B-Spline-Approximation elliptischer Randwertprobleme mit unstetigen Koeffizienten

Von der Fakultät für Mathematik und Physik der Universität Stuttgart
zur Erlangung der Würde eines
Doktors der Naturwissenschaften (Dr.rer.nat.)
genehmigte Abhandlung

vorgelegt von

Herrn Andreas Keller

geboren in Würzburg

Hauptberichter:	Prof. Dr. Klaus Höllig, Universität Stuttgart
Mitberichter:	Prof. Dr. Ulrich Reif, TU Darmstadt

Tag der Einreichung:	09.01.2013
Tag der mündlichen Prüfung:	22.02.2013

Institut für Mathematische Methoden in den Ingenieurwissenschaften, Numerik
und Geometrische Modellierung
Universität Stuttgart
2013

Für Margot

11.09.1949 - 13.02.1992

„Hin und wieder mal 'n Strike und dann mal wieder nichts!"

(Der Dude in „The Big Lebowski")

Danksagung

Ich möchte hier die Chance ergreifen meinen Lehrern zu Danken, die mich in meinem Weg und in der Wahl meiner Ausbildung, inspiriert, motiviert, gefördert und gefordert haben. Andereseits ist vielleicht auch die Zeit einmal reif meinen engsten Freunden für ihre unermüdliche Unterstützung zu danken. Ohne sie würde ich heute nicht dort stehen wo ich bin.

Mein Interesse an der Mathematik förderte Hans Baureis, Mathematiklehrer an der Balthasar Neumann Oberschule Würzburg. Er versorgte mich nicht nur mit weiterführenden Mathematikbüchern (was den Übergang ins 1. Semester enorm erleichterte), sondern hatte auch für weltliche Themen stets eine Lebensweisheit parat, wofür ich sehr dankbar bin. An der Universität Würzburg gedachte ich zuerst in Gruppentheorie zu vertiefen. Dieses Vorhaben sollte sich jedoch nach einer sehr unterhaltsamen Funktionalanalysis bei Herrn Prof. Dr. Dobrowolski und der Approximationstheorie mit den Splines bei Herrn Prof. Dr. von Golitschek schnell änderen. Für die schöne Zeit bei meinem letzten Jahr an der Universität Würzburg möchte ich mich nochmal sehr herzlich bei Prof. von Golitschek bedanken. Seine Art mit Menschen umzugehen hat mich sehr geprägt. Meinem Doktorvater, Herrn Prof. Dr. Höllig an der Universität Stuttgart, bin ich zu großem Dank verpflichtet. Die gewährten Freiheiten und die Möglichkeit praktisch jederzeit über die Promotion zu diskutieren sind keine Selbstverständlichkeit. Für die exzellente Betreuung, die sehr entspannte Atmosphäre und die gute Zusammenarbeit in Forschung und Lehre, sowie die für mich vorbildliche Einstellung, immer die bestmöglichen Konditionen für die Mitarbeiter und Studierenden ermöglichen zu wollen, bedanke ich mich recht herzlich. Bei Herrn Prof. Dr. Reif von der TU Darmstadt bedanke ich mich sehr für die reibungslose und unkomplizierte Übernahme des Koreferats und bei Frau Dr. Nada Sissouno von der TU Darmstadt für Hinweise zu den von ihr untersuchten Spline-Typen [82]. Besonders möchte ich mich auch nochmal bei Prof. Dr. Dobrowolski für den netten Email-Kontakt, sowie für die nützlichen Tipps bedanken [25], so dass sich ein paar Hürden beim Beweis des Shift-Theorems 3.2.1 doch als „trivial" herausgestellt haben. Bei Frau Prof. Dr. Sändig von der Universität Stuttgart bedanke ich mich herzlich für nette Gespräche und die Bereitstellung von Literatur. Meinen Kollegen am Lehrstuhl für Numerik und Geometrischer Modellierung danke ich für die nette und ungezwungene Arbeitsatmosphäre, bei Herrn Dipl.-Math. Jörg Hörner insbesondere für kompetente (und sofortige!) Antworten zu allen möglichen „Computerfragen", bei Herrn Dipl.-Math. Marco Boßle für die gute Zusammenarbeit in der Lehre und bei Frau Dipl.-Volksw. Irmgard Walter für ihren unermüdlichen Einsatz im Hintergrund sowie für das Korrekturlesen meines Manuskripts (ohne das es wohl immer noch Modelproblem anstatt Modellproblem heißen würde...). Ganz besonderen Dank gilt Herrn Dipl.-Math. Christian Apprich: er hatte immer ein offenes Ohr, konnte mir sehr versiert die Programme der `WEB-Toolbox` näherbringen und es hat mir immer große Freude bereitet mit ihm fachzusimpeln. Meinen Kollegen an der Hochschule Esslingen, insbesondere Prof. Dr. Jürgen Koch, Prof. Dr. Tim Sigg, Dr. Isabel Rica-Mendez, Prof.

Dr. Dan-Eugen Ulmet, Dipl.-Math. Heinrich Abel sowie Prof. Dr. Karin Mälzer danke für die schöne Zeit und die Freiräume die mir dort gewährt wurden.

Meinen engsten Freunden Philipp & Veronika (herzlichen Dank fürs Korrekturlesen!), Mö, Flo, Andi und Basti danke ich an dieser Stelle vielmals und auch völlig unabhängig von der Arbeit für die guten Zeiten die wir zusammen schon verbracht haben. Ihr seid für mich da gewesen.

Besten Dank auch an Katja Hodinova für das Korrekturlesen des kompletten Manuskripts.

Würzburg, den 25.08.2012 Andreas Keller

Inhaltsverzeichnis

Einleitung **1**

I. Folklore und Splines **5**

1. Grundlegende Konzepte, Definitionen und Sätze **7**
1.1. Etwas Notation . . . 7
1.2. Funktionenräume . . . 8
1.2.1. Gebiete und klassisch differenzierbare Funktionen . . . 8
1.2.2. Sobolev-Räume . . . 9
1.2.3. Randwerte und Sobolevräume mit positiver reeller Ordnung . . . 12
1.3. Ritz-Galerkin-Approximation in Hilberträumen . . . 14
1.4. Klassische Finite Elemente . . . 17

2. Splines **21**
2.1. Univariate Splines mit äquidistanten Knoten . . . 21
2.2. Multivariate Splines . . . 22
2.2.1. Splines auf Rechteckgittern . . . 23
2.2.2. Splines auf Gebieten . . . 24
2.3. Splines als Finite Elemente . . . 25
2.3.1. Numerische Instabilitäten durch TPB-Splines als Ansatzfunktionen . 25
2.3.2. Gewichtung . . . 27
2.3.3. Stabilisierung durch Erweiterung . . . 28
2.3.4. Weighted Extended B-Splines (WEB-Splines) . . . 29
2.3.5. Anmerkungen zu nonuniformen weB-Splines und alternativen Stabilisierungstechniken . . . 30

II. Elliptische Gleichungen mit unstetigen Koeffizenten **31**

3. Elliptische Gleichungen mit unstetigen Koeffizienten **33**
3.1. Gleichmäßig elliptische Operatoren 2.Ordnung . . . 33
3.1.1. Variationsformulierung . . . 34
3.1.2. Existenz und Eindeutigkeit . . . 34
3.2. Regularitätstheorie . . . 35
3.2.1. Die Differenzenquotiententechnik . . . 37
3.2.2. Shift-Theorem für elliptische Gleichungen mit stückweise glatten Koeffizienten . . . 39

4. Elliptische Interfaceprobleme **47**
4.1. Modellproblem . . . 47
4.2. Sprungbedingungen und globale Regularität . . . 48
4.2.1. Bemerkung zur Regularität bei einem stückweise glatten Interface und inhomogenen Sprungbedingungen . . . 51
4.3. Numerische Verfahren für Interfaceprobleme . . . 51
4.3.1. FE-Approximation im Eindimensionalen . . . 51
4.3.2. Ein Überblick über existierende Approximationsansätze und numerische Verfahren . . . 55

III. Approximation mit Interfacesplines **57**

5. Erweiterung der Tensorproduktsplinebasis **59**
5.1. Konstruktion von Zusatzsplines mit singulären Gradienten . . . 60
5.1.1. Glattheitseigenschaften der Distanzfunktion . . . 60
5.1.2. Konstruktion des Trägers S_δ . . . 61
5.1.3. Periodische Splines entlang des Interfaces . . . 63
5.1.4. Gewichtsfunktion mit Sprungsingularität des Gradienten in Normalenrichtung . . . 63
5.2. Der Raum der Interfacesplines . . . 65

6. Satz vom Jackson-Typ für Funktionen mit singulären Gradienten **69**
6.1. Vorbereitende Sätze . . . 69
6.1.1. Zerlegung der Lösung . . . 69
6.1.2. Klassische Quasi-Interpolationsabschätzungen in der Maximumsnorm 71
6.1.3. Quasi-Interpolation für weB-Splines . . . 72
6.1.4. Fehlerabschätzungen auf Gitterzellen $Q \sim \Omega, Q \cap \Gamma = \emptyset$ . . . 74
6.1.5. Auswirkung der eindimensionalen Quasi-Interpolation in Interfacenähe 76
6.2. Satz vom Jackson-Typ für Funktionen mit singulären Gradienten . . . 80
6.2.1. Bemerkung zu möglichen Verallgemeinerungen . . . 82
6.3. Finite Elemente Analysis mit Interfacesplines . . . 83
6.3.1. $\mathbb{B}^{n,n_\Gamma}_{w,\chi_\delta,h}(\Omega)$ als Ansatzraum . . . 83
6.3.2. H^1-Fehlerabschätzung . . . 85

IV. Numerik **87**

7. Implementierung **89**
7.1. Gebietsmodellierung . . . 89
7.1.1. Zellklassifikation für B-Splines . . . 90
7.1.2. Gitter für Zusatzsplines . . . 91
7.2. Evaluierung der Basisfunktionen . . . 91
7.2.1. B-Splines . . . 92
7.2.2. Zusatzsplines . . . 92
7.3. Assemblierungsalgorithmen . . . 95
7.3.1. Gaußquadratur auf Quadern . . . 95

7.3.2. Block $G^h_{1,1}$ 98
7.3.3. Die gemischten Blöcke $G^h_{1,2}$ und $G^h_{2,1}$ 100
7.3.4. Block $G^h_{2,2}$ 101
7.4. Systemlöser 102
7.4.1. Iterative Verfahren 102
7.4.2. Ausnutzen der Block-Struktur 103

8. Computerexperimente **105**
8.1. Interfaceprobleme mit analytischem Interface 105
8.2. Modellbeispiele 106
8.2.1. Modellproblem 1 107
8.2.2. Modellproblem 2 110
8.2.3. Resümee 114

Zusammenfassung und Ausblick **116**

Summary and Discussion **122**

Anhang **129**
A. Analysis 129
B. Funktionalanalysis 130

Literatur **131**

Abbildungsverzeichnis

4.1. Gebiete $\Omega^{\pm}$ und das Interface Γ für $d = 2$ 47

5.1. Zerlegung der Lösung, eindimensionales Beispiel 59
5.2. Springender Anteil $\Psi = u - u^{\star} = \chi_{\delta} v$ 59
5.3. Transformation des Streifens S_{δ}. 62
5.4. Perodische B-Splines vom Grad 2 auf $\tilde{\Gamma} = [0, L]$ 63
5.5. Blendefunktion ζ^m für $m = 1, 5, 20$ 64
5.6. Gewichtsfunktionen $\tilde{\chi}_{\delta}$ für $m = 1, 5, 20$ 64

6.1. Der etwas größerer Streifen $S_{\delta^{\star}}$ 76

7.1. Gebiet mit klassifizierten Zellen 90
7.2. Gitter Ω^h_{Γ} für die Zusatzsplines 91
7.3. Möglicher Schnitt von Trägerzellen unterschiedlicher Basissplines 97

8.1. Gebiete für Modellproblem 1 107
8.2. Analytische Lösung u für Modellproblem 1 108
8.3. Interfacespline u^h_{Γ} (vgl. 8.2) für Modellproblem 1, $h = \pi/2^4$ 109
8.4. Gewichteter TP-Spline $u^h_{\star}$ (vgl.8.3) für Modellproblem 1, $h = \pi/2^4$ 109
8.5. Zusatzspline Ψ^h (vgl. 8.4) für Modellproblem 1, $h = \pi/2^4$ 109
8.6. $u - u^h_{\Gamma}$ für Modellproblem 1, $h = \pi/2^4$ 110
8.7. $u - u^h_{\star}$ für Modellproblem 1, $h = \pi/2^4$ 110
8.8. Gebiet für Modellproblem 2 111
8.9. Analytische Lösung u für Modellproblem 2 112
8.10. Interfacespline u^h_{Γ} (vgl. 8.2) für Modellproblem 2, $h = \pi/2^6$ 112
8.11. Gewichteter TP-Spline $u^h_{\star}$ (vgl. 8.3) für Modellproblem 2, $h = \pi/2^6$ 113
8.12. Zusatzspline Ψ^h (vgl. 8.4) für Modellproblem 2, $h = \pi/2^6$ 113
8.13. $u - u^h_{\Gamma}$ für Modellproblem 2, $h = \pi/2^6$ 113
8.14. $u - u^h_{\star}$ für Modellproblem 2, $h = \pi/2^6$ 114

Einleitung

Bei elliptischen Dirichletrandwertproblemen der Form: Finde $u : \Omega \subset \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ so, dass

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (\alpha \nabla u) & = & f & \text{auf} & \Omega \\ u & = & 0 & \text{auf} & \partial\Omega \end{cases},$$

hängt es entscheidend von der Geometrie des Gebiets Ω und der Glattheit der Daten f, α ab, welche strukturellen Eigenschaften wir bei der Lösung der Variationsformulierung der elliptischen Gleichung (falls eine existiert) erwarten können. So erhält man beispielsweise bei gleichmäßig elliptischen Koeffizienten $0 < \alpha \in [C^{m+1}(\overline{\Omega})]^d$, rechter Seite $f \in H^m(\Omega)$ und einem glatten Gebietsrand $\partial\Omega \in C^{m+2}, m \geq 0$ nach dem wohlbekannten Weyl'schen Lemma (Shift-Theorem) [24; 27] eine eindeutige Lösung $u \in H^{m+2}(\Omega)$. Typisch für solche elliptische Gleichungen ist es, dass sich Singularitäten der Daten auf die Lösung übetragen. Wir betrachten zwei Beispiele:

(ES) Elliptische Gleichungen auf nichtglatten Gebieten ($d = 2$)

Bei polygonalen Gebieten ($d = 2$) mit einem inneren Winkel $> \pi$ treten sogenannte *Eckensingularitäten* auf, d.h. u ist selbst für $\alpha_{ij} \equiv 1$ und $f \in C^\infty(\Omega)$ im Allgemeinen nicht mehr in $H^2(\Omega)$.

(IP) Interfaceproblem

Sind $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, ein glattes Gebiet mit einer eingeschlossenen $(d-1)$-dimensionalen glatten Untermannigfaltigkeit, die Ω in $\Omega^- \Subset \Omega$ und $\Omega^+ = \Omega \setminus \Omega^-$ mit $\Omega = \Omega^+ \cup \Omega^- \cup \Gamma$ aufteilt, sowie entlang von Γ springende Koeffizienten $\alpha \in [L^\infty(\Omega)]^d$ mit $\alpha_{ij}^\pm := \alpha_{|\Omega^\pm} \in C^{m-1}(\Omega^\pm)$ und $f \in L^2(\Omega) \cap H^m(\Omega^+) \cap H^m(\Omega^-)$ gegeben. Dann ist $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^{m+2}(\Omega^-) \cap H^{m+2}(\Omega^+)$ und $[\![\alpha \nabla_\nu u]\!]_\Gamma = 0$, d.h. der Gradient in Normalenrichtung ν springt entlang von Γ, woraus $u \notin H^2(\Omega)$ folgt.

Eine Lösung für elliptische Randwertprobleme kann man nur für spezielle Geometrien und Daten analytisch herleiten, im Allgemeinen ist man auf Approximationsmethoden angewiesen. Wendet man bei den Problemen (ES) und (IP) einfach gewöhnliche Finite Elemente Approximationen für glatte Probleme an, so konvergiert zwar die Folge $(u^h)_h$ der Ritz-Galerkin-Approximanten, d.h. $\lim_{h \to 0} \|u - u^h\|_{H^1(\Omega)} = 0$, aber im Allgemeinen „zu langsam“. Die Approximationen sind in diesem Sinne unbrauchbar. Der Grund dafür ist, dass $u \in H^2(\Omega)$ eine notwendige Bedingung für die optimalen Konvergenzraten in H^1 und L^2 bei glatten FE-Verfahren ist.

1. Vernetzte Finite Elemente

Klassische Finite Elemente Verfahren für (glatte) Probleme auf konvexen polygonalen Gebieten beruhen meist auf einer Vernetzung (bzw. Zerlegung in „Elemente“) des zugrundeliegenden Gebiets in einfache geometrische Objekte und nutzen stückweise polynomiale Funktionen als Basis für einen Ansatzraum. Krummlinige Gebiete müssen somit entweder durch polygonale Gebiete approximiert werden (d.h. Randbedingungen werden nicht exakt eingehalten), oder man verwendet in Randnähe spezielle sogenannte isoparametrische Elemente. Die Gebietszerlegung stellt oft noch (gerade in $3d$) einen nichtrivialen und zeitintensiven Preprocessingschritt dar. Zur eindeutigen Bestimmung eines Finiten Elements wird in Abhängigkeit der gewünschten globalen Glattheitseigenschaften eine gewisse Anzahl von Freiheitsgraden (=lokale Dimension) für die Elemente benötigt, und die Erhöhung der lokalen und globalen Glattheit des Ansatzraums geht mit einer entsprechenden Erhöhung der Dimension einher, was zu sehr großen Ritz-Galerkin-Matrizen führt. Obwohl die vernetzten Methoden schnell von Ingenieuren und Naturwissenschaftlern erfolgreich in der Praxis für die verschiedensten Anwendungen und Simulationen angewendet wurden, war man von theoretischer Seite aus immer bestrebt, vernetzungsfreie Verfahren zu entwickeln. Gerade für komplizierte Simulationen aus der aktuellen Forschung wie dem „Two Phase Flow“ [32], bei denen sich das Simulationsgebiet mit der Zeit ändert würden vernetzungsfreie Ansätze sicherlich einen großen Gewinn darstellen.

2. Splines als Finite Elemente

B-Splines spielen in vielen Teilgebieten der Mathematik (Numerik, Approximationstheorie, Geometrische Modellierung) und in den Anwendungen (Computergraphik, Computer Aided Geometric Design ($CAGD$) uvm.) eine wichtige Rolle. Allerdings ist es auch heute noch ein offenes Problem, auf allgemeinen Gebieten einen multivariaten B-Spline anzugeben, den man als zufriedenstellende Verallgemeinerung der univariaten B-Splines ansehen kann [67]. Auf einfachen Geometrien wie Rechtecken bekommt man jedoch sehr einfach durch Tensorproduktbildung einen multivariaten B-Spline-Typ, der viele gute Eigenschaften der univariaten Splines beibehält. So wurde aufgrund der guten Approximationseigenschaften früh versucht, durch geeignete Einschränkungen auf Gebieten die innerhalb des Gitters liegen, einen vernetzungsfreien Finite Elemente Ansatzraum für elliptische Probleme mit Tensorproduktsplines zu erzeugen. Das erste Problem, das dabei auftaucht, die Nichteinhaltung von Dirichletrandbedinungen, konnte durch die Multiplikation mit einer geeigneten Gewichtsfunktion gelöst werden [53]. Allerdings zeigte sich, dass die Splinebasis durch die Einschränkung instabil wird und somit die numerische Lösbarkeit des Galerkinsystems nur für kleine Gitterweiten zufriedenstellend ist. Dies mag wohl der Grund gewesen sein, warum B-Splines von vielen Mathematikern nicht mehr ernsthaft als approximierende Elemente für die Lösungen elliptischer Randwertprobleme in Betracht gezogen wurden. Am Lehrstuhl für Numerik und Geometrische Modellierung der Universität Stuttgart beschäftigte sich eine Arbeitsgruppe von Mathematikern ab 1999 mit dem „Finite Elemente Approximation mit B-Splines“-Projekt, dessen Ziel es war, einen auf Tensorproduktsplines aufbauenden Splineraum mit einer stabilen Basis zu finden, der außerdem für eine vernetzungsfreie Finite Elemente Approximation geeignet ist. Höllig, Reif und Wipper [39; 40; 44] ist es schließlich durch eine Erweiterungsstrategie gelungen die

Basis zu stabilisieren und einen neuen B-Spline-Typ zu erzeugen (*w*eighted *e*xtended *B*-Spline = *weB*-Spline). Es wurde eine Approximationstheorie für diesen neuen Splinetyp entwickelt, woraus sich ein vernetzungsfreies FE-Verfahren auf Gebieten mit krummlinigen Rändern ergibt, welches auf eine Vielzahl von glatten elliptischen Problemen [45] angewendet werden kann. Da die Gebietsränder bei der Implementierung ebenfalls durch Splinekurven repräsentiert werden, hat man somit eine interessante vernetzungsfreie FE-Methode, die auf schnelle Splinealgorithmen zur Auswertung zugreifen kann. Aktuelle Forschungsthemen des Splineprojekts sind u.a. Multigrid-Verfahren mit Splines [42; 47], isogeometrische Approximation [46], alternative Stabilisierungsmethoden [66; 82], die generelle Approximation auf Gebieten mit Splines [82], Approximation gestreuter Daten und Hole Filling [70], merhdimensionale Integration über *NURBS*-Gebiete [49], Implementation der *weB*-Methode bei $3d$ Randwertproblemen (das Programmpaket lässt sich über `http://www.siam.org/books/fr26/` beziehen) und die FE-Approximation mit Splines auf Gebieten mit Ecken [4]. Die vorliegende Arbeit entstand von 2009 bis 2012 ebenfalls im Rahmen des Splineprojekts und untersuchte die Frage, ob man den *weB*-Raum so modifizieren kann, dass es möglich ist, die global in $H_0^1(\Omega)$ liegende Lösung u mit $\nabla_\nu u \notin L^2(\Omega)$ des Interfaceproblems (IP) optimal in H^1 zu approximieren.

3. Aufbau der Arbeit

Die Arbeit ist in die vier Abschnitte I,II,III, IV mit jeweils zwei fortlaufend nummerierten Kapiteln aufgeteilt.

I Folklore und Splines

Im ersten Kapitel des ersten Teils I werden die zum Verständnis der Arbeit wesentlichen Grundlagen knapp zusammengetragen. Es dient in erster Linie dazu, die Notation festzulegen, und um grundlegende Resultate in der Form wie wir sie brauchen, zu sammeln, und ist eher zum Nachschlagen gedacht. Das zweite Kapitel ist den Splinefunktionen gewidmet. An dieser Stelle skizzieren wir auch die Konstruktion der *weB*-Splines nach und zitieren einige wichtige Sätze.

II Elliptische Gleichungen mit unstetigen Koeffizienten

Hier untersuchen wir die strukturellen Eigenschaften der Lösung von elliptischen Randwertproblemen mit unstetigen Koeffizienten. Wir sehen uns also genau an, was wir überhaupt approximieren wollen. Es werden hier natürlich keine wesentlich neuen Ergebnisse präsentiert, jedoch geben wir im dritten Kapitel einen mit elementaren Mitteln gut nachvollziehbaren Regularitätsbeweis für allgemeine elliptische Gleichungen mit unstetigen Koeffizienten an, welcher auf einer etablierten Differenzenquotiententechnik aus der Theorie partieller Differentialgleichungen beruht, und den man nach Wissenstand das Autors so nicht in der Literatur findet. Im vierten Kapitel beschränken wir uns auf ein etwas einfacheres Modellproblem (was aber noch alle wesentlichen Schwierigkeiten beibehält), untersuchen weitere strukturelle Eigenschaften, die in diesen Gleichungen versteckt sind ($\longrightarrow$ natürliche

Sprungbedinungen) und schauen uns an dieser Stelle im Eindimensionalen an, warum glatte FE-Verfahren bei der Approximation i.A. keine optimalen Konvergenzraten liefern können. Ungefähr seit den 1970ern Jahren wurde versucht, Interfaceprobleme mit den verschiedensten Diskretisierungsverfahren zu approximieren. Die meisten beruhen auf finiten Differenzen und vernetzten Finite Elemente Diskretisierungen; wir geben dazu am Schluss des vierten Kapitels einen kleinen Überblick über die wichtigsten Arbeiten und Ansätze zu diesem Thema. Ein wirklich vernetzungsfreier FE-Ansatz für krummlinige Gebiete scheint noch nicht zu existieren.

III **Approximation mit Interfacesplines**

Da die *weB*-Methode zwar ein vernetzungfreies, aber im derzeitigen Entwicklungsstand nur für glatte Probleme ausgelegtes FE-Verfahren ist, wird es im allgemeinen nicht möglich sein Lösungen von Interfaceproblemen optimal zu approximieren. Wir konstruieren deshalb im fünften Kapitel spezielle Zusatzfunktionen (singuläre Zusatzsplines) mit denen wir den *weB*-Raum erweitern wollen. Dazu untersuchen wir einige strukturelle Eigenschaften dieses Funktionentyps und bilden anschließend mit dem *weB*-Splineraum die direkte Summe und erhalten so den Raum der *Interfacesplines*. Die grundlegende Idee dahinter ist: Können wir die Lösung in einen glatten und einen springenden Teil zerlegen, so sollen die glatten *weB*-Splines den glatten Teil und die Zusatzsplines den singulären Teil approximieren. Im sechsten Kapitel untersuchen wir die Approximationseigenschaften der Interfacesplines und beweisen für Interfacesplines der Ordnung $(1, 2)$ einen Satz vom Jackson-Typ (dessen Namen wir zu Ehren von Dunham Jackson und seinen klassischen Approximationssätzen von 1911 [51], Verallgemeinerungen in [1], gewählt haben). Mit dem Céa-Lemma sind wir damit in der Lage den Raum der Interfacesplines als Ritz-Galerkin-Ansatzraum für eine Finite Elemente Approximaton des Interfaceproblems zu nutzen.

IV **Numerik**

Im numerischen Teil IV diskutieren wir einige wichtige Aspekte die bei der Implementatierung einer vernetzungsfreien Finite Elemente Approximation mit Interfacesplines zu berücksichtigen sind und berechnen im achten Kapitel für Testbeispiele Ritz-Galerkin Approximationen an die exakten Lösungen und messen den H^1-Fehler und die H^1-Konvergenzrate.

„The beginner...should not be discouraged if...he finds that he does not have the prerequisites for reading the prerequisites“

(P. Halmos)

Teil I.

Folklore und Splines

1. Grundlegende Konzepte, Definitionen und Sätze

In diesem ersten Kapitel sammeln wir in knapper Form unter anderem Resultate über Sobolevräume, z.B. [2; 24; 30], Approximation in Hilberträumen sowie der klassischen Finite Elemente Methode [11; 26; 14], welche man heute durchaus als Allgemeinwissen (Folklore) in den angesprochenen Gebieten bezeichnen kann und bei uns eine tragende Rolle spielen. Fast alle Aussagen findet man so oder in ähnlicher Form ausführlich in den angegebenen Referenzen, weshalb wir nur an speziellen Stellen noch weitere Literatur hinzufügen.

1.1. Etwas Notation

Wir bezeichnen mit Ω ein Gebiet des $\mathbb{R}^d$ und mit $\partial\Omega$ dessen Rand. Ist $\Omega^\star \subset \Omega$ kompakt enthalten, so notieren wir $\Omega^\star \Subset \Omega$. Zu einer Funktion $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ ist $\operatorname{supp} = \overline{\{x \in \Omega : u(x) \neq 0\}}$ der *Träger* von u auf Ω. Ist $x = (x_1, ..., x_d), y = (y_1, ..., y_d) \in \mathbb{R}^d$, so ist $x \cdot y = \langle x, y\rangle_d = \sum_{i=1}^d x_i y_i$ das euklidsche Skalarprodukt, $\|x\|_d = \sqrt{\langle x, x\rangle_d}$ die induzierte euklidsche Norm und $\|x - y\|_d$ die Standardmetrik auf dem $\mathbb{R}^d$. Mit einem Multiindex $\alpha := (\alpha_1, ..., \alpha_d)^\top, \alpha_i \in \mathbb{N}, i = 1, ..., d, |\alpha| := \sum_{i=1}^d \alpha_i$ nutzen wir für hinreichend glattes u das Symbol

$$\partial^\alpha u = \partial_{x_1^{\alpha_1},...,x_d^{\alpha_d}} := \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} ... \partial x_d^{\alpha_d}} u \tag{1.1}$$

für die partiellen Ableitungen der Ordnung $|\alpha|$. Sprechen wir von „glatt“ oder „hinreichend glatt“, so meinen wir den im konkreten Fall benötigten Mindestgrad an Glattheit. Zur Vereinfachung schreiben wir wie üblich bei konkreten Rechnungen nur die Koordinatenrichtungen an, nach denen tatsächlich abgeleitet wird also z.B. $\partial_{x_1} u$ anstatt $\partial^{(1,0)} u$ oder $\partial_{x_1,x_2} u = u_{x_1,x_2}$ für $\partial^{(1,1)} u$ im zweidimensionalen Fall. Den Gradienten von u kennzeichnen wir mit dem Nabla-Symbol

$$\nabla u := (\partial_{x_1} u, ..., \partial_{x_d} u)^\top \tag{1.2}$$

und für eine glatte vektorwertige Funktion $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^d$ mit $\tilde{u} := (u_1, ..., u_d)^\top$, bezeichnen wir mit

$$\nabla \cdot u := \sum_{i=1}^d \partial_{x_i} u_i \tag{1.3}$$

die Divergenz von u. Mit Hilfe des Gradienten und der Divergenz erhalten wir z.B. durch

$$\Delta u := \nabla \cdot (\nabla u) \tag{1.4}$$

den Laplace-Operator. Existiert an $\partial\Omega$ die nach außen gerichtete Normale $\nu \in \mathbb{R}^d$ in einem gewissen Sinn, so notieren wir für die Ableitung in Normalenrichtung kurz

$$\nabla_\nu u := \langle \nabla u, \nu\rangle_d. \tag{1.5}$$

Sind Konstanten bei Abschätzungen für uns nicht relevant bzw. hängen diese nicht von generischen Größen wie z.B. der Gitterweite h oder einer zu approximierenden Funktion u ab, so schreiben wir für $a, b \in \mathbb{R}$ und Konstanten $c, C \in \mathbb{R}^+$ für

$$a \leq Cb, \quad a \geq cb, \quad cb \leq a \leq Cb$$

abkürzend

$$a \preceq b, \quad a \succeq b, \quad a \asymp b.$$

Sind X, Y Banachräume mit Normen $\|\cdot\|_X, \|\cdot\|_Y$ mit $X \subseteq Y$ und $\|u\|_Y \leq \|u\|_X$, $\forall u \in X$, so schreiben wir kurz $X \hookrightarrow Y$. Wir sagen dann X ist stetig in Y eingebettet.

1.2. Funktionenräume

Zunächst listen wir die Räume klassisch differenzierbarer Funktionen auf Gebieten $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ auf und führen eine Klassifikation für Gebietsränder, wie es z.B. in [24] geschieht, ein.

1.2.1. Gebiete und klassisch differenzierbare Funktionen

Die wichtigsten Funktionenklassen stetig differenzierbarer Funktionen bezeichnen wir wie folgt. Hierbei ist $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$ und $\mathbb{N}_\infty := \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

- $C^m(\Omega) := \left\{u : \Omega \to \mathbb{R} : \exists \partial^\alpha u \in C^0(\Omega), |\alpha| \leq m \in \mathbb{N}\right\}$
- $C^\infty(\Omega) := \cap_{m=0}^\infty C^m(\Omega)$
- $C_0^m(\Omega) := \{u \in C^m(\Omega) : \operatorname{supp} u \Subset \Omega\}$
- $C^m(\overline{\Omega}) := \{u \in C^m(\Omega) : \partial^\alpha u_{|\Omega}$ ist gleichmäßig stetig und beschränkt, $|\alpha| \leq m \in \mathbb{N}_\infty\}$
- $C^{m,\beta}(\overline{\Omega}) := \{u \in C^m(\overline{\Omega}) : \sup_{x \neq y} \frac{|\partial^\alpha u(x) - \partial^\alpha u(y)|}{|x-y|^\beta} < \infty, \beta \in (0,1], |\alpha| \leq m \in \mathbb{N}_\infty\}$.

Letzteren Raum nennt man *Hölderraum* mit *Hölderexponenten* β. Ist $\beta = 1$, so nennt man eine Funktion $C^{0,1} =: Lip$ *lipschitz*. Analog dazu ist $Lip_m, 1 < m \leq |\alpha|$ definiert. Den Fall $\beta = 0$ ergänzen wir noch durch $C^{m,0}(\overline{\Omega}) := C^m(\overline{\Omega})$. Die Hölderräume für $\beta > 0$ spielen bei uns nur für die Gebietsklassifikation und als verallgemeinerte Version eine kleine Rolle. Da man $u \in C^m(\overline{\Omega})$ und sämtliche Ableitungen $\partial^\alpha u$ eindeutig auf $\overline{\Omega}$ stetig fortsetzen kann, stimmen die Räume $C^m(\Omega^\star)$ und $C^m(\overline{\Omega})$ für kompaktes $\Omega^\star$ und beschränktes Ω mit $\Omega^\star = \overline{\Omega}$ überein.

Definition 1.2.1 (Gebiete der Klasse $C^{m,\beta}$)
Wir sagen, ein beschränktes Gebiet Ω ist von der Klasse $C^{m,\beta}, 0 \leq m \leq \infty, \beta \in [0,1]$ bzw. $\partial\Omega \in C^{m,\beta}$, falls es zu jedem $\xi \in \partial\Omega$ nach einer eventuellen glatten Transformation des Koordinatensystems eine Umgebung

$$O_\xi := \left\{(\tilde{x}, x_d) \in \mathbb{R}^d : \tilde{x} = \tilde{y}, x_d = \varphi_\xi(\tilde{y}) + y_d, |y_d| < \epsilon_\xi\right\}, \tag{1.6}$$

wobei $(\tilde{x}, x_d) = (x_1, ..., x_{d-1}, x_d) \in \mathbb{R}^d$, $\varphi_\xi \in C^{m,\beta}(\overline{B_{\delta_\xi}(0)}) \longrightarrow \mathbb{R}$, $\varphi_\xi(0) = \xi$ *mit*

$$B_{\delta_\xi}(0) := \left\{\tilde{y} = (y_1, ..., y_{d-1}) \in \mathbb{R}^{d-1} : |\tilde{y}| < \delta_\xi\right\} \tag{1.7}$$

und $\epsilon_\xi, \delta_\xi \in \mathbb{R}^+$ *gibt, so dass* $\partial\Omega \cap O_\xi = \text{graph}(\varphi_\xi)$, $\Omega \cap O_\xi \subset \Omega$ *für* $y_d > 0$ *und* $\Omega \cap O_\xi \subset \Omega^c$ *für* $y_d < 0$. *Ist* φ_ξ *eine stückweise* $C^{m,\beta}$*-Funktion, so sprechen wir von stückweisen* $C^{m,\beta}$*-Gebieten und speziell für* $\beta = 1$ *von Lipschitzgebieten.*

Insbesondere besitzt jedes $C^{m,\beta}$-Gebiet die *Segmenteigenschaft*, d.h. Ω befindet sich nur auf einer Seite von $\partial\Omega$, und genügt auch einer *Kegelbedingung*. Für eine exakte Definition siehe [86]. Beispielsweise wird im $\mathbb{R}^2$ die Kegelbedingung bei stückweise glatten Gebieten mit einem inneren Winkel von 0 und die Segmenteigenschaft bei Polygongebieten mit einem inneren Winkel $\in (0, 2\pi)$ verletzt. Dagegen sind Polygongebiete mit inneren Winkeln $< 2\pi$ lipschitz.

Glatte Ränder lassen sich lokal „geradebiegen“, d.h. es existiert zu jedem Punkt des Rands eine Umgebung, die diffeomorph auf die offene Kugel $B_1(0) := \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\|_d < 1\}$ (genauso gut gehen natürlich auch offene Würfel $(0,1)^d$, vgl. [86]), abgebildet werden kann. Genauer gilt:

Satz 1.2.1 (Lokales Geradebiegen)
Ein beschränktes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ *ist genau dann in der Klasse* $C^{m,\beta}, m \in \mathbb{N}$, *falls es offene Mengen* $\mathcal{U}_\nu, \nu = 1, ..., N \in \mathbb{N}$ *und* $C^{m,\beta}$*-Diffeomorphismen* $\Phi_\nu : \mathcal{U}_\nu \to B_1(0)$ *gibt, so dass*

- $\Phi_\nu(\mathcal{U} \cap \Omega) = \{(y_1, ..., y_{d-1}, y_d) \in B_1(0) : y_d > 0\} =: B_1^+(0)$
- $\Phi_\nu(\mathcal{U} \cap \Omega^c) = \{(y_1, ..., y_{d-1}, y_d) \in B_1(0) : y_d < 0\} =: B_1^-(0)$
- $\Phi_\nu(\mathcal{U} \cap \partial\Omega) = \{(y_1, ..., y_{d-1}, y_d) \in B_1(0) : y_d = 0\} =: B_1^0(0)$.

1.2.2. Sobolev-Räume

Die Sobolev-Räume sind Teilräume von (Lebesgue)-integrierbaren Funktionen, weshalb wir uns kurz die L^p - Räume in Erinnerung rufen. Bezeichnen wir mit $\mathcal{M}(\Omega)$ die Menge aller über Ω (μ)-messbaren Funktionen (bei uns: meas bzw. meas_d ist das gewöhnliche Volumen-Maß im $\mathbb{R}^d$) und setzen wir

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} := \left(\int_\Omega (|u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

sowie

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} := \inf \left\{ \sup_{x \in \Omega \setminus N} |u(x)| : N \subset \Omega, \mu(N) = 0 \right\},$$

so ist

$$L^p(\Omega) := \left\{ u \in \mathcal{M}(\Omega) : \|u\|_{L^p(\Omega)} < \infty \right\} \quad \text{für} \quad 1 \leq p < \infty$$

der Raum der p-integrablen und

$$L^\infty(\Omega) := \left\{ u \in \mathcal{M}(\Omega) : \|u\|_{L^\infty(\Omega)} < \infty \right\}$$

der Raum der auf Ω wesentlich beschränkten messbaren Funktionen. Wie üblich identifizieren wir dabei messbare Funktionen, die fast überall (f.ü.), d.h. bis auf einer Nullmenge auf Ω übereinstimmen, und können somit zu den Faktorräumen der resultierenden

Äquivalenzklassen übergehen. Ist $u \in C(\overline{\Omega})$ und $\overline{\Omega}$ kompakt, so ist offenbar $\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \max_{x\in\Omega} |u(x)|$, der Raum $C(\overline{\Omega})$ ist dann bezüglich L^∞-Norm abgeschlossen. Durch $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$, $1 \le p \le \infty$ werden die Räume $L^p(\Omega)$ normiert und sind Banachräume. $L^2(\Omega)$ ist Hilbertraum mit innerem Produkt

$$(u,v)_{L^2(\Omega)} := \int_\Omega uv\,dx.$$

Ist $u \in L^p(\Omega), v \in L^q(\Omega)$, mit $1 < p, q < \infty$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, so ist $uv \in L^1(\Omega)$, und es gilt die *Höldersche Ungleichung*

$$\|uv\|_{L^1(\Omega)} \le \|u\|_{L^p(\Omega)}\|v\|_{L^q(\Omega)}. \tag{1.8}$$

Ist $1 \le p \le q \le \infty$ und $\mathrm{meas}(\Omega) < \infty$, dann gilt die *Lebesguesche Einbettung* $L^q \hookrightarrow L^p$, genauer ist

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \le \mathrm{meas}(\Omega)^{1/p-1/q}\|u\|_{L^q(\Omega)}, \tag{1.9}$$

wobei $q^{-1} = 0$ für $q = \infty$ gesetzt wird. Die Lebesgue-Räume über Gebieten mit endlichem Maß bilden also eine absteigende Inklusionskette.
Von gewisser Bedeutung sind auch noch die Räume der lokal-integrablen Funktionen $L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega_0) : \forall \Omega_0 \subset\subset \Omega\}$. Für $\mathrm{meas}(\Omega) < \infty$ bekommt man z.B. $L^p(\Omega) \hookrightarrow L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Von großer Bedeutung ist noch das *Variationslemma*: Ist $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ und

$$\int_\Omega u\varphi\,dx = 0 \quad \text{für alle} \quad \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \tag{1.10}$$

dann ist $u \equiv 0$ fast überall auf Ω. Der Raum $C^m(\Omega)$ ist bezüglich der *Sobolev-Norm*

$$\|u\|_{H^{m,p}(\Omega)} := \left(\sum_{0\le|\alpha|\le m} \int_\Omega (\partial^\alpha u)^p dx\right)^{1/p}, \quad 1 \le p < \infty \tag{1.11}$$

unvollständig. Schließen wir $C^m(\Omega)$ bezüglich 1.11 ab, so erhalten wir den *Sobolev-Raum*

$$H^{m,p}(\Omega) := \overline{C^m(\Omega)}^{\|u\|_{H^{m,p}(\Omega)}}. \tag{1.12}$$

Ist Ω lipschitz, so kann $C^m(\Omega)$ durch $C^m(\overline{\Omega})$ ersetzt werden. Für $1 \le p < \infty$ werden $H^{m,p}(\Omega), m \in \mathbb{N}$, durch $\|\cdot\|_{H^{m,p}(\Omega)}$ zu Banachräumen. Für $p = 2$ ist $H^m(\Omega) := H^{m,2}(\Omega)$ Hilbert-Raum mit innerem Produkt

$$(u,v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{0\le|\alpha|\le m} \int_\Omega \partial^\alpha u \partial^\alpha v\,dx. \tag{1.13}$$

Insbesondere gilt im Sinne linearer Isometrie $H^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$. Eine andere Charakterisierung der Sobolev-Funktionen wird über das Konzept der schwachen Ableitung einer lebesgue-integrierbaren Funktion ermöglicht. Für ein Lipschitzgebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ und $u \in C^1(\overline{\Omega})$ gilt der Gaußsche Integralsatz

$$\int_\Omega \partial_{x_i} u\,dx = \int_{\partial\Omega} u\nu_i\,d\sigma, \quad i = 1, ..., d, \tag{1.14}$$

wobei $\nu := (\nu_1, ..., \nu_d)$ die auf $\partial\Omega$ f.ü. existierende äußere Normale und $d\sigma$ das klassische Oberflächenmaß bezeichnet. Ersetzen wir u in 1.14 durch ein Produkt $u \cdot v$ mit $u, v \in C^1(\overline{\Omega})$, so ergibt sich bekanntlich die mehrdimensionale partielle Integration

$$\int_\Omega u \partial_{x_i} v \, dx = -\int_\Omega \partial_{x_i} uv \, dx + \int_{\partial\Omega} uv\nu_i \, d\sigma. \tag{1.15}$$

Für $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ und $u \in C^m(\Omega)$ gelangen wir durch Induktion zu der folgenden Version

$$\int_\Omega \partial^\alpha u \varphi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u \partial^\alpha \varphi \, dx, \quad |\alpha| \leq m, \tag{1.16}$$

welche uns zur Definition eines verallgemeinerten (schwachen) Ableitungbegriffs führt:

Definition 1.2.2 (Schwache Ableitung)
Es sei $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Man nennt eine Funktion $\partial^\alpha_\omega u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ (α-te) schwache Ableitung von u, falls

$$\int_\Omega \partial^\alpha_\omega u \varphi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u \partial^\alpha \varphi \, dx, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \tag{1.17}$$

Da jedes $u \in C^m(\overline{\Omega})$ auch schwach differenzierbar ist, stimmt die gewöhnliche Ableitung mit der schwachen Ableitung überein, weshalb der Index ω nicht nötig ist. Aus dem Variationslemma 1.10 folgt die Eindeutigkeit einer schwachen Ableitung. Setzen wir an dieser Stelle $W^{m,p}(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega) : \exists \partial^\alpha u \in L^p(\Omega) \text{ für } |\alpha| \leq m\}$, dann gilt sogar für beliebige Gebiete und $1 \leq p < \infty$ nach Meyers und Serrin das bemerkenswerte Resultat $H^{m,p}(\Omega) = W^{m,p}(\Omega)$, vgl. [64]. Obwohl die meisten der nun gelisteten Resultate über Sobolevräume $H^{m,p}, 1 \leq p < \infty$ ihre Gültigkeit behalten, beschränken wir uns ab jetzt meist auf den in dieser Arbeit relevanten Fall $p = 2$. Folgende Version der Produktregel ist äußerst praktisch, vgl. für den ersten Teil [3] und den zweiten Teil [7].

Satz 1.2.2 (Sobolev-Produktregel)
Sind $u, v \in H^m(\Omega)$, so ist $uv \in H^{m,1}(\Omega)$, und es gilt

$$\partial^\alpha uv = \sum_{|\beta| \leq |\alpha|} \binom{|\alpha|}{|\beta|} (\partial^{\alpha-\beta} u) \partial^\beta v, \quad \forall |\alpha| \leq m. \tag{1.18}$$

Sind speziell im Fall $m = 1$ noch $v \in L^\infty(\Omega), \nabla v \in [L^\infty(\Omega)]^d$, dann ist $uv \in H^1(\Omega)$ und

$$\partial_{x_i}(uv) = (\partial_{x_i} u) \, v + (\partial_{x_i} v) \, u, \quad i = 1, ..., d. \tag{1.19}$$

Transformieren wir den Definitionsbereich einer Sobolevfunktion mit einem hinreichend glatten Diffeomorphismus, so unterscheiden sich die entsprechenden Größen im Wesentlichen nur um multiplikative Konstanten. Genauer gilt der

Satz 1.2.3 (Transformationssatz)
Seien $\Omega, \tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^d$ Gebiete und $\Phi : \Omega \longrightarrow \tilde{\Omega}$ ein C^m-Diffeomorphismus. Für $m \in \mathbb{N}$ ist dann $u \circ \Phi \in H^m(\tilde{\Omega})$, und es gilt

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} \asymp \|u \circ \Phi\|_{H^m(\tilde{\Omega})} \quad \forall u \in H^m(\Omega). \tag{1.20}$$

Der berühmte *Einbettungssatz von Sobolev* zeigt das Zusammenspiel von Raumdimension und (schwacher) Differenzierbarkeit auf und klärt die Frage, unter welchen Voraussetzungen an diesen Größen sich Sobolevräume in Räume klassisch differenzierbarer Funktionen einbetten lassen. Wir begnügen uns mit der folgenden Variante:

Satz 1.2.4 (Sobolevscher Einbettungssatz)
Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein Lipschitzgebiet mit $k, m \in \mathbb{N}$. Für $m - k > d/2$ existiert die stetige Einbettung

$$H^m(\Omega) \hookrightarrow C^k(\overline{\Omega}),$$

d.h.

$$\max_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)} \preceq \|u\|_{H^m(\Omega)} \quad \forall u \in H^m(\Omega). \tag{1.21}$$

1.2.3. Randwerte und Sobolevräume mit positiver reeller Ordnung

Zu einem Lipschitzgebiet Ω gibt es nach Definition 1.2.1 endlich viele stetig differenzierbare Funktionen $\varphi_i : \tilde{O}_i \to \mathbb{R}, \tilde{O}_i \subset \mathbb{R}^d$, O_i offen mit $\partial\Omega \subset \bigcup_{i=1}^N O_i$, sowie Diffeomorphismen $\phi_i : O_i \longrightarrow B_1(0), i = 1, ..., N$. Das lokale Koordinatensystem bezeichnen wir für jedes $i = 1, ..., N$ mit $(\tilde{x}, x_d)$, wobei $\tilde{x} = (x_1, ..., x_{d-1})$. Dann ist $(\tilde{x}, \varphi_i(\tilde{x})) \in \partial\Omega$. Eine Funktion $u : \partial\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt messbar auf $\partial\Omega$, falls $u_i(\tilde{x}) := (\phi_i(u))(\tilde{x}, \varphi_i(\tilde{x}))$, messbar auf $\tilde{O}_i, i = 1, ..., N$ ist und u heißt auf $\partial\Omega$ integrierbar, falls $u_{|\partial\Omega}$ messbar ist und das Integral

$$\int_{\partial\Omega} u_i(\tilde{x}) d\sigma_i := \int_{\tilde{O}_i} (\phi_i(u))(\tilde{x}, \varphi_i(\tilde{x})) \sqrt{1 + |\nabla\varphi_i|^2} d\tilde{x}$$

existiert. Hierbei ist $d\sigma_i = \sqrt{1 + |\nabla\varphi_i|^2} d\tilde{x}$ das lebesguesche Oberflächenmaß. Summieren wir die endlich vielen Integrale, so gelangen wir zum Randintegral $\int_{\partial\Omega} u d\sigma := \sum_{i=1}^N \int_{\partial\Omega} u_i \, d\sigma_i$ und damit zu dem durch

$$\|u\|_{L^2(\partial\Omega)} = \left(\int_{\partial\Omega} |u|^2 \, d\sigma \right)^{1/p}$$

normierten linearen Raum $L^2(\partial\Omega) := \left\{ u : \partial\Omega \to \mathbb{R} : \|u\|_{L^2(\partial\Omega)} < \infty \right\}$. Randwerte von einer Funktion aus einem Sobolevraum kann man nun mit Hilfe eines Spuroperators sinnvoll festlegen.

Satz 1.2.5 (Spursatz, 1. Version)
Zu einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ der Klasse C^{m-1} gibt es zu jedem $|\alpha| \leq m - 1, m \geq 1$ einen eindeutigen stetigen linearen Operator

$$\gamma^\alpha : H^m(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$$

mit der Eigenschaft $\gamma^\alpha u = \partial^\alpha u|_{\partial\Omega}$, für alle $u \in C^m(\overline{\Omega})$.

1.2.5 Bei elliptischen Randwertproblemen mit Dirichletrand spielt der Raum

$$H_0^m(\Omega) := \ker \gamma^m \left(H^m(\Omega) \right)$$

eine herausragende Rolle. $H_0^m(\Omega)$ ist als abgeschlossener Unterraum von $H^m(\Omega)$ selbst Hilbertraum. Diesen erhält man z.B. auch durch den Abschluss $H_0^m(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|u\|_{H^1(\Omega)}}$,

das Variationslemma 1.10 behält somit auch für $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ seine Gültigkeit. Für $u \in H^m(\Omega)$ ist die Größe $|u|_{H^m(\Omega)} := \sqrt{\sum_{|\alpha|=m} \|\partial^\alpha u\|^2_{L^2(\Omega)}}$ nur eine Seminorm. Wegen der *Poincaré - Ungleichung*

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} \asymp |u|_{H^m(\Omega)} \quad \forall u \in H_0^m(\Omega), \mathrm{meas}(\Omega) < \infty \tag{1.22}$$

ist diese aber für beschränkte Gebiete in $H_0^m(\Omega)$ zur vollen Sobolev-Norm äquivalent. Mit Hilfe eines Dichtheitsarguments und des Spuroperators lässt sich Gauß 1.14 auf Sobolevfunktionen übertragen,

$$\int_\Omega \partial_{x_i} uv\, dx = \int_{\partial\Omega} \gamma u \gamma v \nu_i d\sigma - \int_\Omega u v_{x_i}\, dx \quad \forall u, v \in H^1(\Omega), \quad i = 1...d. \tag{1.23}$$

Oft ist es hilfreich, die Funktionen aus $H^m(\Omega)$ auf ein größeres Gebiet fortzusetzen.

Satz 1.2.6 (Calderon-Stein-Fortsetzungen)
Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet oder $\Omega = \mathbb{R}^d$. Dann existiert für $\Omega_0 \Subset \Omega$ mit $\partial\Omega_0 \in C^{m-1,1}$ und $m > 0$ ein von k unabhängiger stetiger Operator $\mathcal{E} : H^k(\Omega_0) \to H^k(\Omega)$ mit der Eigenschaft $\mathcal{E}u|_{\Omega_0} = u$ für alle $u \in H^k(\Omega)$. Es ist dann

$$\|\mathcal{E}u\|_{H^k(\Omega_0)} \preceq \|u\|_{H^k(\Omega)}, \quad 0 \le k \le m. \tag{1.24}$$

Ist $\Omega \in Lip$, so gilt der Satz immer noch, nur ist $\mathcal{E}$ dann von k abhängig, vgl. [86].
Eine gewisse Verallgemeinerung der Hölder-Räume erhält man durch das Konzept der Sobolev-Räume mit (positiv) reellem Glattheitsgrad. Zerlegen wir $s \in \mathbb{R}^+$ durch $s = m + \epsilon$ mit $m = [s] \in \mathbb{N}$ und $\epsilon \in (0, 1)$, so nennt man

$$H^s(\Omega) := \left\{ u \in H^m(\Omega) : \|u\|_{H^s(\Omega)} < \infty \right\}$$

den Sobolev-Raum mit Ordnung s. Hierbei bezeichnet

$$\|u\|_{H^s(\Omega)} := \left(\|u\|^2_{H^m(\Omega)} + \left(\sum_{|\alpha|=m} \int_\Omega \int_\Omega \frac{|\partial^\alpha u(x) - \partial^\alpha u(y)|^2}{\|x-y\|_d^{d+2\epsilon}} dxdy \right) \right)^{1/2}$$

die in der Literatur als *Sobolev-Slobodeckij*-Norm bekannte Größe. Der Raum $H^s(\Omega)$ ist ein Hilbertraum mit Norm $\|\cdot\|_{H^s(\Omega)}$ und dem inneren Produkt

$$(u, v)_{H^s(\Omega)} := (u, v)_{H^m(\Omega)} + \sum_{|\alpha|=m} \int_\Omega \int_\Omega \frac{(\partial^\alpha u(x) - \partial^\alpha u(y))(\partial^\alpha v(x) - \partial^\alpha v(y))}{\|x-y\|_d^{d+2\epsilon}} dxdy.$$

Ist $\partial\Omega \in C^1$ und $s \in \mathbb{R}_0^+$, so gilt die folgende Einbettung nach *Rellich-Kondrachev* [86]

$$H^{s'}(\Omega) \hookrightarrow H^s(\Omega), \quad \forall s' \in \mathbb{R}, s' > s. \tag{1.25}$$

Mit Hilfe der Sobolev-Räume mit reellwertiger Ordnung $s > 0$ lassen sich Sobolev-Räume $H^s(\Gamma)$ auf glatten $d-1$ dimensionalen Untermannigfaltigkeiten $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$ definieren. Dies

geschieht in ähnlicher Weise, wie wir die Lebesgue-Räume auf Rändern eingeführt haben, siehe Defintion 6.40 aus [24], oder [86]. Insbesondere ist $H^0(\Gamma) = L^2(\Gamma)$, und die Größe

$$\|u\|_{H^s(\Gamma)} := \left(\sum_{|\alpha|\leq[s]} \|\partial^\alpha u\|^2_{L^2(\Gamma)} + \sum_{|\alpha|\leq[s]} \int_\Gamma \int_\Gamma \frac{\partial^\alpha (v(x)-v(y))^2}{\|x-y\|_d^{d-1+2\epsilon}} d\sigma_x d\sigma_y \right)^{1/2}$$

ist eine Norm für $H^s(\Gamma)$ mit $s = [s] + \epsilon, \epsilon \in (0,1)$. Damit erhalten wir eine allgemeinere Version des Spursatzes [30]:

Satz 1.2.7 (Spursatz 2. Version)
Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ und $\partial\Omega \in C^{m,1}, m \in \mathbb{N}_0$. Dann existiert für $s \leq m+1, s-1/2 = \ell + \epsilon$ mit $\epsilon \in (0,1)$ und $\ell \in \mathbb{N}_0$ ein komponentenweise linearer Operator

$$\gamma^\ell : H^s(\Omega) \longrightarrow \prod_{j=0}^{\ell} H^{s-j-1/2}(\partial\Omega). \tag{1.26}$$

Hierbei ist

$$\gamma^\ell u = (\gamma_1 u, ..., \gamma_\ell u) = (u, \partial_\nu u, ..., \partial_\nu^\ell u) \quad \forall u \in C^\ell(\overline{\Omega}),$$

und es gilt

$$\|\gamma_j u\|_{H^{s-j-1/2}(\partial\Omega)} \preceq \|u\|_{H^s(\Omega)}, \quad \forall u \in H^s(\Omega), j = 0, ..., \ell. \tag{1.27}$$

Das heißt $\gamma_j, j = 0, ..., \ell$ sind auf $H^s(\Omega)$ stetig.

