HERMANN HÄHL

AUTOMORPHISMENGRUPPEN VON LOKALKOMPAKTEN ZUSAMMENHÄNGENDEN QUASIKÖRPERN UND TRANSLATIONSEBENEN

1. Einleitung

Der bisher erfolgreichste Ansatz zur Klassifikation topologischer projektiver Ebenen (bei denen Punkt- und Geradenraum so mit einer Topologie versehen werden, daß Verbinden und Schneiden stetig sind) ist das Studium ihrer Kollineationsgruppen als topologische Transformationsgruppen. Für Ebenen mit kompaktem, zusammenhängendem und höchstens vierdimensionalem Punktraum hat dieser Ansatz in den letzten 15 Jahren in Arbeiten von H. Salzmann, D. Betten, S. Breitsprecher und K. Strambach zu abgerundeten Klassifikationsergebnissen geführt. Über Ebenen mit Punkträumen höherer topologischer Dimension hingegen liegen bisher keine systematischen Ergebnisse vor, unter anderem wohl deshalb, weil hier im Gegensatz zu den Verhältnissen in den unteren Dimensionen (vgl. etwa [12], [13], [15]) eine Reihe noch völlig offener topologischer Probleme aufgeworfen ist: etwa die Fragen, ob Punkt- und Geradenmenge stets lokaleuklidisch sind und ob die geeignet topologisierte Kollineationsgruppe eine Liegruppe ist. Diese Schwierigkeiten werden hier durch Einschränkung der Untersuchung auf Translationsebenen umgangen. Die Erfahrungen bei vierdimensionalen Ebenen etwa aus [16] und [17] lassen hoffen, daß mit den Translationsebenen die hinsichtlich der Größe der Kollineationsgruppe homogensten Ebenen schon erfaßt sind.

Über nichttransitive Wirkungen auch von Lie-Gruppen ist in höheren Dimensionen häufig nur für den kompakten Fall Konkretes bekannt. Will man Ergebnisse über Wirkungen zur Klassifikation von Ebenen heranziehen, so erscheint es nützlich, möglichst große kompakte Untergruppen der Kollineationsgruppe zu suchen, die zudem geometrisch relevant sind. Dies ist das Ziel der vorliegenden Arbeit.

Eine zusammenhängende kompakte Translationsebene läßt sich nach [12, § 7] über einem lokalkompakten topologischen Quasikörper Q koordinatisieren, dessen additive Gruppe eine Vektorgruppe $\mathbb{R}^n$ (mit $n=1,2,4,8$) ist. Die Gruppe der Automorphismen von Q läßt sich in der Kollineationsgruppe der Ebene deuten als die Standgruppe eines geeigneten nicht ausgearteten Vierecks.

Eine unmittelbare Anwendung der für diese Arbeit zentralen Technik der modularen Funktion von Q, die in § 2 eingeführt wird und von der Theorie

Geometriae Dedicata 4 (1975) 305–321. *All Rights Reserved*
Copyright © 1975 by D. Reidel Publishing Company, Dordrecht-Holland

der lokalkompakten Körper inspiriert ist, führt schnell zu folgendem

SATZ. *Die Gruppe der stetigen Automorphismen eines zusammenhängenden lokalkompakten Quasikörpers (mit $\mathbb{R}^n$ als additiver Loop) ist kompakt in der kompakt-offenen Topologie. Ihre Zusammenhangskomponente wirkt linear auf $\mathbb{R}^n$ und äquivalent einer Untergruppe von $SO(n-1)=\{\varphi\in SO(n) \mid \varphi(1)=1\}$.* –

Für $n\leqslant 2$ ist entsprechendes mit anderen Methoden in [13, 2.6] schon gezeigt worden: allgemeiner (und schärfer) besitzt jeder 2-dimensionale lokalkompakte Ternärkörper höchstens einen nichtidentischen stetigen Automorphismus.

§ 3 untersucht Fragen der Topologisierung der Kollineationsgruppe, deren Zusammenhangskomponente eine lineare Gruppe wird. In Verallgemeinerung des eben formulierten Satzes und unter Verfeinerung der zu seinem Beweis verwendeten Methoden gewinnen wir schließlich in § 4 das Hauptergebnis dieser Arbeit, bei dessen Wiedergabe zunächst von gewissen Varianten mit zusätzlicher Information abgesehen sei:

HAUPTSATZ. *Die Standgruppe Ω zweier affiner nichtparalleler Geraden unter der Zusammenhangskomponente der affinen Kollineationsgruppe einer kompakten zusammenhängenden Translationsebene besitzt eine größte kompakte Untergruppe M. M ist ein Normalteiler von Ω und Ω/M ist höchstens zweidimensional.* –

Über die mögliche Rolle dieses Ergebnisses bei der Klassifikation kompakter zusammenhängender Translationsebenen hier nur eine Andeutung für den Fall achtdimensionaler Punktmenge: Im nichtdesargueschen Fall läßt die Kollineationsgruppe die Translationsachse invariant ([10, 8.3]), ist also affin. Analog wie in [3] (vgl. auch [18]) läßt sich zeigen, daß sie auf der zu S^4 homöomorphen Translationsachse nicht transitiv wirken kann. Die nichttransitiven Wirkungen kompakter Lie-Gruppen auf S^4 sind aus [11] bekannt; man hat somit Informationen über M und gelangt relativ rasch zumindest zu scharfen Abschätzungen der Dimension der Kollineationsgruppe nach oben. Ist M nicht zu klein, wird man darüberhinaus aus der Wirkung auf der Translationsachse die Struktur des Geradenbüschels durch einen Punkt und damit der ganzen Geometrie aufhellen können. Für Ebenen vom Lenz-Typ V, wo man zudem algebraisch gut bekannte auf dem Büschel fast transitive Scherungsgruppen zur Verfügung hat, ist dieses Programm in [6], [7] ausgeführt.

2. Die modulare Funktion lokalkompakter zusammenhängender Quasikörper

2.1. Ein *topologischer Quasikörper* Q besteht bekanntlich aus einer (additiv geschriebenen) topologischen abelschen Gruppe $(Q, +)$ zusammen mit einer weiteren (multiplikativ geschriebenen) in beiden Variabeln stetigen Verknüpfung mit Neutralelement 1 und Nullelement 0, die bezüglich der Addition linksdistributiv ist und die stets für $b \neq a \neq 0$ eindeutig bestimmte sowie stetig von a, b, c abhängende Auflösungen x und y der Gleichungen $ax - bx = c$ und $ya = c$ zuläßt. Die hier betrachteten Quasikörper sind stets *lokalkompakt* und haben *positive Dimension.* Nach [12, 7.23 und 7.24] ist dann die additive Gruppe von Q als topologische Gruppe isomorph zur Vektorgruppe $\mathbb{R}^n$ mit $n = 1, 2, 4, 8$ und für $n = 1$ ist Q stets ein Körper, der Körper der reellen Zahlen. Wir betrachten daher im weiteren nur die Fälle höherer Dimension und identifizieren $(Q, +)$ mit $\mathbb{R}^{2m}$ $(m = 1, 2, 4)$.

Infolge der Linksdistributivität und Stetigkeit der Multiplikation ist dann für alle $a \in Q$ die *Linksmultiplikation*

$$\lambda_a : \mathbb{R}^{2m} \to \mathbb{R}^{2m} : x \mapsto ax$$

mit a linear und für $a \neq 0$ ist diese Abbildung bijektiv, also ein Element von $GL(2m, \mathbb{R})$. Ihre Determinante geht in die *modulare Funktion*

$$\Delta : Q \to \mathbb{R} : a \mapsto \det \lambda_a$$

ein, deren relevante Eigenschaften jetzt hergeleitet werden sollen.

