Symmetrisierbare Hamilton-Operatoren für ausgeglichenen Gewinn und Verlust bei Bose-Einstein-Kondensaten in drei und mehr Mulden

Bachelorarbeit von
Aileen Antje Theresia Durst

30. August 2019

Prüfer: Apl. Prof. Dr. Jörg Main

Institut für Theoretische Physik I
Universität Stuttgart
Pfaffenwaldring 57, 70550 Stuttgart

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **5**
1.1 Einführung in das Thema und Motivation 5
1.2 Aufbau der Arbeit 6

2 Bose-Einstein-Kondensate **7**
2.1 Herleitung der Gross-Pitaevskii-Gleichung 7
2.2 Feshbach-Resonenzen 9

3 Offene Quantensysteme **11**
3.1 Allgemeine Beschreibung offener Quantensysteme mit komplexen Potentialen 11
3.2 $\mathcal{PT}$-Symmetrie 13
3.3 Symmetrisierbare Hamilton-Operatoren 15
3.4 Bifurkationen 18

4 Analytische Fortsetzung **21**
4.1 Bikomplexe Zahlen 22
4.2 Analytische Fortsetzung der GPE mit bikomplexen Zahlen 25
4.3 Physikalische Interpretation des bikomplexen Hamilton-Operators 26

5 Ergebnisse **29**
5.1 Das Dreimuldensystem 30
5.1.1 Betrachtung im Komplexen 30
5.1.2 Betrachtung im Bikomplexen 35
5.2 Das Zweimuldensystem 40
5.2.1 Betrachtung im Komplexen 40
5.2.2 Betrachtung im Bikomplexen 43
5.2.3 Der exzeptionelle Punkt 48

6 Zusammenfassung und Ausblick **55**

Literatur **57**

Danksagung **61**

1 Einleitung

1.1 Einführung in das Thema und Motivation

In der Quantenmechanik sind die Eigenwerte der Zustandsoperatoren reell, sodass diese als physikalische Größen interpretiert werden können. Das entspricht der Forderung, dass alle Operatoren Hermitesch sein müssen [1]. Doch es gibt auch die Möglichkeit quantenmechanische Systeme zu beschreiben, ohne die Wahl der Operatoren so stark einzuschränken. Diese nicht-Hermitesche Quantenmechanik eignet sich besonders gut, um offene Quantensysteme in einfacher Weise zu beschreiben [2]. Dazu werden komplexe Potentiale eingeführt [3]. Diese komplexen Potentiale verletzen die Wahrscheinlichkeitserhaltung, sodass es zu einem Wahrscheinlichkeitsfluss kommt, der als Teilchenzu- oder -abfluss interpretiert werden kann [4]. Dazu werden oft Bose-Einstein-Kondensate gewählt, da diese Vielteilchensysteme mit einer einzigen Gleichung beschreiben werden können, der Gross-Pitaevskii-Gleichung, und makroskopische Quantensysteme darstellen, die sich gut für Experimente eignen.

Begonnen hat die nicht-Hermitesche Quantenmechanik in optischen Systemen und der Quantenfeldtheorie [3]. Bender und Boettcher haben diese später als eigenständige Theorie formuliert [5]. Sie konnten mit der Forderung nach einer Paritäts- und Zeitumkehrsymmetrie zeigen, dass auch nicht-Hermitesche Systeme ein reelles oder komplex konjugiertes Eigenwertspektrum haben können. Seitdem werden solche Systeme immer weiter untersucht und so konnten auch einige Anwendungen gefunden werden, wie zum Beispiel $\mathcal{PT}$-symmetrische Wellenleiter [6] oder $\mathcal{PT}$-Laser [7]. Während auf experimenteller Seite Methoden zur Umsetzung solcher Systeme erforscht werden, ist es aus theoretischer Sicht interessant, die $\mathcal{PT}$-Symmetrie zu verallgemeinern und eine Theorie zu finden, die die Wahl des Systems weniger einschränkt [8].

Einer dieser Ansätze ist die Symmetrisierung. Dabei wird von einem nicht-Hermiteschen Hamilton-Operator gefordert, dass er Hermitesch in Kombination mit einem Hermiteschen Operator η ist. Es lässt sich zeigen, dass ein symmetrisiertes System ebenfalls ein komplex konjugiertes Eigenwertspektrum besitzt. Mit dieser quantenmechanischen Beschreibung werden in dieser Arbeit Bose-Einstein-Kondensate in Zwei- und Dreimuldenpotentialen untersucht.

In Referenz [9] wurde gezeigt, dass in den hier zu untersuchenden Systemen für bestimmte Parameter keine Lösungen gefunden werden können. Wie in Referenz [10] wird mit einer analytischen Fortsetzung im bikomplexen Zahlenraum nach diesen Lösungen gesucht. Um in diesen Raum zu wechseln, werden Parameter, die zuvor reell waren, komplex gewählt. Damit soll überprüft werden inwieweit sich die Lösungen verändern, wenn sie in den verbotenen Bereich übergehen. Mit dieser Erweiterung des Parameterraums wird es möglich sein den exzeptionellen Punkt des Zweimuldensystems zu umkreisen. An diesen exzeptionellen Punkten fallen zwei Eigenwerte und deren Zustände zusammen, sodass die Matrix nicht mehr diagonalisierbar ist. Dieses Verhalten kann durch eine Umkreisung des Punktes beobachtet werden, bei der die Eigenwerte und Zustände vertauschen.

1.2 Aufbau der Arbeit

In Kapitel 2 werden Bose-Einstein-Kondensate und deren Beschreibung eingeführt. Es wird eine Herleitung der Gross-Pitaevskii-Gleichung mit atomaren Wechselwirkungen gezeigt, welche die Dynamik eines Bose-Einstein-Kondensats beschreibt, gefolgt von Feshbach-Resonanzen, die zum Spezialfall der linearen Gross-Pitaevskii-Gleichung führen. Um Bose-Einstein-Kondensate mit Gewinn und Verlust in Mehrmuldenpotentialen beschreiben zu können, wird in Kapitel 3 der Formalismus zur Beschreibung offener Quantensysteme eingeführt. Dabei wird zuerst auf allgemeine Verhaltensweisen dieser nicht-Hermiteschen Systeme eingegangen, um danach verschiedene Symmetrien der Hamilton-Operatoren zu betrachten. In Kapitel 4 werden die mathematischen Grundlagen für die analytische Fortsetzung in den bikomplexen Zahlenraum gelegt. Nach einer kurzen Erklärung, wie analytische Fortsetzungen im Allgemein definiert sind, folgen die bikomplexen Zahlen mit ihrer idempotenten Basis.

Im Hauptteil dieser Arbeit in Kapitel 5 werden das Drei- und Zweimuldensystem als offene Quantensysteme betrachtet. Dies erfolgt jeweils zuerst im komplexen Raum, um danach die analytische Fortsetzung in den bikomplexen Zahlen zu untersuchen. Im Dreimuldensystem, welches in Abschnitt 5.1 beschreiben wird, liegt hier der Schwerpunkt der Betrachtung auf den Bereichen, in denen im Komplexen keine Lösungen gefunden werden können und deren Erschließung durch die analytische Fortsetzung ermöglicht wird. Im Zweimuldensystem in Abschnitt 5.2 wird im bikomplexen Raum untersucht, inwieweit sich die Lösungen verändern, wenn die Parametrisierung minimal von der $\mathcal{PT}$-symmetrischen abweicht. Im Anschluss daran wird schließlich der exzeptionelle Punkt untersucht und im symmetrisierten bikomplexen Potential umkreist.

Eine Zusammenfassung sowie einen Ausblick ist abschließend in Kapitel 6 zu finden.

2 Bose-Einstein-Kondensate

In dieser Arbeit werden Mehrmuldensysteme mit Bose-Einstein-Kondensaten (kurz BECs) betrachtet. Grundlegend können alle Teilchen den beiden Gruppen Fermionen und Bosonen zugeordnet werden. Diese unterscheiden sich in ihren quantenmechanischen Eigenschaften grundlegend voneinander, da Fermionen stets antisymmetrische und Bosonen symmetrische Wellenfunktionen annehmen. Dies hat in Kombination mit dem Pauli-Prinzip zur Folge, dass Fermionen jeden Zustand nur einfach besetzen können, während verschiedene Bosonen denselben Zustand beliebig oft einnehmen können. Dadurch ist es möglich, die Bosonen eines Zustandes mit einer einzigen Schrödinger-Gleichung (kurz SG) zu beschreiben. Dieses Phänomen führt zur Bose-Einstein-Kondensation. Durch das extreme Abkühlen einer bosonischen Probe bis auf wenige Mikrokelvin ist es möglich, dass das quantenmechanische System seinen Grundzustand makroskopisch besetzt. Die theoretische Behandlung solcher Systeme wurde erstmals von Bose und Einstein 1924/25 durchgeführt [11–13].

2.1 Herleitung der Gross-Pitaevskii-Gleichung

Ein BEC ist ein quantenmechanisches Vielteilchensystem, dessen Zeitentwicklung in einem externen Potential durch die Gross-Pitaevskii-Gleichung (kurz GPE) [14, 15]

$$\left(\frac{p^2}{2m} + V(r) + g|\psi|^2\right)\psi = E\,\psi \tag{2.1}$$

beschrieben wird, wobei $g = 4\pi\hbar^2 a/m$ die Wechselwirkung zwischen den Atomen beschreibt und a die Streulänge des Potentials ist. Sie hat große Ähnlichkeit zur bekannten SG, jedoch wird hier zusätzlich die Wechselwirkung der Atome untereinander betrachtet. Dies führt zu einem weiteren Term, dem Wechselwirkungsterm, der von der Teilchendichte abhängt. Somit ist die GPE eine nichtlineare Gleichung.

In diesem Abschnitt wird nun die GPE semiklassisch hergeleitet. Wie bereits erwähnt, unterscheidet sich die GPE von der SG durch einen zusätzlichen additiven Term, welcher nichtlinear ist und eine schwache Wechselwirkung zwischen den Teilchen darstellt. Um

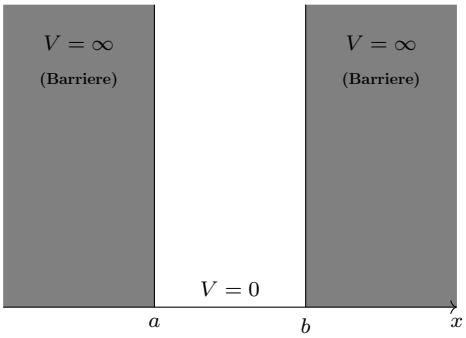

Abbildung 2.1: Schematische Darstellung eines Potentialkastens mit unendlich hohen Wänden. Dieses Potential wird als Näherung für das Wechselwirkungspotential zwischen zwei Atomen angesetzt.

diese Wechselwirkung zu beschreiben, setzt man ein Pseudopotential an, in diesem Fall ein dreidimensionales Kastenpotential mit unendlich hohen Rändern, wie in Abbildung 2.1 zu sehen ist. Dies ist möglich, solange der mittlere Abstand der Teilchen größer ist als deren mittlere Streulänge a. Eine weitere Näherung ist die Beschränkung auf zweiatomige Wechselwirkungen, da Mehrteilchenstöße bei so geringen Temperaturen extrem unwahrscheinlich sind. Somit gilt es an dieser Stelle die SG für zwei Atome in einem dreidimensionalen Kastenpotential zu betrachten. In erster Linie muss die s-Wellenstreuung ($l = 0$, $m_l = 0$) betrachtet werden, da diese den Grundzustand beschreibt. Nach dem Separationsansatz gilt für die Radialkomponenten der Wellenfunktionen

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2} + V(r)\right] P(r) = E\,P(r) \tag{2.2}$$

mit $P(r) = r\,R(r)$. In Abbildung 2.1 sind die Randbedingungen $P(a) = 0 = P(b)$ gut zu erkennen.

Es folgt die Lösung für den Radialteil

$$P(r) = c\sin(k\,(a-r)), \tag{2.3}$$

sodass

$$R(r) = \frac{c}{r}\sin(k\,(a-r)) \approx 1 - \frac{a}{r}. \tag{2.4}$$

Wird die Energie, welche durch die Wechselwirkung der beiden Atome entsteht, betrachtet, so ergibt sich

$$E_{\text{int}} = \int \frac{\hbar^2}{2m}|\nabla\psi|^2 dV. \tag{2.5}$$

Mit

$$\psi = \left(1 - \frac{a}{r}\right) \psi_0 \tag{2.6}$$

folgt

$$E_{\text{int}} = -\frac{4\pi}{m} |\psi_0|^2 \int \left| \frac{d}{dr} \left(1 - \frac{a}{r}\right) \right|^2 r^2 dr = \frac{4\pi}{m} |\psi_0|^2 \hbar^2 a. \tag{2.7}$$

Für eine vollständige Beschreibung des BECs muss der Hamilton-Operator noch um den Wechselwirkungsterm (2.5) ergänzt werden, wodurch sich die GPE (2.1) ergibt.

2.2 Feshbach-Resonenzen

Feshbach-Resonanzen sind eine besondere Art von Streuresonanzen. Allgemein treten Streuresonanzen auf, wenn ein Streupotential quasigebundene Zustände hat, d.h. Zustände, die für endliche Zeit besetzt werden können. Dies tritt ein, wenn die Energie eines einlaufenden Teilchens mit der eines Quasizustandes übereinstimmt. Man nennt diese Zustände nicht gebunden, da es dem Teilchen möglich ist, durch die endlich hohe Barriere zu tunneln und danach wieder frei zu sein. Eine schematische Darstellung einer solchen Streuresonanz ist in Abbildung 2.2 zu sehen.

Unter Betrachtung eines energetisch höhergelegenen Streupotentials treten die sogenannten Feshbach-Resonanzen auf. Hier wird ein quasigebundener Zustand für eine gewisse Zeit besetzt, der jedoch zu einem Streupotential eines anderen inneren Zustandes gehört. Essenziell für Feshbach-Resonanzen ist ein offener Kanal, der energetisch unterhalb eines geschlossenen Kanals liegt. Dies ist in Abbildung 2.2 (b) schematisch dargestellt. Durch das Anlegen von elektrischen oder magnetische Feldern ist es möglich die Potentiale gegeneinander zu verschieben und so charakteristische Streueigenschaften des Gesamtpotentials, wie die Streulänge oder den Wirkungsquerschnitt, nach belieben über ein breites Spektrum durchzustimmen.

Wie in Gleichung (2.1) zu sehen, ist der nichtlineare Anteil der GPE nur abhängig von der Streulänge a des Potentials. Es ist dementsprechend möglich diesen Anteil der Gleichung über Feshbach-Resonanzen beliebig zu variieren und damit die Wirkung des Potentials auf das BEC zu verändern [16].

Im Folgenden werden verschiedene Fälle der Streuresonanzen und die physikalischen Auswirkungen auf das System betrachtet.

- $a < 0$: Für diesen Parameterbereich ist das Potential anziehend. Das heißt, dass sich die Energie des Grundzustandes bei steigender Dichte des Kondensats absenkt. Dies hat zur Folge, dass homogene Systeme instabil sind und kollabieren, während

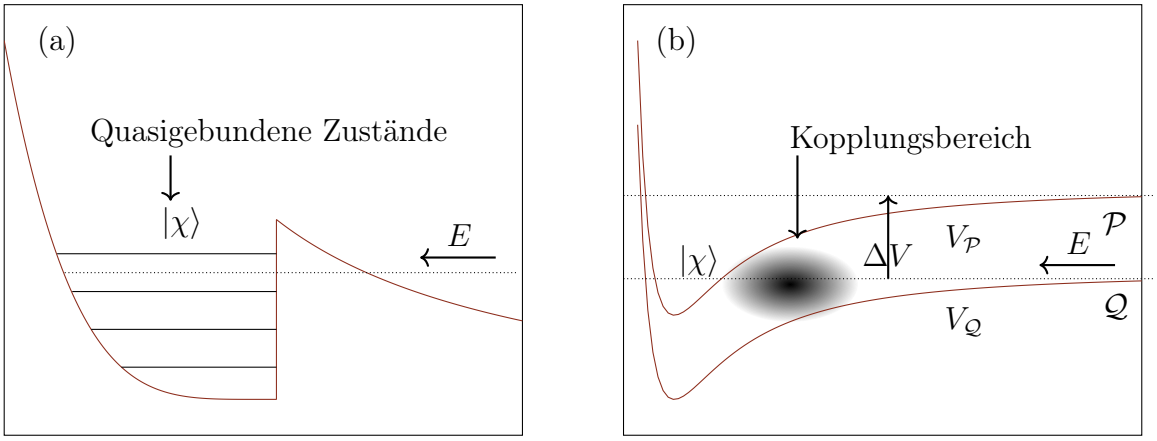

Abbildung 2.2: (a) Schematische Darstellung einer Streuresonanz. Das Teilchen mit der Energie E kommt in das Potential und kann durch die endlich hohe Potentialbarriere tunneln. Dort kann es dann einen quasigebundenen Zustand $|\chi\rangle$ einnehmen, den es in endlicher Zeit wieder verlassen kann. (b) Schematische Darstellung einer Feshbach-Resonanz. Das Teilchen mit der Energie E kommt durch den offenen Kanal $\mathcal{Q}$ in das Potential und hat über sich noch den geschlossenen Kanal $\mathcal{P}$. Der Kopplungsbereich kommt durch ein externes magnetisches oder elektrisches Feld zustande und verbindet die beiden Potentiale $V_{\mathcal{Q}}$ und $V_{\mathcal{P}}$. Über diesen Bereich kann das Teilchen einen quasigebundenen Zustand $|\chi\rangle$ annehmen.

inhomogene Systeme sich selbst durch den Quantendruck bis zu einer kritischen Energie selbst stabilisieren können.

- $a = 0$: In diesem Sonderfall geht die GPE in die SG über. Das bedeutet, dass das BEC wie ein ideales Gas behandelt wird und dessen Wellenfunktion der des Grundzustands einer harmonischen Falle entspricht.
- $a > 0$: Hier ist die Wechselwirkung zwischen den Teilchen repulsiv.

In dieser Arbeit werden nur BECs mit einer Streulänge von $a = 0$ betrachtet, also BECs die nicht wechselwirken. Der nichtlineare Anteil der GPE ist proportional zur Streulänge, weshalb er in diesem Fall verschwindet.

3 Offene Quantensysteme

Diese Arbeit beschäftigt sich mit offenen Quantensystemen in Mehrmuldenpotentialen unter Verwendung einer nicht-Hermiteschen Beschreibung. Offene Quantensysteme haben einen Gewinn und/oder Verlust an Teilchen. Das heißt, sie stehen in Wechselwirkung mit ihrem Umfeld (welches jedoch von der Betrachtung ausgeschlossen ist). Die theoretische Behandlung solcher Systeme kann über zwei Ansätze erfolgen. Zum einen über Dichtematrizen und Mastergleichungen [17] und zum anderen näherungsweise durch komplexe Potentiale, welche auch dieser Arbeit zugrunde liegen. Durch die komplexen Potentiale werden allerdings die Hamilton-Operatoren nicht-Hermitesch, wodurch die Norm nicht mehr erhalten ist.

Im Folgenden wird zuerst auf die allgemeine Auswirkung von komplexen Potentialen auf das System eingegangen. Danach wird $\mathcal{PT}$-Symmetrie als bekanntestes Beispiel einer nicht-Hermiteschen Quantenmechanik vorgestellt, gefolgt von der Verallgemeinerung auf symmetrisierbare Hamilton-Operatoren.

3.1 Allgemeine Beschreibung offener Quantensysteme mit komplexen Potentialen

Es gilt an dieser Stelle, die SG für ein Mehrmuldensystem

$$\mathrm{i}\partial_t\psi = (-\Delta + V(x))\psi \tag{3.1}$$

genauer zu betrachten, wobei das Mehrmuldenpotential $V(x)$ komplex ist. Um sich nun die Auswirkungen des komplexen Anteils bewusst zu machen, bietet sich der Einfachheit halber die Betrachtung der stationären SG

$$H\psi = E\psi \tag{3.2}$$

mit

$$H = -\Delta + V(x) \tag{3.3}$$

an. Es ist noch wichtig festzuhalten, dass ein komplexes Potential auch komplexe Eigenwerte mit sich bringt.

Über die unitäre Zeitentwicklung der Lösungen für dieses System lässt sich das Betragsquadrat der Eigenzustände zu einem gegebenen Energieeigenwert E ermitteln,

$$\mathrm{i}\partial_t\psi = E\psi, \tag{3.4a}$$
$$\psi(t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}Et}\psi(0), \tag{3.4b}$$
$$|\psi(t)|^2 = \mathrm{e}^{2\,\mathrm{Im}(E)t}|\psi(0)|^2. \tag{3.4c}$$

Es lässt sich erkennen, dass ein komplexer Eigenwerte, je nach Vorzeichen, zu einem exponentiellen Anstieg oder Abfall des Betragsquadrates führt. Wenn man sich die Norm eines Zustandes anschaut, erkennt man, dass der Imaginärteil der Energie proportional zu dessen Änderung ist,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}||\psi(x,t)||^2 = \int \mathrm{d}^3x\, 2\,\mathrm{Im}(V(x))|\psi(x,t)|^2. \tag{3.5}$$

Daraus kann man nun auch erkennen, dass die Norm nicht erhalten ist. Ist die Änderung der Norm größer als Null, so kommt es zu einem Teilchengewinn im System. Ist die Änderung jedoch kleiner als Null, so spricht man von Teilchenverlust. In dieser Arbeit wird stets der Sonderfall von ausgeglichenem Gewinn und Verlust betrachtet, was bedeutet, dass die mittlere Teilchenzahl konstant ist und somit die rechte Seite der Gleichung (3.5) verschwinden muss.