1.3. Ritz-Galerkin-Approximation in Hilberträumen

Einen reellen Hilbertraum X mit innerem Produkt $(\cdot,\cdot)_X : X \times X \to \mathbb{R}$, $(u,v) \mapsto (x,y)_X$ und induzierter Norm $\|x\|_X := \sqrt{(x,x)_X}, x \in X$ bezeichnen wir mit $(X, \|\cdot\|_X)$. Es seien jetzt $(U, \|\cdot\|_U)$ und ein weiterer Hilbertraum $(W, \|\cdot\|_W)$ gegeben. Durch

$$\mathcal{L}(U,W) := \{\mathcal{A} : U \to W : \mathcal{A} \text{ linear und } \|\mathcal{A}\|_{U\to W} < \infty\} \tag{1.28}$$

mit

$$\|\mathcal{A}\|_{U\to W} := \sup_{\substack{u\in U \\ \|u\|_U = 1}} \|\mathcal{A}u\|_W \tag{1.29}$$

notieren wir die Menge aller stetigen linearen Abbildungen $\mathcal{A}$ von U nach W. Ist speziell $W = \mathbb{R}$, so ist $\mathcal{A}$ ein lineares Funktional und man schreibt U' anstatt $\mathcal{L}(U,\mathbb{R})$. Jedem Element aus U' läßt sich via $(\cdot,\cdot)_U$ eindeutig ein Element aus U zuordnen. Dies ist das Ergebnis des folgenden grundlegenden Satzes.

Satz 1.3.1 (Rieszscher Darstellungssatz)
Zu $\ell \in U'$ existiert genau ein $u \in U$, so dass

$$\ell(v) = (u,v)_U \quad \forall v \in U. \tag{1.30}$$

Betrachten wir anstatt eines inneren Produkts etwas allgemeiner eine Bilinearform

$$a : U \times U \to \mathbb{R}, \quad u, v \mapsto a(u, v),$$

d.h. es wird von a nur die Linearität in jedem Argument gefordert: $a(\alpha u_1 + \beta u_2, v) = \alpha a(u_1, v) + \beta a(u_2, v)$, $a(v, \alpha u_1 + \beta u_2) = \alpha a(v, u_1) + \beta a(v, u_2), \forall u_1, u_2, v \in U, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, so nennen wir a *stetig*, falls es eine Konstante $\sigma \geq 0$ gibt, so dass

$$|a(u, v)| \leq \sigma \|u\|_U \|v\|_U, \ \forall u, v \in U \tag{1.31}$$

und *koerziv*, falls es ein $\kappa > 0$ gibt, so dass

$$|a(u, v)| \geq \kappa \|u\|_U^2, \ \forall u \in U. \tag{1.32}$$

Ist a stetig und koerziv, so bezeichnet man a auch als *elliptisch*. Eine Verallgemeinerung des Rieszschen Darstellungssatzes für Bilinearformen gelingt, wenn man für a die beiden eben genannten Eigenschaften fordert:

Satz 1.3.2 (Lax-Milgram)
Ist a eine elliptische Bilinearform auf dem Hilbertraum U, so existiert zu jedem $\ell \in U'$ genau ein $u \in U$ mit

$$a(u, v) = \ell(v) \quad \forall v \in U. \tag{1.33}$$

Als Folgerung: Ist a darüberhinaus eine symmetrische Bilinearform, d.h. $a(u, v) = a(v, u)$ $\forall\, u, v \in U$, so minimiert u das Funktional $J(v) := \frac{1}{2} a(v, v) - \ell(v)$.
Wir betrachten nun einen linearen und stetigen Operator $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset U \to U$ mit Definitionsbereich $D(\mathcal{A})$ sowie eine Menge $V \subset D(\mathcal{A})$ und stellen uns die Frage, unter welchen Voraussetzungen es zu gegebenen $f \in U$ für die Operatorgleichung

$$\begin{cases} \text{Finde}\, u \in V, \ \text{so dass} \\ \mathcal{A}u = f \end{cases} \tag{1.34}$$

genau eine Lösung existiert und ob diese stetig von den Daten abhängt. Mit anderen Worten fragen wir nach der Wohlgestelltheit von 1.34 im *Hadamardschen* Sinn.
Von besonderem Interesse sind für uns solche Operatoren $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(D(\mathcal{A}), U)$, für die sich $V \subset D(\mathcal{A})$ als ein in U stetig eingebetteter Hilbertraum herausstellt und 1.34 sich mit Hilfe einer geeigneten V-Bilinearform a und eines von f abhängigen Funktionals $\ell_f \in V'$ in ein äquivalentes *Variationsproblem* umformulieren lässt:

$$\begin{cases} \text{Finde}\, u \in V, \ \text{so dass} \\ a(u, v) = \ell_f(v), \quad \forall v \in V. \end{cases} \tag{1.35}$$

Ist a eine elliptische Bilinearform auf V, so besitzt das Variationsproblem 1.35 nach 1.3.2 eine eindeutig bestimmte Lösung in V. Setzen wir $v = u$, so folgt aus der Koerzivität von a

$$\kappa \|u\|_V^2 \leq a_V(u, u) = \ell_f(u) \leq \|\ell_f\|_{V'} \|u\|_V,$$

woraus wir sofort

$$\|u\|_V \leq \frac{1}{\kappa} \|\ell_f\|_{V'} \tag{1.36}$$

erhalten. Damit hängt die Lösung stetig von den Daten ab und wir bekommen eine positive Antwort auf die Frage der Wohlgestelltheit der Operatorgleichung 1.34 bzw. des zugehörigen Variationsproblems 1.35 als Folgerung aus dem Satz von Lax-Milgram 1.3.2. Die von uns postulierte Voraussetzung $V \hookrightarrow U$ ist oft hinreichend dafür, dass wir $\ell_f \in V'$ sicherstellen können. Es sei nun ein Problem der Art 1.34 in der Form eines äquivalenten Variationsproblems 1.35 auf $(V, \|\cdot\|_V)$ mit elliptischer Bilinearform a und $\ell_f = \ell \in V'$ gegeben und wir möchten die eindeutige Lösung u durch ein Element u^h aus einem endlichdimensionalen linearen Unterraum $V_h = \operatorname{span}\{\Psi_j\}_{j=1,\dots,d_h} \subset V$ mit $\dim V_h = d_h \in \mathbb{N}$ approximieren. Aus 1.35 folgt

$$a(u^h, v^h) = \ell(v^h), \ \forall v^h \in V_h. \tag{1.37}$$

Testen wir 1.37 mit den Basiselementen $\Psi_j, j = 1, ..., d_h$, so erhalten wir ein lineares Gleichungssystem

$$\sum_{i=1}^{d_h} a(\Psi_i^k, \Psi_j^k) u_i = \ell(\Psi_j), \quad j = 1, ..., d_h, \tag{1.38}$$

welches wir kurz als

$$GU = F$$

mit der Galerkin-Matrix $G := (a(\Psi_i, \Psi_j))_{i,j=1,\dots,d_h}$, den Koeffizienten $U := (u_1, ..., u_{d_h})^T$ und der rechten Seite $F := (\ell(\Psi_1), ..., \ell(\Psi_{d_h})^T$ schreiben können. Für eine elliptische Bilinearform a ist das System eindeutig lösbar, da dann G positiv definit und mithin nichtsingulär ist. Man nennt das mit den eindeutig bestimmten Koeffizienten $u_i, i = 1, ..., d_h$ gebildete Element $u^h = \sum_{j=1}^{d_h} u_j \Psi_j$ die *Ritz-Galerkin-Approximation* an die eindeutige Lösung $u \in V$ des Variationsproblems 1.35. Ist a ein inneres Produkt, so wird durch a auf V die sogenannte *„Energienorm“* $\|\cdot\|_E$ definiert und es ist u^h die Bestapproximierende aus V_h an u:

$$\|u - u^h\|_E = \inf_{v^h \in V_h} \|u - v^h\|_E. \tag{1.39}$$

Insbesondere ist $\|v\|_E \asymp \|v\|_U, \forall v \in V$, d.h. die Energienorm ist zu der zugrundegelegten Hilbertraumnorm U äquivalent. Für viele Probleme ist a nur eine elliptische Bilinearform auf U, deshalb ist das folgende Resultat für die Finite Elemente Analysis von grundlegender Bedeutung. Es zeigt den wichtigen Zusammenhang des Fehlers der Ritz-Galerkin-Approximation aus Variationsproblemen mit elliptischer Bilinearform mit dem Fehler der Bestapproximation.

Satz 1.3.3 (Céa-Lemma [16])
Ist $u \in V$ die eindeutige Lösung des Variationsproblems 1.35 mit elliptischer Bilinearform a auf V und $u^h \in V_h$ die Ritz-Galerkin-Approximation. Dann gilt

$$\|u - u^h\|_V \leq \frac{\kappa}{\sigma} \inf_{v^h \in V_h} \|u - v^h\|_V, \tag{1.40}$$

wobei κ, σ die Ellipzitätskonstanten 1.32 der Bilinearform sind.

Der „Aubin-Nitsche-Trick“, welcher auf einem Dualitätsprinzip beruht, ermöglicht es oftmals Fehlerabschätzungen für schwächere Normen anzugeben:

Satz 1.3.4 (Aubin - Nitsche Dualitätsprinzip)
Es seien $(V, \|\cdot\|_V), (U, \|\cdot\|_U)$ Hilberträume, $V \hookrightarrow U$ und $u \in V$ die Lösung des Variationsproblems 1.35. Dann gilt für die Ritz-Galerkin Approximation $u^h \in V_h$

$$\|u - u^h\|_U \leq C\|u - u^h\|_V \sup_{g \in U} \left\{ \inf_{v \in V_h} \|u_g - v\|_V \right\}, \tag{1.41}$$

wenn jedem $g \in U$ die eindeutige Lösung $u_g \in V$ des dualen Variationsproblems

$$a(v, u_g) = (g, v)_U, \ \forall v \in V \tag{1.42}$$

zugeordnet wird.

Wie gut wir die Lösung u approximieren können, hängt nach dem Céa-Lemma also entscheidend von der Approximationskraft des Raumes V_h ab. In der Finite Elemente Analysis beschreibt der Parameter h meist die sogenannte *Gitterweite* und es wird für gewöhnlich $h \in H := \mathbb{Q} \cap (0, 1)$ gewählt. Da dann H offenbar abzählbar ist, können wir h selbst als Index benutzen. Es sei $(V_h)_{h \in H}$ eine Folge von endlichdimensionalen Teilräumen von V mit $\dim V_h = d_h \in \mathbb{N}, h \in H$. Gilt

$$\lim_{h \to 0} \inf_{v^h \in V^h} \|u - v^h\|_V = 0, \tag{1.43}$$

so besitzt die Teilraumfolge die *Galerkin-Approximationseigenschaft*. Dies ist natürlich gleichbedeutend damit, dass für die zu $(V_h)_{h \in H}$ durch 1.38 eindeutig bestimmte Folge der Ritz-Galerkin-Approximationen $(u_h)_{h \in H}$

$$\lim_{h \to 0} \|u_h - u\|_V = 0$$

gilt. Um ein numerisch sinnvolles Approximationsverfahren zu erhalten, sollte die Folge $(V_h)_{h \in H}$ so beschaffen sein, dass sie neben der Approximationseigenschaft 1.43 auch garantiert, dass die Ritz-Galerkin-Approximationen $(u_h)_{h \in H}$ in einer dem Problem angepassten optimalen Ordnung gegen u konvergiert.

1.4. Klassische Finite Elemente

Eine gebräuchliche Wahl für die Ansatzräume $(V_h)_h$ der Ritz-Galerkin Approximation sind vernetzte Finite Elemente Räume (FE-Räume), welche auf einer Zerlegung des zugrundeliegenden Gebiets Ω basieren. Wir legen in dieser Arbeit den Fokus auf vernetzungsfreie Finite Elemente Methoden, weshalb dieser kurze Abriss über die klassischen vernetzten Elemente nur dazu dient, die grundlegenden Philosophien beider Ansätze vergleichen zu können. Bei der praktischen Konstruktion eines vernetzten FE-Raums wird zunächst das dem Variationsproblem zugrundeliegende Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ in endlich viele nichtüberlappende Teilgebiete T mit einfacher Geometrie, z.B. in Simplizes oder Cuboide (konkret: Dreiecke oder Rechtecke im Fall $d = 2$ oder Tetraeder, Quader etc. im Fall $d = 3$) vernetzt. Offenbar kann man mit solchen Netzen nur Polygone komplett ausschöpfen, bei Gebieten mit glatten Rändern bekommt man bei groben Gitterweiten einen zusätzlichen Approximationsfehler. Es gibt verschiedene Möglichkeiten dieses Problem zu behandeln, z.B. durch Hinzunahme von speziellen (isoparametrischen) Elementen in Randnähe [11].

Hierauf wollen wir aber nicht weiter eingehen und beschränken uns hier auf den Fall polygonaler Gebiete. Unzählige Arbeiten befassen sich alleine mit dem Design „guter“ Netze. Vor allem bei $3d$ Problemen ist dies bisweilen eine anspruchsvolle Aufgabe und erfreut sich in der Forschung immer noch großer Beliebtheit. Exemplarisch sei hier auf eine interessante Arbeit verwiesen, die Netze für Teile des menschlichen Körpers in $2d$ und $3d$ mit einer auf B-Splines basierten Methode erzeugt [85] oder [68]. In Kontrast dazu sind die vernetzungsfreien FE-Methoden auf der Basis von Splines für glatte Gebiete konstruiert, die Galerkin-Systeme sind im Vergleich relativ klein ($\approx$ pro Basisfunktion ein Koeffizient) und auch die Preprocessingschritte bei der Vernetzung entfallen.

Definition 1.4.1 (Zulässige Vernetzung)
Sei $\mathcal{T}_h$ eine endliche Familie von abgeschlossenen Teilmengen $T = \partial T \cup T^\circ$ eines polygonal berandeten Gebiets Ω. Gilt

1. $\overline{\Omega} = \bigcup_{T \in \mathcal{T}_h} T$
2. *Für T, T' ist $T^\circ \cap (T')^\circ = \emptyset$*
3. *Ist $T \cap T' \neq \emptyset$, dann ist $T \cap T'$ entweder ein Punkt oder eine gemeinsame Kante von T und T',*

so nennt man $\mathcal{T}_h$ eine zulässige Vernetzung von Ω. Hierbei bezeichnet $h = \max_{T \in T_h}\{\mathrm{diam}(T)\}$ mit $\mathrm{diam}(T) := \max_{x,y \in T} \|x - y\|_d$ die Gitterweite der Vernetzung.

Auf jedem $T \in \mathcal{T}_h$ werden nun die eigentlichen Finite Elemente definiert. Wir folgen der klassischen Definition von Ciarlet [17]:

Definition 1.4.2 (Finites Element nach Ciarlet)
Ein Tripel $(T, \Pi, \Sigma,)$ heißt Finites Element*, falls:*

1. *$T \subset \mathbb{R}^d$ ist ein kompaktes Lipschitzgebiet.*
2. *$\Pi := \{f : T \longrightarrow \mathbb{R}\}$ ist ein linearer N-dimensionaler Funktionenraum.*
3. *$\Sigma = \{\sigma_1, ..., \sigma_N\}$, wobei $\mathrm{span}\{\sigma_i\}_{i=1}^N = L(\Pi, \mathbb{R})$.*

Die lineare Abbildung $\mathcal{I}_\Pi : \Pi \longrightarrow \mathbb{R}^d$ mit $\mathcal{I}_\Pi(p) := (\sigma_i(p), ..., \sigma_N(p)) \in \mathbb{R}^N$ ist bijektiv, woraus man als Konsequenz sofort eine Basis $\{\phi_1, ..., \phi_N\}$ von Π mit der Eigenschaft $\sigma_i(\phi_j) = \delta_{ij},\ 1 \leq i, j \leq N$ erhält. Die Zahl N nennt man den *lokalen Freiheitsgrad* (bzw. lokale Dimension) des Finiten Elements und $\mathcal{I}_\Pi$ kann als abstrakter lokaler Interpolationsoperator interpretiert werden. Eine gebräuchliche Wahl für Π ist z.B.

$$\mathbb{P}_k(T) := \left\{ p : T \to \mathbb{R} : p(x) = \sum_{\substack{0 \leq \alpha_1, ..., \alpha_d \leq k \\ |\alpha| = k}} c_{\alpha_1, ..., \alpha_d} x_1^{\alpha_1} ... x_d^{\alpha_d},\ c_{\alpha_1, ..., \alpha_d} \in \mathbb{R} \right\}, \tag{1.44}$$

der Raum der Polynome vom Totalgrad k mit $N = \dim \mathbb{P}_k(T) = \binom{d+k}{k}$ bei simplizialen Elementen oder

$$\mathcal{P}_k(T) := \left\{ p : T \to \mathbb{R} : p(x) = \sum_{0 \leq \alpha_1, ..., \alpha_d \leq k} c_{\alpha_1, ..., \alpha_d} x_1^{\alpha_1} ... x_d^{\alpha_d},\ c_{\alpha_1, ..., \alpha_d} \in \mathbb{R} \right\}, \tag{1.45}$$

der Raum der Polynome vom Grad k in jeder Koordinatenrichtung und $N = \dim \mathcal{P}_k(T) = (k+1)^d$ bei cuboiden Elementen. Durch geeignete Vorgaben von N-Werten in Punkten (= *Knoten*) auf ∂T oder auch in T° werden auf Ω stückweise polynomiale Funktionen eindeutig festgelegt, die abstrakte Interpolation ist dann nichts anderes als die Funktionsauswertung an den N Knoten. Werden die Knoten so gewählt, dass mindestens stetige Übergänge zwischen den Elemente erzeugt werden, so spricht man von Elementen vom *Lagrange*-Typ bzw. von H^1-konformen Elemente. Exemplarisch (aber keinesfalls repräsentativ, siehe [26],[11]) seien hier für Dreieck- und Viereckselemente im $\mathbb{R}^2$ das lineare Lagrange Element mit $\Pi = \mathcal{P}_1(T)$ mit Dimension $N = 3$ sowie das quadratische Lagrange Element $\mathbb{P}_2(T)$ mit $N = 9$ genannt. Eine höhere globale Glattheit auf Ω kann mit Finiten Elementen vom *Hermite*-Typ erzielt werden. Das sind Elemente mit entsprechenden Interpolationsforderungen für Richtungsableitungen in den Knoten auf ∂T. Wir wollen die Approximationskraft von klassischen Finiten Elementen exemplarisch für eine zulässige Vernetzung $\mathcal{T}_h$ mit Dreieckselementen auf einem Polygongebiet im $\mathbb{R}^2$ mit dem linearen Lagrange-Element skizzieren. Sei dazu $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ die zu approximierende Lösung des zugrundeliegenden Variationsproblems 1.35. Als Ritz-Galerkin-Ansatzraum erhalten wir mit diesen Setzungen

$$V_h := \{v \in C_0^0(\Omega) : v_{|T} \in \mathcal{P}_1(T), T \in \mathcal{T}_h\}.$$

Die globale Stetigkeit sichert die H^1-Konformität der Elemente, d.h. $V_h \subset H_0^1(\Omega)$. Bei den linearen Lagrange Elementen kommen nur die Eckpunkte der Dreiecke als Knoten vor. Bezeichnen wir die Menge der Knoten $z \in \overline{\Omega} \setminus \partial\Omega$ mit K°, so kann man zeigen: Es existiert eine Basis aus *Hutfunktionen* $\{\Phi_1, ..., \Phi_{N_h}\}, N_h := \operatorname{card} K_h^\circ$ von V_h mit der Eigenschaft $\Phi_i(z_j) = \delta_{ij}, z_j \in K_h^\circ$, $i, j = 1, ..., N_h$ und die Φ_j besitzen damit einen lokalen Träger. Jedes $v \in V_h$ lässt sich durch $v = \sum_{j=1}^{N_h} v(z_j)\Phi_j$ darstellen und wir können einen Interpolationsoperator

$$\mathcal{I}_h u := \sum_{j=1}^{N_h} u(z_j)\Phi_j \in \mathcal{L}(C_0^0(\Omega), V_h)$$

festlegen. Ist nun noch $(\mathcal{T}_h)_{h>0}$ z.B. eine Familie von *quasi-uniformen* Triangulierungen, d.h. $h \to 0$ und es existiert ein $\omega > 0$, so dass jedes $T \in \mathcal{T}_h$ einen Kreis mit Radius $\rho_T > \operatorname{diam}(T)/2\omega$ enthält (diese Setzung schließt beim Grenzübergang $h \longrightarrow 0$ entartete Dreiecke aus, siehe für Details [11]), so gilt die H^1 a-priori Fehlerabschätzung

$$\|u - \mathcal{I}_h u\|_{H^1(\Omega)} \preceq h|u|_{2,\Omega}, \quad h \longrightarrow 0.$$

Höhere Approximationsordnungen lassen sich für hinreichend glattes u durch eine entsprechende Erhöhung des Polynomgrades erreichen. Beispielsweise kann man zu $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^k(\Omega), k \geq 2$ die H^1-konformen FE-Räume

$$V_h^{k-1} = \{v \in C_0^0(\Omega) : v_{|T} \in \mathcal{P}_{k-1}(T), \forall T \in \mathcal{T}_h\}, \quad 1 \leq \ell < k$$

und zugehörige Operatoren $\mathcal{I}_h^{k-1} \in L(C_0^0(\Omega), V_h^{k-1})$ konstruieren, so dass

$$\|u - \mathcal{I}_h^\ell u\|_{H^1(\Omega)} \preceq h^{k-1}|u|_{k,\Omega}, \quad h \longrightarrow 0, 1 \leq \ell < k.$$

Einen Polynomgrad $\ell \geq k$ zu wählen ist hingegen nicht sinnvoll, da die Approximationsordnung dadurch nicht erhöht wird. Bei praktischen Berechnungen ist dabei auch zu beachten, dass ein hoher Polynomgrad zu sehr großen Galerkin-Systemen führt.

2. Splines

„If this leaves you a bit wondering what multivariate splines might be, I am pleased. For I don't know myself.“

(Carl de Boor)

In 2.1 führen wir zuerst uniforme B-Splines einer reellen Veränderlichen ein. Darauf aufbauend definieren wir in 2.2 multivariate Tensorprodukt B-Splines über d-dimensionale Rechtecke und über beschränkten Gebieten $\Omega \subset \mathbb{R}^d$.

2.1. Univariate Splines mit äquidistanten Knoten

In den Standardwerken [21; 75] werden univariate B-Splines über allgemeine Knotenfolgen durch dividierte Differenzen eingeführt und daraus eine Rekursionsformel (vgl. 2.4) für B-Splines hergeleitet. Diese Rekursionsbeziehung wird in neueren Darstellungen auch gerne als Definition benutzt. Damit lassen sich die etwas unhandlichen dividierten Differenzen vermeiden. Wir folgen [44] und definieren die uniformen B-Splines über einen rekursiven Mittelungsprozess der sich für theoretische Zwecke und auch als gewisse Verallgemeinerung für einen multivariaten B-Spline-Typ [23] eignet. Wenn nichts anderes angegeben ist, findet man sämtliche Aussagen dieses Abschnitts in [44; 87] oder ähnlich in [21; 75] und in den dort angegebenen Referenzen.

Wir definieren $\Phi^n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ vom Grad $n \geq 0$ zur *Knotenfolge* $\mathbb{Z}$ mit Gitterweite 1 durch

$$\Phi^n(x) := \int_{x-1}^{x} \Phi^{n-1}(x-t)dt\,, \tag{2.1}$$

mit

$$\Phi^0(x) := \chi_{[0,1)}(x) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad x \in [0,1) \\ 0 & \quad\quad \text{sonst} \end{cases},$$

rekursiv. Durch geeignete skalierte Translate von Φ^n erhalten wir die von Schoenberg in [74] eingeführten *Kardinal* B-Splines.

Definition 2.1.1 (Uniforme B-Splines)
Man nennt die durch den Kardinal B-Spline erzeugten Funktionen

$$b^n_{k,h}(x) := \Phi^n(x/h - k) \tag{2.2}$$

uniforme B-Splines zur Knotenfolge $(\tau_k)_{k\in\mathbb{Z}} := h\mathbb{Z}, h > 0$ *mit* Gitterweite h.

Aus der Darstellung 2.2 lassen sich viele grundlegende Eigenschaften herleiten. B-Splines sind symmetrisch, d.h. $b^n_{k,h}(x) = b^n_{k,h}(n+1-x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, und auf ihrem Support $\operatorname{supp} b^n_{k,h} = h[k, n+k]$ nicht negativ und streng monoton. Auf $h[\ell, \ell+1), l = k, ..., k+n-1$ stimmt $b^n_{h,k}$ mit einem Polynom vom Grad n überein und ist an den *Knoten* $\{hk, ..., h(k+n)\}$ noch $(n-1)$-mal stetig differenzierbar. Aus der Definition erhält man leicht (differenzieren eine Parameterintegrals) eine einfache Formel für die Ableitung eines B-Splines $\frac{d}{dx} b^n_{k,h}(x) = h^{-1}\left(b^{n-1}_{k,h}(x) - b^{n-1}_{k+1,h}(x)\right)$. Iterativ folgt

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^{\ell} b_{k,h}^{n}(x) = h^{-\ell} \sum_{i=1}^{\ell} (-1)^i \binom{\ell}{i} b_{k+i,h}^{n-\ell}, \quad \ell \geq 0. \tag{2.3}$$

Damit lässt sich u.a. folgende Rekursionsdarstellung zeigen, siehe [87] oder für allgemeine Knotenfolgen [21]

$$b_{k,h}^{n}(x) = \frac{1}{(n-1)} \left\{ \left(\frac{x}{h} - k\right) b_{k,h}^{n-1}(x) + \left(n - \frac{x}{h} + k\right) b_{k,h}^{n-1}(x) \right\}. \tag{2.4}$$

Wir bezeichnen im Folgenden den Raum aller auf den Intervallen $h[\ell, \ell+1) \subset \mathbb{R}$, $\ell \in \mathbb{Z}$ stückweise polynomialer Funktionen vom Grad $< n$, die an den Knoten $h\mathbb{Z}$ noch $(n-1)$-mal stetig differenzierbar sind, als den Raum der uniformen Splines vom Grad n und schreiben dafür $\mathbb{B}_h^n(\mathbb{R})$. Splines vom Grad n reproduzieren Polynome vom Grad n. Das folgt aus der *Marsden-Identität* [62]

$$(x-t)^n = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \Psi_{k,h}^{n}(t) b_{k,h}^{n}(x), \quad \text{mit} \quad \Psi_{k,h}^{n}(t) := h^n \prod_{j=1}^{n} \left(k + j - \frac{t}{h}\right), \; x, t \in \mathbb{R}. \tag{2.5}$$

Damit zeigt man $\sum_{k \in \mathbb{Z}} b_{k,h}^{n} = 1$, die B-Splines bilden also eine Partition der Eins [44], und wir erhalten die lineare Unabhängigkeit, d.h. insbesondere $\mathbb{B}_h^n(\mathbb{R}) = \operatorname{span}\left\{b_{k,h}^{n}\right\}_{k \in \mathbb{Z}}$.
Sei nun $I := (a, b) \subset \mathbb{R}, a \neq b$ und es bezeichne

$$\{k \sim I\} := \left\{k \in \mathbb{Z} : \operatorname{supp} b_{k,h}^{n} \cap (a, b) \neq \emptyset\right\}$$

die Menge aller *relevanten Indizes* für I, wobei wir bei Indizierungen auch einfach kurz $k \sim I$ schreiben. Mit

$$\mathbb{B}_h^n(I) := \operatorname{span}\left\{b_{k,h}^{n}\right\}_{k \sim I} \tag{2.6}$$

bezeichnen wir den Raum der uniformen Splines vom Grad n über I. Jedes $u \in \mathbb{B}_h^n(I)$ lässt sich eindeutig als Linearkombination von B-Splines, deren Träger geschnitten mit I nicht leer sind, darstellen. Es ist $u_{|I_\ell} \in \mathcal{P}_n(I_\ell)$ mit $I_\ell := h[\ell, \ell+1) \cap (a, b)$für $\ell \in \mathbb{Z}$ und in den Knoten $hk \in (a, b) \cap h\mathbb{Z}$ ist u noch mindestens $(n-1)-$mal stetig differenzierbar. Manchmal ist es nützlich die Intervallgrenzen so zu wählen, dass sie mit Knoten aus $h\mathbb{Z}$ übereinstimmen. Aus $a, b \in h\mathbb{Z}$ folgt dann z.B. leicht $\dim \mathbb{B}_h^n(I) = \operatorname{card}\{k \sim I\} \cap [a, b] + n - 2$, mit $\operatorname{card}\{k \sim I\} \cap [a, b] = (b-a)/h + 1$.

2.2. Multivariate Splines

In [22] gibt Carl de Boor einen schönen Überblick von den Anfängen in den 1970er Jahren und den bis heute bestehenden Schwierigkeiten und offenen Problemen der multivariaten Splinetheorie. Die guten strukturellen Eigenschaften allgemeiner polynomialer Splineräume im Eindimensionalen lassen sich abgesehen von Rechteckgebieten nicht so einfach auf allgemeine Gebiete ins Höherdimensionale übetragen, siehe z.B. [67; 82]. Für viele Spline-Räume ist es bis heute z.B. noch nicht einmal gelungen die Dimension genau zu bestimmen. Einen guten Überblick über den Stand der Forschung bis 2007 findet man zum Beispiel in der Monographie von Mai und Schumaker [76]. Ein Analogon zu den Schoenbergschen Kardinal-B-Splines [74], vgl. 2.1 und eine schöne multivariate

Theorie, welche verblüffende Querbeziehungen zur Kombinatorik und analytischen Zahlentheorie aufweisen, liefern die ähnlich wie *Simplex*-Splines [67] geometrisch definierten *Box-Splines* [23; 37]. Im einfachsten Fall degenerieren Box-Splines zu den gewöhnlichen und auch für numerische Fragestellungen interessanten Tensorproduktsplines, die wir in 2.2.1 durch Tensorproduktbildung der Räume $\mathbb{B}_h^n(I)$ auf Rechtecken im $\mathbb{R}^d$ gewinnen und danach auf Gebiete geeignet einschränken.

2.2.1. Splines auf Rechteckgittern

Seien dazu im Folgenden $I_i = [a_i, b_i] \subset \mathbb{R}, a_i \neq b_i, h_i \in \mathbb{R}^+, i = 1, ..., d$ und $\mathbb{B}_{h_i}^{n_i}(I_i)$ darauf erzeugte uniforme Splineräume vom Grad n_i mit relevanten Indizes $\{k_i \sim I_i\} \subset \mathbb{Z}, i = 1, ..., d$ sowie $\mathcal{I} := \times_{i=1}^d I_i \subset \mathbb{R}^d$ das durch $I_i, i = 1, ..., d$ induzierte d-dimensionale Intervall und die dazugehörigen relevanten Indizes $\{(k_1, ..., k_d) \sim \mathcal{I}\} = \times_{i=1}^d \{k_i \sim I_i\} \subset \mathbb{Z}^d$. Mit Hilfe von einfachen Techniken aus der multilinearen Algebra zeigt man, siehe z.B. [75] oder in der selben Notation wie hier [55]: Durch

$$\Phi : \mathbb{B}_{h_i}^{n_1}(I_1) \times ... \times \mathbb{B}_{h_i}^{n_d}(I_d) \longrightarrow \operatorname{span}\left\{\prod_{i=1}^d b_{k_i,h_i}^{n_i}(x_i)\right\}_{k_i \sim I_i}$$

mit

$$\Phi(u_1(x_1), ..., u_d(x_d)) \longrightarrow \prod_{i=1}^d u_i(x_i), \quad u_i \in \mathbb{B}_{h_i,k_i}^{n_i}(I_i), \quad i = 1, ..., d$$

wird eine bilineare Abbildung definiert und

$$\mathbb{B}_{h_i}^{n_1}(I_1) \times ... \times \mathbb{B}_{h_i}^{n_d}(I_d) \cong \operatorname{span}\left\{\prod_{i=1}^d b_{k_i,h_i}^{n_i}(x_i)\right\}_{k_i \sim I_i}.$$

Es ist dann $\dim\left(\mathbb{B}_h^{n_1}(I_1) \times ... \times \mathbb{B}_h^{n_d}(I_d)\right) = \prod_{i=1}^d \operatorname{card}\{k_i \sim I_i\}$ und man nennt

$$\mathbb{B}_{h_1,...,h_i}^{n_1,...,n_d}(\mathcal{I}) := \bigtimes_{i=1}^d \mathbb{B}_{h_i}^{n_i}(I_i)$$

Tensorproduktsplineraum und die Basiselemente $\prod_{i=1}^d b_{k_i,h_i}^{n_i}(x_i), k_i \sim I_i,\ i = 1, ..., d$ *Tensorprodukt B-Splines (TPB-Splines)*. Wenn Verwechslungen ausgeschlossen sind, lassen wir die Zusätze TP/TPB auch weg. Ein Spline $u^h \in \mathbb{B}_{h_1,...,h_d}^{n_1,...,n_d}(\mathcal{I})$ besitzt demnach die Darstellung

$$u^h(x_1, ..., x_d) = \sum_{(k_1,...,k_d) \sim \mathcal{I}} c_{k_1,...,k_d} \prod_{i=1}^d b_{k_i,h_i}^{n_i}(x_i)$$

mit Koeffizienten $c_{k_1,...,k_d} \in \mathbb{R}, (k_1, ..., k_d) \in \mathbb{Z}^d$. Wir wollen in jeder Koordinatenrichtung den gleichen Grad n sowie die gleiche Gitterweite $h > 0$ voraussetzen, d.h. wir nehmen im Folgenden $n_1, ..., n_d = n$ und $h_1, ..., h_d = h$ an. Damit schreiben wir vereinfacht $k = (k_1, ..., k_d) \in \mathbb{Z}^d, x = (x_1, ..., x_d) \in \mathbb{R}^d$ und $b_{k,h}^n(x) := \prod_{i=1}^d b_{k_i,h}^{n_i}(x_i)$ für die B-Splines.
Indem man die relevanten Indizes $\{k \sim \mathcal{I}\}$ in jeder Koordinatenrichtung durch $d-1$ dimensionale Hyperebenen verbindet, wird ein Gitter erzeugt und Gitterzellen auf $\mathcal{I}$ induziert: das sind d-dimensionalen Würfel mit Kantenlänge h :

$$Q_\ell = \ell h + [0,1]^d h, \quad \ell := (\ell_1, ..., \ell_d) \in \{p \in \mathbb{Z}^d : \exists k \in \mathbb{Z}^d, Q_p \subset \operatorname{supp} b_{k,h}^n, k \sim \mathcal{I}\} \tag{2.7}$$

Hierbei ist zu beachten, dass die relevanten Indizes für die Gitterzellen i.A. nicht mit den relevanten Indizises der TPB-Splines übereinstimmen, sondern eine Obermenge bilden. Die Indizierung mit $\sim$ ist also immer kontextbezogen zu interpretieren.
Aufgrund der multiplikativen Struktur übertragen sich viele Eigenschaften der univariaten B-Splines mühelos auf die TPB-Splines, siehe [44; 75]. So besitzen diese beispielsweise genauso wie im Eindimensionalen einen endlichen Träger

$$\operatorname{supp} b^n_{k,h} = kh + (0, n+1)^d h, \quad k \sim \mathcal{I},$$

sind auf $\mathbb{R}^d$ nicht-negativ und haben eine stückweise polynomiale Struktur. Genauer stimmt $b^n_{k,h}$ auf Q_ℓ mit einem Polynom aus $\mathcal{P}_n(Q_\ell), \ell \sim \mathcal{I}$ überein. Für partielle Ableitungen der B-Splines erhält man offenbar $\partial^\alpha b^n_{k,h} = \Pi_{i=1}^d \partial^{\alpha_i}_{x_i} b^n_{k_i,h}(x_i)$ und daraus nach etwas Rechnung

$$\partial^\alpha b^n_{k,h} = h^{-1}(b^{n-\alpha}_{k,h} - b^{n-\alpha}_{k,h}), \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}^d \text{ mit } |\alpha| \leq 1. \tag{2.8}$$

Durch Iteration dieser Formel lassen sich schnell partielle Ableitungen $1 < |\alpha| \leq n$ herleiten. Die Marsden-Identität 2.5 lässt sich durch beidseitige Tensorproduktbildung verallgemeinern, es ist für $x, t \in \mathbb{R}^d, n \in \mathbb{N}$

$$\prod_{\nu=1}^d (x_\nu - t_\nu)^n = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \left(\prod_{\nu=1}^d \Psi^n_{k_\nu,h}(t_\nu) \right) b^n_{k,h}(x) \tag{2.9}$$

mit

$$\Psi^n_{k,h}(t) = h^n \prod_{j=1}^n \left(k + j - \frac{t}{h} \right).$$

Damit lässt sich jedes $p \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R}^d)$ in der Form $p(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} q^n_h(k) b^n_{k,h}(x)$, mit $q^n_h \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R}^d)$ darstellen.

2.2.2. Splines auf Gebieten

Sei nun $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ ein Gebiet. Wir bezeichnen mit

$$\{k \sim \Omega\} := \{k \in \mathbb{Z}^d : \operatorname{supp} b^n_{k,h} \cap \Omega \neq \emptyset,\ k \sim \mathbb{Z}^d)\} \tag{2.10}$$

die Menge aller für Ω relevanten Indizes. Aus der multivariaten Marsden Identität, vgl. 2.9, folgt unmittelbar die lineare Unabhängigkeit der Menge $\{b^n_{k,h} : k \sim \Omega\}$ [44]. Den daraus resultierenden linearen Raum

$$\mathbb{B}^n_h(\Omega) := \operatorname{span}\{b^n_{k,h} : k \sim \Omega\}$$

bezeichnen wir als TP-Splineraum über Ω. Für den Augenblick sei $\Omega = Q$ ein Quader aus dem $\mathbb{R}^d$ und das Gitter Q^h des Splineraums $\mathbb{B}^n_h(Q)$ sei so gewählt, dass der Abschluss von Q aus ganzen Gitterzellen besteht. Dann existiert zu jedem $b^n_{k,h}, k \sim Q$ ein $\ell \in \mathbb{Z}^d, \ell \sim \operatorname{supp} b^n_{k,h}$ mit $\ell h + [0,1]^d h =: Q_\ell \subset \operatorname{supp} b^n_{k,h} \cap Q$. Es ist also mindestens eine Gitterzelle eines jeden für Q relevanten Splineträgers komplett in Q enthalten. Dann ist $\|b^n_{k,h}\|_{L^2(Q)} \asymp h^{m/2}$ und es existiert zu jedem Spline ein Funktional $\Xi_j \in L^2(Q)', j \in \{k \sim Q\}$ (folgt z.B.

aus Theorem 12.5 [75]) welches wir nach dem Riezschen Darstellungssatz 1.3.1 mit einer Funktion $\lambda_{j,h}^n \in L^2(Q)$ identifizieren können. Diese sind gleichmäßig in h beschränkt, d.h.

$$\|\lambda_{j,h}^n\|_{L^2(Q)} \asymp h^{-m/2} \quad \text{und} \quad \operatorname{supp}\left(\lambda_{j,h}^n\right) \subset \operatorname{supp}\left(b_{k,h}^n\right) \cap Q, \tag{2.11}$$

siehe für Details [40; 44; 87]. Streng genommen existiert sogar zu jeder Gitterzelle eines Splineträgers so eine duale Funktion. Ist z.B. bei einem allgemeineren Gebiet (oder das Gitter wie bei unseren Betrachtungen nicht angepasst) keine Gitterzelle eines relevanten B-Splines komplett im Gebiet enthalten, so kann man keine gleichmäßig beschränkten duale Funktionen finden, deren Träger innerhalb des Gebiets liegt. Die gleichmäßige Beschränktheit 3.7 geht dadurch im Allgemeinen verloren und damit auch die Stabilität der Basis [40; 87]. Für $\Xi_k := (\lambda_{k,h}^n, \cdot)_{L^2(Q)}, k \sim Q$ gilt $\Xi_i b_{j,h}^n := \Pi_{\mu=1}^d \delta_{i_\mu, j_\mu}$. Der damit gebildete Projektor

$$P_h^n \cdot := \sum_{k \in Q} \Xi_k \cdot b_{k,h}^n \in \mathcal{L}(L^2(Q), \mathbb{B}_h^n(Q))$$

reproduziert Polynome aus $\mathcal{P}_n(Q)$, vgl. [40; 87]. Damit zeigt man die volle Approximationskraft von $\mathbb{B}_h^n(Q)$ [40; 44; 87] oder Satz 6.23

$$\|u - P_h^n u\|_{H^m(Q)} \preceq h^{k-m} \|u\|_{H^k(Q)}, \quad 0 \le k \le \min(n,p), \quad u \in H^m(Q). \tag{2.12}$$

Ist Ω lipschitz, so können wir nach 1.2.6 jedes $u \in H^m(\Omega)$ auf einen Quader Q mit $\Omega \Subset Q$ zu einem $\tilde{u} \in H^m(Q)$ fortsetzen. Somit gilt 2.12 auch für allgemeine Gebiete $\Omega \in C^{0,1}$. Bildet man das Tensorprodukt mit allgemeineren Splineräumen, d.h. mit nicht notwendigerweise uniformen Knotenfolgen, unterschiedlicher Gitterweite $h \in \mathbb{Q}^d$ und unterschiedlichem Splinegrad $n \in \mathbb{N}^d$ in jeder Koordinatenrichtung, so bleiben zwar aufgrund der multiplikativen Struktur die strukturellen Eigenschaften der univariaten B-Splines konserviert, die Approximationskraft aber nur auf sehr speziellen Gebieten erhalten, siehe W. Dahmen [20] und für schöne Beispiele und numerische Tests die Arbeit von N. Sissouno [82].

2.3. Splines als Finite Elemente

In 2.3.1 klären wir, warum sich der TP-Splineraum aus 2.2 trotz optimaler Approximationskraft 2.12 sich für einen Ritz-Galerkin Ansatz selbst für glatte Probleme im Allgemeinen nicht eignet. Wir skizzieren in 2.3.2 und 2.3.3 einen Gewichtungs- und Stabilisierungsvorgang, vgl. dazu die Originalarbeiten [39; 40; 41], die Monographie [44] oder die schöne Zusammenfassung [45] und erhalten damit aufbauend auf den TPB-Splines einen stabilen B-Spline-Typ, welcher sich bei vielen Problemen mit einer hinreichend glatten Lösung für eine vernetzungsfreie Finite Elemente Approximation auf glatten Gebieten einsetzen lässt.

2.3.1. Numerische Instabilitäten durch TPB-Splines als Ansatzfunktionen

Möchte man $\mathbb{B}_h^n(\Omega)$ als Ansatzraum einer Finiten Elemente Approximation in $H_0^1(\Omega)$ nutzen, so stößt man auf folgende Schwierigkeiten:

- Da die Nullrandbedingung von den B-Splines im Allgemeinen nicht eingehalten wird, ist $\mathbb{B}_h^n(\Omega)$ kein konformer Ansatzraum für $H_0^1(\Omega)$.

- B-Splines mit „kleinem“ Trägeranteil (genauer $\text{meas}(\Omega \cap \text{supp}\, b^n_{i,h}) << h^d$) haben zur Folge, dass die Konditionszahlen der Galerkin-Matrizen beliebig groß werden können, siehe [39] und das nachfolgende Beispiel 2.3.1. Computerexperimente, die diesen Sachverhalt am Poissonproblem illustrieren, findet man in [87; 65].

Beispiel 2.3.1 *Die schwache Formulierung des Poissonproblems*

$$\begin{cases} -\Delta u = f \\ u_{|\partial\Omega} = 0 \end{cases} \tag{2.13}$$

lautet: Finde $u \in H^1_0(\Omega)$, so dass

$$(\nabla u, \nabla v)_{L^2(\Omega)} = (f, v)_{L^2(\Omega)} \quad \forall v \in H^1_0(\Omega).$$

Setzen wir $V^h = \mathbb{B}^n_h(\Omega) = \text{span}\{b^n_{k,h} : k \sim \Omega\}$ und $u^h := \sum_{k\sim\Omega} u_k b^n_{k,h}$ mit $U := (u_1, ..., u_{d_h})$, $d_h := \text{card}\{k \sim \Omega\}$ so erhalten wir die symmetrische und positiv definite Galerkin-Matrix G_h mit den Einträgen $g_{i,j} = (\nabla b^n_{h,i}, \nabla b^n_{h,j})_{L^2(\Omega)}, i, j \sim \Omega$. Ihre Kondition lässt sich deshalb mit dem Rayleigh-Quotienten

$$\mathcal{R}(U) := \frac{U^\top G_h U}{U^\top U} = \frac{|u^h|^2_{1,\Omega}}{\|U\|^2} \tag{2.14}$$

durch

$$\text{cond}_2(G_h) = \frac{\sup_U \mathcal{R}(U)}{\inf_U \mathcal{R}(U)} \tag{2.15}$$

bestimmen. Die relevanten Indizes der TPB-Splines erzeugen ein Gitter $\Omega_h \subset \mathbb{Z}^d$ über Ω, welches wir in sämtliche Koordinatenrichtungen so verschieben können, dass zwar keine zusätzlichen Splines mehr für das Gebiet relevant werden, aber der Trägeranteil $\text{meas}(\text{supp}\, b^n_{k,h} \cap \Omega)$ von Splines $b^n_{k,h}$ in Randnähe, d.h. mit $\text{supp}\, b^n_{k,h} \cap \Omega^c \neq \emptyset$ beliebig klein gemacht werden kann. Es sei nun h so klein gewählt, dass der Träger von mindestens einem TPB-Spline im Gebiet enthalten ist. Wir finden demnach Indizes $i, j \in \{k \sim \mathbb{Z}^d\}$, so dass $\text{supp} b^n_{j,h} \subset \Omega, \text{supp} b^n_{i,h} \cap \Omega^c \neq \emptyset$. Somit existiert ein von der Lage des Gitters abhängiges $\rho_{\Omega_h} \in \mathbb{R}$ mit

$$\rho_{\Omega_h} \cdot |b^n_{i,h}|^2_{H^1(\Omega)} = |b^n_{j,h}|^2_{H^1(\Omega)}.$$

Für $U = e_i, e_j$ folgt daraus

$$\sup_U \mathcal{R}(U) \geq |b^h_{i,h}|^2_{H^1(\Omega)} \quad \textit{sowie} \quad \inf_U \mathcal{R}(U) \leq |b^h_{j,h}|^2_{H^1(\Omega)}$$

und aus 2.15

$$\text{cond}_2(G_h) \geq \frac{|b^h_{i,h}|^2_{H^1(\Omega)}}{|b^h_{j,h}|^2_{H^1(\Omega)}} \geq \rho_{\Omega_h}.$$

Durch eine entsprechende Verschiebung des Gitters kann ρ_{Ω_h} beliebig groß werden.

Auf den ersten Blick scheinen also TPB-Splines keine gute Wahl für eine Finite-Elemente Approximation zu sein.

2.3.2. Gewichtung

Multiplizieren wir die TP-Splines mit einer geeigneten Funktion $w : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}, w > 0$ auf Ω und $w \equiv 0$ auf $\partial\Omega$, so erhalten wir den Raum der *gewichteten TP-Splines*

$$w\mathbb{B}_h^n(\Omega) := \{wu : u \in \mathbb{B}_h^n(\Omega)\} \tag{2.16}$$

Jeder Spline aus $w\mathbb{B}_h^n(\Omega)$ hält Nullrandbedingungen auf $\partial\Omega$ ein.

Definition 2.3.1 (Gewichtsfunktion)
Eine Funktion $w : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt m-reguläre Gewichtsfunktion *der Ordnung $\gamma \in \mathbb{N}_0$, falls*

$$w(x) \asymp \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)^\gamma \tag{2.17}$$

und

$$|\partial^\alpha w| \leq C_w \operatorname{dist}(\cdot, \partial\Omega)^{\gamma - |\alpha|}, \quad |\alpha| \leq \min(\gamma, m). \tag{2.18}$$

Man nennt w eine Standardgewichtsfunktion *für $\mathbb{B}_h^n(\Omega)$, falls*

$$w(x) \asymp \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) \tag{2.19}$$

und $w \in C^m(\overline{\Omega})$, $m \geq n$.

Diese Idee wurde bereits 1956 von Kantorowitsch und Krylow [53] für klassische Finite Elemente vorgeschlagen. Die Definition lässt sich auch leicht auf den Fall übertragen, falls nur auf einem Teil des Randes $\Gamma \subset \partial\Omega$ mit $\operatorname{meas}_{d-1}(\Gamma) \neq 0$ Nullrandbedingungen gestellt werden. Wählt man die Distanzfunktion

$$d(x, \partial\Omega) := \inf_{y \in \partial\Omega} \operatorname{dist} \|x - y\|_2 \tag{2.20}$$

so erhält man offenbar eine Gewichtsfunktion der Ordnung $\gamma = 1$. Wie man jedoch schon bei einfachen Beispielen sieht, z.B. für das Kreisgebiet $\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$, ist $d(\cdot, \partial\Omega)$ zwar auf Ω stetig, aber offenbar im Nullpunkt nicht differenzierbar. Die Distanzfunktion alleine ist somit keine gute Wahl für w, da diese sonst die Approximationskraft von glatten Splines erheblich beeinträchtigen würde. Durch eine Glättung lässt sich $d(\cdot, \partial\Omega)$ jedoch bei Gebieten mit glatten Rändern dennoch als Standard-Gewichtsfunktion einsetzen [39; 44]. Bei Rändern, die sich aus Schnitten und Vereinigungen von algebraischen Kurven (Nullstellenmengen einfacher Graphen) zusammensetzen, lassen sich durch das $\mathcal{R}$-Funktionen Kalkül von Rvachev [72] sehr elegant Gewichtsfunktionen rein algebraisch konstruieren, siehe im Zusammenhang mit weB-Splines [40; 44]. M. Boßle hat in [15] speziell Gewichtsfunktionen welche aus Schnitten und Vereinigungen von Quadriken in $2d$ gewonnen werden können theoretisch untersucht und eine Software entwickelt, die Gebiete und Gewichtsfunktionen für solche Ränder berechnen kann. Eine Verallgemeinerung der theoretischen Ergebnisse aus [15] wird im Rahmen der Arbeit von [4] angegeben. Sind die Ränder selbst durch glatte Kurven parametriesierbar (z.B. durch NURBS-Kurven und Flächen in $2d$ und $3d$, vgl. Def. 7.1), so ist eine analytische Bestimmung einer Gewichtsfunktion kaum mehr möglich. Hier kann man mit Hilfe von lokalen Ansätzen und nichtlinearen Gleichungslösern vom Newton-Typ Gewichtsfunktionen von beliebigem Glattheitsgrad numerisch bestimmen [44].

2.3.3. Stabilisierung durch Erweiterung

Wir kommen nun zur Behandlung der im letzten Abschnitt angesprochenen problematischen B-Splines, bei denen keine Gitterzelle ihres Supports ganz im betrachteten Gebiet enthalten sind. Bevor wir diese Konstruktion skizzieren, wollen wir noch eine nützliche Zell- und Basisklassifikation vornehmen.

Definition 2.3.2 (Klassifikation der Zellen und B-Splines)
Es sei $\Omega \in \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet und $\mathbb{B}_h^n(\Omega)$. Man bezeichnet Zellen $Q_\ell, \ell \sim \Omega$, für die gilt:

- $\overset{\circ}{Q_\ell} \cap \partial\Omega \neq \emptyset$ *als* Randzellen
- $Q_\ell \subset \overline{\Omega}$ *als* innere Zellen
- $Q_\ell \subset \Omega^c$ *als* äußer Zellen.

Ein B-Spline $b_{k,h}^n(x)$ heißt innerer *B-Spline, falls eine innere Zelle Q_ℓ existiert, s.d. $Q_\ell \subset$* supp$b_{k,h}^n$, *andernfalls sprechen wir von einem* äußeren *B-Spline.*

Durch diese Klassifikation können wir insbesondere die Indexmenge $\{k \sim \Omega\}$ aufteilen: Wir bezeichnen mit

- $$\mathcal{I}_\Omega := \{k \sim \Omega : \exists \ell \in \mathbb{Z}^d \text{ mit } Q_\ell \subset \overline{\Omega} \cup \operatorname{supp} b_{k,h}^n\} \tag{2.21}$$
  die Indexmenge der inneren relevanten B-Splines
- und mit
  $$\mathcal{J}_\Omega := \{k \sim \Omega\} \setminus \mathcal{I}_\Omega \tag{2.22}$$
  die Indexmenge der äußeren B-Splines.

