANG und ZHAO [181]).

A.2. DELAUNAY-Triangulation und VORONOI-Polygone

In Abschnitt 2.3.2 wurden die DELAUNAY-Triangulation und VORONOI-Polygone eingeführt. Im Folgenden werden einige der geometrischen Beziehungen zwischen diesen hergeleitet, die im Laufe dieser Arbeit verwendet werden, und ihre physikalische Interpretation erläutert. Hierfür wird nach Abbildung A.4 ein Netz aus zwei Dreiecken betrachtet, die eine DELAUNAY-Triangulation der vier Punkte dieser Abbildung darstellen. Der Umkreismittelpunkt \mathbf{M}_1 des Dreiecks mit den Koordinaten \mathbf{x}_1 , \mathbf{x}_2 und \mathbf{x}_3 lässt sich aus seiner Eigenschaft, auf dem Schnittpunkt der Mittelsenkrechten zu liegen, berechnen. Verwendet man hierzu die Kurzschreibweise $\mathbf{x}_{31} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_3$, $\mathbf{x}_{32} = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3$, so ergibt sich

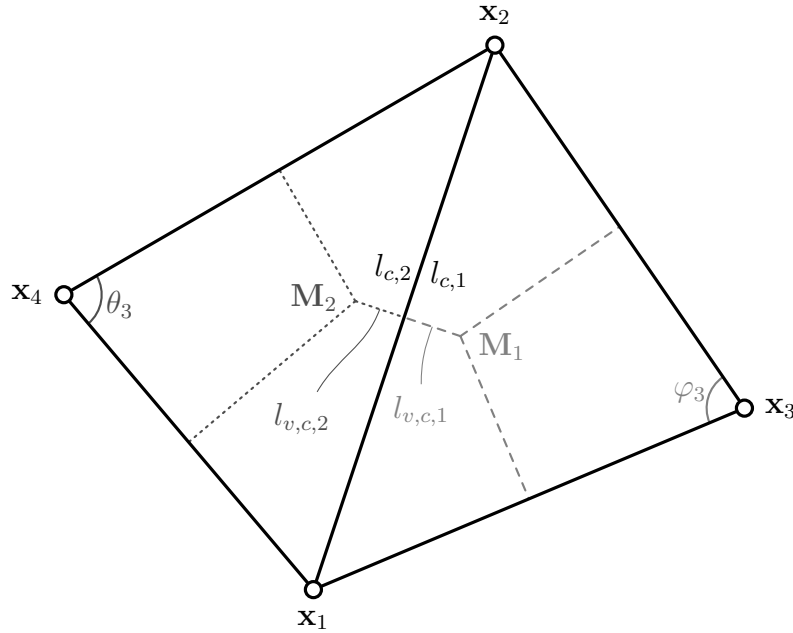


Abbildung A.4.: Dargestellt sind die DELAUNAY-Triangulation sowie die VORONOI-Polygone eines Satzes von vier Punkten mit Koordinaten \mathbf{x}_1 bis \mathbf{x}_4 für die Herleitung der geometrischen Beziehungen zwischen diesen.

für die Position des Umkreismittelpunkts

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_1 - \mathbf{x}_3 &= \frac{\mathbf{x}_{31}}{2} + c_{31} \left(\mathbf{x}_{32} - \mathbf{x}_{31} \frac{\mathbf{x}_{31} \cdot \mathbf{x}_{32}}{\|\mathbf{x}_{31}\|_2^2} \right) \\ &= \frac{\mathbf{x}_{32}}{2} + c_{32} \left(\mathbf{x}_{31} - \mathbf{x}_{32} \frac{\mathbf{x}_{31} \cdot \mathbf{x}_{32}}{\|\mathbf{x}_{32}\|_2^2} \right), \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

und, nach einigen Umformungen zur Bestimmung der Parameter c_{31} und c_{32} unter Ausnutzung der Tatsache, dass \mathbf{x}_{31} und \mathbf{x}_{32} bei einem Dreieck nicht parallel sind,

$$\mathbf{M}_1 = \mathbf{x}_3 + \frac{\mathbf{x}_{31} \left(1 - \frac{\mathbf{x}_{31} \cdot \mathbf{x}_{32}}{\|\mathbf{x}_{31}\|_2^2} \right) + \mathbf{x}_{32} \left(1 - \frac{\mathbf{x}_{31} \cdot \mathbf{x}_{32}}{\|\mathbf{x}_{32}\|_2^2} \right)}{2 \left(1 - \frac{(\mathbf{x}_{31} \cdot \mathbf{x}_{32})^2}{\|\mathbf{x}_{31}\|_2^2 \|\mathbf{x}_{32}\|_2^2} \right)}. \quad (\text{A.14})$$

Damit kann die Länge des Anteils der Kante des VORONOI-Polygons, das innerhalb dieses Dreiecks orthogonal zum Vektor \mathbf{x}_{12} verläuft, bestimmt werden.

$$l_{v,c,1} = \left\| \mathbf{M}_1 - \frac{1}{2} (\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) \right\|_2 \quad (\text{A.15a})$$

$$= \frac{1}{2} \left\| \frac{\mathbf{x}_{31} \left(1 - \frac{\mathbf{x}_{31} \cdot \mathbf{x}_{32}}{\|\mathbf{x}_{31}\|_2^2} \right) + \mathbf{x}_{32} \left(1 - \frac{\mathbf{x}_{31} \cdot \mathbf{x}_{32}}{\|\mathbf{x}_{32}\|_2^2} \right)}{1 - \frac{(\mathbf{x}_{31} \cdot \mathbf{x}_{32})^2}{\|\mathbf{x}_{31}\|_2^2 \|\mathbf{x}_{32}\|_2^2}} - (\mathbf{x}_{31} - \mathbf{x}_{32}) \right\|_2 \quad (\text{A.15b})$$

Mit $\mathbf{x}_{31} \cdot \mathbf{x}_{32} = \|\mathbf{x}_{31}\|_2 \|\mathbf{x}_{32}\|_2 \cos \varphi_3$ ergibt sich somit

$$= \frac{\sqrt{\left(\|\mathbf{x}_{31}\|_2^2 + \|\mathbf{x}_{32}\|_2^2 - 2 \|\mathbf{x}_{31}\|_2 \|\mathbf{x}_{32}\|_2 \cos \varphi_3 \right) \cos \varphi}}{2 \sin \varphi_3} \quad (\text{A.15c})$$

$$= \frac{l_{c,1}}{2 \tan \varphi_3}. \quad (\text{A.15d})$$

Gleichung (A.15d) liefert damit die Aussage, dass der Umkreismittelpunkt innerhalb des Dreiecks liegt und dass alle VORONOI-Kantenlängen innerhalb des Dreiecks positiv sind, solange dieses spitzwinklig ist. Interpretiert man diese Kantenlängen als den Einflussbereich der Verbindung zweier Punkte, so bedeutet dies, dass in diesem Fall eine positive Fläche vorliegt, über die der physikalische Fluss übertragen werden kann. Dies wird auch für den Kraftfluss der Mechanik für das isotrope Material in Gleichung (3.19) bestätigt. Da zudem für eine DELAUNAY-Triangulation die Gesamtlänge $l_{v,c} = l_{v,c,1} + l_{v,c,2}$ der Kanten der VORONOI-Polygone immer positiv ist, ist für diese Form der Netzgenerierung die Steifigkeit zwischen zwei Punkten immer positiv. Die Interpretation der VORONOI-Flächen als kraftflussübertragende Flächen ist somit konsistent mit den Ergebnissen für das Stabgittermodell, für das DELAUNAY-Triangulationen als Netze verwendet werden.

A.3. Vereinfachungen für die Berechnung der Federsteifigkeiten für nicht-isotrope Materialien

Auch für nicht-isotrope Materialien können die Berechnungsvorschriften für die Federsteifigkeiten weiter vereinfacht werden. Hierzu ist es jedoch sinnvoll, die Elastizität des Materials so zu drehen, dass die \tilde{x} -Richtung des Materials mit der Richtung der Normalkraftfeder beziehungsweise der Verbindung der Enden der Winkelfeder übereinstimmt. In

diesem Falle vereinfachen sich die Relativkoordinaten nach Abbildung 3.4 zu

$$\xi_1 - \xi_2 = l \quad \xi_1 = -cl \quad \xi_2 = (1 - c)l \quad (\text{A.16a})$$

$$\eta_1 - \eta_2 = 0 \quad \eta_1 = h \quad \eta_2 = h. \quad (\text{A.16b})$$

Hierbei ist cl die \tilde{x} -Koordinate des dritten Knotens des Dreiecks.

Anisotropes Material

Einsetzen dieser Bedingungen und Vereinfachung in Gleichung (3.18) mit der Dreiecksfläche $A_\Delta = \frac{1}{2}lh$ und der Länge des VORONOI-Polygonsegments, das die Normalkraftfeder schneidet, $l_v = \frac{l}{4A_\Delta}(h^2 + c(1-c)l^2)$, führt auf die anisotropen Federsteifigkeiten

$$k_{n,j} = \Omega \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{ll_v}{A_\Delta} \\ \frac{l^2}{2A_\Delta}(1-2c) \\ \frac{ll_v}{A_\Delta} - 1 \\ \frac{l^2}{2A_\Delta}(1-2c) \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \tilde{E}_{11} \\ \tilde{E}_{12} \\ \tilde{E}_{16} \\ \tilde{E}_{22} \\ \tilde{E}_{26} \\ \tilde{E}_{66} \end{bmatrix} \quad k_{a,j} = -\Omega \sin^2 \varphi \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{ll_v}{A_\Delta} \\ 0 \\ \frac{ll_v}{A_\Delta} - 1 \\ -\frac{l^2}{2A_\Delta}(1-2c) \\ 1 - \frac{ll_v}{A_\Delta} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \tilde{E}_{11} \\ \tilde{E}_{12} \\ \tilde{E}_{16} \\ \tilde{E}_{22} \\ \tilde{E}_{26} \\ \tilde{E}_{66} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.17})$$

Orthotropes Material

Für orthotrope Materialien vereinfachen sich die Federsteifigkeiten aufgrund von $\tilde{E}_{16} = \tilde{E}_{26} = 0$ weiter zu

$$k_{n,j} = \Omega \left(\tilde{E}_{11} - \tilde{E}_{22} + \frac{ll_v}{A_\Delta} (\tilde{E}_{12} + \tilde{E}_{22}) \right) \quad (\text{A.18a})$$

$$k_{a,j} = -\Omega \sin^2 \varphi \left(\frac{ll_v}{A_\Delta} \tilde{E}_{12} + \left(\frac{ll_v}{A_\Delta} - 1 \right) (\tilde{E}_{22} - \tilde{E}_{66}) \right), \quad (\text{A.18b})$$

woraus sich für das isotrope Material die weiteren Vereinfachungen nach den Gleichungen (3.19) und (3.20) ergeben.