2.2. LEMMA. *Zu kompakten,* 0 *im Innern enthaltenden Teilmengen B und C eines lokalkompakten zusammenhängenden Quasikörpers Q gibt es eine kompakte Teilmenge A von Q derart, daß $xB \supseteq C$ für alle $x \in Q \setminus A$.*

Beweis. O.B.d.A. seien B und C abgeschlossene Kugeln von $\mathbb{R}^{2m} = Q$ mit Zentrum 0; der Rand von B werde mit ∂B bezeichnet. Als Bild unter der stetigen Abbildung $\partial B \times C \to Q : (b, c) \mapsto a$ mit $ab = c$ ist $A = \{a \in Q \mid a \cdot \partial B \cap C \neq \emptyset\}$ kompakt. Für $x \notin A$ hat die Sphäre $x \cdot \partial B$ leeren Schnitt mit C; wegen $0 \in C$ liegt dann C in der die 0 enthaltenden Zusammenhangskomponente $x \cdot (B \setminus \partial B)$ von $Q \setminus x \cdot \partial B = x \cdot (Q \setminus \partial B)$. □

2.3. LEMMA über die modulare Funktion. *Die modulare Funktion Δ eines lokalkompakten zusammenhängenden Quasikörpers Q ist stetig und abgesehen von $\Delta(0) = 0$ stets positiv, falls Q mindestens zweidimensional ist. Die Mengen*

$$W_r = \{a \in Q \mid \Delta(a) \leqslant r\}$$

bilden dann für $r>0$ eine Nullumgebungsbasis aus kompakten Mengen in Q. Für jede kompakte Teilmenge D von Q gibt es andererseits ein $r>0$ mit $D\subseteq W_r$.

Beweis. Mit $Q\to GL(2m,\mathbb{R})\cup\{0\}: a\mapsto\lambda_a$ ist, wegen der Stetigkeit der Determinantenabbildung, auch Δ stetig. W_r ist also jedenfalls eine abgeschlossene Nullumgebung.

Für $0\neq a\in Q$ ist $\lambda_a\in GL(2m,\mathbb{R})$, also $\Delta(a)\neq 0$ und infolge des Zusammenhangs von $Q\setminus\{0\}$ sowie wegen $\Delta(1)=\det\lambda_1=\det\mathrm{id}=1$ sogar $\Delta(a)>0$.

Bezeichnet μ das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^{2m}=Q$ und B eine Kugel um 0 vom Maß 1, so ist $\Delta(a)=\mu(\lambda_a(B))=\mu(aB)$. Zu einer Kugel C um 0 vom Maß $2r$ existiert nach 2.2 eine kompakte Teilmenge A von Q mit $xB\supseteq C$, mithin $\Delta(x)\geqslant 2r$ für $x\in Q\setminus A$; W_r ist dann in A enthalten und folglich selbst kompakt.

Wäre $\{W_r \mid r>0\}$ keine Nullumgebungsbasis, so gäbe es eine beschränkte Folge a_ν in Q mit $\lim_{\nu\to\infty}\Delta(a_\nu)=0$, die nicht gegen 0 konvergiert. O.B.d.A. könnte a_ν als konvergent gegen $a\neq 0$ angenommen werden; aus der Stetigkeit von Δ würde dann aber $\Delta(a)=0$ folgen, ein Widerspruch zur Nichtsingularität der Linksmultiplikation mit a.

Für eine kompakte Teilmenge D von Q ist $\Delta(D)$ kompakt, also $\Delta(D)\leqslant r$ für geeignetes r und dann $D\subseteq W_r$. □

Die nun folgende sehr direkte Anwendung auf die Automorphismengruppe von Q läßt die Beweisideen auch der Untersuchungen des § 4 über kompakte Kollineationsgruppen deutlich werden und mag als deren Illustration in einer einfacheren Situation dienen.

2.4. Der *Kern* $\mathrm{Ker}\,Q$ des lokalkompakten zusammenhängenden Quasikörpers Q besteht definitionsgemäß aus allen Elementen x von Q, die rechtsdistributiv und rechtsassoziativ sind, d. h. $(a+b)x=ax+bx$ und $(ab)x=a(bx)$ für alle $a, b\in Q$ erfüllen. $\mathrm{Ker}\,Q$ ist ein abgeschlossener Unterkörper von Q, der die rationalen Zahlen als Primkörper und damit auch dessen Abschluß, das lineare Erzeugnis $\langle 1\rangle\cong\mathbb{R}$ von 1 in $Q=\mathbb{R}^{2m}$, als Unterkörper enthält. Nach dem Satz von Pontrjagin über die lokalkompakten zusammenhängenden Körper und aus Dimensionsgründen ist folglich $\mathrm{Ker}\,Q$ als topologischer Körper isomorph zu

$$\begin{array}{ll} \mathbb{R} & \text{für } \dim Q = 2 \\ \mathbb{R} \text{ oder } \mathbb{C} & \text{für } \dim Q = 4 \\ \mathbb{R}, \mathbb{C} \text{ oder } \mathbb{H} & \text{für } \dim Q = 8, \end{array}$$

falls Q nicht selbst schon einer der klassischen lokalkompakten Körper ist. – Q ist in kanonischer Weise ein Rechtsvektorraum über $\mathrm{Ker}\,Q$.

2.5. Insbesondere ist jeder Automorphismus von Q semilinear über dem Kern. Im Fall $\mathrm{Ker}Q=\langle 1\rangle=\mathbb{R}$ ist folglich jeder Automorphismus linear über $\mathbb{R}$ und daher stetig; dasselbe gilt für $\mathrm{Ker}Q\cong\mathbb{H}$, da jeder Automorphismus das Zentrum $\langle 1\rangle$ von $\mathbb{H}$ in sich überführt. Umgekehrt ist jeder stetige Automorphismus von Q infolge der Additivität linear über $\mathbb{R}$; die Gruppe $\mathrm{Aut}Q$ der stetigen Automorphismen von Q kann daher aufgefaßt werden als abgeschlossene Untergruppe von $GL(2m, \mathbb{R})$.

Im Fall $\mathrm{Ker}Q\cong\mathbb{C}$ induzieren die stetigen Automorphismen auf dem Kern entweder die Identität oder die Konjugation als Begleitautomorphismus. Die Zusammenhangskomponente Aut^1Q von $\mathrm{Aut}Q$ induziert jedenfalls die Identität und kann folglich sogar als abgeschlossene Untergruppe von $GL(m, \mathbb{C})$ gedeutet werden.

2.6. SATZ. *Die Gruppe* $\mathrm{Aut}Q$ *der stetigen Automorphismen eines lokalkompakten zusammenhängenden Quasikörpers* $Q=\mathbb{R}^{2m}$ *ist kompakt. Ihre Zusammenhangskomponente wirkt auf* $\mathbb{R}^{2m}$ *(bei Einführung einer geeigneten* 1 *enthaltenden Basis und zugehöriger euklidischer Norm) als Untergruppe von* $SO(2m-1)=\{\varphi\in SO(2m) \mid \varphi(1)=1\}$.

Im Fall von $\mathrm{Ker}Q\cong\mathbb{C}$, $Q=\mathbb{C}^m$ *ist sogar bezüglich einer geeigneten* $\mathbb{C}$*-Basis* $\mathrm{Aut}^1Q\subseteq U(m-1)=\{\varphi\in U(m, \mathbb{C}) \mid \varphi(1)=1\}$.