Um eine brauchbare Approximationsgüte zu gewährleisten, sollte $\mathcal{P}_n(\Omega)$ in dem neuen Raum enthalten sein. Ausgehend von dieser Forderung starten wir die Konstruktion. Jedes $p \in \mathcal{P}_n(\Omega)$ kann nach der Marsdenidentität 2.9 durch

$$p(x) = \sum_{k \sim \Omega} q_h^n(k) b_{k,h}^n(x)$$

mit $q_h^n \in \mathcal{P}_n(\Omega)$ dargestellt werden. Durch Aufsplitten der relevanten Indizes $\{k \sim \Omega\}$ erhalten wir

$$p(x) = \sum_{i \in \mathcal{I}_\Omega} q_h^n(i) b_{i,h}^n(x) + \sum_{j \in \mathcal{J}_\Omega} q_h^n(j) b_{j,h}^n(x). \tag{2.23}$$

Unter der Annahme, dass h hinreichend fein gewählt ist, finden wir ein $\ell \in \mathcal{I}_\Omega$, so dass

$$\mathcal{I}(j) := \ell + \{0, ..., n\}^d \subset \mathcal{I}_\Omega.$$

$\mathcal{I}(j)$ kann als Rechteckgitter aufgefasst werden. Mit den Lagrange-Faktoren

$$L_i(x) = \prod_{\nu=1}^{d} \prod_{\mu=0, \mu+\ell_\nu \neq i_\nu}^{n} \frac{x_\nu - \ell_\nu - \mu}{i_\nu - \ell_\nu - \mu}$$

erhalten wir die Darstellung des eindeutig bestimmten Polynoms $\tilde{p} \in \mathcal{P}_n(\Omega)$, welches die Daten $(i, q_h^n(i))_{i\in\mathcal{I}(j)}$ interpoliert,

$$\tilde{p}(x) = \sum_{i\in\mathcal{I}(j)} q_h^n(i) L_i(x).$$

Da offensichtlich $\tilde{p} = q_h^n$ ist, erhalten wir mit

$$e_{i,j} := L_i(j) = \prod_{\nu=1}^{d} \prod_{\mu=0,\mu+\ell_\nu\neq i_\nu}^{n} \frac{j_\nu - \ell_\nu - \mu}{i_\nu - \ell_\nu - \mu} \tag{2.24}$$

$$q_h^n(j) = \sum_{i\in\mathcal{I}(j)} e_{i,j} \cdot q_h^n(i). \tag{2.25}$$

Setzen wir 2.25 in 2.23 ein und vertauschen die Summen, so führt dies mit der zu $\mathcal{I}(j)$ dualen Indexmenge

$$\mathcal{J}(i) := \{j \in \mathcal{J}_\Omega : i \in \mathcal{I}(j)\}$$

auf

$$p(x) = \sum_{i\in\mathcal{I}_\Omega} q_h^n(i) \left(b_{i,h}^n(x) + \sum_{j\in\mathcal{J}(i)} e_{i,j} b_{j,h}^n(x) \right).$$

In dieser Darstellung von p tauchen die äußeren B-Splines nicht mehr als Freiheitsgrade auf.

2.3.4. Weighted Extended B-Splines (WEB-Splines)

Wir kombinieren die beiden Ansätze aus Gewichtung und Erweiterung und erhalten damit einen Splineraum über Gebieten.

Definition 2.3.3 (Weighted Extended B-Splines)
Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}$ ein beschränktes Gebiet sowie die Indexmenge $\{k \sim \Omega\} = \mathcal{I}_\Omega \cup \mathcal{J}_\Omega$ und eine Gewichtsfunktion $w : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben. Des Weiteren sei h hinreichend klein gewählt, so dass $\mathcal{I}(j) = \ell + \{0, ..., n\}^d \subset \mathcal{I}_\Omega$ und $J(i)$ existieren. Dann nennt man

$$B_{k,h}^n(x) := \frac{w(x)}{w(x_k)} \left(b_{k,h}^n(x) + \sum_{j\in J(i)} e_{i,j} b_{j,h}^n(x) \right), \quad k \in \mathcal{I}_\Omega \tag{2.26}$$

einen weighted extended B-Spline (weB-Spline) vom Grad n. Hierbei bezeichnet x_k den Mittelpunkt von $Q_k \subset \overline{\Omega} \cap \operatorname{supp} b_{k,h}^n$.

Durch die Ankopplungsstrategie gelingt es also, dass die äußeren B-Splines nicht mehr explizit als Freiheitsgrade, sondern nur noch implizit in der Basis des neuen Raums vorkommen. Da die Tensorproduktsplines über Ω linear unabhängig sind, folgt automatisch die lineare Unabhängigkeit der Menge $\{B_{k,h}^n\}_{k\sim\Omega}$. Die relevanten Indizes $\{k \sim \Omega\}$ sind in diesem Zusammenhang natürlich im Kontext der Definition der weB-Splines zu interpretieren. Wir bezeichnen mit

$$w^e\mathbb{B}_h^n(\Omega) := \operatorname{span}\{B_{k,h}^n\}_{k\sim\Omega} \tag{2.27}$$

den von den weB-Splines über Ω aufgespannten Raum als weB-Raum und die Splines

$$u^h(x) = \sum_{k\sim\Omega} u_k B^n_{k,h}(x) \tag{2.28}$$

mit $u_k \in \mathbb{R}, k \sim \Omega$ nennen wir we-Splines. Als wichtiges Ergebnis halten wir an dieser Stelle noch fest:

Satz 2.3.1 (Stabilität der weB-Basis [40])
Ist w eine ℓ-reguläre Gewichtsfunktion der Ordnung γ, so gilt mit $u^h = \sum_{k\sim\Omega} u_k B^n_{h,k}$ und $U = \{u_k\}_{k\sim\Omega} \in \mathbb{R}^{\mathrm{card}\{k\sim\Omega\}}$, dann ist

$$h^\nu \left\|u^h\right\|_{H^\nu(\Omega)} \preceq \left\|u^h\right\|_{H^\nu(\Omega)} \asymp h^{d/2}\|U\|, \quad \nu \le \ell \le n \tag{2.29}$$

und

$$\|B^n_{k,h}\|_{L^2(\Omega)} \preceq h^{d/2} h^{-\ell}. \tag{2.30}$$

Die Normen der weB-Splines bleiben also gleichmäßig in h beschränkt. Für das Poisson-Beispiel mit Dirichletrand 2.3.1 lässt sich so z.B. mit der weB-Spline Basis $\mathrm{cond}_2(G_h) \preceq h^{-2}$ herleiten [40; 44; 87], die weB-Splines sind im Gegensatz zu den TPB-Splines numerisch stabil. Für die Galerkinmatrizen, welche bei Anwendungen aus der Kontinuumsmechanik auftauchen kann man $\mathrm{cond}_2(G_h) \preceq h^{-4}$ nachweisen, siehe [45; 84]. Diese haben also auch die gewünschten asymptotischen Konditionszahlen, so dass die Galerkin-Systeme numerisch lösbar bleiben. Auf glatten Gebieten und bei geeigneter Gewichtsfunktion besitzen die weB-Splines die volle Approximationskraft, siehe Satz 6.1.6, [40; 44].

2.3.5. Anmerkungen zu nonuniformen weB-Splines und alternativen Stabilisierungstechniken

WeB-Splines über nicht uniforme Knotenfolgen lassen sich mit etwas Mehraufwand analog zu 2.3.3 einführen. Die Stabilität der Basis von nonuniformen weB-Splines wurde in [43] gezeigt. Alternative Methoden zur Stabilisierung von B-Splines durch einfache Normierung sowie deren Approximationseigenschaften wurden für den uniformen Fall in [65] diskutiert und in [66] auf den nonuniformen Fall erweitert. Die Normierung führt *in den meisten Fällen* auf eine stabile Basis, jedoch kann es bestimmte ungünstige Schnitt- und Knotenkonstellationen von B-Spline Trägern mit dem zugrundeliegenden beschränkten Gebiet geben, so dass die B-Splines nicht stabilisierbar sind, siehe für Beispiele [65]. In [82] wurde nun kürzlich (2011) eine neue Stabilisierungstechnik (*lokales uniformes Kondensieren*) vorgeschlagen, mit der sich ein stabiler Spline-Raum über beschränkten Gebieten auf der Basis von Tensorprodukträumen erzeugen lässt. Allerdings geht beim Kondensieren die Tensorproduktstruktur des Raums verloren. Eine gemischte Methode aus Normieren und Kondensieren (*normierte lokal uniform kondensierte B-Splines*) führte auf einen Raum, bei dem zumindest eine lokale Tensorproduktstruktur erhalten bleibt und damit Stabilität bewiesen werden konnte [82]. Diese Methode funktioniert prinzipiell in beliebiger Dimension, jedoch kann man schon für $d = 3$ einfache Beispiele konstruieren, so dass die Kondensierungsmethode nicht notwendigerweise zu einer stabilen Basis führt. Schöne Beispiele und Computerexperimente, in denen die verschiedenen Stabilisierungsphilosophien (Erweitern, Normieren, Kondensieren, Normieren und Kondensieren) in $2d$ numerisch untersucht werden, findet man ebenfalls in [82].

Teil II.

Elliptische Gleichungen mit unstetigen Koeffizenten

„Differentiate without fear!“

(Mathematikervolksmund)

3. Elliptische Gleichungen mit unstetigen Koeffizienten

Wir betrachten in 3.1 allgemeine elliptische Operatoren 2. Ordnung mit Dirichletrand, leiten in 3.1.1 die Variationsformulierung des Randwertproblems her und geben in 3.1.2 an unter welchen Voraussetzungen an die Daten die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung gesichert ist. Die Regularität der Lösung bei hinreichend glatten Daten ist unter dem Namen *Shift-Theorem oder* Weyl'sches Lemma wohlbekannt, und kann mit einer Differenzenquotiententechnik [29; 27; 24] gezeigt werden. In [81] zeigen Roitberg und Sheftel vereinfacht gesprochen, dass elliptische Operatoren 2. Ordnung bei entsprechenden Daten die Räume $H^{\mu+2}$ und $H^{\mu}, \mu \in \mathbb{N}$ homoeomorph aufeinander abbilden. Mit Hilfe der Ergebnisse einer vorhergehenden Arbeit von Sheftel [78] erhält man damit ein zum glatten Fall analoges Shift-Theorem für elliptische Gleichungen mit entlang einer $d-1$ codimensionalen und in das betrachtete Gebiet eingeschlossenen glatten Untermannigfaltigkeit unstetigen Koeffizienten. Wir bringen in 3.2 einen im Vergleich dazu elementaren Beweis mit Hilfe der Differenzenquotiententechnik.

3.1. Gleichmäßig elliptische Operatoren 2.Ordnung

Im Folgenden sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet sowie durch

$$\mathcal{L}u := -\nabla\cdot(\alpha\nabla u) + \beta\nabla u + \gamma u \tag{3.1}$$

ein formal definierter Differentialoperator gegeben. Wir betrachten ein Dirchletrandwertproblem:

$$\begin{cases} \text{Finde } u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \text{ so dass} \\ \mathcal{L}u = f \\ u_{|\partial\Omega} = 0. \end{cases} \tag{3.2}$$

Dieses ist offenbar im klassischen Sinn nur für hinreichend glatte Koeffizienten $\alpha = (\alpha_{i,j})_{i,j=1,..,d}$, $\beta = (\beta_i)_{i,..,d}$ $\alpha_{i,j}, \beta, \gamma : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ und rechter Seite f sinnvoll gestellt. Mit den Daten

$$\alpha \in [L^\infty(\Omega)]^{d\times d}, \beta = (\beta_i)_{i=1,..,d} \in [L^\infty(\Omega)]^d, \gamma \in L^\infty(\Omega), f \in L^2(\Omega)$$

können wir $\mathcal{L}$ aber noch im schwachen Sinn interpretieren und Dirichletrandbedingung $u_{|\partial\Omega} = 0$ wird dann als Spurbedingung aufgefasst. Wenn wir für die *Leitkoeffizienten* α f.ü *gleichmäßige Elliptizität* voraussetzen, d.h. wenn eine Konstante $\epsilon > 0$ existiert, so dass

$$\sum_{i,j=1}^{d} \alpha_{i,j}(x)\xi_i\xi_j \geq_{\text{f.ü.}} \epsilon|\xi|^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^d, \tag{3.3}$$

so nennt man 3.2 gleichmäßig elliptisch. Ein Randwertproblem der Art 3.2 ist insbesondere dann elliptisch, wenn die Koeffizienten des *Hauptteils*, d.h. α f.ü. positiv definit ist.

3.1.1. Variationsformulierung

Multiplizieren wir beide Seiten von $\mathcal{L}u = f$ mit $v \in H_0^1(\Omega)$ und integrieren anschließend über Ω, so erhalten wir

$$(\mathcal{L}u, v)_{L^2(\Omega)} = (f, v)_{L^2(\Omega)}, \ \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{3.4}$$

Mit dem Greenschen Satz 1.23 und da die Spur von v auf dem Rand verschwindet, folgt für die linke Seite

$$(\mathcal{L}u, v)_{L^2(\Omega)} = (\alpha \nabla u, \nabla v)_{L^2(\Omega)} + (\beta \nabla u + \gamma u, v)_{L^2(\Omega)}, \ \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Setzen wir

$$a_{\alpha,\beta,\gamma}(u, v) := \int_\Omega \alpha \nabla u \nabla v + (\beta \cdot \nabla u)v + \gamma u v dx \tag{3.5}$$

$$\ell_f(v) := \int_\Omega f v dx \tag{3.6}$$

so ist offenbar $a_{\alpha,\beta,\gamma}$ eine Bilinearform auf $H_0^1(\Omega)$, und wegen

$$|\ell_f(v)| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|v\|_{H^1(\Omega)} \tag{3.7}$$

ist $\ell_f \in \left(H_0^1(\Omega)\right)'$.

Eine Variationsformulierung von 3.2 lautet dann

$$\begin{cases} \text{Finde } u \in H_0^1(\Omega), \text{ so dass} \\ a_{\alpha,\beta,\gamma}(u, v) = \ell_f(v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \tag{3.8}$$

Das schwach gestellte Randwertproblem 3.2 und die Variationsformulierung sind äquivalent, aufgrund der Herleitung des Variationsproblems ist jede Lösung von 3.2 auch eine Lösung von 3.8. Die Umkehrung dieser Aussage findet man z.B. in [26], Proposition 3.3. Insbesondere ist jede starke Lösung des Variationsproblems auch eine starke Lösung des Randwertproblems.

Für später notieren wir uns noch, dass ein elliptischer Differentialoperator bei einer hinreichend glatten Koordinatentransformation elliptisch bleibt [27]:

Satz 3.1.1 (Elliptischer Operator unter glatter Transformation)
Es seien $\Omega, \tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^d$ Gebiete und $\Phi : \Omega \longrightarrow \tilde{\Omega}$ ein C^2-Diffeomorphismus. Ist $\mathcal{L} \in \mathcal{L}(H^1(\Omega), L^2(\Omega))$ gleichmäßig elliptisch mit Leitkoeffizienten $\alpha \in \left[C^1(\Omega)\right]^{d\times d}$, so ist der durch $\tilde{\mathcal{L}}\cdot := \mathcal{L}(\cdot \circ \Phi)$ definierte und auf $H^1(\tilde{\Omega})$ wirkende Differenzialoperator von zweiter Ordnung und ebenfalls gleichmäßig elliptisch.

3.1.2. Existenz und Eindeutigkeit

Die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung von 3.8 folgt offenbar mit Lax-Milgram 1.3.2, wenn man für die Bilinearform $a_{\alpha,\beta,\gamma}$ noch die Elliptizität d.h. 1.31,1.32 nachweisen kann. Dies wollen wir für einen gleichmäßig elliptischen Differentialoperator $\mathcal{L}$ mit $\beta = \gamma = 0$

und der zugehörigen Bilinearform $a = a_{\alpha,0,0}$, skizzieren. Dass ℓ_f ein beschränktes Funktional auf $H_0^1(\Omega)$ ist, haben wir bereits in 3.7 gesehen. Die Stetigkeit von a folgt aus der wesentlichen Beschränktheit von α :

$$\begin{aligned} |a(u,v)| &\leq \int_\Omega \left| \sum_{i,j=1}^d \alpha_{i,j} \partial_j u \partial_i v \right| dx \\ &\leq d^2 \max_{i,j\leq d} \left\{ \|\alpha_{i,j}\|_{L^\infty(\Omega)} \right\} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \\ &\preceq \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Die Koerzivität folgt aus der gleichmäßigen Elliptizität 3.3 von $\mathcal{L}$, wenn wir $\xi = \nabla u$ setzen:

$$\epsilon |\nabla u|^2 \leq \sum_{i,j=1}^d \alpha_{i,j} \partial_j u \partial_i u,$$

womit wir nach Integration über Ω

$$a(u,u) = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^d \alpha_{i,j} \partial_j u \partial_i u dx \geq \epsilon \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2$$

erhalten. Den allgemeinen Fall erhält man mit Hilfe von der Poincaré-Friedrichs Ungleichung 1.22 und weiteren Minimalitätsbedingungen an die Koeffizienten β, γ: Gilt

$$dC \max_{i\leq d} \left\{ \|\beta_i\|_{L^\infty(\Omega)} \right\} + C^2 \|\gamma\|_{L^\infty(\Omega)} < \sigma, \tag{3.9}$$

so folgt die Koerzivität von $a_{\alpha,\beta,\gamma}$, siehe [24]. Dieses Ergebnis wollen wir im folgenden Satz festhalten:

Satz 3.1.2 (Eindeutigkeit von Lösungen elliptischer Gleichungen)
Es sei $\mathcal{L}$ ein gleichmäßig elliptischer Differenzialoperator auf $H_0^1(\Omega)$ mit $\alpha \in [L^\infty(\Omega)]^{d\times d}$, $\beta \in [L^\infty(\Omega)]^d$, $\gamma \in L^\infty(\Omega)$ und $f \in L^2(\Omega)$. Ist $\beta = \gamma = 0$ oder gilt andernfalls 3.9, so besitzt das Variationsproblem 3.8 genau eine Lösung.

Wir bemerken außerdem, dass die Koeffizienten, insbesondere die Leitkoeffizienten α nicht stetig zu sein brauchen um, die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung von 3.8 zu gewährleisten.

3.2. Regularitätstheorie

Im Folgenden seien $\Omega^\pm, \Omega \subset \mathbb{R}^d$ mit $\Omega^- \subset\subset \Omega$ und $\Omega^+ = \Omega \setminus \overline{\Omega^-}$ beschränkte Gebiete. Den inneren Rand $\Gamma := \partial\Omega^-$ bezeichnen wir hierbei als *Interface*. Für die Leitkoeffizienten von $\mathcal{L}$ setzen wir

$$\alpha_{i,j}(x) = \begin{cases} \alpha_{i,j}^-(x) & \text{für} \quad x \in \Omega^- \\ \alpha_{i,j}^+(x) & \text{für} \quad x \in \Omega^+ \\ \text{beliebig} & \text{für} \quad x \in \Gamma \end{cases} \qquad \alpha_{i,j}^\pm \in C^{m+1}(\overline{\Omega^\pm}),\ m > -1 \tag{3.10}$$

d.h., die $\alpha_{i,j}$ sind auf den Teilgebieten $\Omega^{\pm}$ mindestens stetig differnzierbar. Wir setzen ferner voraus, dass $|\alpha^{+}_{i,j}(\xi) - \alpha^{-}(\xi)| \neq 0, \xi \in \Gamma$. Entlang von Γ machen die Leitkoeffzienten somit einen Sprung in Normalenrichtung. Für die Koeffizienten der Terme niederer Ordnung β, γ setzen wir 3.9 und für α die gleichmäßige Elliptizität voraus, was die Existenz und Eindeutigkeit des Randwertproblems sichert. Dass eine Lösung bei unstetigen Leitkoeffizienten im Allgemeinen nicht klassisch zu sein braucht, d.h. *nicht* in $C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ liegt, zeigt schon das folgende eindimensionale Beispiel.

Beispiel 3.2.1 *Wir betrachten $\Omega := (-1,1)$ mit $\Gamma = \{\xi\}$, $\xi \in (-1,1)$, $f(x) = x$ und das eindimensionale Interfaceproblem*

$$\begin{cases} -(\alpha u')' = x & \text{für } x \in (-1,1) \\ u(-1) = u(1) = 0 \end{cases} \tag{3.11}$$

mit

$$\alpha(x) = \begin{cases} 1/2 & \text{für} \quad x \in (-1,\xi] \\ 1 & \text{für} \quad x \in (\xi,1) \end{cases} \tag{3.12}$$

Angenommen u wäre in $C^2(-1,1) \cap C^0[-1,1]$. Dann ist $-u''(x) = 2x$, $x < \xi$ und $-u''(x) = x$, $x \geq \xi$, woraus man $\lim_{x \to \xi-} u''(x) = -2\xi$ und $\lim_{x \to \xi+} u''(x) = -\xi$, folgert. Das ist ein Widerspruch zur Stetigkeit von u'' auf Ω. Zumindest ist $u \in H^1(-1,1)$ aber nach dem Sobolevschen Einbettungssatz 1.2.4 stetig, d.h. der Wert $u_\xi := u(\xi) \in \mathbb{R}$ ist wohldefiniert. Wir splitten das Interfaceproblem in zwei Randwertprobleme A,B auf:

$$A : \begin{cases} -u'' = x & \text{für } x \in (-1,\xi) \\ u(-1) = 0, u(\xi) = u_\xi \end{cases}$$

$$B : \begin{cases} -2u'' = x & \text{für } x \in (\xi,1) \\ u(\xi) = u_\xi, u(1) = 0. \end{cases}$$

Als Lösungen erhalten wir mit den Parametern $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ für

$$A : u^-(x) = -x^3/6 + ax + b, \quad x \in (-1,\xi)$$

und für

$$B : u^+(x) = -x^3/3 + cx + d, \quad x \in (\xi,1).$$

Interpretieren wir die rechte Seite als schwache Ableitung von $\alpha u'$, so ist $\alpha u' \in H^1(-1,1)$ und muss daher insbesondere auf dem Interface $x = \xi$ stetig sein, d.h. wir bekommen eine weitere Forderung durch $-3/12\xi^2 + a/2 = -\xi^2 + c$. Das daraus resultierende lineare Gleichungssystem mit den Unbekannten a, b, c, d, u_ξ ist, wie man schnell sieht, eindeutig lösbar. Die damit gewonnene abschnittsweise definierte Funktion ist aber auch Lösung der schwachen Formulierung der Differentialgleichung 3.11, wie folgende Rechnung zeigt:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} \alpha u' v' dx &= \frac{1}{2} \int_{-1}^{\xi} u' v' dx + \int_{\xi}^{1} \frac{1}{2} u' v' dx \\ &= \frac{1}{2} \left(u' v \mid_{-1}^{\xi} - \int_{-1}^{\xi} v u'' dx \right) + u' v \mid_{\xi}^{1} - \int_{\xi}^{1} v u'' dx \\ &= \underbrace{\left(\frac{1}{2} u'(\xi-) - u'(\xi+) \right)}_{=0} v(\xi) + \int_{-1}^{1} x v dx, \quad \forall v \in H_0^1(-1,1). \end{aligned}$$

Die Lösung ist somit auf $(-1,1)$ stetig und auf den Teilgebieten $(-1,\xi),(\xi,1)$ glatt, die Ableitung besitzt aber eine Sprungsingularität auf dem Interface. Dass dieses Verhalten der Lösung in einem verallgemeinerten Sinn bei entsprechenden Daten auch in höheren Dimensionen charakteristisch ist, zeigen wir im nächsten Abschnitt.

3.2.1. Die Differenzenquotiententechnik

Wir wollen mit der Differenzenquotiententechnik in diesem Abschnitt ein Shift-Theorem für die Lösung des 3.2 mit den entlang von Γ unstetigen Koeffizienten $\alpha_{i,j}, i,j = 1,...,d$ 3.10 beweisen. Diese Technik ist in der Regularitätstheorie partieller Differenzialgleichungen mittlerweile Standard. Die folgenden Definitionen und Lemmata sind teilweise leichte Verallgemeinerungen von klassischen Resultaten, wie sie z.B. in dem Klassiker von Gilbarg & Trudinger [29] oder [24] zu finden sind.

Definition 3.2.1 (Schwacher Differenzenquotient)
Es sei $\tilde{\Omega} \Subset \Omega$ und $u \in L^2(\Omega)$. Dann bezeichnet man für $0 < h < \operatorname{dist}(\tilde{\Omega},\Omega), x \in \tilde{\Omega}$

$$D_k^{+h}u(x) := h^{-1}(u(x+he_k) - u(x)) \tag{3.13}$$

als schwachen vorwärtsgenommenen und

$$D_k^{-h}u(x) := h^{-1}(u(x) - u(x-he_k)) \tag{3.14}$$

als schwachen rückwärtsgenommenen Differenzenquotienten in der Koordinatenrichtung $k = 1,...,d$. Hierbei bezeichnet e_k den k-ten Standardbasisvektor des $\mathbb{R}^d$. Für hintereinandergeschaltete Differenzenquotienten in den Richtungen $k_1,...k_n, n \in \mathbb{N}$ schreiben wir kurz

$$D_{k_1,\dots,k_n}^{\pm h}u := D_{k_1}^{\pm h}\cdots D_{k_n}^{\pm h}u. \tag{3.15}$$

Wir zeigen zuerst zwei einfache Rechenregeln für die schwachen Differenzenquotienten.

Lemma 3.2.1 (Diskrete partielle Integration und eine Produktregel)
Sei $u,v \in L^2(\Omega), \operatorname{supp}(v) \subset \Omega$ und $0 < h < \operatorname{dist}(\operatorname{supp}(v),\partial\Omega)$. Dann gilt für $k = 1,...,d$

(a) (Partielle Integration)

$$\left(u, D_k^{+h}u\right)_{L^2(\Omega)} = -\left(D_k^{-h}v, u\right)_{L^2(\Omega)} \tag{3.16}$$

(b) (Produktregel)

$$D_k^{+h}(uv)(x) = u(x+he_k)D_k^{+h}v(x) + v(x)D_k^{+h}u(x) \tag{3.17}$$

Beweis: Beide Behauptungen erhalten wir sofort durch direktes Nachrechnen:

(a)

$$\begin{aligned}\int_\Omega u(x)D_k^{+h}v(x)dx &= h^{-1}\int_\Omega u(x)(v(x+he_k)-v(x))dx \\ &= h^{-1}\left(\int_{\Omega+he_k} u(y-he_k)v(y)dy - \int_\Omega u(x)v(x)dx\right) \\ &= -\int_\Omega D_k^{-h}u(y)v(y)dx \end{aligned} \tag{3.18}$$

wobei $\Omega + he_k := \{x \in \mathbb{R}^d \colon x = x' + he_k, x' \in \Omega\}$.

(b) Wir setzen hier zur besseren Übersicht $x_k := x + he_k$.

$$\begin{aligned} D_k^{+h}(u(x)v(x)) &= h^{-1}\left(u(x_k)v(x_k) - u(x)v(x)\right) \\ &= h^{-1}\left(u(x_k)v(x_k) - u(x_k)v(x) + u(x_k)v(x) + u(x)v(x)\right) \\ &= u(x_k)h^{-1}(v(x_k) - v(x)) + v(x)h^{-1}(u(x_k) - u(x)) \\ &= u(x + he_k)D_k^{+h}v(x) + v(x)D_k^{+h}u(x) \end{aligned}$$

□

Einen Zusammenhang des schwachen Differenzenquotienten mit der schwachen Differenzierbarkeit liefert das nächste Resultat.

Lemma 3.2.2 (Differenzierbarkeit und schwacher Differenzenquotient)

(a) $\|D_k^{-h}u\|_{L^2(\tilde{\Omega})} \leq \|\partial_k u\|_{L^p(\Omega)}, \quad \forall u \in H^1(\Omega) \quad$ *und* $\quad k = 1, ..., d.$

(b) Existiert für $u \in L^2(\Omega)$ *und* $k_i \in \{1, ..., d\}, i = 1, ..., p \in \mathbb{N}$ *ein* $C \in \mathbb{N}$, *so dass*

$$\|D_{k_1,...,k_p}^{\pm h}u\|_{L^2(\tilde{\Omega})} \leq C \quad \forall 0 < h \leq \operatorname{dist}(\tilde{\Omega}, \Omega)\ \forall \tilde{\Omega} \Subset \Omega,$$

dann ist

$$\|\partial_{k_1,...,k_p}u\|_{L^2(\Omega)} \leq C. \tag{3.19}$$

Beweis: (a): Da $C^1(\Omega)$ dicht in $H^1(\Omega)$ liegt, genügt es die Behauptung für $u \in C^1(\Omega) \cap H^1(\Omega)$ zu zeigen. Für C^1-Funktionen wird 3.13 zu dem gewöhnlichen Differenzenquotienten und wir erhalten

$$D_k^{+h}u(x) = h^{-1}\int_0^h \partial_k(x + \xi e_k)d\xi.$$

Wir setzen auf beiden Seiten der Gleichung Beträge, quadrieren und integrieren bezüglich x über $\tilde{\Omega}$ und erhalten

$$\begin{aligned} \|D_k^{+h}u\|_{L^2(\tilde{\Omega})}^2 &= h^{-2}\int_{\tilde{\Omega}}\left|\int_0^h \partial_k u(x + \xi e_k)d\xi\right|^2 dx \\ &\underbrace{\leq}_{\text{Hölder } 1.8} h^{-2}\int_{\tilde{\Omega}} h\int_0^h |\partial_k u(x + \xi e_k)|^2 d\xi dx \\ &= h^{-1}\int_0^h\int_{\tilde{\Omega}} |\partial_k u(x + \xi e_k)|^2 dx d\xi \\ &= h^{-1}\int_0^h\int_{\tilde{\Omega}+\xi e_k} |\partial_k u(x)|^2 dx d\xi \\ &\leq \|\partial_k u\|_{L^2(\Omega)}^2 \end{aligned}$$

(b): An dieser Stelle benötigen wir Resultate über schwache und schwach∗ Konvergenz, welche wir im Anhang in den Nummern A.5-B.2 zusammengestellt haben. $L^2(\tilde{\Omega})$ ist als Hilbertraum zu sich selbst dual und mithin reflexiv, insbesondere stimmen die schwache und die schwach∗ Topologie überein. Da nach Voraussetzung $\|D_{k_1,...,k_p}^{+h}u\|_{L^2(\tilde{\Omega})}$ beschränkt

ist, gibt es eine Nullfolge $(h_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$, so dass $D^{+h_\ell}_{k_1,\dots,k_p}u$ im schwach$*$ Sinn gegen ein $u_{k_1,\dots,k_p}$ in $L^2(\tilde\Omega)$ konvergiert. In $L^2(\tilde\Omega)$ ist dies gleichbedeutend damit, dass $\left(\int_{\tilde\Omega}\phi\, D^{+h_\ell}_{k_1,\dots,k_p}u dx\right)_{\ell\in\mathbb{N}}$ für alle $\phi\in C_0^\infty(\tilde\Omega)$ Cauchyfolgen mit Grenzwert $\int_{\tilde\Omega} u_{k_1,\dots,k_p}\phi\, dx$ sind. Mit der Regel der partiellen Summation 3.16 schließen wir hieraus:

$$\begin{aligned}\lim_{\ell\to\infty}\left(D^{+h_\ell}_{k_1,\dots,k_p}u,\phi\right)_{L^2(\tilde\Omega)} &= (-1)^p\lim_{\ell\to\infty}\left(u, D^{-h_\ell}_{k_1,\dots,k_p}\phi\right)_{L^2(\tilde\Omega)}\\ &= (-1)^p\left(u,\partial_{k_1,\dots,k_p}\phi\right)_{L^2(\tilde\Omega)}\\ &= \left(u_{k_1,\dots,k_p},\phi\right)_{L^2(\tilde\Omega)},\end{aligned}$$

d.h. auf $\tilde\Omega$ ist $u_{k_1,\dots,k_p}=\partial_{k_1,\dots,k_p}u$ und wegen der schwachen Unterhalbstetigkeit der Norm (vgl. B.1)

$$\|\partial_{k_1,\dots,k_p}u\|_{L^2(\tilde\Omega)}\le\liminf_{\ell\to\infty}\|D^{+h_\ell}_{k_1,\dots,k_p}u\|_{L^2(\tilde\Omega)}\le C.$$

Wenden wir dieses Ergebnis auf die Folgeglieder einer Ausschöpfung $(\Omega_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ (vergl. Definition A.1) an, so folgt die Behauptung wegen $\partial_{k_1,\dots,k_p}u(\Omega_n)\,|_{\Omega_m}=\partial_{k_1,\dots,k_p}u(\Omega_m), m\le n$ aus A.5: $C\ge\lim_{\nu\to\infty}\|\partial_{k_1,\dots,k_p}u\|_{L^2(\Omega_\nu)}=\|\partial_{k_1,\dots,k_p}u\|_{L^2(\Omega)}$. □

3.2.2. Shift-Theorem für elliptische Gleichungen mit stückweise glatten Koeffizienten

Satz 3.2.1 (Shift-Theorem)
Es sei $u\in H^1_0(\Omega)$ die Lösung des schwachen Interfaceproblems 3.2 mit gleichmäßig elliptischen Leitkoeffizienten

$$\alpha_{i,j}(x)=\begin{cases}\alpha^-_{i,j}(x) & \text{für}\quad x\in\Omega^-\\ \alpha^+_{i,j}(x) & \text{für}\quad x\in\Omega^+\end{cases},\quad \alpha^\pm_{i,j}\in C^{m+1}(\Omega^\pm),\beta_i,\gamma\in C^{m+1}(\Omega).$$

Sind für $m>-1$ die Ränder $\partial\Omega,\Gamma\in C^{m+2}$ und

$$f\in L^2(\Omega)\cap H^m(\Omega^+)\cap H^m(\Omega^-),$$

so ist

$$u\in H^1_0(\Omega)\cap H^{m+2}(\Omega^-)\cap H^{m+2}(\Omega^+)\tag{3.20}$$

Beweis: Aus [29; 24; 27] folgt bei hinreichend glatten Daten die innere Regularität

$$\|u\|_{H^{m+2}(\Omega^\star)}\le C_\delta\left(\|f\|_{L^2(\Omega)}+\|u\|_{H^1(\Omega)}\right),\quad\forall\Omega^\star\Subset\Omega^\pm,\tag{3.21}$$

wobei die Konstante von $\delta=\operatorname{dist}(\Omega^\star,\partial\Omega)$ abhängt, sowie die Regularität bis zum äußeren Rand, d.h.

$$\|u\|_{H^{m+2}(\mathcal{U}\cap\overline\Omega)}\preceq\|f\|_{H^{m+2}(\Omega^+)}+\|u\|_{H^1(\Omega)}\tag{3.22}$$

für alle hinreichend kleinen Umgebungen $\mathcal{U}$ von $\partial\Omega$ gezeigt. Es bleibt also noch das Verhalten von u in einer Umgebung des Interfaces zu untersuchen.

(i) $m = 0$**:**

Wir setzen $g := f - \beta \cdot \nabla u - \gamma u \in L^2(\Omega)$, dann ist

$$\int_\Omega \alpha \nabla u \nabla v dx = \int_\Omega g v dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \tag{3.23}$$

und g wird wegen $\|\beta_i\|_{L^\infty(\Omega)} < \infty, \|\gamma\|_{L^\infty(\Omega)} < \infty$, apriori durch die Daten und die Lösung beschränkt:

$$\|g\|_{L^2(\Omega)} \preceq \|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{H^1(\Omega)}. \tag{3.24}$$

Da das Interface mindestens aus der Klasse C^2 ist, finden wir nach 1.2.1 eine endliche Überdeckung von offenen Mengen $\mathcal{U}_\nu, \nu = 1, ..., N \in \mathbb{N}$ von Γ und C^2-Diffeomorphismen Φ_ν, welche U_ν auf $B := B_1(0)$ abbilden und das Interface lokal geradebiegen. Sei dazu $\mathcal{U}$ eine solche Umgebung und Φ der dazugehörige Diffeomorphismus. Wir kennzeichnen im Folgenden alle auf B transformierten Größen mit dem Tildesymbol $\tilde{}$. Dann ist $\Phi(\mathcal{U} \cap \Omega^\pm) = B^\pm$ und $\Phi(\mathcal{U} \cap \Gamma) = \tilde{\Gamma}$. Zu B existiert nach A.4 zu jedem $\eta \in (0,1)$ eine Abschneidefunktion $\chi = \chi_\eta \in C_0^\infty(B)$ mit $\chi_{|B_\eta} \equiv 1, \chi \mid_{\mathbb{R}^d \setminus B} \equiv 0$ und $0 \leq \chi \leq 1$. Außerdem existiert ein $\mu \in (\eta, 1)$, so dass $\operatorname{supp}(\chi) = B_\mu(0) = B_\mu$. Der Differentialoperator $\tilde{\mathcal{L}} = \mathcal{L} \circ \Phi$ ist nach 3.1.1 gleichmäßig elliptisch auf B. Da $\tilde{u} = \Phi(u \mid_{\mathcal{U}}) \in H_0^1(B)$ und χ außerhalb von B_μ verschwindet, ist offenbar $v = D_k^{-h}(\chi^2 D_k^{+h} \tilde{u}) \in H_0^1(B)$. Wir setzen v in die rechte Seite der transformierten Variationsgleichung ein und erhalten

$$\sum_{i,j=1}^d \left(\tilde{\alpha}_{i,j} \partial_j \tilde{u} \partial_i D_k^{-h}(\chi^2 D_k^{+h} \tilde{u}) \right)_{L^2(B_\mu)} = - \left(\tilde{g}, D_k^{-h}(\chi^2 D_k^{+h} \tilde{u}) \right)_{L^2(B_\mu)}.$$

Da offenbar

$$\partial_p \left(D_q^{\pm h} w \right) = D_q^{\pm h} \left(\partial_p w \right), \quad 1 \leq p, q \leq d, w \in H^1(G_h) \tag{3.25}$$

für Gebiete $G_h \subset G$ mit $\operatorname{dist}(\partial G, \partial G_h) > 0$ gilt, folgt mit der Rechenregel 3.16

$$\int_{B_\mu} \sum_{i,j=1}^d D_k^{+h} \left(\tilde{\alpha}_{i,j} \partial_j \tilde{u} \right) \partial_i \left(\chi^2 D_k^{+h} \tilde{u} \right) = - \left(\tilde{g}, D_k^{-h}(\chi^2 D_k^{+h} \tilde{u}) \right)_{L^2(B_\mu)}$$

und durch Anwendung der Produktregel 3.17 auf der linken Seite nach Ausmultiplikation

$$\begin{aligned} &\int_{B_\mu} \sum_{i,j=1}^d \tilde{\alpha}_{i,j}(x + he_k) D_k^{+h} \partial_j \tilde{u} \cdot \partial_i \left(\chi^2 D_k^{+h} \tilde{u} \right) d\tilde{x} \\ &= - \left(\tilde{g}, D_k^{+h}(\chi^2 D_k^{+h} \tilde{u}) \right)_{L^2(B_\mu)} \\ &\quad - \sum_{i,j=1}^d \left(D_k^{+h} \tilde{\alpha}_{i,j} \partial_j \tilde{u}, \partial_i \tilde{u} \left(\chi^2 D_k^{+h} \tilde{u} \right) \right)_{L^2(B\mu)}. \end{aligned}$$

Aus

$$\partial_i(\chi^2 D_k^{+h} u) = 2\chi \partial_i \chi D_k^{+h} \tilde{u} + \chi^2 \partial_i D_k^{+h} \tilde{u}, \quad i = 1, ..., d \tag{3.26}$$

erhalten wir weiter

$$\int_{B_\mu} \sum_{i,j=1}^{d} \tilde{\alpha}_{i,j}(x+he_k) D_k^{+h}\partial_j u \cdot \chi^2 D_k^{+h}\partial_j u d\tilde{x}$$

$$\begin{aligned} &= -\left(\tilde{g}, D_k^{-h}(\chi^2 D_k^{+h}\tilde{u})\right)_{L^2(B_\mu)} \\ &\quad \underbrace{-\sum_{i,j=1}^{d}\left(D_k^{+h}\tilde{\alpha}_{i,j}\partial_j\tilde{u}, \partial_i\tilde{u}\left(\chi^2 D_k^{+h}\tilde{u}\right)\right)_{L^2(B_\mu)}}_{=:A} \\ &\quad -2\sum_{i,j=1}^{d}\left(\chi\tilde{\alpha}_{i,j}(\cdot+he_k)D_k^{+h}\partial_j\tilde{u}, \partial_i\chi D_k^{+h}\tilde{u}\right)_{L^2(B_\mu)} =: R \end{aligned} \tag{3.27}$$

Aufgrund der Lokalisierung durch χ verschwinden alle Integrale außerhalb von $\mathrm{supp}(\chi) = B_\mu$, in denen χ als zu integrierender Faktor vorkommt und wegen $\mathrm{meas}_d(\tilde{\Gamma}) = 0$ ist es unerheblich welche Werte $\tilde{\alpha}_{i,j}$ auf dem transformierten Interfacestück (=Äquator) annimmt und wir sie deshalb undefiniert lassen [25]. Da außerdem $\tilde{\alpha}_{i,j}^{\pm} \in C^1(B^{\pm})$ ist, gelingt die Abschätzung von A der rechten Seite von 3.27 für hinreichend kleines h und $k = 1, ..., d-1$:

$$\begin{aligned} A &\leq \sum_{i,j=1}^{d}\left(D_k^{+h}\tilde{\alpha}_{i,j}\partial_j\tilde{u}, \partial_i u\left(\chi^2 D_k^{+h}\tilde{u}\right)\right)_{L^2(B_\mu)} \\ &= \sum_{i,j=1}^{d}\left(\int_{B_\mu^-} D_k^{+h}\tilde{\alpha}_{i,j}\partial_j\tilde{u}\partial_i\tilde{u}\chi^2 D_k^{+h}u d\tilde{x} + \int_{B_\mu^+} D_k^{+h}\tilde{\alpha}_{i,j}\partial_j u\partial_i u\chi^2 D_k^{+h}u d\tilde{x}\right) \\ &= \sum_{i,j=1}^{d}\left(\|D_k^{-h}\tilde{\alpha}_{i,j}\|_{L^2(B_\mu^-)} + \|D_k^{-h}\tilde{\alpha}_{i,j}\|_{L^2(B_\mu^+)}\right)\int_{B_\mu}\partial_j\tilde{u}\partial_i\tilde{u}\chi^2 D_k^{+h}\tilde{u}\, d\tilde{x} \\ &\leq 2\max_{i,j=1...d}\left\{\max\{\|\partial_k\tilde{\alpha}_{i,j}\|_{L^2(B^{\pm})}\}\right\}\sum_{i,j=1}^{d}\left(\partial_j\tilde{u}\partial_i\tilde{u}, \chi^2 D_k^{+h}\tilde{u}\right)_{L^2(B\mu)} \\ &\leq 2\max_{i,j=1...d}\left\{\max\{\|\tilde{\alpha}_{i,j}^{\pm}\|_{C^1(B^{\pm})}\}\right\}\sum_{i,j=1}^{d}\left(\partial_j\tilde{u}\partial_i\tilde{u}, \chi^2 D_k^{+h}\tilde{u}\right)_{L^2(B_\mu)}. \end{aligned} \tag{3.28}$$

Wegen $|\partial_k\chi(x)| \preceq \mathrm{dist}(B_\mu, \partial B)^{-1}\ \forall x \in B\eta, k \in \mathbb{N}$ (siehe A.4) hängen die Beträge der Ableitungen der Abschneidefunktion zwar vom Rand der Kugel B, nicht jedoch vom Interface ab, so dass wir in den folgenden Abschätzungen generische Konstanten nur implizit beachten. Erinnern wir uns noch an die Norm für vektorwertige Funktionen: $\|w\|_{L^2(G)} = \sum_{i=1}^{d}\|w_i\|_{L^2(G)}^2$, $w \in [L^2(G)]^d$, so ist

$$\|\partial_k w\|_{L_2(G)} \leq \|\nabla w\|_{L^2(G)}, \quad k = 1, ..., d, w \in H^1(G). \tag{3.29}$$

Wir wenden nun die Abschätzung für A aus 3.28 und Cauchy-Schwarz auf die rechte Seite von 3.27 an und schätzen danach die auftretenden Normen mit den oben gemachten

Überlegungen für $k = 1, ..., d-1$ ab:

$$
\begin{aligned}
R \quad &\preceq \quad \|\tilde{g}\|_{L^2(B)} \|D_k^{-h}\left(\chi^2 D_k^{+h}\tilde{u}\right)\|_{L^2(B_\mu)} + \|\partial_k \tilde{u}\|_{L^2(B)} \|\partial_k(\chi^2 D_k^{+h}\tilde{u})\|_{L^2(B_\mu)} \\
&\quad + \|\chi \partial_k D_k^{+h}\tilde{u}\|_{L^2(B_\mu)} \|\nabla \chi D_k^{+h}\tilde{u}\|_{L^2(B_\mu)} \\
&\underset{3.25,3.26,3.29}{\leq} \quad \|\tilde{g}\|_{L^2(B)} \|D_k^{-h}\left(\chi^2 D_k^{+h}\tilde{u}\right)\|_{L^2(B_\mu)} + \|\chi D_k^{+h}\nabla u\|_{L^2(B_\mu)} \|\nabla \chi D_k^{+h}\tilde{u}\|_{L^2(B_\mu)} \\
&\quad + \|\nabla \tilde{u}\|_{L^2(B)} \left\{ \|2\nabla\chi\chi D_k^{+h}\tilde{u}\|_{L^2(B_\mu)} + \|\chi^2 \nabla D_k^{+h}\tilde{u}\|_{L^2(B_\mu)} \right\} \\
&\preceq \quad \|\tilde{g}\|_{L^2(B)} \|D_k^{-h}\left(\chi^2 D_k^{+h}\tilde{u}\right)\|_{L^2(B_\mu)} + \|\chi \nabla (D_k^{+h}\tilde{u})\|_{L^2(B_\mu)} \|D_k^{+h}\tilde{u}\|_{L^2(B_\mu)} \\
&\quad + \|\nabla \tilde{u}\|_{L^2(B)} \left\{ \|D_k^{+h}\tilde{u})\|_{L^2(B_\mu)} + \|\chi \nabla (D_k^{+h}\tilde{u})\|_{L^2(B_\mu)} \right\} \\
&\underset{3.2.2}{\leq} \quad \|\tilde{g}\|_{L^2(B_\mu)} \|\partial_k\left(\chi^2 D_k^{+h}\tilde{u}\right)\|_{L^2(B_\mu)} + \|\chi \nabla (D_k^{+h}u)\|_{L^2(B_\mu)} \|\partial_k \tilde{u}\|_{L^2(B_\mu)} \\
&\quad + \|\nabla \tilde{u}\|_{L^2(B)} \left\{ \|\partial_k \tilde{u}\|_{L^2(B_\mu)} + \|\chi \nabla (D_k^{+h}\tilde{u})\|_{L^2(B_\mu)} \right\} \\
&\underset{3.29}{\preceq} \quad \|\tilde{g}\|_{L^2(B_\mu)} \|\nabla\left(\chi^2 D_k^{+h}\tilde{u}\right)\|_{L^2(B_\mu)} + \|\chi \nabla (D_k^{+h}u)\|_{L^2(B_\mu)} \|\nabla \tilde{u}\|_{L^2(B_\mu)} \\
&\quad + \|\nabla \tilde{u}\|_{L^2(B)} \left\{ \|\partial_k \tilde{u}\|_{L^2(B_\mu)} + \|\chi \nabla (D_k^{+h}\tilde{u})\|_{L^2(B_\mu)} \right\}
\end{aligned}
$$

Wir benutzen Young A.1 mit der Elliptizitätskonstanten ϵ, und mit der a priori Abschätzung für $\tilde{g}$ (3.24) schließen wir nach kurzer Rechnung aus der letzten Zeile der obigen Abschätzung

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i,j=1}^{d} \left(\tilde{\alpha}_{i,j}(\cdot + he_k) D_k^{+h}\partial_j \tilde{u}, \chi^2 D_k^{+h}\partial_i \tilde{u}\right)_{L^2(B_\mu)} \\
&\qquad \preceq \left(\|\tilde{f}\|^2_{L^2(B)} + \|u\|^2_{H^1(B)}\right) + \frac{\epsilon}{2}\|\chi \nabla D_k^{+h}\tilde{u}\|^2_{L^2(B_\mu)}.
\end{aligned}
$$

Aus der gleichmäßigen Elliptizität der $\tilde{\alpha}_{i,j}$ auf B folgt damit

$$
\int_{B_\mu} |D_k^{+h}\nabla \tilde{u}|^2 d\tilde{x} \preceq \left(\|\tilde{f}\|^2_{L^2(B)} + \|\tilde{u}\|^2_{H^1(B)}\right). \tag{3.30}
$$

Mit 3.19 ist also

$$
\partial_k \nabla \tilde{u} \in \left[L^2(B)\right]^d, \quad k = 1, ..., d-1.
$$

Den Operator $\tilde{\mathcal{L}}$ können wir wegen dem Sprung der Leitkoeffizienten in d-Richtung auf B nicht divergenzfrei darstellen. Wir betrachten deswegen die Operatorgleichung $\tilde{\mathcal{L}}\tilde{u} = \tilde{f}$ jeweils eingeschränkt auf $B^\pm$. Setzen wir $\sigma_i^\pm = \tilde{\beta}_i^\pm - \sum_{j=1}^d \partial_j \tilde{\alpha}_{i,j}^\pm, i = 1, ...d$, so können wir $\tilde{\mathcal{L}}$ auf $B^\pm$ in nichtdivergenter Form schreiben:

$$
-\sum_{i,j=1}^{d} \tilde{\alpha}_{d,d}^\pm \partial_{i,j}^2 \tilde{u}^\pm + \sum_{i=1}^{d} \sigma_i^\pm \partial_i \tilde{u}^\pm + \tilde{\gamma}\tilde{u}^\pm = \tilde{f}^\pm.
$$

Setzen wir $\xi_i = e_d$, so ist wegen der gleichmäßigen Elliptizität der transformierten Leitkoeffizienten $\tilde{\alpha}^{\pm}_{d,d}(\tilde{x}) >_{\text{f.ü.}} 0, \tilde{x} \in B^{\pm}$, und deswegen

$$\partial^2_{d,d}\tilde{u}^{\pm} = -\frac{1}{\tilde{\alpha}^{\pm}_{d,d}}\left(\sum_{i,j=1}^{d}\tilde{\alpha}_{i,j}\partial^2_{i,j}\tilde{u}^{\pm} + \sum_{i=1}^{d}\sigma^{\pm}_i\partial_i\tilde{u}^{\pm} + \tilde{\gamma}^{\pm} - \tilde{f}^{\pm}\right). \tag{3.31}$$

In Verbindung mit 3.30 und den Voraussetzungen an den Koeffizienten bedeutet das

$$\|\partial^2_{d,d}\tilde{u}^{\pm}\|_{L^2(B^{\pm})} \preceq \left(\|\tilde{f}\|_{L^2(B)} + \|\tilde{u}\|_{H^1(B)}\right).$$

Damit ist $\partial^2_{d,d}\tilde{u}^{\pm} \in L^2(B^{\pm})$, wegen 3.30 $\tilde{u}^{\pm} \in H^2(B^{\pm})$ und somit

$$u\,|_{\mathcal{U}} \in H^1(\mathcal{U}) \cap H^2(\mathcal{U} \cap \Omega^+) \cap H^2(\mathcal{U} \cap \Omega^-).$$

Da wir dies für jede Menge $\mathcal{U}$ aus der Überdeckung von Γ machen können, folgt mit den Resultaten über die innere Regularität 3.21 und der Regularität bis zum äußeren Rand $\partial\Omega$ 3.22 die Behauptung für $m = 0$.