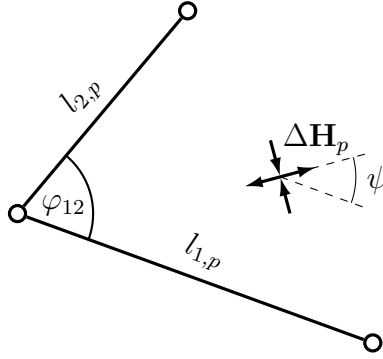


Abbildung A.5.: Geometrie zweier benachbarter Normalkraftfedern in einer Zelle, auf die derselbe plastische Fluss $\Delta \mathbf{H}_p$ aufgebracht wird.

A.4. Beweis der Volumenerhaltung bei konstantem plastischem Fluss in einer Dreieckszelle

Um zu zeigen, dass das Volumen einer Dreieckszelle bei konstantem plastischem Fluss konstant ist, ist es ausreichend, die Änderung durch zwei Normalkraftfedern zu betrachten, da durch diese die Zellgeometrie vollständig beschrieben wird. Zugleich impliziert die Homogenität des plastischen Flusses, dass auch die plastische Verformung in der dritten Normalkraftfeder konsistent zur plastischen Verformung der anderen Federn ist, so dass alle Federn der plastisch verformten Federzelle nach Entlastung dieser kraftfrei sind. Bei zwei Normalkraftfedern der Längen l_1 und l_2 , zwischen denen nach Abbildung A.5 ein Winkel von φ_{12} liegt, ist das Volumen der Zelle vor plastischer Verformung gerade

$$\Omega_0 = \frac{1}{2} t_0 l_1 l_2 \sin \varphi_{12}, \quad (\text{A.19})$$

wobei t_0 die Dicke der Dreieckszelle ist. Durch die plastische Verformung ändern sich alle der in Gleichung (A.19) verwendeten Größen nach Gleichung (4.17).

$$t = t_0 e^{\Delta H_{p,3}} = t_0 e^{-\Delta H_{p,1} - \Delta H_{p,2}} \quad (\text{A.20a})$$

$$l_{1,p} = l_1 \sqrt{(e^{\Delta H_{p,1}} \cos \psi)^2 + (e^{\Delta H_{p,2}} \sin \psi)^2} \quad (\text{A.20b})$$

$$l_{2,p} = l_2 \sqrt{(e^{\Delta H_{p,1}} \cos(\psi - \varphi_{12}))^2 + (e^{\Delta H_{p,2}} \sin(\psi - \varphi_{12}))^2} \quad (\text{A.20c})$$

$$\begin{aligned} \varphi_{12,p} = \varphi_{12} - & \left(\psi - \arctan \left(\frac{e^{\Delta H_{p,2}} \sin \psi}{e^{\Delta H_{p,1}} \cos \psi} \right) \right) \\ & + \left((\psi - \varphi_{12}) - \arctan \left(\frac{e^{\Delta H_{p,2}} \sin(\psi - \varphi_{12})}{e^{\Delta H_{p,1}} \cos(\psi - \varphi_{12})} \right) \right) \end{aligned} \quad (\text{A.20d})$$

Damit ergibt sich für das Zellvolumen nach der plastischen Deformation

$$\Omega = \frac{1}{2} t_p l_{1,p} l_{2,p} \sin \varphi_{12,p} = \Omega_0, \quad (\text{A.21})$$

da

$$\begin{aligned} \sin \varphi_{12,p} &= \frac{e^{\Delta H_{p,1} + \Delta H_{p,2}} \sin \varphi_{12}}{\sqrt{(e^{\Delta H_{p,1}} \cos \psi)^2 + (e^{\Delta H_{p,2}} \sin \psi)^2}} \\ &\quad \cdot \frac{1}{\sqrt{(e^{\Delta H_{p,1}} \cos (\psi - \varphi_{12}))^2 + (e^{\Delta H_{p,2}} \sin (\psi - \varphi_{12}))^2}} \\ &= \frac{l_1 l_2 e^{\Delta H_{p,1} + \Delta H_{p,2}} \sin \varphi_{12}}{l_{1,p} l_{2,p}} \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

ist¹. Somit ist bewiesen, dass für jeden deviatorischen plastischen Fluss im zweidimensionalen Federmodell das Zellvolumen im unbelasteten Zustand erhalten bleibt. Der Fall einer ebenen plastischen Deformation führt mit der Bedingung $\Delta H_{p,1} = -\Delta H_{p,2}$, die sich aus der isochoren Natur der plastischen Verformung ergibt, auf eine Erhaltung der Fläche der Dreieckszelle. Da bei ebener plastischer Deformation $t = t_0$ ist, bleibt auch in diesem Fall das Zellvolumen konstant.

A.5. Erfüllung der Energieabnahme der Winkelfedern beim Bruch einer Verbindung bei Reihenschaltung

Soll die in der Winkelfeder gespeicherte Dehnungsenergie abnehmen, so muss

$$\frac{k_\varphi k_\theta}{k_\varphi + k_\theta} \leq \frac{k_\varphi \Delta\varphi^2 + k_\theta \Delta\theta^2}{(\Delta\varphi + \Delta\theta)^2} \quad (\text{A.23})$$

für beliebige Verformungen $\Delta\varphi$, $\Delta\theta$ der zu verbindenden Winkelfedern gelten. Eine Umformung dieses Terms mit

$$c = \begin{cases} 1 & \text{für } k_\varphi + k_\theta > 0 \\ -1 & \text{für } k_\varphi + k_\theta < 0 \end{cases} \quad (\text{A.24})$$

¹ Zur Überprüfung dieser Äquivalenz ist ein Computeralgebrasystem zu empfehlen.

führt auf

$$k_\varphi k_\theta (\Delta\varphi + \Delta\theta)^2 \leq c (k_\varphi + k_\theta) (k_\varphi \Delta\varphi^2 + k_\theta \Delta\theta^2) \quad (\text{A.25})$$

$$2 k_\varphi k_\theta \Delta\varphi \Delta\theta \leq c (k_\varphi^2 \Delta\varphi^2 + k_\theta^2 \Delta\theta^2) \quad (\text{A.26})$$

$$0 \leq c (k_\varphi \Delta\varphi - k_\theta \Delta\theta)^2 . \quad (\text{A.27})$$

Somit wird für die Reihenschaltung zweier Federn die Bedingung, dass die Dehnungsenergie bei der Reihenschaltung abnimmt, genau dann erfüllt, wenn die Summe der Federsteifigkeiten größer als Null ist.

Anhang B. Hinweise zu den Modelleigenschaften

B.1. Verhalten unter endlichen Verzerrungen

In Abschnitt 3.1.2 wurde darauf hingewiesen, dass eine Grenze des hier entwickelten Modells ist, dass das Verhalten einer Zelle bei endlichen Verformungen nicht mehr dem Kontinuumsverhalten entspricht. Der Grund hierfür ist, dass sich bei einer Verzerrung der Zelle die Abbildungsmatrizen \mathbf{T} nach Gleichung (3.5) ändern, und somit bei konstanten Federsteifigkeiten die Änderung der Dehnungsenergie bei zusätzlicher Verformung nicht mehr der des Kontinuums entspricht. Dies hat außerdem zur Folge, dass ein Umklappen der Zellen – das Durchdringen eines Knotens der Geraden durch die gegenüberliegende Kante – durch diese Vorgehensweise nicht verhindert wird.

Im Folgenden wird am Beispiel eines gleichseitigen Dreiecks die Änderung der Kontinuumssteifigkeit bei einer Zellverzerrung diskutiert. Hierzu wird nach Abbildung B.1 der Knoten 3 der Zelle in horizontaler sowie vertikaler Richtung verschoben. Anschließend wird die Kontinuumssteifigkeit nach Gleichung (3.7) berechnet, wobei als Federsteifigkeiten k die Steifigkeiten des unverformten Systems genutzt werden. Dieses Vorgehen

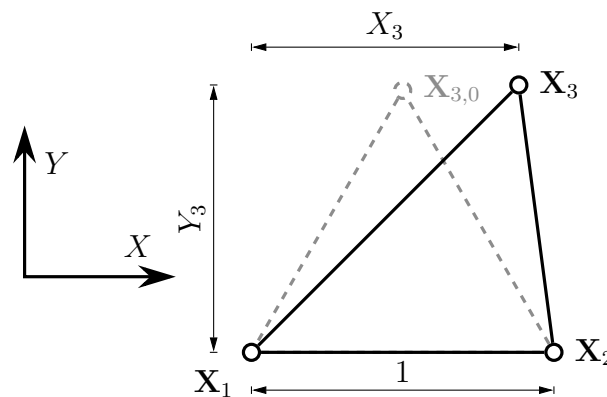


Abbildung B.1.: Verzerrung einer Dreieckszelle zur Bestimmung der Änderung der Kontinuumssteifigkeiten.

führt auf Verläufe für die Komponenten der Kontinuumssteifigkeiten in Abhängigkeit von der Verzerrung der Zelle, die in Abbildung B.2 zu sehen sind. Hierbei sind insbesondere drei Effekte sichtbar. Der erste Effekt ist, dass das Material bei einer Verzerrung der Zelle anisotropes Verhalten zeigt, was insbesondere daran zu erkennen ist, dass die Steifigkeiten, die Normaldehnungen und Schubdehnungen koppeln nach den Abbildungen B.2e und B.2d Werte ungleich Null annehmen. Der zweite Effekt ist die Abnahme der Steifigkeit bei einer Vergrößerung der Zelle. Diese ist in allen Abbildungen bei einer Änderung der Y -Position des dritten Knotens zu beobachten und spiegelt wieder, dass in den Gleichungen (3.11) und (3.11f) die Transformationsmatrizen der Dehnungen auf die Verformungen der Federn dimensionslos sind, und für die Umrechnung auf Beiträge zur Materialsteifigkeit durch das Zellvolumen zu teilen ist. Der dritte Effekt ist eine Versteifung in der Richtung, in der die Normalkraftfedern im verzerrten Zustand liegen. Dieser Effekt ist in den vorliegenden Abbildungen nur schwer zu erkennen, da er vom stärkeren Einfluss der Änderung der Zellgröße überlagert wird. Am deutlichsten ist er anhand der Steifigkeit in Y -Richtung, E_{22} , in Abbildung B.2b zu erkennen: Da bei einer Verschiebung des dritten Knotens in X -Richtung das Zellvolumen konstant bleibt, und zugleich eine Neuausrichtung eines Stabs in Richtung der Y Achse stattfindet, nimmt diese Steifigkeitskomponente bei einer solchen Verzerrung der Dreieckszelle zu.