Es ist also ersichtlich, dass der imaginäre Teil des Potentials für den Gewinn und Verlust im System verantwortlich ist. Dies zeigt sich auch noch einmal bei der Kontinuitätsgleichung. Aus der Von-Neumann-Gleichung folgt

$$\dot{\rho} = \mathrm{i}[\rho,H] = \dot{\psi}^*\psi + \psi^*\dot{\psi} = \mathrm{i}\psi H^*\psi^* - \mathrm{i}\psi^* H\psi, \tag{3.6a}$$

mit

$$\dot{\rho}(x,t) = 2\,\mathrm{Im}(V(x))\rho(x,t) - \mathrm{div}(\tilde{j}), \tag{3.6b}$$

wobei $\tilde{j} = \mathrm{i}(\psi\nabla\psi^* - \psi^*\nabla\psi)$ den Wahrscheinlichkeitsstrom und ρ die Wahrscheinlichkeitsdichte darstellen. Im Gegensatz zu den reellen Potentialen ist hier die lokale Wahrscheinlichkeit aufgrund des Imaginärteils des Potentials nicht mehr erhalten. Aus diesem Grund muss $\mathrm{Im}(V(x))$, wie oben beschrieben, als Quellen und Senken der Aufenthaltswahrscheinlichkeit interpretiert werden.

3.2 $\mathcal{PT}$-Symmetrie

Nun stellt sich die Frage, wie das System gestaltet werden muss, um trotz eines komplexen Potentials reelle oder komplex konjugierte Lösungen zu erhalten, da nur diese physikalisch interpretierbar sind. Im Folgenden wird nur noch von komplex konjugierten Lösungen gesprochen, da die reellen ein Spezialfall mit einem Imaginärteil von Null sind. Die einfachste und bekannteste Art und Weise dieser Forderung nachzukommen ist die Paritäts-Zeitumkehr-Symmetrie, kurz $\mathcal{PT}$-Symmetrie. Die Grundlagen zu dieser Theorie wurden 1998 von Bender und Boettcher gelegt [5]. Sie haben erstmals den Zusammenhang zwischen reellen Eigenwerten und $\mathcal{PT}$-Symmetrie nachgewiesen. Die essenziellen Erkenntnisse zu reellen Spektren in diesen Systemen sind im Folgenden kurz zusammengefasst.

Für die $\mathcal{PT}$-Symmetrie werden die beiden Transformationsoperatoren $\mathcal{P}$ und $\mathcal{T}$ eingeführt. Deren Wirkungsweise auf die beiden physikalischen Größen Ort und Impuls sind gegeben durch

$$\mathcal{P}x\mathcal{P} = -x, \qquad \mathcal{P}p\mathcal{P} = -p, \tag{3.7a}$$

$$\mathcal{T}x\mathcal{T} = x, \qquad \mathcal{T}p\mathcal{T} = -p. \tag{3.7b}$$

Das Besondere an diesen Operatoren ist, dass sie selbst ihr eigenes Inverses sind, woraus folgt, dass

$$\mathcal{P}^2 = \mathbb{1} = \mathcal{T}^2. \tag{3.8}$$

An die Operatoren wird nun die Forderung gestellt, dass die kanonischen Vertauschungsrelationen auch weiterhin gelten, sodass sie die grundlegende Dynamik des Systems nicht beeinflussen,

$$\mathrm{i}\hbar\delta_{ij} = [x_i,p_j] = [-\mathcal{P}x_i\mathcal{P}, -\mathcal{P}p_j\mathcal{P}] = \mathcal{P}[x_i,p_j]\mathcal{P} = \mathcal{P}\mathrm{i}\hbar\delta_{ij}\mathcal{P}, \tag{3.9a}$$

$$\mathrm{i}\hbar\delta_{ij} = [x_i,p_j] = [\mathcal{T}x_i\mathcal{T}, -\mathcal{T}p_j\mathcal{T}] = -\mathcal{T}[x_i,p_j]\mathcal{T} = -\mathcal{T}\mathrm{i}\hbar\delta_{ij}\mathcal{T}. \tag{3.9b}$$

Paritätsoperator $\mathcal{P}$

Der Paritätsoperator ist definiert durch

$$\mathcal{P} : x \to -x,\, p \to -p. \tag{3.10}$$

Dieser Operator wirkt linear auf skalare Multiplikationen und Additionen,

$$\mathcal{P}(\lambda\phi) = \lambda\mathcal{P}(\phi), \tag{3.11a}$$

$$\mathcal{P}(\phi + \psi) = \mathcal{P}(\phi) + \mathcal{P}(\psi). \tag{3.11b}$$

Aus

$$\langle \mathcal{P}\psi|\mathcal{P}\phi\rangle = \int \mathrm{d}^3x \int \mathrm{d}^3x' \psi^*(x)\phi(x') \langle x|\mathcal{P}x'\rangle = \int \mathrm{d}^3x \psi(x)\phi(x) = \langle \psi|\phi\rangle \tag{3.12}$$

folgt, dass $\mathcal{P}$ unitär und somit Hermitesch ist.

Zeitumkehroperator $\mathcal{T}$

Im Gegensatz zum Paritätsoperator ist die Wirkung des Zeitumkehroperators gegeben durch

$$\mathcal{T} : x \to x,\ p \to -p,\ \mathrm{i} \to -\mathrm{i}. \tag{3.13}$$

Dieser Operator weist ein antilineares Verhalten auf,

$$\mathcal{T}(\lambda\phi) = \lambda^* \mathcal{T}(\phi), \tag{3.14a}$$

$$\mathcal{T}(\phi + \psi) = \mathcal{T}(\phi) + \mathcal{T}(\psi). \tag{3.14b}$$

Der Zeitumkehroperator ist somit nicht-Hermitesch und nicht unitär, was sich durch

$$\langle \mathcal{T}\psi|\mathcal{T}\phi\rangle = \int \mathrm{d}^3x \psi(x)\phi^*(x) = \langle \phi|\psi\rangle \tag{3.15}$$

ausdrückt.

Wie in Referenz [18] gilt für einen Hamilton-Operator mit einem komplexen Potential der Form $H = H_R + \mathrm{i}H_I$, dass aus $H_I \neq 0$ unmittelbar $\mathrm{Im}(E_n) \neq 0$ folgt, was wiederum die Zerfallsrate des Zustandes ψ_n beschreibt. Der zeitumgekehrte Zustand soll um dieselbe Rate anwachsen, um die ψ_n zerfällt, d.h. der Zeitumkehroperator soll lediglich das Vorzeichen von $\mathrm{i}H_I$ ändern und den Rest des Hamilton-Operators unverändert lassen. Da $\mathcal{T}$ antiunitär ist, bleiben H_R und H_I invariant,

$$\mathcal{T}H\mathcal{T}^{-1} = H_R - \mathrm{i}H_I = H^\dagger. \tag{3.16}$$

Damit ist garantiert, dass ein Zustand $\tilde{\psi}_n$ mit $\tilde{E}_n = E_n^*$ existiert. Somit ist das Spektrum eines Hamilton-Operators, der symmetrisch unter einem antilinearen Operator $\mathcal{T}$ ist, stets komplex konjugiert.

$\mathcal{PT}$-Operator

Gemeinsam bilden die beiden Operatoren den $\mathcal{PT}$-Operator, welcher antilinear ist. Auf die einzelnen physikalischen Größen wirkt er wie folgt,

$$\mathcal{PT} : x \to -x,\ \mathrm{i} \to -\mathrm{i}. \tag{3.17}$$

Des weiteren hat dieser Operator ebenfalls die Eigenschaft, sein eigenes Inverses zu sein, woraus $(\mathcal{PT})^2 = \mathbb{1}$ folgt. Die Eigenwerte, die zu diesem Operator gehören, sind komplexe Zahlen mit dem Betrag Eins. Dies lässt sich einfach zeigen, indem man einen Eigenzustand $|\psi\rangle$ mit dem dazugehörigen Eigenwert λ betrachtet. Es gilt die gewöhnliche Eigenwertgleichung, welche mit dem $\mathcal{PT}$-Operator von links multipliziert wird,

$$(\mathcal{PT})^2 |\psi\rangle = \mathcal{PT}\lambda |\psi\rangle = \lambda^2 \mathcal{PT} |\psi\rangle = |\psi|^2 |\psi\rangle \,, \tag{3.18a}$$

mit den Zuständen

$$|\psi\rangle = \lambda^* \lambda |\psi\rangle = |\lambda|^2 |\psi\rangle \,. \tag{3.18b}$$

Damit ergeben sich die Eigenwerte $\lambda = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$.

Wie zu Beginn erklärt, ist es essenziell für die physikalische Interpretierbarkeit der Eigenwerte, dass diese reell oder komplex konjugiert sind. Mit den bisher erarbeiteten Grundlagen kann schnell gezeigt werden, dass dies im Fall der $\mathcal{PT}$-Symmetrie gilt [5]. Als Ausgangspunkt wird die stationäre SG (3.1) angesetzt. Diese kann umgeformt werden zu

$$\mathcal{PT} H |\psi\rangle = \mathcal{PT} E |\psi\rangle \tag{3.19a}$$

$$\Leftrightarrow\ H\mathcal{PT} |\psi\rangle - [H,\mathcal{PT}] |\psi\rangle = E^* \mathcal{PT} |\psi\rangle \,. \tag{3.19b}$$

Falls $[H,\mathcal{PT}] = 0$, dann ist E^* auch ein Eigenwert zum Eigenzustand $\mathcal{PT} |\psi\rangle$. Insbesondere gilt dann $E = E^*$ für $\mathcal{PT} |\psi\rangle = |\psi\rangle$. Somit ist das Eigenwertspektrum komplex konjugiert, wie es nach Gleichung (3.16) erwartet wird, wo gezeigt wurde, dass jeder zu $\mathcal{T}$ symmetrische Hamilton-Operator ein komplex konjugiertes Eigenwertspektrum hat.

Betrachtet man ein $\mathcal{PT}$-symmetrisches quantenmechanisches System, so ist dieses zwar symmetrisch unter den Paritäts- und Zeitumkehrtransformationen, was jedoch nicht zwangsläufig bedeutet, dass der Hamilton-Operator symmetrisch unter den einzelnen Transformationen ist. Für das komplexe Potential, in welches das System eingebettet ist, folgt damit $V(x)^* = V(x)$. Damit resultiert, dass der Realteil des Potentials symmetrisch und der Imaginärteil antisymmetrisch sein müssen,

$$\operatorname{Re} V(-x) = \operatorname{Re} V(x), \tag{3.20a}$$

$$\operatorname{Im} V(-x) = -\operatorname{Im} V(x). \tag{3.20b}$$

3.3 Symmetrisierbare Hamilton-Operatoren

$\mathcal{PT}$-Symmetrie stellt sehr starke Bedingungen an die Parameter des Systems, sodass nur ein symmetrischer Realteil und ein antisymmetrischer Imaginärteil des Potentials zulässig

sind. Um diese Bedingungen zu lockern wird eine andere, allgemeine Bedingung eingeführt, bei der die Hamilton-Operatoren noch immer komplex konjugierte Eigenwerte besitzen. Dazu muss jedoch zuerst eine genauere Betrachtung der Eigenschaften allgemeiner nicht-Hermitescher Quantensysteme erfolgen.

Bei der Formulierung einer nicht-Hermiteschen Quantenmechanik stößt man auf das Problem, dass $H \neq H^\dagger$ ist. Dies führt zu rechts- und linksseitigen Eigenzuständen bei den gleichen Eigenwerten E_n. Somit resultieren eine links- und eine rechtsseitige Eigenwertgleichung,

$$H \left|\psi_n\right\rangle_R = E_n \left|\psi_n\right\rangle_R , \tag{3.21a}$$

$${}_L\langle\psi_n| \, H = \mathrm{i} \; {}_L\langle\psi_n| \, E_n. \tag{3.21b}$$

Ebenso wie bei Hermiteschen Operatoren können die adjugierten Eigenwertgleichungen aufgestellt werden. Dabei gilt $\langle\psi| = |\psi\rangle^\dagger \in \mathcal{H}^*$ wobei $\mathcal{H}^*$ den Dualraum beschreibt,

$${}_R\langle\psi_n| \, H^\dagger = {}_R\langle\psi_n| \, E_n^*, \tag{3.21c}$$

$$H^\dagger \left|\psi_n\right\rangle_L = E_n^* \left|\psi_n\right\rangle_L . \tag{3.21d}$$

Das Skalarprodukt $\langle\phi|\psi\rangle$ ist definiert mit der Eigenschaft der positiven Definitheit

$$\langle\psi|\psi\rangle > 0 \tag{3.22a}$$

und muss zum anderen selbstkonjugiert sein,

$$\langle\psi_1|\psi_2\rangle = \langle\psi_2|\psi_1\rangle^* . \tag{3.22b}$$

Des weiteren ist dieses Skalarprodukt antilinear im ersten und linear im zweiten Argument,

$$\langle\psi_3|a_1\psi_1 + a_2\psi_2\rangle = a_1 \langle\psi_3|\psi_1\rangle + a_2 \langle\psi_3|\psi_2\rangle , \tag{3.22c}$$

$$\langle b_1\psi_1 + b_2\psi_2|\psi_3\rangle = b_1^* \langle\psi_1|\psi_3\rangle + b_2^* \langle\psi_2|\psi_3\rangle . \tag{3.22d}$$

Der Hamilton-Operator H kann formal in seinen Realteil H_R und seinen Imaginärteil H_I aufgeteilt werden. Für den Imaginärteil gilt

$$2\mathrm{i} \langle\psi_m| \, H_I \, |\psi_n\rangle = \langle\psi_m| \, H - H^\dagger \, |\psi_n\rangle = (E_n - E_n^*) \langle\psi_m|\psi_n\rangle , \tag{3.23a}$$

woraus folgt, dass

$$\langle\psi_m|\psi_n\rangle = 2\mathrm{i} \langle\psi_m| \, H_I \, |\psi_n\rangle \, (E_n - E_m^*)^{-1}. \tag{3.23b}$$

Dabei sind $E_n \neq E_m^*$ zwei nicht entartete Eigenwerte. Für $H_I = 0$ ist Gleichung (3.23b) der Beweis dafür, dass die Zustände orthogonal sind. Ist jedoch $H_I \neq 0$, so existieren Zustände

mit $n \neq m$, für die die rechte Seite von Gleichung (3.23b) nicht verschwindet. Damit folgt, dass im Gegensatz zum Hermiteschen Fall, wo die Zustände $|\psi_n\rangle_R = |\psi_n\rangle_L = |\psi_n\rangle$ eine orthonormale Basis bilden, weder die links- noch rechtsseitigen Eigenzustände für sich eine Basis ergeben. Jedoch gilt ${}_L\langle\psi_n|\psi_m\rangle_R = \delta_{mn}$, d.h. links- und rechtsseitige Zustände sind zueinander orthogonal. Falls die Zustände zusätzlich noch die Vollständigkeitsrelation

$$\sum_n |\psi_n\rangle_R \; {}_L\langle\psi_n| = \mathbb{1} \tag{3.24}$$

erfüllen, dann hat der Operator eine *biorthogonale Basis*. Dies ist jedoch keine Bedingung, die jeder nicht-Hermitesche Hamilton-Operator erfüllt. Die folgenden Betrachtungen beschränken sich jedoch auf Hamilton-Operatoren mit einer vollständigen biorthogonalen Basis.

Für nicht-Hermitesche Hamilton-Operatoren lässt sich der Begriff der Symmetrisierbarkeit definieren. Ein *symmetrisierbarer Hamilton-Operator* erfüllt die Symmetrisierungsbedingungen

$$\eta_L H = H^\dagger \eta_L, \tag{3.25a}$$

$$\eta_R H^\dagger = H \eta_R \tag{3.25b}$$

bezüglich der Hermiteschen Operatoren η_L und η_R. Aus diesen Eigenschaften folgt, dass das Eigenwertspektrum komplex konjugiert ist. Um dies zu zeigen, geht man von der SG (3.21b) aus und multipliziert diese mit dem rechtsseitigen Symmetrisierungsoperator η_R,

$${}_L\langle\psi_n| \, H\eta_R = {}_L\langle\psi_n| \, E_n \eta_R \tag{3.26a}$$

$$\Leftrightarrow \; {}_L\langle\psi_n| \, \eta_R H^\dagger = {}_L\langle\psi_n| \, \eta_R E_n. \tag{3.26b}$$

Mit

$${}_L\langle\psi_n| \, \eta_R \equiv {}_R\langle\phi_n| \tag{3.27}$$

folgt

$$H \, |\phi_n\rangle_R = E_n^* \, |\phi_n\rangle_R \, . \tag{3.28}$$

Somit sind sowohl E_n als auch E_n^* Teil des Spektrums, welches damit komplex konjugiert ist.

Für ein komplexes Polynom, wie beispielsweise das charakteristische Polynom des Hamilton-Operators,

$$p(x) = \sum_n a_n x^n \tag{3.29}$$

folgt, dass es nur reelle Koeffizienten haben darf. In diesem Fall gilt

$$p(x^*) = p(x)^*, \tag{3.30a}$$

was wiederum für dessen Nullstellen μ_i bedeutet, dass

$$p(\mu_i) = 0 = p(\mu_i^*). \tag{3.30b}$$

Damit ist das Eigenwertspektrum also tatsächlich reell oder komplex konjugiert. Dieses Verhalten ist analog zu dem eines Hermiteschen oder $\mathcal{PT}$-symmetrischen Operators, jedoch mit mehr Freiheiten in der Parameterwahl, da die Potentiale hierbei nicht zwangsläufig exakt symmetrisch sein müssen.

3.4 Bifurkationen

Bi·fur·ka·ti·on
aus dem Lateinischen: *bifucus = zweizackig, zweigabelig;*
bi- = zwei, furca = Gabel

In nicht-Hermiteschen Systemen treten Bifurkationen auf, wie beispielsweise in Referenz [19] gezeigt ist. Hier laufen meist zwei reelle Zustände zusammen und werden zu einem komplex konjugierten Paar. Allgemein beschreiben Bifurkationen eine qualitative Zustandsänderung einer nichtlinearen Funktion, die von einem Parameter μ abhängig ist. Diese weist bis zu einem kritischen Parameterwert μ_c ein anderes Verhalten auf als für minimal größere Werte $\mu_c + \epsilon$, wobei $\epsilon \to 0$. Der Parameterwert μ_c wird dann als Bifurkationspunkt bezeichnet.

Für die in dieser Arbeit betrachteten Systeme bedeutet eine Bifurkation meist eine Änderung der nichtentarteten Zustandszahl. Entartungen werden also aufgehoben und es kommt zu mehreren Häufungspunkten. Aber auch die Änderung der Stabilität einer Lösung kann eine Bifurkation hervorrufen. Dies lässt sich gut an einem einfachen Beispiel zeigen, das dieselbe Struktur der stationären Lösungen hat wie die Systeme, welche in dieser Arbeit betrachtet werden,

$$\dot{x} = g(x,\mu). \tag{3.31}$$

Hierbei ist μ ein Parameter, der die stationären Lösungen $\dot{x_0} = g(x_0,\mu) = 0$ bestimmt, die im Folgenden betrachtet werden. Für kleine Störungen δx um x_0 lässt sich $g(x_0,\mu)$ linear nähern als

$$\frac{\partial}{\partial t}(x_0 + \delta x) = g(x_0 + \delta x,\mu) \approx g(x_0,\mu) + \delta x \left.\frac{\partial g(x,\mu)}{\partial x}\right|_{x_0}. \tag{3.32a}$$

Durch Ausklammern und Subtrahieren von $\dot{x_0}$ auf beiden Seiten erhält man

$$\delta\dot{x} = \delta x \frac{\partial g(x,\mu)}{\partial x}(x_0,\mu). \tag{3.32b}$$

Die Lösungen ergeben sich durch einen Exponentialansatz zu

$$\delta x(t) = \delta x(0)\mathrm{e}^{\partial_x g(x_0,\mu)t}. \tag{3.33}$$

Es ist zu erkennen, dass es für $\mathrm{Re}\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right) > 0$ zu einer exponentiellen Verstärkung der Störung kommt, weshalb die Lösung in diesem Bereich instabil ist. Im Gegensatz dazu kommt es für $\mathrm{Re}\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right) < 0$ zu einer Dämpfung der Störung und damit zu einer stabilen stationären Lösung. Es ergibt sich eine Bifurkation an der Stelle x_0, da sich hier das Stabilitätsverhalten der Lösung plötzlich ändert. Es gibt nun noch die Möglichkeit den Exponenten der Lösung als Element des komplexen Zahlenraums zu wählen, was zur Folge hätte, dass zusätzlich zu dem exponentiellen Verlauf auch noch eine Oszillation mit der Frequenz $\omega = \mathrm{Im}\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)$ entsteht.

Bifurkationspunkte werden auch als exzeptionelle Punkte bezeichnet, da hier mehrere Eigenwerte zusammenfallen, während die übrigen nichtentartet sind. Bezeichnet werden die exzeptionellen Punkte mit EPN, wobei N die Anzahl der Eigenwerte angibt die zusammenfallen. Aber auch die Eigenvektoren fallen an diesen Stellen zusammen, sodass die Matrix an diesen Punkten nicht länger diagonalisierbar ist. Bei der Umkreisung eines exzeptionellen Punktes im Parameterraum vertauschen Eigenwerten und die dazugehörigen Zustände. Konkret bedeutet das zum Beispiel für einen EP2, dass nach einer Umkreisung der Grundzustand und der angeregte Zustand vertauscht sind und erst nach einer weiteren Umkreisung die Ausgangssituation wiederhergestellt ist [20].

Heugabelbifurkation

Ein einfaches Beispiel für eine Bifurkation ist die Heugabelbifurkation, welche durch

$$\dot{x} = \alpha x - x^3 \tag{3.34}$$

beschrieben wird. Dieses System hat die stationären Lösungen

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{\alpha}, \tag{3.35}$$

$$x_3 = 0. \tag{3.36}$$

In diesem Beispiel tritt eine Bifurkation an der Stelle $x = 0$ auf. Hier kommt es zu einer zusätzlichen Lösung, die unabhängig von dem gewählten Parameter ist. Das heißt, dass für alle Werte $\alpha < 0$ zwei rein imaginäre Lösungen und eine rein reelle Lösung existieren. Für $\alpha > 0$ treten hingegen drei rein reelle Lösungen auf. Dieses Verhalten ist in Abbildung 3.1 zu sehen.