(ii) $m > -1$

Den Fall für beliebiges $m > -1$ erhalten wir durch Induktion und durch geeignet hintereinander geschachtelte Differenzenquotienten analog zu $m = 0$. Um noch mehr langwierige und technische Rechnungen zu vermeiden, beweisen wir nur den Schritt von $m = 0 \to m = 1$ der alle wesentlichen Tricks enthält. Der allgemeine Induktionsschritt wird daraus sofort ersichtlich. Wir setzen dazu die folgenden Daten voraus:

$$\alpha_{ij} \in C^2(\Omega^{\pm}),\ \beta_i, \gamma \in C^2(\Omega),\ f \in L^2(\Omega) \cap H^1(\Omega^+) \cap H^1(\Omega^-),\ \partial\Omega, \Gamma \in C^2$$

sowie $u \in H^1(\Omega) \cap H^2(\Omega^+) \cap H^2(\Omega^-)$. Nach einer Lokalisierung (die transformierten Größen kennzeichnen wir wieder mit dem Tildesymbol $\tilde{}$) erhalten wir die schwache Formulierung auf der Kugel $B := B_1(0)$: $\tilde{a}_o(\tilde{u}, v) = (\tilde{g}, v)_{0,B}, \forall v \in H^1_0(B)$, wobei wir $\tilde{g} := \tilde{f} - \sum_{i=1}^{d}\tilde{\beta}_i\partial_i\tilde{u} - \tilde{\gamma}\tilde{u}$ und $\tilde{a}_0(\tilde{u}, v) := \int_B \sum_{i,j=1}^{d}\tilde{\alpha}_{ij}\partial_j\tilde{u}\partial_i v\, d\tilde{x}$ gesetzt haben. Wir wählen wieder eine Abschneidefunktion $\chi := \chi_\eta \in C^\infty_0(B)$ bezüglich $(B_\eta, B_1), 0 < \eta < 1$ mit $\operatorname{supp}\chi = B_\mu(0) =: B_\mu, 0 < \eta < \mu < 1$ und setzen einen Differenzenquotienten der Form

$$v = D^{-h}_k D^{-h}_\ell(\chi^2 D^{+h}_k D^{+h}_\ell \tilde{u}) \in H^1_0(B), \quad k, \ell = 1, ..., d-1 \tag{3.32}$$

in die schwache Formulierung ein [25]. Mit partieller Summation 3.16 folgt sogleich

$$\int_{B_\mu}\sum_{i,j=1}^{d} D^{+h}_\ell D^{+h}_k(\tilde{a}_{ij}\partial_j\tilde{u})\partial_i(\chi^2 D^{+h}_k D^{+h}_\ell\tilde{u})\, d\tilde{x} = (\tilde{g}, D^{-h}_k D^{-h}_\ell(\chi^2 D^{+h}_k D^{+h}_\ell\tilde{u}))_{L^2(B_\mu)}.$$

Wir nutzen zweimal die diskrete Produktregel 3.17:

$$\int_{B_\mu}\sum_{i,j=1}^{d} D^{+h}_\ell\left\{\tilde{a}_{ij}(x + he_k)D^{+h}_k D_j\tilde{u} + D^{+h}_k\tilde{a}_{ij}\partial_j\tilde{u}\right\}\partial_i(\chi^2 D^{+h}_k D^{+h}_\ell\tilde{u})\, d\tilde{x}$$

$$= (\tilde{g}, D_k^{-h} D_\ell^{-h}(\chi^2 D_k^{+h} D_\ell^{+h} \tilde{u}))_{L^2(B_\mu)}.$$

Für die linke Seite erhalten wir daraus

$$\int_{B_\mu} \sum_{i,j}^{d} \Big\{ \tilde{a}_{ij}(x + h(e_k + e_\ell)) D_\ell^{+h} D_k^{+h} \partial_j \tilde{u} + D_\ell^{+h} \tilde{a}_{i,j}(\cdot + he_k) D_k^{+h} \partial_j \tilde{u} +$$

$$(D_k^{+h} \tilde{a}_{ij})(x + he_\ell) D_\ell^{+h} \partial_j \tilde{u} + D_\ell^{+h}(D_k^{+h} a_{ij}) D_j \tilde{u} \Big\} D_i(\chi^2 D_k^{+h} D_\ell^{+h} \tilde{u})\, d\tilde{x}$$

und wegen $D_\ell^{+h} D_k^{+h} \tilde{u} = D_k^{+h} D_\ell^{+h} \tilde{u}$, $\partial_i D_k^{\pm h} \tilde{u} = D_k^{\pm h} \partial_i \tilde{u}$ sowie $\partial_i \chi^2 = 2\chi \partial_i \chi$ folgt weiter:

$$\int_{B_\mu} \sum_{i,j=1}^{d} \tilde{a}_{ij}(x + h(e_k + e_\ell)) D_\ell^{+h} \left(D_k^{+h} \partial_j \tilde{u} \right) \chi^2 D_\ell^{+h} D_k^{+h} \partial_i \tilde{u}\, d\tilde{x} \tag{3.33}$$

$$\begin{aligned}
&= (\tilde{g}, D_k^{-h} D_\ell^{-h}(\chi^2 D_k^{+h} D_\ell^{+h} \tilde{u}))_{L^2(B_\mu)} \\
&- 2 \sum_{i,j=1}^{d} \left(\tilde{a}_{ij}(x + h(e_k + e_\ell)) D_\ell^{+h} D_k^{+h} \partial_j \tilde{u} \chi, \partial_i \tau D_\ell^{+h} D_k^{+h} \tilde{u} \right)_{L^2(B_\mu)} \\
&- \sum_{i,j=1}^{d} \left((D_k^{+h} \tilde{a}_{ij})(\cdot + he_\ell) D_\ell^{+h} \partial_j \tilde{u}, \partial_i \left(\chi^2 D_\ell^{+h} D_k^{+h} \tilde{u} \right) \right)_{L^2(B_\mu)} \\
&- \sum_{i,j=1}^{d} \left(D_\ell^{+h} \tilde{a}_{ij}(\cdot + he_k) D_k^{+h} \partial_j \tilde{u}, \partial_i \left(\chi^2 D_\ell^{+h} D_k^{+h} \tilde{u} \right) \right)_{L^2(B_\mu)} \\
&- \sum_{i,j=1}^{d} \left(D_\ell^{+h} D_k^{+h} \tilde{a}_{ij} \partial_j \tilde{u}, \partial_i (\chi^2 D_\ell^{+h} D_k^{+h} \tilde{u}) \right)_{L^2(B_\mu)} := R
\end{aligned}$$

Wir schätzen mit Cauchy-Schwarz den ersten Term von R ab. Da für $\tilde{u} \in H^1(B) \cap H^2(B^+) \cap H^2(B^-)$ offenbar $\partial_k g_{|B^\pm} \in L^2(B^\pm), k \neq d$ ([25]) bekommen wir wegen 3.16 und 3.2.2

$$\begin{aligned}
&(\tilde{g}, D_k^{-h} D_\ell^{-h}(\chi^2 D_k^{+h} D_\ell^{+h} \tilde{u}))_{L^2(B_\mu)} \\
&= -(D_k^{+h} g, D_\ell^{-h}(\chi^2 D_k^{+h} D_\ell^{+h} \tilde{u})_{L^2(B_\mu)} \\
&\leq \|D_k^{+h} g\|_{L^2(B_\mu)} \|\partial_\ell(\chi^2 D_k^{+h} D_\ell^{+h} \tilde{u})\|_{L^2(B_\mu)} \\
&\leq \left(\|\partial_k g\|_{L^2(B^+)} + \|\partial_k g\|_{L^2(B^-)} \right) \left(\|\nabla \chi^2 D_k^{+h} D_\ell^{+h} \tilde{u}\|_{L^2(B_\mu)} + \|\chi^2 D_\ell^{+h} D_k^{+h} \nabla \tilde{u}\|_{L^2(B_\mu)} \right).
\end{aligned}$$

Da der Äquator $\Phi(\Gamma_{\mathcal{U}}) = B \cap \{\tilde{x}_d = 0\}$ eine Nullmenge ist, $\tilde{a}_{i,j}^\pm \in C^2(B^\pm)$, $\tilde{u}^\pm \in H^2(B^\pm)$ und der Differenzenquotient nur auf $B^\pm$ wirkt, können wir auf $B^\pm$ durch die zweiten partiellen Ableitungen abschätzen. Wir beachten wieder $\|\nabla \chi\|_{L^2(B)} \preceq 1, \|\chi\|_{L^2(B)} \preceq 1$ und erhalten:

$$\begin{aligned}
R \preceq\ & \left(\|\partial_k g\|_{L^2(B^+)} + \|\partial_k g\|_{L^2(B^-)} \right) \left(\|D_k^{+h} D_\ell^{+h} \tilde{u}\|_{L^2(B_\mu)} + \|\chi^2 D_\ell^{+h} D_k^{+h} \nabla \tilde{u}\|_{L^2(B_\mu)} \right) \\
& + \|D_k^{+h} D_\ell^{+h} \nabla \tilde{u} \chi\|_{L^2(B_\mu)} \|D_k^{+h} D_\ell^{+h} \tilde{u})\|_{L^2(B_\mu)} \\
& + \left(\|\nabla \tilde{u}\|_{L^2(B)} + \|D_k^{+h} \nabla \tilde{u}\|_{L^2(B_\mu)} + \|D_\ell^{+h} \nabla \tilde{u}\|_{L^2(B_\mu)} \right) \|\nabla(\chi^2 D_k^{+h} D_\ell^{+h} \tilde{u})\|_{L^2(B_\mu)}
\end{aligned}$$

Da $\tilde{\beta}_i$ und $\tilde{\gamma}$ wesentlich beschränkt sind, erhalten wir für $k \neq d$ außerdem

$$\big(\|\partial_k g\|_{L^2(B^+)} + \|\partial_k g\|_{L^2(B^-)}\big) \preceq \|\tilde{f}\|_{H^1(B^+)} + \|\tilde{f}\|_{H^1(B)^-} + \|\tilde{u}^+\|_{H^2(B^+)} + \|\tilde{u}^-\|_{H^2(B^-)}.$$

Den Rest schätzen wir analog wie im ersten Beweisteil mit der Youngschen Ungleichung mit einem geeignet gewählten $\epsilon > 0$ ab:

$$R \leq C_\epsilon \Big\{ \|\tilde{f}\|^2_{H^1(B^+)} + \|\tilde{f}\|^2_{H^1(B^-)} + \|\tilde{u}^+\|^2_{H^2(B^+)} + \|\tilde{u}^-\|^2_{H^2(B^-)} \Big\} + \frac{\epsilon}{2} \|\chi D_k^{+h} D_\ell^{+h} \nabla \tilde{u}\|^2_{L^2(B_\mu)}$$

Setzt man $\xi_i = D_k^{+h} D_\ell^{+h} \partial_i \tilde{u}$ in die linke Seite von 3.33 ein und nutzt die gleichmäßige Elliptizität aus, so folgt

$$\int_{B_\mu} \chi^2 |D_k^{+h} D_\ell^{+h} \nabla \tilde{u}|^2 \, d\tilde{x} \leq C_\epsilon \Big(\|\tilde{f}\|^2_{H^1(B^+)} + \|\tilde{f}\|^2_{H^1(B^-)} + \|\tilde{u}^+\|^2_{H^2(B^+)} + \|\tilde{u}^-\|^2_{H^2(B^-)} \Big)$$

und damit aus 3.19 $\partial_k \partial_\ell \nabla \tilde{u} \in \big[L^2(B)\big]^d, k, l \neq d$. Wir schränken den transformierten Differentialoperator wieder auf $B^\pm$ ein und lösen nach $\partial^2_{d,d} \tilde{u}^\pm$ auf:

$$-\partial^2_{d,d} \tilde{u}^\pm = \frac{1}{\tilde{\alpha}^\pm_{d,d}} \Big\{ \sum_{(i,j) \neq (d,d)} \partial_i (\alpha^\pm_{i,j} \partial_j \tilde{u}^\pm) + \sum_{i=1}^d \tilde{\beta}_i^{\,\pm} \partial_i \tilde{u}^\pm + \tilde{\gamma}^\pm \tilde{u}^\pm + \tilde{f}^\pm \Big\} \tag{3.34}$$

Die rechte Seite kann wegen $\tilde{f} \in H^1(B^\pm), \tilde{u}^\pm \in H^2(B^\pm)$ und den auf $B^\pm$ hinreichend glatten Koeffizienten noch einmal nach $\tilde{x}_d$ differenziert werden, damit ist $\partial^3_{d,d,d} \tilde{u} \in L^2(B^\pm)$ und $\tilde{u} \in H^1(B) \cap H^3(B^+) \cap H^3(B^-)$. Durch Rücktransformation erhalten wir also die Behauptung für den Fall $m = 1$. Setzen wir für ein $m > -1$ die Daten

$$\alpha_{ij} \in C^{m+1}(\Omega^\pm), \beta_i, \gamma \in C^{m+1}(\Omega), f \in L^2(\Omega) \cap H^m(\Omega^+) \cap H^m(\Omega^-), \partial\Omega, \Gamma \in C^m$$

voraus, so erhalten wir den allgemeinen Induktionsschritt $m \longrightarrow m+1$, indem wir analog zu 3.32 einen Differenzenqoutienten der Form

$$v = D^{+h}_{k_1,\ldots,k_m} \left(\chi^2 D^{-h}_{k_1,\ldots,k_m} \tilde{u} \right), \quad k_1, \ldots, k_m \neq d$$

in die entsprechende schwache Formulierung einsetzen und analoge Rechnungen ausführen.□

4. Elliptische Interfaceprobleme

Wir formulieren in 4.1 ein einfaches Modellproblem, welches noch die wesentlichen Schwierigkeiten, die bei der Approximation elliptischer Randwertprobleme mit unstetigen Koeffizienten auftauchen, beinhaltet und zeigen in 4.2 charakteristische Eigenschaften der Lösung. In 4.3 illustrieren wir warum man mit Standard Finite Elemente Verfahren keine bessere Approximationsordnung als $\mathcal{O}(h^{1/2})$ in der H^1-Norm erwarten kann und geben in 4.3.2 einen kleinen Überlick über den Forschungsstand numerischer Approximationsverfahren für elliptische Interfaceprobleme an.

4.1. Modellproblem

Wir betrachten beschränkte Gebiete $\Omega, \Omega^- \subset \mathbb{R}^d$ mit $\Omega^- \Subset \Omega$ mit glatten Rändern $\partial\Omega$,$\Gamma := \partial\Omega^-$ wobei wir $\Omega^+ = \Omega \setminus (\Omega^- \cup \Gamma)$ setzen. Den inneren Rand Γ bezeichnen wir als das *Interface*. Für $d = 2$ könnte das z.B. mit dem der von Γ nach außen gerichteten Normalen ν so aussehen:

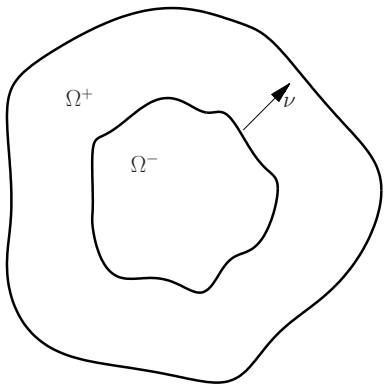

Abbildung 4.1.: Gebiete $\Omega^\pm$ und das Interface Γ für $d = 2$

Die schwache Interpretation der Aufgabe: Finde $u \in H_0^1(\Omega)$, so dass

$$\begin{cases} -\nabla\cdot(\alpha\nabla u) = f \\ u_{|\partial\Omega} = 0 \end{cases} \tag{4.1}$$

bezeichnen wir im Folgenden als *Interfaceproblem*. Hierbei sind

$$\alpha(x) = \begin{cases} \alpha^+ & \text{für} \quad x \in \Omega^- \cup \Gamma \\ \alpha^- & \text{für} \quad x \in \Omega^+, \end{cases} \quad \alpha^\pm \in \mathbb{R}^+, \alpha^+ \neq \alpha^- \tag{4.2}$$

stückweise konstante Koeffizienten.

Für $f \in L^2(\Omega)$ erhalten wir nach 3.1.1 die Variationsformulierung für das Interfaceproblem: Finde $u \in H_0^1(\Omega)$, so dass

$$\int_\Omega \alpha \nabla u \nabla v \, dx = \int_\Omega f v \, dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{4.3}$$

Diese Aufgabe ist nach 3.1.2 eindeutig lösbar und die Lösung liegt bei hinreichend glatten Rändern $\partial\Omega, \Gamma$ und $f \in H^{m+2}(\Omega)$ nach dem Shift-Theorem 3.2.1 auf den Teilgebieten $\Omega^\pm$ in $H^{m+2}(\Omega^\pm)$.

Elliptische Gleichungen diesen Typs tauchen in den Anwendungen typischerweise bei der mathematischen Modellierung von Vorgängen in Natur und Technik auf, bei denen zwei verschiedene Materialien (z.B. Metall, Gummi) oder Stoffe in verschiedenen Zuständen (z.B. Wasser, Eis) durch ein Interface voneinander getrennt sind. Bei parabolischen Interfaceproblemen der Form

$$\partial_t u(x,t) - \nabla \cdot (\alpha(x) \nabla u(x,t)) = f(x,t)$$

auf dem Raum-Zeit Zylinder $\Omega \times (0,T), T \in \mathbb{R}, T > 0$ mit Anfangsrandwertbedingungen

$$u(x,0) = u_0(x) \quad \text{auf} \quad \Omega, \; u = 0 \quad \text{auf} \quad \partial\Omega \times (0,T)$$

und Sprungbedingungen (vgl. 4.2)

$$[\![u]\!] = 0, \quad [\![\alpha \nabla u]\!] = g(x,t) \quad \text{auf} \quad \Gamma \times (0,T)$$

lassen sich auch (zeitabhängige) instationäre Vorgänge modellieren, bei denen in jedem Zeitschritt ein elliptisches Interfaceproblem als Zwischenaufgabe zu lösen ist, siehe z.B. [18] für eine Finite Elemente Lösung und Referenzen für Anwendungen. Exemplarisch seien hier der stationäre und instationäre Wärmetransport zwischen inhomogenen Materialien mit unterschiedlichen Wärmeleitkoeffizienten $\alpha^\pm$ genannt, siehe z.B. [61] für einfache Testbeispiele, die mit einer Finiten Differenzentechnik (Immersed Interface Methode, vgl. 4.3.2) implementiert wurden. Bei der Diskretisierung von Navier-Stokes Gleichungen mit der *Projektionsmethode* treten elliptische Interfaceprobleme ebenfalls auf, wenn z.B. zwei Flüssigkeiten mit verschiedener Viskosität (z.B. Ölblase in Wasser) in Wechselwirkung stehen, siehe [66,67].

4.2. Sprungbedingungen und globale Regularität

In Abhängigkeit von den Daten gelten für die Lösung Übergangsbedingungen (Sprünge) auf dem Interface, welche wir durch geeigneten Spuroperatoren ausdrücken können. Wir betrachten zunächst die klassische Sprungdefinition. Zu $\xi \in \Gamma$ und $u_{|\Omega^\pm} =: u^\pm \in C^\infty(\Omega^\pm)$ definieren wir den Sprung entlang von Γ durch

$$[\![u]\!]_\Gamma(\xi) := \lim_{x \to \xi, x \in \Omega^+} u^+(x) - \lim_{x \to \xi, x \in \Omega^-} u^-(x). \tag{4.4}$$

Ist Γ z.B. für $d = 2$ nach der Bogenlänge t parametrisiert, so ist $[\![u]\!]_\Gamma = [\![u]\!]_\Gamma(t)$ eine univariate Funktion in t. Im schwachen Sinn wird der Sprung mit Hilfe von Spuroperatoren

modelliert. Zum Beispiel existieren für $u \in H^1(\Omega)$ und $\Gamma \in C^1$ nach 1.2.7 Spuroperatoren $\gamma^\pm \in \mathcal{L}(H^1(\Omega^\pm), H^{1/2}(\Gamma))$. Mit diesen definieren wir den Sprung von u entlang von Γ durch

$$[\![u]\!]_\Gamma := \gamma^+(u^+) - \gamma^-(u^-) \in H^{1/2}(\Gamma), \tag{4.5}$$

welcher für $u^\pm \in C^\infty(\overline{\Omega^\pm})$ einfach die Einschränkung von $u^\pm$ auf Γ bedeutet, d.h. $[\![u]\!]_\Gamma = u^+_{|\Gamma}(x) - u^-_{|\Gamma}(x)$. Für beschränkte Gebiete stimmt dann wegen der Eindeutigkeit der stetigen Fortsetzung von C^∞-Funktionen auf den Rand die klassische Grenzwertdefinition 4.4 mit der Spurversion überein. Eine Interpretation der Spuren von $\nabla_\nu u^+, \nabla_\nu u^-$ im $H^{1/2}(\Gamma)$-Sinn erfordert mindestens H^2-Regularität der Lösung auf den Teilgebieten $\Omega^\pm$. Dies ist nach Satz 3.2.1 für $f \in L^2(\Omega)$ und einem C^2-Interface gewährleistet. Im nächsten Satz zeigen wir eine leicht allgemeinere Fassung von Theorem 6.4.1 aus [8].

Satz 4.2.1 (Natürliche Sprungbedingungen)
Es sei $\partial\Omega, \Gamma \in C^2, f \in L^2(\Omega)$. Dann erfüllt die Lösung des Interfacproblems u die natürlichen Sprungbedingungen

$$[\![u]\!]_\Gamma = 0 \quad \textit{und} \quad [\![\alpha \nabla_\nu u]\!]_\Gamma = 0 \quad \textit{in} \quad H^{1/2}(\Gamma). \tag{4.6}$$

Beweis: Wir zeigen zuerst $[\![u]\!]_\Gamma = 0$. Da $u \in H^1_0(\Omega)$, existiert eine Folge $u_k := (u_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset C^\infty_0(\overline{\Omega})$, so dass $\lim_{k\to\infty} \|u_k - u\|_{H^1(\Omega)} = 0$. Offenbar ist $u_k^\pm := (u_k)_{|\Omega^\pm} \in C^\infty(\overline{\Omega^\pm})$ und $\lim_{k\to\infty} \|u_k^\pm - u^\pm\|_{H^1(\Omega^\pm)} = 0$. Da Γ hinreichend glatt ist, existieren nach 1.2.7 stetige Spuroperatoren $\gamma^\pm \in \mathcal{L}(H^1(\Omega)^\pm, H^{1/2}(\Gamma))$, woraus wir $\gamma^\pm(u_k) \to \gamma^\pm(u^\pm), k \to \infty$ in $H^{1/2}(\Gamma)$ erhalten, was $[\![u]\!]_\Gamma = 0 \in H^{1/2}(\Gamma)$ zeigt.
Es bleibt noch die zweite Sprungbedingung zu zeigen. Aus der Variationsformulierung 4.3 folgt

$$\alpha^+ \int_{\Omega^+} \nabla u^+ \nabla v \, dx + \alpha^- \int_{\Omega^-} \nabla u^- \nabla v \, dx - \int_\Omega f v \, dx = 0 \quad \forall v \in H^1_0(\Omega) \tag{4.7}$$

und da $u^\pm$ auf $\Omega^\pm$ zweimal schwach differenzierbar ist, folgt mit Gauß 1.23 für die Integrale auf der linken Seite von 4.7:

$$\alpha^\pm \int_{\Omega^\pm} \nabla u^\pm \nabla v dx = -\int_{\Omega^\pm} \left(\alpha^\pm \Delta u^\pm\right) v \, dx \pm \alpha^\pm \int_\Gamma \gamma^\pm(v) \gamma^\pm \left(\nabla_\nu u^\pm\right) \, d\sigma, \quad \forall v \in H^1_0(\Omega). \tag{4.8}$$

Setzen wir 4.8 in 4.7 ein und formen geschickt um, so erhalten wir

$$\begin{aligned} &- \int_{\Omega^+} \left(\alpha^+ \Delta u^+ + f_{|\Omega^+}\right) v \, dx - \int_{\Omega^-} \left(\alpha^- \Delta u^- + f_{|\Omega^-}\right) v \, dx \\ &+ \int_\Gamma \left\{\gamma^+ \left(\alpha^+ \nabla_\nu u^+\right) - \gamma^- \left(\alpha^- \nabla_\nu u -\right)\right\} \gamma^\pm v \, d\sigma = 0, \quad \forall v \in H^1_0(\Omega). \end{aligned} \tag{4.9}$$

Da aus $-\nabla(\alpha \nabla u) = f$ f.ü. auf Ω offenbar $-\alpha^\pm \Delta u^\pm = f_{|\Omega^\pm}$ f.ü. auf $\Omega^\pm$ folgt, verschwinden die ersten beiden Integrale aus 4.9 und da v beliebig gewählt werden kann folgt mit dem Variationslemma 1.10 aus dem dritten Integral die zweite Sprungbedingung auf $H^{1/2}(\Gamma)$. □

Satz 4.2.2 (Globale Regularität)
Die eindeutige Lösung u von 4.3 liegt für $\partial\Omega, \Gamma \in C^{m+1}$ und $f \in H^m(\Omega), m > -1$, in

$$H^{3/2-\epsilon}_0(\Omega) \cap H^{m+2}(\Omega^-) \cap H^{m+2}(\Omega^+), \quad \epsilon \in (0, 1/2] \tag{4.10}$$

Beweis: Nach dem Shift-Theorem 3.2.1 ist $u_{|\Omega^\pm} =: u^\pm \in H^2(\Omega^\pm)$ und damit nach 1.25 auch $u^\pm \in H^{1+\epsilon}(\Omega^\pm)$. Für $i = 1, ..., d$ ist $\partial_i u^\pm \in H^\epsilon(\Omega^\pm)$. Wir setzen

$$\partial_i \tilde{u}^\pm := \begin{cases} \partial_i u^\pm & \text{auf} \quad \Omega^\pm \\ 0 & \text{auf} \quad \Omega^\mp, \end{cases} \qquad i = 1, ..., d.$$

Für die durch 0 auf ganz Ω fortgesetzten Funktionen folgt aus [30] $\partial_i \tilde{u} \in H^\epsilon(\Omega), i = 1..., d$. Mit Gauß 1.23 folgt für alle $v \in H_0^1(\Omega)$ und $\gamma \in \mathcal{L}(H^1(\Omega), H^{1/2}(\partial\Omega))$, $\gamma^\pm \in \mathcal{L}(H^1(\Omega^\pm), H^{1/2}(\Gamma))$

$$\begin{aligned}
\int_\Omega (\partial_i u - \partial_i \tilde{u}^+ - \partial_i \tilde{u}^-) v \, dx &= \int_\Omega \partial_i u v \, dx - \int_{\Omega^+} \partial_i \tilde{u}^+ v \, dx - \int_{\Omega^-} \partial_i \tilde{u}^- v \, dx \\
&= \int_\Omega u \partial_i v \, dx - \int_{\Omega^+} u \partial_i v \, dx - \int_{\Omega^-} u \partial_i v \, dx \\
&\quad - \int_{\partial\Omega} \gamma v \gamma u \nu_i \, d\sigma + \int_{\partial\Omega^+} \gamma v \gamma u^+ \nu_i \, d\sigma + \int_{\partial\Omega^-} \gamma v \gamma u^- \nu_i \, d\sigma \\
&\underbrace{=}_{v_{|\partial\Omega}=0} \int_\Omega u \partial_i v \, dx - \int_{\Omega^+} u^+ \partial_i v \, dx - \int_{\Omega^-} u^- \partial_i v \, dx \\
&\quad + \int_\Gamma \gamma v \gamma u^+ \nu_i \, d\sigma - \int_\Gamma \gamma u^- \gamma v \nu_i \, d\sigma.
\end{aligned}$$

Da $u = \tilde{u}^+ + \tilde{u}^-$ f.ü. auf Ω und nach 4.6 $[\![u]\!]_\Gamma = 0$ ist, verschwinden sämtliche Integrale auf der rechten Seite, so dass

$$\int_\Omega (\partial_i u - \partial_i \tilde{u}^+ - \partial_i \tilde{u}^-) v \, dx = 0, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), i = 1, ..., d.$$

Daraus folgt $\nabla u \in [H^\epsilon(\Omega)]^d$ und damit die Behauptung. □

Für unsere Zwecke ist es zwar bereits völlig ausreichend zu wissen, dass im Allgemeinen $u \notin H^2(\Omega)$ gilt. Davon unabhängig stellt sich an dieser Stelle jedoch die interessante Frage, ob es nicht doch noch ein wenig glatter geht. Genauer: ob oder unter welchen Voraussetzungen an die Daten $u \in H^{2-\epsilon}(\Omega), \epsilon \in (0, 1/2]$ liegt. Dies ist womöglich eine noch offene und nicht trivial zu beantwortende Frage [25]. Im Eindimensionalen ist das Problem jedoch schnell gelöst: man sieht schon bei einfachen Beispielen (z.B. Heavisidefunktion, siehe auch [24]) schnell, dass die globale Regularität bei einer stückweise glatten, aber springenden Funktion nicht verbessert werden kann. Vermutlich werden in höheren Dimensionen die Verhältnisse genauso sein.

Satz 4.2.3 (Klassisches Transmissionsproblem)
Ist die Lösung u des Interfaceproblems 4.3 in $H_0^1(\Omega) \cap C^2(\Omega^-) \cap C^2(\Omega^+)$, so löst diese auch das Transmissionsproblem

$$\begin{cases} -\alpha^- \Delta u &= f \quad \textit{auf} \quad \Omega^- \\ -\alpha^+ \Delta u &= f \quad \textit{auf} \quad \Omega^+ \end{cases}, \tag{4.11}$$

mit den Randbedingungen $[\![u]\!]_\Gamma = 0, [\![\alpha \nabla_\nu u]\!]_\Gamma = 0$ in $C^2(\Gamma)$ und $u_{|\partial\Omega} = 0$. Es gilt auch die Umkehrung. Ist u Lösung des Transmissionproblems, so ist u auch Lösung von 4.3.

Beweis: Die Richtung „$\Longrightarrow$“ folgt aus 4.2.1. Mit Gauss 7.3.1 zeigt man die Äquivalenz:

$$w \in H^1(\Omega) \Longleftrightarrow w^{\pm} = w_{|\Omega^{\pm}} \in H^1(\Omega^{\pm}), \gamma^+ w^+ - \gamma^- w^- = 0. \tag{4.12}$$

Die Umkehrung folgt, wenn man die partielle Integration in 4.2.1 rückgängig macht und aus 4.12 $u \in H_0^1(\Omega)$ schließt. □

4.2.1. Bemerkung zur Regularität bei einem stückweise glatten Interface und inhomogenen Sprungbedingungen

Ist Γ beispielsweise nur stetig oder lipschitz oder hat $\partial\Omega$ eine einspringende Ecke mit einem Winkel $> \pi$, so kann man nicht mehr von H^2-Regularität auf den Teilgebieten ausgehen. In den beiden Monographien [30; 31] werden viele Ergebnisse über elliptische Randwertprobleme auf Gebieten mit einspringenden Ecken in $2d$ untersucht. Die für diese Probleme entwickelte Regularitätstheorie ist somit auch für elliptische Interfaceprobleme interessant, wenn z.B. $\partial\Omega$ glatt oder keine einspringende Ecke besitzt und das Interface ein Polygon ist. In dieser Situation treten *Eckensingularitäten* am Interface auf, welche die Regularität der Lösung maßgeblich beeinflussen. Stellt man keine zusätzlichen Bedingungen an den springenden Koeffizienten α mit $\delta < \alpha < \delta^{-1}$, $\delta > 0$, so ist u aus 4.3 noch in $H^{1+\lambda(\delta)}(\Omega^{\pm})$, $0 < \lambda(\delta) < 1$ und λ kann beliebig klein werden, wenn $\delta \to 0$ geht, siehe für Details [69]. Die Sprungbedingungen 4.6 gelten dann immer noch, allerdings für $[\![\alpha \nabla_\nu u]\!]_\Gamma$ nur als verallgemeinerte Spur in dem Dualraum $H^{-1/2}(\Gamma) = \big(H^{1/2}(\Gamma)\big)'$, siehe für Details zu solchen Dualräumen [30]. In [69] wurde z.B. kürzlich gezeigt, dass man $H^{5/4}$-Regularität auf den Teilgebieten erreichen kann, wenn α eine *Quasi-Monotonie*-Bedingung einhält. Die numerische Behandlung von elliptischen Gleichungen mit Eckensingularitäten (ohne Interface) mit *weB*-Splines wird aktuell untersucht und in [4] veröffentlicht. Wir haben in 4.2 die homogenen Sprungbedingungen am Interface alleine aus der Variationsformulierung von $-\nabla\cdot(\alpha\nabla u) = f$ erhalten. Für manche Anwendungen sind inhomogene Sprünge $[\![\alpha \nabla_\nu u]\!]_\Gamma = g \in H^{-1/2}(\Gamma)$ interessant, diese müssen dann explizit gefordert werden. Das inhomogene Problem lässt sich auf das homogene zurückführen, was die Existenz, Eindeutigkeit und Regularität der Lösung sichert, siehe [50] und die dort angegebenen Referenzen. Inhomogene Sprünge $[\![u]\!]_\Gamma \neq 0$ und $[\![\alpha \nabla_\nu u]\!]_\Gamma \neq 0$ treten in natürlicher Weise auf, wenn man auch distributionelle rechte Seiten $f \in H^{-1}(\Omega)$ zulässt. Die Lösung liegt dann aber offenbar global nicht einmal mehr in $H^1(\Omega)$.

4.3. Numerische Verfahren für Interfaceprobleme

Klassische FE-Verfahren fordern für eine optimale Approximationsordnung in der H^1 und L^2 Norm mindestens globale H^2-Glattheit der Lösung. Für das Interfaceproblem können wir jedoch, wie wir gesehen haben, selbst bei einem beliebig glatten Gebietsrand, Interface und rechter Seite im Allgemeinen nur globale $H^{3/2-\epsilon}, \epsilon \in [1/2, 0)$ Regularität erwarten.

4.3.1. FE-Approximation im Eindimensionalen

Wir illustrieren zuerst kurz die Situation im Eindimensionalen mit linearen Elementen und verifizieren, dass man ohne Tricks bestenfalls eine Approximationsordnung von $\mathcal{O}(h^{1/2})$

in H^1 erwarten kann, durch eine simple Modifikation aber dennoch die optimale Approximationsordnung erhält. Sei dazu $I = (a,b) \subset \mathbb{R}, a < b$ und $\xi \in (a,b)$. Wir setzen $I^- = (a,\xi), I^+ = (\xi,b)$ und $\Gamma = \{\xi\}$. Die Aufgabe des eindimensionalen Interfaceproblems lautet somit für $\alpha^\pm \in \mathbb{R}^+, \alpha^+ \neq \alpha^-, \alpha(x) := \alpha^\pm, x \in I^\pm$: Finde $u \in H_0^1(a,b)$, so dass

$$\begin{cases} -(\alpha u')' = f \in L^2(a,b) \\ u(a) = u(b) = 0 \\ \alpha^- u'(\xi-) - \alpha^+ u'(\xi+) = 0. \end{cases} \tag{4.13}$$

Aus dem Shift-Theorem 3.2.1 wissen wir, dass zu diesem Problem genau eine Lösung $u \in H_0^1(a,b) \cap H^2(a,\xi) \cap H^2(\xi,b)$ existiert. Wir vernetzen $\overline{I}$ mit einer uniformen Knotenfolge, d.h. wir setzen $h := (b-a)/N$ mit einem $N \in \mathbb{N}$ und $\tau_k := a + kh, k = 0, ..., N$, wodurch wir das Gitter $\Delta := \{a = \tau_0 < ... < \tau_N = b\}$ erhalten. Wir wollen u mit einem Element aus

$$V_h := \{v \in C^0[a,b] : v_{|(\tau_i,\tau_{i+1})} \in \mathcal{P}^1(\tau_k,\tau_{k+1}), k = 0, ..., N-1, v(a) = v(b) = 0\}$$

approximieren. V_h stimmt offenbar im Eindimensionalen mit dem Splineraum $\mathbb{B}_0^1(\Delta) := \operatorname{span}\{b_{h,k}^1\}_{k\sim\Delta}$ überein, die B-Splines $b_{h,k}^1, k \sim \Delta$ sind dann die *Hutfunktionen*

$$b_k^1(x) = \begin{cases} \dfrac{x-\tau_k}{\tau_{k+1}-\tau_k} & \text{für} \quad x \in [\tau_k, \tau_{k+1}) \\ \dfrac{\tau_{k+2}-x}{\tau_{k+2}-\tau_k} & \text{für} \quad x \in [\tau_{k+1}, \tau_{k+2}] \end{cases}$$

Wir setzen

$$\mathcal{I}u := \sum_{i=0}^{N} u(\tau_i) b_{h,i}^1. \tag{4.14}$$

Dann ist offenbar $\mathcal{I} \in \mathcal{L}(C^0(I), \mathbb{B}_{0,h}^1(\Delta))$ und wie man schnell bestätigt $\mathcal{I}p = p, \forall p \in \mathcal{P}^1(\overline{I})$. Der Operator $\mathcal{I}$ bildet stetige Funktionen auf den Splineraum $\mathbb{B}_0^1(\Delta)$ ab und ist ein einfaches Beispiel eines *Quasi-Interpolations-Operators*. Der folgende Satz zeigt, dass wir die Lösung des Interfaceproblems in der H^1 und L^2-Norm optimal mit Elementen aus $\mathbb{B}_0^1(\Delta)$ approximieren können, solange nur ξ mit einem inneren Knoten aus $\Delta \setminus \{a,b\}$ übereinstimmt.

Satz 4.3.1 (Approximation des Interfaceproblem für $d = 1$)
Es sei $u \in H_0^1(a,b) \cap H^2(a,\xi) \cap H^2(\xi,b)$ die Lösung des eindimensionalen Interfaceproblems 4.13 und $\mathcal{I}u \in \mathbb{B}_0^1(\Delta)$ gegeben.

- *Ist $\xi \in \Delta \setminus \{a,b\}$ so gilt*

$$\|u - \mathcal{I}u\|_{L^2(a,b)} \preceq h^2 \|f\|_{L^2(a,b)} \tag{4.15}$$

$$\|u - \mathcal{I}u\|_{H^1(a,b)} \preceq h \|f\|_{L^2(a,b)} \tag{4.16}$$

- *Ist $\xi \neq \Delta$, dann ist*

$$\|u - \mathcal{I}u\|_{H^1(a,b)} \preceq h^{1/2} \|f\|_{L^2(a,b)}. \tag{4.17}$$

Beweis: Wir zeigen zuerst 4.15 und 4.16 mit Hilfe von elementarer Fourieranalysis wie es z.B. in dem klassischen Buch von Strang & Fix [83] geschieht. Nach den Sobolevschen Einbettungsätzen 1.2.4 ist $H_0^1(I) \hookrightarrow C^0(\overline{I})$ und $H^2(I^\pm) \hookrightarrow C^1(\overline{I^\pm})$, so dass wir u auf $\overline{I}$ als stetig und $u^\pm$ auf $\overline{I^\pm}$ als stetig differenzierbar ansehen können. Sei nun $\xi \in \Delta \setminus \{a, b\}$, d.h. $\xi = \tau_i$ für ein $i \in \{i = 1, ..., N-1\}$. Interpolieren wir u vermöge dem Interpolationsoperator $\mathcal{I}$ an den Knoten $\tau_i, i = 0, ..., N$, so ist $\mathcal{I}u \in \mathbb{B}_0^1(\Delta)$ der eindeutig interpolierende Spline an u, welcher die Nullrandbedingung erfüllt. Wir betrachten die Differenz $u^\star = u - \mathcal{I}u$ sowie diese eingeschränkt auf einem beliebigen Intervall $I_j = [\tau_j, \tau_{j+1}], j \sim \Delta$ der Länge h mit $u_j^\star := (u - \mathcal{I}u)_{|I_j}$. Da $u^\star$ auf $I^\pm$ stückweise stetig differenzierbar, bzw. auf jedem I_j sogar stetig differnzierbar ist und $u_j^\star(\tau_j) = u_j^\star(\tau_{j+1}) = 0$ gilt, können wir $u_j^\star$ als ungerade $2h$-periodische Funktion fortsetzen und somit in jedem Intervall I_j als reine Sinusfourierreihe entwickeln:

$$\mathcal{F}u^\star(x) := \sum_{k=0}^{\infty} b_k \sin\left(\frac{k\pi x}{h}\right).$$

Wir beachten, dass wegen $(u_j^\star)' = u' - C_j$ mit einer Konstanten $C_j \in \mathbb{R}$, so dass $\partial^2 u^\star = u'' \in L^2(I_j), j = 0, ...,$ auf $I_j, j = 0, ..., N$. Durch gliedweises Differenzieren von $\mathcal{F}u^\star$ erhalten wir

$$\partial_x \mathcal{F}u^\star = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{kb_k}{h} \cos\left(\frac{k\pi}{h}\right) \quad \text{und} \quad \partial_x^2 \mathcal{F}u^\star = -\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{kb_k}{h}\right)^2 \sin\left(\frac{k\pi}{h}\right).$$

Da $u_j^\star \in H^2(I_j) \cap C^1(I_j)$ folgt mit der Parsevalschen Gleichung A.3 sofort

$$\begin{aligned}
\|u^\star\|_{L^2(I_j)}^2 &= \int_{I_j} |u^\star|^2 dx = \frac{h}{2} \sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 \\
\|\partial u^\star\|_{L^2(I_j)}^2 &= \int_{I_j} (\partial_x u^\star)^2 dx = \frac{h}{2} \sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 \left(\frac{k\pi x}{h}\right) \\
\|\partial^2 u^\star\|_{L^2(I_j)}^2 &= \int_{I_j} (\partial_x^2 u^\star)^2 dx = \frac{h}{2} \sum_{k=1}^{\infty} b_k^4 \left(\frac{k\pi x}{h}\right).
\end{aligned}$$

Die Reihenglieder können wir wegen $k \geq 1$,

$$b_k^2 \leq k^4 \left(\frac{h}{\pi}\right)^4 \left(\frac{\pi}{h}\right)^4 b_k^2 = \left(\frac{h}{\pi}\right)^4 \quad \text{und} \quad \left(\left(\frac{k^2\pi^4}{h^4}\right) b_k^2\right) \leq \left(\frac{k\pi}{h}\right)^4 b_k^2$$

durch

$$\left(\frac{k\pi}{h}\right)^2 b_k^2 \leq \left(\frac{h}{\pi}\right)^2 \left(\frac{k\pi}{h}\right)^2 b_k^2$$

abschätzen, woraus sich nach Summation über k

$$\|u^\star\|_{L^2(I_j)}^2 \leq \frac{h^4}{\pi^4} \|\partial^2 u^\star\|_{L^2(I_j)} \quad \text{und} \quad \|\partial u^\star\|_{L^2(I_j)}^2 \leq \frac{h^2}{\pi^2} \|\partial^2 u^\star\|_{L^2(I_j)}, \quad j = 0, ..., N$$

ergibt. Damit ist

$$\begin{aligned}\|u^\star\|^2_{L^2(a,b)} &= \sum_{j=0}^{N} \|u^\star\|^2_{L^2(I_j)} \leq \frac{h^4}{\pi^4} \sum_{j=0}^{N} \|u''\|^2_{L^2(I_j)} \\ &= \frac{h^4}{\pi^4} \left(\|u''\|^2_{L^2(a,\xi)} + \|u''\|^2_{L^2(\xi,b)} \right) \underbrace{\preceq}_{3.24} \left(h^2 \|f\|_{L^2(a,b)} \right)^2\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\|\partial u^\star\|^2_{L^2(a,b)} &= \sum_{j=0}^{N} \|\partial u^\star\|^2_{L^2(I_j)} \leq \frac{h^2}{\pi^2} \sum_{j=0}^{N} \|u''\|^2_{L^2(I_j)} \\ &\leq \frac{h^2}{\pi^2} \left(\|u''\|^2_{L^2(a,\xi)} + \|u''\|^2_{L^2(\xi),b} \right) \underbrace{\preceq}_{3.24} \left(h \|f\|_{L^2(a,b)} \right)^2,\end{aligned}$$

woraus sich die optimalen Fehlerordnungen 4.15 und 4.16 ergeben.
Um 4.17 zu zeigen nehmen wir nun an, dass das Interface nicht mit einem inneren Knoten übereinstimmt, also $\xi \notin \Delta$ gilt. Dann ist $\xi \in I_j = [\tau_j, \tau_{j+1}]$ für ein $j \in \{1, ..., N-1\}$. Auf dem Interface macht u' einen Sprung der Höhe

$$J := |u'(\xi-) - u'(\xi+)|$$

und auf I_j ist der interpolierende Spline konstant, d.h.

$$(\mathcal{I}u)'_{|I_j} = K_j \in \mathbb{R}.$$

Das bedeutet aber, dass auf I_j

$$|\partial u^\star| = |u' - K_j| \geq \frac{J}{2}$$

gilt und daraus folgt insbesondere

$$\int_{I_j} \frac{J^2}{4} dx \leq \int_{I_j} |(u - \mathcal{I}u)'|^2 dx = \|\partial u^\star\|^2_{L^2(I_j)}.$$

Das bedeutet aber nichts anderes, als dass auf I_j die Ungleichung

$$\|\partial u^\star\|_{L^2(I_j)} \geq \frac{J}{2}\sqrt{h}$$

besteht. Bei den restlichen Intervallen erhalten wir analog zu den vorherigen Überlegungen

$$\|\partial u^\star\|_{L^2((a,b)\setminus I_j)} = \mathcal{O}(h),$$

was schließlich 4.17 zeigt. □

Stimmt das Interface also mit einem Interpolationsknoten überein, so „merkt“ das approximierende Finite Element den Sprung von u' am Interface nicht und die Approximationsordnung bleibt optimal. Mit analoger Argumentation wie im Beweis von 4.3.1 sieht man auch im höherdimensionalen Fall, dass man keine bessere Approximationsordung als $\mathcal{O}(h^{1/2})$ für eine das Interface ignorierende Vernetzung erhält, siehe z.B. für einen Beweis im Zweidimensionalen [33]. Bei weB-Splines sind die Verhältnisse ähnlich, da die relevanten Splines auf einer Gitterzelle $Q_\ell \cap \Gamma \neq \emptyset$ glatt sind, siehe dazu auch die numerischen Ergebnisse in Kapitel 8.

4.3.2. Ein Überblick über existierende Approximationsansätze und numerische Verfahren

Aufgrund der Vielzahl an möglichen Anwendungen in den Materialwissenschaften, Fluid- und Thermodynamik etc. war man durch die immer leistungsfähiger werdenden Computer bestrebt, numerische Lösungen von elliptischen Interfaceproblemen zu erhalten. Vom mathematischen Standpunkt aus gesehen interessiert natürlich der Nachweis der Konvergenz und die Konvergenzgeschwindigkeit der Verfahren am meisten, welche oft eine große Herausforderung darstellen. Viele mathematische Ansätze sind theoretisch sehr reizvoll und elegant, aber praktisch nicht einfach in ein effizientes Computerprogramm zu implementieren und werden deshalb von den Anwendern meist ignoriert. Andererseits werden manchmal praktikable Lösungen vorgeschlagen und mit experimentellen Methoden untermauert, jedoch fehlt dann dort oft der analytische Nachweis, ob die Methode überhaupt konvergiert. Ein populärer Variationsansatz für elliptische Interfaceprobleme mit inhomogenen Sprungbedingungen wurde 1970 von Babuska [9] vorgeschlagen. Hier wird das Interfaceproblem in ein äquivalentes Minimierungsproblem über ein erweitertes Ritz-Funktional umformuliert. Genauer gesagt werden die Sprungbedingungen in das gewöhnliche Ritz-Funktional inkorporiert und über dieses wird minimiert. So erhält man ein FE-Verfahren für das die optimalen Konvergenzordnungen in H^1 und L^2 nachgewiesen werden können, was aber praktisch schwer umzusetzen ist. Davor gab es aber natürlich schon Ansätze wie wir in 4.3.1 im eindimensionalen Fall skizziert haben: Legt man die Knoten der Elemente passend auf das Interface, so erhält man bei geeigneten Daten wieder die optimale Konvergenzordnung, vergleiche hierzu z.B. eine neuere Arbeit aus 2009, welche diese Methode etwas verallgemeinert [52]. Die Vernetzung von den Teilgebieten $\Omega^{\pm}$, so dass die Knoten der benachbarten Elemente am Interface zusammenfallen, ist allerdings ein schwieriger und rechenzeitintensiver Preprocessingschritt. Bramble & King betrachteten 1996 in [12] inhomogene elliptische Interfaceprobleme mit glattem Interface und Gebietsrand. Ihr FE-Ansatz beruht darauf, den Rand und das Interface durch Polygonale-Liniensegmente zu approximieren und die Randdaten geeignet auf die Linienstücke zu transferieren. Die Vernetzung auf den beiden resultierenden polygonalen Gebieten Ω_h^+, Ω_h^- muss an das Interface angepasst werden. Mit dieser Methode konnten die optimalen Konvergenzraten in der H^1 und L^2-Norm für quasiuniforme Triangulierungen und lineare Elemente gezeigt werden. Die Implementation ist wahrscheinlich schwierig, so dass für diese Methode keine numerischen Tests entwickelt wurden. Einen ähnlichen Ansatz, allerdings ohne die Voraussetzung, dass die Kanten der Elemente entlang des Interfaces übereinstimmen müssen, verfolgten 1998 Chen & Zou in [18] für ein konvexes polygonales Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ mit C^2-Interface Γ. Sie approximieren zunächst Ω^- durch ein Gebiet Ω_h^- mit polygonalen Rand Γ_h dessen Eckknoten alle auf Γ liegen. Anschließend wird Ω durch eine gewöhnliche quasiuniforme Triangulierung mit Dreieckelementen vernetzt, mit der Ausnahme, dass von einem Element höchstens zwei Knoten auf Γ liegen. In der Arbeit konnte für H^1 die optimale Approximationsordnung von $\mathcal{O}(h)$ und für L^2 eine quasi-optimale Ordnung von $\mathcal{O}(h^2 \cdot |\log h|)$ nachgewiesen werden und wurde auf parabolische Interfaceprobleme erweitert. In [36] wurde 2002 von Huang & Zou eine *Mortar Finite Elemente Methode* für elliptische Interfaceprobleme entwickelt. Die Mortar-Methode wird bei der Behandlung von elliptischen Randwertproblemen mit Finiten Elementen als Dekompositionsmethode schon erfolgreich eingesetzt und dient vor allem zum Parallelisieren von Rechenschritten. Konkret wird hier das Gebiet in mehrere Teilgebiete zerlegt und mit Hilfe von Übergangsbedingungen

an den Rändern kann die zugrunde liegende elliptische Gleichung auf jedem Teilgebiet gestellt und berechnet werden, siehe für eine gründliche Einführung [71]. Bei der Mortar-Methode für das elliptische Interfaceproblem wird für $\Omega^{\pm}$ jeweils ein separates Netz mit Gitterweiten $h^{\pm}$ generiert und die Elemente in der Umgebung des Interfaces durch sogennante *Mortar*-Bedingungen miteinander gekoppelt. Hierbei wurde gezeigt, dass man $\mathcal{O}(\max h^-, h^+)$ in der H^1 und $\mathcal{O}(h^+ \cdot h^- + \max\{h^+, h^-\})$ in der L^2-Norm erhält, was bei der Wahl $h^+ = h^-$ ebenfalls optimal ist. Bei diesem Verfahren ist von Vorteil, dass man die Triangulierungen auf $\Omega^{\pm}$ unabhängig voneinander durchführen kann, so dass dieses prinzipiell für Dekompositionsmethoden gut geeignet ist. Allerdings erkauft man sich diesen Vorteil mit relativ komplizierten Übergangsbedingungen am Interface. In den letzten Jahren wurde noch die *Immersed Interface Method, (IMM)* populär, siehe hierzu die 2006 erschienene Monographie [61] von Z. Li und K. Ito. Diese Methode kann abgesehen von den bei uns im Fokus stehenden elliptischen Interfaceproblemen auf eine Vielzahl von anderen Interfaceproblemen wie dem Stefan-Problem, Hela-Shaw-Flow, Navier-Stokes und Stokes-Probleme mit singulärer rechten Seite und sich mit der Zeit bewegenden Interfaces und unzähligen Anwendungen benutzt werden, siehe [60; 61] für Referenzen. Siehe auch die 2012 erschienene Zusammenfassung über die IIM und viele weitere numerische Techniken zur Lösung von Interfaceproblemen [54]. Die IIM wurde zuerst für ein Rechteckgebiet mit eingeschlossenem glatten Interface mit einer Finiten-Differenzen-Diskretisierung von R.LeVeque und Z.Li zur Lösung von elliptischen Interfaceproblemen 1993 in [58] formuliert. Hier werden außerhalb einer Umgebung des Interfaces standard Finite Differenzen Methoden angewandt und die Differenzensterne in der Nähe des Interfaces geeignet angepasst, so dass diese die auftretenden Sprungsingularitäten behandeln können. Die dabei auftauchenden Gleichungssysteme sind unsymmetrisch und nicht positiv definit, was zu ernsten Stabilitätsproblemen der Lösungsalgorithmen führen kann, siehe [60; 61]. Viele numerische Tests belegten die Wirkungsweise des Verfahrens, allerdings war der Nachweis der optimalen Konvergenzordnung von $\mathcal{O}(h^2)$ in der L^∞-Norm lange offen und konnte unter bestimmten Voraussetzungen an die Lösung und den Gitterpunkten 2001 in [59] gezeigt werden. Eine Immersed Interface Methode wurde auch für Rechteckgebiete mit eingeschlossenem glatten Interface als konforme und nicht konforme Finite-Element Methode entwickelt und ist unter dem Namen *Immersed Finite Element Method* bekannt. Der Vorteil hierbei im Gegensatz zur IMM ist, dass diese Methode auf symmetrische und positiv definite Gleichungssysteme führt. Die Rechtecke werden hier durch eine uniforme Triangulierung vernetzt und die vom Interface geschnittenen Elemente so modifiziert, dass diese die Sprungbedinungen einhalten. Für die konforme Methode konnte die optimale Konvergenzrate in der H^1 Norm gezeigt werden [60], für den nicht konformen Ansatz ist das ein noch offenes Problem. Eine wirklich vernetzungsfreie FE-Methode zur Approximation elliptischer Interfaceprobleme bei Gebieten mit glattem Rand und Interface, bei der man die optimale Fehlerordnung erhält und die man relativ einfach implementieren kann, scheint noch nicht zu existieren.

Teil III.

Approximation mit Interfacesplines

„I Love Approximation Theory“

(Manfred von Golitschek)

5. Erweiterung der Tensorproduktsplinebasis

Auf der Basis von weB-Splines wollen wir einen neuen vernetzungsfreien Ritz-Galerkin Raum konstruieren, welcher für die Approximation eines zweidimensionalen Interfaceproblems geeignet ist. Wir setzen im Folgenden dazu voraus, dass das Interface glatt ist und keine achsenparallele Stücke enthält. In diesem Fall bräuchte man nämlich an dieser Stelle für lineare weB-Splines keine Erweiterung der Basis, da bei einer geschickten Wahl des Gitters die Gradienten der Splines selbst singulär sind und den Sprung des Gradienten in der Lösung gut modellieren (siehe auch das eindimensionale Beispiel 4.3.1). Für die Erweiterung statten wir $w^e\mathbb{B}_h^n(\Omega)$ mit zusätzlichen Funktionen aus, welche die spezielle Struktur der Lösung u berücksichtigen. Dahinter verbirgt sich der folgende Gedanke: wenn es möglich ist u in einen glatten Anteil $u^\star$ und einen Teil Ψ, welcher die Sprungsingularität des Gradienten entlang von Γ enthält in der Form

$$u = u^\star + \Psi \tag{5.1}$$

zu zerlegen, so können wir $u^\star$ [40; 44](vgl. auch Satz 6.1.6) mit Elementen aus $w^e\mathbb{B}_h^n(\Omega)$ optimal approximieren. Das solch eine Zerlegung plausibel ist, machen wir uns hier nur an dem folgenden eindimensionalen Beispiel klar, und zeigen die allgemeine Aussage in 6.1.1. Auf Bild 5.1 erkennt man bei der univariaten Funktion u an der Stelle $x = \Gamma$ einen Knick, die erste Ableitung existiert somit nicht. Die gestrichelt gezeichnete Funktion $u^\star$ ist glatt, bilden wir die Differenz, $u - u^\star$ (siehe Bild 5.2), so bleibt ein Anteil Ψ übrig, der durch eine glatte Funktion v und einem Gewicht χ_δ mit in $x = \Gamma$ springender Ableitung dargestellt werden kann.

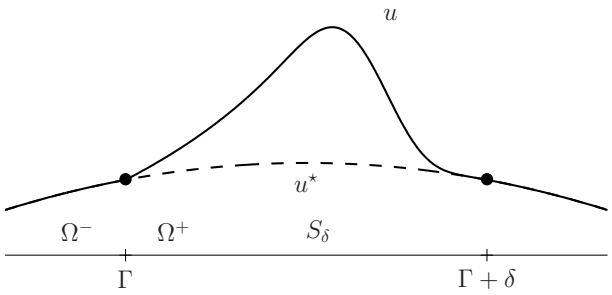

Abbildung 5.1.: Zerlegung der Lösung, eindimensionales Beispiel

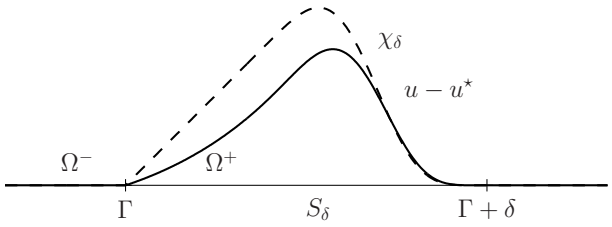

Abbildung 5.2.: Springender Anteil $\Psi = u - u^\star = \chi_\delta v$

Die Approximation des singulären Teils Ψ sollen zusätzliche singuläre Funktionen übernehmen, die wir in 5.1.2 explizit konstruieren und mit denen wir die weB-Basis erweitern. Zur Konstruktion nutzen wir entlang des Interfaces univariate periodische B-Splines, die wir auf einem δ-Streifen S_δ um das Interface geeignet fortsetzen, und mit einer weiteren Funktion gewichten, deren Gradient in Normalenrichtung eine Sprungsingularität längs Γ besitzt. Ein für diesen Zweck geeignetes Gewicht χ_δ konstruieren wir explizit in 5.1.4. In Satz 5.2.1 zeigen wir, dass diese neuen gewonnenen Funktionen aufgrund ihrer multiplikativen Struktur auf S_δ ähnliche Eigenschaften wie B-Splines besitzen. Wir erzeugen in 5.2.1 einen neuen Splineraum und bilden mit den weB-Splines $w^e\mathbb{B}_h^n(\Omega)$ die direkte Summe. Der dadurch enstehende lineare Raum beinhaltet dann auf Ω stetige und auf $\Omega^\pm$ eingeschränkt glatte Funktionen mit entlang von Γ in Normalenrichtung springenden Gradienten.

5.1. Konstruktion von Zusatzsplines mit singulären Gradienten

Ein wichtiger Baustein zur Konstruktion der Zusatzfunktionen bzw. der dafür benötigten Gewichte χ_δ in 5.1.4 sind Distanzfunktionen. Deren grundlegende Differenzierbarkeitseigenschaften auf glatten Gebieten wollen wir in einem kleinen Abschnitt vorab zusammenfassen.

5.1.1. Glattheitseigenschaften der Distanzfunktion

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet und $\mathcal{M} \subset \overline{\Omega}$ eine $(d-1)$-codimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^d$. Dann bezeichnen wir $\operatorname{dist}(\cdot, \mathcal{M}) : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$, mit

$$\operatorname{dist}(x, \mathcal{M}) := \inf_{y \in \mathcal{M}} \|x - y\|_d \tag{5.2}$$

als Distanzfunktion bezüglich $\mathcal{M}$. Insbesondere erhalten wir mit $\mathcal{M} = \partial\Omega$ die gewöhnliche Distanzfunktion bezüglich des Randes aus 2.3.