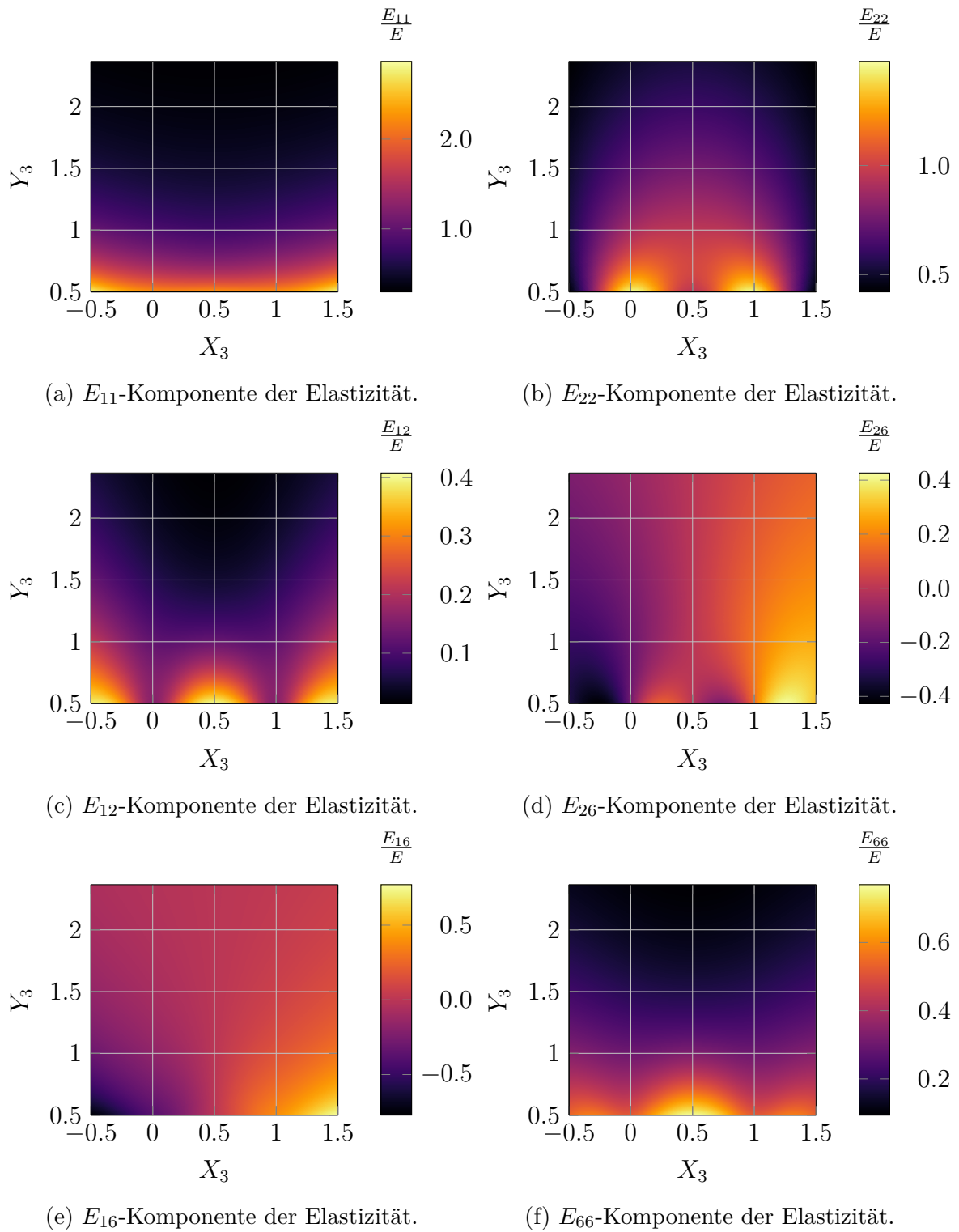


Abbildung B.2.: Änderung der Materialparameter, wenn ein gleichseitiges Dreieck nach Abbildung B.1 verzerrt wird. Es wurde hierbei ein System mit ebener Verzerrung und einer Querkontraktionszahl von $\nu = 0.15$ verwendet.

Anhang C. Steifigkeitsmatrizen und Kräfte der Federelemente

C.1. Herleitung aus der inneren Energie

Nach dem zweiten Satz von CASTIGLIANO ist die Ungleichgewichtskraft an einem Punkt \mathbf{X} gerade die Ableitung der Dehnungsenergie nach der Verschiebung in Richtung der Kraft [62, S. 423]. Dies kann zur einfachen Herleitung der Steifigkeitsmatrizen von Federsystemen verwendet werden.

Die Dehnungsenergie Π_i einer linear-elastischen Feder kann als

$$\Pi_i = \frac{1}{2} k q^2 \quad (\text{C.1})$$

dargestellt werden, wobei q die Verformung der Feder beschreibt. Werden nun die Kräfte \mathbf{F} gesucht, die aufgrund der Verformung der Feder auf die Freiheitsgrade des diskreten Modells wirken, so können diese nach dem zweiten CASTIGLIANO'schen Satz bestimmt werden.

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{u}} = k q \frac{\partial q}{\partial \mathbf{u}} \quad (\text{C.2})$$

Die Steifigkeitsmatrix wiederum beschreibt gerade die Änderung der Federkräfte bei einer Verschiebung der Knoten.

$$\mathbf{K} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{u}} = k \underbrace{\frac{\partial q}{\partial \mathbf{u}} \frac{\partial q^T}{\partial \mathbf{u}}}_{\mathbf{K}_M} + k q \underbrace{\frac{\partial^2 q}{\partial \mathbf{u}^2}}_{\mathbf{K}_G} \quad (\text{C.3})$$

Hierbei wird \mathbf{K}_M auch als Materialsteifigkeit und \mathbf{K}_G als geometrische Steifigkeit bezeichnet. Die Steifigkeitsmatrizen und Reaktionskräfte der Federn unterscheiden sich folglich nur durch die Beziehung zwischen ihren Verformungen und den Verschiebungen der Knoten.

C.2. Die Normalkraftfeder

In der vorliegenden Arbeit wird sowohl die Verformung als auch die innere Energie der Normalkraftfeder über ihre logarithmische Längsdehnung H beschrieben. Liegt die Feder zwischen zwei Knoten $\mathbf{X}_1 = [X_1 \ Y_1 \ Z_1]$ und $\mathbf{X}_2 = [X_2 \ Y_2 \ Z_2]$, die im verformten Zustand um $\mathbf{u}_1 = [u_1 \ v_1 \ w_1]$ und $\mathbf{u}_2 = [u_2 \ v_2 \ w_2]$ verschoben sind, so ergeben sich für die Dehnung und ihre Differentiale folgende Funktionen.

$$\begin{aligned} H &= \ln \frac{l}{l_0} \\ &= \ln \frac{\sqrt{(X_2 + u_2 - X_1 - u_1)^2 + (Y_2 + v_2 - Y_1 - v_1)^2 + (Z_2 + w_2 - Z_1 - w_1)^2}}{\sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2 + (Z_2 - Z_1)^2}} \end{aligned} \quad (\text{C.4a})$$

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} = \frac{1}{l^2} \begin{bmatrix} -(X_2 + u_2 - X_1 - u_1) \\ -(Y_2 + v_2 - Y_1 - v_1) \\ -(Z_2 + w_2 - Z_1 - w_1) \\ (X_2 + u_2 - X_1 - u_1) \\ (Y_2 + v_2 - Y_1 - v_1) \\ (Z_2 + w_2 - Z_1 - w_1) \end{bmatrix} = \frac{1}{l^2} \mathbf{T} \quad (\text{C.4b})$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{u}^2} = \frac{1}{l^2} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{I} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{I} \end{bmatrix} - \frac{2}{l^4} \mathbf{T} \mathbf{T}^T \quad (\text{C.4c})$$

Hierbei ist \mathbf{I} die 3×3 Einheitsmatrix. Damit ergeben sich die Reaktionskraft und die Steifigkeitsmatrix der Normalkraftfeder zu

$$\mathbf{F} = \frac{k_n H}{l^2} \mathbf{T} \quad (\text{C.5a})$$

$$\mathbf{K} = \frac{k_n}{l^4} \mathbf{T} \mathbf{T}^T + k_n H \left(\frac{1}{l^2} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{I} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{I} \end{bmatrix} - \frac{2}{l^4} \mathbf{T} \mathbf{T}^T \right) \quad (\text{C.5b})$$

Für den zweidimensionalen Fall entfallen die Z -Komponenten in diesen Gleichungen. Dies entspricht der Streichung der dritten und sechsten Zeilen und Spalten.

C.3. Die Winkelfeder

Zum Zweck der Herleitung wird hier der allgemeinste Fall einer Winkelfeder zwischen 4 Punkten, $\angle (\overrightarrow{\mathbf{X}_1 \mathbf{X}_2}, \overrightarrow{\mathbf{X}_3 \mathbf{X}_4})$, im dreidimensionalen Raum betrachtet. Dieser Fall kann

daraufliegend auf die Dreipunktfeder im Drei- und Zweidimensionalen vereinfacht werden. Bei einer Bestimmung der Winkeländerung nach Gleichung (3.22f) kann der Gradient dieser bezüglich der Verschiebungen mithilfe der Kurzschreibweisen $\mathbf{x}_i = \mathbf{X}_i + \mathbf{u}_i$, $\mathbf{x}_{ij} = \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i$, $d = \mathbf{x}_{12} \cdot \mathbf{x}_{34}$, $c = \|\mathbf{x}_{12} \times \mathbf{x}_{34}\|_2$ und $l_{ij} = \|\mathbf{x}_{ij}\|_2$ wie folgt als Blockvektor dargestellt werden.

$$\frac{\partial \Delta \varphi}{\partial \mathbf{u}} = \frac{1}{l_{12}^2 l_{34}^2 c} \begin{bmatrix} -(\mathbf{x}_{12} d - \mathbf{x}_{34} l_{12}^2) l_{34}^2 \\ (\mathbf{x}_{12} d - \mathbf{x}_{34} l_{12}^2) l_{34}^2 \\ -(\mathbf{x}_{34} d - \mathbf{x}_{12} l_{34}^2) l_{12}^2 \\ (\mathbf{x}_{34} d - \mathbf{x}_{12} l_{34}^2) l_{12}^2 \end{bmatrix} \quad (\text{C.6})$$

Für die geometrische Steifigkeit wird zusätzlich die zweite Ableitung der Winkeländerung nach den Verschiebungen benötigt. Diese setzt sich aus drei Teilen zusammen.

$$\frac{\partial^2 \Delta \varphi}{\partial \mathbf{u}^2} = \mathbf{Q}_{\varphi,1} + \mathbf{Q}_{\varphi,2} + \mathbf{Q}_{\varphi,3} \quad (\text{C.7})$$

Hierbei sind die Submatrizen $\mathbf{Q}_{\varphi,1}$, $\mathbf{Q}_{\varphi,2}$ und $\mathbf{Q}_{\varphi,3}$ wie folgt definiert.