Beweis. Für $\alpha\in\mathrm{Aut}Q\subseteq GL(2m, \mathbb{R})$ und $a\in Q$ ist

$$\lambda_{\alpha(a)} = (Q\to Q : x\mapsto \alpha(a)\cdot x = \alpha\,(a\cdot\alpha^{-1}(x)) = \alpha\circ\lambda_a\circ\alpha^{-1}$$

und folglich

$$\Delta\,(\alpha(a)) = \det\lambda_{\alpha(a)} = \det\lambda_a = \Delta(a).$$

$\mathrm{Aut}Q$ läßt also die kompakten Nullumgebungen W_r aus dem Lemma 2.3 über die modulare Funktion invariant. Mit dem Lebesgue-Maß μ auf $\mathbb{R}^{2m}=Q$ ist daher

$$|\det\alpha| = \frac{\mu\,(\alpha(W_1))}{\mu(W_1)} = \frac{\mu(W_1)}{\mu(W_1)} = 1;$$

also ist $\mathrm{Aut}Q$ abgeschlossen nicht nur in $GL(2m, \mathbb{R})$, sondern sogar im Raum $\mathscr{C}(Q, Q)$ der stetigen Selbstabbildungen von Q mit der kompakt-offenen Topologie. Die unter $\mathrm{Aut}Q$ invarianten kompakten Mengen W_r bilden für $r>0$ nach dem Lemma über die modulare Funktion eine Nullumgebungsbasis in Q und schöpfen andererseits ganz Q aus; $\mathrm{Aut}Q$ hat also relativ kompakte Bahnen auf Q und ist, wegen der Additivität von Automorphismen, gleichgradig stetig. Anwendung des Satzes von Arzela-Ascoli ([5, XII 6.4]) zeigt nun die Kompaktheit von $\mathrm{Aut}Q$.

Da kompakt und zusammenhängend, ist nun $\mathrm{Aut}^1 Q$ in der Zusammenhangskomponente $GL^+(2m, \mathbb{R})$ von $GL(2m, \mathbb{R})$ enthalten und dort unter geeignetem $\varphi \in GL^+(2m, \mathbb{R})$ konjugiert zu einer Untergruppe der (bezüglich irgendeiner Basis definierten) maximalen kompakten Untergruppe $SO(2m, \mathbb{R})$ von $GL^+(2m, \mathbb{R})$. Basiswechsel mit φ liefert eine Basis, wie sie in der Behauptung auftritt.

Die behauptete Verschärfung im Fall $\mathrm{Ker} Q \cong \mathbb{C}$ erhält man, indem man in den vorstehenden Argumenten $GL(m, \mathbb{C})$ anstelle von $GL(2m, \mathbb{R})$ und die maximale kompakte Untergruppe $U(m, \mathbb{C})$ von $GL(m, \mathbb{C})$ verwendet. □

3. Zur Topologie von Kollineationsgruppen

3.1. Eine *topologische projektive Ebene* ist eine projektive Ebene, bei der die Punktmenge P und die Geradenmenge $\mathscr{L}$ so mit einer Topologie versehen sind, daß die Operationen Verbinden ($\vee$) und Schneiden ($\wedge$) stetig werden. Im folgenden bezeichne $\mathscr{P}$, sofern nichts anderes spezifiziert, stets eine *kompakte zusammenhängende Translationsebene*, d.h. eine topologische Translationsebene mit kompaktem zusammenhängendem Punktraum.

Wir stellen sie uns meist als affine Ebene $\mathscr{A}$ vor, wobei als uneigentliche Gerade L_∞ stets die Translationsachse von $\mathscr{P}$ verwendet wird. Bezüglich irgend zweier nichtparalleler affiner Geraden W und S als 'waagrechte' und 'senkrechte' Koordinatenachse und eines nicht auf L_∞, W und S liegenden Einheitspunkts e wird $\mathscr{A}$ durch einen lokalkompakten zusammenhängenden Quasikörper Q koordinatisiert ([12, § 7]). Da die additive Loop von Q gleich $\mathbb{R}^n$ ($n = 1, 2, 4, 8$) ist, ist P also eine kompakte Mannigfaltigkeit und die projektiven Geraden – die wir mit der Menge der auf ihnen liegenden Punkte identifizieren – sind homöomorph zur n-Sphäre S^n (siehe auch [4, 8.1]).

Die Punktmenge A der affinen Ebene $\mathscr{A}$ trägt (als Produkt $Q \times Q$) in kanonischer Weise die Struktur eines Rechtsvektorraums über dem Kern $\mathrm{Ker} Q$ des Quasikörpers Q. Die affinen von $W = Q \times \{0\}$ und $S = \{0\} \times Q$ verschiedenen Geraden durch den Koordinatenursprung $0 = W \wedge S$ sind in dieser hier stets verwendeten Darstellung die Punktmengen $\{(x, mx) \mid x \in Q\}$ für $0 \neq m \in Q$. Da die Linksmultiplikation mit m linear ist, handelt es sich um über $\mathrm{Ker} Q$ lineare Unterräume von $Q \times Q$ der reellen Dimension n. Um unnötige Fallunterscheidungen zu vermeiden, betrachten wir häufig die angegebenen linearen Strukturen über dem zu $\mathbb{R}$ isomorphen Unterkörper $\langle 1 \rangle$ von $\mathrm{Ker} Q$ als Grundkörper.

Als wichtige Bezugspunkte führen wir noch die uneigentlichen Achsenpunkte $w = W \wedge L_\infty$ und $s = S \wedge L_\infty$ ein; zusammen mit Ursprung 0 und Einheitspunkt e bestimmen sie das Bezugssystem der Koordinatisierung.

3.2. Ist $\mathscr{P}$ nicht eine der klassischen Ebenen über $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ oder den Oktaven $\mathbb{O}$ (d.h. nicht moufangsch, vgl. [12, 7.25 und 7.27]), so hält die volle Kollineationsgruppe von $\mathscr{P}$ die Translationsachse L_∞ fest ([10, 8.3]; [3, Lemma 5]), ist also gleich der affinen Kollineationsgruppe G.

Die auf A transitive Gruppe T der *Translationen* mit Achse L_∞ entspricht in der Koordinatisierung gerade den Translationen im Vektorraum $\mathsf{A} = Q \times Q = \mathbb{R}^{2n}$. Die *Streckungsgruppe* $\mathsf{G}_{[0, L_\infty]}$ der Kollineationen mit Zentrum 0 und Achse L_∞ ergibt sich in Koordinaten als die Gruppe

$$\mathsf{G}_{[0, L_\infty]} = \{Q \times Q \to Q \times Q : (x, y) \mapsto (xc, yc) \mid 0 \neq c \in \operatorname{Ker} Q\}$$

der Streckungen über $\operatorname{Ker} Q$ im üblichen Sinn (siehe etwa [10, 8.4.2]). Dies zeigt bekanntlich unter anderem, daß der Kern eines koordinatisierenden Quasikörpers von der Wahl der Bezugspunkte unabhängig ist; in diesem Sinn sprechen wir auch vom *Kern der Ebene.*

Für die Standgruppe G_0 von G im Ursprung gilt

$$\mathsf{G} = \mathsf{G}_0 \cdot T = T \cdot \mathsf{G}_0.$$

Nach [1, 3 Satz 9] oder [10, 8.3.8] besteht G_0 aus über $\operatorname{Ker} Q$ semilinearen Automorphismen von A. Anhand ihrer Begleitautomorphismen ergibt sich wie in 2.5, daß in den Fällen $\operatorname{Ker} Q = \langle 1 \rangle = \mathbb{R}$ oder $\operatorname{Ker} Q \cong \mathbb{H}$ jedenfalls Linearität über $\mathbb{R}$ vorliegt; insbesondere sind dann alle Kollineationen stetig. Ist $\operatorname{Ker} Q \cong \mathbb{C}$, so sind gerade die stetigen Kollineationen aus G_0 linear über $\langle 1 \rangle = \mathbb{R}$, da die einzigen stetigen Automorphismen von $\mathbb{C}$ (Identität und Konjugation) gerade diejenigen sind, die $\mathbb{R}$ elementweise festlassen. –

3.3. Wir versehen nun die affine Kollineationsgruppe G mit der *kompakt-offenen Topologie*; G wird so eine topologische Gruppe (vgl. [2, Theorem 4]).