Definition 5.1.1 (Nearest Point-Eigenschaft)
Es sei S die Umgebung einer $\mathbb{R}^d$-Untermannigfaltigkeit $\mathcal{M}$ und eine Abbildung

$$\mathcal{P}_\mathcal{M} : S \longrightarrow \mathcal{M} \tag{5.3}$$

gegeben. Existiert zu jedem $x \in S$ genau ein $\mathcal{P}_\mathcal{M} x \in \mathcal{M}$, so dass

$$\operatorname{dist}(x, \mathcal{M}) = \operatorname{dist}(x, \mathcal{P}_x \mathcal{M}), \quad \forall x \in S,$$

so besitzt S die Nearest-Point (NP)*-Eigenschaft und man bezeichnet die Abbildung $\mathcal{P}_\mathcal{M}$ als* Randprojektor.

Satz 5.1.1 (Regularität der Distanzfunktion in Randnähe [28])
Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ mit $\partial\Omega \in C^m$, $m \geq 2$. Dann existiert ein $\delta > 0$, so dass

$$S_\delta(\partial\Omega) := \{x \in \Omega : \|x - y\|_d < \delta, y \in \partial\Omega\} \tag{5.4}$$

die NP-Eigenschaft besitzt und $\operatorname{dist}(\cdot, \partial\Omega) \in C^m(\overline{S_\delta(\partial\Omega)})$.

Als Folgerung erhalten wir: ist $\mathcal{M} \subset \Omega, \mathcal{M} \in C^m, m > 0$ eine in Ω eingeschlossene Untermannigfaltigkeit (= Interface) bzw. existiert ein $\Omega^- \Subset \Omega$ mit $\partial\Omega^- = \mathcal{M}$ und setzen wir $\Omega^+ = \Omega \setminus (\mathcal{M} \cup \Omega^-)$, dann existieren $\delta^\pm > 0$, so dass $\operatorname{dist}(\cdot, \mathcal{M})$ auf den Streifen

$$S^\pm_{\delta^\pm}(\mathcal{M}) := \{x \in \Omega^\pm : \|x - y\|_d < \delta^\pm, y \in \mathcal{M}\} \tag{5.5}$$

genauso glatt wie $\mathcal{M}$ selbst ist und $S^\pm_{\delta^\pm}(\mathcal{M})$ die NP-Eigenschaft besitzt. Für die Einschränkung der Distanzfunktion auf die Streifen setzen wir

$$\operatorname{dist}^\pm(\cdot, \mathcal{M}) := \operatorname{dist}(\cdot, \mathcal{M})_{|S^\pm_{\delta^\pm}(\mathcal{M})}$$

und können damit z.B. $\operatorname{dist}(\cdot, \mathcal{M})$ abschnittsweise schreiben:

$$\operatorname{dist}(x, \mathcal{M}) = \begin{cases} \operatorname{dist}^+(x, \mathcal{M}) & \text{für} \quad x \in S^+_{\delta^+}(\Gamma) \\ \operatorname{dist}^-(x, \mathcal{M}) & \text{für} \quad x \in S^-_{\delta^-}(\Gamma), \\ 0 & \text{für} \quad x \in \Gamma. \end{cases} \tag{5.6}$$

Mit Hilfe einer regulären Parametrisierung können wir die Distanzfunktion zumindest auf den Streifen analytisch angeben. Wir beschränken uns auf den zweidimensionalen Fall und nehmen an, dass $\mathcal{M}$ durch eine m-reguläre Kurve $\gamma : [0, 1] \longrightarrow \partial\Omega, \gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t)), m > 0$ parametrisiert wurde. Der von Ω^- nach Ω^+ zeigende Normaleneinheitsvektor ν existiert dann in jedem Punkt auf $\mathcal{M}$ und wird durch $-\nu(t)$ mit $\nu(t) = -(\gamma_2'(t), \gamma_1'(t))$ dargestellt. Auf den Streifen $S^\pm_{\delta^\pm}(\mathcal{M})$ können wir damit $\operatorname{dist}(\cdot, \mathcal{M})$ dann ebenfalls explizit darstellen. Das ist das Ergebnis des nächsten Satzes, welches direkt aus Satz 8.3 in [44] folgt.

Satz 5.1.2 (Explizite Darstellung der Distanzfunktion für $d = 2$)
Es sei $x \in S^\pm_{\delta^\pm}(\mathcal{M})$. Dann existiert ein eindeutig bestimmtes $\tau = \tau(x) \in [0, 1]$, für das die Orthogonalitätsrelationen

$$(x - \gamma(\tau)) \cdot (\gamma_1'(\tau), \gamma_2'(\tau)) = 0 \tag{5.7}$$

gelten. Es ist dann

$$\operatorname{dist}(x, \mathcal{M}) = \|x - \gamma(\tau)\| \tag{5.8}$$

und für den Gradienten gilt:

$$\nabla \operatorname{dist}(x, \mathcal{M}) = \mp\nu(\tau). \tag{5.9}$$

5.1.2. Konstruktion des Trägers S_δ

Wir betrachten wie im vorherigen Abschnitt beschränkte C^m-Gebiete $\Omega, \Omega^- \subset \mathbb{R}^2, m > 0$ mit $\Omega^- \Subset \Omega$ und $\Gamma := \partial\Omega^-$ und setzen $\Omega^+ = \Omega \setminus (\Omega^- \cup \Gamma)$. Uns interessiert vornehmlich der im Gebiet Ω^+ gelegene Streifen, weshalb wir einfach $S_\delta := S^+_{\delta^+}(\Gamma)$ setzen. Es darf dann $\operatorname{dist}^+(\cdot, \Gamma) \in C^m(\overline{S_\delta})$ angenommen werden und die NP-Eigenschaft von S_δ garantiert die Existenz eines $C^{m-1}-$Projektors

$$\mathcal{P}_\Gamma : S_\delta \longrightarrow \Gamma,$$

so dass zu jedem $x \in S_\delta$ genau ein $\mathcal{P}_\Gamma x \in \Gamma$ mit $\operatorname{dist}^+(x, \Gamma) = \operatorname{dist}(x, \mathcal{P}_\Gamma x)$ existiert.
Des Weiteren können wir voraussetzen, dass Γ durch eine geschlossene, positiv orientierte und selbstdurchdringungsfreie C^m-Kurve

$$\gamma : [0, L) \subset \mathbb{R} \longrightarrow \Gamma, \quad t \longrightarrow (\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \tag{5.10}$$

dargestellt werden kann, so dass $N := L/h \in \mathbb{N}$ ist. Andernfalls finden wir ein $\epsilon > 0$, so dass $(L+\epsilon)/h \in \mathbb{N}$ und wir können mit Hilfe von $\alpha(t) := \left(\frac{L}{L+\epsilon}\right) \cdot t$ das Interface durch

$$\gamma \circ \alpha : [0, L+\epsilon) \longrightarrow \Gamma$$

parametrisieren. Mit der von Γ in Ω^+ zeigenden Normalen

$$-\nu(t) := (\gamma_2'(t), -\gamma_1'(t)) \in [C^{m-1}(0, L)]^2$$

definieren wir auf dem Rechteck $\tilde{S}_\delta := [0, \delta) \times [0, L)$ die Transformation

$$\Phi : \tilde{S}_\delta \longrightarrow S_\delta, \tag{5.11}$$

$$(x_1, x_2) = \Phi(s, t) := \gamma(t) + s \cdot \nu(t). \tag{5.12}$$

Die Umkehrung von Φ lässt sich offenbar mit dem Projektor $\mathcal{P}_\Gamma$ und der Beobachtung, dass γ auf $[0, L)$ umkehrbar und

$$s = \mathrm{dist}^+(x, \Gamma), \quad x \in S_\delta \tag{5.13}$$

ist, direkt durch

$$\Phi^{-1} : S_\delta \longrightarrow \tilde{S}_\delta \tag{5.14}$$

mit

$$(s, t) = \Phi^{-1}(x) := (\mathrm{dist}(x, \Gamma), \gamma^{-1}(\mathcal{P}_\Gamma x))$$

angeben. Die Abbildung Φ ist somit ein C^{m-1}-Diffeomorphismus, welcher das Rechteck $\tilde{S}_\delta$ diffeomorph auf den Streifen S_δ abbildet.

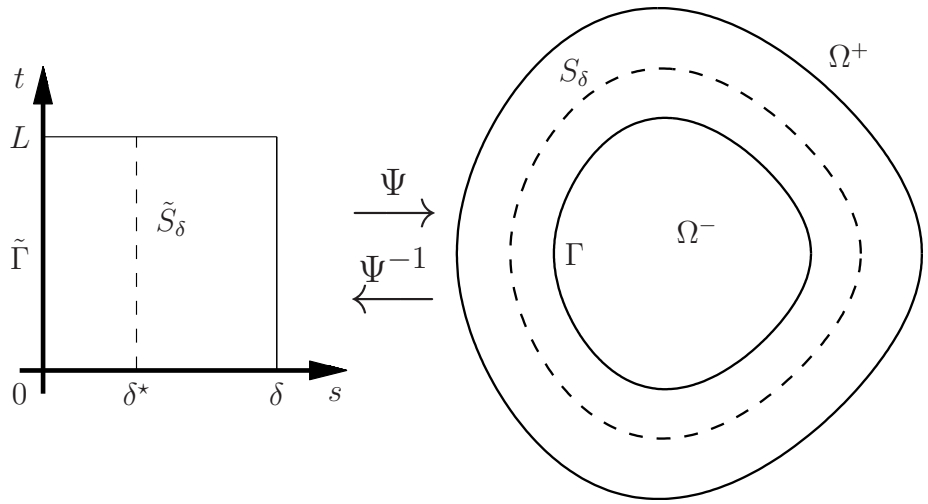

Abbildung 5.3.: Transformation des Streifens S_δ.

Dies versetzt uns nun in die Lage, auf der einfachen Geometrie eines Rechtecks Funktionen zu definieren, welche wir via Φ auf S_δ glatt transformieren können.

5.1.3. Periodische Splines entlang des Interfaces

Auf dem Intervall $\tilde{\Gamma} := [0, L)$ bilden wir mit Hilfe der uniformen Knotenfolge $T := (t_k) = hk, k = 0, ..., N + n$, $n \in \mathbb{N}$ und den B-Splines $\tilde{b}^n_{k,h}, k \sim \tilde{\Gamma}$ den univariaten L-periodischen Splineraum

$$\mathbb{B}^n_{L,h}(\tilde{\Gamma}) = \left\{ \sum_{k \sim \tilde{\Gamma}} \beta_k \tilde{b}^n_{k,h} : \beta_j = \beta_{j+N}, j = 0, ..., N \right\}, \beta_k \in \mathbb{R}, k \sim \tilde{\Gamma} \tag{5.15}$$

vom Grad n.

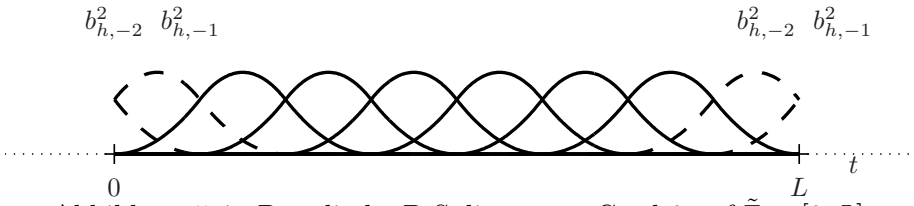

Abbildung 5.4.: Perodische B-Splines vom Grad 2 auf $\tilde{\Gamma} = [0, L]$

Wir setzen die B-Splines durch

$$\tilde{b}^n_{k,h}(s,t) := \tilde{b}^n_{k,h}(t), \quad k \sim \tilde{\Gamma},\ s \in [0, \delta) \tag{5.16}$$

auf $\tilde{S}_\delta$ fort und erhalten mit

$$b^n_{k,h}(x) := \begin{cases} \tilde{b}^n_{k,h}(\Phi^{-1}(x)) & \text{für} \quad x \in S_\delta \\ 0 & \text{für} \quad x \in \Omega \setminus S_\delta \end{cases} \quad k \sim \tilde{\Gamma}, \tag{5.17}$$

auf Ω durch 0 fortgesetzte definierte Basisfunktionen für den Raum der L-periodischen Splines entlang von Γ, welchen wir im Folgenden mit $\mathbb{B}^n_{L,h}(S_\delta)$ bezeichnen wollen.

5.1.4. Gewichtsfunktion mit Sprungsingularität des Gradienten in Normalenrichtung

Um den Sprung des Gradienten in Normalenrichtung auf Γ bzw. $\tilde{\Gamma}$ zu modellieren, konstruieren wir als nächstes eine geeignete Gewichtsfunktion für den periodischen Splineraum. Dazu fixieren wir ein $\delta^\star \in \mathbb{R}$ mit $0 < \delta^\star < \delta$ und definieren

$$\tilde{\chi}_\delta(s,t) = \tilde{\chi}^m_\delta(s,t) := \begin{cases} s & \text{für} \quad (s,t) \in [0, \delta^\star) \times \tilde{\Gamma} \\ s\zeta^m(s) & \text{für} \quad (s,t) \in [\delta^\star, \delta) \times \tilde{\Gamma} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \tag{5.18}$$

wobei $\zeta^m \in C^m(\mathbb{R})$ eine *Blendefunktion* mit $\zeta^m(s) \preceq 1$ und der Eigenschaft, dass $\chi_\delta \in C^m([0, \infty))$ ist, also an den Stellen $s = \delta^\star, \delta$ genauso glatt wie ζ in s bzw. 0 übergeht. Für die theoretischen Überlegungen ist die Angabe von ζ nicht notwendig, wir geben deshalb erst im experimentellen Teil der Arbeit (vgl. 7.11,7.12), indem Auswertungen von χ_δ eine Rolle, spielen die explizite Gleichung einer Blendefunktion an.

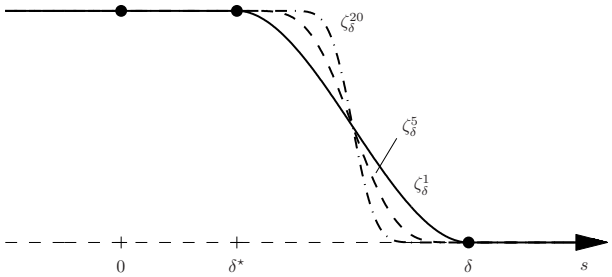

Abbildung 5.5.: Blendefunktion ζ^m für $m = 1, 5, 20$

Mit Hilfe von Φ und $\tilde{\chi}_\delta$ erhalten wir auf Ω durch

$$\chi_\delta(x) := \begin{cases} \tilde{\chi}_\delta(\Phi^{-1}(x)) & \text{für} \quad x \in S_\delta \\ 0 & \text{für} \quad x \in \Omega \setminus S_\delta \end{cases} \tag{5.19}$$

schließlich eine Gewichtsfunktion $\chi_\delta : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ für $\mathbb{B}^n_{L,h}(S_\delta)$.

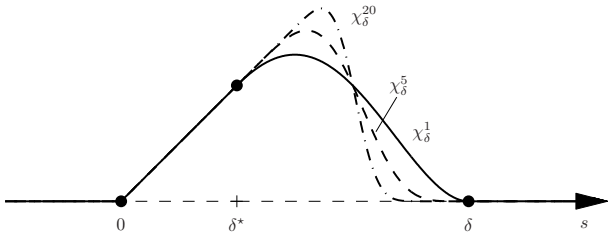

Abbildung 5.6.: Gewichtsfunktionen $\tilde{\chi}_\delta$ für $m = 1, 5, 20$

Der folgende Satz listet ein paar grundlegende Eigenschaften von χ_δ auf:

Satz 5.1.3 (Eigenschaften der Gewichtsfunktion χ_δ)

(a) $\chi_\delta \equiv 0 \quad$ *auf* $\quad \Omega \setminus S_\delta.$ (5.20)

(b) $\chi_{\delta|S_\varepsilon} = \operatorname{dist}^+(\cdot, \Gamma), \quad$ *für* $\quad 0 < \varepsilon \leq \delta^\star.$ (5.21)

(c) $\chi_\delta \in H_0^1(\Omega) \cap C^m(\overline{\Omega^+}) \cap C^\infty(\overline{\Omega^-}), \quad$ *aber* $\quad \chi_\delta \notin H^2(\Omega).$ (5.22)

Beweis: Die Eigenschaften (a) und (b) folgen aus der Konstruktion von χ_δ. Da χ_δ an den Anschlussstellen $\partial S_\varepsilon \setminus \Gamma, \varepsilon = \delta, \delta^\star$ nach Konstruktion C^m-glatt überführt wird, und wegen $\chi_{\delta|\Gamma} = 0$ offenbar $[\![\chi_\delta]\!]_\Gamma = 0$ ist, folgt mit (a) die Glattheit auf den Teilgebieten und $\chi_\delta \in H_0^1(\Omega)$. Da außerdem $s = \operatorname{dist}^+(x, \Gamma)$ und nach 5.8 $\nabla \operatorname{dist}^+(x, \Gamma) = -\nu(\tau))$ mit einem eindeutig bestimmten $\tau = \tau(x) \in \Gamma$ ist, folgt für ein beliebig, aber fest gewähltes $t \in [0, L)$:

$$\begin{aligned} [\![\nabla_\nu \chi_\delta]\!](t) &= \lim_{\substack{x \to \gamma(t) \\ x \in \Omega^+}} \nabla_{\nu(t)} \chi_\delta(x) - \lim_{\substack{x \to \gamma(t) \\ x \in \Omega^-}} \underbrace{\nabla_{\nu(t)} \chi_\delta(x)}_{=0 \ \chi_{\delta|\Omega^-} \equiv 0} \\ &= \lim_{\substack{x \to \gamma(t) \\ x \in \Omega^+}} (\partial_s \tilde{\chi}_\delta(s(x)) \partial_{x_1}(x), \partial_s \tilde{\chi}_\delta(s(x)) \partial_{x_2} s(x)) \cdot \nu(t) \\ &= \lim_{\substack{x \to \gamma(t) \\ x \in \Omega^+}} -(\nu(t(x)), \nu(t)) = \|\nu(t)\|^2. \end{aligned}$$

Somit ist $[\![\nabla_\nu \chi_\delta]\!]_\Gamma \neq 0$, weswegen χ_δ unmöglich in $H^2(\Omega)$ sein kann. Damit ist (c) gezeigt. $\square$

5.2. Der Raum der Interfacesplines

Mit den auf Ω definierten periodischen B-Splines 5.17 und der Gewichtsfunktion 5.19 bilden wir durch

$$\Psi_{k,h}^{n_\Gamma}(x) := \chi_\delta(x) b_{k,h}^{n_\Gamma}(x), \quad k \sim \Gamma \tag{5.23}$$

bivariate Funktionen $\Psi_{k,h}^{n_\Gamma} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$. Aufgrund ihrer tensorähnlichen Struktur besitzen diese abgesehen von des durch die Gewichtung mit χ_δ erzeugten Sprungs des Gradienten in Normalenrichtung ähnliche strukturelle Eigenschaften wie univariate B-Splines, weshalb wir die $\Psi_{k,h}^{n_\Gamma}$ im folgenden als *Zusatzsplines* bezeichnen werden.

Satz 5.2.1 (Eigenschaften singulärer Zusatzsplines)
Die Funktionen $\Phi_{k,h}^{n_\Gamma}, k \sim \Gamma$ besitzen die folgenden Eigenschaften:

(a) Lokaler Support:

$$\operatorname{supp} \Psi_{k,h}^{n_\Gamma} = \Phi([0,\delta) \times [kh, (k+n_\Gamma)h]) \subset S_\delta. \tag{5.24}$$

(b) Positivität:

$$\Psi_{k,h}^{n_\Gamma} \geq 0. \tag{5.25}$$

(c) Lineare Unabhängigkeit:

$$\sum_{k\sim\Gamma} \beta_k \Psi_{k,h}^{n_\Gamma} = 0 \Longrightarrow \beta_k = 0, \quad k \sim \Gamma. \tag{5.26}$$

(d) Quasi-Partition der Eins:

$$\sum_{k\sim\Gamma} \Psi_{k,h}^{n_\Gamma} = \chi_\delta, \quad \textit{auf } S_\delta. \tag{5.27}$$

(e) Sprungeigenschaften:

$$[\![\Psi_{k,h}^{n_\Gamma}]\!]_\Gamma = 0 \tag{5.28}$$

$$[\![\nabla_\nu \Psi_{k,h}^{n_\Gamma}]\!]_\Gamma = -\|\nu\|^2 \tilde{b}_{k,h}^{n_\Gamma}(t). \tag{5.29}$$

(f) Regularität: Es sei $\ell = \min\{n_\Gamma - 1, m\}$. Dann ist

$$\Psi_{k,h}^{n} \in H_0^1(\Omega) \cap C^\ell(\Omega^+) \cap C^\infty(\Omega^-). \tag{5.30}$$

Beweis: Wir setzen im Folgenden $x = (x_1, x_2)$ und bezeichnen mit $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ die Komponenten der von $\Gamma = \partial\Omega^-$ nach außen gerichteten Normale.

(a)

$$\begin{aligned}
\operatorname{supp} \Psi_{k,h}^{n_\Gamma}(x_1,x_2) &= \{(x_1,x_2) = \Phi(s,t) : \tilde{\chi}_\delta(\Phi^{-1}(x)) \cdot \tilde{b}_{h,k}^{n_\Gamma}(\Phi^{-1}(x)) \neq 0\} \\
&= \{(x_1,x_2) = \Phi(s,t) : \tilde{\chi}_\delta(s) \cdot \tilde{b}_{h,k}^{n_\Gamma}(t) \neq 0\} \\
&= \Phi\left(\{(s,t) : \tilde{\chi}_\delta(s) \cdot \tilde{b}_{h,k}^{n_\Gamma}(t) \neq 0\}\right) \\
&= \Phi\left([0,\delta) \times [kh, (k+n_\Gamma)h]\right)
\end{aligned}$$

(b) Folgt aus (a) und der Definition von $\tilde{\chi}_\delta, \tilde{b}^{n_\Gamma}_{k,h}$.

(c) Es ist

$$\sum_{k\sim\Gamma} \beta_k \Psi^{n_\Gamma}_{k,h}(x) = \tilde{\chi}_\delta(\Phi^{-1}(x)) \sum_{k\sim\Gamma} \beta_k \tilde{b}^{n_\Gamma}_{k,h}(\Phi^{-1}(x)) = \tilde{\chi}_\delta(s) \sum_{k\sim\Gamma} \beta_k \tilde{b}^{n_\Gamma}_{k,h}(t).$$

Die Menge $\{\tilde{b}^{n}_{k,h}\}_{k\sim\Gamma}$ ist linear unabhängig, damit folgt die Behauptung.

(d)

$$\sum_{k\sim\Gamma} \Psi^{n_\Gamma}_{k,h}(x) = \tilde{\chi}_\delta(s) \underbrace{\sum_{k\sim\Gamma} \tilde{b}^{n_\Gamma}_{k,h}(t)}_{=1} = \chi_\delta(x)$$

(e) Es sei $t \in [0, L)$ beliebig gewählt. Dann ist

$$\lim_{\substack{x\to\gamma(t)\\ x\in\Omega^+}} \Psi^{n_\Gamma}_{k,h}(x) = \lim_{\substack{x\to\gamma(t)\\ x\in\Omega^+}} \tilde{\chi}(\underbrace{s(x)}_{\to 0}) \tilde{b}^{n_\Gamma}_{k,h}(\underbrace{t(x)}_{\to t}) = 0.$$

Weil $\Psi^{n_\Gamma}_{k,h|\Omega^-} \equiv 0$ folgt 5.28 $[\![\Psi^{n_\Gamma}_{k,h}]\!]_\Gamma = 0$.

Wir zeigen jetzt die zweite Sprungeigenschaft 5.29. Offenbar ist $\nabla_\nu \Psi^{n_\Gamma}_{k,h}(x,y)_{|\Omega^-} \equiv 0$. Mit elementarer Analysis und weil $\Phi^{-1}(x) = (s(x), t(x))$, folgt für $x \in S_{\delta^\star}$:

$$\partial_{x_i} \Psi^{n_\Gamma}_{k,h}(x) = \tilde{b}^{n_\Gamma}_{k,h}(t(x)) \partial_{x_i} s(x) + \tilde{\chi}_\delta(s(x)) \partial_t b^{n_\Gamma}_{k,h}(t(x)) \partial_{x_i} t(x), \ i = 1, 2.$$

Da nach 5.9 $\partial_{x_i} s(x) = -\nu_i(t_x), i = 1, 2$ ist, erhalten wir daraus

$$\partial_{x_i} \Psi^{n_\Gamma}_{k,h}(x) = -\tilde{b}^{n_\Gamma}_{k,h}(t(x)) \nu_i(t(x)) + \tilde{\chi}_\delta(s(x))) \partial_t b^{n_\Gamma}_{k,h}(t(x)) \nu_i(t(x)), \ i = 1, 2.$$

Sei nun t wieder wie oben gewählt, dann ist

$$\begin{aligned}
[\![\nabla_\nu \Psi^{n_\Gamma}_{k,h}]\!](t) &= \lim_{\substack{x\to\gamma(t)\\ x\in\Omega^+}} \nabla_{\nu(t)} \Psi^{n_\Gamma}_{k,h}(x) - \lim_{\substack{x\to\gamma(t)\\ x\in\Omega^-}} \underbrace{\nabla_{\nu(t)} \Psi^{n_\Gamma}_{k,h}}_{=0} = \lim_{\substack{x\to\gamma(t)\\ x\in\Omega^+}} (\nabla \Psi^{n_\Gamma}_{k,h}(x), \nu(t))_2 \\
&= \lim_{\substack{x\to\gamma(t)\\ x\in\Omega^+}} \left(-\tilde{b}^{n_\Gamma}_{k,h}(t(x)) \underbrace{\nu_1(t(x))}_{\to\nu_1(t)} + \underbrace{\tilde{\chi}_\delta(s(x))}_{\to 0} \frac{d}{dt} b^{n_\Gamma}_{k,h}(t(x)) \partial_{x_1} t(x) \right) \nu_1(t) \\
&\quad - \lim_{\substack{x\to\gamma(t)\\ x\in\Omega^+}} \left(\tilde{b}^{n_\Gamma}_{k,h}(t(x)) \underbrace{\nu_2(t(x))}_{\to\nu_1(t)} + \underbrace{\tilde{\chi}_\delta(s(x))}_{\to 0} \frac{d}{dt} b^{n_\Gamma}_{k,h}(t(x)) \partial_{x_2} t(x) \right) \nu_2(t) \\
&= -\|\nu(t)\|^2 \tilde{b}^{n_\Gamma}_{k,h}(t).
\end{aligned}$$

Das war die Behauptung.

(f) Da $\Psi^{n_\Gamma}_{k,h}|\ \Omega \setminus S_\delta \equiv 0$, $\chi_\delta \in C^m(\Omega^+)$ und $\tilde{b}^{n_\Gamma}_{h,k} \in C^{n_\Gamma - 1}(\Omega^+)$, ist $\Psi^{n_\Gamma}_{k,h}$ auf Ω^- glatt und wegen 5.1.3 (c) auf Ω^+ in $C^{\min\{n_\Gamma, m\}}$. Global ist $\Psi^{n_\Gamma}_{k,h}$ wegen 5.28 zwar in $H^1_0(\Omega)$, aber wegen 5.29 im Allgemeinen nicht mehr in $H^2(\Omega)$ enthalten. □

Die Menge $\{\Psi^{n_\Gamma}_{h,k}\}_{k\sim\Gamma}$ ist nach 5.26 linear unabhängig. Wir bilden die lineare Hülle und bezeichnen den linearen Raum

$$\chi\mathbb{B}^{n_\Gamma}_h(S_\delta) := \mathrm{span}\{\Psi^{n_\Gamma}_{h,k}\}_{k\sim\Gamma} \tag{5.31}$$

als den Raum der singulären Zusatzsplines vom Grad n_Γ.

Satz 5.2.2 (Lineare Unabhängigkeit der Interfacesplinebasis)
Die Menge $\{B^n_{k,h}\}_{k\sim\Omega} \cup \{\Psi^{n_\Gamma}_{h,k}\}_{k\sim\Gamma}$ *ist linear unabhängig.*

Beweis: Die weB-Splines $\{B^n_{k,h}\}_{k\sim\Omega}$ und die Zusatzsplines $\{\Psi^{n_\Gamma}_{h,k}\}_{k\sim\Gamma}$ sind nach Konstruktion linear unabhängig, vgl. Definition der weB-Splines in 2.28 sowie 5.26 aus Satz 5.2.1. Nehmen wir nun an, $\{B^n_{k,h}\}_{k\sim\Omega} \cup \{\Psi^{n_\Gamma}_{h,k}\}_{k\sim\Gamma}$ wäre linear abhängig, dann müsste sich z.B. ein beliebiges $\Psi \in \{\Psi^{n_\Gamma}_{k,h}\}_{k\sim\Gamma}$ durch eine Linearkombination von weB-Splines darstellen lassen. Dies ist für den Splinegrad $n > 1$ nicht möglich, da nach Satz 5.29 $[\![\nabla_\nu \Psi]\!]_\Gamma \neq 0$, die partiellen Ableitungen der relevanten weB-Splines $B^n_{k,h}, k \sim \mathrm{supp}\Psi$ entlang von Γ in Normalenrichtung für $n > 1$ aber mindestens stetig sind. Da wir voraussetzen, dass Γ keine achsenparallele Anteile enthält, kann für $n = 1$ die Menge

$$\mathcal{T} := \{t \in \tilde{\Gamma} : \Gamma \cap Q_\ell = \gamma(t), \ell \sim \Omega\}$$

nur endlich viele Elemente enthalten. Es kann also $[\![\nabla_\nu B^n_{k,h}]\!](t) \neq 0$, $k \sim Q_\ell$ nur für $t \in \mathcal{T}$ sein und da $\mathcal{T}$ eine Nullmenge ist, genügt dies noch nicht einmal zur Darstellung des Sprungs von $[\![\nabla_\nu \Psi]\!]_\Gamma$ im L^2-Sinn. □

Mit diesem Ergebniss können wir mit $\chi\mathbb{B}^{n_\Gamma}_h(S_\delta)$ und $w^e\mathbb{B}^n_h(\Omega)$ die direkte Summe bilden, und gelangen so zu einem mit singulären Funktionen angereicherten weB-Raum:

Definition 5.2.1 (Interfacesplines)
Man nennt

$$\mathbb{B}^{n,n_\Gamma}_{w,\chi_\delta,h}(\Omega) := w^e\mathbb{B}^n_h(\Omega) \oplus \chi\mathbb{B}^{n_\Gamma}_h(S_\delta) \tag{5.32}$$

den Raum der Interfacesplines *vom Grad* (n, n_Γ) *und seine Elemente* Interfacesplines.

Zum Schluss fassen wir noch ein paar strukturelle Eigenschaften zusammen, die sich einfach aus den Eigenschaften der Basiselemente ergeben.

Satz 5.2.3 (Glattheits- und Sprungeigenschaften von Interfacesplines)
Es sei $u^h \in \mathbb{B}^{n,n_\Gamma}_{w,\chi_\delta,h}(\Omega), m \geq n_\Gamma \geq 2$ *und* $\ell = \min\{n-1, n_\Gamma - 1\}$. *Dann ist*

$$u^h \in H^1_0(\Omega) \cap C^\ell(\Omega^+) \cap C^\ell(\Omega^-). \tag{5.33}$$

Insbesondere gelten auf Γ *die Sprungeigenschaften*

$$[\![u^h]\!]_\Gamma = 0 \tag{5.34}$$

$$[\![\nabla_\nu u^h]\!]_\Gamma = g \in H^{n_\Gamma - 1/2}(\Gamma), \quad g \neq 0. \tag{5.35}$$

Hierbei gilt für $n > 1$

$$g = ||\nu(t)||^2 \sum_{k\sim\tilde{\Gamma}} \beta_k \tilde{b}^n_{k,h}(t) \tag{5.36}$$

punktweise und für $n = 1$ *noch im* L^2*-Sinn.*

Beweis: Es ist $u^h = u_1^h + u_2^h$ mit

$$u_1^h = \sum_{k\sim\Omega} \mu_k B_{k,h}^n \quad \text{und} \quad u_2^h = \sum_{k\sim\Gamma} \beta_k \Psi_{k,h}^{n_\Gamma}.$$

Da $u_1^h \in w^e\mathbb{B}(\Omega) \subset C^{n-1}(\Omega)$ und $u_2^h \in \chi\mathbb{B}_h^{n_\Gamma}(S_\delta) \subset H_0^1(\Omega) \cap C^{n_\Gamma-1}(\Omega^+) \cap C^{n_\Gamma-1}(\Omega^-)$ folgt 5.33 und 5.34. Es ist offenbar

$$\nabla_\nu u^h = \nabla_\nu u_1^h + \nabla_\nu u_h^2 \quad \text{und} \quad [\![u_1^h + u_2^2]\!]_\Gamma = [\![u_1^h]\!]_\Gamma + [\![u_2^h]\!]_\Gamma.$$

Für $n > 1$ ist $\nabla_\nu u_1^h \in C^0(\Omega)$, also $[\![\nabla_\nu u_1^h]\!]_\Gamma = 0$ und

$$\begin{aligned} [\![\nabla_\nu u_2^h]\!]_\Gamma &= [\![\nabla_\nu \sum_{k\sim\Gamma} \beta_k \chi_\delta b_{k,h}^{n_\Gamma}]\!]_\Gamma \\ &= \sum_{k\sim\Gamma} \beta_k [\![\nabla_\nu \Psi_{k,h}^{n_\Gamma}]\!]_\Gamma \\ &\underbrace{=}_{5.28} \|\nu\|^2(t) \sum_{k\sim\Gamma} \beta_k \tilde{b}_{k,h}^{n_\Gamma}(t). \end{aligned}$$

Da $b_{k,h}^{n_\Gamma} \in C^{n_\Gamma-1}(S_\delta) \hookrightarrow H^{n_\Gamma+1}(S_\delta)$, folgt mit dem Spursatz 1.2.7, dass $g \in H^{n_\Gamma-1/2}(\Gamma)$ und wegen $n_\Gamma > 2$ mindestens stetig sein muss. Für $n = 1$ kann analog wie im Beweis zur linearen Unabhängikeit $[\![\nabla_\nu u_1^h]\!]_{\Gamma_0} \neq 0$ nur für ein $\Gamma_0 \subset \Gamma$ mit $\text{meas}_2(\Gamma_0) = 0$ sein, somit ist dann $[\![\nabla_\nu u_1^h]\!]_\Gamma = 0$ f.ü. und 5.36 gilt dann noch im L^2-Sinn. $\square$

6. Satz vom Jackson-Typ für Funktionen mit singulären Gradienten

Wir zeigen in diesem Abschnitt, dass sich $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^m(\Omega) \cap H^m(\Omega)$ mit $[\![\nabla_\nu u]\!]_\Gamma \neq 0$ mit dem in 5.2.1 von uns konstruierten Raum $\mathbb{B}^{1,2}_{w,\chi_\delta}(\Omega)$ für $m \geq 5$ optimal approximieren lässt. Dies wird der Inhalt eines Satzes vom Jackson-Typ, den wir in 6.2 beweisen werden. Damit der Beweis des Satzes lesbar bleibt, haben wir in 6.1 neben den von uns benötigten Techniken und Resultaten aus der Approximationstheorie für weB-Splines auch Zwischenresultate des Haupttheorems 6.2 ausgelagert und in den Sätzen 6.1.1, 6.1.7 und 6.1.8 separat bewiesen.

6.1. Vorbereitende Sätze

Motiviert durch die Annahme, dass sich u in

$$u = u^\star + \Psi$$

mit $u^\star$ glatt, $[\![\nabla_\nu \Psi]\!]_\Gamma \neq 0$ zerlegen lässt, haben wir in Kapitel 5 einen Raum aus einer Basis von gewichteten Splines mit singulären Gradienten konstruiert. Das solch eine Zerlegung tatsächlich existiert, zeigen wir nun mit Hilfe der im vorigen Abschnitt definierten Gewichtsfunktion χ_δ 5.19 in 6.1.1.

6.1.1. Zerlegung der Lösung

Wir zeigen mit Hilfe des folgenden Lemmas 6.1.1 die Zerlegbarkeit von u in einen glatten und einen springenden Anteil. Zur Illustration des Beweises können die Bilder 5.1,5.2 mit dem univariaten Beispiel dienlich sein.

Lemma 6.1.1 (Regularität von Quotientenfunktionen [39; 44])
Es sei $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^m(\Omega)$, w eine Standardgewichtsfunktion und $u = wv$. Dann ist $v \in H^{m-1}(\Omega)$ und

$$\|v\|_{H^{m-1}(\Omega)} \leq C_{w,n} \|u\|_{H^m(\Omega)}. \tag{6.1}$$

Für jedes Teilgebiet $\Omega' \subset \Omega$ mit $\operatorname{dist}(\partial\Omega, \partial\Omega') = \delta > 0$ gilt

$$\|v\|_{H^m(\Omega')} \leq C_{w,n} \delta^{-1} \left\{ \|u\|_{H^m(\Omega')} + \|u\|_{H^{m-1}(\Omega')} \right\}, \tag{6.2}$$

d.h. $v \in H^m(\Omega')$.

Selbst bei glatten w verliert der Quotient u/w somit in Randnähe eine Differenzierbarkeitsordnung.

Satz 6.1.1 (Zerlegungssatz)
Es existieren Funktionen $u^\star \in H_0^1(\Omega) \cap H^m(\Omega), v \in H^{m-1}(\Omega), \Psi \in H_0^1(\Omega)$, so dass sich u durch

$$u = u^\star + \Psi \tag{6.3}$$

mit $\Psi = \chi_\delta \cdot v$ darstellen lässt.

Beweis: Wir betrachten

$$u_{|\Omega\setminus S_\delta(\Gamma)} = \begin{cases} u^- & \text{auf} \quad \Omega^- \\ u^+ & \text{auf} \quad \Omega^+ \setminus S_\delta \end{cases} .$$

Mit Calderon-Stein 1.2.6 setzen wir $u_{|\Omega\setminus S_\delta}$ zu einer $H^m(\Omega)$ Funktion fort:

$$u^\star := \mathcal{E} u_{|\Omega\setminus S_\delta}. \tag{6.4}$$

Somit ist

$$u^\star = \begin{cases} u^- & \text{auf} \quad \Omega^- \\ \mathcal{E} u_{|\Omega\setminus S_\delta(\Gamma)} & \text{auf} \quad S_\delta \\ u^+ & \text{auf} \quad \Omega^+ \setminus S_\delta \end{cases} . \tag{6.5}$$

Auf S_δ machen wir mit χ_δ den Ansatz

$$u_{|S_\delta} = (u^\star + \chi_\delta v)_{|S_\delta} .$$

Da $(u - u^\star)_{|S_\delta} \in H^m(S_\delta)$ und nach 5.21 $\chi_{\delta|S_{\delta'}} = \mathrm{dist}_{\Omega^+,\Gamma}$ folgt mit Lemma 6.1.1

$$v_{|S_\delta} = \left(\frac{u - u^\star}{\chi_\delta} \right)_{|S_\delta} \in H^{m-1}(S_\delta)$$

und wiederum mit Calderon-Stein

$$v := \mathcal{E} v_{|S_\delta(\Gamma)} \in H^{m-1}(\Omega).$$

Da außerdem nach Satz 5.20 $\chi_{\delta_{|\Omega\setminus S_\delta}} \equiv 0$ folgt schließlich $\Psi := \chi_\delta \cdot v \in H_0^1(\Omega)$ und damit die Behauptung. □

Aus dem Zerlegungssatz wird ersichtlich: ist u in $H_0^1(\Omega) \cap H^m(\Omega^+) \cap H^m(\Omega^-)$, dann ist $v \in H^{m-1}(\Omega)$. Schränkt man v mit Hilfe eines Spuroperators, vgl. 1.2.7, $\gamma_\Gamma(v) = v_{|\Gamma}$ auf das Interface ein, so ist $v_{|\Gamma} \in H^{m-3/2}(\Gamma)$. Wir wollen später $\partial^k v_{|\Gamma}, k = 0, 1$ mit klassischen Quasiinterpolatoren auf dem Interface approximieren. Damit diese Ableitungen im starken Sinn existieren, muss also $m - 3/2 - 2 > 0$, d.h. $m \geq 5$ sein. Dies ist z.B. für rechte Seiten $f \in L^2(\Omega) \cap H^m(\Omega^+) \cap H^m(\Omega^-), m \geq 3$ bei dem Modellproblem 4.1 der Fall.
Für die späteren Approxmationsabschätzungen ist noch das folgende Resultat von Bedeutung, dessen Beweis man mit der Leibniz'schen Regel schnell verifiziert.

Lemma 6.1.2 (Abschätzung für gewichtete Funktion)
Es sei Ω' ein Teilgebiet von Ω und $u \in H^m(\Omega')$. Ist w eine $m-$reguläre Gewichtsfunktion, so gilt

$$\|wu\|_{H^m(\Omega')} \preceq \max_{\Omega'} w \cdot \|u\|_{H^m(\Omega')} + \|u\|_{H^{m-1}(\Omega')}. \tag{6.6}$$

6.1.2. Klassische Quasi-Interpolationsabschätzungen in der Maximumsnorm

Wir betrachten klassische eindimensionale Quasi-Interpolatoren auf stetigen Funktionen. Es sei dazu $I = [a, b] \subset \mathbb{R}, a \neq b$, und der Splineraum $\mathbb{B}_h^n(I)$ gegeben. Einen linearen Operator $\mathcal{Q} \in \mathcal{L}(C^0(I), \mathbb{B}_h^n(I)$ mit

$$\mathcal{Q}u := \sum_{k\sim\Omega} (\mathcal{Q}_k u)\, b_{k,h}^n \tag{6.7}$$

nennt man einen *Quasi-Interpolator der Ordnung* $k+1$, falls

- $\mathcal{Q}_\ell \in \mathcal{L}(C^0(\operatorname{supp} b_\ell^n), \mathbb{R})$ mit $|\mathcal{Q}_\ell| \leq \|\mathcal{Q}\| \|u\|_{L^\infty(\operatorname{supp} b_\ell^n)}, \quad \ell \sim I$
- $\mathcal{Q}p = p, \quad \forall p \in \mathcal{P}_k(I)$.

Die Operatoren sollen also lokal beschränkt sein und Polynome mit Totalgrad k reproduzieren. Wir benutzen solche Quasi-Interpolatoren später, um auf eindimensionalen Untermannigfaltigkeiten (konkret auf dem Interface Γ) des $\mathbb{R}^2$ Fehlerabschätzungen zu bekommen. Der nächste Satz gibt an, wie gut wir eine hinreichend glatte Funktion in der Maximumsnorm mit uniformen Splines aus $\mathbb{B}_h^n(I)$ über einer äquidistanten Knotenfolge $\tau_\ell = \ell\mathbb{Z}, \ell \sim I$, und $\{\ell \sim I\} \cap \{a, b\} = \{a, b\}$ mit einen Quasi-Interpolationsoperator approximieren können.

Satz 6.1.2 (L^∞-Fehlerordnung der Quasi-Interpolation)
Es sei $\mathcal{Q} : C^0(I) \longrightarrow \mathbb{B}_h^n(I)$ ein Quasi-Interpolant der Ordnung $k+1$ und $I' := \bigcup_{\ell\sim I} \operatorname{supp}(b_{\ell,h}^n)$. Ist $u \in C^{k+1}(I)$, so gilt

$$\|u^{(j)} - (\mathcal{Q}u)^{(j)}\|_{L^\infty(I)} \leq C_{n,k} \|\mathcal{Q}\| \|u^{(k+1)}\|_{L^\infty(I')} h^{k+1-j}, \quad \forall j \leq k, \tag{6.8}$$

Beweis: Folgt z.B. als Spezialfall aus [48]. □

Einen Standardoperator können wir mit den wohlbekannten de Boor-Fix Funktionalen explizit angeben. Sämtliche der folgenden Aussagen sind wohlbekannt und findet man z.B. in [48]. Für hinreichend glattes $u \in C^n(I)$ sind die de Boor-Fix Funktionale zu der uniformen Knotenfolge $(\tau_k), k \sim I$ durch

$$\tilde{\lambda}_{k,h}^n u := \frac{1}{n!} \sum_{\nu=0}^{n} (-\partial)^{n-\nu} \Phi_h^n(\xi_k) \partial^\nu u(\xi_k), \quad k \sim I \tag{6.9}$$

definiert, hierbei ist $\Phi_h^n(t) := \Pi_{i=1}^n (\tau_{i+1} - t)$ und $\xi_k \in \operatorname{supp} b_{k,h}^n$. Die $\tilde{\lambda}_{k,h}^n$ bilden eine duale Basis zur Spline-Basis von $\mathbb{B}_h^n(I)$, d.h. $\tilde{\lambda}_{k,h}^n b_{\ell,h}^n = \delta_{k,\ell}, k, \ell \sim I$ und können für Splines $u^h \in \mathbb{B}_h^n(I)$ mit Hilfe des Rieszschen Darstellungssatzes durch duale Funktionen $\lambda_{k,h}^n : L^2(I_k) \to \mathbb{R}$ mit $I_k = (\tau_k, \tau_{k+1})$ repräsentiert werden:

$$\tilde{\lambda}_{k,h}^n u^h = \left(\lambda_{k,h}^n, u^h\right)_{L^2(\operatorname{supp} b_{k,h}^n)}. \tag{6.10}$$

Der mit den dualen Funktionen gebildete Operator $\Xi_h^n \in \mathcal{L}(C^0(I), \mathbb{B}_h^n(I))$

$$\Xi_h^n u := \sum_{k\sim I} \left(\lambda_{k,h}^n, u^h\right)_{L^2(\operatorname{supp} b_{k,h}^n)} b_{k,h}^n \tag{6.11}$$

ist ein Quasi-Interpolations-Operator der Ordnung $n+1$. Es existiert eine nur von n abhängige Konstante $C_n > 0$, so dass

$$\int_{\operatorname{supp} b^n_{k,h}} |\lambda^n_{k,h}| dt \leq C_n,$$

vgl. [48]. Daraus folgt die lokale Beschränktheit.

Wir betrachten ein einfaches Beispiel für einen Quasi-Interpolationsoperator der Ordnung 2, der C^2-Funktionen auf quadratische Splines projeziert und mit optimaler Ordnung in der Maximumsnorm approximiert. Dazu legen wir eine spezielle Knotenfolge durch

$$\tau^n_k := (\tau_{k+1} + ... + \tau_{k+n})/n, \quad k \sim I \tag{6.12}$$

fest und definieren damit den *Schoenberg-Operator* $\mathcal{Q}_S : C^0(I) \longrightarrow \mathbb{B}^n_{k,h}(I)$ durch

$$\mathcal{Q}_S u := \sum_{k \sim I} u(\tau^n_k) b^n_k. \tag{6.13}$$

Das resultierende Approximations-Verfahren nennt man auch *Schoenberg-Schema*.

Satz 6.1.3 (L^∞-Fehlerordung des Schoenberg-Schemas)
Der Schoenberg-Operator $\mathcal{Q}_S$ 6.13 ist ein Quasi-Interpolator der Ordnung 2. Ist $u \in C^2(I)$ und $I' := \bigcup_{k \sim I} \operatorname{supp}(b^n_{k,h})$, so gilt

$$\|u^{(j)} - (\mathcal{Q}_S u)^{(j)}\|_{L^\infty(I)} \preceq \|u''\|_{L^\infty(I')} h^{2-j}, \quad j = 0, 1. \tag{6.14}$$

Beweis: Den erste Teil der Behauptung findet man z.B. in [48], der Zweite folgt aus dem vorigen Satz 6.1.2 □

Bemerkung 6.1.1 (Projektion auf periodischen Splineraum)
Die Approximationssätze 6.1.2, 6.1.3 bleiben auch richtig, wenn man anstatt $\mathbb{B}^n_h(I)$ den meas(I)*-periodischen Splineraum $\mathbb{B}^n_{\text{per},h}(I)$ über $\mathbb{R}$ betrachtet und auf I geeignet einschränkt.*

6.1.3. Quasi-Interpolation für weB-Splines

Wir benötigen noch einen Operator der L^2-Funktionen auf Gebieten $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ in den weB-Splineraum $w^e\mathbb{B}^n_h(\Omega)$ projizieren kann. Dieser soll mit einer Funktion w (vgl. Definition 2.3.1) gewichtete Polynome aus $\mathcal{P}_n(\Omega)$ reproduzieren und lokal beschränkt sein, was uns zur folgenden Definition führt.

Definition 6.1.1 (weB-Projektor)
Man nennt eine lineare Abbildung $\mathcal{Q}_h \in \mathcal{L}(L^2(\Omega), w^e\mathbb{B}^n_h(\Omega))$ mit

$$\mathcal{Q}_h u := \sum_{k \sim \Omega} \mathcal{Q}_{h,k}(u) B^n_{k,h}, \quad \mathcal{Q}_{h,k} \in \mathcal{L}(L^2(\Omega), \mathbb{R}),\ k \sim \Omega$$

*einen weB-*Projektor *der Ordnung $n+1$, falls*

$$\mathcal{Q}_h(wp) = wp, \quad \forall p \in \mathcal{P}_n(\Omega)$$

und

$$\|\mathcal{Q}_h u\|_{H^\nu(Q_k\cap\Omega)} \leq h^{-\nu} M_k, \quad k \sim \Omega$$

wobei $M(\Omega, w, \nu, n, u, Q_k) < \infty$.

Mit Hilfe von dualen Funktionalen können wir solch einen Projektor explizit konstruieren, vergleiche Satz 5.2 [44]:

Satz 6.1.4 (Duale weB-Spline-Basis)
Ist w eine Gewichtsfunktion der Ordnung γ, so existert zur weB-Basis von $w^e\mathbb{B}_h^n(\Omega)$ eine duale Basis $\{\Lambda_{j,h}^n\}_{j\sim\Omega}$ mit folgenden Eigenschaften:

- *Lokaler Support:*

$$\operatorname{supp}\Lambda_{k,h}^n \subset Q_k \quad \textit{wobei} \quad Q_k \subset \overline{\Omega} \cap \operatorname{supp} B_k^n,\ k \sim \Omega \tag{6.15}$$

- *Gleichmäßige Beschränktheit:*

$$\|\Lambda_{j,h}^n\|_{L^2(\Omega)} \leq C_{\Omega,w,n} h^{-d/2}, \quad j \sim \Omega \tag{6.16}$$

- *Biorthogonaliät:*

$$\left(\Lambda_{i,h}^n, B_{j,h}^n\right)_{L^2(\Omega)} = \delta_{i,j}, \quad i,j \sim \Omega \tag{6.17}$$

Der durch $\mathcal{Q}_h^n : L^2(\Omega) \longrightarrow w^e\mathbb{B}_h^n(\Omega)$ mit

$$\mathcal{Q}_h^n u := \sum_{k\sim\Omega} \left(\Lambda_{k,h}^n, u\right)_{L^2(\Omega)} B_{k,h}^n \tag{6.18}$$

definierte lineare Operator ist ein weB-Projektor. Dies zeigt der folgende Satz aus [44]

Satz 6.1.5 (Projektorabschätzung)
Es gilt $\mathcal{Q}_h^n(wp) = wp, \forall p \in \mathcal{P}_n(\Omega)$. Ist w eine ℓ-reguläre Gewichtsfunktion der Ordnung γ, so gilt außerdem auf jeder Gitterzelle $Q \sim \Omega$

$$\|\mathcal{Q}_h^n u\|_{H^\nu(\Omega\cap Q)} \leq C h^{-\nu} \|u\|_{L^2(Q')}, \quad \nu \leq \min\{\ell, n\}, \tag{6.19}$$

wobei $Q' = \bigcup_{k\in\mathcal{I}(Q)} \operatorname{supp} B_k^n \subset \Omega$.

Glatte Funktionen lassen sich optimal mit weB-Splines approximieren. Dies ist das Ergebnis des folgenden zentralen Satzes in der Approximationstheorie für weB-Splines, vgl. [39],[45] und [44]:

Satz 6.1.6 (Jackson Ungleichung)
Es sei $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^m(\Omega)$, w eine Standardgewichtsfunktion und der weB-Projektor $\mathcal{Q}_h^n \in \mathcal{L}(L^2(\Omega), w^e\mathbb{B}_h^n(\Omega))$ gegeben. Dann ist

$$\|u - \mathcal{Q}_h^n u\|_{H^\ell(\Omega)} \leq C_{\Omega,w,n} h^{m-\ell} \|u\|_{H^m(\Omega)}, \quad \ell < m \leq n+1. \tag{6.20}$$

6.1.4. Fehlerabschätzungen auf Gitterzellen $Q \sim \Omega, Q \cap \Gamma = \emptyset$

Als wichtiges Hilfsmittel dient uns die folgende praktische Variante des Bramble-Hilbert-Lemmas:

Lemma 6.1.3 (Bramble-Hilbert)
Es sei Ω ein sternförmiges Lipschitzgebiet (vgl. Def. in [14]) mit $\operatorname{diam}(\Omega) < \infty$, *und eine orthogonale Projektion $\Pi^n \in \mathcal{L}(L^2(\Omega), \mathcal{P}^n(\Omega))$ gegeben. Für $u \in H^\mu(\Omega)$ und $0 \leq \nu < \mu \leq n+1$ ist dann*

$$|u - \Pi^n u|_{H^\nu(\Omega)} \leq C_n \operatorname{diam}(\Omega)^{\mu-\nu} |u|_{H^\mu(\Omega)}. \tag{6.21}$$

Beweis: Siehe z.B. für die Originalfassung von Bramble und Hilbert [13] oder eine erst 2012 von Reif gemachte Verallgemeinerung auf eine größere Klasse von Gebieten [73] . □

Aus dem Lemma folgt für einen d-dimensionalen Würfel W mit $\operatorname{diam}(W) \preceq h$ sofort

$$\|u - \Pi^n u\|_{H^\nu(W)} \preceq h^{\mu-\nu} \|u\|_{H^\mu(W)}, \quad 0 \leq \nu < \mu \leq n+1. \tag{6.22}$$

Damit sind wir in der Lage den Fehler der weB-Splines lokal abzuschätzen.

Wir bringen als Nächstes eine für uns besser passende Version von 6.1.6 aus [39; 44] deren Beweis nur ein wenig angepasst werden muss. Dazu sei im Folgenden Q aus der Menge der für Ω relevanten Gitterzellen. Wir notieren uns noch mit $Q' := \bigcup_{i \in I(Q)} \operatorname{supp}(B^n_{h,i}) \subset \Omega$, sowie mit $\tilde{Q}$ einen minimalsten d-dimensionalen Würfel der Q' enthält.