$$\mathbf{Q}_{\varphi,1} = \begin{bmatrix} -\mathbf{Q}_{\varphi,1,11} & \mathbf{Q}_{\varphi,1,11} & -\mathbf{Q}_{\varphi,1,21}^T & \mathbf{Q}_{\varphi,1,21}^T \\ \mathbf{Q}_{\varphi,1,11} & -\mathbf{Q}_{\varphi,1,11} & \mathbf{Q}_{\varphi,1,21}^T & -\mathbf{Q}_{\varphi,1,21}^T \\ -\mathbf{Q}_{\varphi,1,21} & \mathbf{Q}_{\varphi,1,21} & -\mathbf{Q}_{\varphi,1,22} & \mathbf{Q}_{\varphi,1,22} \\ \mathbf{Q}_{\varphi,1,21} & -\mathbf{Q}_{\varphi,1,21} & \mathbf{Q}_{\varphi,1,22} & -\mathbf{Q}_{\varphi,1,22} \end{bmatrix} \quad (\text{C.8a})$$

mit

$$\mathbf{Q}_{\varphi,1,11} = \frac{1}{c^3} \left(d \mathbf{x}_{34} \mathbf{x}_{34}^T - l_{34}^2 (\mathbf{x}_{12} \mathbf{x}_{34}^T + \mathbf{x}_{34} \mathbf{x}_{12}^T) \right) \quad (\text{C.8b})$$

$$\mathbf{Q}_{\varphi,1,21} = \frac{1}{c^3} \left(d (\mathbf{x}_{12} \mathbf{x}_{34}^T + \mathbf{x}_{34} \mathbf{x}_{12}^T) - l_{12}^2 \mathbf{x}_{34} \mathbf{x}_{34}^T - l_{34}^2 \mathbf{x}_{12} \mathbf{x}_{12}^T \right) \quad (\text{C.8c})$$

$$\mathbf{Q}_{\varphi,1,22} = \frac{1}{c^3} \left(d \mathbf{x}_{12} \mathbf{x}_{12}^T - l_{12}^2 (\mathbf{x}_{34} \mathbf{x}_{12}^T + \mathbf{x}_{12} \mathbf{x}_{34}^T) \right) \quad (\text{C.8d})$$

$$\mathbf{Q}_{\varphi,2} = \begin{bmatrix} -\mathbf{Q}_{\varphi,2,11} & \mathbf{Q}_{\varphi,2,11} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{Q}_{\varphi,2,11} & -\mathbf{Q}_{\varphi,2,11} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{Q}_{\varphi,2,22} & \mathbf{Q}_{\varphi,2,22} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{Q}_{\varphi,2,22} & -\mathbf{Q}_{\varphi,2,22} \end{bmatrix} \quad (\text{C.9a})$$

mit

$$\mathbf{Q}_{\varphi,2,11} = \frac{d^3 + 3 d c^2}{c^3 l_{12}^4} \mathbf{x}_{12} \mathbf{x}_{12}^T \quad (\text{C.9b})$$

$$\mathbf{Q}_{\varphi,2,22} = \frac{d^3 + 3 d c^2}{c^3 l_{34}^4} \mathbf{x}_{34} \mathbf{x}_{34}^T \quad (\text{C.9c})$$

$$\mathbf{Q}_{\varphi,2} = \begin{bmatrix} \frac{d}{c l_{12}^2} \mathbf{I} & -\frac{d}{c l_{12}^2} \mathbf{I} & -\frac{1}{c} \mathbf{I} & \frac{1}{c} \mathbf{I} \\ -\frac{d}{c l_{12}^2} \mathbf{I} & \frac{d}{c l_{12}^2} \mathbf{I} & \frac{1}{c} \mathbf{I} & -\frac{1}{c} \mathbf{I} \\ -\frac{1}{c} \mathbf{I} & \frac{1}{c} \mathbf{I} & \frac{d}{c l_{34}^2} \mathbf{I} & -\frac{d}{c l_{34}^2} \mathbf{I} \\ \frac{1}{c} \mathbf{I} & -\frac{1}{c} \mathbf{I} & -\frac{d}{c l_{34}^2} \mathbf{I} & \frac{d}{c l_{34}^2} \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (\text{C.10})$$

Die Kraftreaktion und Steifigkeit der Feder ergibt sich durch Einsetzen dieser Terme in die Gleichungen (C.2) und (C.3).

C.3.1. Vereinfachung für eine Winkelfeder zwischen drei Knoten

Der Fall einer Winkelfeder zwischen drei Knoten unterscheidet sich vom Fall der Vierpunkt-Winkelfeder lediglich dadurch, dass die Knoten 1 und 3 zusammenfallen und dieselbe Verschiebung besitzen. Die Kraftreaktion und die Steifigkeit dieser Feder kann somit dadurch berechnet werden, dass in den Blockmatrizen der Vierpunkt-Winkelfeder die dritten Blockzeilen und -spalten zur ersten Blockzeile beziehungsweise -spalte addiert und nachfolgend aus dem Kraftvektor beziehungsweise der Steifigkeitsmatrix entfernt werden.

C.3.2. Vereinfachung für den zweidimensionalen Fall

Im zweidimensionalen Fall der Dreipunktfeder ergeben sich zwei weitere Vereinfachungen. Zum einen verschwinden sämtliche Einträge in z -Richtung. Dies hat auch zur Folge, dass die dritten Zeilen und Spalten der Blöcke, aus denen die Steifigkeitsmatrix und die Kraftreaktion aufgebaut sind, aus dem System gestrichen werden. Zum anderen ist der Betrag des Kreuzprodukts der beiden Richtungsvektoren, die den Winkel der Feder aufspannen, gerade die doppelte Dreiecksfläche.

$$c = \|\mathbf{x}_{12} \times \mathbf{x}_{34}\|_2 = 2 A_{\Delta} \quad (\text{C.11})$$

Damit ergibt sich für die erste Ableitung der Winkeländerung nach den Verschiebungen

$$\frac{\partial \Delta \varphi_{2D}}{\partial \mathbf{u}_{2D}} = \frac{1}{2 l_{12}^2 l_{34}^2 A_{\Delta}} \begin{bmatrix} -(\mathbf{x}_{12} d - \mathbf{x}_{34} l_{12}^2) l_{34}^2 - (\mathbf{x}_{34} d - \mathbf{x}_{12} l_{34}^2) l_{12}^2 \\ (\mathbf{x}_{12} d - \mathbf{x}_{34} l_{12}^2) l_{34}^2 \\ (\mathbf{x}_{34} d - \mathbf{x}_{12} l_{34}^2) l_{12}^2 \end{bmatrix}, \quad (\text{C.12})$$

was wiederum nach einer Linearisierung um eine Verschiebung von Null mit dem Ergebnis von Gleichung (3.14) übereinstimmt.

Literaturverzeichnis

- [1] AIRY, G. B.: On the Strains in the Interior of Beams. In: *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* 153 (1863), S. 49–79. DOI 10.1098/rstl.1863.0004. – ISSN 0261–0523
- [2] ALTENBACH, Holm: *Kontinuumsmechanik*. Springer Vieweg, 2012. DOI 10.1007/978-3-642-24119-2
- [3] ARANSON, I. S.; KALATSKY, V. A.; VINOKUR, V. M.: Continuum Field Description of Crack Propagation. In: *Physical Review Letters* 85 (2000), Nr. 1, S. 118–121. DOI 10.1103/physrevlett.85.118
- [4] ARGYRIS, J. H.; SCHARPF, D. W.; SPOONER, J. B.: Die elastoplastische Berechnung von allgemeinen Tragwerken und Kontinua. In: *Ingenieur-Archiv* 37 (1969), Nr. 5, S. 326–352. DOI 10.1007/bf00532580
- [5] ASAHINA, D.; ITO, K.; HOUSEWORTH, J.E.; BIRKHOLZER, J.T.; BOLANDER, J.E.: Simulating the Poisson Effect in Lattice Models of Elastic Continua. In: *Computers and Geotechnics* 70 (2015), S. 60–67. DOI 10.1016/j.compgeo.2015.07.013
- [6] ASAHINA, Daisuke; AOYAGI, Kazuhei; KIM, Kunhwi; BIRKHOLZER, Jens T.; BOLANDER, John E.: Elastically-Homogeneous Lattice Models of Damage in Geomaterials. In: *Computers and Geotechnics* 81 (2017), S. 195–206. DOI 10.1016/j.compgeo.2016.08.015
- [7] ASHURST, William T.; HOOVER, William G.: Microscopic Fracture Studies in the Two-dimensional Triangular Lattice. In: *Physical Review B* 14 (1976), Nr. 4, S. 1465–1473. DOI 10.1103/physrevb.14.1465. – ISSN 0556–2805
- [8] ATTAR, M.; KARRECH, A.; REGENAUER-LIEB, K.: A Lattice Spring Model for Dynamic Analysis of Damaged Beam-Type Structures under Moving Loads. In: *European Journal of Mechanics - A/Solids* 60 (2016), S. 196–207. DOI 10.1016/j.euromechsol.2016.07.004. – ISSN 0997–7538
- [9] AURENHAMMER, F.; KLEIN, R.: Voronoi Diagramms. In: SACK, J. (Hrsg.); URRUTIA, G. (Hrsg.): *Handbook of Computational Geometry*, Elsevier Science Publishing, 2000, S. 201–290

- [10] AYATOLLAHI, M. R.; ALIHA, M. R. M.: Analysis of a New Specimen for Mixed Mode Fracture Tests on Brittle Materials. In: *Engineering Fracture Mechanics* 76 (2009), Nr. 11, S. 1563–1573. DOI 10.1016/j.engfracmech.2009.02.016. – ISSN 0013–7944
- [11] BABUŠKA, I.; AZIZ, A. K.: On the Angle Condition in the Finite Element Method. In: *SIAM Journal on Numerical Analysis* 13 (1976), Nr. 2, S. 214–226. DOI 10.1137/0713021
- [12] BARSOUM, Roshdy S.: On the Use of Isoparametric Finite Elements in Linear Fracture Mechanics. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 10 (1976), Nr. 1, S. 25–37. DOI 10.1002/nme.1620100103. – ISSN 1097–0207
- [13] BATHE, Klaus-Jürgen: *Finite-Elemente-Methoden*. 2. Auflage. Berlin; Heidelberg [u.a.] : Springer, 2002. – 1253 S.. – ISBN 3–540–66806–3
- [14] BAŽANT, Zdeněk P.; OH, B. H.: Crack Band Theory for Fracture of Concrete. In: *Matériaux et Constructions* 16 (1983), Nr. 3, S. 155–177. DOI 10.1007/bf02486267
- [15] BEALE, Paul D.; SROLOVITZ, David J.: Elastic Fracture in Random Materials. In: *Physical Review B* 37 (1988), Nr. 10, S. 5500–5507. DOI 10.1103/physrevb.37.5500
- [16] BEEB, L. A. A.; PEERLINGS, R. H. J.; GEERS, M. G. D.: A Multiscale Quasi-continuum Method for Dissipative Lattice Models and Discrete Networks. In: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 64 (2014), S. 154–169. DOI 10.1016/j.jmps.2013.11.010
- [17] BELYTSCHKO, T.; BLACK, T.: Elastic Crack Growth in Finite Elements with Minimal Remeshing. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 45 (1999), Nr. 5, S. 601–620. DOI 10.1002/(sici)1097–0207(19990620)45:5<601::aid-nme598>3.0.co;2-s
- [18] BESSELING, J.R.: A Theory of Elastic, Plastic and Creep Deformations of an Initially Isotropic Material Showing Anisotropic Strain-Hardening, Creep Recovery, and Secondary Creep / Stanford University. 1959 (SUDAER-78). – Forschungsbericht
- [19] BOLANDER, J. E.: Stress Analysis Using Random Geometry Spring Networks. In: LUCO, J. E. (Hrsg.); MURAKAMI, H. (Hrsg.): *Engineering Mechanics: A Force for the 21st Century, 12th Engineering Mechanics Division Conference*. Reston, VA : ASCE, 1998, S. 630–633
- [20] BOLANDER, J. E.; MORIIZUMI, K; KUNIEDA, M; YIP, M: Rigid-Body-Spring Network Modeling of Cement-Based Composites. In: *Fracture Mechanics of Concrete Structures* (2001), S. 773–780