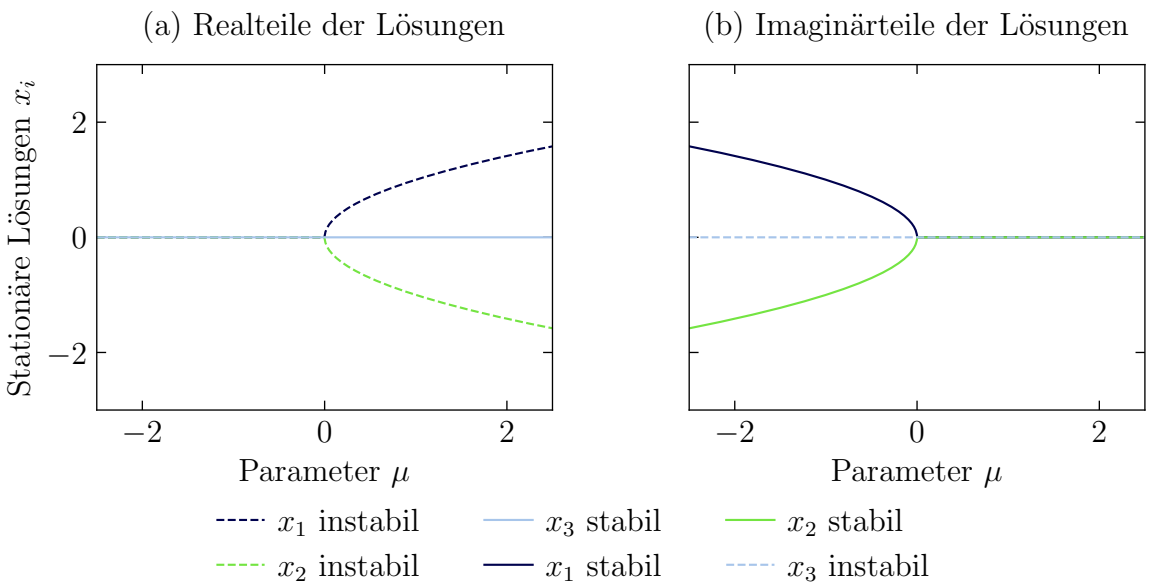

Abbildung 3.1: Ein einfaches Beispiel einer Heugabelbifurkation. (a) Die Realteile der Lösungen zeigen scheinbar, dass sich die Anzahl der verschiedenen Lösungen verändert. (b) In den Imaginärteilen lässt sich erkennen, dass die Anzahl der verschiedenen Lösungen im Komplexen erhalten ist.

Für die Stabilitätsuntersuchung wird wieder die Ableitung betrachtet,

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,\alpha) = \alpha - 3x^2. \tag{3.37}$$

Für die triviale Lösung $x_3 = 0$ ist die Ableitung $\frac{\partial F}{\partial x}(x_3,\alpha) = \alpha$ und somit für negative Werte von α stabil und für positive Werte instabil. Die anderen beiden Lösungen $x_{1,2}$ hingegen sind für negative Werte von α instabil und für positive Werte stabil.

4 Analytische Fortsetzung

Dieses Kapitel ist an [21] orientiert, doch die gegebenen Informationen können ebenso in jedem anderen Textbuch zur höheren Analysis gefunden werden. Analytische Funktionen sind komplexe Funktionen, die dadurch definiert sind, dass sie in ihrem Definitionsbereich durch eine absolut konvergente Potenzreihe darstellbar sind. Äquivalent dazu ist die Aussage, dass sie beliebig oft komplex differenzierbar sind. Komplexe analytische Funktionen, die auf einem Teilbereich der komplexen Zahlen definiert sind, sind auch komplex differenzierbar und werden holomorph genannt.

Komplex differenzierbar bedeutet, dass der Real- und Imaginärteil einer holomorphen Funktion $f(x,y) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$ auch nach dem Real- und Imaginärteil der komplexen Zahl $z = x + \mathrm{i}y$ differenziert werden können. Dabei erfüllt sie die Cauchy-Riemann'schen Differenzialgleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \tag{4.1a}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{4.1b}$$

Cauchy'scher Integralsatz

> Ist $D \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet, $f : D \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion und $c : [a,b] \to D$ ein geschlossener Weg, so gilt $\oint f(z)\mathrm{d}z = 0$.

Identitätssatz

> Gibt es für zwei holomorphe Funktionen $f : \mathrm{U} \to \mathbb{C}$, $g : \mathrm{U} \to \mathbb{C}$ auf einer offenen und zusammenhängenden Menge U einen Häufungspunkt in $z \in U$ mit $f(z) = g(z)$, so gilt $f = g$ auf ganz U.

Aus dem Cauchy'schen Integralsatz folgt, dass holomorphe Funktionen auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet alleine durch die Funktionswerte auf dem Rand gegeben sind. Zusammen mit dem Identitätssatz lässt sich schließen, dass sich eine auf einer beschränkten Teilmenge der komplexen Zahlen gegebene analytische Funktion eindeutig im Rest der komplexen Zahlen (bis auf eine diskrete Menge an Singularitäten) fortsetzen

lässt. Dies wird als analytische Fortsetzung einer Funktion bezeichnet.

Analytische Fortsetzung:

> Seien ein Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ und $f \in H(G)$ gegeben. Für ein Gebiet $G_1 \subseteq \mathbb{C}$ mit $G \subset G_1$ und einer Funktion $f_1 \in H(G_1)$ mit $f \equiv f_1$ auf G sagt man f_1 ist eine analytische Fortsetzung auf G_1.

Etwas anschaulicher lässt sich dies über die Potenzreihenentwickelung erklären. Wird eine analytische Funktion in einem Punkt entwickelt, so hat diese einen endlichen Konvergenzradius und ist nur für eine beschränkte Menge gültig. Entwickelt man diese Funktion nun erneut in einem anderen Punkt, können der Konvergenzradius und die Definitionsmenge erweitert werden. Somit ist es möglich den gesamtmöglichen Definitionsbereich zu erschließen.

Ein bekanntes Beispiel für eine analytische Fortsetzung ist die geometrische Reihe $f = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ mit einem Konvergenzradius von Eins. Es gibt die Möglichkeit diese Potenzreihe als

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \tag{4.2}$$

mit $|z| < 1$ zu schreiben. Diese liefert ein Ergebnis in $\mathbb{C}\backslash\{1\}$, sodass $g(z) = \frac{1}{1-z}$ eine analytische Fortsetzung von f darstellt.

4.1 Bikomplexe Zahlen

Eine Möglichkeit für eine analytische Fortsetzung ist der Übergang in eine allgemeinere algebraische Struktur. In dieser Arbeit werden dafür die bikomplexen Zahlen verwendet, welche ein Teil der hyperkomplexen Zahlen sind [22]. Allgemein werden hyperkomplexe Zahlen durch das Einführen weiterer imaginärer Einheiten konstruiert. Dabei verliert man jedoch mindestens eine Körpereigenschaft, was im Laufe dieser Arbeit noch von Bedeutung sein wird.

Bei den bikomplexe Zahlen wird eine zweite, unabhängige imaginäre Einheit j eingeführt, wodurch es möglich ist, die einzelnen Komponenten einer komplexen Zahl selbst wieder komplex werden zu lassen. Der Raum der bikomplexen Zahlen ist also definiert als

$$\mathbb{BC} = \{z_1 + \mathrm{j}z_2 | z_1, z_2 \in \mathbb{C}\}\,. \tag{4.3}$$

Mit $z_1 = z_\mathrm{r} + \mathrm{i}z_\mathrm{i}$ und $z_2 = z_\mathrm{j} + \mathrm{i}z_\mathrm{k}$, wobei $z_\mathrm{r}, z_\mathrm{i}, z_\mathrm{j}, z_\mathrm{k} \in \mathbb{R}$, ergibt sich z zu einer bikomplexen Zahl der Form

$$z = (z_\mathrm{r} + \mathrm{j}z_\mathrm{j}) + \mathrm{i}(z_\mathrm{i} + \mathrm{j}z_\mathrm{j}) = z_\mathrm{r} + \mathrm{i}z_\mathrm{i} + \mathrm{j}z_\mathrm{j} + \mathrm{k}z_\mathrm{k}, \tag{4.4}$$

wobei hier $\mathrm{k} = \mathrm{ij}$ als Abkürzung verwendet wird. Für die beiden imaginären Einheiten gelten die Relationen

$$\mathrm{j}^2 = \mathrm{i}^2 = -1, \tag{4.5a}$$
$$\mathrm{k}^2 = \mathrm{i}^2\,\mathrm{j}^2 = 1. \tag{4.5b}$$

Analog zu der üblichen komplexen Konjugation $\mathrm{i} \to -\mathrm{i}$ kann auch die imaginäre Einheit j komplex konjugiert werden. Somit ergeben sich für eine bikomplexe Zahl drei verschiedenen Konjugationen,

$$\mathrm{i} : z^* = z_\mathrm{r} - \mathrm{i}z_\mathrm{i} + \mathrm{j}z_\mathrm{j} - \mathrm{k}z_\mathrm{k}, \tag{4.6a}$$
$$\mathrm{j} : \ \overline{z} = z_\mathrm{r} + \mathrm{i}z_\mathrm{i} - \mathrm{j}z_\mathrm{j} - \mathrm{k}z_\mathrm{k}, \tag{4.6b}$$
$$\mathrm{k} : \overline{z}^* = z_\mathrm{r} - \mathrm{i}z_\mathrm{i} - \mathrm{j}z_\mathrm{j} + \mathrm{k}z_\mathrm{k}. \tag{4.6c}$$

Betragsquatrat

Durch die Definition der Konjugation ist die Definition einer Norm möglich. Dies ist vor allem nötig, um die Nichtlinearität der GPE bilden zu können.

Bisher bekannt ist das Betragsquadrat aus der Hermiteschen Quantenmechanik $|z|^2 = zz^*$ mit der Konjugation in i. Bei der Konjugation nach i wird die Zahl in die Ebene in $\mathbb{C}_\mathrm{j}$ projiziert. Dies gilt analog für eine Konjugation in j und das zugehörige Betragsquadrat. Im Gegensatz dazu würde eine Konjugation in beiden Einheiten (also effektiv in k) die Zahl in die (1, k)-Ebene bringen,

$$zz^* = (z_\mathrm{r}^2 + z_\mathrm{i}^2 - z_\mathrm{j}^2 - z_\mathrm{k}^2) + 2\mathrm{j}(z_\mathrm{r}z_\mathrm{j} - z_\mathrm{i}z_\mathrm{k}), \tag{4.7a}$$
$$z\overline{z} = (z_\mathrm{r}^2 - z_\mathrm{i}^2 + z_\mathrm{j}^2 - z_\mathrm{k}^2) + 1\mathrm{i}(z_\mathrm{r}z_\mathrm{i} - z_\mathrm{j}z_\mathrm{k}), \tag{4.7b}$$
$$z\overline{z}^* = (z_\mathrm{r}^2 - z_\mathrm{i}^2 - z_\mathrm{j}^2 + z_\mathrm{k}^2) + 2\mathrm{k}(z_\mathrm{r}z_\mathrm{k} - z_\mathrm{i}z_\mathrm{j}). \tag{4.7c}$$

Nun ist es möglich die bikomplexe Zahl auf die reelle Achse zu projizieren, indem man die Zahl mit all ihren Konjugierten multipliziert. Dies kann jedoch auf verschiedene Arten dargestellt werden,

$$zz^*\overline{z}\overline{z}^* = (z_\mathrm{r}^2 + z_\mathrm{i}^2 - z_\mathrm{j}^2 - z_\mathrm{k}^2)^2 + 4(z_\mathrm{r}z_\mathrm{j} - z_\mathrm{i}z_\mathrm{k})^2 \tag{4.8a}$$
$$= (z_\mathrm{r}^2 - z_\mathrm{i}^2 + z_\mathrm{j}^2 - z_\mathrm{k}^2)^2 + 4(z_\mathrm{r}z_\mathrm{i} - z_\mathrm{j}z_\mathrm{k})^2 \tag{4.8b}$$
$$= (z_\mathrm{r}^2 - z_\mathrm{i}^2 - z_\mathrm{j}^2 + z_\mathrm{k}^2)^2 + 4(z_\mathrm{r}z_\mathrm{k} - z_\mathrm{i}z_\mathrm{j})^2. \tag{4.8c}$$

Für das Betragsquadrat im Bikomplexen wird die imaginäre Einheit i als bevorzugte Einheit gesetzt, sodass es sowohl im Komplexen als auch im Bikomplexen als $|z|^2 = zz^*$ definiert ist. Damit ist die GPE in (2.1) im komplexen und im bikomplexen Raum gültig.

Idempotente Basis

I·dem·po·tenz
Bezeichnet ein mathematisches Objekt a aus einer Gruppe,
das mit einer Verknüpfung $\circ$ auf sich selbst gleich beleibt, $a \circ a = a$.

Im Raum der bikomplexen Zahlen kann eine sogenannte *idempotente Basis* konstruiert werden. Diese besteht aus zwei bikomplexen Zahlen, die linear unabhängig und wie folgt definiert sind,

$$e_+ \equiv \frac{1+\mathrm{k}}{2}, \tag{4.9a}$$

$$e_- \equiv \frac{1-\mathrm{k}}{2}. \tag{4.9b}$$

Sie erfüllen die Identitäten

$$e_+ + e_- = 1, \tag{4.10a}$$

$$e_+ - e_- = \mathrm{k}, \tag{4.10b}$$

$$e_+ e_- = 0, \tag{4.10c}$$

$$e_\pm^2 = e_\pm. \tag{4.10d}$$

Aus den Gleichungen (4.10) kann man nun direkt erkennen, dass die bikomplexen Zahlen nicht nullteilerfrei sind.

Jede beliebige Zahl $z = z_1 + \mathrm{j}\, z_2 \in \mathbb{BC}$ mit $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ kann im bikomplexen Raum eindeutig in der idempotenten Basis dargestellt werden als

$$z = z_+\, e_+ + z_-\, e_- \tag{4.11}$$

mit

$$z_+ = z_1 - \mathrm{i} z_2, \tag{4.12a}$$

$$z_- = z_1 + \mathrm{i} z_2. \tag{4.12b}$$

Die Zerlegung der bikomplexen Zahl $z = z_\mathrm{r} + \mathrm{i}z_\mathrm{i} + \mathrm{j}z_\mathrm{j} + \mathrm{k}z_\mathrm{k}$ mit $z_\mathrm{r}, z_\mathrm{i}, z_\mathrm{i}, z_\mathrm{k} \in \mathbb{R}$ in die beiden Komponenten der Basis kann je nach imaginärer Einheit auf zwei Arten geschehen, entweder in $\mathbb{C}_\mathrm{i}$

$$z_+ = (z_\mathrm{r} + z_\mathrm{k}) + \mathrm{i}(z_\mathrm{i} - z_\mathrm{j}), \tag{4.13a}$$
$$z_- = (z_\mathrm{r} - z_\mathrm{k}) + \mathrm{i}(z_\mathrm{i} + z_\mathrm{j}), \tag{4.13b}$$

oder in $\mathbb{C}_\mathrm{j}$

$$z_+ = (z_\mathrm{r} + z_\mathrm{k}) + \mathrm{j}(z_\mathrm{j} - z_\mathrm{i}), \tag{4.14a}$$
$$z_- = (z_\mathrm{r} - z_\mathrm{k}) + \mathrm{j}(z_\mathrm{j} + z_\mathrm{i}). \tag{4.14b}$$

In dem in dieser Arbeit betrachteten Fall wird die imaginäre Einheit i als primäre Einheit gewählt. Die idempotente Basis ist orthogonal in Bezug auf das euklidische Skalarprodukt in $\mathbb{C}_\mathrm{i}^2$,

$$\langle (z_1,w_1),(z_2,w_2)\rangle_{\mathbb{C}_\mathrm{i}^2} = z_1\,\overline{z_2} + w_1\,\overline{w_2}. \tag{4.15}$$

Für die Basiselemente folgen damit

$$\langle e_+,e_+\rangle_{\mathbb{C}_\mathrm{i}^2} = \langle e_-, e_-\rangle_{\mathbb{C}_\mathrm{i}^2} = \frac{1}{2}, \tag{4.16}$$
$$\langle e_+,e_-\rangle_{\mathbb{C}_\mathrm{i}^2} = 0.$$

Aus diesem Skalarprodukt geht hervor, dass die Basis zwar orthogonal, jedoch nicht orthonormal ist.

4.2 Analytische Fortsetzung der GPE mit bikomplexen Zahlen

In Kapitel 2 wurde die GPE im komplexen Raum eingeführt. Sie bezieht sich auf eine Wellenfunktion $\psi = \psi_\mathrm{r} + \mathrm{i}\psi_\mathrm{i}$, wobei $\psi_\mathrm{r}, \psi_\mathrm{i} \in \mathbb{R}$, mit dem dazugehörigen komplexen Eigenwert $E = E_\mathrm{r} + \mathrm{i}E_\mathrm{i}$. Die GPE (2.1) ist dann gegeben durch

$$(-\Delta + V + g(\psi_\mathrm{r}^2 + \psi_\mathrm{i}^2))\psi = E\psi. \tag{4.17}$$

Wird diese Gleichung nun analytisch mit den bikomplexen Zahlen fortgesetzt, so ergibt sich die Wellenfunktion zu $\psi = \psi_\mathrm{r} + \mathrm{i}\psi_\mathrm{i} + \mathrm{j}\psi_\mathrm{j} + \mathrm{k}\psi_\mathrm{k}$ mit den zugehörigen bikomplexen

Eigenwerten $E = E_\mathrm{r} + \mathrm{i}E_\mathrm{i} + \mathrm{j}E_\mathrm{j} + \mathrm{k}E_\mathrm{k}$. Damit ergibt sich eine GPE, die sich in zwei komplexe oder vier reelle Gleichungen aufteilen lässt,

$$(-\Delta + V + g(\psi_\mathrm{r}^2 + \psi_\mathrm{i}^2 + \psi_\mathrm{j}^2 + \psi_\mathrm{k}^2))\psi = E\psi. \tag{4.18}$$

Einen anderen Lösungsansatz stellt die idempotente Basis (4.9) dar. Hierbei teilen sich der Hamilton-Operator, die Wellenfunktion und die Eigenwerte in e_+ und e_- Anteile auf. Für die komplexe Konjugation in der ausgezeichneten imaginären Einheit i gilt

$$\psi^* = (\psi_+ e_+ + \psi_- e_-)^* = \psi_+^* e_+ + \psi_-^* e_-. \tag{4.19}$$

Nun wird das Betragsquadrat als die Multiplikation der Funktion mit ihrem komplex Konjugierten definiert. Somit wird die bikomplexe GPE in der idempotenten Basis beschrieben durch

$$(-\Delta + V_- + g\psi_-\psi_+^*)\psi_- = E_-\psi_-, \tag{4.20a}$$

$$(-\Delta + V_+ + g\psi_+\psi_-^*)\psi_+ = E_+\psi_+. \tag{4.20b}$$

4.3 Physikalische Interpretation des bikomplexen Hamilton-Operators

Die physikalische Interpretierbarkeit des bikomplexen Hamilton-Operators darf natürlich nicht verlorengehen, weshalb gefordert wird, dass das Spektrum zu allen Zeitpunkten reell oder komplex konjugiert sein muss. Für das analytisch fortgesetzte System können nun dieselben Betrachtungen durchgeführt werden, wie für das bekannte komplexe System in Abschnitt 3.1.

Als Ausgangspunkt wird wieder die stationäre SG (3.2) gewählt, deren Lösungen unitär in der Zeit entwickelt sind. Die zeitabhängigen Zustände haben die Eigenschaft, dass ihr Betragsquadrat die Wahrscheinlichkeitsdichte angibt, welche in geschlossenen Systemen stets erhalten ist. Da Lösungen im Bikomplexen gesucht werden, gilt $E \in \mathbb{BC}$. Um komplex konjugierte Zustände zu erhalten, muss für die zeitentwickelten Zustände gelten, dass $|\mathrm{e}^{\mathrm{i}Et}| \in \mathbb{R}$. Daraus folgt

$$\begin{aligned}
\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}Et}\right|^2 &= \left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}(E_+ e_+ + E_- e_-)}\right|^2 \\
&= \left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}E_+} e_+ - \mathrm{e}^{\mathrm{i}E_-} e_-\right|^2 \\
&= \mathrm{e}^{\mathrm{i}E_+ - \mathrm{i}E_-^*} e_+ + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_+^* + \mathrm{i}E_-} e_- \\
&= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\mathrm{k}\varepsilon}{2} + \varepsilon^* \frac{1}{2} - \frac{\mathrm{k}\varepsilon^*}{2} \\
&= \mathrm{Re}(\varepsilon) - \mathrm{j}\,\mathrm{Im}(\varepsilon)
\end{aligned} \tag{4.21}$$

mit

$$\varepsilon = \mathrm{e}^{\mathrm{i}E_+ - \mathrm{i}E_-^*}. \tag{4.22}$$

Da die Realität von $|\mathrm{e}^{\mathrm{i}E\,t}|^2$ gefordert wurde, muss $\mathrm{Im}(\varepsilon) = 0$ gelten. Dies ist gegeben, wenn E unabhängig von k ist, also keinen k-imaginären Anteil hat. Für die Wahrscheinlichkeitsdichte ergibt sich damit

$$|\psi(t)|^2 = \mathrm{e}^{\mathrm{Im}(E_+)+\mathrm{Im}(E_-)}|\psi(0)|^2. \tag{4.23}$$

Im Vergleich zur Wahrscheinlichkeitsdichte des komplexen Systems in Abschnitt 3.1 lässt sich erkennen, dass sich diese im Bikomplexen nur um einen additiven Phasenfaktor ändert.