Satz 6.1.7 (Jacksonabschätzung auf Gitterzellen $Q \cap \Gamma = \emptyset$)
Es sei $\tilde{Q} \subset \mathbb{R}^d \setminus \Omega^-$, $u \in H^1_0(\Omega) \cap H^m(\Omega^+) \cap H^m(\Omega^-)$, w eine Standardgewichtsfunktion und der weB-Projektor $\mathcal{Q}^n_h \in \mathcal{L}(L^2(\Omega), w^e \mathbb{B}^n_h(\Omega))$ gegeben. Dann ist für $\ell < m \leq n+1$

$$\|u - \mathcal{Q}^n_h u\|_{H^\ell(Q \cap \Omega^+)} \preceq h^{m-\ell} \left(\|u\|_{H^m(\tilde{Q} \cap \Omega^+)} + \|\mathcal{E} u_{|\Omega^+}/w\|_{H^{m-1}(\tilde{Q})} \right), \tag{6.23}$$

wobei $\mathcal{E}u/w$ die Calderon-Stein Fortsetzung (1.2.6) von $u_{|\Omega^+}/w$ auf $\mathbb{R}^d$ ist. Ist $\Omega^- = \emptyset$, so folgt der Jackson-Satz für weB-Splines 6.1.6.

Beweis: Wir setzen $u^+ = u_{|\Omega^+}, u^+ = wv^+$, wobei nach 6.1.1 $v^+ \in H^{m-1}(\Omega^+)$ und notieren $\mathcal{E}v^+ = \tilde{v}^+ \in H^{m-1}(\mathbb{R}^d)$ für die Calderon-Stein Fortsetzung 1.2.6 auf $\mathbb{R}^d$. Diese existiert, da wir $\partial\Omega^+ = \partial\Omega \cup \Gamma$ als hinreichend glatt voraussetzen. Auf $Q \cap \Omega^+$ splitten wir mit Hilfe des Operators $\Pi^n \in \mathcal{L}(L^2(\tilde{Q}), \mathcal{P}^n(\tilde{Q}))$ den Fehler $u^+ - \mathcal{Q}^n_h u^+$ wie folgt auf:

$$u^+ - \mathcal{Q}^n_h u^+ = w\tilde{v}^+ - w\Pi^n_h \tilde{v}^+ + \mathcal{Q}^n_h \left(w\Pi^n \tilde{v}^+ - w\tilde{v}^+ \right) \tag{6.24}$$

und erhalten dadurch

$$\begin{aligned}
\|u - \mathcal{Q}^n_h u\|_{H^\ell(Q \cap \Omega^+)} &\leq \|w(\tilde{v}^+ - \Pi^n \tilde{v}^+)\|_{H^\ell(Q \cap \Omega^+)} + \|\mathcal{Q}^n_h \left(w\Pi^n \tilde{v}^+ - w\tilde{v}^+ \right)\|_{H^\ell(Q \cap \Omega^+)} \\
&\underbrace{\preceq}_{6.19} \|w(\tilde{v}^+ - \Pi^n \tilde{v}^+)\|_{H^\ell(Q \cap \Omega^+)} + h^{-\ell} \|w \left(\tilde{v}^+ - \Pi^n \tilde{v}^+ \right)\|_{L^2(Q')} \\
&\underbrace{\preceq}_{6.1.2} \max_{Q'} w \cdot \left\{ \|\tilde{v}^+ - \Pi^n \tilde{v}^+\|_{H^\ell(Q \cap \Omega^+)} + h^{-\ell} \|\tilde{v}^+ - \Pi^n \tilde{v}^+\|_{L^2(Q')} \right\} \\
&\quad + \|\tilde{v}^+ - \Pi^n \tilde{v}^+\|_{H^{\ell-1}(Q \cap \Omega^+)} =: I.
\end{aligned}$$

Wir setzen $\delta = \operatorname{dist}(\tilde{Q}, \partial\Omega)$ und unterscheiden zwei Fälle um I abzuschätzen.

(i) $\delta \leq h$. Daraus folgt $\tilde{Q} \cap \partial\Omega \neq \emptyset$. Da $\operatorname{diam}(Q') \preceq h$ ist außerdem wegen $w \asymp \operatorname{dist}(\cdot, \partial\Omega)$ auch $\max_{Q'} w \leq h$. Wenden wir nun die Folgerung aus dem Bramble-Hilbert-Lemma 6.22 mit $\nu = \ell - 1 \,\&\, 0 \,\&\, 1$ und $\mu = m - 1$ auf die Summanden von I an, so folgt

$$I \preceq h^{m-\ell} \|\tilde{v}^+\|_{H^{m-1}(\tilde{Q})}. \tag{6.25}$$

(ii) $\delta \geq h$. Dann ist $\tilde{Q} \subset \Omega^+$ und $\max_{Q'} w \preceq \delta + h \leq 2\delta \preceq \delta$. Wir können nun genauso wie in (i) 6.22 anwenden, diesmal aber wegen der um eins erhöhten Regularität von $\tilde{v}^+$ auf $\tilde{Q}$ mit $\mu = m$ und erhalten

$$\begin{aligned} I &\preceq \delta h^{m-\ell} \|\tilde{v}^+\|_{H^m(\tilde{Q})} + h^{m-\ell+1} \|\tilde{v}^+\|_{H^m \tilde{Q})} \\ &\preceq \delta h^{m-\ell} \|\tilde{v}^+\|_{H^m(\tilde{Q})} + \left(\frac{h^{m-\ell+1}}{\delta}\right) \delta \|\tilde{v}^+\|_{H^m(\tilde{Q})} \preceq \delta h^{m-\ell} \|\tilde{v}^+\|_{H^m(\tilde{Q})} \\ &\underbrace{\preceq}_{6.1.1} h^{m-\ell} \left(\|u^+\|_{H^m(\tilde{Q})} + \|\tilde{v}^+\|_{H^{m-1}(\tilde{Q})} \right). \end{aligned}$$

Aus (i) und (ii) folgt der erste Teil der Behauptung. Ist $\Omega^- = \emptyset$, so ist $\Omega^+ = \Omega$ und $u^+ = u \in H_0^1(\Omega) \cap H^m(\Omega)$. Wir erhalten dann aus (i),(ii)

$$\|u - \mathcal{Q}_h^n u\|^2_{H^\ell(Q \cap \Omega)} \preceq h^{m-\ell} \left(\|u\|_{H^m(\tilde{Q} \cap \Omega)} + \|v^+\|_{H^{m-1}(\tilde{Q})}. \right)$$

Wir summieren über alle $Q \sim \Omega^+$ und schätzen weiter ab:

$$\begin{aligned} \|u - \mathcal{Q}_h^n\|^2_{H^\ell(\Omega)} &= \sum_{Q \in \Omega^+} \|u - \mathcal{Q}_h^n\|^2_{H^\ell(Q \cap \Omega^+)} \\ &\underbrace{\preceq}_{\text{Young},A.1} h^{2(m-\ell)} \sum_{\tilde{Q} \sim \mathcal{Q}} \left(\|\tilde{v}\|^2_{H^{m-1}(\tilde{Q})} + \|u\|^2_{H^m(\tilde{Q} \cap \Omega)} \right) \\ &\preceq h^{2(m-\ell)} \left(\|\tilde{v}\|^2_{H^{m-1}(\mathbb{R}^d)} + \|u\|^2_{H^m(\Omega)} \right) \\ &\underbrace{\preceq}_{\text{Stein } 1.2.6} h^{2(m-\ell)} \left(\|v\|^2_{H^{m-1}(\Omega)} + \|u\|^2_{H^m(\Omega)} \right) \\ &\underbrace{\preceq}_{6.1.1} h^{2(m-\ell)} \|u\|^2_{H^m(\Omega^+)} \end{aligned}$$

Hierbei haben wir beachtet, dass sich die Würfel $\tilde{Q}$ nur endlich oft überlappen und es sich demnach um endliche Summen handelt. Damit ist alles gezeigt. □

6.1.5. Auswirkung der eindimensionalen Quasi-Interpolation in Interfacenähe

Der Grundgedanke bei der Konstruktion des Raums $\mathbb{B}^{n,n_\Gamma}_{w,\chi_\delta,h}(\Omega)$ war, dass die weB-Splines den glatten Anteil von u und die periodischen Splines auf dem Interface den „Sprung“ approximieren sollen. Der folgende Hilfssatz 6.1.8 ist ein wichtiger Baustein für das Hauptresultat in 6.2.1. Er gibt grob gesprochen Aufschluss darüber, wie sich der Fehler des springenden Anteils der Lösung durch die eindimensionale Approximation auf dem Interface mit einem Quasi-Interpolator auf einer kleinen Umgebung des Interface verhält. Dazu sei im Folgenden $\Phi : \tilde{S}_\delta \longrightarrow S_\delta$ ein glatter Diffeomorphismus, der das Rechteck $\tilde{S}_\delta = [0, L) \times [0, \delta)$ auf den Streifen S_δ und $I = [0, L)$ auf das Interface Γ abbildet. Danaben betrachten wir mit einem $\delta^\star > \delta$ einen noch etwas größeren Streifen,

$$S_{\delta^\star} := \{x \in \Omega : \operatorname{dist}(x, \Gamma) < \delta^\star\} \Subset \Omega \tag{6.26}$$

mit $\Omega^\pm \cap S_{\delta^\star} \neq \emptyset$ und nehmen an, dass die Forsetzung Φ^{-1} auf $S_{\delta^\star}$ glatt ist und $\tilde{S}_\delta \Subset \Phi^{-1}(S_{\delta^\star}), S_\delta \Subset S_{\delta^\star}$ gilt. Der Streifen $S_{\delta^\star}$ ist also eine offene Umgebung des Interface und beinhaltet den nur in Ω^+ gelegenen Streifen S_δ. Für ein C^k-Interface mit $k \geq 2$ und hinreichend klein gewählten Parametern $\delta, \delta^\star$ ist solch eine Konstruktion immer möglich. Man parametrisiert dann einfach das *zusammengezogene* Interface

$$\Gamma^\star := \{x \in \Omega^- : \operatorname{dist}(x, \Gamma) = \delta^\star\} \subset \Omega^-$$

mit einer Kurve $\gamma^\star \in C^k$ und mit der Normalen $\nu^\star \in \left[C^{k-1}\right]^2$ bildet man analog zu 5.1.2 den C^{k-1}-Diffeomorphismus $\Phi^\star : [0, L^\star) \times (-\delta^\star, \delta^\star) \longrightarrow S_{\delta^\star}$ mit

$$\Phi^\star(s, t) := \gamma^\star(t) + s \cdot \nu^\star(t) \tag{6.27}$$

und betrachtet Φ als Einschränkung auf das kleinere Rechteck $\tilde{S}_\delta$. Deshalb werden wir im Folgenden für die Erweiterung von Φ auf den etwas größeren Streifen keine neue Bezeichnung einführen. Die Skizze illustriert den Sachverhalt, ∂S_δ ist gestrichelt und $\partial S^\star_\delta$ durchgehend gezeichnet:

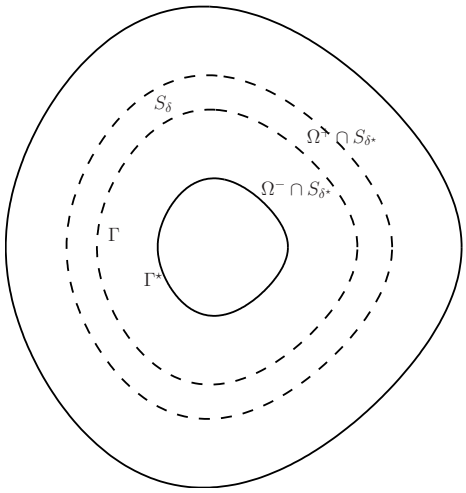

Abbildung 6.1.: Der etwas größerer Streifen $S_{\delta^\star}$

Es sei nun $v \in C^{k+1}(\Omega)$ und $\Xi_h^k \in \mathcal{L}(C^0(I), \mathbb{B}_{L,h}^n(I))$ ein Quasi-Interpolator der Ordnung $k+1$ wobei $0 \le k \le n-1$. Wir bilden mit,

$$v^h(x) := \begin{cases} \left(\Xi_h^{k+1}(v \circ \Phi^{-1})(0,\cdot) \circ \Phi\right)(x) & \text{für} \quad x \in S_{\delta^\star} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \tag{6.28}$$

und der Gewichtsfunktion $\chi_\delta \in H_0^1(\Omega) \cap C^\infty(\Omega^-) \cap C^m(\Omega^+)$ aus 5.19 den *gewichteten Fehler*

$$\varphi^h := \chi_\delta v - \chi_\delta v^h. \tag{6.29}$$

In einer hinreichend kleinen Umgebung des Interface wird v durch die eindimensionale Quasi-Interpolation v^h in den H^ν-Normen, $\nu = 0,1,2$ optimal approximiert:

Satz 6.1.8 (Auswirkung der eindimensionalen Quasi-Interpolation)
Es ist $\varphi^h_{|\Omega \setminus S_\delta} \equiv 0$ und

$$\varphi^h \in H_0^1(\Omega) \cap C^\infty(\Omega^-) \cap C^{\min\{k,m\}}(\Omega^+). \tag{6.30}$$

Speziell für $n = 2, k = 1$ und $m \ge 2$ gelten für hinreichend kleines h und Quader $Q \subset \Omega$ und $m \ge 2$ die folgenden Abschätzungen:

$$\|\varphi^h\|_{H^2(Q)} \preceq \text{meas}(Q)^{1/2}, \quad \forall Q \subset \Omega^+ \tag{6.31}$$

$$\|\varphi^h\|_{H^\nu(Q)} \preceq \text{meas}(Q)^{1/2} h^{2-\nu}, \quad \nu = 0,1 \quad \forall Q \cap \Gamma \neq \emptyset. \tag{6.32}$$

Beweis: Wir setzen im Folgenden zur Vereinfachung

$$\Xi^h(t) := \left(\Xi_h^{k+1} \tilde{v}(0,\cdot)\right)(t).$$

Wegen $v \in C^{k+1}(\Omega)$ ist $\tilde{v} = v_{|S_{\delta^\star}} \circ \Phi \in C^{n+1}(S_{\delta^\star})$ und damit sind $\tilde{v}(0,\cdot)$ und Ξ^h beide in $C^{k+1}(I)$. Die triviale Fortsetzung

$$\Xi^h(s,t) := \begin{cases} \Xi^h(t), & \text{für} \quad (s,t) \in S_{\delta^\star} \\ 0 & \text{für} \quad (s,t) \in \Omega \setminus S_{\delta^\star} \end{cases}$$

ist dann offenbar in $L^2(\Omega) \cap C^{k+1}(S_{\delta^\star})$ und damit $v^h \in L^2(\Omega) \cap C^{k+1}(S_{\delta^\star})$. Da außerdem $\chi_\delta \in C^m(\Omega^+)$ und auf $\Omega^+ \setminus S_\delta \equiv 0$ ist, folgt $\chi_\delta(v - v^h) \in C^{\min\{m,n\}}(\Omega^+)$. Auf Ω^- ist $\chi_\delta \equiv 0, v^h \equiv 0$, womit natürlich $\varphi^h \equiv 0$ und somit auf Ω^- beliebig glatt ist. Da χ_δ global in $H_0^1(\Omega)$ und auf Γ stetig zu Null geführt wird, ist $\chi_\delta \cdot v^h \in H_0^1(\Omega)$ woraus 6.28 folgt. Wir setzen jetzt $n = m = 2, k = 1$. Wegen der Lebesgue-Standardabschätzung 1.9 und dem Transformationssatz 1.2.2 ist für $\Omega^\star \subset S_{\delta^\star} \cap \Omega^+$

$$\|\varphi^h\|_{H^\nu(\Omega^\star)} \asymp \|\varphi^h \circ \Psi^{-1}\|_{H^2(\Psi^{-1}(\Omega^\star))} \preceq \text{meas}(\Omega^\star)^{1/2} \max_{|\alpha| \le \nu} \|\partial^\alpha \tilde{\varphi}^h\|_{L^\infty(\tilde{\Omega}^\star)}, \quad \nu = 0,1,2. \tag{6.33}$$

Es genügt also im Wesentlichen die Größen $\|\partial^\alpha \tilde{\varphi}^h\|_{L^\infty(\tilde{\Omega}^\star)}, |\alpha| \le 1,2$ abzuschätzen. Wegen $\Xi^h \in C^2(I)$ ist

$$\left|\frac{d^\ell}{dt} \Xi^h(t)\right| \preceq 1, \quad t \in \tilde{\Gamma}, \ell = 0,1,2$$

und da $\tilde{\chi}_\delta, \tilde{v} \in C^2(\Omega^\star)$ folgt

$$|\partial^\alpha \tilde{\varphi}^h(s,t)| \preceq 1, \quad (s,t) \in \tilde{\Omega}^\star, |\alpha| \leq 2$$

und damit

$$\|\tilde{\varphi}^h\|_{C^2(\tilde{\Omega}^\star)} \preceq 1. \tag{6.34}$$

Es sei jetzt $Q \subset \Omega^+$. Dann ist

$$\begin{aligned} \|\varphi^h\|^2_{H^2(Q)} &= \|\varphi^h\|^2_{H^2(Q\cap S_\delta)} + \underbrace{\|\varphi^h\|^2_{H^2(Q\cap(\Omega^+\setminus S_\delta))}}_{=0} \\ &\asymp \|\tilde{\varphi}^h\|^2_{H^2(\Phi^{-1}(Q\cap S_\delta))} \underbrace{\preceq}_{6.33,6.34} \operatorname{meas}(\Phi^{-1}(Q\cap S_\delta)) \\ &\asymp \operatorname{meas}(Q\cap S_\delta) \preceq \operatorname{meas}(Q), \end{aligned} \tag{6.35}$$

woraus wir 6.31 erhalten.

Wir betrachten jetzt $\partial^\alpha \tilde{\varphi}^h, |\alpha| = 0,1$ auf dem Streifen $\tilde{S}_\delta$. Unter der Berücksichtigung, dass $\tilde{\chi}_\delta(s) = s, 0 \leq s < \delta$ und Ξ^h nur von t abhängt und somit $\partial_s(\Xi^h) \equiv 0$ ist, erhalten wir

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}^h &= s\tilde{v} - s\Xi^h = s\cdot(\tilde{v} - \Xi^h) \\ \partial_t\tilde{\varphi}^h &= s\cdot\partial_t(\tilde{v} - \Xi^h) \\ \partial_s\tilde{\varphi}^h &= (\tilde{v} - \Xi^h) + s\cdot\partial_s(\tilde{v} - \Xi^h) = (\tilde{v} - \Xi^h) + s\cdot\partial_s\tilde{v}, \end{aligned}$$

woraus

$$\begin{aligned} \|\tilde{\varphi}^h\|_{L^\infty(\tilde{S}_\delta)} &\leq \|s\|_{L^\infty(\tilde{S}_\delta)} \cdot \|\tilde{v} - \Xi^h\|_{L^\infty(\tilde{S}_\delta)}, \\ \|\partial_t\tilde{\varphi}^h\|_{L^\infty(\tilde{S}_\delta)} &\leq \|s\|_{L^\infty(\tilde{S}_\delta)} \cdot \|\partial_t(\tilde{v} - \Xi^h)\|_{L^\infty(\tilde{S}_\delta)}, \\ \|\partial_s\tilde{\varphi}^h\|_{L^\infty(\tilde{S}_\delta)} &\leq \|\tilde{v} - \Xi^h\|_{L^\infty(\tilde{S}_\delta)} + \|s\|_{L^\infty(\tilde{S}_\delta)} \cdot \|\partial_s\tilde{v}\|_{L^\infty(\tilde{S}_\delta)}, \end{aligned} \tag{6.36}$$

folgt. Auf $\tilde{S}_\delta$ ist offenbar

$$\|s\|_{L^\infty(\tilde{S}_\delta)} = \mathcal{O}(s) \quad \text{und} \quad \|\partial_s\tilde{v}\|_{L^\infty(\tilde{S}_\delta)} = \mathcal{O}(1), \tag{6.37}$$

damit hängt die Fehlerordung von $\|\tilde{\varphi}^h\|_{H^1(\tilde{S}_\delta)}$ also nur noch von

$$\|\tilde{v} - \Xi^h\|_{L^\infty(\tilde{S}_\delta)} \tag{6.38}$$

und

$$\|\partial_t(\tilde{v} - \Xi^h)\|_{L^\infty(\tilde{S}_\delta)} \tag{6.39}$$

ab. Die auf dem transformierten Interface eingeschränkte Funktion $\tilde{v}(0,\cdot)$ ist offenbar in $C^2(\tilde{\Gamma})$ und können wir wegen 6.1.2 mit dem Quasi-interpolanten ${\Xi^2}_h$ der Ordnung 2 abschätzen:

$$\|\partial_t^j\left(\tilde{v} - (\Xi_h^2\tilde{v}(0,\cdot))\right)\|_{L^\infty(\tilde{\Gamma})} \leq C\|\Xi_h^2\|\|\partial_t^2\tilde{v}\|_{L^\infty(\tilde{\Gamma}')}h^{2-j}, \quad 0 \leq j \leq 1. \tag{6.40}$$

Wir untersuchen jetzt wie sich diese eindimensionale Approximation in einer kleinen Umgebung des Interface auswirkt und betrachten zunächst den in Ω^+ gelegenen Streifen. Zur Abschätzung auf $\tilde{S}_\delta$ setzen wir

$$x = (0,t),\ \xi := (s,0), \quad \text{für} \quad 0 \le s < \delta$$

sowie

$$\tilde{\phi}(s,t) := (\tilde{v} - \Xi^h)(s,t)$$

und erhalten mit elementarer Analysis (vgl. A.2)

$$\phi(s,t) - \tilde{\phi}(0,t) = \int_0^1 \nabla\left(\tilde{\phi}(\Theta s,t)\right)\cdot(s,0)\,d\Theta = \int_0^1 \partial_s \tilde{v}(\Theta s,t))s\,d\Theta,$$

woraus sich für 6.38

$$\|\tilde{v} - \Xi^h\|_{L^\infty(\tilde{S}_\delta)} \le \underbrace{\|\tilde{v} - \Xi^h\|_{L^\infty(\tilde{\Gamma})}}_{=\mathcal{O}(h^2),\,6.40} + s\cdot\underbrace{\|\partial_s\tilde{v}\|_{L^\infty(\tilde{S}_\delta)}}_{=\mathcal{O}(1)} = \mathcal{O}(h^2+s) \tag{6.41}$$

ergibt. Die Abschätzung für 6.39 folgt analog durch

$$\partial_t\left(\tilde{\phi}(s,t) - \tilde{\phi}(0,t)\right) = \int_0^1 \nabla\left(\partial_t\tilde{\phi}(\Theta s,t)\right)\cdot(s,0)\,d\Theta = \int_0^1 \partial_{s,t}\tilde{v}(\Theta s,t))s\,d\Theta.$$

Damit ist

$$\|\partial_t\left(\tilde{v} - \Xi^h\right)\|_{L^\infty(\tilde{S}_\delta)} \le \underbrace{\|\partial_t(\tilde{v} - \Xi^h)\|_{L^\infty(\tilde{\Gamma})}}_{=\mathcal{O}(h),\,6.40} + s\cdot\underbrace{\|\partial_{s,t}\tilde{v}_{t,s}\|_{L^\infty(\tilde{S}_\delta)}}_{=\mathcal{O}(1)} = \mathcal{O}(h+s) \tag{6.42}$$

und mit 6.36 folgt

$$\begin{aligned}
\|\tilde{\varphi}^h\|_{L^\infty(\tilde{S}_h)} &= \mathcal{O}(sh^2+s^2),\\
\|\partial_t\tilde{\varphi}^h\|_{L^\infty(\tilde{S}_\delta)} &= \mathcal{O}(sh+s^2),\\
\|\partial_s\tilde{\varphi}^h\|_{L^\infty(\tilde{S}_\delta)} &= \mathcal{O}(h^2+s).
\end{aligned}$$

Für $s \le h$ ist somit

$$\|\tilde{\varphi}^h\|_{H^\nu(\tilde{S}_h)} \preceq \operatorname{meas}(\tilde{S}_h)^{1/2}h^{2-\nu}, \quad \nu = 0,1. \tag{6.43}$$

Es sei jetzt $Q \cap \Gamma \neq \emptyset$ mit $Q \subset S_{\delta^\star}$ und $Q \cap \Omega^+ \subset S_h$. Dann ist $Q^\star = \Phi^{-1}(Q) \cap \tilde{S}_\delta \subset \tilde{S}_h$. Nach 6.30 ist $\varphi^h_{|Q} \in H^1(Q)$ und $\varphi^h_{|Q\cap\Omega^-} \equiv 0$. Damit ist

$$\begin{aligned}
\|\varphi^h\|^2_{H^\nu(Q)} &= \underbrace{\|\varphi^h\|^2_{H^\nu(Q\cap\Omega^-)}}_{=0} + \|\varphi^h\|^2_{H^\nu(Q\cap\Omega^+)}\\
&\asymp \|\tilde{\varphi}^h\|^2_{H^\nu(Q^\star)} \preceq \operatorname{meas}(Q^\star)h^{4-2\nu}\\
&\asymp \operatorname{meas}(\Phi(Q^\star))h^{4-2\nu} \asymp \operatorname{meas}(Q)h^{4-2\nu}, \quad \nu = 0,1.
\end{aligned}$$

Damit ist die zweite Ungleichung 6.32 gezeigt. □

6.2. Satz vom Jackson-Typ für Funktionen mit singulären Gradienten

Mit 6.1.1,6.1.7, 6.23 und 6.1.8 haben wir nun alle Hilfsmittel zusammen um zu zeigen, dass der Raum $u_\Gamma^h \in \mathbb{B}^{1,2}_{w,\chi_\delta,h}(\Omega)$ für Funktionen aus $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^5(\Omega^+) \cap H^5(\Omega^-)$ die optimale Approximationskraft in der H^1-Norm besitzt.

Satz 6.2.1 (Jackson Ungleichung für Funktionen mit singulären Gradienten) *Es sei $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^5(\Omega^+) \cap H^5(\Omega^-)$. Dann existiert ein Interfacespline*

$$u_\Gamma^h \in \mathbb{B}^{1,2}_{w,\chi_\delta,h}(\Omega),$$

mit

$$\|u - u_\Gamma^h\|_{H^1(\Omega)} = \mathcal{O}(h). \tag{6.44}$$

Beweis: Nach dem Zerlegungssatz 6.1.1 existieren Funktonen $u^\star \in H_0^5(\Omega), v \in H^4(\Omega)$ und $\chi_\delta = \tilde{\chi_\delta} \circ \Phi^{-1} \in H_0^1(\Omega) \cap C^2(\Omega^+)$, mit denen sich u durch

$$u = u^\star + \chi_\delta v$$

darstellen lässt. Hierbei ist Φ (vgl. 5.11) der kanonische Diffeomorphismus aus Abschnitt 5.1.2, mit dem der Streifen $S_\delta := S_\delta(\Gamma)$ auf das Rechteck

$$\tilde{S}_\delta := \Phi^{-1}(S_\delta) \tag{6.45}$$

und das Interface Γ auf $\tilde{\Gamma} = [0, L]$ abgebildet wird. Der Parameter δ sei hier so gewählt. dass die Fortsetzung von Φ auf den Streifen $S_{\delta^\star} := \{x \in \Omega : \mathrm{dist}(x, \Gamma) < \delta^\star\}$ mit einem $\delta^\star > \delta$ glatt ist, siehe auch 6.26. Die auf $S_\delta, S_\delta^\star$ transformierten Größen kennzeichnen wir im Folgenden mit dem $\tilde{}$-Symbol. So schreiben wir z.B. für die transformierten Funktionen

$$\tilde{v} := v \circ \Phi, \quad \tilde{\Psi} := (\chi_\delta \circ \Phi) \cdot \tilde{v}.$$

Mit Hilfe der periodischen B-Splines $\{b_{k,h}^2\}_{k \sim \tilde{\Gamma}}$ aus 5.17 und der dualen Basis $\{\lambda_{k,h}^2\}_{k \sim \tilde{\Gamma}}$ 6.10 bilden wir

$$\Xi_h^2 \tilde{v}(0, \cdot) := \sum_{k \sim \tilde{\Gamma}} \left(\lambda_{k,h}^2, \tilde{v}(0, \cdot)\right)_{L^2(\mathrm{supp} b_{k,h}^2)} b_{h,k}^2(t) \in C^1(\tilde{\Gamma}) \tag{6.46}$$

und daraus den gewichteten Quasi-Interpolanten der Ordnung 2

$$\tilde{\Psi}^h(s,t) := \begin{cases} \tilde{\chi}_\delta(s,t) \cdot \Xi_h^2 \tilde{v}(0,t) & \text{für} \quad (s,t) \in \tilde{S}_{\delta^\star} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Nach Satz 6.1.8, 6.30 gilt dann für den Fehler $e^h := \Psi - \Psi^h = \chi_\delta v - \tilde{\Psi}^h \circ \Phi^{-1}$:

$$e^h \in H_0^1(\Omega) \cap C^\infty(\Omega^-) \cap C^2(\Omega^+).$$

Mit dem weB-Projektor $\mathcal{Q}_h^1 : L^2(\Omega) \longrightarrow w^e\mathbb{B}_h^1(\Omega)$,

$$\mathcal{Q}_h^1 u = \sum_{k \sim \Omega} \left(u, \Lambda_{k,h}^1\right)_{L^2(\Omega)} B_{h,k}^1$$

aus 6.18 setzen wir

$$u_\Gamma^h := \mathcal{Q}_h^1 u^\star + \Psi^h + \mathcal{Q}_h^1(\Psi - \Psi^h). \tag{6.47}$$

Offenbar ist

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_h^1 u^\star &\in w^e \mathbb{B}_h^1(\Omega) \\ \Psi^h = \tilde{\Psi}^h \circ \Phi &\in \chi \mathbb{B}_h^2(S_\delta) \\ \mathcal{Q}_h^1(\Psi - \Psi^h) &\in w^e \mathbb{B}_h^1(\Omega) \end{aligned} \tag{6.48}$$

woraus wir

$$u_\Gamma^h \in \mathbb{B}_{w,\chi_\delta}^{1,2}(\Omega) = w^e \mathbb{B}^1(\Omega) \oplus \chi \mathbb{B}^2(S_\delta)$$

erhalten. Damit folgt

$$\begin{aligned} \|u - u_\Gamma^h\|_{H^1(\Omega)} &= \|u^\star - \mathcal{Q}_h^1 u^\star + \Psi - \Psi^h - \mathcal{Q}_h^1(\Psi - \Psi^h)\|_{H^1(\Omega)} \\ &\leq \underbrace{\|u^\star - \mathcal{Q}_h^1 u^\star\|_{H^1(\Omega)}}_{=\mathrm{I}} + \underbrace{\|e^h - \mathcal{Q}_h^1 e^h\|_{H^1(\Omega)}}_{=\mathrm{II}}. \end{aligned} \tag{6.49}$$

Aufgrund der Glattheit von $u^\star$ auf Ω erhalten wir wegen des Jackson-Satzes für weB-Splines 6.1.6 für I.

$$\|u^\star - \mathcal{Q}_h^1 u^\star\|_{H^1(\Omega)} \leq C_{\Omega,w} h \|u^\star\|_{H^2(\Omega)}. \tag{6.50}$$

Das bedeutet, dass die Konvergenzordnung nur noch von II. abhängt.

Dazu betrachten wir jetzt e^h auf jeder für das Gebiet relevanten Gitterzelle $Q \sim \Omega$. Sei dazu $Q' = \cup_{j \in I(Q)} \mathrm{supp} B_{j,h}^1 \subset \Omega$ der Support aller für Q relevanten weB-Splines und $\tilde{Q}$ ein minimales Quadrat, welches Q' beinhaltet. Wir machen eine Fallunterscheidung nach der Lage von $\tilde{Q}$.

(i) $\tilde{Q} \subset \Omega^-$. Dann folgt wegen $Q, Q' \subset \Omega^-$ und $e_{h|Q'} = 0$

$$\|e^h - \mathcal{Q}_h^1 e^h\|_{H^1(Q)} \leq \underbrace{\|e^h\|_{H^1(Q)}}_{=0} + \|\mathcal{Q}_h^1 e_h\|_{H^1(Q)} \underbrace{\preceq}_{6.19} h^{-1} \|e^h\|_{L^2(Q')} = 0. \tag{6.51}$$

(ii) $\tilde{Q} \subset \mathbb{R}^2 \setminus \Omega^-$. Wir setzen $\rho^h := e^h_{|\Omega^+}/w$ und $\tilde{\rho}^h := \mathcal{E}\rho^h$ für die Calderon-Stein Fortsetzung von Ω^+ auf $\mathbb{R}^2$. Aus Satz 6.23 folgt dann, wenn wir $\ell = 1$ und $m = 2$ setzen:

$$\|e^h - \mathcal{Q}_h^1 e^h\|_{H^1(Q \cap \Omega^+)} \preceq h \left(\|e^h\|_{H^2(\tilde{Q} \cap \Omega^+)} + \|\tilde{\rho}^h\|_{H^1(\tilde{Q})} \right), \tag{6.52}$$

(iii) $\tilde{Q} \cap \Gamma \neq \emptyset$. In diesem Fall ist $e^h_{|\tilde{Q}} \in H^1(\tilde{Q})$. Wir benutzen 6.32 aus der Hilfsabschätzung 6.1.8 sowie die Standarabschätzung für den Projektor $\mathcal{Q}^1_h$ aus 6.19

$$\begin{aligned}
\|e^h - \mathcal{Q}^1_h e^h\|_{H^1(Q)} &\leq \|e^h\|_{H^1(Q)} + \|\mathcal{Q}^1_h e^h\|_{H^1(Q)} \\
&\underbrace{\preceq}_{6.32,6.19} h \cdot \mathrm{meas}(\tilde{Q})^{1/2} + h^{-1} \underbrace{\|e^h\|_{L^2(\tilde{Q})}}_{\preceq h^2 \mathrm{meas}(\tilde{Q})^{1/2}, 6.32} \\
&\preceq h \cdot \mathrm{meas}(\tilde{Q})^{1/2}. \qquad (6.53)
\end{aligned}$$

Durch Summieren über alle $Q \sim \Omega$ erhalten wir mit den bisherigen Ergebnissen

$$\begin{aligned}
\|e^h - \mathcal{Q}^1_h e^h\|^2_{H^1(\Omega)} &= \sum_{Q\sim\Omega} \|e^h - \mathcal{Q}^1_h e^h\|^2_{H^1(\Omega\cap Q)} \leq \sum_{\substack{Q\sim\Omega \\ \tilde{Q}\subset\Omega^-}} \underbrace{\|e^h - \mathcal{Q}^1_h e^h\|^2_{H^1(\Omega\cap Q)}}_{=0,6.51} \\
&+ \sum_{\substack{Q\sim\Omega \\ \tilde{Q}\subset\mathbb{R}^2\setminus\Omega^-}} \|e^h - \mathcal{Q}^1_h e^h\|^2_{H^1(\Omega^+\cap Q)} + \sum_{\substack{Q\sim\Omega \\ \tilde{Q}\cap\Gamma\neq\emptyset}} \|e^h - \mathcal{Q}^1_h e^h\|^2_{H^1(\Omega\cap Q)} \\
&\underbrace{\preceq}_{6.52,6.53} \underbrace{h^2 \sum_{\substack{Q\sim\Omega \\ \tilde{Q}\subset\mathbb{R}^2\setminus\Omega^-}} \left(\|e^h\|^2_{H^2(\Omega^+\cap Q)} + \|\tilde{\rho}^h\|^2_{H^1(\tilde{Q})}\right)}_{=:\Sigma_1} + \underbrace{h^2 \sum_{\substack{Q\sim\Omega \\ \tilde{Q}\cap\Gamma\neq\emptyset}} \mathrm{meas}(\tilde{Q})}_{=:\Sigma_2}
\end{aligned}$$

Da sich die beteiligten Quader nur endlich oft überlappen können wir die zweite Summe abschätzen:

$$\Sigma_2 \preceq \mathrm{meas}(\Omega)$$

und weil $\Omega' := \bigcup\{Q \cap \Omega \sim \Omega : \tilde{Q} \subset \mathbb{R}^2 \setminus \Omega^-\} \subset \Omega^+$, folgt außerdem mit Calderon-Stein 1.2.6

$$\Sigma_1 \preceq \left(\|e^h\|^2_{H^2(\Omega')} + \|\rho^h_+\|^2_{\mathbb{R}^2}\right) \preceq \|e^h\|^2_{H^2(\Omega^+)} \preceq \mathrm{meas}(\Omega), \qquad (6.54)$$

und wir haben

$$\|e^h - \mathcal{Q}^1_h e^h\|^2_{H^1(\Omega)} = \mathcal{O}(h^2)$$

gezeigt. In Verbindung mit 6.50 und 6.49 folgt die Behauptung. □

6.2.1. Bemerkung zu möglichen Verallgemeinerungen

- Abschwächung der Glattheitsvoraussetzungen:

  Für unsere Beweistechnik ist etwas Glattheit von u auf den Teilgebieten $\Omega^\pm$ notwendig, genauer benötigen wir $u^\pm \in H^5(\Omega^\pm)$. Dies liegt daran, dass wir für die L^∞-Abschätzung von v auf dem Interface $v \in C^2(\Omega)$ voraussetzen müssen. Möchte man eine Verallgemeinerung für $u^\pm \in H^2(\Omega^\pm)$ und Abschätzungen auf schwächere

Normen, so müsste man $v_{|\Gamma} \in H^{1/2}(\Gamma)$ und $v_{|\Gamma} \in H^{-1/2}(\Gamma)$ abschätzen, was eventuell mit verallgemeinerten Quasi-Interplatoren auf den Räumen $H^{1/2}(\Gamma), H^{-1/2}(\Gamma)$ gelingt.

- Höhere Konvergenzordnung:

  Der nahe liegende Gedanke, dass man bei glatten Funktionen Quasi-Interpolatoren höherer Ordnung benutzt um höhere Konvergenzordnungen zu erhalten funktioniert leider nicht so einfach. Wie man aus den Abschätzungen 6.43 erkennt, hängt die Konvergenzordnung neben der Approximation des glatten Teils $u^\star$ auf Ω durch den weB-Projektor und der Quasi-interpolation von $v_{|\Gamma}$ auf dem Interface noch entscheidend von der Gewichtsfunktion χ_δ auf dem Streifen S_h ab.

6.3. Finite Elemente Analysis mit Interfacesplines

Wir wollen den Raum

$$\mathbb{B}^{n,n_\Gamma}_{w,\chi_\delta,h}(\Omega) = \operatorname{span}\{B^n_{h,k}, \Psi^{n_\Gamma}_{h,\nu}\}_{k\sim\Omega,\nu\sim\Gamma}$$

als Ritz-Galerkin-Ansatzraum zur Approximation von $2d$-Interfaceproblemen nutzen.

Hierbei beschränken wir uns auf das in 4.1 analysierte Modellproblem: Finde $u \in H^1_0(\Omega)$, so dass

$$a_\alpha(u,v) = \ell_f(v) \quad \forall v \in H^1_0(\Omega). \tag{6.55}$$

Hierbei sind $\Omega^\pm$ wieder die durch das Interface Γ getrennten Gebiete, $f \in L^2(\Omega)$,

$$\alpha(x) = \begin{cases} \alpha^+ & \text{für} \quad x \in \Omega^- \\ \alpha^- & \text{für} \quad x \in \Omega^+, \end{cases} \quad \alpha^\pm \in \mathbb{R}^+, \alpha^+ \neq \alpha^-, \tag{6.56}$$

stückweise konstante Koeffizienten und

$$\begin{aligned} a_\alpha(u,v) &:= \int_\Omega \alpha \nabla u \nabla v \, dx, \\ \ell_f(v) &:= \int_\Omega f v \, dx. \end{aligned}$$

6.3.1. $\mathbb{B}^{n,n_\Gamma}_{w,\chi_\delta,h}(\Omega)$ als Ansatzraum

Da nach Konstruktion $\mathbb{B}^{n,n_\Gamma}_{w,\chi_\delta,h}(\Omega) \subset H^1_0(\Omega)$ ist, gilt für die Lösung u des Interfaceproblems natürlich

$$a_\alpha(u,v^h) = \ell_f(v^h), \quad \forall v^h \in \mathbb{B}^{n,n_\Gamma}_{w,\chi_\delta,h}(\Omega).$$

Ersetzen wir u durch ein mit den Koeffizienten $U = (u_k)_{k\sim\Omega} \in \mathbb{R}^{|\{k\sim\Omega\}|}$, $\sigma = (\sigma_\nu)_{\nu\sim\Gamma} \in \mathbb{R}^{|\{\nu\sim\Gamma\}|}$ gebildeten Spline

$$u^h = \sum_{k\sim\Omega} u_k B^n_{h,k} + \sum_{\nu\sim\Gamma} \sigma_\nu \Psi^{n_\Gamma}_{h,\nu}$$

und testen wir mit $v^h \in \left\{B^h_k\right\}_{k\sim\Gamma} \cup \left\{\Phi^h_\nu\right\}_{\nu\sim\Gamma}$, so erhalten wir ein lineares Gleichungsstyem:

$$\begin{aligned}
\sum_{k\in\Omega} u_k a_\alpha(B^n_{h,k}, B^n_{h,\ell}) + \sum_{\nu\in\Gamma} \sigma_\nu a_\alpha(\Psi^{n_\Gamma}_{h,\nu}, B^n_{h,\ell}) &= \ell_f(B^n_{h,\ell}), \quad \ell \sim \Omega, \\
\sum_{k\in\Omega} u_k a_\alpha(B^n_{h,k}, \Psi^{n_\Gamma}_{h,\mu}) + \sum_{\nu\in\Gamma} \sigma_\nu a_\alpha(\Psi^{n_\Gamma}_{h,\nu}, \Psi^{n_\Gamma}_{h,\mu}) &= \ell_f(\Psi^{n_\Gamma}_{h,\mu}), \quad \mu \sim \Gamma.
\end{aligned}$$

Die zugehörige Galerkin-Matrix besteht somit aus vier Blöcken

$$G^h_\Gamma = \begin{pmatrix} G^h_{11} & G^h_{12} \\ G^h_{21} & G^h_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(|k\sim\Omega|+|\nu\sim\Gamma|)\times(|\{\nu\sim\Omega\}|+|\{\mu\sim\Gamma\}|)}$$

mit

$$\begin{aligned}
G^h_{11} &= a_\alpha(B^n_{h,k}, B^n_{h,\ell})_{k,\ell\sim\Omega} \in \mathbb{R}^{|\{k\sim\Omega\}|^2} \\
G^h_{12} &= a_\alpha(\Psi^{n_\Gamma}_{h,\nu}, B^n_{h,\ell})_{\nu\sim\Gamma,\ell\sim\Omega} \in \mathbb{R}^{|\{\nu\sim\Gamma\}|\times|\{\ell\sim\Omega\}|} \\
G^h_{21} &= \left(G^h_{12}\right)^\top \in \mathbb{R}^{|\{k\sim\Omega\}|\times|\{\nu\sim\Gamma\}|} \\
G^h_{22} &= a_\alpha(\Psi^{n_\Gamma}_{h,\nu}, \Psi^{n_\Gamma}_{h,\mu})_{\nu\sim\Gamma,\mu\sim\Gamma} \in \mathbb{R}^{|\{\nu\in\Gamma\}|\times|\{\mu\in\Gamma\}|}
\end{aligned}$$

und damit lässt sich das System 6.57 durch

$$G^h_\Gamma \begin{pmatrix} (u_k)_{k\sim\Omega} \\ \\ (\sigma_\nu)_{\nu\in\Gamma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ell_f(B^n_{h,\ell})_{\ell\sim\Omega} \\ \\ \ell_f(\Psi^{n_\Gamma}_{h,\mu})_{\mu\sim\Gamma} \end{pmatrix} \tag{6.57}$$

ausdrücken.

Die eindeutige Lösbarkeit des Galerkin-Systems folgt aus dem nächsten Lemma, welches von unabhängingen Interesse ist:

Lemma 6.3.1 (Positive Definitheit)
Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet, $V^h := \operatorname{span}\{\phi^h_i\}_{i=1}^{n_h} \subset H^1_0(\Omega)$, $\dim V^h = n_h$ und $a_\alpha : H^1_0(\Omega) \times H^1_0(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$a_\alpha(u,v) := \int_\Omega \alpha \nabla u \nabla v dx$$

mit elliptischen Leitkoeffizienten $\alpha \in [L^\infty(\Omega)]^d$. Dann ist die zugehörige Galerkin-Matrix

$$G^h := a_\alpha(\phi^h_i, \phi^h_j)_{i,j=1,\dots,n_h}$$

symmetrisch und positiv definit.

Beweis: Die Symmetrie von G^h folgt aus der Symmetrie der Bilinearform a_α. Es sei $U = (U_1, ..., U_{n_h}) \in \mathbb{R}^{n_h} \setminus \{0\}$ und $u^h = \sum_{i=1}^{n_h} U_i \phi_i^h$.

$$\begin{aligned} U^\top G^h U &= \sum_{i=1}^{n_h} \sum_{j=1}^{n_h} a_\alpha(\phi_i^h, \phi_j^h) U_i U_j \\ &= a_\alpha(\sum_{i=1}^{n_h} U_i \phi_i^h, \sum_{j=1}^{n_h} U_j \phi_j^h) = a_\alpha(u^h, u^h) \\ &\geq \epsilon |\nabla u^h|_1^2 \underbrace{\geq}_{\text{Poincaré } 1.22} \epsilon \|u^h\|_{L^2(\Omega)}^2 \end{aligned}$$

Die vorletzte Abschätzung folgt aus der gleichmäßigen Elliptizität des Koeffizienten α 3.3 mit einer Elliptizitätskonstanten $\epsilon > 0$. Da $\{\phi_i^h\}_{i=1}^{n_h}$ linear unabhängig sind und $U \neq 0$ ist, folgt $\|u^h\|_{L^2(\Omega)}^2 > 0$ und damit die Behauptung. □

Daraus ergibt sich die eindeutige Lösbarkeit des Galerkin Systems der schwachen Formulierung des Interfaceproblems einfach und ohne dass wir auf die Blockstruktur von G_Γ^h zurückgreifen müssen.

Satz 6.3.1 (Eindeutige Lösbarkeit des Galerkin-Systems)
Das zu der schwachen Formulierung des Interfaceproblems 6.55 gehörige Galerkin-System 6.57 ist eindeutig lösbar.

Beweis: Da die Menge $\left\{B_k^h\right\}_{k\sim\Gamma} \cup \left\{\Phi_\nu^h\right\}_{\nu\sim\Gamma}$ nach 5.2.2 linear unabhängig ist, folgt die Behauptung sofort aus dem vorherigen Lemma 6.3.1, wenn wir speziell $V^h := \mathbb{B}_{w,\chi_\delta,h}^{n,n_\Gamma}(\Omega)$ wählen und die Basisfunktionen geeignet umnummerieren. □

Die mit den Koeffizienten $(u_{k\sim\Omega}, \sigma_{\nu\sim\Gamma})$ gebildete Lösung $u_\Gamma^h \in \mathbb{B}_{w,\chi_\delta,h}^{n,n_\Gamma}(\Omega)$ bezeichnen wir als die *Ritz-Galerkin-Approximation* an die Lösung des Interfaceproblems.

6.3.2. H^1-Fehlerabschätzung

Der von uns konstruierte Ansatzraum $\mathbb{B}_{w,\chi_\delta,h}^{n,n_\Gamma}(\Omega)$ besitzt für $(n, n_\Gamma) = (1, 2)$ gemessen in der H^1-Norm nach dem Jackson-Satz 6.2.1 des letzen Abschnitts für Funktionen $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^5(\Omega^+) \cap H^5(\Omega^-)$ die optimale Approximationskraft. Daraus folgt nach dem Céa-Lemma sofort die optimale Fehlerordung für den Ritz-Galerkin-Approximation mit Interfacesplines:

Satz 6.3.2 (H^1-Fehler bei Approximation mit Interfacesplines)
Es sei $f \in L^2(\Omega) \cap H^3(\Omega^-) \cap H^3(\Omega^-)$ und $u_\Gamma^h \in \mathbb{B}_{w,\chi_\delta,h}^{1,2}(\Omega)$ die Ritz-Galerkin-Approximation an die Lösung u des Interfaceproblems. Dann gilt

$$\|u - u_\Gamma^h\|_{H^1(\Omega)} = \mathcal{O}(h). \tag{6.58}$$

Mit Interfacesplines lassen sich somit Interfaceprobleme auf glatten Rändern mit auf $\Omega^\pm$ glatten Koeffizienten α und auf $\Omega^\pm$ stetigen rechten Seiten f optimal in der H^1-Norm approximieren.

Teil IV.

Numerik

„Laplace's Equation: The Fruit Fly for the Numerical Analysist“

(Ronald deVore)

7. Implementierung

Bei der konkreten Umsetzung der von uns entwickelten Theorie in ein Computerprogramm ergeben sich eine Reihe von numerischen und technischen Fragestellungen, auf die wir in den nächsten Abschnitten kurz eingehen möchten. Für weB-Splines und glatte Approximationsprobleme in $2d$ (d.h. die zu approximierende Lösung ist hinreichend glatt) gibt es bereits eine in Matlab programmierte Softwarebibliothek, die `WEB-Toolbox` [6]. Bei der Assemblierung des weB-Blocks der Galerkin-Matrix können wir deshalb auf bereits implementierte Algorithmen zurückgreifen. Die theoretischen Hintergründe der Routinen welche in der `Toolbox` für glatte Probleme programmiert worden sind, wurden z.B. in [44] und [87] vorgestellt, weshalb wir uns diesbezüglich kurz fassen.

7.1. Gebietsmodellierung

Wir gehen davon aus, dass wir den Rand $\partial\Omega$ und das Interface Γ durch glatte, parametrisierte selbstdurchdringungsfreie Kurven $\gamma_{\partial\Omega} : I_{\partial\Omega} \subset \mathbb{R} \longrightarrow \partial\Omega$, $\gamma : [0, L] \longrightarrow \Gamma$ darstellen können. Das Interface sei hierbei nach Bogenlänge parametriesiert, d.h. $\|\gamma'\| = 1$. Konkret lassen sich beispielsweise glatte geschlossene Kurven durch NURBS (Non$u$niform Rational B-Splines) beschreiben und flexibel modellieren, insbesondere lassen sich Kegelschnitte durch NURBS exakt darstellen, siehe für Details [48]. Eine beliebige NURBS-Kurve kann nun wiederum durch stückweise zusammengesetzte rationale Bézierkurven dargestellt werden. Dies bringt einige programmiertechnische Vorteile, da man nur Routinen implementieren muss die auf Polynomen operieren. Eine rationale Bézierkurve γ vom Grad n im $\mathbb{R}^2$ wird durch Kontrollpunkte $C_k \in \mathbb{R}^2$ und Gewichte $\omega_k \in \mathbb{R}^+, k = 0, ..., n$ mit Hilfe der Bernstein-Polynome $\beta_k^n : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$,

$$\beta_k^n(t) = \binom{n}{k} (1-t)^{n-k} t^k, \quad k = 0, ..., n \tag{7.1}$$

durch

$$\gamma(t) := \frac{\sum_{k=0}^{n} C_n \omega_n \beta_k^n(t)}{\sum_{k=0}^{n} \omega_n \beta_k^n(t)} \tag{7.2}$$

parametrisiert. Wir gehen also im Folgenden davon aus, dass wir den Rand und das Interface entweder als stückweise zusammengesetzte rationale Bézierkurven oder, falls möglich, als explizite algebraische Gleichungen implementiert haben. Da die Intergrationsroutinen zur Assemblierung der Galerkin-Matrix zellbasiert sind, benötigen wir eine Klassifizierung der Lagebeziehung der Zellen des B-Spline Gitters Ω^h und des Gitters der Zusatzsplines Ω_Γ^h in Bezug zum Rechengebiet.

7.1.1. Zellklassifikation für B-Splines

Haben wir Ω durch Γ in $\Omega^{\pm}$ unterteilt, so legen wir ein uniformes Rechteckgitter $\Omega^h = \Omega^{h,n}$ mit Gitterweite h über das komplette Gebiet Ω. Die Größe und die Anzahl der Gitterzellen ist natürlich von der gewählten Gitterweite h und dem Grad n der Tensorproduktsplines abhängig. Es werden hierbei zwangsläufig Zellen erzeugt, die für die weitere Berechnung keine Rolle spielen (z.B. Zellen die zwar zum Träger eines relevanten Splines gehören, die aber komplett ausserhalb des Gebiets liegen und die keinen für Ω relevanten Splinekoeffizienten zugeordnet sind). Diese werden um eine einfache Datenstruktur zu erhalten trotzdem in der Indexliste mitgeführt und die entsprechenden B-Splinekoeffizenten auf 0 gesetzt.

Wir klassifizieren die Zellen $Q \in \Omega^h$ (vergleiche 2.3.2), mit:

1. $Q \cap \partial\Omega \neq \emptyset$ als *Randzellen*,
2. $Q \cap \Gamma \neq \emptyset$ als *Interfacezellen*,
3. $Q \subset \Omega^{\pm}$ als *innere* Zellen,
4. $Q \cap \Omega = \emptyset$ als *äußere* Zellen.

In der Grafik haben wir exemplarisch jeweils die Linke untere Ecke mit $\square$ für eine Randzelle, mit $\bullet$ für eine Interfacezelle, mit $\triangle$ für eine inneren Zelle und mit $\circ$ für eine äußeren Zelle markiert.

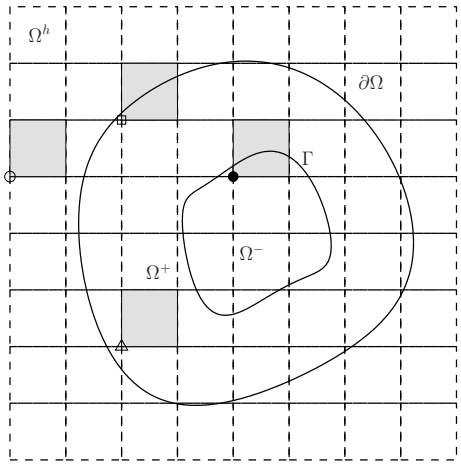

Abbildung 7.1.: Gebiet mit klassifizierten Zellen

Details zu Algorithmen der Zellklassifikation für Rand, inneren und äußeren Zellen findet man detailliert in [44; 87] weshalb wir hier nicht weiter darauf eingehen wollen. Die Interfacezellen können mit den gleichen Routinen markiert werden. Mit dieser Markierung kann man auch jeden für das Gebiet relevanten B-Spline $b^n_{k,h}, k \sim \Omega$ klassifizieren um aus der TPB-Splinebasis die weB-Basis zu erzeugen. Besitzt der Träger $\operatorname{supp} b^n_{k,h}$ mindestens eine innere Zelle und schneidet keine Zelle des Trägers das Interface, so ist der B-Spline ein

innerer B-Spline. Besteht der Träger nur aus äußeren und Randzellen, so wird der B-Spline als äußerer B-Spline markiert. B-Splines deren Trägerzellen das Interface schneiden spielen keine gesonderte Rolle und brauchen deshalb für die weB-Basis nicht extra klassifiziert zu werden.