- [21] BOLANDER, J. E.; SAITO, S.: Fracture Analyses Using Spring Networks with Random Geometry. In: *Engineering Fracture Mechanics* 61 (1998), Nr. 5-6, S. 569–591. DOI 10.1016/s0013-7944(98)00069-1. – ISSN 0013-7944
- [22] BOLANDER, J. E.; SUKUMAR, N.: Irregular Lattice Model for Quasistatic Crack Propagation. In: *Physical Review B* 71 (2005), S. 94–106. DOI 10.1103/PhysRevB.71.094106
- [23] BORN, M.: On the Stability of Crystal Lattices IX. Covariant Theory of Lattice Deformations and the Stability of Some Hexagonal Lattices. In: *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 38 (1942), Nr. 01, S. 82–99. DOI 10.1017/s0305004100022246
- [24] BORN, M.; FÜRTH, R.: The Stability of Crystal Lattices. III. In: *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 36 (1940), Nr. 04, S. 454–465. DOI 10.1017/s0305004100017503
- [25] BORN, Max: On the Stability of Crystal Lattices. I. In: *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 36 (1940), Nr. 02, S. 160–172. DOI 10.1017/s0305004100017138
- [26] BORN, Max: The Thermodynamics of Crystal Lattices. In: *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 39 (1943), Nr. 02, S. 100–103. DOI 10.1017/s0305004100017746
- [27] BORN, Max; HUANG, Kun: *Dynamical Theory of Crystal Lattices*. 1. Edition. Oxford [u.a.] : Clarendon Pr., 1954
- [28] BORN, Max; MISRA, Rama D.: On the Stability of Crystal Lattices. IV. In: *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 36 (1940), Nr. 04, S. 466–478. DOI 10.1017/s0305004100017515
- [29] BRAUN, M.; FERNÁNDEZ-SÁEZ, J.: A New 2D Discrete Model Applied to Dynamic Crack Propagation in Brittle Materials. In: *International Journal of Solids and Structures* 51 (2014), S. 3787–3797. DOI 10.1016/j.ijsolstr.2014.07.014
- [30] BRIDGMAN, Percy W.: *The Physics of High Pressure*. Reprint. London : Bell, 1958
- [31] BUXTON, Gavin A.; CARE, Christopher M.; CLEAVER, Douglas J.: A Lattice Spring Model of Heterogeneous Materials with Plasticity. In: *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering* 9 (2001), S. 485–497. DOI 10.1088/0965-0393/9/6/302
- [32] BUXTON, Gavin A.; VERBERG, Rolf; JASNOW, David; BALAZS, Anna C.: Newtonian Fluid Meets an Elastic Solid: Coupling Lattice Boltzmann and Lattice-Spring

- Models. In: *Physical Review E* 71 (2005), Nr. 5. DOI 10.1103/physreve.71.056707
- [33] CAUCHY, Augustin-Louis: Sur l'Équilibre et le Mouvement d'un Système de Points Matériels Sollicités par des Forces d'Attraction ou de Répulsion Mutuelle. In: *Exercices de mathématiques* 3 (1828), S. 188–212
- [34] CAUCHY, Augustin-Louis: Sur les Équations Différentielles d'Équilibre ou de Mouvement pour un Système de Points Matériels Sollicités par des Forces d'Attraction ou de Répulsion Mutuelle. In: *Exercices de mathématiques* 4 (1829), S. 150–159
- [35] CHANG, C. S.; WANG, T. K.; SLUYS, L. J.; MIER, J. G. M.: Fracture Modeling Using a Micro-Structural Mechanics Approach—I. Theory and Formulation. In: *Engineering Fracture Mechanics* 69 (2002), Nr. 17, S. 1941–1958. DOI 10.1016/s0013-7944(02)00070-x
- [36] CHEN, Hailong; LIU, Yongming: A Non-Local 3D Lattice Particle Framework for Elastic Solids. In: *International Journal of Solids and Structures* 81 (2016), S. 411–420. DOI 10.1016/j.ijsolstr.2015.12.026. – ISSN 0020-7683
- [37] CHEW, L. P.: Guaranteed-Quality Mesh Generation for Curved Surfaces. In: *Proceedings of the ninth annual symposium on Computational geometry - SCG 1993*, Association for Computing Machinery (ACM), 1993, S. 274–280
- [38] CHRIST, N. H.; FRIEDBERG, R.; LEE, T. D.: Weights of Links and Plaquettes in a Random Lattice. In: *Nuclear Physics B* 210 (1982), Nr. 3, S. 337–346. DOI 10.1016/0550-3213(82)90124-9. – ISSN 0550-3213
- [39] CHRISTODOULOU, I.; TAN, P. J.: Crack Initiation and Fracture Toughness of Random Voronoi Honeycombs. In: *Engineering Fracture Mechanics* 104 (2013), S. 140–161. DOI 10.1016/j.engfracmech.2013.03.017. – ISSN 0013-7944
- [40] COSSERAT, E.; COSSERAT, F.: Sur la Théorie de l'Élasticité. In: *Ann. Toulouse* 10 (1896), S. 1–116
- [41] CUNDALL, P. A.: A Computer Model for Simulating Progressive, Large Scale Movements in Blocky Rock Systems. In: *Proceedings of the Symposium of the International Society for Rock Mechanics* Bd. 1, 1971. – Paper No. II-8
- [42] CUNDALL, P. A.; STRACK, O. D. L.: A Discrete Numerical Model for Granular Assemblies. In: *Géotechnique* 29 (1979), Nr. 1, S. 47–65. DOI 10.1680/geot.1979.29.1.47
- [43] CUSATIS, Gianluca; PELESSONE, Daniele; MENCARELLI, Andrea: Lattice Discrete Particle Model (LDPM) for Failure Behavior of Concrete. I: Theory. In: *Cement and Concrete Composites* 33 (2011), Nr. 9, S. 881–890. DOI 10.1016/j.cemconcomp.2011.02.011. – ISSN 0958-9465

- [44] DOLTSINIS, I.: *Elements of Plasticity: Theory and Computation*. WIT Press, 2000. – ISBN 1–85312–702–7
- [45] DOLTSINIS, I.: *Large Deformation Processes of Solids - from Fundamentals to Numerical Simulation and Engineering Applications*. Southampton, Boston : WIT Press, 2003
- [46] DRUCKER, D. C.; PRAGER, W.: Soil Mechanics and Plastic Analysis or Limit Design. In: *Quarterly of Applied Mathematics* 10 (1952), Nr. 2, S. 157–165
- [47] DUBUS, Cyril; SEKIMOTO, Ken; FOURNIER, Jean-Baptiste: General up to Next-nearest-neighbour Elasticity of Triangular Lattices in Three Dimensions. In: *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 462 (2006), Nr. 2073, S. 2695–2713. DOI 10.1098/rspa.2006.1694. – ISSN 1471–2946
- [48] ELIÁŠ, Jan; VOŘECHOVSKÝ, Miroslav: The Effect of Mesh Density in Lattice Models for Concrete with Incorporated Mesostructure. In: *Key Engineering Materials* 488–489 (2012), S. 29–32. DOI 10.4028/www.scientific.net/KEM.488–489.29
- [49] ERINGEN, A. C.: Nonlocal Polar Elastic Continua. In: *International Journal of Engineering Science* 10 (1972), Nr. 1, S. 1–16. DOI 10.1016/0020–7225(72)90070–5
- [50] ERINGEN, A. C.: On Differential Equations of Nonlocal Elasticity and Solutions of Screw Dislocation and Surface Waves. In: *Journal of Applied Physics* 54 (1983), S. 4703–4710. DOI 10.1063/1.332803
- [51] ERTEN, Hale; ÜNGÖR, Alper: Computing Triangulations without Small and Large Angles. In: *2009 Sixth International Symposium on Voronoi Diagrams*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), 2009, S. 192–201
- [52] ERTEN, Hale; ÜNGÖR, Alper: Quality Triangulations with Locally Optimal Steiner Points. In: *SIAM Journal on Scientific Computing* 31 (2009), Nr. 3, S. 2103–2130. DOI 10.1137/080716748
- [53] FÜRTH, R.; BORN, M.: On the Stability of Crystal Lattices: VI. the Properties of Matter under High Pressure and the Lattice Theory of Crystals. In: *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* 37 (1941), Nr. 02, S. 177–185. DOI 10.1017/s0305004100021666
- [54] FÜRTH, R.; BORN, M.: The Stability of Crystal Lattices: V. Experimental Evidence on Recent Theories of the Equation of State and the Melting of Solids. In: *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 37 (1941), Nr. 01, S. 34–54. DOI 10.1017/s0305004100021514
- [55] GALE, Stuart; LEWIS, Wanda J.: Patterning of Tensile Fabric Structures with a Discrete Element Model Using Dynamic Relaxation. In: *Computers & Structures*