Wahrscheinlichkeitserhaltung

Nachdem die Aufmerksamkeit bisher der Wahrscheinlichkeitsdichte galt, folgt nun die Betrachtung der Wahrscheinlichkeitsverteilung. Bei der Einführung des komplexen Anteils wurde in Abschnitt 3.1 ein Wahrscheinlichkeitsfluss festgestellt, wodurch die Wahrscheinlichkeit nicht mehr erhalten ist. Dieser Fluss ist über den Zufluss an Teilchen in das System bzw. deren Abfluss aus dem System heraus zu erklären. Es folgt nun dieselbe Betrachtung im Bikomplexen.

Für einen allgemeinen Hamilton-Operator mit bikomplexem Potential der Form

$$H = -\triangle + V_\mathrm{r}(x) + \mathrm{i}\,V_\mathrm{i}(x) + \mathrm{j}V_\mathrm{j}(x) + \mathrm{k}V_\mathrm{k}(x) \tag{4.24}$$

gilt für die Wahrscheinlichkeitsdichte

$$\begin{aligned}\partial_t\langle\psi|\psi\rangle &= \mathrm{i}\,\psi(-\Delta + V_\mathrm{r} - \mathrm{i}\,V_\mathrm{i} + \mathrm{j}\,V_\mathrm{j} - \mathrm{k}V_\mathrm{k})\,\psi^* \\ &\quad - \mathrm{i}\,\psi^*(-\Delta + V_\mathrm{r} + \mathrm{i}V_\mathrm{i} + \mathrm{j}V_\mathrm{j} + \mathrm{k}V_\mathrm{k}) \\ &= 2(V_\mathrm{i} + \mathrm{j}\,V_\mathrm{k})\,\rho + \mathrm{div}\,\mathrm{j}.\end{aligned} \tag{4.25}$$

Somit unterscheidet sich die Wahrscheinlichkeitserhaltung im Bikomplexen von der Komplexen aus Abschnitt 3.1 durch eine Abhängigkeit vom k-Potential. Dieser Fall tritt im später behandelten Dreimuldensystem auf, da dort ein k-Potential zur analytischen Fortsetzung angehängt wird. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung im Zweimuldensystem, dessen Betrachtung ebenfalls folgt, sollte sich hingegen im Bikomplexen nicht von der im Komplexen unterscheiden, da nur ein j-Potential angehängt wird.

5 Ergebnisse

In den vorherigen Kapiteln wurden die Grundlagen gelegt, um Mehrmuldensysteme im bikomplexen Raum mit symmetrisierbaren Hamilton-Operatoren zu beschreiben. In Referenz [9] wurden das symmetrisierte Zwei- und Dreimuldensystem beschrieben und die Eigenschaften dieser Systeme untersucht. Ein solches Mehrmuldenpotential ist schematisch in Abbildung 5.1 dargestellt. Hierbei gibt es mehrere freie Parameter. Zum einen kann jede Onsite-Energie ϵ_i, die die Energie eines Teilchens am Grund einer Mulde beschreibt, beliebig variiert und somit der Realteil des Potentials beeinflusst werden. Zum andern gibt es in jeder Mulde einen Gewinn- oder Verlustparameter γ_i, der den Imginärteil des Potentials beeinflusst. Dabei werden je nach Wahl des Hilbertraums $\epsilon_i, \gamma_i \in \mathbb{R}$ oder $\epsilon_i, \gamma_i \in \mathbb{C}$ gewählt. Die Tunnelrate $J \in \mathbb{R}$ beschreibt die Potentialbarriere zwischen den einzelnen Mulden.

Mathematisch wird ein solches N-dimensionales Mehrmuldensystem beschrieben durch einen Hamilton-Operator der Form

$$H = \begin{pmatrix} d_1 & -J & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -J & d_2 & -J & 0 & & \vdots \\ 0 & -J & d_3 & -J & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & 0 & -J & d_{N-1} & -J \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -J & d_N \end{pmatrix}, \tag{5.1}$$

wobei

$$d_i = \epsilon_i + \mathrm{i}\gamma_i + g|\psi_i|^2 \tag{5.2}$$

gilt. Es stehen hier die muldenspezifischen Größen aufsummiert auf der Hauptdiagonalen, während die Übergänge, die durch die Tunnelrate J bestimmt sind, auf den ersten Nebendiagonalelementen platziert sind. Hierbei ist g die Kopplungskonstante der Wechselwirkung zwischen den Atomen des BECs. Im folgenden Teil der Arbeit wird jedoch nur mit der linearen Form der GPE gearbeitet, da g über Feshbach-Resonanzen auf Null gesetzt werden kann, wie in Abschnitt 2.2 erklärt ist.

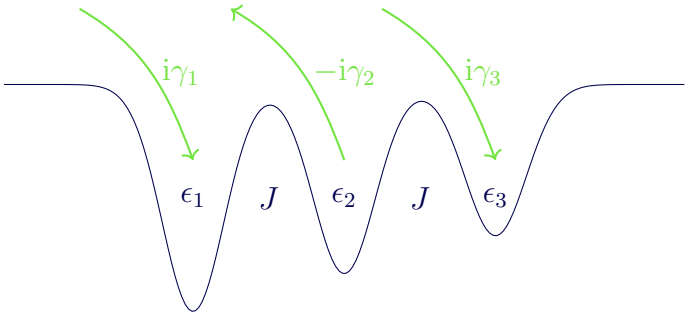

Abbildung 5.1: Schematische Darstellung eines Dreimuldensystems mit Gewinn und Verlust. Das reelle Potential, welches durch die Onsite-Energien ϵ_i bestimmt wird, ist hier in blau dargestellt. Der imaginäre Anteil des Potentials ist durch die Gewinn- oder Verlustparameter γ_i geprägt in grün eingezeichnet. Die Tunnelraten J zwischen den Mulden sind ebenfalls in blau dargestellt und beschreiben die Potentialbarrieren.

Im Folgenden werden das Drei- und Zweimuldensystem betrachtet. Bei der Betrachtung solcher Systeme im komplexen Raum wurde allerdings festgestellt, dass in bestimmten Parameterbereichen keine Lösungen mehr gefunden werden können. Daher wird zuerst die Darstellung im komplexen Raum nachvollzogen, gefolgt von einer analytischen Fortsetzung mit bikomplexen Zahlen. An dieser Stelle gilt es herauszufinden, ob die Fortsetzung überall stetige und differenzierbare Lösungen liefern kann.

5.1 Das Dreimuldensystem

Zuerst wird nun das Dreimuldensystem betrachtet, da sich das später untersuchte Zweimuldensystem charakteristisch in seinen Eigenschaften von generellen Mehrmuldenpotentialen unterscheidet. Damit bietet sich das Dreimuldensystem für die Einführung der bikomplexen Fortsetzung an.

5.1.1 Betrachtung im Komplexen

Für die Beschreibung des Dreimuldensystems im Komplexen folgt nach Gleichung (5.1) der Hamilton-Operator

$$H = \begin{pmatrix} \epsilon_1 + \mathrm{i}\gamma_1 & -J & 0 \\ -J & \epsilon_2 + \mathrm{i}\gamma_2 & -J \\ 0 & -J & \epsilon_3 + \mathrm{i}\gamma_3 \end{pmatrix}. \tag{5.3}$$

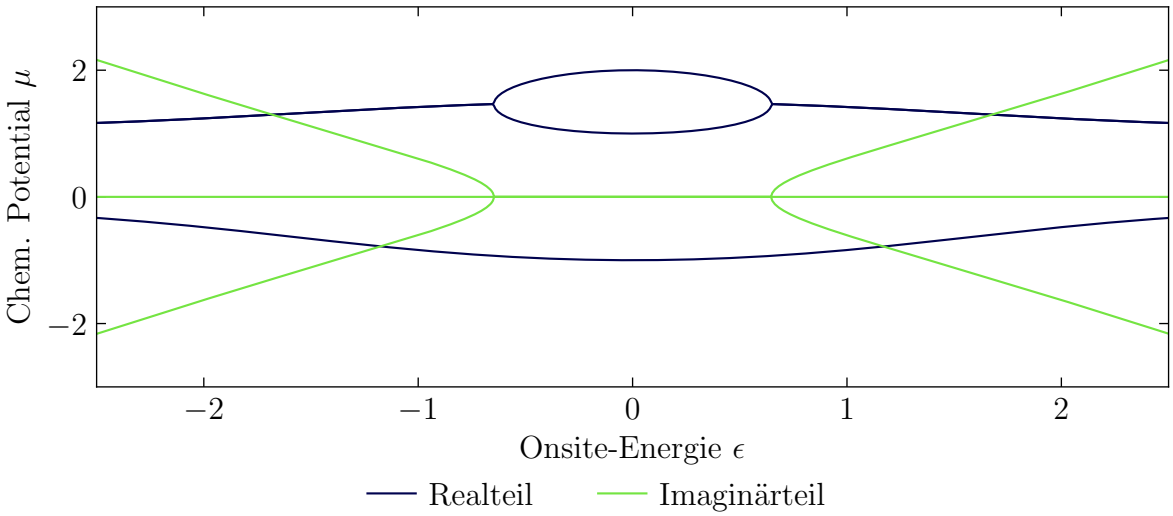

Abbildung 5.2: $\mathcal{PT}$-symmetrische Lösungen des Dreimuldensystems im komplexen Raum mit der Parametrisierung $\epsilon_1 = \epsilon_3 = \epsilon, \epsilon_2 = 0$. Die Gewinn- und Verlustparameter der Mulden sind auf $\gamma_1 = -\gamma_3$ und $\gamma_2 = 0$ gewählt. Für die Tunnelrate ist $J = 1$ gesetzt.

Für dieses System wird die SG numerisch gelöst. Dazu wird die Python-Bibliothek `numpy` zum Bestimmen der Eigenwerte, die hier dem chemischen Potential μ entsprechen, verwendet.

$\mathcal{PT}$-symmetrische Lösungen

Zu Beginn der detaillierteren Betrachtung des Dreimuldensystems im komplexen Raum wird als einfaches Beispiel der $\mathcal{PT}$-symmetrische Fall untersucht. Hierbei müssen der Realteil des Potentials symmetrisch und der Imaginärteil antisymmetrisch sein. Dies ist durch die Parametrisierung $\gamma_1 = -\gamma_3, \gamma_2 = 0$, $\epsilon_1 = \epsilon_3 = \epsilon$ und $\epsilon_2 = 0$ gegeben. Die chemischen Potentiale hierzu sind in Abbildung 5.2 dargestellt.

Hier, wie in allen folgenden Abbildungen, wird die Tunnelrate auf den Wert $J = 1$ gesetzt. Dies ist ohne Beschränkung der Allgemeinheit möglich, da durch eine geeignete Wahl der Energieskala die Tunnelrate auf beliebige Werte gesetzt werden kann. Der Übersichtlichkeit halber wird dieser Parameter in den Rechnungen jedoch enthalten bleiben.

Aus Abbildung 5.2 wird deutlich, dass es einen auf dem ganzen Definitionsbereich rein reellen Zustand gibt. Die beiden anderen chemischen Potentiale des Systems sind zueinander komplex konjugiert. An den Stellen $\epsilon = \pm 0{,}65$ kommt es zu Bifurkationen, was bedeutet, dass vom Ursprung ausgehend zwei zuvor rein reelle Zustände mit verschiedenen

Werten auf einmal denselben Realteil annehmen, dafür aber jeweils verschiedene, nicht verschwindende Imaginärteile haben.

Symmetrisierte Lösungen

Im Falle der $\mathcal{PT}$-Symmetrie gibt es jedoch keine andere Wahlmöglichkeit der Parametrisierung als die eben gezeigte. Da dies jedoch eine sehr starke Einschränkung des Systems bedeutet, folgt jetzt die Betrachtung eines symmetrisierten Dreimuldenpotentials. Für die Beschreibung des Systems wird weiterhin derselbe Hamilton-Operator (5.8) gewählt wie zuvor im $\mathcal{PT}$-symmetrischen Fall.

Für diesen allgemeineren Fall ist die Wahl der Parameter, für die das Spektrum komplex konjugiert ist, nicht mehr so einfach. Hierfür müssen neue Bedingungen an die Parameter hergeleitet werden. Um diese zu bestimmen, wird das charakteristische Polynom des Hamilton-Operators aufgestellt. Aus Gleichung (3.30) resultiert, dass das charakteristische Polynom reell sein muss, denn damit folgt, dass der Hamilton-Operator ein komplex konjugiertes Eigenwertspektrum hat. Daraus resultieren

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 0, \tag{5.4a}$$

$$\epsilon_1\gamma_2 + \gamma_1\epsilon_2 + \epsilon_2\gamma_3 + \gamma_2\epsilon_3 + \gamma_1\epsilon_3 + \epsilon_1\gamma_3 = 0, \tag{5.4b}$$

$$\gamma_1\gamma_2\gamma_3 + \gamma_1\epsilon_2\epsilon_3 + \epsilon_1\gamma_2\epsilon_3 + \epsilon_1\epsilon_2\gamma_3 - J^2(\gamma_1 + \gamma_3) = 0. \tag{5.4c}$$

Es ist zu erkennen, dass die Summe über alle Gewinn- und Verlustparameter Null sein muss.

Um eine Parametrisierung zu finden, die die Gleichungen (5.4) erfüllen, wird zuerst Gleichung (5.4b) umgeformt zu

$$\gamma_2(\epsilon_1 + \epsilon_3) + \gamma_1(\epsilon_2 + \epsilon_3) + \gamma_3(\epsilon_1 + \epsilon_2) = 0. \tag{5.5}$$

Gelöst wird das Gleichungssystem durch

$$\gamma_1 = -(\epsilon_2 - \epsilon_3)\gamma_0, \tag{5.6a}$$

$$\gamma_2 = (\epsilon_1 - \epsilon_3)\gamma_0, \tag{5.6b}$$

$$\gamma_3 = -(\epsilon_1 - \epsilon_2)\gamma_0 \tag{5.6c}$$

mit dem gemeinsamen Faktor

$$\gamma_0 = \sqrt{\frac{(\epsilon_1 - \epsilon_2)^3 + (\epsilon_2 - \epsilon_3)^3 - (\epsilon_1 - \epsilon_3)^3 + 3J^2(\epsilon_1 - \epsilon_3)}{3(\epsilon_1 - \epsilon_2)(\epsilon_2 - \epsilon_3)(\epsilon_1 - \epsilon_3)}}. \tag{5.7}$$

Hierbei sind die Lösungen für die jeweiligen γ_i nur von den Differenzen der Onsite-Energien ϵ_i abhängig, womit die Eichfreiheit der Energie erhalten bleibt. An dieser Stelle

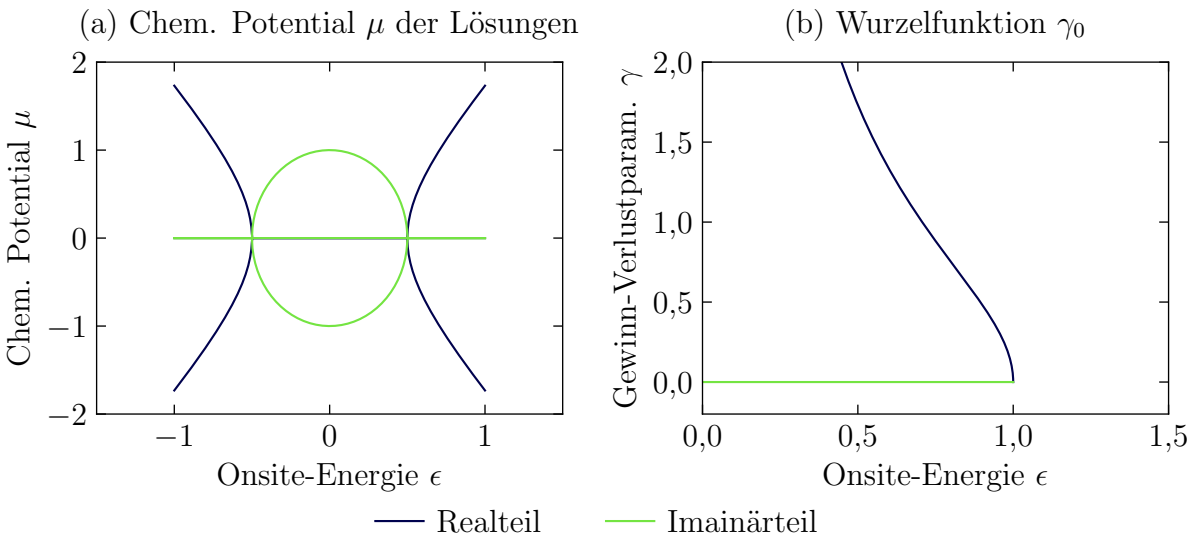

Abbildung 5.3: Analytische Lösung des Dreimuldensystems im komplexen Raum mit der Parametrisierung $\epsilon_1 = -\epsilon_3 = \epsilon, \epsilon_2 = 0$. Die Tunnelrate ist auf $J = 1$ gesetzt und die Gewinn- und Verlustparameter sind nach Gleichung (5.6) berechnet. (a) Lösungen für das chemische Potential. (b) Verlauf der Wurzelfunktion γ_0, berechnet nach Gleichung (5.7).

ist es wichtig $\gamma_0 \in \mathbb{R}$ zu setzen, sodass es nur Lösungen für positive Argumente der Wurzel gibt. Auf diese Weise wird sichergestellt, dass kein Gewinn- oder Verlustparameter selbst imaginär wird. Durch die Bedingungen (5.4) resultieren also drei Bestimmungsgleichungen für sechs Parameter, woraus folgt, dass es drei freie Parameter gibt. In diesem Fall handelt es sich dabei um einen Gewinn- und Verlustparameter γ und die Differenzen der Onsite-Energien. Jedoch sind diese aufgrund der Eichinvarianz der Energie auf zwei reduziert.

Um die GPE für diese Parametrisierung numerisch zu lösen, wird mit der Bibliothek `numpy.linalg` das charakteristische Polynom des Hamilton-Operators aufgestellt und daraus, wie oben beschrieben, ein Gleichungssystem bestimmt. Dieses wird dann mit `scipy.optimize` gelöst und in den Hamilton-Operator eingesetzt. Danach werden, wie im $\mathcal{PT}$-symmetrischen Fall die Eigenwerte mit `numpy` berechnet. Für die symmetrisierten Fälle wird also für eine beliebige Parametrisierung in ϵ_i das Gleichungssysteme für γ_i gelöst und dazu jeweils die chemischen Potentiale μ über die Onsite-Energie ϵ aufgetragen.

Zuerst wird die Parametrisierung $\epsilon_1 = -\epsilon_3 = \epsilon, \epsilon_2 = 0$ im komplexen Raum betrachtet. Die zugehörigen Eigenwerte μ sowie die Onsite-Energie ϵ sind in Abbildung 5.3 dargestellt. In Abbildung 5.3 (a) ist das chemische Potential μ als Funktion des Parameters ϵ dargestellt. Es treten hier Bifurkationen bei $\epsilon = \pm 0{,}5$ auf. Dort gehen für $|\epsilon| > 1$ die rein imaginären Lösungen in rein reelle über. Weiterhin ist die triviale, rein reelle Lösung $\mu = 0$ zu erkennen, die unabhängig von ϵ ist.

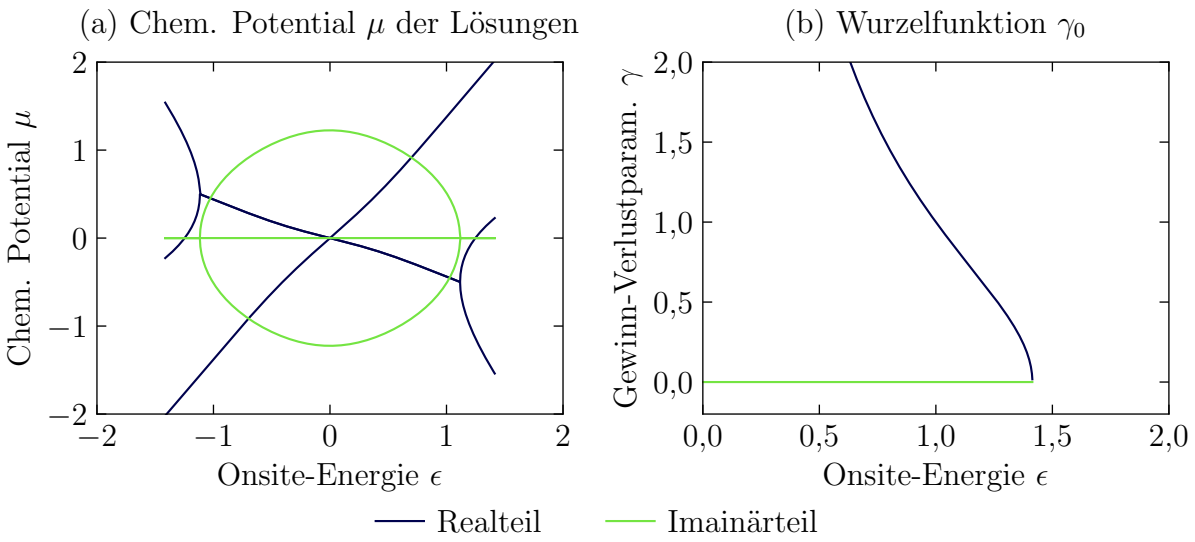

Abbildung 5.4: (a) Chemisches Potential und (b) Wurzelfunktion γ_0 wie in Abbildung 5.3 mit der Parametrisierung $\epsilon_1 = -2\epsilon_3$, $\epsilon_2 = 0$.

Es zeigt sich deutlich, dass komplex konjugierte Paare auftreten, wie es auch im $\mathcal{PT}$-symmetrischen System der Fall war. Somit zeigt sich, dass die gesetzten Bedingungen der Forderung nach physikalisch interpretierbaren Lösungen nachkommen. Es ist zudem noch eine grundlegende Symmetrie der Eigenwerte erkennbar, welche gegenteilig zu der im $\mathcal{PT}$-symmetrischen Fall ist. Aus diesem Grund wird diese Parametrisierung auch anti-$\mathcal{PT}$-symmetrisch genannt. Dies unterstreicht die Tatsache, dass $\mathcal{PT}$-Symmetrie zwar eine hinreichende, allerdings keine notwendige Bedingung für ein Spektrum mit komplex konjugierten Paaren ist.