Da sich die Standgruppe Σ_0 der Gruppe Σ der stetigen Kollineationen im Ursprung mit dieser Topologie als (selbstverständlich abgeschlossene) Untergruppe von $GL(2n, \mathbb{R})$ auffassen läßt, ist Σ als semidirektes Produkt $\Sigma_0 \cdot T$ lokalkompakt.

3.4. *Die Untergruppe Σ der stetigen Kollineationen ist offen in G; insbesondere ist auch G lokalkompakt.*

Beweis. Ist der Kern der Ebene $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{H}$, so sind alle Kollineationen stetig, und es ist nichts zu beweisen. Im Fall komplexen Kerns sei Q der Koordinatenbereich der affinen Ebene für Bezugsviereck $(0, w, s, e)$. Wir identifizieren ihn mit einer Koordinatenachse und wählen dort einen in seinem Kern $\operatorname{Ker} Q \cong \mathbb{C}$ enthaltenen Bogen C sowie eine offene beschränkte Umgebung U von C in A. Eine unstetige Kollineation γ kann dann nicht

in der Basisumgebung $[C, U]=\{\sigma\in\mathsf{G} \mid \sigma(C)\subseteq U\}$ enthalten sein: wird die Ebene bezüglich des Bildvierecks $(\gamma(0), \gamma(w), \gamma(s), \gamma(e))$ über dem Quasikörper Q' koordinatisiert, so induziert γ einen unstetigen Isomorphismus der zu $\mathbb{C}$ isomorphen Kerne von Q und Q', und nach [9] bildet dieser jeden Bogen C in $\mathrm{Ker}Q$ auf eine dichte Teilmenge von $\mathrm{Ker}Q'$ ab; insbesondere ist also $\gamma(C)$ unbeschränkt und daher nicht in U enthalten. □

Im übrigen läßt sich dieser Sachverhalt allgemeiner für beliebige lokaleuklidische topologische projektive Ebenen beweisen, indem man anstelle eines Bogens eine $(n-1)$-Sphäre C in einem zu $\mathbb{R}^n$ homöomorphen koordinatisierenden Ternärkörper K verwendet. In Verallgemeinerung des eben benutzten Resultats gilt dann nämlich wieder, daß das Bild von C unter einem unstetigen Ternärkörperisomorphismus σ von K auf einen weiteren zu $\mathbb{R}^n$ homöomorphen Ternärkörper K' dort überall dicht ist. Der für $n=2$ in [14] gegebene Beweis dieser Tatsache läßt sich unmittelbar für beliebige Dimension verwenden, indem man dort $J=C$ setzt; unter der Annahme, daß $\sigma(C)$ nicht überall dicht und o.B.d.A. also beschränkt ist, läßt sich in C ein Bogen B mit ebenfalls beschränktem Bild finden, wie er im weiteren Beweisverlauf in [14] benötigt wird. –

Auch die nun folgenden Überlegungen gelten nicht nur für Translationsebenen, sondern allgemein für kompakte lokaleuklidische projektive Ebenen.– Zunächst einmal haben wir bisher offen gelassen, ob die kompakt-offene Topologie auf der Kollineationsgruppe bezüglich der Punktmenge P der projektiven Ebene oder der Punktmenge A der affinen Ebene zu verstehen sei. Jedoch zeigt sich:

3.5. *Auf* G *stimmen die kompakt-offene Topologie bezüglich* P *und die kompakt-offene Topologie bezüglich* A *überein.*

Beweis. Wegen 3.4 genügt es, die Gruppe der stetigen Kollineationen zu betrachten. Daß die kompakt-offene Topologie bezüglich P als zugrundeliegendem topologischem Raum feiner ist als die bezüglich A definierte, folgt aus der Definition. Infolgedessen genügt es zu zeigen, daß für eine auf A gegen die Identität konvergente Folge γ_ν stetiger Kollineationen und für eine in P gegen y konvergente Punktfolge y_ν stets $\lim_{\nu\to\infty}\gamma_\nu(y_\nu)=y$ gilt. Da P kompakt ist, kann man o.B.d.A. annehmen, daß $\gamma_\nu(y_\nu)$ in P gegen y' konvergiert und hat dann $y=y'$ zu zeigen. Für $x\in\mathsf{A}\backslash\{y, y'\}$ und eine von L_∞ verschiedene Gerade L mit $x\notin L$ und $(x\vee y)\wedge L\in\mathsf{A}$ ist nun (bei genügend großem ν)

$$\gamma_\nu\,[(x\vee y_\nu)\wedge L] = [\gamma_\nu(x)\vee\gamma_\nu(y_\nu)]\wedge\gamma_\nu(L)\in\mathsf{A}.$$

Nach den Voraussetzungen konvergiert die linke Seite gegen $(x\vee y)\wedge L$, die

rechte gegen $(x \vee y') \wedge L$; folglich ist $y' \in x \vee y$ für alle $x \in \mathsf{A} \backslash \{y, y'\}$, d.h. notwendig $y = y'$. □

G ist auch eine Kollineationsgruppe der dualen Ebene $\mathscr{P}^*$ von $\mathscr{P}$. Betrachtet man G mit der kompakt-offenen Topologie bezüglich der Punktmenge von $\mathscr{P}^*$, also der Geradenmenge $\mathscr{L}$ von $\mathscr{P}$, so läßt sich ähnlich wie eben zeigen:

3.6. *Auf* G *stimmen die kompakt-offene Topologie bezüglich* P *und die kompakt-offene Topologie bezüglich* $\mathscr{L}$ *überein.* □

Mit $\Sigma \mid L_\infty$ bezeichnen wir die von der Gruppe Σ der stetigen (affinen) Kollineationen auf der Fixgeraden L_∞ induzierte Homöomorphismengruppe, versehen mit der kompakt-offenen Topologie bezüglich L_∞. Im folgenden werden die Beziehungen zwischen Σ und $\Sigma \mid L_\infty$ untersucht.

3.7. LEMMA. *Sei* $\sigma_\nu \in \Sigma_0$ *eine Folge den Punkt* 0 *festlassender stetiger affiner Kollineationen derart, daß* $\sigma_\nu \mid L_\infty$ *in* $\Sigma \mid L_\infty$ *gegen die Identität strebt.*

Gibt es einen affinen Punkt $p \neq 0$ *so, daß* $\sigma_\nu(p)$ *gegen einen affinen Punkt* $q \neq 0$ *konvergiert, so konvergiert* σ_ν *in* Σ_0 *gegen eine Streckung* $\sigma \in \mathsf{G}_{[0, L_\infty]}$.

Beweis. Sei $L_1 = 0 \vee p$ und $z = L_1 \wedge L_\infty$. Dann ist $\sigma_\nu(p) \in 0 \vee \sigma_\nu(z)$, und da $\sigma_\nu(z)$ gegen z konvergiert, ist $q = \lim_{\nu \to \infty} \sigma_\nu(p) \in 0 \vee z = L_1$. Die auf der affinen Ebene $\mathsf{A}_1 = \mathsf{P} \backslash L_1$ durch

$$\sigma(y) = [q \vee ((p \vee y) \wedge L_\infty)] \wedge (0 \vee y)$$

definierte Abbildung σ ist ein Homöomorphismus von A_1 in sich, wie man unmittelbar verifiziert.