- 169 (2016), S. 112–121. DOI 10.1016/j.compstruc.2016.03.005
- [56] GRASSL, Peter; BAŽANT, Zdeněk P.: Random Lattice-Particle Simulation of Statistical Size Effect in Quasi-brittle Structures Failing at Crack Initiation. In: *Journal of Engineering Mechanics* 135 (2009), Nr. 2, S. 85–92. DOI 10.1061/(ASCE)0733-9399(2009)135:2(85)
- [57] GRASSL, Peter; BAŽANT, Zdeněk P.; CUSATIS, Gianluca: Lattice-Cell Approach to Quasibrittle Fracture Modeling. In: *Computational Modelling of Concrete Structures* (2006), S. 263–268
- [58] GREEN, A. E.; NAGHDI, P. M.: A General Theory of an Elastic-plastic Continuum. In: *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 18 (1965), Nr. 4, S. 251–281. DOI 10.1007/bf00251666
- [59] GRIFFITH, A. A.: The Phenomena of Rupture and Flow in Solids. In: *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character* 221 (1920), S. 163–198
- [60] GRIFFITHS, D. V.; MUSTOE, G. G. W.: Modelling of Elastic Continua Using a Grillage of Structural Elements Based on Discrete Element Concepts. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 50 (2001), S. 1759–1775. DOI 10.1002/nme.99
- [61] GROSS, Dietmar; SEELIG, Thomas: *Bruchmechanik: Mit einer Einführung in die Mikromechanik*. Springer-Verlag, 2016. DOI 10.1007/978-3-662-46737-4
- [62] GUMMERT, Peter; RECKLING, Karl-August: *Mechanik*. Braunschweig/Wiesbaden : Vieweg, 1986. – ISBN 3-528-08904-0
- [63] GUSEV, Andrei A.: Finite Element Mapping for Spring Network Representations of the Mechanics of Solids. In: *Physical Review Letters* 93 (2004), Nr. 3. DOI 10.1103/physrevlett.93.034302
- [64] HAHN, M.: *Lebensdauerabschätzung von metallischen Strukturen mittels der Diskrete-Elemente-Methode im gekoppelten thermo-mechanischen Feld*, Institut für Statik und Dynamik der Luft- und Raumfahrtkonstruktionen, Universität Stuttgart, Diss., 2012. DOI 10.18419/opus-3898
- [65] HAHN, Manfred; BOURIGA, Mohamed; KRÖPLIN, Bernd-H.; WALLMERSPERGER, Thomas: Life Time Prediction of Metallic Materials with the Discrete-Element-Method. In: *Computational Materials Science* 71 (2013), S. 146–156. DOI 10.1016/j.commatsci.2013.01.020. – ISSN 0927-0256
- [66] HAHN, Manfred; SCHWARZ, Mathias; KRÖPLIN, Bernd-H.; WALLMERSPERGER,

- Thomas: Discrete Element Method for the Thermal Field: Proof of Concept and Determination of the Material Parameters. In: *Computational Materials Science* 50 (2011), Nr. 10, S. 2771–2784. DOI 10.1016/j.commatsci.2011.04.028. – ISSN 0927–0256
- [67] HENCKY, H.: Über die Form des Elastizitätsgesetzes bei ideal elastischen Stoffen. In: *Zeitschrift für technische Physik* (1928), Nr. 6, S. 215–220
- [68] HERRMANN, Hans J.; HANSEN, Alex; ROUX, Stephane: Fracture of Disordered, Elastic Lattices in Two Dimensions. In: *Physical Review B* 39 (1989), Nr. 1, S. 637–648. DOI 10.1103/PhysRevB.39.637
- [69] HILL, Rodney: *The Mathematical Theory of Plasticity*. Bd. 11. Oxford university press, 1998
- [70] HRENNIKOFF, A.: Solution of Problems of Elasticity by the Framework Method. In: *Journal of applied mechanics* 8 (1941), S. 169–175
- [71] HUBER, M. T.: Właściwa Praca Odkształcenia Jako Miara Wyężenia Materjału. In: *Czasopismo techniczne, Lemberg, Austria* 22 (1904), S. 181
- [72] HUBER, M. T.: Specific Work of Strain As a Measure of Material Effort. In: *Arch. Mech.* 56 (2004), S. 173–190. – Translation of the polish paper [71]
- [73] HUBERT, C.; ANDRÉ, D.; DUBAR, L.; IORDANOFF, I.; CHARLES, J. L.: Simulation of Continuum Electrical Conduction and Joule Heating Using DEM Domains. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* (2016). DOI 10.1002/nme.5435
- [74] HWANG, Young K.; BOLANDER, John E.; LIM, Yun M.: Simulation of Concrete Tensile Failure under High Loading Rates Using Three-Dimensional Irregular Lattice Models. In: *Mechanics of Materials* 101 (2016), S. 136–146. DOI 10.1016/j.mechmat.2016.08.002. – ISSN 0167–6636
- [75] HWANG, Young K.; LIM, Yun M.: Validation of Three-Dimensional Irregular Lattice Model for Concrete Failure Mode Simulations under Impact Loads. In: *Engineering Fracture Mechanics* 169 (2017), S. 109–127. DOI 10.1016/j.engfracmech.2016.11.007
- [76] INGLIS, C. E.: Stresses in a Plate Due to the Presence of Cracks and Sharp Corners. In: *Transactions of the Institution of Naval Architects* 44 (1913), S. 219–241
- [77] IRONS, B. M.: Engineering Applications of Numerical Integration in Stiffness Methods. In: *AIAA Journal* 4 (1966), Nr. 11, S. 2035–2037. DOI 10.2514/3.3836. – ISSN 1533–385X
- [78] IRONS, Bruce; LOIKKANEN, Matti: An Engineers’ Defence of the Patch Test. In:

- International Journal for Numerical Methods in Engineering* 19 (1983), Nr. 9, S. 1391–1401. DOI 10.1002/nme.1620190908. – ISSN 1097–0207
- [79] IRWIN, G. R.; FLÜGGE, S. (Hrsg.): Fracture. In: *Handbuch der Physik* VI (1958), S. 551–590
- [80] IRWIN, G.R.: Analysis of Stresse and Strains near the End of a Crack Traversing a Plate. In: *Journal of Applied Mechanics* 24 (1957), S. 361–364
- [81] IWASHITA, Kazuyoshi; ODA, Masanobu: Micro-Deformation Mechanism of Shear Banding Process Based on Modified Distinct Element Method. In: *Powder Technology* 109 (2000), S. 192–205. DOI 10.1016/S0032–5910(99)00236–3
- [82] JARZABEK, Rafael D.: *Pers. Mitteilung*. 2017
- [83] JIRÁSEK, Milan; BAŽANT, Zdeněk P.: Particle Model for Quasibrittle Fracture and Application to Sea Ice. In: *Journal of Engineering Mechanics* 121 (1995), Nr. 9, S. 1016–1025. DOI 10.1061/(asce)0733–9399(1995)121:9(1016)
- [84] JONES, J. E.: On the Determination of Molecular Fields. — I. From the Variation of the Viscosity of a Gas with Temperature. In: *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 106 (1924), Nr. 738, S. 441–462. DOI 10.1098/rspa.1924.0081
- [85] JONES, J. E.: On the Determination of Molecular Fields. — II. From the Equation of State of a Gas. In: *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 106 (1924), Nr. 738, S. 463–477. DOI 10.1098/rspa.1924.0082
- [86] KARMA, Alain; KESSLER, David A.; LEVINE, Herbert: Phase-Field Model of Mode III Dynamic Fracture. In: *Physical Review Letters* 87 (2001), Nr. 4. DOI 10.1103/physrevlett.87.045501
- [87] KAWAI, Tadahiko: New Discrete Models and Their Application to Seismic Response Analysis of Structures. In: *Nuclear Engineering and Design* 48 (1978), S. 207–229. DOI 10.1016/0029–5493(78)90217–0
- [88] KAZERANI, T.; ZHAO, G. F.; ZHAO, J.: Dynamic Fracturing Simulation of Brittle Material Using the Distinct Lattice Spring Method with a Full Rate-Dependent Cohesive Law. In: *Rock Mechanics and Rock Engineering* 43 (2010), S. 717–726. DOI 10.1007/s00603–010–0099–0
- [89] KEATING, P. N.: Effect of Invariance Requirements on the Elastic Strain Energy of Crystals with Application to the Diamond Structure. In: *Physical Review* 145 (1966), Nr. 2, S. 637–645. DOI 10.1103/physrev.145.637. – ISSN 0031–899X
- [90] KHAN, Akhtar S.; HUANG, Sujian: *Continuum Theory of Plasticity*. Wiley, 1995. –

ISBN 0-471-31043-3

- [91] KIRKWOOD, John G.: The Skeletal Modes of Vibration of Long Chain Molecules. In: *The Journal of Chemical Physics* 7 (1939), S. 506–509. DOI 10.1063/1.1750479
- [92] KIRSCH, G. E.: Die Fundamentalgleichungen der Theorie der Elasticität fester Körper, hergeleitet aus der Betrachtung eines Systems von Punkten, welche durch elastische Streben verbunden sind. In: *Zeitschrift des Vereines deutsche Ingenieure* Band XII (1868), Nr. Heft 8, S. 481–488; 553–570; 631–638
- [93] KLEIN, F.; WIEGHARDT, K.: Über Spannungsflächen und reziproke Diagramme, mit besonderer Berücksichtigung der Maxwellschen Arbeiten. In: *Archiv der Mathematik und Physik* 3 (1904), Nr. 8, S. 1–10; 95–119
- [94] KOLOSOV, G. V.: *Über die Anwendung der komplexen Funktionstheorie auf das ebene Problem der mathematischen Elastizitätstheorie, Original in Russisch*, Universität Yuriew (Dorpat), Dissertation, 1909
- [95] KOSTESKI, Luis; D'AMBRA, Ricardo B.; ITURRIOZ, Ignacio: Crack Propagation in Elastic Solids Using the Truss-Like Discrete Element Method. In: *International Journal of Fracture* 174 (2012), S. 139–161. DOI 10.1007/s10704-012-9684-4
- [96] KOT, Maciej; NAGAHASHI, Hiroshi; SZYMCZAK, Piotr: Elastic Moduli of Simple Mass Spring Models. In: *The Visual Computer* 31 (2015), Nr. 10, S. 1339–1350. DOI 10.1007/s00371-014-1015-5. – ISSN 1432-2315
- [97] KOZICKI, Jan: *Application of Discrete Models to Describe the Fracture Process in Brittle Materials*, Gdansk University of Technology, Diss., 2007
- [98] KRAJGINOVIC, D.; RINALDI, A.: Statistical Damage Mechanics — Part I: Theory. In: *Journal of Applied Mechanics* 72 (2005), S. 76–85. DOI 10.1115/1.1825434
- [99] LAKES, R.: Deformation Mechanisms in Negative Poisson's Ratio Materials: Structural Aspects. In: *Journal of Materials Science* 26 (1991), S. 2287–2292. DOI 10.1007/BF01130170
- [100] LAMÉ, G.; CLAPEYRON, E.: Mémoire sur l'Équilibre Intérieur des Corps Solides Homogènes. In: *Mémoires présentés par divers savans à l'Académie royale des sciences de l'Institut de France, et imprimés par son ordre : sciences mathématiques et physiques*. Tome 4 (1833), S. 463–562
- [101] LAWSON, C. L.: Software for C^1 Surface Interpolation / Jet Propulsion Laboratory. 1977 (JPL Pub. 77-30). – Forschungsbericht
- [102] LEE, E. H.: Elastic-Plastic Deformation at Finite Strains. In: *J. Appl. Mech.* 36 (1969), Nr. 1, S. 1–6. DOI 10.1115/1.3564580. – ISSN 0021-8936