In Abbildung 5.3 (b) ist das Verhalten der Wurzelfunktion γ_0 zu sehen. Es zeigt sich, dass im reellen Raum nur Lösungen bis $\epsilon = 1$ gefunden werden können, da hier das Argument der Wurzel in γ_0 negativ wird. Dieses Fehlen an Lösungen ist auch in Abbildung 5.3 (a) zu erkennen. Hier enden die Lösungen an den Stellen $\epsilon = \pm 1$ abrupt und es kommt zu verbotenen Bereichen.

Eine weitere mögliche Parametrisierung der Onsite-Energien ist eine stufenförmige Anordnung, also $\epsilon_1 = -2\epsilon_3 = \epsilon,\ \epsilon_2 = 0$. Die sich hierfür ergebenden Eigenwerte sind in Abbildung 5.4 gezeigt. In Abbildung 5.4 (a) sind die Eigenwerte der Hamilton-Operators in Abhängigkeit des Parameters ϵ dargestellt. Es ist auffällig, dass es auch hier einen verbotenen Bereich für $|\epsilon| > 1{,}415$ gibt. Bis zu diesen Stellen gibt es jedoch wie erwartet drei Lösungen, wovon eine wieder rein reell ist und die anderen beiden zueinander komplex konjugiert sind. Die Beträge der Realteile der komplex konjugierten Lösungen fallen konstant mit steigender Onsite-Energie ϵ bis zu den Bifurkationspunkten ab. Somit

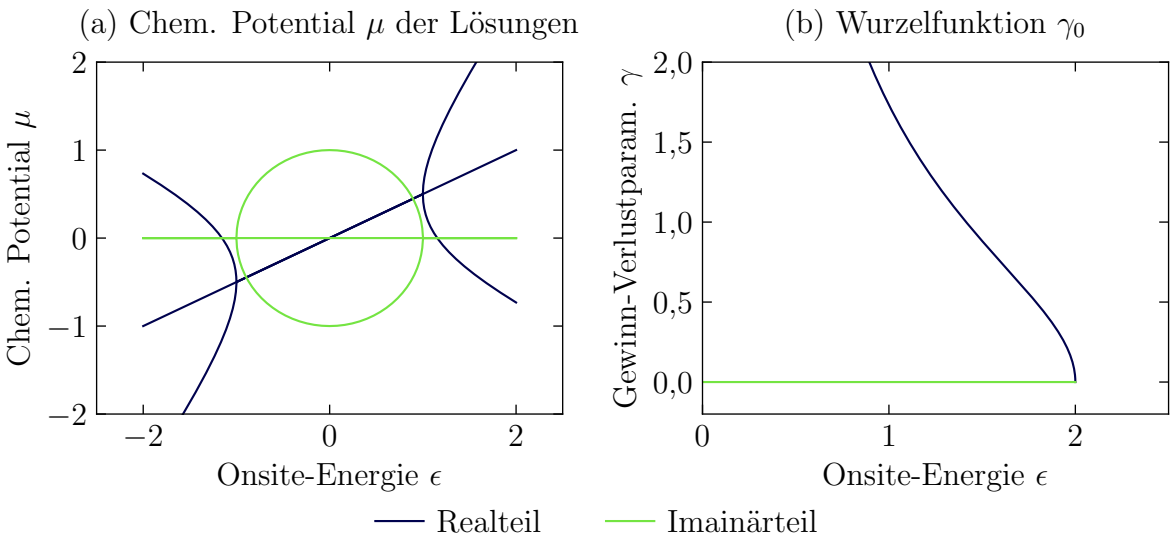

Abbildung 5.5: (a) Chemisches Potential und (b) Wurzelfunktion γ_0 wie in Abbildung 5.3 mit der Parametrisierung $\epsilon_1 = 2\epsilon_2 = \epsilon$.

liegen diese nicht mehr auf einer Höhe mit den Bifurkationspunkten des Imaginärteils. In Abbildung 5.4 (b) ist der Verlauf der Wurzelfunktion γ_0 zu sehen. Hier fällt das Enden der Existenz reeller Lösungen ebenfalls mit dem Beginn des verbotenen Bereiches in Abbildung 5.4 (a) zusammen.

Eine weitere Möglichkeit zur Parametrisierung ist ein gespiegelter stufenförmiger Verlauf der Mulden, das heißt die erste Mulde ist die höchste und die dritte Mulde die tiefste. Diese Parametrisierung gelingt beispielsweise mit $\epsilon_1 = 2\,\epsilon_2$ und $\epsilon_3 = 0$. Die zugehörigen Eigenwerte in Abhängigkeit von ϵ sowie der Verlauf von γ_0 sind in Abbildung 5.5 zu sehen. Auch hier ist in Abbildung 5.5 (b) der Verlauf der Wurzel γ_0 zu erkennen, deren Realteil stets abfällt und bei $\epsilon = \pm 2$ verschwindet. Der Imaginärteil ist stets Null. Mit dem Verschwinden der reellen Lösung in Abbildung 5.5 (b) geht auch die Existenz der Lösungen in Abbildung 5.5 (a) verloren.

Im Bereich $-2 < \epsilon < 2$, wo Lösungen gefunden werden können, gibt es wie bei den anderen Parametrisierungen eine rein reelle Lösung und zwei komplex konjugierte Lösungen. Ab $\epsilon = \pm 1$ sind nach einem Bifurkationspunkt alle drei Lösungen reell.

5.1.2 Betrachtung im Bikomplexen

Um eine bikomplexe analytische Fortsetzung der komplexen Lösungen aus Gleichung (5.6) für das Dreimuldensystem zu finden, muss der Raum in dem Lösungen gesucht werden

vergrößert werden. Bisher wurde bei allen betrachteten Parametrisierungen ein verbotener Bereich gefunden, welcher bisher unzugänglich war und den es nun zu erschließen gilt.

Aus Gleichung (5.6) geht hervor, dass bisher die Beschränkung durch $\gamma_0 \in \mathbb{R}$ entsteht, was bedeutet, dass das Argument der Quadratwurzel positiv sein muss. Um diese Einschränkung aufzuheben wird von nun an $\gamma_0 \in \mathbb{C}_\mathrm{j}$ gesetzt, sodass auch negative Argumente zugelassen sind. Dadurch, dass sich der Gewinn- bzw. Verlustparameter γ nun im k-Komplexen befindet, wird das gesamte Potential bikomplex. Der dadurch entstandene Hamilton-Operator ist gegeben durch

$$H = \begin{pmatrix} \epsilon_1 + \mathrm{i}(\gamma_1 + \mathrm{j}\gamma_{\mathrm{j}_1}) & -J & 0 \\ -J & \epsilon_2 + \mathrm{i}(\gamma_2 + \mathrm{j}\gamma_{\mathrm{j}_2}) & -J \\ 0 & -J & \epsilon_3 + \mathrm{i}(\gamma_3 + \mathrm{j}\gamma_{\mathrm{j}_3}) \end{pmatrix}. \tag{5.8}$$

Für die Betrachtung der Eigenwertspektren wird das System in die idempotente Basis $e_\pm$ transformiert. Dazu kann der Hamilton-Operator in seinen Realteil und seine Imaginärteile zerlegt und nach Gleichung (4.13) in die Basis umgerechnet werden. Für den resultierenden Hamilton-Operator $H = H_+\, e_+ + H_-\, e_-$ ergeben sich

$$H_+ = \begin{pmatrix} \epsilon_1 + \gamma_{\mathrm{j}_1} + \mathrm{i}\gamma_1 & -J & 0 \\ -J & \epsilon_2 + \gamma_{\mathrm{j}_2} + \mathrm{i}\gamma_2 & -J \\ 0 & -J & \epsilon_3 + \gamma_{\mathrm{j}_3} + \mathrm{i}\gamma_3 \end{pmatrix}, \tag{5.9a}$$

$$H_- = \begin{pmatrix} \epsilon_1 - \gamma_{\mathrm{j}_1} + \mathrm{i}\gamma_1 & -J & 0 \\ -J & \epsilon_2 - \gamma_{\mathrm{j}_2} + \mathrm{i}\gamma_2 & -J \\ 0 & -J & \epsilon_3 - \gamma_{\mathrm{j}_3} + \mathrm{i}\gamma_3 \end{pmatrix}. \tag{5.9b}$$

Auf diese Weise ist es möglich, den bikomplexen Hamilton-Operator H in zwei komplexe Hamilton-Operatoren $H_\pm$ aufzuspalten, deren Eigenwerte $\mu_\pm$ mit bekannten Mitteln berechnet werden können. Um die Eigenwerte $\mu_\pm$ wieder in die eigentliche bikomplexe Darstellung zurückzutransformieren, werden diese mit ihrem jeweiligen Basiselement multipliziert und dann addiert, wie es schon bei den Hamilton-Operatoren gemacht wurde. Mit diesem Vorgehen resultiert eine Gleichung, die jeweils die Real- und die verschiedenen Imaginärteile addiert und mit der passenden imaginären Einheit multipliziert,

$$\begin{aligned} \mu &= \mu_-\, e_- + \mu_+\, e_+ \\ &= (\mu_-^\mathrm{r} + \mathrm{i}\mu_-^\mathrm{i})\,\frac{1+\mathrm{ij}}{2} + (\mu_+^\mathrm{r} + \mathrm{i}\mu_+^\mathrm{i})\,\frac{1-\mathrm{ij}}{2} \\ &= \frac{1}{2}\,(\mu_+^\mathrm{r} + \mu_-^\mathrm{r}) + \mathrm{i}\frac{1}{2}\,(\mu_+^\mathrm{i} + \mu_-^\mathrm{i}) + \mathrm{j}\frac{1}{2}\,(\mu_+^\mathrm{i} - \mu_-^\mathrm{i}) + \mathrm{k}\frac{1}{2}\,(\mu_+^\mathrm{r} - \mu_-^\mathrm{r}). \end{aligned} \tag{5.10}$$

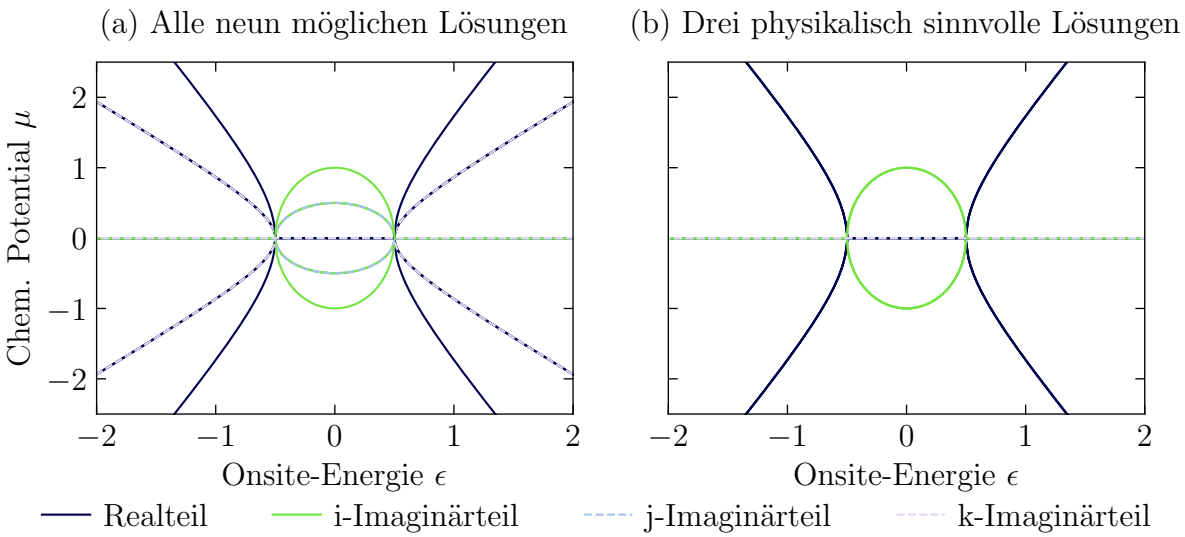

Abbildung 5.6: Analytische Lösungen des Dreimuldensystems im bikomplexen Raum mit der Parametrisierung $\epsilon_1 = -\epsilon_3 = \epsilon, \epsilon_2 = 0$. Die Tunnelrate ist auf $J = 1$ gesetzt und die Gewinn- und Verlustparameter sind nach Gleichung (5.6) berechnet. (a) Alle neun mathematisch möglichen und (b) die physikalisch sinnvollen Lösungen, die die Bedingung $\mu_k = 0$ erfüllen und somit ein komplex konjugiertes Eigenspektrum haben.

Im Folgenden werden dieselben Parametrisierungen wie zuvor im Komplexen gewählt und mit den bereits berechneten Daten verglichen. So soll überprüft werden, inwieweit die analytische Fortsetzung es ermöglicht Lösungen im bisher verbotenen Bereich zu finden.

Die zuerst betrachtete Parametrisierung ist gegeben durch $\epsilon_1 = -\epsilon_3 = \epsilon$ und $\epsilon_2 = 0$. Im ersten Schritt wurden die Eingenwerte der Matrizen in Gleichung (5.9) berechnet und danach mit Gleichung (5.10) in die einzelnen Komponenten des Realteils und der Imaginärteile aufgeteilt. Die ermittelten Eigenwerte sind in Abhängigkeit von ϵ in Abbildung 5.6 dargestellt. Dort sind zuerst einmal dieselben Lösungen zu sehen wie in Abbildung 5.3, jedoch ohne den verbotenen Bereich. Bemerkenswerterweise gehen die Lösungen nahtlos in diesem Bereich weiter, ohne dass der Übergangspunkt in irgendeiner Weise ausgezeichnet ist.

Zusätzlich zu diesen drei bereits bekannten Lösungen konnten nun auch sechs weitere gefunden werden, was aus der höheren Dimension des bikomplexen Raumes im Vergleich zum Komplexen resultiert. Mit dem Übergang in die idempotente Basis wurde der bikomplexe Hamilton-Operator in zwei unabhängige Operatoren $H_\pm$ geteilt. Diese liefern jeweils drei Lösungen, die anschließend nach Gleichung (5.10) rekombiniert werden. Da die idempotente Basis jedoch aus Nullteilern besteht sind die Lösungen $\mu_\pm$ in vollständig

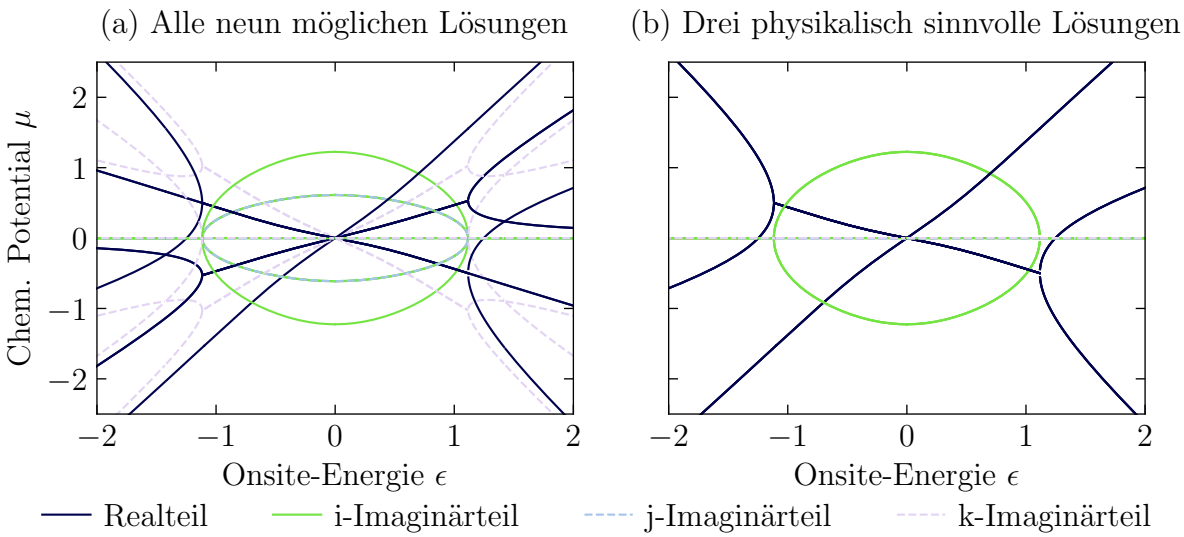

Abbildung 5.7: Chemische Potentiale für (a) alle möglichen und (b) die physikalisch sinnvollen Lösungen wie in Abbildung 5.6 mit der Parametrisierung $\epsilon_1 = -2\epsilon_3 = \epsilon, \epsilon_2 = 0$.

separierten Räumen und es gib keine mathematische Regel die besagt, welche Zustände zusammen kombiniert werden müssen, um die Eigenwerte des bikomplexen Hamilton-Operators zu erhalten. Auf diese Weise ergeben sich $3 \cdot 3$ mögliche Lösungen für das Dreimuldensystem.

Durch Einsetzen der Bedingungen in Gleichung (5.10) erhält man die Lösungen, die dem Anspruch an ein reelles oder ein bezüglich i komplex konjugiertes Eigenwertspektrum genügen. Dies sind ausschließlich die Lösungen, die bereits im Komplexen gefunden werden konnten mit deren Fortsetzungen im zuvor verbotenen Bereich. Diese Parametrisierung stellt zudem den Sonderfall der Anti-$\mathcal{PT}$-Symmetrie dar. Durch die Tatsache, dass hier die beiden Matrizen H_+ und H_- dieselben Eigenwerte haben, ist das Spektrum vollkommen symmetrisch.

Als nächstes wird die Parametrisierung $\epsilon_1 = -2\epsilon_3 = \epsilon$ und $\epsilon_2 = 0$ betrachtet, welche in Abbildung 5.7 zu sehen ist. Wie auch schon im vorherigen Beispiel können hier ohne Probleme auf dem gesamten Definitionsbereich Lösungen gefunden werden. In Abbildung 5.7 (a) sind alle neun mathematisch möglichen Lösungen zu sehen. In Abbildung 5.7 (b) sind nur diejenigen Lösungen gezeigt, die der Bedingung nach einem rein reellen oder komplex konjugierten Spektrum nachkommen. Auch hier laufen die chemischen Potentiale unbeeinflusst weiter.

In dieser Parametrisierung kam es bei der numerischen Berechnung der Wurzelfunktion γ_0 zu Vertauschungen der Eigenwerte. Aus diesem Grund wurden die Lösungen in Abbildung 5.7 per Hand sortiert. Die Umsortierungen fanden jeweils an den Übergängen

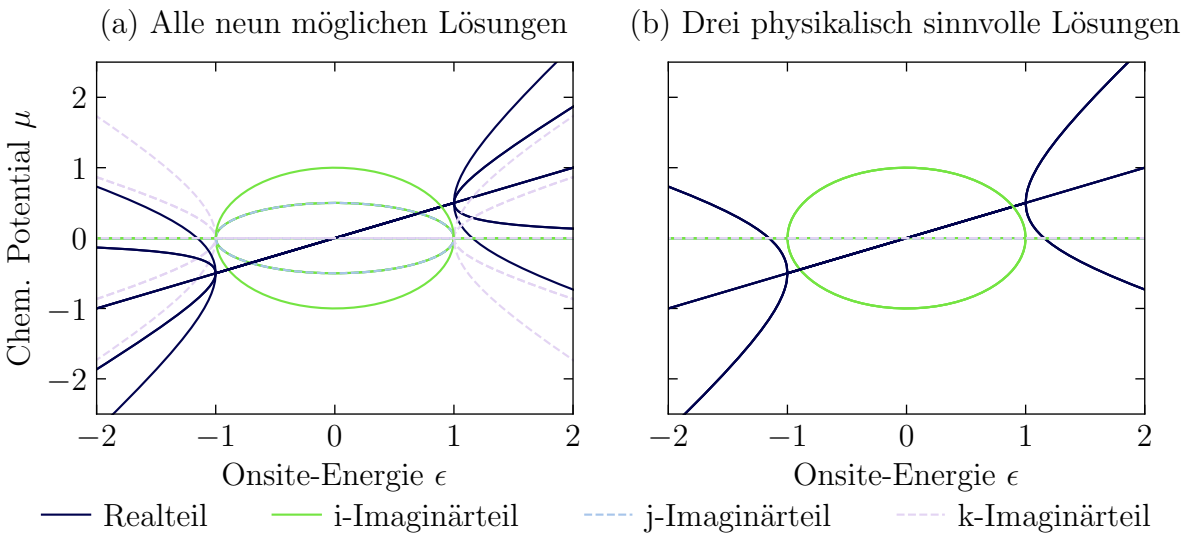

Abbildung 5.8: Chemische Potentiale für (a) alle möglichen und (b) die physikalisch sinnvollen Lösungen wie in Abbildung 5.6 mit der Parametrisierung $\epsilon_1 = 2\epsilon_2 = \epsilon, \epsilon_3 = 0$.

in den verbotenen Bereich bei $|\gamma| = 1.415$ statt, da hier γ_0 von rein reell zu rein imaginär wechselt und diese Werte den vorherigen nicht mehr zugeordnet werden können. Bei der Umsortierung ist darauf zu achten, dass der Realteil und der k-Imaginärteil, sowie der i- und der j-Imaginärteil jeweils gleich sortiert sein müssen, da sie je aus den gleichen Werten berechnet werden. Des weiteren soll der Verlauf der einzelnen Eigenwerte stetig und bis auf eine endliche Anzahl an Bifurkationspunkten differenzierbar sein.