Die auf A_1 eingeschränkten Kollineationen $\sigma_\nu : \mathsf{A}_1 \to \mathsf{P}$ konvergieren nun bezüglich irgendeiner Metrik von P gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von A_1 gegen σ. Sonst gäbe es nämlich eine kompakte Teilmenge $C \subseteq A_1$, ein $\varepsilon > 0$ und eine Folge x_ν in C derart, daß $\sigma_\nu(x_\nu)$ immer außerhalb der ε-Umgebung von $\sigma(x_\nu)$ läge. O.B.d.A. könnten wir annehmen, daß x_ν gegen $x \in C$ und $\sigma_\nu(x_\nu)$ gegen $y \in \mathsf{P}$ konvergiert; und wegen der Stetigkeit von σ wäre y jedenfalls von $\sigma(x)$ verschieden. Da σ_ν auf L_∞ gegen die Identität konvergiert, hätte man für $z_\nu = (0 \vee x_\nu) \wedge L_\infty$ die Grenzbeziehung $\lim_{\nu \to \infty} \sigma_\nu(z_\nu) = \lim_{\nu \to \infty} z_\nu = (0 \vee x) \wedge L_\infty$ und folglich, wegen $\sigma_\nu(x_\nu) \in 0 \vee \sigma_\nu(z_\nu)$

$$y = \lim_{\nu \to \infty} \sigma_\nu(x_\nu) \in 0 \vee x.$$

Für $\zeta_\nu = (p \vee x_\nu) \wedge L_\infty$ hätte man entsprechend $\lim_{\nu \to \infty} \sigma_\nu(\zeta_\nu) = \lim_{\nu \to \infty} \zeta_\nu = (p \vee x) \wedge L_\infty$ und wegen $\sigma_\nu(x_\nu) \in \sigma_\nu(p) \vee \sigma_\nu(\zeta_\nu)$

$$y \in q \vee ((p \vee x) \wedge L_\infty);$$

nach Definition von σ insgesamt also doch $y = \sigma(x)$, ein Widerspruch.

σ_ν konvergiert also insbesondere auf allen Punkten von A_1 punktweise. Indem man nun in den vorstehenden Argumenten L_1 durch eine davon verschiedene Gerade $L_2 \ni 0$ ersetzt und statt p einen eigentlichen von 0 verschiedenen Punkt $p_2 \in L_2$ verwendet, erhält man, daß σ_ν in der affinen Ebene $\mathsf{A}_2 = \mathsf{P} \backslash L_2$ ebenfalls gleichmäßig auf kompakten Teilmengen gegen einen Homöomorphismus von A_2 in sich konvergiert, der auf $\mathsf{A}_1 \cap \mathsf{A}_2$ natürlich mit σ übereinstimmt. Insgesamt konvergiert σ_ν in $\mathsf{P} \backslash \{0\}$ gleichmäßig auf kompakten Teilmengen gegen einen Homöomorphismus σ, der alle Geraden durch 0 festläßt und als Limes von Kollineationen Kollinearität erhält. Setzt man ihn durch $\sigma(0) = 0$ zu einer Streckung fort, so konvergiert σ_ν auf ganz P gegen σ: sonst gäbe es eine gegen 0 konvergente Folge x_ν in P mit $\lim_{\nu \to \infty} \sigma_\nu(x_\nu) = y \neq 0$ und aus der Konvergenz in $\mathsf{P} \backslash \{0\}$ von σ_ν^{-1} gegen σ^{-1} würde $\lim_{\nu \to \infty} x_\nu = \sigma^{-1}(y) \neq 0$ folgen, ein Widerspruch. □

Während die vorstehenden Überlegungen ohne geometrische Zusatzvoraussetzungen auskamen, benötigt das folgende Korollar die Existenz einer Streckungsgruppe mit von 0 bis L_∞ reichenden Bahnen. Der Einfachheit halber belassen wir die Formulierungen im Kontext von Translationsebenen:

3.8. KOROLLAR. *Sei Ξ eine abgeschlossene Untergruppe von Σ_0, die die Gruppe R aller Streckungen aus $\mathsf{G}_{[0, L_\infty]}$ mit positivem reellem Faktor enthält. Dann induziert der Restriktionshomomorphismus $\Phi : \Xi \to \Xi \mid L_\infty$ einen Isomorphismus topologischer Gruppen*[1]

$$\tilde{\Phi} : \Xi / \Xi_{[0, L_\infty]} \to \Xi \mid L_\infty$$

(wobei links die Quotiententopologie und rechts die kompakt-offene Topologie in L_∞ betrachtet wird). Insbesondere ist $\Xi \mid L_\infty$ lokalkompakt.

Beweis. Φ ist ein stetiger Epimorphismus mit Kern $\Xi_{[0, L_\infty]}$, also ist $\tilde{\Phi}$ stetig und ein abstrakter Gruppenisomorphismus. Zu verifizieren bleibt die Stetigkeit von $\tilde{\Phi}^{-1}$ im Neutralelement. Ausgehend von einer beliebigen Folge $\xi_\varkappa$ von Kollineationen aus Ξ, deren Einschränkungen auf L_∞ gegen die Identität konvergieren, genügt es hierzu zu zeigen, daß zu jeder Teilfolge ξ_μ eine Unterfolge ξ_ν und Streckungen $\varrho_\nu \in \Xi_{[0, L_\infty]}$ existieren derart, daß $\xi_\nu \varrho_\nu$ gegen ein Element von $\Xi_{[0, L_\infty]}$ konvergiert. Wenn man Ξ nach 3.2–3.3 als Untergruppe von $GL(2n, \mathbb{R})$ auffaßt, enthält nun Ξ nach Voraussetzung alle Streckungen mit positiven reellen Zahlen. Zu beliebigem festem $0 \neq p \in \mathsf{A}$ lassen sich folglich Streckungen $\varrho_\mu \in \Xi_{[0, L_\infty]}$ finden derart, daß $\xi_\mu \varrho_\mu(p)$ für alle μ in einer festen kompakten 0 nicht enthaltenden Teilmenge

[1] $\Xi_{[0, L_\infty]} = \Xi \cap \mathsf{G}_{[0, L_\infty]}$ ist die Gruppe der Kollineationen aus Ξ mit Zentrum 0 und Achse L_∞.

von A liegt. Für eine geeignete durch ν indizierte Teilfolge konvergiert dann $\xi_\nu\varrho_\nu(p)$ gegen einen von 0 verschiedenen Punkt q von A. Nach 3.7 konvergiert folglich $\xi_\nu\varrho_\nu$ gegen eine Streckung, die wegen der Abgeschlossenheit von Ξ in $\Xi_{[0,L_\infty]}$ liegt. □

Als technisches Hilfsmittel benötigen wir in § 4 schließlich noch

3.9. LEMMA. *Sei X ein kompakter metrischer Raum und $\mathscr{C}(X, X)$ der Raum der stetigen Abbildungen von X in sich mit der kompakt-offenen Topologie. Dann ist eine als Teilraum von $\mathscr{C}(X, X)$ lokalkompakte und auf X gleichgradig stetige Gruppe H von Homöomorphismen von X abgeschlossen in $\mathscr{C}(X, X)$.*

Beweis. Zunächst ist H wegen der Kompaktheit von X gleichmäßig-gleichgradig stetig, d.h.

$$\bigwedge \varepsilon > 0 \bigvee \delta > 0 \bigwedge h \in H : d(x_1, x_2) < \delta \Rightarrow d(h(x_1), h(x_2)) < \varepsilon. \qquad (1)$$

Zu vorgelegtem $\varepsilon>0$ existiert nämlich, wegen der gleichgradigen Stetigkeit von H, für jedes $x\in X$ eine Umgebung U_x von x mit $h(U_x)\subseteq K_{\varepsilon/2}(h(x))$ für alle $h\in H$. Ist δ eine Lebesgue-Zahl zur Überdeckung $\{U_x \mid x\in X\}$, so ist Beziehung (1) erfüllt. In ihr wähle man nun ε so, daß $U=\{h\in H \mid \bigwedge x\in X: d\times(x, h(x))<\varepsilon\}$ relativ kompakt in H ist. Für zugehöriges δ liegt jedes $f\in\bar{H}$ im Abschluß von $V=\{g\in H \mid \bigwedge x\in X : d(f(x), g(x))<\delta/2\}$. Für alle $g, h\in V$ ist wegen der Dreiecksungleichung $d(g(x), h(x))<\delta$ und nach (1) folglich $h^{-1}\circ g\in U$, d.h. $h^{-1}\circ V\subseteq U$. Es folgt $h^{-1}\circ f\in h^{-1}\circ\bar{V}\subseteq\bar{U}\subseteq H$ und daraus $f\in H$. □