- [103] LILLIU, G.; VAN MIER, J. G. M.: 3D Lattice Type Fracture Model for Concrete. In: *Engineering Fracture Mechanics* 70 (2003), S. 927–941. DOI 10.1016/S0013-7944(02)00158-3
- [104] LLOYD, Bryn; SZEKELY, Gabor; HARDERS, Matthias: Identification of Spring Parameters for Deformable Object Simulation. In: *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics* 13 (2007), Nr. 5, S. 1081–1094. DOI 10.1109/tvcg.2007.1055. – ISSN 1077-2626
- [105] LOPEZ-SANCHO, M. P.; GUINEA, F.; LOUIS, E.: Crack Growth in a Plastic Medium. In: *Journal of Physics A: Mathematical and General* 21 (1988), Nr. 22, S. L1079–L1083. DOI 10.1088/0305-4470/21/22/007
- [106] LUDING, Stefan: Introduction to Discrete Element Methods: Basic of Contact Force Models and How to Perform the Micro-Macro Transition to Continuum Theory. In: *European Journal of Environmental and Civil Engineering* 12 (2008), S. 785–836. DOI 10.1080/19648189.2008.9693050
- [107] MACNEAL, Richard H.: *Finite Elements: Their Design and Performance*. 1. Marcel Dekker, Inc., 1993
- [108] MILLER, Gary L.; TALMOR, Dafna; TENG, Shang-Hua; WALKINGTON, Noel: A Delaunay Based Numerical Method for Three Dimensions. In: *Proceedings of the twenty-seventh annual ACM symposium on Theory of computing - STOC 1995*, Association for Computing Machinery (ACM), 1995, S. 683–692
- [109] MISRA, Rama D.; BORN, M.: On the Stability of Crystal Lattices. II. In: *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* 36 (1940), Nr. 02, S. 173–182. DOI 10.1017/s030500410001714x
- [110] MITSCHKE, Holger; SCHURY, Fabian; MECKE, Klaus; WEIN, Fabian; STINGL, Michael; SCHRÖDER-TURK, Gerd E.: Geometry: The Leading Parameter for the Poisson’s Ratio of Bending-Dominated Cellular Solids. In: *International Journal of Solids and Structures* 100 (2016), S. 1–10. DOI 10.1016/j.ijsolstr.2016.06.027
- [111] MOËS, Nicolas; DOLBOW, John; BELYTSCHKO, Ted: A Finite Element Method for Crack Growth without Remeshing. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 46 (1999), Nr. 1, S. 131–150. DOI 10.1002/(sici)1097-0207(19990910)46:1<131::aid-nme726>3.0.co;2-j
- [112] MOHR, Otto ; BEYER, K. (Hrsg.); SPANGENBERG, H. (Hrsg.): *Abhandlungen Aus Dem Gebiete Der Technischen Mechanik: Zur Jahrhundertfeier Der Th Dresden*. 3., erweiterte Auflage. Berlin : Wilhelm Ernst & Sohn, 1928
- [113] MONETTE, L.; ANDERSON, M. P.: Elastic and Fracture Properties of the Two-

- Dimensional Triangular and Square Lattices. In: *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering* 2 (1994), Nr. 1, S. 53
- [114] MOUSANEZHAD, D.; EBRAHIMI, H.; HAGHPANAH, B.; GHOSH, R.; AJDARI, A.; HAMOUDA, A. M. S.; VAZIRI, A.: Spiderweb Honeycombs. In: *International Journal of Solids and Structures* 66 (2015), S. 218–227. DOI 10.1016/j.ijsolstr.2015.03.036. – ISSN 0020–7683
- [115] NAGHDI, P. M.: Some Constitutive Restrictions in Plasticity / California Univ Berkeley Dept Of Mechanical Engineering. 1976 (AM-76-5). – Forschungsbericht. – Technical rept.
- [116] NAGHDI, P. M.; TRAPP, J. A.: On the Nature of Normality of Plastic Strain Rate and Convexity of Yield Surfaces in Plasticity. In: *J. Appl. Mech.* 42 (1975), Nr. 1, S. 61–66. DOI 10.1115/1.3423555. – ISSN 0021–8936
- [117] NAGHDI, P. M.; TRAPP, J.A.: The Significance of Formulating Plasticity Theory with Reference to Loading Surfaces in Strain Space. In: *International Journal of Engineering Science* 13 (1975), Nr. 9-10, S. 785–797. DOI 10.1016/0020–7225(75)90080–4. – ISSN 0020–7225
- [118] NAVIER, M.: Mémoire sur les Lois de l'Équilibre et du Mouvement des Corps Solides Élastiques. In: *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de l'Institut de France* Tome 7 (1824), S. 375–393
- [119] NOOR, Ahmed K.: Continuum Modeling for Repetitive Lattice Structures. In: *Applied Mechanics Reviews* 41 (1988), Nr. 7, S. 285–296. DOI 10.1115/1.3151907. – ISSN 0003–6900
- [120] O'BRIEN, G. S.: Discrete Visco-Elastic Lattice Methods for Seismic Wave Propagation. In: *Geophysical Research Letters* 35 (2008), Nr. 2. DOI 10.1029/2007gl032214. – ISSN 0094–8276
- [121] OROWAN, E.: Energy Criteria of Fracture / Massachusetts Institute of Technology, Department of Mechanical Engineering. Cambridge, Massachusetts, 1954 (Technical Report No. 3). – Forschungsbericht
- [122] OSTOJA-STARZEWSKI, M.; ALZEBDEH, K.; JASIUK, I.: Linear Elasticity of Planar Delaunay Networks. Iii: Self-consistent Approximations. In: *Acta Mechanica* 110 (1995), S. 57–72. DOI 10.1007/BF01215416
- [123] OSTOJA-STARZEWSKI, M.; SHENG, P. Y.; ALZEBDEH, K.: Spring Network Models in Elasticity and Fracture of Composites and Polycrystals. In: *Computational Materials Science* 7 (1996), Nr. 1-2, S. 82–93. DOI 10.1016/s0927–0256(96)00064–x

-
- [124] OSTOJA-STARZEWSKI, M.; WANG, C.: Linear Elasticity of Planar Delaunay Networks: Random Field Characterization of Effective Moduli. In: *Acta Mechanica* 80 (1989), S. 61–80. DOI 10.1007/BF01178180
- [125] OSTOJA-STARZEWSKI, M.; WANG, C.: Linear Elasticity of Planar Delaunay Networks. Part II: Voigt and Reuss Bounds, and Modification for Centroids. In: *Acta Mechanica* 84 (1990), S. 47–61. DOI 10.1007/BF01176087
- [126] OSTOJA-STARZEWSKI, M.; WANG, G.: Particle Modeling of Random Crack Patterns in Epoxy Plates. In: *Probabilistic Engineering Mechanics* 21 (2006), S. 267–275. DOI 10.1016/j.probengmech.2005.10.007
- [127] OSTOJA-STARZEWSKI, Martin: Lattice Models in Micromechanics. In: *Applied Mechanics Reviews* 55 (2002), Nr. 1, S. 35–60. DOI 10.1115/1.1432990
- [128] PACEVIČ, Ruslan; KAČENIAUSKAS, Arnas; MARKAUSKAS, Darius: Visualization of Cracks by Using the Local Voronoi Decompositions and Distributed Software. In: *Advances in Engineering Software* 84 (2015), S. 85–94. DOI 10.1016/j.advengsoft.2015.02.004. – ISSN 0965–9978
- [129] PAL, Raj K.; RUZZENE, Massimo; RIMOLI, Julian J.: A Continuum Model for Nonlinear Lattices under Large Deformations. In: *International Journal of Solids and Structures* 96 (2016), S. 300–319. DOI 10.1016/j.ijsolstr.2016.05.020. – ISSN 0020–7683
- [130] PAZDNIAKOU, A.; ADLER, P. M.: Lattice Spring Models. In: *Transport in Porous Media* 93 (2012), Nr. 2, S. 243–262. DOI 10.1007/s11242–012–9955–6. – ISSN 1573–1634
- [131] PEDERSEN, Pauli: Some Properties of Linear Strain Triangles and Optimal Finite Element Models. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 7 (1973), Nr. 4, S. 415–429. DOI 10.1002/nme.1620070402. – ISSN 1097–0207
- [132] PEDERSEN, Pauli: On Computer-Aided Analytic Element Analysis and the Similarities of Tetrahedron Elements. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 11 (1977), Nr. 4, S. 611–622. DOI 10.1002/nme.1620110402. – ISSN 1097–0207
- [133] PENG, H. W.; POWER, S. C.: On the Stability of Crystal Lattices VIII. Stability of Rhombohedral Bravais Lattices. In: *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 38 (1942), Nr. 01, S. 67–81. DOI 10.1017/s0305004100022234
- [134] PEREZ, Nestor: *Fracture Mechanics*. 2. Edition. Springer Nature, 2017. DOI 10.1007/978–3–319–24999–5

- [135] POISSON, M.: Mémoire sur l'Équilibre et le Mouvement des Corps Élastiques. In: *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de l'Institut de France* 8 (1828), S. 357–580
- [136] POLANYI, M.: Über die Natur des Zerreivorganges. In: *Zeitschrift für Physik* 7 (1921), Nr. 1, S. 323–327. DOI 10.1007/bf01332803
- [137] POTYONDY, D.O.; CUNDALL, P.A.: A Bonded-Particle Model for Rock. In: *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences* 41 (2004), Nr. 8, S. 1329–1364. DOI 10.1016/j.ijrmms.2004.09.011
- [138] POWER, S. C.: On the Stability of Crystal Lattices VII. Long-Wave and Short-Wave Stability for the Face-Centred Cubic Lattice. In: *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 38 (1942), Nr. 01, S. 61–66. DOI 10.1017/s0305004100022222
- [139] PRAGER, William: The Theory of Plasticity: A Survey of Recent Achievements. In: *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers* 169 (1955), Nr. 1955, S. 41–57. DOI 10.1243/pime_proc_1955_169_015_02
- [140] PSAKHIE, S. G.; HORIE, Y.; OSTERMEYER, G. P.; KOROSTELEV, S. Y.; SMOLIN, A. Y.; SHILKO, E. V.; DMITRIEV, A. I.; BLATNIK, S.; ŠPEGEL, M.; ZAVŠEK, S.: Movable Cellular Automata Method for Simulating Materials with Mesostructure. In: *Theoretical and Applied Fracture Mechanics* 37 (2001), S. 311–334. DOI 10.1016/S0167–8442(01)00079–9
- [141] RAMBERG, Walter; OSGOOD, William R.: Description of Stress-Strain Curves by Three Parameters / National Advisory Committee for Aeronautics. Washington, DC, United States, 1943 (NACA-TN-902). – Forschungsbericht
- [142] RECK: *Erweiterung der Diskrete-Elemente-Methode zur numerischen Lebensdauerberechnung für Strukturen unter Schwelllast*, Institut für Statik und Dynamik der Luf- und Raumfahrtkonstruktionen, Universität Stuttgart, Diplomarbeit, 2013
- [143] RECK, M.: Lattice Spring Methods for Arbitrary Meshes in Two and Three Dimensions. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* (2016). DOI 10.1002/nme.5358
- [144] RICE, J. R.: A Path Independent Integral and the Approximate Analysis of Strain Concentration by Notches and Cracks. In: *Journal of Applied Mechanics* (1968), S. 379–386
- [145] RINALDI, Antonio; KRAJČINOVIC, Dusan; MASTILOVIC, Sreten: Statistical Damage Mechanics - Constitutive Relations. In: *Journal of Theoretical and Applied*