Die letzte betrachtete Parametrisierung ist gegeben durch $\epsilon_1 = 2\epsilon_2 = \epsilon$ und $\epsilon_3 = 0$, deren zugehörige Eigenwerte in Abbildung 5.8 zu finden sind. Auch mit dieser Parametrierung lässt sich die problemlose analytische Fortsetzung zeigen. Wie in Abbildung 5.8 (a) zu sehen ist, gibt es auch hier keine verbotenen Bereiche und die chemischen Potentiale sind weiterhin stetig. In Abbildung 5.8 (b) sind wieder die Lösungen gezeigt, die ein komplex konjugiertes Spektrum aufweisen und genau den Lösungen entsprechen, die in Abbildung 5.5 gefunden wurden.

5.2 Das Zweimuldensystem

Im folgenden Teil der Arbeit wird das Zweimuldensystem betrachtet. Analog zum vorherigen Abschnitt 5.1 wird dieses System zuerst im komplexen Raum untersucht, wobei auf die analytischen Methoden zur Lösung der GPE eingegangen wird. Analog zu Referenz [9] wird später gezeigt, dass es hier ebenfalls zu verbotenen Bereichen kommt, weshalb sich der komplexen Betrachtung die bikomplexe anschließt.

Hier gilt es zum einen herauszufinden, ob auch im Zweimuldensystem in den verbotenen Bereichen Lösungen gefunden werden können. Zum anderen wird betrachtet, inwieweit sich die Lösungsgleichungen vom $\mathcal{PT}$-symmetrischen Fall unterscheiden, wenn sich die Wahl der Parametrisierung nur geringfügig ändert. Diese Ergebnisse können anschließend genutzt werden um den exzeptionellen Punkt des Zweimuldensystems nahe der $\mathcal{PT}$-symmetrischen Parametrisierung zu umkreisen. Da diese Umkreisung jedoch zwangsläufig durch den verbotenen Bereich verläuft, wird hier die analytische Fortsetzung genutzt. Es soll überprüft werden, ob hier wie in Referenz [20] ein Vertauschen der Zustände beobachtet werden kann.

5.2.1 Betrachtung im Komplexen

Im Folgenden wird das Zweimuldensystem, welches im Komplexen analog zum Dreimuldensystem beschrieben wird, betrachtet. Der Hamilton-Operator (5.1) zur linearen GPE dieses Systems lautet

$$H = \begin{pmatrix} \epsilon_1 + \mathrm{i}\gamma_1 & -J \\ -J & \epsilon_2 + \mathrm{i}\gamma_2 \end{pmatrix}. \tag{5.11}$$

Dieser Operator hat einen leeren Kern für $\gamma_1, \gamma_2 \neq 0$, was bedeutet, dass es keine Nulllösung gibt, wie sie im Dreimuldensystem auftritt. Des weiteren hat das Zweimuldensystem zu keinem Zeitpunkt zwei rein reelle Eigenwerte, außer im Spezialfall der $\mathcal{PT}$-Symmetrie.

$\mathcal{PT}$-symmetrische Lösungen

Für das Zweimuldensystem bedeutet $\mathcal{PT}$-Symmetrie, dass die Zuflüsse betragsmäßig gleich groß, jedoch mit unterschiedlichen Vorzeichen gewählt werden müssen, also $\gamma_1 = -\gamma_2 = \gamma$. Die eine Mulde besitzt also einen Gewinn von γ, die andere einen Verlust von γ. Somit ist das komplexe Potential antisymmetrisch. Die Onsite-Energien müssen im $\mathcal{PT}$-symmetrischen Fall gleich gewählt werden, sodass der Realteil des Potentials symmetrisch ist.

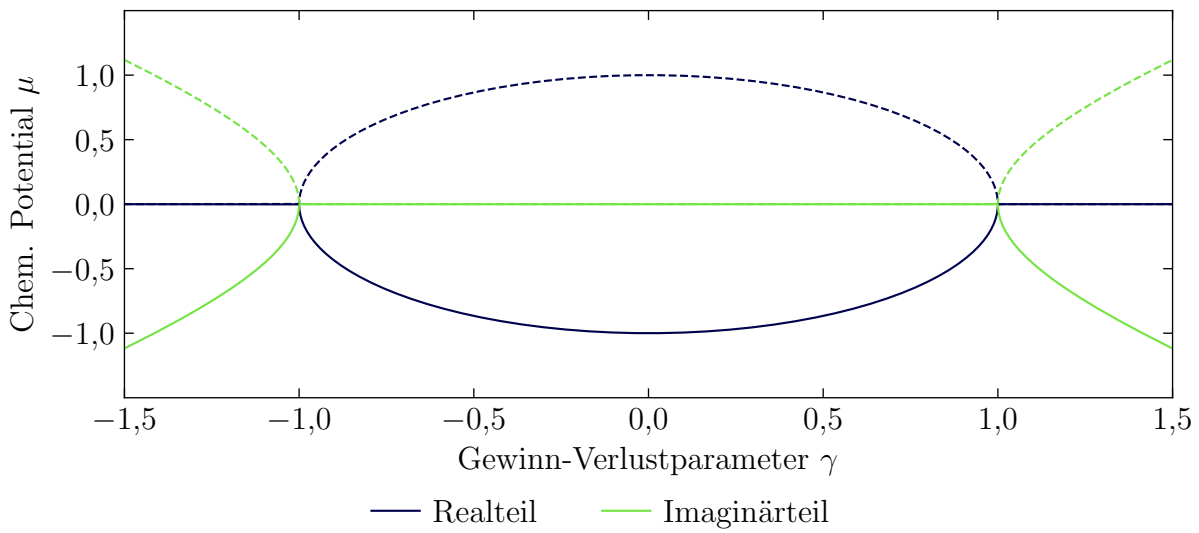

Abbildung 5.9: $\mathcal{PT}$-symmetrische Lösungen des Zweimuldensystems im komplexen Raum mit der Parametrisierung $\gamma_1 = -\gamma_2 = \gamma$. Die Tunnelrate ist auf $J = 1$ gesetzt und die Onsite-Energien sind gegeben durch $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0$. Diese Lösungen wurden analytisch mit Gleichung (5.12) berechnet und sind in verschiedenen Linienstilen dargestellt.

Dieses System lässt sich analytisch lösen. Auf diese Weise ergeben sich stationäre Lösungen zu den Eigenwerten

$$\mu = \pm\sqrt{J^2 - \gamma^2} \tag{5.12}$$

für wechselwirkungsfreie BECs im Zweimuldensystem (5.11).

Graphisch ist dieses Spektrum in Abbildung 5.9 dargestellt. Es ist zu erkennen, dass, wie nach Gleichung (3.19) erwartet, die gefundenen Lösungen zueinander komplex konjugiert sind. Im Bereich $|\gamma| < 1$ sind diese rein reell und symmetrisch bezüglich der x-Achse. Für die Bereiche $|\gamma| > 1$ sind die Lösungen für μ rein imaginär und komplex konjugiert zueinander. Somit liegen bei $|\gamma| = 1$ Bifurkationspunkte vor. Des Weiteren ist das Eigenwertspektrum punktsymmetrisch am Ursprung und die beiden Realteile bilden einen Einheitskreis, wie es nach der analytischen Lösung zu erwarten war, da $\mu^2 + \gamma^2 = 1$ gilt.

Symmetrisierte Lösungen

Um im allgemeineren Fall eines symmetrisierten Hamilton-Operators ein komplex konjugiertes Eigenwertspektrum zu erhalten, müssen Bedingungen an die Parameter des Systems gestellt werden, die durch eine Betrachtung des charakteristischen Polynoms

hergeleitet werden. Analog zum Dreimuldensystem wird das charakteristische Polynom des Zweimuldensystems aufgestellt,

$$\epsilon_1\epsilon_2 - \gamma_1\gamma_2 + J^2 + \mathrm{i}(\epsilon_1\gamma_2 + \epsilon_2\gamma_1) - \mu\left[(\epsilon_1 + \epsilon_2) + \mathrm{i}(\gamma_1 + \gamma_2)\right] + \mu^2 = 0. \tag{5.13}$$

Auch hier gilt die Forderung aus Gleichung (3.30), sodass die Imaginärteile der Koeffizienten verschwinden müssen, wodurch sich die zwei Bestimmungsgleichungen für die drei freien Parameter $\gamma_1, \gamma_2, (\epsilon_1 - \epsilon_2)$ ergeben,

$$\gamma_1 + \gamma_2 = 0, \tag{5.14a}$$

$$\epsilon_1\gamma_2 + \epsilon_2\gamma_1 = 0. \tag{5.14b}$$

An dieser Stelle zeigt sich nun jedoch sehr deutlich ein Unterschied zwischen dem Zwei- und dem Dreimuldensystem. Die Gleichung (5.14a) des Zweimuldensystems kann nur mit der trivialen Lösung $\gamma_1 = -\gamma_2$ erfüllt werden, wohingegen es für Gleichung (5.4a) des Dreimuldensystems unendlich viele mögliche Parametrisierungen gibt. Es kann hier also nur im $\mathcal{PT}$-symmetrischen Fall ein komplex konjugiertes Spektrum auftreten. Wie in Referenz [9] gezeigt lässt sich jedoch immer eine reelle Lösung finden, wenn Gleichung (5.13) gewählt wird. Damit wird Gleichung (5.14a) umgangen.

Für $J \neq 0$ gibt es somit nur die Möglichkeit die Differenz $\epsilon_1 - \epsilon_2$ so zu wählen, dass

$$\epsilon_1 - \epsilon_2 = \pm\mathrm{i}(\gamma_1 + \gamma_2)\sqrt{1 + \frac{J^2}{\gamma_1\gamma_2}}, \tag{5.15}$$

wobei $-J^2 < \gamma_1\gamma_2 < 0$ gelten muss. Die Onsite-Energien werden zu

$$\epsilon_1 = \frac{\epsilon_0}{2}, \quad \epsilon_2 = -\frac{\epsilon_0}{2} \tag{5.16a}$$

mit

$$\epsilon_0 = (\gamma_1 + \gamma_2)\sqrt{-\frac{J^2}{\gamma_1\gamma_2} - 1} \tag{5.16b}$$

gewählt.

Hieraus gehen nun zwei Fälle für das Potential hervor. Zum einen $\epsilon_1 < \epsilon_2$ und zum anderen $\epsilon_1 > \epsilon_2$. Jedem dieser beiden reellen Potentiale kann nun ein imaginäres Potential zugeordnet werden. Auch hierbei gibt es zwei Fälle $\gamma_1 < \gamma_2$ und $\gamma_1 > \gamma_2$.

Als allgemeine Lösung für das Eigenwertproblem ergibt sich demnach

$$\mu = \frac{1}{2}\left[(\epsilon_1 + \epsilon_2) + \mathrm{i}(\gamma_1 + \gamma_2) \pm \sqrt{[(\epsilon_1 - \epsilon_2) + \mathrm{i}(\gamma_1 - \gamma_2)]^2 + 4J^2}\right]. \tag{5.17}$$

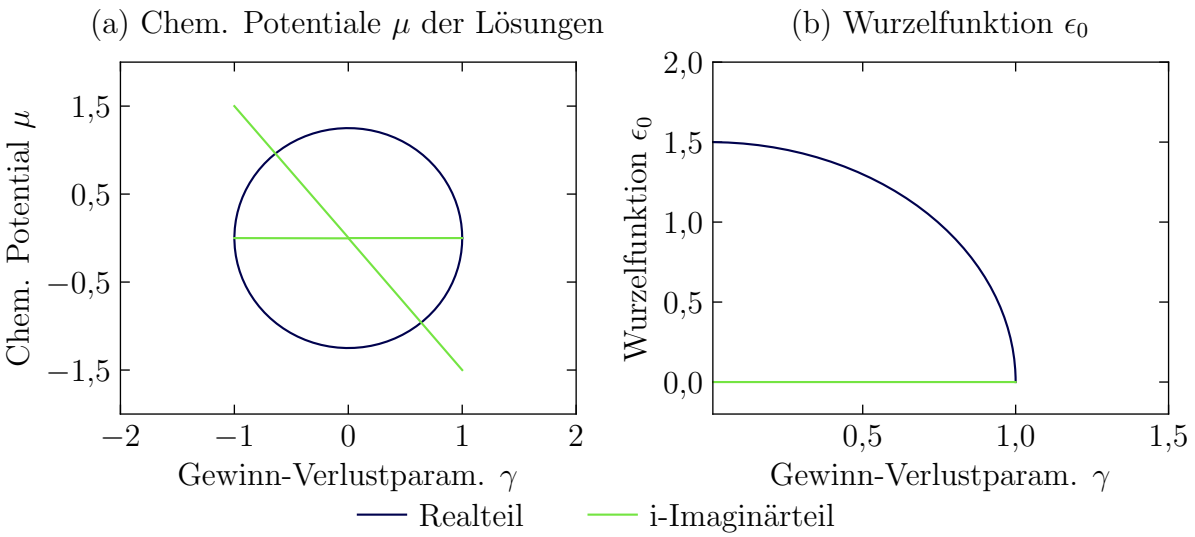

Abbildung 5.10: Analytische Lösung des Zweimuldensystems im bikomplexen Raum mit der Parametrisierung $-\gamma_1/2 = 2\gamma_2 = \gamma$. Die Tunnelrate ist auf $J = 1$ gesetzt und die Onsite-Energien sind nach Gleichung (5.16) berechnet. (a) Spektrum des chemischen Potentials. (b) Wurzelfunktion ϵ_0, welche die Onsite-Energien bestimmt.

Die Energien für ein symmetrisiertes Potential mit der Parametrisierung $-\gamma_1/2 = 2\gamma_2 = \gamma$ sind in Abbildung 5.10 dargestellt. Das Energiespektrum des Systems ist in Abbildung 5.10 (a) gezeigt. Es lässt sich erkennen, dass eine Lösung auf dem Definitionsbereich rein reell ist, während der Imaginärteil der zweiten Lösung bei steigender Onsite-Energie ϵ konstant abfällt. Bei $|\gamma| = 1$ enden die Lösungen abrupt. Betrachtet man nun Abbildung 5.10 (b), so lässt sich erkennen, dass die Wurzelfunktion ϵ_0, die die Onsite-Energien bestimmt, ab einem Wert von $|\gamma| = 1$ keine Lösungen mehr besitzt. Bis hierhin gibt es einen mit steigenden ϵ_0 abfallenden Realteil, der jedoch für negative Argumente der Wurzelfunktion verschwindet.

5.2.2 Betrachtung im Bikomplexen

Nun wird die analytische Fortsetzung des Zweimuldensystems betrachtet. Da hier ϵ und nicht, wie zuvor im Dreimuldensystem γ parametrisiert wird, muss ein j-Potential angehängt werden. Im letzten Abschnitt 5.2.1 wurde erkannt, dass die Lösungen über γ parametrisiert sind und von der Wurzelfunktion (5.16b) abhängen. Wie im Dreimuldensystem gilt es den verbotenen Bereich zu erschließen, was konkret bedeutet $\epsilon_0 \in \mathbb{C}$ zu wählen. Auf diese Weise wird das Zweimuldensystem um ein j-komplexes Potential erweitert, während dem Dreimuldensystem ein k-komplexes Potential angehängt wurde.

Der Hamilton-Operator in Gleichung (5.11) wird also zu

$$H = \begin{pmatrix} \epsilon_1 + \mathrm{j}\epsilon_{\mathrm{j}_1} + \mathrm{i}\gamma_1 & -J \\ -J & \epsilon_2 + \mathrm{j}\epsilon_{\mathrm{j}_2} + \mathrm{i}\gamma_2 \end{pmatrix}. \tag{5.18}$$

Für die Bestimmung des Eigenwertspektrums wird dieses analog zu Abschnitt 5.1.2 in die idempotente Basis transformiert. Damit folgen

$$H_\pm = \begin{pmatrix} \epsilon_1 + \mathrm{i}(\gamma_1 \mp \epsilon_{\mathrm{j}_1}) & -J \\ -J & \epsilon_2 + \mathrm{i}(\gamma_2 \mp \epsilon_{\mathrm{j}_2}) \end{pmatrix}. \tag{5.19}$$

Analytisch ergeben sich die Energien zu

$$\lambda_\pm = \frac{1}{2}\left(\mathrm{tr}(H_\pm) \pm \sqrt{\mathrm{tr}(H_\pm)^2 - 4\det(H_\pm)}\right) \tag{5.20a}$$

mit

$$\det(H_\pm) = (\epsilon_1 + \mathrm{i}(\gamma_1 \mp \epsilon_{\mathrm{j}_1}))(\epsilon_2 + \mathrm{i}(\gamma_2 \mp \epsilon_{\mathrm{j}_1})) - J^2, \tag{5.20b}$$

$$\mathrm{tr}(H_\pm) = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \mathrm{i}\left[\gamma_1 + \gamma_2 - (\epsilon_{\mathrm{j}_1} + \epsilon_{\mathrm{j}_2})\right]. \tag{5.20c}$$

Es werden nun die Lösungen aus Gleichung (5.16) für die Onsite-Energien des komplexen Systems eingesetzt, da auch hier gefordert wird, dass das Spektrum komplex konjugiert sein soll.

Diese analytischen Lösungen sind für das $\mathcal{PT}$-symmetrische Zweimuldensystem in Abbildung 5.11 dargestellt. In Abbildung 5.11 (a) ist das Spektrum gezeigt, wobei die Energie des einen Zustandes mit einer durchgezogenen Linie gezeichnet ist und die des anderen mit einer gestrichelten. Es lässt sich erkennen, dass für $|\gamma| < 1$ die Lösungen einen Real- und einen k-Imaginärteil besitzen. Für $|\gamma| > 1$ werden der Realteil sowie der k-Imaginärteil Null und die Lösungen sind i-j-imaginär. Demnach folgt, dass bei $|\gamma| = 1$ Bifurkationspunkte vorliegen. In Abbildung 5.11 (b) ist die Wurzelfunktion (5.16b), dargestellt. Daran lässt sich erkennen, dass die beiden Onsite-Energien ϵ_1 und ϵ_2 zu jedem Zeitpunkt denselben Wert haben. Da es aufgrund der Eichfreiheit der Energie nur auf die Differenz der Onsite-Energien zueinander ankommt, kann deren Wert hier frei auf Null gesetzt werden.

Vergleicht man nun die Ergebnisse aus Abbildung 5.11 mit denen aus Abschnitt 5.2.1, so lässt sich erkennen, dass die Onsite-Energien in beiden Fällen immer Null sind. Auch die Real- und Imaginärteile der Eigenwerte unterscheiden sich nicht, da die Hamilton-Operatoren H des Komplexen und $H_\pm$ des Bikomplexen identisch sind. Im Bikomplexen kommen jedoch noch die j- und k-imaginären Anteile hinzu. Diese sind aufgrund der Gleichheit von $H_\pm$ gleich dem Realteil und dem i-Imaginärteil.

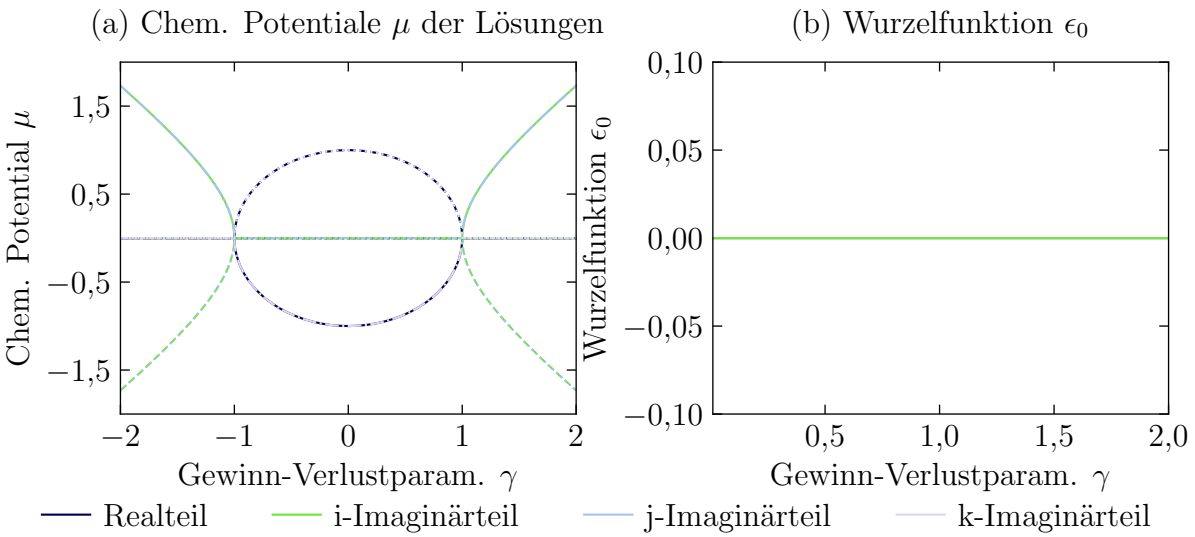

Abbildung 5.11: Analytische Lösung des $\mathcal{PT}$-symmetrischen Zweimuldensystems im Bikomplexen. Als Parametrisierung der Gewinn- und Verlustparameter ist $\gamma_1 = -\gamma_2 = \gamma$ gewählt und die Tunnelrate wurde auf $J = 1$ gesetzt. Die Onsite-Energien sind nach Gleichung (5.16) berechnet. (a) Stationäre Lösungen für das chemische Potential in verschiedenen Linienstilen, (b) die Wurzelfunktion (5.16b).

Es folgt nun analog zur komplexen Betrachtung die Parametrisierung $-\gamma_1/2 = 2\gamma_2 = \gamma$ im bikomplexen Raum. Die sich hier ergebenden Energien sind in Abbildung 5.12 dargestellt. In Abbildung 5.12 (b) ist wie auch schon im Dreimuldensystem zu sehen, dass die Wurzelfunktion (5.16b) an den Stellen $|\gamma| = 1$ nicht mehr endet wie im Komplexen, sondern rein imaginär wird. Dies resultiert in Abbildung 5.12 (a) mit dem Erschließen des zuvor verbotenen Bereichs für $|\gamma| > 1$. Hier sind alle vier mathematisch möglichen Lösungen dargestellt. An dieser Stelle ist auffällig, dass genau an dem Punkt des Überganges in den verbotenen Bereich Bifurkationen auftreten. Für $|\gamma| < 1$ gibt es zwei reelle Lösungen, die am Bifurkationspunkt zusammenfallen und für $|\gamma| > 1$ einen verschwindenden Realteil haben und zueinander komplex konjugiert sind.