7.1.2. Gitter für Zusatzsplines

Für die Zusatzfunktionen benötigt man noch ein separates Gitter Ω_Γ^h auf dem Streifen

$$S_\delta = \left\{ x \in \Omega^+ : \operatorname{dist}(x, \Gamma) < \delta \right\}. \tag{7.3}$$

Hierbei ist $\delta > 0$ so gewählt, dass $S_\delta \Subset \Omega$ die Nearest-Point-Eigenschaft bezüglich Γ besitzt, siehe 5.1.1,5.1.2. Um die Besetzung der Galerkinmatrix klein zu halten und damit die Lösbarkeit des Systems zu gewährleisten, sollte man δ möglichst klein wählen. Allerdings zeigen numerische Tests, dass eine zu kleine Wahl von δ zu schlechteren Approximationen im Vergleich größer gewählten δ führen kann, siehe auch Abschnitt 8.2.5 aus Kapitel 8. Eine optimale Wahl von δ, d.h. die theoretische Bestimmung eines optimalen Werts ist wahrscheinlich eine schwierige Aufgabe, weshalb man hier auf heuristische Werte angewiesen ist. Wir nehmen an, dass $N_h := L/h \in \mathbb{N}$. Die Gitterzellen $Q_\mu^\Gamma, \mu = 0, ..., N_h$ lassen sich dann mit dem von Ω^- nach Ω^+ zeigenden Normalenvektor $\nu(t) = (-\gamma_2'(t), \gamma_1'(t))$ sehr einfach mit γ und den beiden Daten δ, N_h modellieren:

$$Q_\mu^\Gamma = \{x \in \Omega^+ : x = \gamma(t) + \nu(t)s, 0 \leq s \leq \delta, \mu h \leq t \leq (\mu + 1)h\}. \tag{7.4}$$

In der folgenden Skizze haben wir eine Gitterzelle Q_μ^Γ mit einem Punkt $\bullet$ markiert:

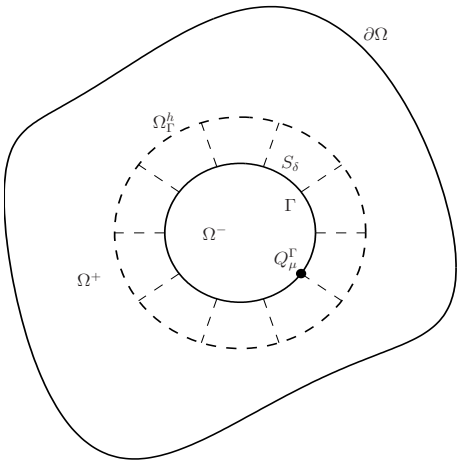

Abbildung 7.2.: Gitter Ω_Γ^h für die Zusatzsplines

7.2. Evaluierung der Basisfunktionen

Bei der Assemblierung des Galerkin-Systems sind die Basisfunktionen des Tensorprodukt-splineraums $\mathbb{B}_h^n(\Omega)$ sowie deren Gradienten an Punkten $(x, y) \in \Omega$ auszuwerten, weshalb

wir an effizienten Evaluierungsalgorithmen interessiert sind. Wir gehen zuerst in 7.2.1 kurz auf auf die Auswertung der weB-Splines ein, für eine ausführliche Behandlung verweisen wir auf [44]. In 5.1.2 haben wir das Gewicht χ_δ für die Zusatzsplines mit Hilfe einer Blendefunktion ζ definiert, ohne diese explizit Anzugeben. Wir holen das in 7.2.2 nach und gehen anschließend auf die Evaluierung der Zusatzsplines ein.

7.2.1. B-Splines

Bei den weB-Splines verzichtet man zunächst auf die Erweiterung und wertet nur die wB-Splines aus. Ist $w : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine hinreichend glatte Gewichtsfunktion und

$$w(x,y)b^n_{h,k}(x,y) = w(x,y)b^n_{h,k_1}(x)b^n_{h,k_2}(y), \quad k = (k_1,k_2) \sim \Omega \tag{7.5}$$

ein für das Gebiet relevanter wB-Spline, so ist wie man leicht verifiziert

$$\begin{aligned} \nabla w b^n_{h,k}(x,y) \quad = \quad & \Bigg(\frac{\partial w}{\partial x} b^n_{h,k}(x,y) + w(x,y) b^n_{h,k_2}(y) \frac{d}{dx} b^n_{h,k_1}(x), \\ & \frac{\partial w}{\partial_y} b^n_{h,k}(x,y) + w(x,y) b^n_{h,k_1}(x) \frac{d}{dy} b^n_{h,k_2}(y) \Bigg). \end{aligned} \tag{7.6}$$

Aufgrund der Tensorpoduktstruktur bietet sich somit der de Boor-Algorithmus [21] zur effizienten Auswertung der in 7.5 und 7.6 auftauchenden B-Splines an. Die Erweiterung erfolgt durch Multiplikation der Galerkinmatrix mit einer geeigneten Erweiterungsmatrix, worauf wir in 7.3.2 genauer eingehen werden. Wird $\partial\Omega$ durch eine algebraische Kurve repräsentiert bzw. etwas allgemeiner durch das Rvachev Funktionenkalkül, siehe 2.3.1 und [72] erzeugt, so gestaltet sich die Auswertung der Gewichtsfunktion w in Randnähe als problemlos, man muss nur die Funktionengleichung sowie den Gradienten von w implementieren. Bei Bézier-Darstellungen von $\partial\Omega$ ist eine explizite Angabe von w im Allgemeinen nicht möglich, man ist somit auf numerische Methoden für die Auswertung von $w, \partial_x w, \partial_y w$ in Randnähe angewiesen. Hierauf wollen wir an dieser Stelle nicht eingehen und verweisen für eine detaillierte Darstellung auf [44] 8.3.

7.2.2. Zusatzsplines

Die Zusatzsplines

$$\Psi^{n_\Gamma}_{\nu,h}(x,y) = \begin{cases} \tilde{\chi}_\delta\left(\Phi^{-1}(x,y)\right) \tilde{b}^{n_\Gamma}_{h,\nu}\left(\Phi^{-1}(x,y)\right) & \text{für} \quad (x,y) \in S_\delta \\ 0 & \text{für} \quad (x,y) \in \Omega \setminus S_\delta \end{cases}, \tag{7.7}$$

mit $\Phi : \tilde{S}_\delta \longrightarrow S_\delta \subset \Omega$,

$$(x,y) = \Phi(s,t) := \gamma(t) + s \cdot \nu(t), \tag{7.8}$$

wurden in 5.11 durch Tensorproduktbilung von univariaten Funktionen auf dem Rechteck $\tilde{S}_\delta = [0,\delta) \times [0,L)$ konstruiert. Die Abbildung Φ ist bei einem C^m-Interface ein C^{m-1} Diffeomorphismus und bildet $\tilde{S}_\delta$ diffeomorph auf den Streifen S_δ ab. Hierbei sind

$$\tilde{b}^n_{k,h}(s,t) = \tilde{b}^n_{k,h}(t), \quad k \sim \tilde{\Gamma},\ (s,t) \in [0,\delta) \times \tilde{\Gamma} \tag{7.9}$$

die von $\tilde{\Gamma} = [0, L)$ auf $\tilde{S}_\delta = [0, L) \times [0, \delta)$ fortgesetzten univariaten periodischen B-Splines 5.17 und

$$\tilde{\chi}_\delta(s,t) = \begin{cases} s & \text{für} \quad (s,t) \in [0,\delta^\star) \times \tilde{\Gamma} \\ s\zeta^m(s) & \text{für} \quad (s,t) \in [\delta^\star, \delta) \times \tilde{\Gamma} \end{cases}, \quad 0 < \delta^\star < \delta \tag{7.10}$$

eine auf $[0, \delta)$ univariate und ebenfalls auf $\tilde{S}_\delta$ fortgesetzte Gewichtsfunktion $\tilde{\chi}_\delta$ (vgl. 5.1.4). Für die Approximationstheorie war eine explizite Angabe der Blendefunktion ζ^m nicht notwendig. Wir setzen $\Delta\delta := \delta - \delta^\star$ und

$$\zeta^m(s) := \left(\frac{\delta - s}{\Delta\delta}\right)^{m+1} \sum_{i=0}^{m} \binom{m+i}{i} \left(\frac{s - \delta^\star}{\Delta\delta}\right)^i. \tag{7.11}$$

Für später notieren wir uns noch

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}\zeta^m(s) \quad := \quad & -\frac{(m+1)(\delta - s)^m}{(\Delta\delta)^{m+1}} \sum_{i=0}^{m} \binom{m+i}{i} \left(\frac{s-\delta^\star}{\Delta\delta}\right)^i \\ & + \frac{(\delta - s)^{m+1}}{\Delta\delta^{m+2}} \sum_{i=1}^{m} i \binom{m+i}{i} \left(\frac{s-\delta^\star}{\Delta\delta}\right)^{i-1}. \end{aligned} \tag{7.12}$$

Mit Induktion bestätigt man, dass $\zeta^m \in C^m(\mathbb{R})$, und zeigt elementar die geforderten Eigenschaften, d.h. $\zeta^m \preceq 1$ auf $[\delta^\star, \delta]$, geht an der Stelle $s = \delta^\star$ glatt in 1 über und wird an der Stelle δ glatt zu 0 fortgesetzt, vergleiche auch die Blendefunktion in [4] und Bild 5.5.

Ist $(x, y) \in \Omega \setminus S_\delta$, so ist $\Psi_{\nu,h}^{n_\Gamma}(x, y) = 0$, wir beschränken uns deshalb nur noch auf den Fall $(x, y) \in S_\delta$. Um einen Zusatzspline an solch einer Stelle auswerten zu können, benötigt man also die mit dem Randprojektor $\mathcal{P}_\Gamma : S_\delta \longrightarrow \Gamma$ 5.3, 5.14 darstellbare Umkehrabbildung $\Phi^{-1} : S_\delta \longrightarrow \tilde{S}_\delta$,

$$(s,t) = \Phi^{-1}(x,y) := (\mathrm{dist}((x,y),\Gamma), \gamma^{-1}(\mathcal{P}_\Gamma(x,y))).$$

Im Allgemeinen wird man also zu gegebenen $(x, y) \in S_\delta$ das Urbild (s, t) nicht direkt berechnen können. Mit Hilfe der Parametrisierung γ für das Interface und dem Normaleneinheitsvektor ν kann man aber, da auf S_δ die Nearest Point Eigenschaft 5.1.1 gilt, (s, t) numerisch bestimmen. Nach den Orthogonalitätsrelationen 5.7 ist

$$((x,y) - \gamma(t))(\gamma'(t)) = 0.$$

Dies ist eine nichtlineare Gleichung in der Variablen t, welche z.B. mit einem Newton-Typ Verfahren effizient gelöst werden kann und wegen 5.8 ist $s = \|(x, y) - \gamma(t)\|$. Neben den Funktionswerten benötigt man zum Aufstellen des Galerkinsystems noch die Werte von den Gradienten der Zusatzsplines. Wir schreiben im Folgenden $\Phi^{-1}(x, y) = (s(x, y), t(x, y))$ und zur Vereinfachung $\tilde{\Psi}_{h,\ell}^{n_\Gamma}(s, t) = \tilde{\chi}_\delta(s) \cdot \tilde{b}_{h,\ell}^{n_\Gamma}(t)$. Für die Komponenten des Gradienten

$$\nabla\Psi_{h,\ell}^{n_\Gamma}(x,y) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\Psi_{h,\ell}^{n_\Gamma}(x,y), \frac{\partial}{\partial y}\Psi_{h,\ell}^{n_\Gamma}(x,y)\right) \tag{7.13}$$

erhalten wir mit der allgemeinen Kettenregel nach etwas Rechnung

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}\Psi_{h,\ell}^{n_\Gamma}(x,y) &= \frac{\partial\tilde{\Psi}_{h,\ell}^{n_\Gamma}}{\partial s}(s,t) \cdot \frac{\partial}{\partial x}s(x,y) + \frac{\partial\tilde{\Psi}_{h,\ell}^{n_\Gamma}}{\partial t}(s,t) \cdot \frac{\partial}{\partial x}t(x,y), \\ \frac{\partial}{\partial y}\Psi_{h,\ell}^{n_\Gamma}(x,y) &= \frac{\partial\tilde{\Psi}_{h,\ell}^{n_\Gamma}}{\partial s}(s,t) \cdot \frac{\partial}{\partial y}s(x,y) + \frac{\partial\tilde{\Psi}_{h,\ell}^{n_\Gamma}}{\partial t}(s,t) \cdot \frac{\partial}{\partial y}t(x,y). \end{aligned}$$

Haben wir also $(s(x,y), t(x,y))$ numerisch bestimmt, so braucht man noch Module, welche in der Lage sind $\frac{\partial \tilde{\Psi}_{h,\ell}}{\partial s}(s,t), \frac{\partial \tilde{\Psi}_{h,\ell}}{\partial t}(s,t)$ sowie $\nabla s(x,y)$ und $\nabla t(x,y)$ berechnen zu können. Für die Ableitung der Gewichtsfunktion nach s erhalten wir mit 7.12

$$\frac{d}{ds}\tilde{\chi}_\delta(s) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad s \in (0, \delta^\star) \\ \zeta^m(s) + s\frac{d}{ds}\zeta^m(s) & \text{für} \quad s \in [\delta^\star, \delta) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} . \tag{7.14}$$

Auf dem Rechteck $\tilde{S}_\delta$ bekommen wir somit

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\Psi}^{n_\Gamma}_{h,\ell}}{\partial s}(s,t) &= \tilde{b}^{n_\Gamma}_{h,\ell}(t) \cdot \frac{\partial}{\partial s}\tilde{\chi}_\delta(s) \\ \frac{\partial \tilde{\Psi}^{n_\Gamma}_{h,\ell}}{\partial t}(s,t) &= \tilde{\chi}_\delta(s) \cdot \frac{\partial}{\partial t}\tilde{b}^{n_\Gamma}_{h,\ell}(t). \end{aligned} \tag{7.15}$$

Für die Auswertung der univariaten B-Splines $\tilde{b}^{n_\Gamma}_{h,\ell}, \frac{\partial}{\partial t}\tilde{b}^{n_\Gamma}_{h,\ell}$ in t nutzen wir wieder den de Boor-Algorithmus [21] und die Auswertung von $\tilde{\chi}_\delta, \frac{d}{ds}\tilde{\chi}_\delta$ in s lässt sich mit Hilfe der expliziten Gleichungen 7.11, 7.12 für $\zeta^m, \frac{d}{ds}\zeta^m$ einfach mit Polynomroutinen implementieren. Wege des Umkehrsatzes gilt für die Jacobimatrizen des Diffeomorphismus Φ

$$(J_\Phi)^{-1}(s,t) = J_{\Phi^{-1}}(x,y), \tag{7.16}$$

konkret

$$(-\nu(t)\partial_t\gamma(t) + s\partial_t\nu(t))^{-1} = \begin{pmatrix} \nabla s \\ \nabla t \end{pmatrix}(x,y). \tag{7.17}$$

Offenbar ist $\nabla s J_{\Phi^{-1}}(x,y) = (1,0)$. Die Normale ν und $\partial_t\gamma$ stehen aufeinander senkrecht, d.h. $\nu \cdot \partial_t\gamma = 0$ und wegen $\|\gamma'\| = 1$ folgt

$$-\nu(t)J_\Phi(s,t) = (1,0), \tag{7.18}$$

somit ist

$$\nabla s(x,y) = -\nu(t(x,y)). \tag{7.19}$$

Da wir zudem die Werte von $\nabla t(x,y)$ benötigen, invertiert man besser J_Φ, was bei einer 2×2-Matrix kein Problem ist. Wir setzen dazu

$$\phi(t,s) := \det J_\Phi(s,t) = -1 - s\left(\gamma_1'(t)\gamma_2''(t) + \gamma_1''(t)\gamma_2'(t)\right)$$

und erhalten daraus

$$\begin{pmatrix} \nabla s \\ \nabla t \end{pmatrix}(x,y) = \frac{1}{\phi(s,t)}\begin{pmatrix} \gamma_2'(t) + s\nu_2(t) & -\gamma_1'(t) - s\nu_1'(t) \\ -\partial_t\gamma(t)^\top & \end{pmatrix}, \tag{7.20}$$

was sich einfach implementieren lässt.

7.3. Assemblierungsalgorithmen

Die Galerkinmatrix G_Γ^h für das Ritz-Galerkin-System

$$G_\Gamma^h \begin{pmatrix} (u_k)_{k\sim\Omega} \\ \\ (\sigma_\nu)_{\nu\in\Gamma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ell_f(B_{h,\ell}^n)_{\ell\sim\Omega} \\ \\ \ell_f(\Psi_{h,\mu}^{n_\Gamma})_{\mu\sim\Gamma} \end{pmatrix}$$

des zweidimensionalen Modellproblems aus 6.3 besitzt nach 6.3.1 die folgende Gestalt

$$G_\Gamma^h = \begin{pmatrix} G_{1,1}^h & G_{1,2}^h \\ G_{2,1}^h & G_{2,2}^h \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(|k\sim\Omega|+|\nu\sim\Gamma|)\times(|\{\nu\sim\Omega\}|+|\{\mu\sim\Gamma\}|)} \tag{7.21}$$

mit den Blöcken

$$\begin{aligned} G_{1,1}^h &= a_\alpha(B_{h,k}^n, B_{h,\ell}^n)_{k,\ell\sim\Omega} \in \mathbb{R}^{|\{k\sim\Omega\}|^2} \\ G_{1,2}^h &= a_\alpha(\Psi_{h,\nu}^{n_\Gamma}, B_{h,\ell}^n)_{\nu\sim\Gamma,\ell\sim\Omega} \in \mathbb{R}^{|\{\nu\sim\Gamma\}|\times|\{\ell\sim\Omega\}|} \\ G_{2,1}^h &= \left(G_{1,2}^h\right)^\top \in \mathbb{R}^{|\{k\sim\Omega\}|\times|\{\nu\sim\Gamma\}|} \\ G_{2,2}^h &= a_\alpha(\Psi_{h,\nu}^{n_\Gamma}, \Psi_{h,\mu}^{n_\Gamma})_{\nu\sim\Gamma,\mu\sim\Gamma} \in \mathbb{R}^{|\{\nu\in\Gamma\}|\times|\{\mu\in\Gamma\}|}. \end{aligned}$$

Bezeichnet für den Augenblick ϕ eine Größe die von den Basisfunktionen $B_{h,\ell}^n, \ell \sim \Omega$, $\Psi_{h,\nu}^{n_\Gamma}, \nu \sim \Gamma$ der rechten Seite f und den springenden Koeffizienten $\alpha^\pm$ der elliptischen Bilinearform abhängen kann, so sind zur Assemblierung von G_Γ^h und der rechten Seite des Galerkinsystems zweidimensionale Integrale der Form

$$\int_{\Omega\cap\operatorname{supp}\phi} \phi(x,y)\,dxdy$$

auszuwerten. In 7.3.1 stellen wir eine Methode vor, wie wir solche Integrale mit einer Gaußquadratur, welche die besondere Geometrie des zugundeliegenden Gebiets des Interfaceproblems berücksichtigt, auf Zellen hinreichend genau berechnen können. Die Assemblierungsalgorithmen für die Blöcke der Galerkinmatrix betrachten wir in 7.3.2, 7.3.3 und 7.3.4 separat. Für solche Blocksysteme bietet sich neben den bekannten *cg*-Lösern insbesondere das Schur-Komplement-Verfahren an, auf das wir kurz in 7.4.2 eingehen.

7.3.1. Gaußquadratur auf Quadern

Da die Basis von $\mathbb{B}_{w,\chi_\delta,h}^{n,n_\Gamma}(\Omega)$ aus Funktionen mit lokalen Trägern besteht, nutzen wir zur Auswertung der bei der Assemblierung auftretenden Integrale im Wesentlichen eine Gaußquadratur auf Quadern aus dem $\mathbb{R}^2$ bzw. auf Teilgebieten, die glatt auf Quader transformiert werden können. Den Schnitt zweier beteiligter Träger von Basisfunktionen können wir nämlich immer als Summe von Zellen Q_ℓ sowie von Teilgebieten von Zellen auffassen, welche wir auf einen Referenzquader transormieren können. Eine Gaußquadraturformel auf einen Quader erhält man leicht durch Tensorproduktbildung der ensprechenden wohlbekannten eindimensionalen Gaußquadratur, welche wir schnell rekapitulieren. Für

eine univariate Funktion $\phi : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ erhält man nach der Wahl von Stützstellen $\tau_i \in (-1,1), i = 1,...,n$ und positiven Gewichten $\omega_i > 0, i = 0,...,n$ (Gaußparameter) eine Approximation an das Integral über $[-1,1]$:

$$\int_{-1}^{1} \phi(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} \omega_i \phi(\tau_i). \tag{7.22}$$

Mit Hilfe von Orthogonalpolynomen können die Stützstellen und Gewichte so gewählt werden, dass 7.22 für $p \in \mathcal{P}_{2n-1}(-1,1)$ exakt ist, vgl. [38]. Für die meisten Orthogonalpolynome existieren tabellierte Werte, siehe z.B. [80]. Durch die Abbildungen $\tilde{\omega}_i = (b-a)\omega_i/2$ und $\tilde{\tau}_i = a + (b-a)(\tau_i + 1)/2$ lassen sich die Gaußparameter auch auf beliebige Intervalle $[a,b]$ transformieren. Es sei nun $Q = [a,b] \times [c,d]$ sowie $\phi : Q \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $\tau_i \in (a,b), i = 0,..,n,\ \sigma_j \in (c,d), j = 0,...,m$ und $\tilde{\omega}_i^\tau, \tilde{\omega}_j^\sigma > 0, i = 1,...,n,\ j = 0,...,m$ so gewählt, dass $\int_a^b p(t)\,dt = (b-a)/2 \sum_{i=1}^n \omega_i^\tau p(\tilde{\tau}_i)$ für $p \in \mathcal{P}_{2n-1}(a,b)$ und $\int_c^d p(t)\,dt = (d-c)/2 \sum_{i=1}^m \omega_j^\sigma p(\tilde{\sigma}_j)$ für $p \in \mathcal{P}_{2m-1}(c,d)$ ist. Dann ist

$$\int_a^b \int_c^d \phi(x,y)\,dxdy \approx \frac{(b-a)(d-c)}{4} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \omega_i^\tau \omega_j^\sigma \phi(\tilde{\tau}_i, \tilde{\sigma}_j) \tag{7.23}$$

für Polynome $p \in \mathcal{P}_{(2n,2m)}(Q)$ exakt, siehe z.B. [38], Satz 6.5. Für $\phi \in C^{(2n,2m)}(Q)$ gilt mit $\mathcal{Q}^{(n,m)}\phi := \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \tilde{\omega}_i^\tau \tilde{\omega}_j^\sigma \phi(\tilde{\tau}_i, \tilde{\sigma}_j)$ außerdem die Fehlerabschätzung

$$\left| \int_Q \phi(x,y)\,dxdy - \mathcal{Q}^{(n,m)}\phi \right| \leq \max_{\ell \in \{n,m\}} \left\{ \frac{2^{2\ell}}{\binom{2\ell}{\ell}(2\ell)!} \right\} \left(\|\partial_x^{2n}\phi\|_{L^\infty(Q)} + \|\partial_y^{2m}\phi\|_{L^\infty(Q)} \right), \tag{7.24}$$

was man mit Hilfe von wohlbekannten univariaten Fehlerabschätzungen für die Gaußquadratur [38] und verallgemeinerten Tensorprodukt-Fehlerabschätzungen, vgl. [34], zeigt. Für glatte Funktionen kann man eine schnelle Konvergenz erwarten, siehe z.B. [38], Kap.6 für ein univariates Beispiel. Integrieren wir also über eine Zelle $Q \subset \Omega^\pm$, so können wir die Stützstellen und Gewichte nach bekannten univariaten Formeln [38] berechnen und die Tensorproduktformel 7.23 direkt anwenden. Es sei $Q_\ell, \ell \sim \Omega$ eine beliebige relevante Zelle des Rechengitters. Bei der Assemblierung der Blöcke $G_{1,1}^h$ und $G_{1,2}^h = (G_{2,1}^h)^\top$ der Galerkinmatrix für das Interfaceproblem können folgende Fälle auftreten

(a) $Q_\ell \cap \partial\Omega \neq \emptyset$

(b) $Q_\ell \cap \operatorname{supp} \Psi_{\nu,h}^{n_\Gamma}, \nu \sim \Gamma \neq \emptyset$

(c) $Q_\ell \cap \Gamma \neq \emptyset$.

Bei **(a)** und **(b)** könnte man ad hoc die Integranten einfach auf Q_ℓ durch Null fortsetzen, was aber zu einem gravierenden Genauigkeitsverlust der Quadratur führen kann. Man wird deshalb Routinen implementieren, welche Schnittgebiete geeignet subdividieren und auf Referenzquader transformieren können. Wir betrachten zuerst einen exemplarischen Fall aus **(a)** und setzen dabei $\Omega_\ell = Q_\ell \cap \Omega$. Bei hinreichend kleinen h kann man davon ausgehen, dass ∂Q_ℓ von $\partial\Omega$ nur in zwei Punkten geschnitten wird. Ist $\gamma_{\partial\Omega} : [0,h] \longrightarrow \partial\Omega \cap Q$ die lokale Parametrisierung des Randstücks $\partial\Omega \cap Q$, so ist $\theta : [0,h]^2 \longrightarrow Q \cap \Omega$ mit

$$\theta(s,t) = \left(\ell_1 + \frac{v\gamma_{\partial\Omega}(s)}{h}, \ell_2 + t \right), \quad \ell = (\ell_1, \ell_2) \tag{7.25}$$

ein glatter Diffeomorphismus. Damit erhalten wir mit der Funktionaldeterminante $\det J_\theta(s,t) = |\gamma(t)/h|$

$$\int_{Q_\ell \cap \Omega} \phi(x,y)\, dxdy = \int_0^h \int_0^h \phi(\theta(s,t)) |\gamma_{\partial\Omega}(t)/h|\, dtds. \tag{7.26}$$

Sind $\tilde{\tau}_i, \tilde{\sigma}_j \in [0,h], \tilde{\omega}_{\sigma,i}, \tilde{\omega}_{\tau,j}, i = 0, ...n;\ j = 0, ..., m$ die Stützstellen und Gewichte bezüglich $[0,h]^2$, so ergibt sich die transformierte Quadraturformel

$$\int_{Q_\ell \cap \Omega} \phi(x,y)\, dxdy \approx \frac{h^2}{4} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \omega_i^\tau \omega_j^\sigma |\gamma_{\partial\Omega}(\tilde{\tau}_j/h)| \phi(\theta(\tilde{\sigma}_i, \tilde{\tau}_j). \tag{7.27}$$

Im Allgemeinen können sich im Fall **(a)** beliebige unregelmäßige Schnittmuster bilden. Bei hinreichend kleinem h stellen sich aber nur noch endlich viele Situationen ein, siehe z.B. [5], Kapitel 6 für eine detaillierte Beschreibung und Implementierungsstrategien. Der Fall **(c)** taucht z.B. bei der Assemblierung von G_{11}^h auf. Ist $Q_\ell \cap \Gamma \neq \emptyset$, so hat man Integrale der Form

$$\int_{Q_\ell} \phi(x,y) dxdy$$

mit $\phi = \alpha\vartheta$, $\vartheta \in C^\infty(Q_\ell)$ und entlang von Γ unstetigen Koeffizienten α auszuwerten. Würde man in diesem Fall einfach einen Satz Gaußparameter für die Zelle Q_ℓ berechnen und die Tensorproduktformel anwenden, so würde das wegen dem singulären Integranten zu einem erheblichen Genauigkeitsverlust führen. Das Problem lässt sich aber leicht beheben, indem man auf $Q_\ell^+ = \Omega^+ \cap Q_\ell$ und $Q_\ell^- = \Omega^- \cap Q_\ell$ die selben Prozeduren wie bei **(a)** anwendet. Für **(b)** können, wie das folgende suggestive Bild zeigt ebenfalls eine Vielzahl von Schnittmustern enstehen, welche sich mit Subdividierungsstrategien auch auf **(a)** zurückführen lassen.

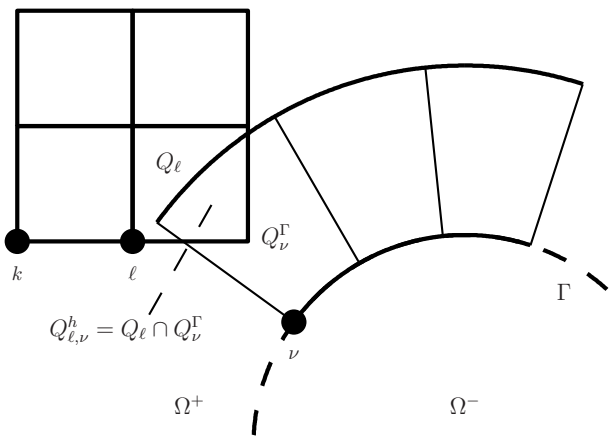

Abbildung 7.3.: Möglicher Schnitt von Trägerzellen unterschiedlicher Basissplines

Bei der Subdividierung ist auch darauf zu achten, dass in dem Schnitt $Q_\ell \cap \operatorname{supp} \Psi_{\nu,h}^{n_\Gamma}$ verschiedene Anteile von Interface-Gitterzellen $Q_\mu^\Gamma \sim \operatorname{supp} \Psi_{\nu,h}^{n_\Gamma}$ enthalten sein können und diese ebenfalls geeignet unterteilt werden müssen.

Auf eine detaillierte Beschreibung wollen wir an dieser Stelle verzichten und gehen davon aus, dass wir Integrationsgebiete der Form $Q_\ell \cap \operatorname{supp} \Psi^{n_\Gamma}_{\nu,h}, \nu \sim \Gamma$ geeignet zerlegen, auf Standardquader transformieren und mit der Tensorproduktformel ohne Genauigkeitverluste integrieren können. Für den Block $G^h_{2,2}$ sind noch Integrale über die Gitterzellen der Zusatzsplines

$$Q^\Gamma_\mu = \{(x,y) \in \Omega^+ : (x,y) = \gamma(t) + \nu(t)s, 0 \le s \le \delta, \mu h \le t \le (\mu+1)h\}, \quad \mu \sim \Gamma$$

auszuwerten. Mit Hilfe des Diffeomorphismus $\Phi(s,t) = \gamma(t) + \nu(t)s$ aus 5.1.2 lässt sich dies aber einfach auf eine Integration über den Quader $[h\mu, h(\mu+1)] \times [0,\delta]$ zurückführen:

$$\int_{Q^\Gamma_\mu} \phi(x,y)\, dxdy = \int_0^\delta \int_{h\mu}^{h(\mu+1)} \phi(\Phi(s,t))\, |\det J_\Phi(s,t)|\, dtds. \tag{7.28}$$

Mit den Stützstellen $\tilde{\tau}_i \in [h\mu, h(\mu+1)], i = 1, ..., n$, $\tilde{\sigma}_j \in [0,\delta], j = 1, ..., m$ und Gewichten $h\omega^\tau_i/2, \delta\omega^\sigma_j/2$ mit $\omega^\tau_i, \omega^\sigma_j \in [-1,1], i = 1, ..., n, j = 1, ..., m$ bekommt man schließlich die Quadraturformel

$$\int_{Q^\Gamma_\mu} \phi(x,y)\, dxdy \approx \frac{h\delta}{4} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \omega^\tau_i \omega^\sigma_j |\det J_\Phi(\tilde{\sigma}_i, \tilde{\tau}_j)| \phi(\Phi(\tilde{\sigma}_i, \tilde{\tau}_j)), \tag{7.29}$$

die für $p \in \mathcal{P}_{(2n,2m)}(Q^\Gamma_\mu)$ exakt ist.

7.3.2. Block $G^h_{1,1}$

Der $G^h_{1,1}$-Block tritt bei glatten Problemen, z.B. dem Poisson-Problem ($\alpha \equiv 1$) [39; 40; 44; 45], als zu assemblierende Galerkin-Matrix auf, wir müssen deshalb nur kleine Anpassungen bei der Integration über Interfacezellen vornehmen. Es ist zweckmäßig, nicht über die im Allgemeinen unstrukturierte Indexmenge $K = \{k \in \mathbb{Z}^2 : k \sim \Omega\}$ zu indizieren, sondern über einen kleinsten Quader $\mathcal{K} \subset \mathbb{Z}^2$ mit $K \subset \mathcal{K}$. Jedem $k \sim \mathcal{K}$ wird nun ein wB-Spline $wb^n_{k,h}$ zugeordnet und in der Ritz-Galerkin-Approximation $u^h = \sum_{k\in\mathcal{K}} u_k wb^n_{h,k}$ werden dann einfach die Koeffizienten zu den Indizes $k \in \mathcal{K} \setminus K$ auf 0 gesetzt und $wb^n_{k,h}$ auf Ω eingeschränkt. Eine erste Prozedur berechnet nach gewählten h ein Gitter Ω^h über $\Omega = \Omega^+ \cup \Omega^- \cup \Gamma$ und nimmt eine Zellklassifizierung nach 7.1.1 vor. Für Zellen $Q_z = z + [0,1]^2 h$, $\ell \sim \Omega$ mit $Q_z \subset \Omega^\pm$ werden nun die Gaußparameter direkt nach 7.23 berechnet und in einer Datenstruktur gespeichert. Die Gaußparameter von Randzellen $Q_z \cap \partial\Omega \neq \emptyset$ werden mit Hilfe einer geeigneten Transformation θ 7.25 von $[0,h]^2$ auf $Q \cap \Omega$ projieziert. Interfacezellen $Q_z \cap \Omega \neq \emptyset$ werden in $Q^\pm_z = Q_\ell \cap \Omega^\pm$ gesplittet und auf den Teilgebeiten können wir mit dem Diffeomorphismus, vgl. Φ 5.11 und 7.8, ebenfalls geeignete Gaußparameter für die Zelle Q_z bestimmen. Wir haben also für jede Zelle $Q \sim \Omega$ einen Satz von geeigneten Stützstellen $(\sigma_i, \tau_j)^{N_Q}_{i,j=1}$ und Gewichten $\omega_{i,j} = \omega^\sigma_i \cdot \omega^\tau_j, i,j = 1, ..., N_Q$ erzeugt. Wir setzen $\Omega_\ell = \operatorname{supp} wb^n_{h,\ell}$ und $\Omega_{\ell,k} = \operatorname{supp} wb^n_{h,\ell} \cap \operatorname{supp} wb^n_{h,k}$. Für $wb^n_{h,k}, wb^n_{h,\ell}, k, \ell \in \mathcal{K}$

ist dann

$$\begin{aligned} a_\alpha(wb^n_{h,k}, wb^n_{h,\ell}) &= \int_\Omega \alpha \nabla wb^n_{h,k} \nabla wb^n_{h,\ell}\, dxdy \\ &= \int_{\Omega_{k,\ell}} \alpha \nabla wb^n_{h,k} \nabla wb^n_{h,\ell}\, dxdy \\ &= \sum_{Q\sim\Omega_{k,\ell}} \int_Q \alpha \nabla wb^n_{h,k} \nabla wb^n_{h,\ell}\, dxdy \\ &= \sum_{Q\sim\Omega_{k,\ell}} \underbrace{\sum_{i,j=1}^{N_Q} \alpha\omega_{i,j} \nabla wb^n_{h,k} \nabla wb^n_{h,\ell}(\sigma_i,\tau_j)}_{=:a^Q_\alpha(wb^n_{h,k}, wb^n_{h,\ell})} \end{aligned} \tag{7.30}$$

und für die ersten $|\ell \sim \Omega|$ Komponenten der rechten Seite von 7.21 bekommen wir analog

$$\begin{aligned} \ell_f(wb^n_{h,\ell}) &= \int_{\Omega^h_\ell} wfb^n_{h,\ell} dxdy \\ &= \sum_{Q\sim\Omega_\ell} \underbrace{\sum_{i,j=1}^{N_Q} \omega_{i,j} wfb^n_{h,\ell}(\sigma_i,\tau_j)}_{=:\ell^Q_f(wb^n_{h,\ell})}. \end{aligned} \tag{7.31}$$

Damit erhalten wir für die Matrix $G^h_{1,1} = g^{1,1}_{k,\ell}, k = (k_1,k_2), \ell = (\ell_1,\ell_2) \in \mathcal{K}$ und die rechte Seite $F^h_\Omega := f_\ell, \ell \sim \Omega$ den folgenden Assemblierungsalgorithmus, vgl. [44], 8.8:

Algorithmus 1 (Assemblierung $G^h_{1,1}$-Block)

```
INPUT: G^h_{1,1} ← 0, F^h_Ω ← 0
FOR Q_z = zh + [0,1]^2 h, z ∈ K, Q_z ∩ Ω ≠ ∅
    FOR k ∈ z − {0,...,n}^2
        f_k ← f_k + ℓ^Q_f(wb^n_{h,k})
        FOR ℓ ∈ z − {0,...,n}^2
            g^{1,1}_{k,ℓ} ← g^{1,1}_{k,ℓ} + a^Q_α(wb^n_{h,k}, wb^n_{h,ℓ})
        END
    END
END
```

Wir haben den Block $G^h_{1,1}$ mit wB-Splines assembliert. Eine Assemblierung mit weB-Splines erreicht man durch die *Erweiterungsmatrix* $\mathcal{E} = e^\star_{i,k}, i,k \in \mathcal{K}$ mit

$$e^\star_{i,k} = \begin{cases} w(x_i)^{-1} & \text{für} \quad k = i \\ w(x_i)^{-1} \cdot e_{i,j} & \text{für} \quad k = j \in \mathcal{J}(i) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \tag{7.32}$$

hierbei sind $e_{i,k}$ die Erweiterungskoeffizienten aus 2.24, $\mathcal{J}(i)$ die zur Menge der inneren Indizes $\mathcal{I}(j)$ duale Indexmenge 2.21, 2.22 und x_i der Mittelpunkt der Zelle Q_i (vergleiche

die Konstruktion der weB-Splines 2.3.3). Es ist dann

$$^{e}G^h_{1,1} := \mathcal{E}G^h_{1,1}\mathcal{E}^\top = a_\alpha(B^n_{k,h}, B^n_{\ell,h}), \quad k,\ell \in \mathcal{K}$$

der mit der weB-Basis assemblierte Block und $^{e}F^h_U = \mathcal{E}F^h_U$ die enstprechende rechte Seite, siehe für Details und einen Beweis [39; 40; 44; 45; 87].

7.3.3. Die gemischten Blöcke $G^h_{1,2}$ und $G^h_{2,1}$

Die Einträge des G^h_{12}-Blocks werden mit den gemischten Faltungsintegralen

$$g^{1,2}_{k,\nu} := a_\alpha(\Psi^{n_\Gamma}_{h,\nu}, wb^n_{k,h}), \quad \nu \sim \Gamma,\ k \sim \Omega \tag{7.33}$$

bestimmt. Wir beschränken uns auf die Assemblierung mit wB-Splines, da für hinreichend kleines h die relevanten weB-Splines mit den wB-Splines übreinstimmen. Außerdem sind nur Zellen $Q \sim \Omega$ mit $Q \cap S_\delta \neq \emptyset$ interessant. In einem Preprocessingschritt 7.1.1 werden diese Zellen markiert. Wir setzen

$$\Omega_{\nu,k} := \operatorname{supp} \Psi^{n_\Gamma}_{\nu,h} \cap \operatorname{supp} wb^n_{k,h}.$$

Offenbar ist dann $\Omega_{\nu,k} \subset \Omega^+$. Es sei jetzt Q eine Gitterzelle mit $Q \sim \operatorname{supp} wb^n_{k,h}$ und $Q \cap \operatorname{supp} \Psi^{n_\Gamma}_{h,\nu} \neq \emptyset$. Wir gehen wieder davon aus, dass wir das Schnittgebiet $\Omega^Q_{\nu,k} := Q \cap \operatorname{supp} \Psi^{n_\Gamma}_{h,\nu}$ durch eventuelle $M^Q_{\nu,k} \in \mathbb{N}$ Subdividierungen in Teilmengen $\Omega^{Q_i}_{\nu,k}$ mit $\bigcup_{i=0}^{M^Q_{\nu,k}} \Omega^{Q_i}_{\nu,k} = \Omega^Q_{\nu,k}$ zerlegen, und mit Diffeomorphismen $\theta_i : [0,h]^2 \longrightarrow \Omega^Q_{\nu,k}$ als Bild von $[0,h]^2$ darstellen können, so dass die Integranden auf den subdividierten Teilmengen glatt sind. Die von $[0,h]^2$ via θ_i auf $\Omega^Q_{\nu,k}$ transformierten Stützstellen $(\tau^{\Omega^{Q_i}_{\nu,k}}_{\ell_1}, \sigma^{\Omega^{Q_i}_{\nu,k}}_{\ell_2})^N_{\ell=1}$ und Gewichte $\omega^{\Omega^Q_{\nu,k}}_{\ell_1,\ell_2} = \omega^{\tau,\Omega^{Q_i}_{\nu,k}}_{\ell_1} \cdot \omega^{\sigma,\Omega^{Q_i}_{\nu,k}}_{\ell_2}, \ell_{1,2} = 1,...,N$ fassen wir nach einer eventuellen Umnumerierung zu einem Satz Gaußparameter $(\tau^Q_{\ell_1}, \sigma^Q_{\ell_2})$, $\omega^Q_{\ell_1,\ell_2}, \ell_{1,2} = 1,...,N^Q$ mit $N^Q = NM^Q_{\nu,k}$ für das Schnittgebiet $\Omega^Q_{k,\nu}$ zusammen. Für zwei Basisfunktionen $wb^n_{h,k}, \Psi^{n_\Gamma}_{h,\nu}$ mit $\Omega^h_{k,\nu} \neq \emptyset$ ist dann

$$\begin{aligned}
a_\alpha(\Psi^h_{h,\nu}, wb^n_{h,k}) &= \int_\Omega \alpha \nabla \Psi^{n_\Gamma}_{h,\nu} \nabla wb^n_{h,k}\, dxdy \\
&= \int_{\Omega_{k,\nu}} \alpha^+ \nabla \Psi^{n_\Gamma}_{h,\nu} \nabla wb^n_{h,k}\, dxdy \\
&= \sum_{\substack{Q \sim \operatorname{supp} wb^n_{k,h} \\ Q \cap \operatorname{supp} \Psi^{n_\Gamma}_{h,\nu} \neq \emptyset}} \int_{\Omega^Q_{k,\nu}} \alpha^+ \nabla \Psi^{n_\Gamma}_{h,\nu} \nabla wb^n_{h,k}\, dxdy \\
&= \sum_{\substack{Q \sim \operatorname{supp} wb^n_{k,h} \\ Q \cap \operatorname{supp} \Psi^{n_\Gamma}_{h,\nu} \neq \emptyset}} \underbrace{\sum_{i,j=1}^{N_Q} \alpha^+ \omega^Q_{i,j} \nabla \Psi^{n_\Gamma} \nabla wb^n_{h,k}(\tau^Q_i \sigma^Q_j)}_{=: a^Q_{\alpha^+}(\Psi^{n_\Gamma}_{h,\nu}, wb^n_{h,k})}
\end{aligned} \tag{7.34}$$

und für $\Omega_{k,\nu} \neq \emptyset$ setzen wir einfach $a_\alpha(\Psi^h_{h,\nu}, wb^n_{h,k}) = 0$. Damit erhalten wir für die Matrix $G^h_{1,2}$ den folgenden Assemblierungsalgorithmus, welcher die Einträge der Matrix in einer dreidimensionalen Datenstrukur abspeichert.

Algorithmus 2 (Assemblierung $G^h_{1,2}$, $G^h_{2,1}$-Block)

```
INPUT: G^h_{1,2}, G^h_{2,1} ← 0,
FOR Q_z = zh + [0,1]^2 h, z ∈ K, Q_z ∩ S_δ ≠ ∅
    FOR μ ∈ ν − {0, ..., n_Γ}
        FOR ℓ ∈ z − {0, ..., n}^2
            g^{1,2}_{μ,ℓ} ← g^{1,2}_{μ,ℓ} + a^{Q_z}_{α^+}(Ψ^{n_Γ}_{h,μ}, wb^n_{h,ℓ})
        END
    END
SET G^h_{2,1} ← (G^h_{1,2})^⊤
END
```

7.3.4. Block $G^h_{2,2}$

Zur Assemblierung des $G^h_{2,2}$-Blocks und der Komponenten $F^h_\Gamma = (f_\mu)_{\mu\sim\Gamma} := \ell_f(\Psi^{n_\Gamma}_{h,\mu})_{\mu\sim\Gamma}$ der rechten Seite des Ritz-Galerkin-Systems 7.21 berechnen wir in einem Preprocessingschritt zunächst für jede Gitterzelle $Q^\Gamma_\nu, \nu \sim \Gamma$ der Zusatzsplines wie in 7.3.1 beschrieben via der kanonischen Transformation Φ einen Satz Stützstellen $(\tau_i^{Q^{\Gamma_\nu}}, \sigma_j^{Q^{\Gamma_\nu}})$ und Gewichte $\omega_{i,j}^{Q^\Gamma_\nu}, i,j = 1, ..., N$. Damit ergibt sich für $\Omega_{\nu,\mu} = \operatorname{supp}\Psi^{n_\Gamma}_{h,\nu} \cap \operatorname{supp}\Psi^{n_\Gamma}_{h,\mu}$

$$\begin{aligned} a_\alpha(\Psi^{n_\Gamma}_{h,\nu}, \Psi^{n_\Gamma}_{h,\mu}) &= \int_\Omega \alpha^+ \nabla\Psi^{n_\Gamma}_{h,\nu} \nabla\Psi^{n_\Gamma}_{h,\mu}\, dxdy = \int_{\Omega_{\nu,\mu}} \alpha^+ \nabla\Psi^{n_\Gamma}_{h,\nu} \nabla\Psi^{n_\Gamma}_{h,\mu}\, dxdy \\ &= \sum_{Q^\Gamma\sim\Omega_{\nu,\mu}} \int_{Q^\Gamma} \alpha^+ \nabla\Psi^{n_\Gamma}_{h,\nu} \nabla\Psi^{n_\Gamma}_{h,\mu}\, dxdy \\ &= \sum_{Q^\Gamma\sim\Omega_{\nu,\mu}} \underbrace{\sum_{i,j=1}^N \alpha^+ \omega_{i,j}^{Q^\Gamma} \nabla\Psi^{n_\Gamma}_{h,\nu} \nabla\Psi^{n_\Gamma}_{h,\mu}(\sigma_i^{Q^\Gamma}, \tau_j^{Q^\Gamma})}_{=:a^{Q^\Gamma}_{\alpha^+}(\Psi^{n_\Gamma}_{h,\nu} \nabla\Psi^{n_\Gamma}_{h,\mu})} \end{aligned} \tag{7.35}$$

und

$$\begin{aligned} \ell_f(\Psi^{n_\Gamma}_{h,\mu}) &= \int_{\operatorname{supp}\Psi^{n_\Gamma}_{h,\mu}} f\Psi^{n_\Gamma}_{h,\mu} dxdy \\ &= \sum_{Q^\Gamma\sim\operatorname{supp}\Psi^{n_\Gamma}_{h,\mu}} \underbrace{\sum_{i,j=1}^N \omega_{i,j}^{Q^\Gamma} \Psi^{n_\Gamma}_{h,\mu})(\sigma_i^{Q^\Gamma}, \tau_j^{Q^\Gamma})}_{=:\ell_f^{Q^\Gamma}(\Psi^{n_\Gamma}_{h,\mu})}. \end{aligned} \tag{7.36}$$

Wir erhalten daraus einen zu $G^h_{1,1}$ fast analogen Assemblierungsalgorithmus.

Algorithmus 3 (Assemblierung $G^h_{2,2}$-Block)

```
INPUT: G^h_{2,2} ← 0, F^h_Γ ← 0
FOR Q^{Γ_ξ}, ξ ∼ Γ
    FOR ν ∈ ξ − {0, ..., n_Γ}
        f_ν ← f_ν + ℓ_f^{Q^Γ_ν}(Ψ^{n_Γ}_ν)
        FOR μ ∈ ξ − {0, ..., n_Γ}
            g^{2,2}_{ν,μ} ← g^{2,2}_{ν,μ} + a^{Q^{Γ_ξ}}_{α^+}(Ψ^{n_Γ}_{h,ν}, Ψ^{n_Γ}_{h,μ})
        END
    END
END
```

7.4. Systemlöser

Bei genauerer Betrachtung ist die assemblierte Matrix G^h_Γ des Ritz-Galerkin-Systems zunächst nur formal zu interpretieren. Der Block $G^h_{1,1}$ wird nach Algorithmus 1 in einem $4d$-Array mit $M \times N \times 2n+1 \times 2n+1$ Einträgen, die rechte Seite F_h in einer $M \times N$-Matrix und die Blöcke $G^h_{1,2}, G^h_{2,1}$ in einem $3d$-Array mit $\Lambda \times M \times 2n+1$ Einträgen gespeichert. Hierbei haben wir zur Vereinfachung für die Anzahl der Elemente der Indexmengen $|\mathcal{K}| = MN$ und $|\nu \sim \Gamma| = \Lambda$ geschrieben. Der Vorteil bei dieser Speicherung ist, dass nur Schleifen über rechteckigen Indexfeldern auftauchen, allerdings wird auch für unbeteiligte B-Splines, deren Träger außerhalb von Ω liegt, Speicherplatz reserviert. Damit man in der Lage ist, auf das System gängige Lösungsalgorithmen anzuwenden, werden die Blöcke $G^h_{1,1}, G^h_{1,2}$ durch Umindizierung in ein $2d$-Format umgewandelt. Speziell bei der Umwandlung von $G^h_{1,1}$ erzeugt jeder unbeteiligte B-Spline eine Nullzeile- und Spalte. Damit das System lösbar bleibt, wird an dieser Stelle eine 1 auf die Hauptdiagonale gesetzt. Für eine detaillierte Darstellung der Transformation sei z.B. auf die in [6] beschriebenen Programmpakete verwiesen. Nach Umwandlung ins $2d$-Format erhalten wir die folgenden Blöcke: $G^h_{1,1} \in \mathbb{R}^{MN \times MN}$, $G^h_{1,2} \in \mathbb{R}^{MN \times \Lambda}$, $G^h_{2,1} \in \mathbb{R}^{\Lambda \times MN}$ sowie die rechte Seite $F^h_U \in \mathbb{R}^{MN}$. Der Block $G^h_{2,2} \in \mathbb{R}^{\Lambda \times \Lambda}$ und die rechte Seite $F^h_\sigma \in \mathbb{R}^\Lambda$ müssen nicht umgewandelt werden, da diese von vornherein im $2d$-Format gespeichert werden.

7.4.1. Iterative Verfahren

Die Matrix G^h_Γ ist symmetrisch, positiv definit und schwachbesetzt. Bei der Lösung des assemblierten Systems

$$\begin{pmatrix} G^h_{1,1} & G^h_{1,2} \\ G^h_{2,1} & G^h_{2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ \sigma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F^h_U \\ F^h_\sigma \end{pmatrix} \tag{7.37}$$

kann man somit prinzipiell die Blockstruktur ignorieren und einen iterativen Löser wie das *cg*-Verfahren (Conjugate Gradients) [79; 35]) anwenden, welches theoretisch nach höchstens $MN + \Lambda$ Schritten die Lösung liefert. Obwohl die Blöcke $G^h_{1,2}, G^h_{2,1}$ und $G^h_{2,2}$ für $h \longrightarrow 0$ einen im Verhältnis immer kleiner werdenden Anteil der Galerkinmatrix ausmachen, können diese womöglich zu hohen Konditionszahlen des Gesamtsystems führen (u.a. in $G^h_{1,2}, G^h_{2,1}$ verursacht durch beliebig kleine Schnitte von den Trägerzellen der B-Splines

und Zusatzsplines). Um das System zu stabilisieren, lohnt es sich desahlb einen geeigneten Präkonditionierer zu implementieren, siehe z.B. für Details zu *pcg* (Preconditioned Conjugate Gradients) Verfahren [63; 79].

7.4.2. Ausnutzen der Block-Struktur

Aus der Symmetrie und positiven Definitheit von G^h_Γ folgt die Symmetrie und positive Definitheit von $G^h_{1,1}$ und $G^h_{2,2}$, es ist also

$$\begin{aligned} U^\top G^h_{1,1} U &\preceq \|U\|^2, \quad \forall U \in \mathbb{R}^{MN} \\ \sigma^\top G^h_{1,1} \sigma &\preceq \|\sigma\|^2, \quad \forall \sigma \in \mathbb{R}^\Lambda. \end{aligned}$$

Damit lässt sich der obere Teil des Systems 7.37 nach U auflösen:

$$U = (G^h_{1,1})^{-1} F^h_U - (G^h_{1,1})^{-1} G^h_{1,2} \sigma \tag{7.38}$$

und in den unteren Teil einsetzen:

$$\left(G^h_{2,2} - G^h_{2,1} (G^h_{1,1})^{-1} G^h_{1,2} \right) \sigma = F^h_\sigma - G^h_{2,1} (G^h_{1,1})^{-1} F^h_U. \tag{7.39}$$

Die Matrix

$$\mathcal{S} := \left(G^h_{2,2} - G^h_{2,1} (G^h_{1,1})^{-1} G^h_{1,2} \right)$$

mit der rechten Seite

$$\tilde{F}^h_\sigma := F^h_\sigma - G^h_{2,1} (G^h_{1,1})^{-1} F^h_U$$

ist das *Schur-Komplement* von G^h_Γ. Der numerisch schlecht konditionierte Anteil wurde nun in das im Verhältnis zum Gesamtsystem kleine $\Lambda \times \Lambda$-System $\mathcal{S}\sigma = \tilde{F}^h_\sigma$ gepackt. Wie man mit 7.38 schnell sieht, ist $\mathcal{S}$ ebenfalls symmetrisch und positiv definit [79], 7.39 lässt sich also ebenfalls mit einem *pcg*-Verfahren lösen. Bilden wir den $G^h_{1,1}$-Block der Systemmatrix mit *weB*-Splines durch die Erweiterung, d.h. führen wir nachträglich die Matrixmultiplikaton aus 7.32 durch, so ist die Matrix nach 2.3.1 gut konditioniert und damit U aus 7.38 stabil bestimmbar. Die numerische Instabilität lässt sich somit zwar - wie es bei singulären Problemen häufig vorkommt - nicht komplett vermeiden, aber zumindest auf ein relativ kleines schlecht konditioniertes Problem reduzieren.

8. Computerexperimente

In diesem Abschnitt wollen wir unsere Theorie an einfachen Modellproblemen testen. Diese sollen einen ersten kleinen Überblick liefern. Das Programmpaket um die Experimente durchzuführen ist nicht mit der Absicht auf größtmögliche Allgemeinheit programmiert worden, sondern ist als Add On zu den bei uns im Fokus stehenden theoretischen Ergebnisse zu verstehen. So haben wir noch nicht alle Aspekte der Implementierung, wie sie in Kapitel 7 für ein allgemeines Programm beschrieben werden, umgesetzt, z.B. beschränken wir uns auf einfache Geometrien mit analytisch beschreibbaren Rändern und Interfacekurven anstatt allgemeine Bézierkurven zu implementieren. So dient uns als Interface in allen Beispielen der Einheitskreisrand $\partial B_1(0)$, dies ermöglicht uns unter anderem den Diffeomorphismus Φ und die Umkehrabbildung Φ^{-1} analytisch zu bestimmen sowie mit Polarkoordinaten zu arbeiten. Dazu formulieren wir den elliptischen Operator aus 4.1 in 8.1 in Polarkoordinaten und geben die für die Modellbeispiele zur numerischen Bestimmung der Lösung wichtigen Größen an. Zu den eigentlichen Experimenten kommen wir in 8.2. Wir nutzen $\mathbb{B}^{1,2}_{w,\chi_\delta,h}(\Omega)$ als Ritz-Galerkin-Ansatz und messen den Fehler in der H^1-Norm.