- Mechanics* 44 (2006), S. 585–602
- [146] RINALDI, Antonio; KRAJČINOVIC, Dusan; PERALTA, Pedro; LAI, Ying-Cheng: Lattice Models of Polycrystalline Microstructures: A Quantitative Approach. In: *Mechanics of Materials* 40 (2008), S. 17–36. DOI 10.1016/j.mechmat.2007.02.005
- [147] ROUX, Stéphane; HANSEN, Alex: Perfect Plasticity in a Random Medium. In: *Journal de Physique II* 2 (1992), Nr. 5, S. 1007–1021. DOI 10.1051/jp2:1992183
- [148] RUPPERT, J.: A Delaunay Refinement Algorithm for Quality 2-Dimensional Mesh Generation. In: *Journal of Algorithms* 18 (1995), Nr. 3, S. 548–585. DOI 10.1006/jagm.1995.1021
- [149] SANDERS, W. T.: On the Possibility of a Supersonic Crack in a Crystal Lattice. In: *Engineering Fracture Mechanics* 4 (1972), Nr. 1, S. 145–153. DOI 10.1016/0013-7944(72)90084-7
- [150] SANDS, Christine M.: An Irregular Lattice Model to Simulate Crack Paths in Bonded Granular Assemblies. In: *Computers & Structures* 162 (2016), S. 91–101. DOI 10.1016/j.compstruc.2015.09.006. – ISSN 0045–7949
- [151] SARKAR, Saikat; NOWRUZPOUR, Mohsen; REDDY, J. N.; SRINIVASA, A. R.: A Discrete Lagrangian Based Direct Approach to Macroscopic Modelling. In: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 98 (2017), S. 172–180. DOI 10.1016/j.jmps.2016.09.007
- [152] SCHLANGEN, E.; GARBOCZI, E. J.: New Method for Simulating Fracture Using an Elastically Uniform Random Geometry Lattice. In: *International Journal of Engineering Science* 34 (1996), Nr. 10, S. 1131–1144. DOI 10.1016/0020-7225(96)00019-5
- [153] SCHLANGEN, E.; GARBOCZI, E. J.: Fracture Simulations of Concrete Using Lattice Models: Computational Aspects. In: *Engineering Fracture Mechanics* 57 (1997), Nr. 2-3, S. 319–332. DOI 10.1016/s0013-7944(97)00010-6. – ISSN 0013–7944
- [154] SCHLANGEN, E.; VAN MIER, J. G. M.: Simple Lattice Model for Numerical Simulation of Fracture of Concrete Materials and Structures. In: *Materials and Structures* 25 (1992), Nr. 9, S. 534–542. DOI 10.1007/bf02472449
- [155] SCHLANGEN, Erik: *Experimental and Numerical Analysis of Fracture Processes in Concrete*, Delft University of Technology, Diss., 1993
- [156] SHARAFISAFI, M.; NAZEM, M.: Application of the Distinct Element Method and the Extended Finite Element Method in Modelling Cracks and Coalescence in Brittle Materials. In: *Computational Materials Science* 91 (2014), S. 102–121. DOI

- 10.1016/j.commatsci.2014.04.006
- [157] SHEWCHUK, Jonathan R.: Triangle: Engineering a 2D Quality Mesh Generator and Delaunay Triangulator. In: LIN, Ming C. (Hrsg.); MANOCHA, Dinesh (Hrsg.): *Applied Computational Geometry: Towards Geometric Engineering*. Springer-Verlag, 1996 (Lecture Notes in Computer Science), S. 203–222. – From the First ACM Workshop on Applied Computational Geometry
- [158] SHEWCHUK, Jonathan R.: Delaunay Refinement Algorithms for Triangular Mesh Generation. In: *Computational Geometry: Theory and Applications 22* (2002), Nr. 1-3, S. 21–74. DOI 10.1016/S0925–7721(01)00047–5
- [159] SORG, Annika; BISCHOFF, Manfred: Adaptive Discrete-Continuous Modeling of Evolving Discontinuities. In: *Engineering Computations* 31 (2014), Nr. 7, S. 1305–1320. DOI 10.1108/ec–03–2013–0072
- [160] SPIERIG, Siegfried: Beitrag zur Lösung von Scheiben-, Platten und Schalenproblemen mit Hilfe von Gitterrostmodellen. In: *Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft* 15 (1963), S. 133–165
- [161] STUMMEL, F.: The Limitations of the Patch Test. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 15 (1980), Nr. 2, S. 177–188. DOI 10.1002/nme.1620150203. – ISSN 1097–0207
- [162] SUBRAMANIAN, G.; KRISHNAN, A.: On an Efficient Use of CST Elements. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 14 (1979), Nr. 7, S. 1063–1072. DOI 10.1002/nme.1620140709. – ISSN 1097–0207
- [163] TARASOV, Vasily E.: Lattice with Long-Range Interaction of Power-Law Type for Fractional Non-Local Elasticity. In: *International Journal of Solids and Structures* 51 (2014), Nr. 15-16, S. 2900–2907. DOI 10.1016/j.ijsolstr.2014.04.014. – ISSN 0020–7683
- [164] THOMSON, Robb; HSIEH, C.; RANA, V.: Lattice Trapping of Fracture Cracks. In: *Journal of Applied Physics* 42 (1971), Nr. 8, S. 3154. DOI 10.1063/1.1660699. – ISSN 0021–8979
- [165] TRESKA, H.: Mémoire sur l'Écoulement des Corps Solides. In: *Mémoires présentés par divers savans à l'Académie Royale des Sciences de l'Institut Impérial de France et imprimés par son ordre: Sciences Mathématiques es Physiques* 18 (1868), S. 733–799
- [166] TURNER, M. J.; CLOUGH, R. W.; MARTIN, H. C.; TOPP, L. J.: Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures. In: *Journal of the Aeronautical Sciences*

- 23 (1956), Nr. 9, S. 805–823. DOI 10.2514/8.3664
- [167] TZSCHICHHOLZ, Frank: Peeling Instability in Cosserat-Like Media. In: *Physical Review B* 45 (1992), Nr. 22, S. 12691–12698. DOI 10.1103/physrevb.45.12691
- [168] VOIGT, W.: Theoretische Studien über die Elasticitätsverhältnisse der Krystalle. In: *Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen* 34 (1887), S. 3–52
- [169] VON MISES, Richard: Mechanik der festen Körper im plastisch-deformablen Zustand. In: *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse* 1913 (1913), S. 582–592
- [170] WANG, G.; AL-OSTAZ, A.; CHENG, A. H.-D.; MANTENA, P. R.: Hybrid Lattice Particle Modeling: Theoretical Considerations for a 2D Elastic Spring Network for Dynamic Fracture Simulations. In: *Computational Materials Science* 44 (2009), S. 1126–1134. DOI 10.1016/j.commatsci.2008.07.032
- [171] WEIBULL, Wallodi: A Statistical Distribution Function of Wide Applicability. In: *ASME Journal of Applied Mechanics* (1951), S. 293–297
- [172] WEINER, J. H.; PEAR, M.: Crack and Dislocation Propagation in an Idealized Crystal Model. In: *Journal of Applied Physics* 46 (1975), Nr. 6, S. 2398. DOI 10.1063/1.322223. – ISSN 0021–8979
- [173] WILKINS, Mark L.: Calculation of Elastic-Plastic Flow / DTIC Document. 1963 (UCRL-7322). – Forschungsbericht
- [174] WITTEL, F.; KUN, F.; HERRMANN, H.; KRÖPLIN, B.: Fragmentation of Shells. In: *Physical Review Letters* 93 (2004), Nr. 3. DOI 10.1103/physrevlett.93.035504
- [175] WITTEL, Falk K.: *Diskrete Elemente – Modelle zur Bestimmung der Festigkeitsevolution in Verbundwerkstoffen*, Institut für Statik und Dynamik der Luft- und Raumfahrtkonstruktionen, Universität Stuttgart, Dissertation, 2006
- [176] WITTEL, Falk K.; DILL-LANGER, Gerhard; KRÖPLIN, Bernd-H.: Modeling of Damage Evolution in Soft-wood Perpendicular to Grain by Means of a Discrete Element Approach. In: *Computational Materials Science* 32 (2005), Nr. 3-4, S. 594–603. DOI 10.1016/j.commatsci.2004.09.004
- [177] YIP, Mien; LI, Zhen; LIAO, Ben-Shan; BOLANDER, J. E.: Irregular Lattice Models of Fracture of Multiphase Particulate Materials. In: *International journal of fracture* 140 (2006), Nr. 1-4, S. 113–124. DOI 10.1007/s10704–006–7636–6
- [178] YODER, P. J.; IWAN, W. D.: On the Formulation of Strain-Space Plasticity With Multiple Loading Surfaces. In: *Journal of Applied Mechanics* 48 (1981), Nr. 4, S.

- 773–778. DOI 10.1115/1.3157732
- [179] ZHAO, Gao-Feng: *Development of Micro-Macro Continuum-Discontinuum Coupled Numerical Method*, École Polytechnique Fédérale de Lausanne, Dissertation, 2010
- [180] ZHAO, Gao-Feng: Developing a Four-Dimensional Lattice Spring Model for Mechanical Responses of Solids. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 315 (2016), S. 811–895. DOI 10.1016/j.cma.2016.11.034
- [181] ZHAO, Gao-Feng; FANG, Jiannong; ZHAO, Jian: A 3D Distinct Lattice Spring Model for Elasticity and Dynamic Failure. In: *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics* 35 (2011), Nr. 8, S. 859–885. DOI 10.1002/nag.930
- [182] ZHAO, Shuan-Feng; ZHAO, Gao-Feng: Implementation of a High Order Lattice Spring Model for Elasticity. In: *International Journal of Solids and Structures* 49 (2012), S. 2568–2581. DOI 10.1016/j.ijsolstr.2012.05.015
- [183] ZHU, H. X.; HOBDELL, J. R.; WINDLE, A. H.: Effects of Cell Irregularity on the Elastic Properties of 2D Voronoi Honeycombs. In: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 49 (2001), S. 857–870. DOI 10.1016/S0022–5096(00)00046–6
- [184] ZUBELEWICZ, Aleksander; BAŽANT, Zdeněk P.: Interface Element Modeling of Fracture in Aggregate Composites. In: *Journal of Engineering Mechanics* 113 (1987), Nr. 11, S. 1619–1630. DOI 10.1061/(asce)0733–9399(1987)113:11(1619)

ISBN 978-3-942807-06-7