4. Grosse kompakte kollineationsgruppen

Dieser Abschnitt gilt dem in der Einleitung angesprochenen Hauptsatz. Die Bezeichnungen und Generalvoraussetzungen des §3 sind beibehalten. Zunächst einige einführende Bemerkungen:

4.1. Die Zusammenhangskomponente Γ der affinen Kollineationsgruppe G einer kompakten zusammenhängenden Translationsebene $\mathscr{P}$ besteht nach 3.4 aus stetigen Kollineationen und wirkt also als topologische Transformationsgruppe auf A und P. Wegen $\Gamma=\Gamma_0\cdot T=T\cdot\Gamma_0$ ist auch die Standgruppe Γ_0 im eigentlichen Punkt 0 als stetiges Bild von Γ zusammenhängend. Nach 3.2 wirkt Γ_0 auf $\mathsf{A}=\mathbb{R}^{2n}$ als (selbstverständlich abgeschlossene) Untergruppe von $GL(2n, \mathbb{R})$. Auch im Fall komplexen Kerns sind die Kollineationen aus Γ_0 linear über dem Kern (da semilinear und da die auf dem Kern $\mathbb{C}$ induzierte zusammenhängende Gruppe stetiger Begleitautomorphismen nur

aus der Identität bestehen kann). Im Fall reellen oder komplexen Kerns liegt folglich die Streckungsgruppe $\Gamma_{[0,L_\infty]}$ (die mindestens die Zusammenhangskomponente der Gruppe $\mathsf{G}_{[0,L_\infty]}$ aller Streckungen enthält) im Zentrum von Γ_0.

Denkt man sich wieder die affine Ebene $\mathsf{A}=\mathbb{R}^{2n}$ bezüglich den Koordinatenachsen W und S über einem Quasikörper $Q=\mathbb{R}^n$ koordinatisiert, so besteht die Standgruppe $\Gamma_{W,S}$ von Γ auf den Achsen aus linearen Abbildungen der Form

$$(B, C) : Q \times Q \to Q \times Q : (x, y) \mapsto (Bx, Cy)$$

($B, C \in GL(n, \mathbb{R})$). Führt die Kollineation (B, C) die Ursprungsgerade $V_m = \{(x, mx) \mid x \in Q\}$ der Steigung $m \in Q$ in die Ursprungsgerade der Steigung $\Phi_{(B,C)}(m)$ über, so gilt mit der Multiplikation in Q

$$C(mx) = \Phi_{(B,C)}(m) \cdot B(x).$$

Vermöge $m \mapsto V_m \wedge L_\infty$ (also mittels der Perspektivität der Geraden $\{(1, m) \mid m \in Q\}$ auf L_∞ vom Zentrum 0 aus) identifizieren wir im folgenden Q mit $L_\infty \setminus \{s\}$; durch $\infty \mapsto s$ läßt sich dies zu einer Identifikation der Einpunktkompaktifizierung $\hat{Q} = Q \cup \{\infty\}$ mit L_∞ fortsetzen. Indem man $\Phi_{(B,C)}(\infty) = \infty$ setzt, beschreibt dann $\Phi_{(B,C)}$ die Wirkung der Kollineation (B, C) auf L_∞; wir haben also die Identifikation

$$\Gamma_{W,S} \mid L_\infty = \Phi(\Gamma_{W,S}) = \{\Phi_{(B,C)} : \hat{Q} \to \hat{Q} \mid (B, C) \in \Gamma_{W,S}\}$$

vorgenommen und haben dann in der Abbildung $(B, C) \to \Phi_{(B,C)}$ den kanonischen Homomorphismus

$$\Phi : \Gamma_{W,S} \to \Gamma_{W,S} \mid L_\infty$$

der Einschränkung auf L_∞ vor uns.

4.2. HAUPTSATZ. *Sei $\mathscr{P}$ eine kompakte zusammenhängende Translationsebene und Ω eine abgeschlossene Untergruppe der Kollineationsgruppe $\Gamma_{W,S}$ von $\mathscr{P}$, die die Einparametergruppe*

$$R = \{(x, y) \mapsto (xr, yr) \mid 0 < r \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathsf{G}_{[0,L_\infty]}$$

der Streckungen mit reellem positivem Faktor enthalten möge. Dann gilt:

(i) *Der Normalteiler*

$$M = \{(B, C) \in \Omega \mid \det B = \det C = 1\}$$

von Ω ist kompakt und ist die größte kompakte Untergruppe von Ω. Bezüglich Komplementen von M in Ω bestehen zwei Möglichkeiten:

Ist für jede Einparameteruntergruppe Y von Ω die auf der uneigentlichen

Geraden L_∞ induzierte Homöomorphismengruppe $Y \mid L_\infty$ relativ kompakt (in der Homöomorphismengruppe von L_∞), so gilt[2]

$$\Omega^1 \subseteq M \cdot R.$$

Ist hingegen Y eine Einparametergruppe von Ω derart, daß $Y \mid L_\infty$ nicht relativ kompakt ist, so gilt

$$(Y \cdot R) \cap M = \{\mathrm{id}\}$$

und

$$\Omega = M \cdot R \cdot Y.$$

$Y \cdot R$ ist dann abgeschlossen in Ω und Y hat auf $L_\infty \backslash \{w, s\}$ lauter abgeschlossene von w nach s laufende Bahnen.

(ii) *Ist der Kern der Ebene reell, so wirkt M fast effektiv*[3] *auf L_∞.*

(iii) *Ist der Kern der Ebene komplex und enthält Ω sogar die ganze Streckungsgruppe $\mathsf{G}_{[0, L_\infty]}$, so existiert ein kompakter auf L_∞ fast effektiver Normalteiler K von Ω so, daß entsprechend*

$$\Omega^1 \subseteq K \cdot \mathsf{G}_{[0, L_\infty]}$$

oder

$$\Omega = K \cdot \mathsf{G}_{[0, L_\infty]} \cdot Y.$$

Ist Ω zusammenhängend, so kann auch K zusammenhängend gewählt werden.

(iv) *Ist der Kern der Ebene quaternional und ist Ω zusammenhängend, so gilt eine* (iii) *entsprechende Aussage immerhin mit einer zusammenhängenden (nicht notwendig normalen) Untergruppe K von Ω.*

Beweis.

(a) Sei Δ die in 2.1 eingeführte modulare Funktion eines die Ebene bezüglich W und S als Achsen koordinatisierenden Quasikörpers $Q = \mathbb{R}^n$. Für $(B, C) \in \Gamma_{W,S}$ folgt aus

$$C(mx) = \Phi_{(B,C)}(m) \cdot B(x) \tag{1}$$

unmittelbar, daß für alle $m \in Q$

$$\Delta(\Phi_{(B,C)}(m)) = \det B^{-1} \cdot \det C \cdot \Delta(m). \tag{2}$$

Es ist nun im folgenden bequem, den klassischen Fall der reellen projektiven Ebene, wo die Aussage des Satzes trivial wird, außer acht zu lassen und sich also auf mindestens vierdimensionale Translationsebenen $\mathscr{P}$ zu beschränken

[2] Ω^1 bezeichnet die Zusammenhangskomponente von Ω.