Um später den exzeptionellen Punkt nahe der $\mathcal{PT}$-symmetrischen Parametrierung zu umkreisen, stellt sich die Frage, wie sich das Eigenwertspektrum verändert, wenn die Parametrisierung ein kleines Stück gegen die $\mathcal{PT}$-symmetrische verschoben ist. Dazu kann man die Steigung der Parametrisierung variieren oder aber eine parallel verschobene wählen (vergleiche Abbildung 5.16).

Zuerst wird eine Drehung der Parametrisierung um den Ursprung betrachtet, also eine stärkere Steigung der Parametrisierung gewählt. Zu Beginn wird nur eine kleine Veränderung vorgenommen; die Parametrierung $-\gamma_1 = 5\gamma_2/4 = \gamma$ ist in Abbildung 5.13

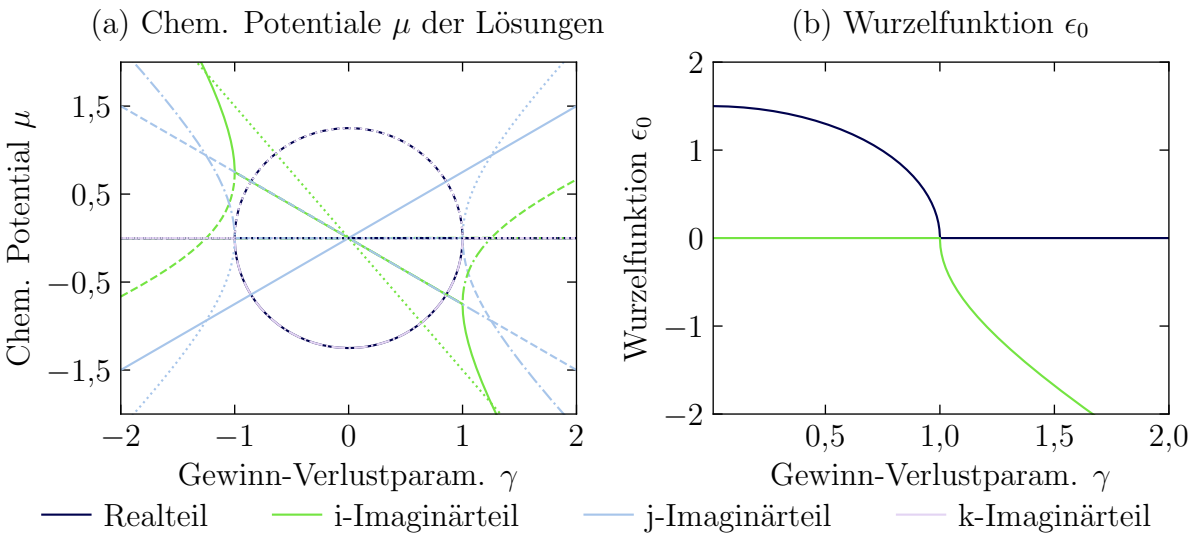

Abbildung 5.12: (a) Chemisches Potential und (b) Wurzelfunktion (5.16b) wie in Abbildung 5.11 mit der Parametrisierung $-\gamma_1/2 = 2\gamma_2 = \gamma$.

gezeigt. In Abbildung 5.13 (a) ist das Spektrum der chemischen Potentiale dargestellt, wobei auffällt, dass sich der Realteil sowie der k-Imaginärteil zum $\mathcal{PT}$-symmetrischen Fall nicht verändert haben. Jedoch sind die i- und j-imaginären Anteile der Lösung am Ursprung gedreht.

Zur genaueren Analyse werden die Verläufe der Eigenwerte einzelner Zustände verfolgt, die in verschiedenen Linienstilen in Abbildung 5.13 (a) gezeigt sind. Für den i-Imaginärteil ergibt sich, dass die beiden an der Bifurkation beteiligten Lösungen im Uhrzeigersinn gedreht sind, während es weiterhin eine Lösung gibt, die unabhängig vom i-Imaginärteil ist. Die vierte Lösung hat im $\mathcal{PT}$-symmetrischen Fall ebenfalls einen i-imaginären Anteil von Null, welcher im Uhrzeigersinn gedreht ist und konstant mit steigendem Gewinn- und Verlustparameter γ abfällt. Der j-imaginäre Anteil hat im Bereich von $|\gamma| < 1$ weiterhin zwei Lösungen die Null sind und eine Bifurkation bilden. Diese sind also im Vergleich zum $\mathcal{PT}$-symmetrischen Fall unverändert. Die anderen beiden Lösungen sind einmal im und einmal gegen den Uhrzeigersinn gedreht. Es lässt sich an dieser Stelle, ebenso wie in Abbildung 5.12 feststellen, dass sich die Bifurkationen genau am Übergang in den ursprünglich verbotenen Bereich befindet. Die Wurzelfunktion (5.16b) ist hier nicht mehr konstant Null, sondern hat zuerst einen Realteil, der auf Null abfällt und dann einen ansteigenden Imaginärteil für eine wachsende Onsite-Energie. Somit werden im gesamten betrachteten Bereich Lösungen gefunden.

Die Parametrisierung kann nun weiter gedreht werden, sodass $\gamma_1 = 2\gamma_2 = \gamma$ gilt. Dieser Fall ist in Abbildung 5.14 dargestellt. In Abbildung 5.14 (b) ist die Wurzelfunktion

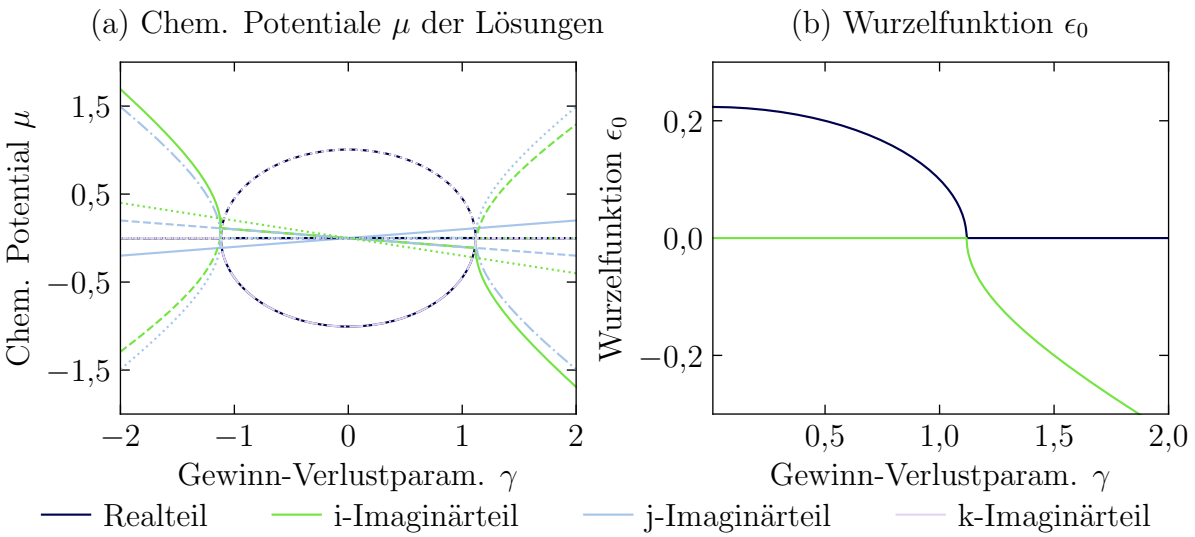

Abbildung 5.13: (a) Chemisches Potential und (b) Wurzelfunktion (5.16b) wie in Abbildung 5.11 mit der Parametrisierung $-\gamma_1 = 5\gamma_2/4 = \gamma$.

ϵ_0 gezeigt, welche qualitativ denselben Verlauf aufweist wie bei der geringen Drehung in Abbildung 5.13 (b). Jedoch hat der Verlauf des Real- und Imaginärteils hier eine stärkere Steigung. Dies spiegelt sich in Abbildung 5.14 (a) wieder. Hier verlaufen die chemischen Potentiale qualitativ gleich wie zuvor in Abbildung 5.13 (a), sind jedoch stärker verschoben.

In Abbildung 5.14 wurden die Eigenwerte wie im Dreimuldensystem sortiert, sodass diese stetig verlaufen und ein kontinuierliches Bild ergeben. Die Umsortierung fand hier ebenfalls an den Übergängen in den verbotenen Bereich statt, also bei $\gamma = 1{,}4$.

Wie zu Beginn in Abschnitt 5.2.1 beschrieben gibt es noch die Möglichkeit eine Parametrisierung parallel zur $\mathcal{PT}$-symmetrischen zu wählen. Dazu wird ein kleiner y-Achsenabschnitt gewählt. In Abbildung 5.15 ist ein solcher Fall für $-\gamma_1 = \gamma_2 - 0{,}01 = \gamma$ gezeigt. Hier ist in Abbildung 5.15 (a) das Spektrum des Systems dargestellt. Dieses unterscheidet sich durch Divergenzen der chemischen Potentiale an den Stellen $\gamma = -0{,}01$ und $\gamma = 0$ deutlich von den vorherigen Ergebnissen. Die Werte $-0{,}01 < \gamma < 0$ befinden sich ebenfalls in einem verbotenen Bereich der Parametrisierung, welcher mit den bikomplexen Zahlen nicht erschlossen werden kann. Dies zeigt sich in Abbildung 5.15 (b). Hier lässt sich erkennen, dass für $\gamma \to 0$ die Wurzelfunktion (5.16b) divergiert und somit keine sinnvollen Ergebnisse liefert. Im restlichen Bereich sehen die Werte jedoch dem $\mathcal{PT}$-symmetrischen Fall ähnlich, da die auftretenden Real- und Imaginärteile nur sehr klein sind. Dies zeichnet sich auch in den chemischen Potentialen ab. Hier sind die Lösungen für $\gamma \neq 0$ nahezu identisch mit denen im $\mathcal{PT}$-symmetrischen Fall. Der Real-

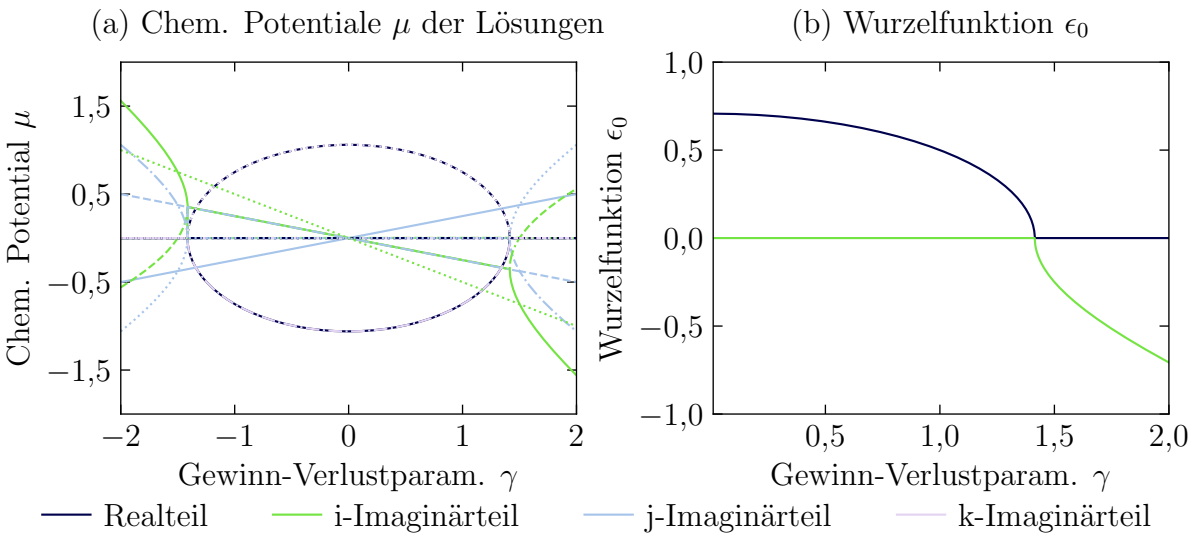

Abbildung 5.14: (a) Chemisches Potential und (b) Wurzelfunktion (5.16b) wie in Abbildung 5.11 mit der Parametrisierung $-\gamma_1 = 2\gamma_2 = \gamma$.

sowie der k-Imaginärteil sind wie beim Verdrehen der Lösungen gleich geblieben, während die i- und j-imaginären Anteile leicht verdreht sind.

5.2.3 Der exzeptionelle Punkt

Der letzte untersuchte Bereich des Zweimuldensystems in dieser Arbeit ist der exzeptionelle Punkt. Exzeptionelle Punkte treten allgemein in nicht-Hermiteschen Systemen auf und wurden erstmals von Kato eingeführt [23]. Abschnitt 3.4 zufolge kann ein Zweimuldensystem nur einen EP2 haben. Um dessen Lage im Parameterraum (γ_1, γ_2) besser verstehen zu können, ist dieser in Abbildung 5.16 schematisch dargestellt. Der blau gekennzeichnete Bereich zeigt die möglichen Parametrisierungen, zu welchen Lösungen für das Zweimuldensystem im komplexen Raum gefunden werden können. Sobald dieser Parameterbereich verlassen wird, sind bikomplexe Zahlen notwendig um eine konstante Anzahl an Lösungen zu erhalten, wie im vorherigen Abschnitt 5.2.2 gezeigt wurde.

Aus Gleichung (5.12) folgt, dass der exzeptionelle Punkt direkt am Übergang in den bikomplexen Bereich liegt, also bei $\gamma_= - \gamma_2 = J$. Diesen Punkt gilt es nun im Parameterraum (γ_1, γ_2) zu umkreisen, wobei die Parametrisierung dafür gegeben ist durch

$$\gamma_1 = r\cos(\phi), \tag{5.21a}$$

$$\gamma_2 = r\sin(\phi). \tag{5.21b}$$

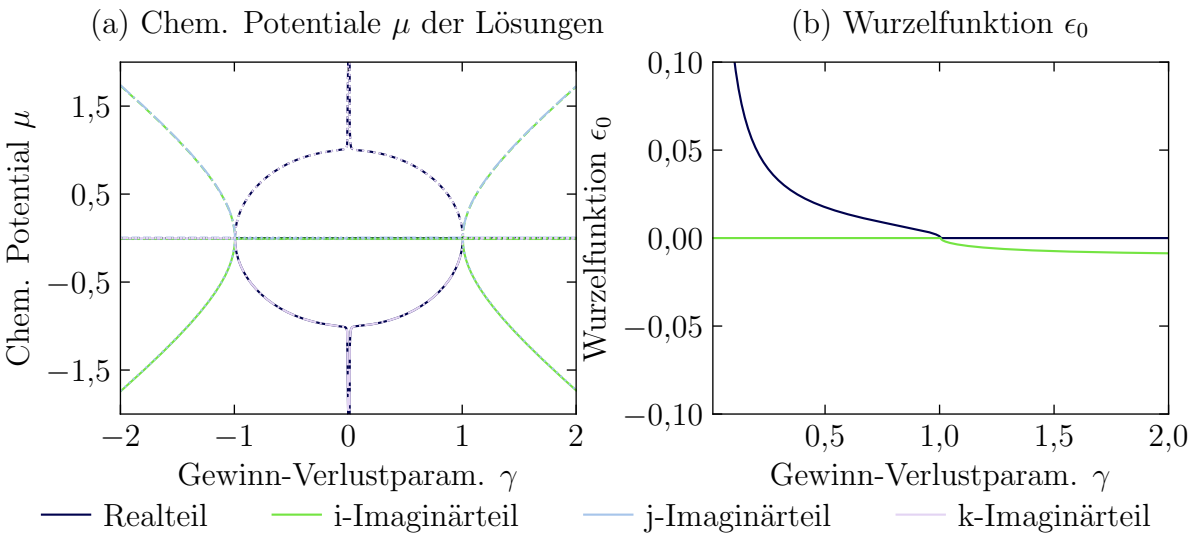

Abbildung 5.15: (a) Chemisches Potential und (b) Wurzelfunktion (5.16b) wie in Abbildung 5.11 mit der Parametrisierung $-\gamma_1 = \gamma_2 - 0{,}01 = \gamma$.

Das Problem, das an dieser Stelle auftritt ist, dass auf diese Weise nur die ein Hälfte des Kreises berechnetet werden kann. Die andere Hälfte kann mit komplexen Zahlen nicht bestimmt werden, weshalb wieder auf die analytische Fortsetzung zurückgegriffen wird. Dies bedeutet, dass für eine durchlaufene Parametrisierung die Eigenwerte wie zuvor in der idempotenten Basis im bikomplexen Raum berechnet werden müssen. Auf diese Weise ergeben sich Zustände und Eigenwerte, die analog zur Betrachtung des Zweimuldensystems berechnet wurden. Es folgt dabei jedoch auch dasselbe Sortierungsproblem, welches wie in Abschnitt 5.1.2 gelöst werden muss.

Der exzeptionelle Punkt wird wie in Abbildung 5.17 gezeigt in einem Radius von $r = 0{,}2$ umkreist. In Abbildung 5.17 (a) ist das chemische Potential des Zweimuldensystems dargestellt. Es lässt sich erkennen, dass bei $\phi = 0$ alle i-Imaginärteile Null sind und dann ein Zustand kontinuierlich oszilliert, was bedeutet, dass er auf dem gesamten Definitionsbereich eine stetige und differenzierbare Oszillation durchführt. Eine andere Energie ist hingegen immer Null. Währenddessen führen die beiden verbleibenden Zustände eine kleine Oszillation durch bis sie bei $\phi \approx \pi/2$ eine Bifurkation bilden, was genau der Stelle des Übergangs in den verbotenen Bereich entspricht. Diese Bifurkation findet in umgekehrter Weise bei $\phi \approx 3\pi/2$ statt, sodass die beiden i-Imaginärteile wieder zusammenfallen. Bei $\phi = 2\pi$ ist die erste Umkreisung beendet und die Oszillationen der i-Imaginärteile verlaufen kontinuierlich weiter, da Differenzierbarkeit gefordert wird. An dieser Stelle zeigt sich, dass die chemischen Potentiale sich nicht merklich ändern und somit nach einer Umkreisung wieder am Ausgangszustand ankommen. Für den j-Imaginärteil lässt sich dieselbe Beobachtung machen. Dieser hat zwei Energien, die

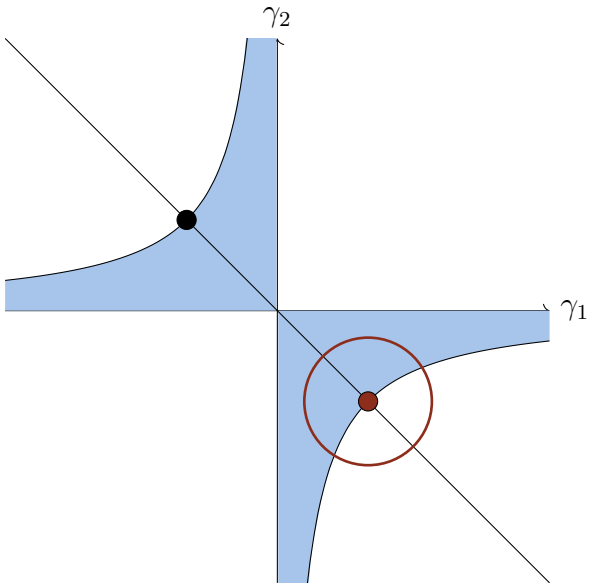

Abbildung 5.16: Der Parameterraum (γ_1,γ_2) mit erlaubtem und verbotenem Bereich wie in Referenz [9] erläutert. Der Bereich, in dem Zustände existieren (blau), ist durch zwei Hyperbeln um die Achsen begrenzt. Im weißen Bereich können im Komplexen keine Lösungen gefunden werden. In schwarz ist die $\mathcal{PT}$-symmetrische Parametrisierung eingezeichnet mit $\gamma_1 = -\gamma_2$. Am Übergang dieser Parametrisierung in den verbotenen Bereich liegt der exzeptionelle Punkt, der mit der Parametrisierung (5.21) umkreist wird (rot).

kontinuierlich mit einer Periodendauer von 2π oszillieren und zwei andere Energien, die gleichzeitig mit dem i-Imaginärteil eine Bifurkation bilden. Somit scheinen die Zustände nicht zu vertauschen und nach einer Umkreisung des exzeptionellen Punktes ist die Ausgangssituation wiederhergestellt.

Wird jedoch der Realteil betrachtet, so kann keine eindeutige 2π-Periodizität erkannt werden. Bei $\phi = 0$ haben zwei der Zustände einen realen Anteil von Null und die anderen beiden von ± 1. Analog zu den anderen Parametrisierungen des Zweimuldensystems, die in Abschnitt 5.2.2 betrachtet wurden, bilden die beiden von Null verschiedenen Zustände eine Bifurkation, sodass im verbotenen Bereich alle vier Zustände einen Realteil von Null haben. Sobald dieser verbotene Bereich wieder verlassen wird, tritt erneut eine Bifurkation auf. An dieser Stelle kann jetzt allerdings nicht entschieden werden, welche der vier Zustände an der Bifurkation teilnehmen, sodass eine 4π-Periodizität möglich ist, aber nicht zwangsweise gelten muss. Der k-Imaginärteil weist aufgrund seiner Berechnung, die ebenso aus den Realteilen von $\mu_\pm$ hervorgeht wie der Realteil, das exakt gleiche Verhalten auf.

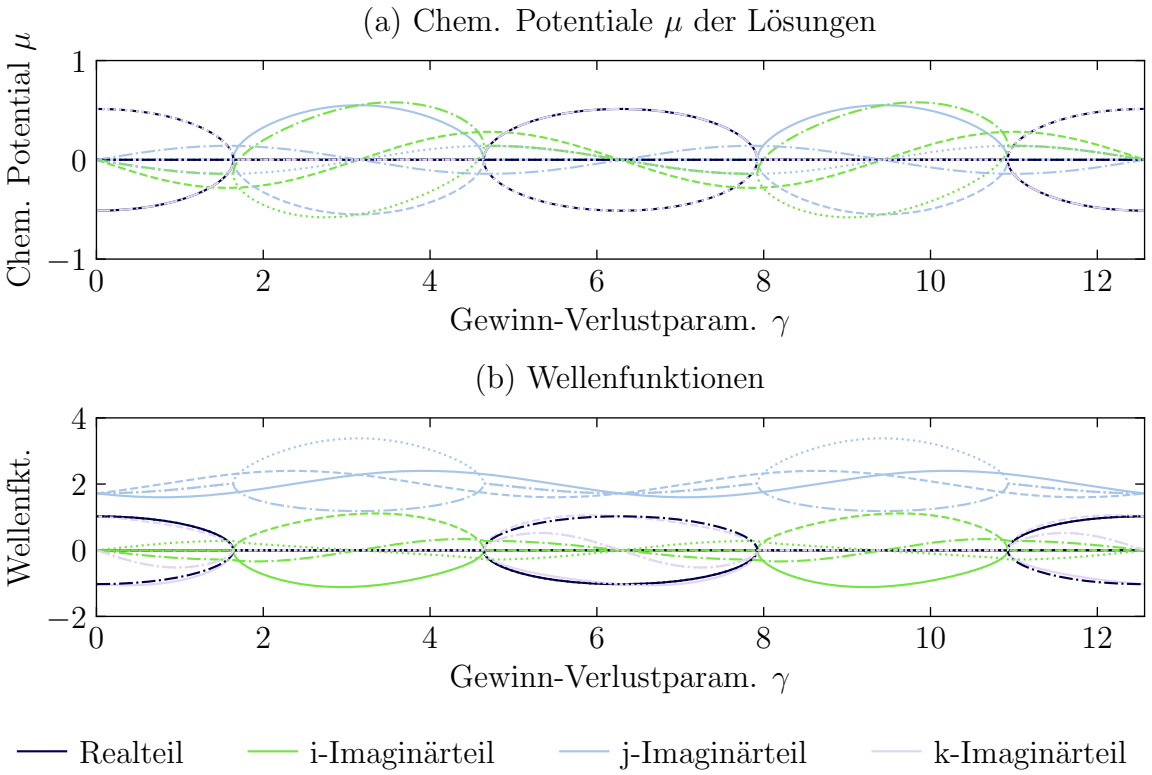

Abbildung 5.17: Analytische Lösungen für (a) die Eigenwerte und (b) die zugehörigen Eigenzustände bei der Umkreisung des exzeptionellen Punktes bei $\gamma_1 = \gamma_2 = J$ im Zweimuldenpotential. Die verschiedenen Zustände sind durch unterschiedliche Linienstile gekennzeichnet.

Diese Unklarheit in der Sortierung geht, wie die doppelte Anzahl an Lösungen im Bikomplexen, aus der Tatsache hervor, dass die idempotente Basis aus Nullteilern besteht und damit vollständig separiert. Die beiden komplexen Lösungen $\mu_\pm$ befinden sich also auf zwei vollständig separierten und unabhängigen Riemann'schen Blättern. Das bedeutet, dass man den exzeptionellen Punkt auf den jeweiligen Blättern in unabhängigen Periodizitäten umkreisen kann. Um den Realteil und die Imaginärteile nach Gleichung (5.10) zu berechnen, werden diese Blätter kombiniert, sodass nicht eindeutig hervorgeht, welcher Anteil welche Periodizität aufweist.

Ein ähnliches Problem gab es bereits in den Abschnitten 5.2 und 5.1. Hier kam es zu Sprüngen in den Lösungen, die einen von Null verschiedenen k-Imaginärteil hatten. Da jedoch gefordert wurde, dass die Lösungen komplex konjugiert sein müssen, konnten diese aussortiert werden. Dasselbe Vorgehen wird an dieser Stelle nun auch angewand. Jedoch kann nicht allein aus dem k-Imaginärteil geschlossen werden, welche zwei Lösungen

ausgeschlossen werden müssen. Um diese Entscheidung treffen zu können, müssen die dazugehörigen Zustände betrachtet werden.

In Abbildung 5.17 (b) sind die Zustände in verschieden Linienstilen dargestellt. Der i-Imaginärteil in Abbildung 5.17 (b) besteht aus zwei Zuständen, die jeweils nach einer halben Umkreisung eine Bifurkation bilden und nach einer weiteren halben Umkreisung wieder in einer umgekehrten Bifurkation zusammenfallen. Die anderen beiden Zustände sind am Bifurkationspunkt jedoch auch nicht differenzierbar, obwohl diese keine Bifurkation bilden. Wenn diese beiden Zustände aus diesem Grund als nicht physikalisch eingestuft werden, kann man diese aussortieren.

Werden nach diesem Prinzip die chemischen Potentiale und deren Zustände ausgewählt, so ergeben sich physikalische Ergebnisse wie sie in Abbildung 5.18 dargestellt sind. Man kann erkennen, dass es immer abwechselnd zu reellen und i-komplexen Bifurkationen in den Zuständen kommt, während der j-Imaginärteil oszilliert. An dieser Stelle kann man nun auch erkennen, dass der k-Imaginärteil ebenfalls eine leichte Oszillation im Bereich $\phi \in [\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}]$ durchführt und so sortiert werden muss, dass er differenzierbar ist. Daraus kann man nun schließen, dass der Realteil sowohl in den Zuständen als auch in den Energien erst nach zwei Umkreisungen wieder seinen ursprünglichen Wert erreicht. Das bedeutet konkret, dass nach der ersten Umkreisung der Grundzustand und der angeregte Zustand vertauschen. So ist in Abbildung 5.18 im Realteil zuerst der gestrichelt dargestellte Zustand mit seiner Energie der angeregte und der mit der durchgezogenen Linie der Grundzustand. Bei $\phi = 2\pi$ vertauschen diese beiden, sodass der durchgezogen dargestellte Zustand nun der angeregte ist. Bei einer erneuten Umkreisung tauschen diese beiden Zustände wieder zurück, sodass nach $\phi = 4\pi$ wieder der Ausgangszustand erreicht ist. Damit ergibt sich für den gesamten exzeptionellen Punkt eine 4π-Periodizität für die Energien und Zustände bei der Umkreisung. Dies zeigt, dass die Umkreisung des EP2 im Parameterraum (γ_1, γ_2) dessen chrakteristische Vertauschungseigenschaften wiedergeben kann.

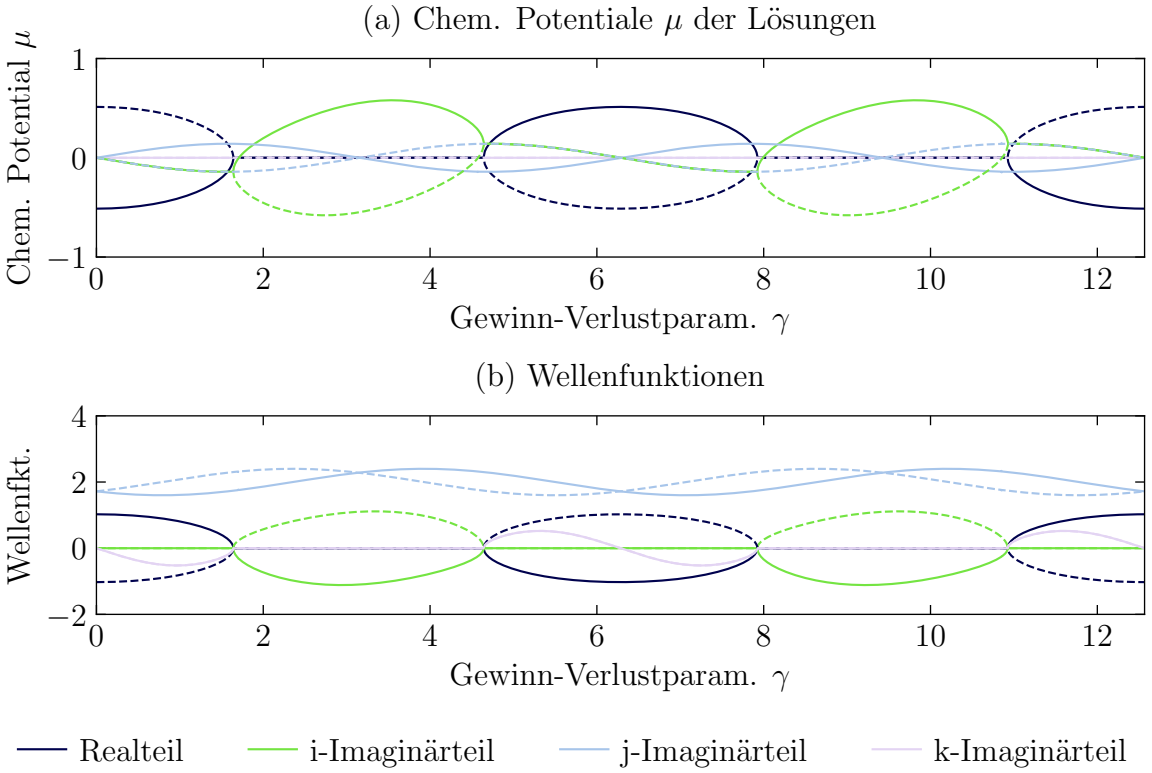

Abbildung 5.18: (a) Eigenwerte mit k-Imaginärteil Null und (b) die zugehörigen Eigenzustände aus Abbildung 5.17. Die k-Imaginärteile wurde zur besseren Übersicht mit einem Faktor 5 skaliert.

6 Zusammenfassung und Ausblick

Zum Abschluss dieser Arbeit wird ein Überblick über die erzielten Ergebnisse und ein Ausblick auf mögliche weiterführende Untersuchungen zu den hier erzielten Ergebnissen gegeben. Es wurden Zwei- und Dreimuldensysteme mit ausgeglichenem Gewinn und Verlust im Rahmen von Bose-Einstein-Kondensaten mit einer analytischen Fortsetzung in die bikomplexen Zahlen untersucht.

Bei der Betrachtung des Dreimuldensystems stellt man fest, dass es im komplexen Raum Parameterbereiche gibt, in denen keine Lösungen für das chemische Potential existieren. Mit einer analytischen Fortsetzung konnten hier jedoch Lösungen gefunden werden, die stetig und differenzierbar an die aus dem Komplexen bekannten Lösungen anschließen. Bei diesen Untersuchungen wurden mathematisch jeweils neun Lösungen gefunden, die über die idempotente Basis der bikomplexen Zahlen berechnet wurden. Mit der Bedingung, dass das Eigenwertspektrum komplex konjugiert ist, was bedeutet, dass die Lösungen einen k-Imaginärteil von Null haben, konnte die Anzahl der Lösungen auf drei reduziert werden. Diese so gefunden bikomplexen Lösungen entsprechen denen, die bereits im komplexen Raum gefunden wurden.

Im weiteren Verlauf dieser Arbeit wurde das Zweimuldensystem untersucht. Auch an dieser Stelle tritt im Komplexen ein verbotener Bereich auf, der in der bikomplexen Fortsetzung erschlossen werden konnte. Im Vergleich zum Dreimuldensystem treten hier jedoch Bifurkationen an den Übergangsstellen auf. Da festgestellt wurde, dass die Spektren sich für kleine Verschiebungen gegen die $\mathcal{PT}$-symmetrische Parametrierung im wesentlichen kaum verändern, konnte der exzeptionelle Punkt im Zweimuldensystem umkreist werden. So war es möglich durch eine Umkreisung des exzeptionellen Punktes im Parameterraum (γ_1,γ_2) dessen Vertauschungseigenschaften in den Eigenwerten und Zuständen nachzuweisen.

Es gibt hier am Ende dieser Arbeit jedoch noch ein paar offene Fragen. So wurde in Abschnitt 3.1 gezeigt, dass sich die Wahrscheinlichkeitsdichte und deren Erhaltung im Zwei- und Dreimuldensystem unterscheiden sollten, da in der analytischen Fortsetzung verschiedene imaginäre Potentiale addiert werden. Dieser Unterschied wurde im Verlauf dieser Arbeit jedoch nicht weiter untersucht, weshalb sich eine genauere Betrachtung der Wahrscheinlichkeitsflüsse anbieten würde. Des weiteren gilt es noch zu klären, wieso in den

Zuständen des Zweimuldensystems bei der Umkreisung des exzeptionellen Punktes nicht differenzierbare Lösungen auftreten. Es wirkt, als würden in den i- und k-Imaginärteilen „halbe Bifurkationen“ auftreten. Eine mögliche Herangehensweise an dieses Problem liegt in den hyperkomplexen Zahlen. Durch die Wahl einer höheren Dimension, beispielsweise den Biquaternionen [24], kommt es zu mehr Lösungen, sodass dort die Möglichkeit besteht nur stetige und differenzierbare Zustände zu erhalten.

Literatur

[1] P.A.M. Dirac. *The Principles of Quantum Mechanics*. Comparative Pathobiology - Studies in the Postmodern Theory of Education. Clarendon Press, 1981. ISBN: 9780198520115. URL: https://books.google.de/books?id=XehUpGiM6FIC.

[2] E. M. Graefe, H. J. Korsch und A. E. Niederle. „Mean-Field Dynamics of a Non-Hermitian Bose-Hubbard Dimer“. In: *Phys. Rev. Lett.* 101 (15 Okt. 2008), S. 150408. DOI: 10.1103/PhysRevLett.101.150408. URL: https://doi.org/10.1103/physrevlett.101.150408.

[3] N. Moiseyev. *Non-Hermitian Quantum Mechanics*. Cambridge University Press, 2011. ISBN: 9781139496995. URL: https://books.google.de/books?id=QwAXVvk%5C_57QC.

[4] Stefan Weigert. „The Physical Interpretation of PT-invariant Potentials“. In: *Czechoslovak Journal of Physics* 54.10 (Okt. 2004), S. 1139–1142. DOI: 10.1023/b:cjop.0000044016.95629.a7. URL: https://doi.org/10.1023/b:cjop.0000044016.95629.a7.

[5] Carl M. Bender und Stefan Boettcher. „Real Spectra in Non-Hermitian Hamiltonians HavingPTSymmetry“. In: *Physical Review Letters* 80.24 (Juni 1998), S. 5243–5246. DOI: 10.1103/physrevlett.80.5243. URL: https://doi.org/10.1103/physrevlett.80.5243.

[6] Christian E. Rüter, Konstantinos G. Makris, Ramy El-Ganainy, Demetrios N. Christodoulides, Mordechai Segev und Detlef Kip. „Observation of parity–time symmetry in optics“. In: *Nature Physics* 6.3 (Jan. 2010), S. 192–195. DOI: 10.1038/nphys1515. URL: https://doi.org/10.1038/nphys1515.

[7] Cale M. Gentry und Miloš A. Popović. „Dark state lasers“. In: *Optics Letters* 39.14 (Juli 2014), S. 4136. DOI: 10.1364/ol.39.004136. URL: https://doi.org/10.1364/ol.39.004136.

[8] F.G. Scholtz, H.B. Geyer und F.J.W. Hahne. „Quasi-Hermitian operators in quantum mechanics and the variational principle“. In: *Annals of Physics* 213.1 (Jan. 1992), S. 74–101. DOI: 10.1016/0003-4916(92)90284-s. URL: https://doi.org/10.1016/0003-4916(92)90284-s.

[9] Daniel Dizdarevic, Holger Catarius, Jörg Main und Günter wunner. „Real eigenvalues in symmetrised multi-well potentials with gain and loss“. In: (2019). Zur Veröffentlichung eingereicht.

[10] Dennis Dast. „Variationsrechnung zu Bose-Einstein-Kondensaten in $\mathcal{PT}$-symmetrischen Dopperlmuldenpotentialen“. Masterarbeit. Universiät Stuttgart, 2012.

[11] Bose. „Plancks Gesetz und Lichtquantenhypothese“. In: *Zeitschrift für Physik* 26.1 (Dez. 1924), S. 178–181. DOI: 10.1007/bf01327326. URL: https://doi.org/10.1007/bf01327326.

[12] A. Einstein. „Quantentheorie des einatomigen idealen Gases“. In: *Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften, phys.-math. Kl.* Jahrgang 1924 (1924), S. 261–267.

[13] A. Einstein. „Quantentheorie des einatomigen idealen Gases II“. In: *Sitzungsberichte der preußischen Akademie der Wissenschaften, phys.-math. Kl.* Jahrgang 1925 (1925), S. 3–14.

[14] E. P. Gross. „Structure of a quantized vortex in boson systems“. In: *Il Nuovo Cimento* 20.3 (Mai 1961), S. 454–477. DOI: 10.1007/bf02731494. URL: https://doi.org/10.1007/bf02731494.

[15] Franco Dalfovo, Stefano Giorgini, Lev P. Pitaevskii und Sandro Stringari. „Theory of Bose-Einstein condensation in trapped gases“. In: *Reviews of Modern Physics* 71.3 (Apr. 1999), S. 463–512. DOI: 10.1103/revmodphys.71.463. URL: https://doi.org/10.1103/revmodphys.71.463.

[16] S. Inouye, M. R. Andrews, J. Stenger, H.-J. Miesner, D. M. Stamper-Kurn und W. Ketterle. „Observation of Feshbach resonances in a Bose–Einstein condensate“. In: *Nature* 392.6672 (März 1998), S. 151–154. DOI: 10.1038/32354. URL: https://doi.org/10.1038/32354.

[17] H.P. Breuer, F. Petruccione und S.P.A.P.F. Petruccione. *The Theory of Open Quantum Systems*. Oxford University Press, 2002. ISBN: 9780198520634. URL: https://books.google.de/books?id=0Yx5VzaMYm8C.

[18] Morton M. Sternheim und James F. Walker. „Non-Hermitian Hamiltonians, Decaying States, and Perturbation Theory“. In: *Physical Review C* 6.1 (Juli 1972), S. 114–121. DOI: 10.1103/physrevc.6.114. URL: https://doi.org/10.1103/physrevc.6.114.

[19] W D Heiss. „The physics of exceptional points“. In: *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* 45.44 (Okt. 2012), S. 444016. DOI: 10.1088/1751-8113/45/44/444016. URL: https://doi.org/10.1088/1751-8113/45/44/444016.

[20] Nimrod Moiseyev und Alexei A. Mailybaev. „Effects of Exceptional Points in PT-Symmetric Waveguides“. In: Springer Singapore, 2018, S. 237–259. DOI: 10.1007/978-981-13-1247-2_9. URL: https://doi.org/10.1007/978-981-13-1247-2_9.

[21] D. Werner. *Einführung in die höhere Analysis: Topologische Räume, Funktionentheorie, Gewöhnliche Differentialgleichungen, Maß- und Integrationstheorie, Funktionalanalysis*. Springer-Lehrbuch. Springer Berlin Heidelberg, 2009. ISBN: 9783540796961. URL: https://books.google.de/books?id=f-onBAAAQBAJ.

[22] Dominic Rochon und Michael Shapiro. „On algebraic properties of bicomplex and hyperbolic numbers“. In: *Analele Universitaţii din Oradea. Fascicola Matematică* 11.71 (Jan. 2004), S. 10.

[23] T. Kato. *Perturbation Theory for Linear Operators*. Classics in Mathematics. Springer Berlin Heidelberg, 1995. ISBN: 9783540586616. URL: https://books.google.de/books?id=8ji2kN%5C_D3BwC.

[24] Julian Cen und Andreas Fring. „Multiplex Solitons“. In: (Dez. 2018). URL: https://arxiv.org/abs/1812.02111.

Danksagung

Weder diese Arbeit noch dieses Studium an sich wären so reibungslos abgelaufen, ohne zahlreiche Unterstützung. Deshalb nehme ich mir abschließend noch die Zeit, mich bei all den Menschen zu bedanken, die dies möglich machten.

Mein erster Dank geht an dieser Stelle Apl. Prof. Dr. Jörg Main, der es mir ermöglichte meine Bachelor Arbeit am 1. Institut für theoretische Physik der Universität Stuttgart zu schreiben und mich stets mit hilfreichen Ideen und Kritiken gefördert hat.

Besonders möchte ich mich bei Daniel Dizdarevic bedanken für seine Betreuung und Unterstützung meiner Arbeit. Er stand mir bei allen Themen mit Rat und Tat zur Seite und hat diese Phase meines Studiums mit seinen konstruktiven Vorschlägen und Korrekturen maßgeblich beeinflusst. Er nahm sich stets die Zeit, meine Fragen zu beantworten und mir mit seinem Optimismus das Gefühl zu geben auf dem richtigen Weg zu sein.

Des weiteren darf ich natürlich meine Kollegen am Institut nicht vergessen, die mir zahlreiche Male geholfen haben meine Computerprobleme zu lösen. Darüber hinaus schufen sie eine motivierende Atmosphäre, in die man gerne am nächsten Morgen zurückkehrt. Auch meine Kommilitonen sollen an dieser Stelle nicht in Vergessenheit geraten. Mit ihnen hatte ich drei wundervolle Jahre mit guten Freundschaften und gemeinsamen Kübeln über Aufgabenblätter.

Zum Abschluss möchte ich mich noch bei meinen Eltern bedanken, die immer an mich geglaubt haben und für mich da waren, die mir dieses Studium überhaupt erst ermöglichten und ohne die ich es nie so weit geschafft hätte.

Erklärung

Ich versichere,

- dass ich diese Bachelorarbeit selbstständig verfasst habe,
- dass ich keine anderen als die angegebenen Quellen benutzt und alle wörtlich oder sinngemäß aus anderen Werken übernommenen Aussagen als solche gekennzeichnet habe,
- dass die eingereichte Arbeit weder vollständig noch in wesentlichen Teilen Gegenstand eines anderen Prüfungsverfahrens gewesen ist,
- und dass das elektronische Exemplar mit den anderen Exemplaren übereinstimmt.

Stuttgart, den 30. August 2019 *Aileen Antje Theresia Durst*