[3] D.h. höchstens endlich viele Kollineationen aus M induzieren auf L_∞ die Identität.

([12, 7.24]). Dann ist $Q\backslash\{0\}$ zusammenhängend, für $0\neq m\in Q$ also $\Delta(m)>0$ (2.3) und daher stets

$$\det B^{-1}\cdot\det C>0. \tag{3}$$

Infolgedessen ist die von M und R erzeugte Untergruppe von Ω gleich dem Kern des Homomorphismus

$$\psi:\Omega\to\mathbb{R}^0:(B,C)\mapsto\det B^{-1}\cdot\det C$$

von Ω in die multiplikative Gruppe $\mathbb{R}^0$ der positiven reellen Zahlen:

$$M\cdot R=\psi^{-1}(1).$$

Mit den Identifikationen von 4.1 und nach (2) ist $M\mid L_\infty=(M\cdot R)\mid L_\infty$ kanonisch isomorph zur Homöomorphismengruppe

$$H=\{\Phi_{(B,C)}\mid(B,C)\in\Omega;\quad\wedge m\in Q:\Delta(\Phi_{(B,C)}(m))=\Delta(m)\}$$

von $\hat{Q}=Q\cup\{\infty\}$. Der Kern des Restriktionshomomorphismus $M\to M\mid L_\infty$ ist genau die Gruppe $S\Omega_{[0,L_\infty]}$ aller Streckungen in Ω von Determinante 1, im Fall reellen Kerns also gleich $\{1\}$ oder $\{1,-1\}$ (und dann M fast effektiv auf L_∞), im Fall komplexen oder quaternionalen Kerns eine abgeschlossene Untergruppe der Gruppe der Streckungen mit den komplexen Zahlen bzw. Quaternionen von Norm 1 (vgl. 3.2). Der Ineffektivitätskern von M auf L_∞ ist also jedenfalls kompakt; für die Kompaktheit von M genügt es daher zu zeigen, daß $M\mid L_\infty$, oder gleichwertig H, kompakt sind. Als Kompaktheitskriterium soll wie in §2 der Satz von Arzelá-Ascoli herangezogen werden.

(b) Nach Definition hat die Homöomorphismengruppe H in Q relativ kompakte Bahnen; mehr noch: sie läßt $\{a\in Q\mid\Delta(a)\leqslant\Delta(m)\}$ invariant, und diese Mengen bilden für $0\neq m\in Q$ nach dem Lemma 2.3 über die modulare Funktion ein System beliebig kleiner und beliebig großer kompakter Nullumgebungen in Q.

(c) *H ist gleichgradig stetig auf Q bezüglich irgendeiner Metrik.*

Wäre dies nämlich nicht der Fall, so gäbe es ein $m\in Q$, ein $\varepsilon>0$, eine gegen $0\in Q$ konvergente Folge m_ν und eine Folge (B_ν, C_ν) von Kollineationen aus Ω mit $P_\nu=\Phi_{(B_\nu,C_\nu)}\in H$ derart, daß

$$d(P_\nu(m+m_\nu),P_\nu(m))>\varepsilon \tag{4}$$

für alle $\nu\in\mathbb{N}$. Durch geeignete Wahl von $x_\nu\in\mathrm{Ker}\,Q$ und Auswahl von Teilfolgen kann man annehmen, daß

$$\lim_{\nu\to\infty}B_\nu(x_\nu)=x\neq 0;\qquad\lim_{\nu\to\infty}P_\nu(m)=a \tag{5}$$

für geeignete $x, a \in Q$ (letzteres aufgrund von (b)). Nach Definition des Kerns und wegen (1) ist

$$\begin{aligned} P_\nu(m + m_\nu) \cdot B_\nu(x_\nu) &= C_\nu((m + m_\nu) \cdot x_\nu) \\ &= C_\nu(mx_\nu + m_\nu x_\nu) \\ &= C_\nu(mx_\nu) + C_\nu(m_\nu x_\nu) \\ &= P_\nu(m) \cdot B_\nu(x_\nu) + P_\nu(m_\nu) \cdot B_\nu(x_\nu). \end{aligned} \tag{6}$$

Wegen $P_\nu \in H$, also $\Delta(P_\nu(m_\nu)) = \Delta(m_\nu)$, $\lim_{\nu\to\infty} m_\nu = 0$ und der Stetigkeit von Δ (2.3) konvergiert $P_\nu(m_\nu)$ gegen 0. Die rechte Seite von (6) konvergiert also wegen (5), folglich auch die linke und im Grenzwert ergibt sich $\lim_{\nu\to\infty} P_\nu(m+m_\nu)\cdot x = ax$, also $\lim_{\nu\to\infty} P_\nu(m+m_\nu) = a = \lim_{\nu\to\infty} P_\nu(m)$. Dieser Widerspruch zu (4) beweist (c). – Damit zeigt sich nun

(d) *H ist kompakt.*

Zunächst ist nämlich H gleichgradig stetig auch auf der Einpunktkompaktifizierung $\hat{Q} = Q \cup \{\infty\}$ bezüglich irgendeiner Metrik: In Punkten von Q haben wir dies eben bewiesen; und nach (b) läßt H beliebig große kompakte Nullumgebungen in Q, also beliebig kleine Umgebungen von ∞ invariant und ist folglich auch in ∞ gleichgradig stetig. – Ferner ist nach 3.8 $H \cong (M \cdot R) \mid L_\infty$ lokalkompakt und nach 3.9 also abgeschlossen in $\mathscr{C}(\hat{Q}, \hat{Q})$. Wegen relativ kompakter Bahnen (siehe (b)) folgt (d) nun anhand des Satzes von Arzelá-Ascoli ([5, XII 6.4]). –

Damit ist gezeigt, daß M kompakt ist.

(e) Da der eingangs eingeführte Homomorphismus $\psi: \Omega \to \mathbb{R}^0$ wegen $\psi(\Omega_{[0,L_\infty]}) = 1$ (siehe 3.2) durch $\Omega/\Omega_{[0,L_\infty]} \cong \Omega \mid L_\infty$ faktorisiert und da $\mathbb{R}^0$ keine nichttrivialen kompakten Untergruppen besitzt, ist jede Untergruppe X von Ω, die auf L_∞ eine relativ kompakte Untergruppe $X \mid L_\infty$ von $\Omega \mid L_\infty$ induziert, in $\psi^{-1}(1) = M \cdot R$ enthalten. Insbesondere liegt jede kompakte Untergruppe von Ω im direkten Produkt $M \cdot R$ und dann auch in dessen kompaktem Faktor M; M ist also die größte kompakte Untergruppe von Ω. Ist ferner für alle Einparameteruntergruppen Y von Ω die induzierte Gruppe $Y \mid L_\infty$ relativ kompakt, so liegt folglich auch die von ihnen erzeugte Zusammenhangskomponente von Ω in $M \cdot R$.

Gibt es hingegen eine Einparameteruntergruppe Y von Ω mit zugehörigem stetigem Epimorphismus $\varphi: \mathbb{R}^0 \to Y$ derart, daß $Y \mid L_\infty$ nicht relativ kompakt in $\Omega \mid L_\infty$ ist, so ist Y wegen der Kompaktheit von $(M \cdot R) \mid L_\infty \cong H$ insbesondere nicht in $M \cdot R = \psi^{-1}(1)$ enthalten. Da $\mathbb{R}^0$ keine nichttrivialen zusammenhängenden Untergruppen besitzt, sind folglich $\psi \circ \varphi: \mathbb{R}^0 \to \mathbb{R}^0$ und damit auch $\psi \mid Y: Y \to \mathbb{R}^0$ und φ Isomorphismen topologischer Gruppen.

Insbesondere ist Y lokalkompakt und damit abgeschlossen in Ω und hat mit dem Kern $M \cdot R$ von ψ trivialen Schnitt. Sei nun $\eta: \mathbb{R}^0 \to Y$ die Inverse von $\psi \mid Y$. Für beliebiges $\omega \in \Omega$ ist dann $\psi(\omega \cdot \eta(\psi(\omega)^{-1}) = 1$ und folglich $\omega \cdot \eta(\psi(\omega)^{-1}) \in \psi^{-1}(1) = M \cdot R$, also $\Omega = M \cdot R \cdot Y$. – Ist $\eta(r)$ die Kollineation $(B, C) \in Y$, so ist nach (2) und wegen $\det B^{-1} \cdot \det C = \psi(\eta(r)) = r$ dann $\Delta(\Phi_{(B,C)}(m)) = r \cdot \Delta(m)$ für alle $m \in Q$ und dies strebt für festes $m \neq 0$ gegen 0 bzw. ∞, falls r gegen 0 bzw. ∞ strebt. Nach dem Lemma 2.3 über die modulare Funktion strebt dann auch $\Phi_{(B,C)}(m)$ in Q gegen 0 bzw. ∞. Da $\Phi_{(B,C)}$ die Wirkung von (B, C) auf L_∞ beschreibt, zeigt dies, daß die Bahnen unter Y in $L_\infty \backslash \{s, w\} \triangleq Q \backslash \{0\}$ abgeschlossen sind und von w nach s laufen. – Wir beweisen schließlich noch, daß $Y \cdot R$ abgeschlossen in Ω ist: $Y \cdot R$ enthält eine zu R komplementäre Einparameteruntergruppe Y' mit $Y \cdot R = Y' \cdot R$ so, daß für $(B', C') \in Y'$ stets $\det B' \cdot \det C' = 1$ ist. Ansonsten kommen die eben an Y betrachteten Eigenschaften auch Y' zu, so daß wie gezeigt Y' ebenfalls abgeschlossen in Ω ist. Konvergiert nun für $\omega_\nu = (B_\nu, C_\nu) \in Y'$ und $\varrho_\nu = ((x, y) \mapsto (xr_\nu, yr_\nu)) \in R (0 < r_\nu \in \mathbb{R})$ die Folge $\omega_\nu \varrho_\nu$ gegen die Kollineation $(B, C) \in \Omega$, so konvergiert $r_\nu^2 = \det B_\nu \cdot r_\nu \cdot \det C_\nu \cdot r_\nu$ gegen $\det B \cdot \det C$; also konvergiert auch die Folge ω_ν und da Y' abgeschlossen ist, beweist dies die Abgeschlossenheit von $Y' \cdot R = Y \cdot R$ in Ω. –

Damit sind die Aussagen (i) und (ii) des Satzes hergeleitet.

(f) Zum Beweis von (iii) haben wir den Fall zu betrachten, daß der Kern der Ebene isomorph zu $\mathbb{C}$ ist und Ω die volle Streckungsgruppe $\mathsf{G}_{[0, L_\infty]}$ enthält. Entsprechend 4.1 sind die Kollineationen aus Ω linear über $\operatorname{Ker} Q = \mathbb{C}$; wir verwenden die komplexwertige Determinantenabbildung $\det_{\mathbb{C}}$ bezüglich dieser linearen Struktur und setzen

$$K = \{(B, C) \in M \mid \det_{\mathbb{C}} B \cdot \det_{\mathbb{C}} C = 1\}.$$

$M \cap \mathsf{G}_{[0, L_\infty]}$ ist die größte kompakte Untergruppe der Gruppe $\mathsf{G}_{[0, L_\infty]}$ aller Streckungen mit komplexen Zahlen, also gleich der Gruppe $S\mathsf{G}_{[0, L_\infty]}$ der Streckungen mit komplexen Zahlen der Norm 1. K hat nach Definition endlichen Schnitt mit $\mathsf{G}_{[0, L_\infty]}$, d.h. ist fast effektiv auf L_∞. Da M kompakt ist, gilt für alle Kollineationen (B, C) aus M, daß $|\det_{\mathbb{C}} B| = 1 = |\det_{\mathbb{C}} C|$. Folglich ist $M = K \cdot S\mathsf{G}_{[0, L_\infty]}$ und Behauptung (iii) folgt nun mit $\mathsf{G}_{[0, L_\infty]} = S\mathsf{G}_{[0, L_\infty]} \cdot R$ aus (i). Ist Ω zusammenhängend, so hat – einfach aus Dimensionsgründen – die Zusammenhangskomponente von K statt K ebenfalls die behaupteten Eigenschaften.

(g) Zum Beweis von (iv), für den Fall zu $\mathbb{H}$ isomorphen Kerns und bei zusammenhängender Gruppe Ω mit $\Omega \supseteq \mathsf{G}_{[0, L_\infty]}$, schließt man analog: die

Existenz eines Komplements K in M zum lie-einfachen zu Spin(3) isomorphen Normalteiler $SG_{[0,L_\infty]}$ der Streckungen mit den Quaternionen der Norm 1 folgt dabei aus bekannten Strukturssätzen über kompakte Liegruppen (vgl. [8, II 12.17]). □

BIBLIOGRAPHIE

1. André, J., 'Über nicht desarguesche Ebenen mit transitiver Translationsgruppe', *Math. Z.* **60** (1954), 156–186.
2. Arens, R., 'Topologies for Homeomorphism Groups', *Am. J. Math.* **68** (1946), 593–610.
3. Betten, D., '4-dimensionale Translationsebenen', *Math. Z.* **128** (1972), 129–151.
4. Breitsprecher, S., 'Projektive Ebenen, die Mannigfaltigkeiten sind', *Math. Z.* **121** (1971), 157–174.
5. Dugundji, J., *Topology*, Allyn and Bacon, Boston, 1965.
6. Hähl, H., 'Achtdimensionale kompakte Translationsebenen mit großer Kollineationsgruppe', Dissertation Tübingen, 1974.
7. Hähl, H., 'Geometrisch homogene vierdimensionale reelle Divisionsalgebren', *Geometriae Dedicata* **4** (1975), 333–362.
8. Hofmann, K.H., *Einführung in die Theorie der Liegruppen*, Teil I und II. Vorlesung Tübingen 1963 (berichtigter Nachdruck von Teil I 1968).
9. Kestelmann, H., 'Automorphisms of the Field of Complex Numbers', *Proc. London Math. Soc.* (2) **53** (1955), 1–12.
10. Pickert, G., *Projektive Ebenen*, Springer-Verlag, 1955.
11. Richardson, R.W., Jr., 'Groups Acting on the 4-Sphere', *Ill. J. Math.* **5** (1961), 474–485.
12. Salzmann, H., 'Topological Planes', *Adv. Math.* **2** (1967), 1–60.
13. Salzmann, H., 'Kompakte vierdimensionale Ebenen', *Archiv Math.* **XX** (1969), 551–555.
14. Salzmann, H., 'Homomorphismen komplexer Ternärkörper', *Math. Z.* **112** (1969), 23–25.
15. Salzmann, H., 'Kollineationsgruppen kompakter vierdimensionaler Ebenen', *Math. Z.* **117** (1970), 112–124.
16. Salzmann, H., 'Kollineationsgruppen kompakter vierdimensionaler Ebenen II', *Math. Z.* **121** (1971), 104–110.
17. Salzmann, H., 'Kompakte vierdimensionale projektive Ebenen mit 8-dimensionaler Kollineationsgruppe', *Math. Z.* **130** (1973), 235–247.
18. Salzmann, H., 'Homogene affine Ebenen', erscheint demnächst in *Abh. Math. Sem. Hamburg*.

Anschrift des Verfassers:

Hermann Hähl,
Mathematisches Institut der Universität Tübingen,
74 Tübingen 1,
Auf der Morgenstelle 10,
Germany

(Eingegangen am 7.11.1974)