8.1. Interfaceprobleme mit analytischem Interface

Der elliptische Operator aus dem Modellproblem 4.1 lässt sich formal in Polarkoordinaten $(r,\theta) \in (0,\infty) \times [0,2\pi]$ als

$$-\alpha \left(u_{rr} + \frac{u_r}{r} + \frac{u_{\theta\theta}}{r^2} \right)(r,\theta) = f(r,\theta) \tag{8.1}$$

schreiben. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ mit $\partial B_1(0) \subset \Omega$ und $S_\delta \Subset \Omega$ d.h. das Interface Γ ist der Rand vom Einheitskreis und der Streifen ist der Kreisring

$$S_\delta = \{(r,\theta) : 1 \leq r \leq \delta + 1, \theta \in [0,2\pi)\}.$$

Damit sind die für die Evaluation der Zusatzsplines 7.2.2 wichtigen Größen elementar durch

$$\begin{aligned}
\Phi(r,\theta) &= (x(r,\theta), y(r,\theta)) = (r\cos\theta, r\sin\theta) \\
\Phi^{-1}(x,y) &= (r(x,y), \theta(x,y)) = (\sqrt{(x^2+y^2)}, \arctan(y/x)) \\
\nabla r(x,y) &= (\cos(\theta(x,y)), \sin(\theta(x,y))) \\
\nabla\theta(x,y) &= \left(-\frac{\sin(\theta(x,y))}{r(x,y)}, \frac{\cos(\theta(x,y))}{r(x,y)} \right)
\end{aligned}$$

gegeben. Die von $B_1(0)$ nach $\Omega \setminus B_1(0)$ zeigende Normale auf $\partial B_1(0)$ ist $\nu : [0,2\pi) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ mit $\nu(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta)$. Für radialsymmetrische Probleme, d.h. $u(r,\theta) = u(r), f(r,\theta) =$

$f(r)$ ist

$$\begin{aligned}\nabla_\nu u(r,\theta) &= (\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\partial \phi}{x}, \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{y}) \cdot (\cos\theta, \sin\theta) \\ &= \frac{\partial u}{\partial r}\cos^2\theta + \frac{\partial u}{\partial r}\sin^2\theta = \partial_r u(r).\end{aligned}$$

Mit stückweise konstanten Koeffizienten $\alpha^\pm$ und rechter Seite $f \in L^2(\Omega) \cap H^m(B_1(0)) \cap H^m(\Omega \setminus B_1(0))$ gelten für die Lösung $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^{m+2}(B_1(0)) \cap H^{m+2}(\Omega \setminus B_1(0))$ dann am Rand der Einheitskreisscheibe $\partial B_1(0)$ die besonders einfachen Sprungbedingungen

$$\begin{aligned}[\![u]\!]_{\partial B_1(0)} &= \lim_{r\to 1+} u^+(r) - \lim_{r\to 1-} u^-(r) \\ [\![\alpha\nabla_\nu u]\!]_{\partial B_1(0)} &= \alpha^+ \lim_{r\to 1+} \partial_r u^+(r) - \alpha^- \lim_{r\to 1-} \partial_r u^-(r).\end{aligned}$$

8.2. Modellbeispiele

Es sei u die exakte Lösung und

$$u_\Gamma^h = u_\star^h + \Psi^h \in \mathbb{B}^{1,2}_{w,\chi_\delta,h}(\Omega) \tag{8.2}$$

der durch Ritz-Galerkin-Approximation erzeugte Interfacespline (vgl. Def. 5.2.1) eines Modellinterfaceproblems auf Ω mit Interface Γ und kompakt enthaltenen Streifen S_δ. Hierbei bezeichnet $u_\star^h$ den weB-Spline Anteil (vgl. Def. 2.28)

$$u_\star^h = \sum_{k\sim\Omega^h} u_k B^1_{k,h} \in w^e\mathbb{B}^1_h(\Omega) \tag{8.3}$$

und

$$\Psi^h = \sum_{\ell\sim\Gamma^h} \sigma_\ell \Psi^2_{\ell,h} \in \chi\mathbb{B}^2_h(S_\delta) \tag{8.4}$$

den Zusatzsplineanteil (vgl. Def. 5.31) von u_Γ^h sowie $\Omega^h \subset \mathbb{Z}^2, \Gamma^h \subset \mathbb{Z}$ die dazugehörigen Indexmengen und $u_k, \sigma_\ell \in \mathbb{R}$ die durch den Approximationsprozess bestimmten Koeffizienten.

In den Experimenten messen wir den *relativen Fehler*

$$e^h_{H^1} := \frac{\|u - u_\Gamma^h\|_{H^1(\Omega)}}{\|u\|_{H^1(\Omega)}} \tag{8.5}$$

und die *Konvergenzrate*

$$r^h_{H^1} := \log_2 \frac{\|u - u_\Gamma^h\|_{H^1(\Omega)}}{\|u - u_\Gamma^{h/2}\|_{H^1(\Omega)}}. \tag{8.6}$$

Nach dem Jackson-Satz 6.2.1 sollte für den Ansatzraum $\mathbb{B}^{1,2}_{w,\chi_\delta,h}(\Omega)$ bei passend gewählten Gewichten w, χ_δ die Konvergenzrate im Grenzfall $\lim_{h\to 0} r^h_{H^1} = 1$ sein.

Bei den folgenden Modellbeispielen berechnen wir den relativen H^1-Fehler sowie die H^1-Konvergenzraten zu den Gitterweiten $h = h_\nu = \pi/2^\nu, \nu = 2, ..., 8$. Um schnell erste Tests durchführen zu können, haben wir auf die Erweiterungskonstruktion der B-Splines verzichtet und benutzen nur gewichtete Tensorproduktsplines. Zur Visualisierung der Ergebnisse plotten wir zu einer gewählten Gitterweite h den Graphen des Interfacesplines u_Γ^h, sowie seinen w-Spline $u_\star^h$ und Zusatzslpline Ψ^h anteil. Der Support der Zusatzsplines ist in allen Beispielen der Kreisring $S_\delta = B_{\delta+1}(0) \setminus B_1(0)$.

8.2.1. Modellproblem 1

Es sei $\Omega = B_3(0)$ und $\Gamma = \partial B_1(0)$.

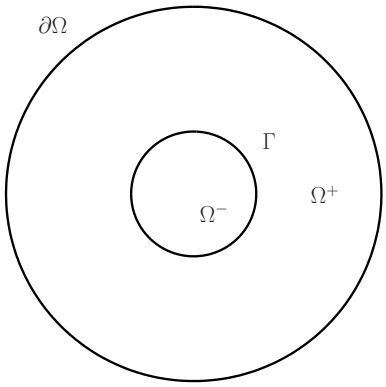

Abbildung 8.1.: Gebiete für Modellproblem 1

Wir betrachten das Interfaceproblem: Finde $u \in H_0^1(B_3(0))$, so dass

$$\begin{cases} -\nabla\cdot(\alpha\nabla u) = f \\ u_{|\partial B_3(0)} = 0 \\ [\![u]\!]_{\partial B_1(0)} = 0 \\ [\![\alpha\nabla_\nu u]\!]_{\partial B_1(0)} = 0 \end{cases} \tag{8.7}$$

Wir benutzen Polarkoordinaten, wählen $\delta', \delta > 0$ mit $\delta' < \delta < 1$, betrachten

$$w(r, \phi) := 9 - r^2$$

und setzen mit Hilfe der Blendefunktion ζ^m 7.11

$$\chi_\delta(r) = \begin{cases} r - 1 & \text{für} \quad r \in [0, \delta') \\ (r-1)\zeta^m(r-1) & \text{für} \quad r \in [\delta', \delta) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

Die rechte Seite

$$f(r, \theta) = \begin{cases} 4\alpha^- & \text{für} \quad r \in [1, 1+\delta') \\ -\alpha^+\partial_{rr}^2 w + \partial_r\chi_\delta(r) + \dfrac{\partial_r w(r) + \chi_\delta(r)}{r} & \text{für} \quad r \in [1+\delta', 1+\delta), \\ -\alpha^+\partial_{rr}^2 w(r) + \dfrac{\partial_r w(r)}{r} & \text{für} \quad r > 1+\delta \end{cases} \quad 0 \le \theta \le 2\pi$$

liegt in $L^2(B_3(0)) \cap C^\infty(B_1(0)) \cap C^m(B_3(0) \setminus B_1(0))$ und ist radialsymmetrisch. Das Modellproblem lautet somit in Polarkoordinatendarstellung

$$\begin{cases} -\alpha\left(u_{rr} + \dfrac{u_r}{r}\right)(r,\theta) & = & f(r) & \text{auf} & B_3(0) \setminus \{0\} \\ u(3,\theta) & = & 0 & \text{für} & 0 \le \theta < 2\pi \\ u^+(1+,\theta) & = & u^-(1-,\theta) & \text{für} & 0 \le \theta < 2\pi \\ \alpha^+ u_r^+(1+,\theta) & = & \alpha^- u_r^-(1-,\theta) & \text{für} & 0 \le \theta < 2\pi \\ \lim\limits_{r\to 0} u(r,\phi) \quad \text{existiert gleichmäßig in} \quad \theta. \end{cases} \tag{8.8}$$

Die eindeutige Lösung des Modelproblems 8.8 ist

$$u(r,\phi) = w(r) + \chi_\delta(r).$$

Wir haben uns hierbei natürlich zuerst u vorgegeben und daraus f bestimmt (so ist die Vorgehensweise bei allen Modellbeispielen bis auf Beispiel 2) . Nutzen wir zur Approximation den speziellen Interfacesplineraum mit den Gewichten w für die Tensorprodukt-B-Splines und die Fortsetzung $\chi_\delta(r,\phi) = \chi_\delta(r)$ als Gewicht für die Zusatzsplines, so erhalten wir

$$\mathbb{B}^{1,2}_{w,\chi_\delta,h}(B_3(0)) = w\mathbb{B}^1_h(B_3(0)) \oplus \chi_\delta \mathbb{B}^2_h(S_\delta)$$

als Ansatzraum für die Ritz-Galerkin-Approximation. Offenbar liegt die Lösung nach Konstruktion im Ansatzraum $\mathbb{B}^{1,2}_{w,\chi_\delta,h}(B_3(0))$. Die folgenden Plots verdeutlichen diesen Sachverhalt.

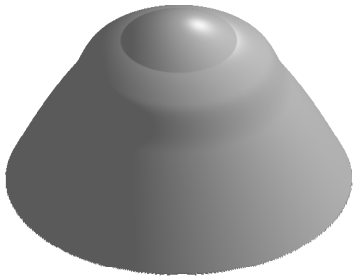

Abbildung 8.2.: Analytische Lösung u für Modellproblem 1

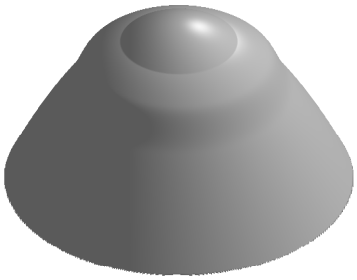

Abbildung 8.3.: Interfacespline u_Γ^h (vgl. 8.2) für Modellproblem 1, $h = \pi/2^4$

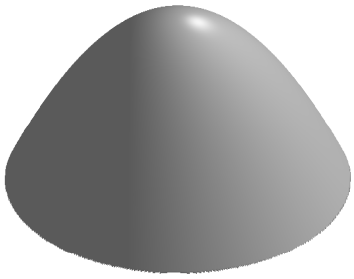

Abbildung 8.4.: Gewichteter TP-Spline $u_\star^h$ (vgl.8.3) für Modellproblem 1, $h = \pi/2^4$

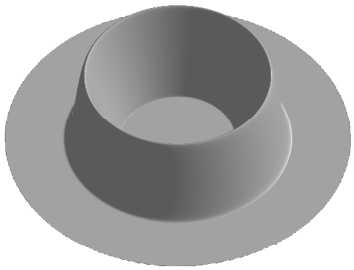

Abbildung 8.5.: Zusatzspline Ψ^h (vgl. 8.4) für Modellproblem 1, $h = \pi/2^4$

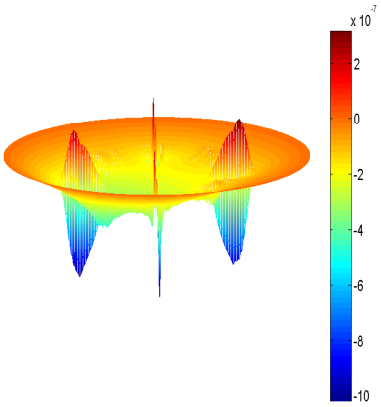

Abbildung 8.6.: $u - u_\Gamma^h$ für Modellproblem 1, $h = \pi/2^4$

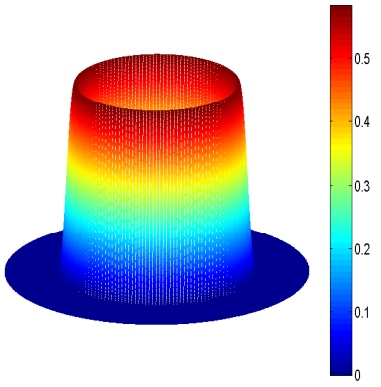

Abbildung 8.7.: $u - u_\star^h$ für Modellproblem 1, $h = \pi/2^4$

Für alle Gitterweiten $h = h_\nu = \pi/2^\nu, \nu = 2, ..., 8$ ist der Fehler mindestens $\leq 10^{-3}$, wird also ausschließlich durch Rundungsfehler und Fehler beim Lösen des LGS verursacht. Es tritt als genau das ein, was man bei einer Lösung im Ansatzraum erwartet.

8.2.2. Modellproblem 2

Wir betrachten wie im ersten Beispiel ein Kreisgebiet $\Omega = B_3(0)$ und setzen für das Interface $\Gamma = \partial B_1(0)$.

Für eine radialsymmetrische rechte Seite $f(r) = f(r, \phi) \in C^\infty(B_2(0)$ bekommen wir die analytische Lösung in folgender Darstellung

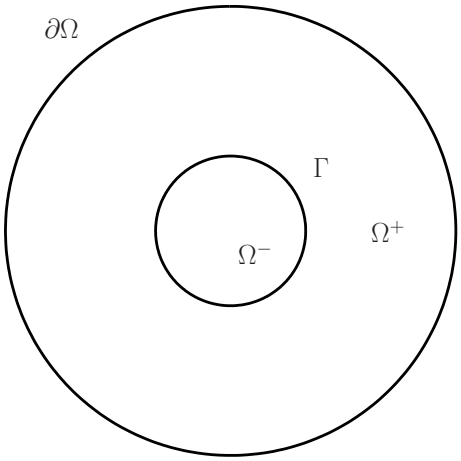

Abbildung 8.8.: Gebiet für Modellproblem 2

$$
\begin{aligned}
-\alpha\left(u_{rr}+\frac{u_r}{r}\right)(r) &= f(r)\\
\Longrightarrow (ru_r)_r &= -\frac{rf(r)}{\alpha}\\
\Longrightarrow \quad ru_r^{\pm} &= C_1^{\pm}-\frac{1}{\alpha^{\pm}}\int_0^r \tau f(\tau)\,d\tau\\
\Longrightarrow u^{\pm}(r) &= C_1^{\pm}\ln r + C_2^{\pm} - \frac{1}{\alpha^{\pm}}\int_0^r \sigma^{-1}\int_0^{\sigma}\tau f(\tau)\,d\tau\,d\sigma, \quad C_{1,2}^{\pm}\in\mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

Wir wählen $f \equiv 1$ und erhalten damit das auf Polarkoordinaten transformierte Testproblem

$$
\left\{
\begin{array}{ccccc}
-\alpha\left(u_r+\frac{u_{rr}}{r}\right)(r,\theta) & = & 1 & \text{auf} & B_2(0)\setminus\{0\}\\
u(2,\theta) & = & 0 & \text{für} & 0\le\theta<2\pi\\
u^+(1+,\theta) & = & u^-(1-,\theta) & \text{für} & 0\le\theta<2\pi\\
\alpha^+u_r^+(1+,\theta) & = & \alpha^-u_r^-(1-,\theta) & \text{für} & 0\le\theta<2\pi\\
\lim\limits_{r\to 0} u(r,\phi) \quad \text{existiert gleichmäßig in} \quad \theta & & & &
\end{array}
\right. .
\tag{8.9}
$$

Setzen wir für die Koeffizienten $\alpha^- = \alpha_{|B_1(0)} \equiv 1$, $\alpha^+ = \alpha_{|B_2(0)\setminus B_1(0)} \equiv 2$, so können wir mit 8.9 und den Rand- und Interfacebedingungen leicht die exakte Lösung zu 8.9 angeben

$$
u(r,\theta) = \left\{
\begin{array}{ccc}
-r^2/4+5/8 & \text{für} & (r,\theta)\in B_1(0)\\
-r^2/8+1/2 & \text{für} & (r,\theta)\in B_2(0)\setminus B_1(0)\\
1/2 & \text{für} & r=0, 0\le\theta<2\pi
\end{array}
\right. .
\tag{8.10}
$$

Die folgenden Plots veranschaulichen: ohne die Zusatzsplines wird eine deutlich schlechtere Approximationsgüte bei gleicher Gitterweite erreicht. Man erkennt auch, dass die weB-Splines einen Teil des Sprungs ausgleichen wollen, aber dies erst mit den Zusatzsplines

gelingt. Dies verdeutlicht auch die Tatsache, dass $-\nabla(\alpha\nabla(\Psi^h)$ wegen $[\![\Psi^h]\!]_\Gamma \neq 0$i.A. nicht wohldefiniert ist. Erst zusammen mit dem glatten weB-Anteil $u_h^\star$ kann man mit $u_\Gamma^h = u_h^\star + \delta\Psi^h$ tatsächlich im starken Sinn das Residuum bilden. Da wir für die schnellen Tests für den $G_{1,2}^h$-Block keine angepasste Gaußquadratur wie im 7 Kapitel vorgestellt wurde, implementiert haben und wir mit der Gitterweite $h_8 = \pi/2^8$ an die Grenzen der Rechenkapazität gelangt sind, kann man die berechneten Konvergenzraten als Bestätigung der Theorie betrachten.

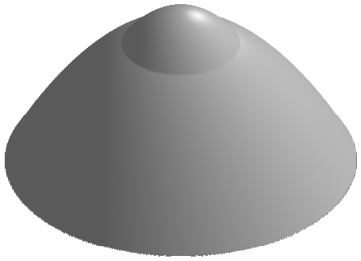

Abbildung 8.9.: Analytische Lösung u für Modellproblem 2

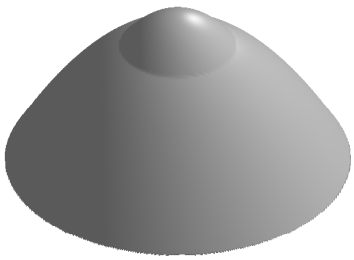

Abbildung 8.10.: Interfacespline u_Γ^h (vgl. 8.2) für Modellproblem 2, $h = \pi/2^6$

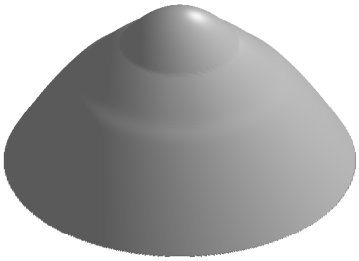

Abbildung 8.11.: Gewichteter TP-Spline $u_\star^h$ (vgl. 8.3) für Modellproblem 2, $h = \pi/2^6$

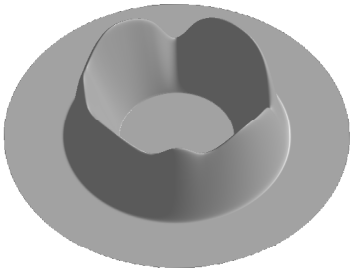

Abbildung 8.12.: Zusatzspline Ψ^h (vgl. 8.4) für Modellproblem 2, $h = \pi/2^6$

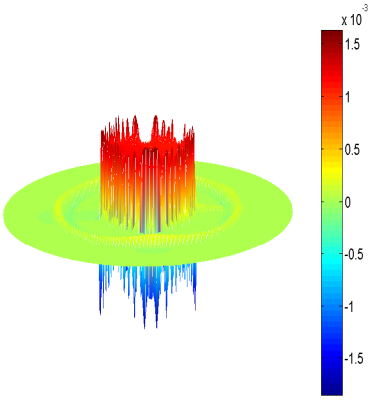

Abbildung 8.13.: $u - u_\Gamma^h$ für Modellproblem 2, $h = \pi/2^6$

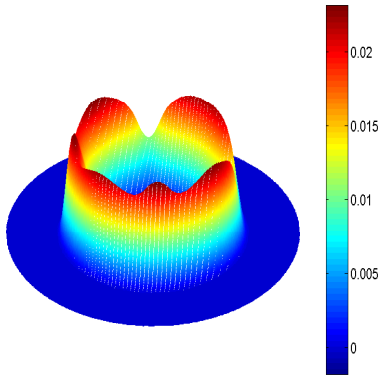

Abbildung 8.14.: $u - u_\star^h$ für Modellproblem 2, $h = \pi/2^6$

h	$e^h_{H^1}$	$r^h_{H^1}$
$\pi/2^2 \approx 0.7854$	$4.375 \cdot 10^{-2}$	
$\pi/2^3 \approx 0.3927$	$3.161 \cdot 10^{-2}$	0.4687
$\pi/2^4 \approx 0.1963$	$2.376 \cdot 10^{-2}$	0.4113
$\pi/2^5 \approx 0.0982$	$1.594 \cdot 10^{-2}$	0.5762
$\pi/2^6 \approx 0.0491$	$1.006 \cdot 10^{-2}$	0.6627
$\pi/2^7 \approx 0.0245$	$6.126 \cdot 10^{-3}$	0.7140
$\pi/2^8 \approx 0.0123$	$3.631 \cdot 10^{-3}$	0.7763

Tabelle 8.1.: H^1-Fehler und Konvergenzrate für Modellproblem 2

8.2.3. Resümee

Bei der Implementierung haben wir uns noch nicht um die bei der numerischen Integration der Faltungsintegrale

$$a_\alpha(\Psi^{n_\Gamma}_{h,\nu}, wb^n_{k,h}), \quad \nu \sim \Gamma,\, k \sim \Omega \tag{8.11}$$

auftretenden Genauigkeitsverluste gekümmert, welche durch die unstetigen Integranden bzw. der nicht adäquaten Subdividierung von $\operatorname{supp} b^n_{h,k} \cap \Psi^{n_\Gamma}_{h,\nu} \operatorname{supp}, \nu \sim \Gamma,\, k \sim \Omega$ verursacht werden. Die relativ großen Träger der Zusatzsplines führen somit zu einer Verschlechterung der Kondition, welche die optimale Fehlerordnung etwas beinträchtigt. Im Rahmen der Rechengenauigkeit bestätigen jedoch die beiden numerischen Testbeispiele die Theorie gut. Eine Berücksichtigung der theoretischen Überlegungen aus Kapitel 7, also insbesondere die Behandlung der Schnittmuster, welche beim Schnitt der Träger der verschiedenen Basisfunktionen entstehen und die bei der Assemblierung der Blöcke $G^h_{1,2}, G^h_{2,1}$ eine wesentliche Rolle spielen vgl. 7.3.1,7.3.3, sowie die Lösung des Systems mittels der Schur-Komplement Methode würde eine schöne Fortführung der Arbeit aus

numerischer Sicht darstellen und sollte nochmal bessere Ergebnisse erzielen. Eine vielversprechende Alternative könnten auch die erst kürzlich von Höllig und Hörner (siehe für Details `http://www.siam.org/books/fr26/` sowie [49]) entwickelten neuen rekursiven Integrationsroutinen für die weB-Methode darstellen. Die dort entwickelte Methode ist zwar nicht direkt zur Assemblierung der $G^h_{1,2}, G^h_{2,1}$-Blöcke anwendbar, könnte aber durch eine geeignete Modifikation zur stabilen Auswertung der Integrale 8.11 benutzt werden. Auch die Wahl des Offsetparameters δ, d.h. die Größe der Träger der Zusatzsplines wirkte sich wie zu erwarten war auf die numerischen Rechnungen aus. Diesen Sachverhalt haben wir bei den Testbeispielen nicht weiter thematisiert und natürlich ein heuristisch bestmögliches δ gewählt. Hier könnte man in Zukunft noch den genaueren Zusammenhang untersuchen.

Zusammenfassung und Ausblick

Dieser Abschnitt enthält eine kurze Zusammenfassung der Ergebnisse und einen Ausblick auf eine Vielzahl von Verallgemeinerungsmöglichkeiten.

1. Interfaceproblem

Wir betrachten beschränkte Gebiete $\Omega, \Omega^- \subset \mathbb{R}^d$ mit $\Omega^- \Subset \Omega$ mit glatten Rändern $\partial\Omega$, $\Gamma := \partial\Omega^-$, wobei wir $\Omega^+ = \Omega \setminus (\Omega^+ \cup \Gamma)$ setzen. Den inneren Rand Γ bezeichnen wir als das *Interface*. Die schwache Lösung des Interfaceproblems

$$\begin{cases} -\nabla\cdot(\alpha\nabla u) = f \\ u_{|\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

mit stückweise konstanten Koeffizienten

$$\alpha(x) = \begin{cases} \alpha^+ & \text{für} \quad x \in \Omega^- \cup \Gamma \\ \alpha^- & \text{für} \quad x \in \Omega^+, \end{cases} \quad \alpha^\pm \in \mathbb{R}^+, \alpha^+ \neq \alpha^-$$

liegt für $f \in L^2(\Omega) \cap H^m(\Omega^+) \cap H^m(\Omega^-)$ in $H_0^1(\Omega) \cap H^{m+2}(\Omega^+) \cap H^{m+2}(\Omega^-)$, $m \geq 0$. Dieses Ergebnis folgt aus einem Shift-Theorem, das wir mit Hilfe einer Differenzenquotiententechnik in 3.2.1 beweisen. In Literatur zu Finiten Elementen wird diese Aussage meist mit Hilfe eines Resultats aus der Operatortheorie [77] in Verbindung mit [81] angegeben. Für die Lösung des Interfaceproblems gelten die folgenden Sprungbedingungen entlang des Interface (beachte: $u_{|\Omega^\pm}$ ist für $m \geq 0$ mindestens H^2-regulär),

$$\begin{aligned} [\![u]\!]_\Gamma &= 0 \quad \text{in} \quad H^{1/2}(\Gamma) \\ [\![\alpha\nabla_\nu u]\!]_\Gamma &= 0 \quad \text{in} \quad H^{1/2}(\Gamma), \end{aligned}$$

woraus $[\![\nabla_\nu u]\!]_\Gamma \neq 0$ folgt. Das bedeutet $u \notin H^2(\Omega)$.

2. Konstruktion von Zusatzsplines

Approximiert man die Lösung mit klassischen vernetzten Finite-Elemente-Verfahren, so kann man im Allgemeinen nur eine Konvergenzordnung von $\mathcal{O}(h^{1/2})$ erwarten. Wie man im Eindimensionalen sieht, ist dieses Ergebnis ohne eine spezielle Behandlung der Elemente in einer Umgebung der Singularität nicht zu verbessern, siehe 4.3. Auch mit den vernetzungsfreien, auf B-Splines basierenden Elementen aus $w^e\mathbb{B}_h^n(\Omega)$ ist aufgrund der Glattheit der gewichteten B-Splines auf einer Umgebung des Interface im Allgemeinen kein besseres Ergebnis zu erwarten. Deshalb erweitern wir den weB-Raum mit der linearen Hülle von Zusatzsplines mit singulären Gradienten

$$\Psi_{\nu,h}^{n_\Gamma}(x,y) = \begin{cases} \tilde{\chi}_\delta\left(\Phi^{-1}(x,y)\right)\tilde{b}_{h,\nu}^{n_\Gamma}\left(\Phi^{-1}(x,y)\right) & \text{für} \quad (x,y) \in S_\delta \\ 0 & \text{für} \quad (x,y) \in \Omega \setminus S_\delta \end{cases},$$

welche wir mit einem glatten Diffeomorphismus $\Phi : \tilde{S}_\delta \longrightarrow S_\delta \subset \Omega$,

$$(x, y) = \Phi(s, t) := \gamma(t) + s \cdot \nu(t),$$

durch Tensorproduktbildung von univariaten, auf Ecken des Rechtecks $\tilde{S}_\delta = [0, \delta) \times [0, L)$ definierten Funktionen konstruieren. Die Abbildung Φ ist bei einem C^m-Interface ein C^{m-1} Diffeomorphismus und bildet $\tilde{S}_\delta$ diffeomorph auf den Streifen S_δ ab. Hierbei sind

$$\tilde{b}^n_{k,h}(s, t) = \tilde{b}^n_{k,h}(t),\ k \sim \tilde{\Gamma}, \quad (s, t) \in [0, \delta) \times \tilde{\Gamma},$$

die von $\tilde{\Gamma} = [0, L)$ auf $\tilde{S}_\delta$ stetig fortgesetzten univariaten periodischen Splines (s.5.17) und

$$\tilde{\chi}_\delta(s, t) = \begin{cases} s & \text{für} \quad (s, t) \in [0, \delta^\star) \times \tilde{\Gamma} \\ s\zeta^m(s) & \text{für} \quad (s, t) \in [\delta^\star, \delta) \times \tilde{\Gamma} \end{cases}, 0 < \delta^\star < \delta$$

eine auf $[0, \delta)$ univariate und ebenfalls auf $\tilde{S}_\delta$ stetig fortgesetzte Gewichtsfunktion (vgl. 5.1.4). Außerhalb der Streifen wird $\chi_\delta \equiv 0$ gesetzt.

Aufgrund der Tensorproduktstruktur bleiben viele bekannte Eigenschaften der univariaten B-Splines erhalten (vgl. 5.2.1):

- $\operatorname{supp} \Psi^{n_\Gamma}_{k,h} = \Phi([0, \delta) \times [kh, (k + n_\Gamma)h]) \subset S_\delta$
- $\Psi^{n_\Gamma}_{k,h} \geq 0$
- $\displaystyle\sum_{k \sim \Gamma} \beta_k \Psi^{n_\Gamma}_{k,h} = 0 \Longrightarrow \beta_k = 0, \quad k \sim \Gamma$
- $\displaystyle\sum_{k \sim \Gamma} \Psi^{n_\Gamma}_{k,h} = \chi_\delta$
- $[\![\Psi^{n_\Gamma}_{k,h}]\!]_\Gamma = 0$
- $\nabla_\nu \Psi^{n_\Gamma}_{k,h}]\!]_\Gamma = -\|\nu\|^2 \tilde{b}^{n_\Gamma}_{k,h}(t)$
- $\Psi^n_{k,h} \in H^1_0(\Omega) \cap C^\ell(\Omega^+) \cap C^\infty(\Omega^-), \quad \ell = \min\{n_\Gamma - 1, m\}.$

3. Approximation mit Interfacesplines

Wenn Γ keine achsenparallelen linearen Segmente enthält (was keine wesentliche Einschränkung ist), ist die Menge $\{B^n_{k,h}\}_{k \sim \Omega} \cup \{\Psi^{n_\Gamma}_{h,k}\}_{k \sim \Gamma}$ linear unabhängig (vgl. 5.2.2). Setzen wir $\chi_\delta \mathbb{B}^{n_\Gamma}_h(\Gamma) = \operatorname{span}\left\{\Psi^{n_\Gamma}_{k,h}\right\}_{k \sim \Gamma}$ und bilden mit den weB-Splines die direkte Summe

$$\mathbb{B}^{n,n_\Gamma}_{w,\chi_\delta,h}(\Omega) := w^e \mathbb{B}^n_h(\Omega) \oplus \chi_\delta \mathbb{B}^{n_\Gamma}_h(S_\delta),$$

so erhalten wir den Raum der *Interfacesplines*.

Für $u^h \in \mathbb{B}^{n,n_\Gamma}_{w,\chi_\delta,h}(\Omega)$ zeigen wir in 5.2.3 die folgenden strukturellen Eigenschaften:

- $u^h \in H^1_0(\Omega) \cap C^\ell(\Omega^+) \cap C^\ell(\Omega^-)$

- $[\![u^h]\!]_\Gamma = 0$
- $[\![\nabla_\nu u^h]\!]_\Gamma = g \in H^{n_\Gamma - 1/2}(\Gamma), \quad g \neq 0.$

Hierbei gilt für $n > 1$

$$g = ||\nu(t)||^2 \sum_{k \sim \tilde{\Gamma}} \beta_k \tilde{b}^n_{k,h}(t)$$

punktweise und für $n = 1$ noch im L^2-Sinn.

Für den Raum $\mathbb{B}^{1,2}_{w,\chi_\delta,h}(\Omega)$ und $u \in H^1_0(\Omega) \cap H^5(\Omega^+) \cap H^5(\Omega^-)$ zeigen wir in Kapitel 6 einen Satz vom Jackson-Typ, d. h. es existiert ein $u^h_\Gamma \in \mathbb{B}^{1,2}_{w,\chi_\delta}(\Omega)$ mit

$$\|u - u^h_\Gamma\|_{H^1(\Omega} \preceq h.$$

Daraus erhalten wir mit dem Céa-Lemma 1.3.3 für $f \in L^2(\Omega) \cap H^3(\Omega^+) \cap H^3(\Omega^-)$, wenn wir $\mathbb{B}^{1,2}_{w,\chi_\delta,h}(\Omega)$ als Finite-Elemente-Ansatzraum nutzen, die optimale Konvergenzordnung der Ritz-Galerkin Lösung u^h an die Lösung des Interfaceproblems von $\mathcal{O}(h)$ in der H^1-Norm.

4. Aspekte der Implementierung

Die Umsetzung eines vernetzungsfreien Finite-Elemente-Verfahrens mit Interfacesplines in ein robustes und schnelles Computerprogramm wird durch die Tensorproduktstruktur der beiden Basistypen ermöglicht. Die beteiligten univariaten Splines lassen sich schnell mit dem de Boor-Algorithmus [21] auswerten. Die Auswertung des Gewichts χ_δ birgt auch keine Probleme und geschieht einfach mit Hilfe von Polynomroutinen. Lediglich die Gewichtsfunktion w und der Diffeomorphismus Ψ sowie der Gradient ∇w und die Einträge der Jacobimatrix J_Ψ müssen bei allgemeinen Rändern numerisch bestimmt werden. Da wir die Ränder als glatt und durch Bézierkurven darstellbar voraussetzen, können die benötigten Werte aber effizient mit einem eindimensionalen Newtonverfahren bestimmt werden. Die Galerkinmatrix der diskretisierten Variationsformulierung

$$G^h_\Gamma = \begin{pmatrix} G^h_{11} & G^h_{12} \\ G^h_{21} & G^h_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(|k\sim\Omega|+|\nu\sim\Gamma|)\times(|\{\nu\sim\Omega\}|+|\{\mu\sim\Gamma\}|)}$$

besteht aus vier Blöcken

$$\begin{aligned}
G^h_{11} &= a_\alpha(B^n_{h,k}, B^n_{h,\ell})_{k,\ell\sim\Omega} \in \mathbb{R}^{|\{k\sim\Omega\}|^2}, \\
G^h_{12} &= a_\alpha(\Psi^{n_\Gamma}_{h,\nu}, B^n_{h,\ell})_{\nu\sim\Gamma,\ell\sim\Omega} \in \mathbb{R}^{|\{\nu\sim\Gamma\}|\times|\{\ell\sim\Omega\}|}, \\
G^h_{21} &= \left(G^h_{12}\right)^\top \in \mathbb{R}^{|\{k\sim\Omega\}|\times|\{\nu\sim\Gamma\}|}, \\
G^h_{22} &= a_\alpha(\Psi^{n_\Gamma}_{h,\nu}, \Psi^{n_\Gamma}_{h,\mu})_{\nu\sim\Gamma,\mu\sim\Gamma} \in \mathbb{R}^{|\{\nu\in\Gamma\}|\times|\{\mu\in\Gamma\}|}.
\end{aligned}$$

Bei der Assemblierung der Matrix gehen wir blockweise vor (s. 7.3.2, 7.3.3, 7.3.4). Bei jedem Assemblierungsblock treten, bedingt durch die unterschiedliche Form der Trägerstruktur

von weB-Splines und den Zusatzsplines, verschiedene komplizierte Schnittmuster auf. Bei den Blöcken $G^h_{1,1}$ und $G^h_{1,2}$ bietet sich eine zellbasierte Integration an (s. 7.3.1). Zellen, die von $\partial\Omega$, Γ oder den Zellen der Zusatzsplines $Q^\Gamma_\nu, \nu \sim \Gamma$, geschnitten werden, müssen, um einen Genauigkeitsverlust durch unstetige Integranten bei der Gaußquadratur zu vermeiden, in geeigneter Weise subdividiert und auf ein Standardquadrat abgebildet werden. Subdividierte Zellen bekommen dann für jedes Teilgebiet, welches abgebildet wird, einen transformierten Satz Gaußpunkte. Der Block $G^h_{2,2}$ wird direkt auf den Zellen $Q^\Gamma_\nu, \nu \sim \Gamma$, assembliert. Die Transformation der Gaußpunkte gelingt hier mit dem Diffeomorphismus Φ, mit dem die Zusatzsplines konstruiert wurden, besonderes einfach. Die bei der Assemblierung enstehenden Datenstrukturen ($G^h_{1,1} \sim 4d$-Array, $G^h_{1,2} \sim 3d$-Array) werden durch Umindizierung ins $2d$-Format zurücktransformiert. Damit lassen sich gängige Löser auf das System anwenden (oder man implementiert Löser, die auf dieser Struktur arbeiten können). Aufgrund von beliebig kleinen Schnitten der Träger von Zusatzsplines und Tensorproduktsplines können Instabilitäten auftreten, weshalb man die Blockstruktur der Matrix auch beim Lösen ausnutzen sollte. Eine Möglichkeit ist, das Schur-Komplement zu bilden. Dabei wird das Gleichungssystem in zwei Systeme zerlegt. Das erste System hat dieselbe Dimension wie der $G^h_{2,2}$-Block und das zweite wie der große $G^h_{1,1}$-Block. Die instabilen Einträge tauchen nur noch im ersten System auf. Man löst dieses somit am besten mit einem cg-Verfahren und einem geeigneten Präkonditionierer (z.B. $SSOR$, vgl. [63]). Benutzt man weB-Splines für das zweite System, so ist das System stabil lösbar.

Im 8. Kapitel berechnen wir für ein paar einfache Modellbeispiele Ritz-Galerkin Approximationen aus einem Interfacesplineraum. Obwohl wir für die Tests nicht alle wichtigen algorithmischen Aspekte wie in Kapitel 7 beschrieben implementieren, die zu einer numerisch stabilen Berechnung führen, wird die Theorie im Rahmen der Rechengenauigkeit bestätigt.

5. Verallgemeinerungen

Die in dieser Arbeit erzielten Ergebnisse können in vielen Richtungen erweitert werden. Wir halten uns an Strang & Fix [83] und trennen die Richtungen nach Mathematikertypen aus den in Frage kommenden Fachgebieten:

- Aus der Sicht des reinen Mathematikers bzw. Approximationstheoretikers:
  - Abschwächung des Jackson-Satzes (Satz **??**) für Funktionen aus $H^1_0(\Omega) \cap H^2(\Omega^+) \cap H^2(\Omega^-)$. Daraus würde bei der Approximation mit Interfacesplines die optimale Konvergenzrate auch für Interfaceprobleme mit rechten Seiten in $L^2(\Omega)$ folgen.
  - Genauere Angabe der Konstanten in der Jackson-Abschätzung. Kann man zeigen, das
    $$\|u - u^h_\Gamma\|_{H^1(\Omega)} \preceq h\|f\|_{L^2(\Omega)}$$
    , so erhält man mit Aubin-Nitsche (1.3.4) sofort die optimale L^2-Konvergenzrate von $\mathcal{O}(h^2)$.
  - Höhere Konvergenzordnungen. Dies wird aber nicht ohne eine zusätzliche Erweiterung der Interfacesplinebasis möglich sein. Siehe auch 6.2.1 für Gedanken zu diesen Themen.

  - Betrachtung von allgemeineren Interfaceproblemen, z.B. mit $k > 1$ Interfaces, $k > 0$ sich schneidende Interfaces, ein Interface, bzw. mit einem Interfaces, welches den Rand schneidet, etc.
  - Konstruktion von Zusatzsplines in drei oder beliebigen Dimensionen.

- Aus der Sicht des angewandten Mathematikers und Numerikers:
  - Stabilisierung der Interfacesplinebasis. Eventuell gibt es einen ähnlichen Stabilisierungsvorgang wie bei den Tensorprodukt-B-Splines. Dann könnte man von vornherein das Ritz-Galerkin-System ohne Umwandlung in sein Schur-Komplement mit einem cg-Verfahren lösen.
  - Entwicklung eines optimalen oder hinreichend guten Präkonditionierers für das „kleine“ System aus der Schur-Komplement-Zerlegung.
  - Bestimmung des optimalen δ für den Streifen S_δ der Zusatzsplines.

- Aus der Sicht des informatikaffinen Numerikers:
  - Implementierung eines möglichst allgemeinen Programms, in dem unter anderem die Gebietsränder und das Interface als allgemeine Splinekurven implementiert werden.
  - Implementierung mehrerer Interfaces.
  - Optimierung des Programmcodes, Entwicklung effizienter und stabiler Algorithmen.
  - Optimale Assemblierung der Galerkinmatrix, hier insbesondere die effiziente Implementierung der mitunter komplizierten Schnittmuster.
  - Heuristische Bestimmung des optimalen δ für den Träger S_δ der Zusatzsplines.
  - Umsetzen des Programms in $3d$.

Summary and Discussion

This section contains a short summary of the thesis as well as a discussion of possible generalizations and further developments of the results achieved.

1. Interface Problem

We consider bounded domains $\Omega, \Omega^- \subset \mathbb{R}^d, \Omega^- \Subset \Omega$ with smooth boundaries $\partial\Omega$, $\Gamma := \partial\Omega^-$, where $\Omega^+ = \Omega \setminus (\Omega^+ \cup \Gamma)$. The inner boundary Γ is referred to as *interface*. The weak solution of the interface problem

$$\begin{cases} -\nabla\cdot(\alpha\nabla u) = f \\ u_{|\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

with piecewise constant coefficients

$$\alpha(x) = \begin{cases} \alpha^+ & \text{für} \quad x \in \Omega^- \cup \Gamma \\ \alpha^- & \text{für} \quad x \in \Omega^+, \end{cases} \quad \alpha^\pm \in \mathbb{R}^+, \alpha^+ \neq \alpha^-$$

and right-hand side $f \in L^2(\Omega) \cap H^m(\Omega^+) \cap H^m(\Omega^-)$ belongs to $H_0^1(\Omega) \cap H^{m+2}(\Omega^+) \cap H^{m+2}(\Omega^-), m \geq 0$. In a similar formulation, this statement is often quoted in the finite element literature subject to interface problems and virtually in every paper referenced as a by-product of an operator theoretical result (c.f. [77] in combination with [81]). Alternatively we give a somewhat elementary but technical proof a applying difference quotient technique, c.f. 3.2.1. For the solution of the interface problem, the following jump conditions along the interface hold (keep in mind that $u_{|\Omega^\pm}$ is at least H^2-regular for $m \geq 0$),

$$\begin{aligned} [\![u]\!]_\Gamma &= 0 \quad \text{in} \quad H^{1/2}(\Gamma) \\ [\![\alpha\nabla_\nu u]\!]_\Gamma &= 0 \quad \text{in} \quad H^{1/2}(\Gamma), \end{aligned}$$

therefore $[\![\nabla_\nu u]\!]_\Gamma \neq 0$, which in general $u \notin H^2(\Omega)$ implies.

2. Construction of Supplementary Splines

An approximation with classical mesh-based finite elements provides only a convergence rate of only $\mathcal{O}(h^{1/2})$. In one dimension, we can see that this rate cannot be improved without a special treatment of the elements in a neighborhood of the singularity (c.f. 4.3). Also, with the meshless b-spline-based elements from $w^e\mathbb{B}_h^n(\Omega)$, we generally cannot expect a better result, due to the smoothness of the weighted b-splines in a neighborhood of the interface. So, we enlarge the weB-space by the linear span of supplementary splines with singular gradients

$$\Psi_{\nu,h}^{n_\Gamma}(x,y) = \begin{cases} \tilde{\chi}_\delta\left(\Phi^{-1}(x,y)\right)\tilde{b}_{h,\nu}^{n_\Gamma}\left(\Phi^{-1}(x,y)\right) & \text{for} \quad (x,y) \in S_\delta \\ 0 & \text{for} \quad (x,y) \in \Omega \setminus S_\delta \end{cases},$$

which we construct with the aid of a smooth diffeomorphism $\Phi : \tilde{S}_\delta \longrightarrow S_\delta \subset \Omega$,

$$(x, y) = \Phi(s, t) := \gamma(t) + s \cdot \nu(t),$$

and a tensor-type product from two univariate functions defined on the edges of the rectangle $\tilde{S}_\delta = [0, \delta) \times [0, L)$. For a$C^m$-interface the mapping Φ belongs to C^{m-1} and maps the rectangle $\tilde{S}_\delta$ diffeomorph onto the strip S_δ. Here,

$$\tilde{b}^n_{k,h}(s, t) = \tilde{b}^n_{k,h}(t),\ k \sim \tilde{\Gamma}, \quad (s, t) \in [0, \delta) \times \tilde{\Gamma}$$

are the univariate periodic splines (c.f. 5.17) continuously extended from $\tilde{\Gamma} = [0, L)$ onto $\tilde{S}_\delta$ and

$$\tilde{\chi}_\delta(s, t) = \begin{cases} s & \text{für} \quad (s, t) \in [0, \delta^\star) \times \tilde{\Gamma} \\ s\zeta^m(s) & \text{für} \quad (s, t) \in [\delta^\star, \delta) \times \tilde{\Gamma} \end{cases}, 0 < \delta^\star < \delta$$

is a weight function (c.f. 5.1.4) univariate on $[0, \delta)$ and, as well on $\tilde{S}_\delta$ continuously extended. Outside the strip we set $\chi_\delta \equiv 0$.

As a consequence of the tensor product structure, many familiar properties of univariate b-splines are remain (c.f. 5.2.1):

- $\operatorname{supp} \Psi^{n_\Gamma}_{k,h} = \Phi([0, \delta) \times [kh, (k + n_\Gamma)h]) \subset S_\delta$
- $\Psi^{n_\Gamma}_{k,h} \geq 0$
- $\sum_{k \sim \Gamma} \beta_k \Psi^{n_\Gamma}_{k,h} = 0 \Longrightarrow \beta_k = 0, \quad k \sim \Gamma$
- $\sum_{k \sim \Gamma} \Psi^{n_\Gamma}_{k,h} = \chi_\delta$
- $[\![\Psi^{n_\Gamma}_{k,h}]\!]_\Gamma = 0$
- $\nabla_\nu \Psi^{n_\Gamma}_{k,h}]\!]_\Gamma = -\|\nu\|^2 \tilde{b}^{n_\Gamma}_{k,h}(t)$
- $\Psi^n_{k,h} \in H^1_0(\Omega) \cap C^\ell(\Omega^+) \cap C^\infty(\Omega^-), \quad \ell = \min\{n_\Gamma - 1, m\}.$

3. Approximation with Interface splines

If Γ does not contain any axis-parallel linear segments (not being a severe restriction), then the set $\{B^n_{k,h}\}_{k \sim \Omega} \cup \{\Psi^{n_\Gamma}_{h,k}\}_{k \sim \Gamma}$ is linearly independent (c.f. 5.2.2). We set $\chi_\delta \mathbb{B}^{n_\Gamma}_h(\Gamma) = \operatorname{span} \left\{ \Psi^{n_\Gamma}_{k,h} \right\}_{k \sim \Gamma}$ and thus generate via the direct sum with the weB-space the space of *interfacesplines:*

$$\mathbb{B}^{n,n_\Gamma}_{w,\chi_\delta,h}(\Omega) := w^e \mathbb{B}^n_h(\Omega) \oplus \chi_\delta \mathbb{B}^{n_\Gamma}_h(S_\delta),$$

In 5.2.3 we show some structural properties for an interface spline $u^h \in \mathbb{B}^{n,n_\Gamma}_{w,\chi_\delta,h}(\Omega)$:

- $u^h \in H^1_0(\Omega) \cap C^\ell(\Omega^+) \cap C^\ell(\Omega^-)$

- $[\![u^h]\!]_\Gamma = 0$
- $[\![\nabla_\nu u^h]\!]_\Gamma = g \in H^{n_\Gamma - 1/2}(\Gamma), \quad g \neq 0$

Here,

$$g = ||\nu(t)||^2 \sum_{k\sim\tilde{\Gamma}} \beta_k \tilde{b}^n_{k,h}(t)$$

holds for $n \geq 1$ pointwise and for $n = 1$ in the L^2-sense.

We prove in Chapter 6 a Jackson-type theorem for $\mathbb{B}^{1,2}_{w,\chi_\delta,h}(\Omega)$ and $u \in H^1_0(\Omega) \cap H^5(\Omega^+) \cap H^5(\Omega^-)$, e.g. there exists a $u^h_\Gamma \in \mathbb{B}^{1,2}_{w,\chi_\delta}(\Omega)$ with

$$\|u - u^h_\Gamma\|_{H^1(\Omega} \preceq h.$$

As a consequence (thanks to the Céa lemma 1.3.3), for $f \in L^2(\Omega) \cap H^3(\Omega^+) \cap H^3(\Omega^-)$ and $\mathbb{B}^{1,2}_{w,\chi_\delta,h}(\Omega)$ as finite element space, we obtain the optimal convergence rate $\mathcal{O}(h)$ of the Ritz-Galerkin solution u^h to the exact solution in the H^1-norm.

4. Computational Aspects

The conversion of a meshless finite element method with interface splines into a robust and fast computer program is due to the tensor product structure of the different basis types. The involved univariate splines can be evaluated quickly with the aid of the de Boor algorithm [21]. The evaluation of χ_δ causes no problems either, and the job can be easily done applying polynomial routines. Merely the weight w, the diffeomorphism Ψ, the gradients ∇w and the entries of the Jacobian J_Ψ have to be evaluated numerically in general. For smooth boundaries, in a Bézier curve representation (as we assume), the required values could be computed efficiently by a one-dimensional Newton-type procedure. The Galerkin matrix of the discretizised variational formulation

$$G^h_\Gamma = \begin{pmatrix} G^h_{11} & G^h_{12} \\ G^h_{21} & G^h_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(|k\sim\Omega|+|\nu\sim\Gamma|)\times(|\{\nu\sim\Omega\}|+|\{\mu\sim\Gamma\}|)}$$

consists of the four blocks

$$\begin{aligned}
G^h_{11} &= a_\alpha(B^n_{h,k}, B^n_{h,\ell})_{k,\ell\sim\Omega} \in \mathbb{R}^{|\{k\sim\Omega\}|^2}, \\
G^h_{12} &= a_\alpha(\Psi^{n_\Gamma}_{h,\nu}, B^n_{h,\ell})_{\nu\sim\Gamma,\ell\sim\Omega} \in \mathbb{R}^{|\{\nu\sim\Gamma\}|\times|\{\ell\sim\Omega\}|}, \\
G^h_{21} &= \left(G^h_{12}\right)^\top \in \mathbb{R}^{|\{k\sim\Omega\}|\times|\{\nu\sim\Gamma\}|}, \\
G^h_{22} &= a_\alpha(\Psi^{n_\Gamma}_{h,\nu}, \Psi^{n_\Gamma}_{h,\mu})_{\nu\sim\Gamma,\mu\sim\Gamma} \in \mathbb{R}^{|\{\nu\in\Gamma\}|\times|\{\mu\in\Gamma\}|}.
\end{aligned}$$

So we assemble the Galerkin matrix blockwise, c.f. 7.3.2, 7.3.3, 7.3.4. In each assembly block, due to the different kinds of supports of the participating weB- and supplementary splines, several distinct cut patterns occur. For the blocks $G^h_{1,1}$ a $G^h_{1,2}$, a cell-based integration routine, is appropriate, c.f. 7.3.1. Cells which cut $\partial\Omega$, Γ or an interface cell

from the supplementary splines $Q_\nu^\Gamma, \nu \sim \Gamma$, have to be subdivided suitably and mapped to a standard square in order to prevent a significant loss of accuracy by the Gauss quadrature due to discontinuous integrands. Every subcell receive a set of transformed Gauss points and weights. The assembly of block $G_{2,2}^h$ takes place directly on the cells $Q_\nu^\Gamma, \nu \sim \Gamma$. The transformation of the Gauss data is easily achieved by the diffeomorphism Φ from the construction of the supplementary splines. The data structures ($G_{1,1}^h \sim 4d$-array, $G_{1,2}^h \sim 3d$-array), created by the assembly, could be re-transformed to a $2d$ structure by re-indexing. So, conventional system solvers can be used (or solvers are implemented which be directly operate on the compact structure). As a consequence of arbitrary small cuts of the supports of the two involved spline basis types, instabilities can occur. For this reason, make use of the block structure of the matrix. One possibility is to form the so called Schur complement decomposition, in which the equation system is divided into two. The first one has the same size as the relative small $G_{2,2}^h$-block and the second one, has the same size as the big $G_{1,1}^h$-block. So, the unstable entries occur only in the smaller system which can be solved with an appropriate *cg*-method and a suitable preconditioner (e.g. $SSOR$ c.f. [63]). The second system could be solved stably, if using e.g. weB-splines for its assembly.

In chapter 8 we compute some Ritz-Galerkin approximations from an interface spline space for simple model examples. Although we have not implemented all the important algorithmic aspects yield a numerically stable computation as stated above (or more exactly in chapter 7), our theoretical results are well confirmed within the limitations of computational accuracy.

5. Generalizations and Future Work

The results in this thesis could be extended in many directions. We follow Strang & Fix [83] and separate the directions according to different kinds of mathematical disciplines.

- From a pure mathematician's or approximation theoretical point of view:
  - Weakening the Jackson theorem 6.2.1 for functions in $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega^+) \cap H^2(\Omega^-)$. This would justify an optimal approximation of interface problems with right hand-sides in $L^2(\Omega)$ with interface splines.
  - More precise information of the constants in the Jackson estimate 6.2.1. If we are able to show that

    $$\|u - u_\Gamma^h\|_{H^1(\Omega)} \preceq h\|f\|_{L^2(\Omega)},$$

    we immediately gain (thanks to Aubin-Nitsche, c.f. 1.3.4) the optimal L^2 convergence rate of $\mathcal{O}(h^2)$.
  - Higher convergence rates. This would probably not be possible without a further extension of the interface spline basis. See also 6.2.1 for some thoughts on this subject.
  - Consideration of more general interface problems, e.g. with $k > 1$ interfaces, $k > 0$ intersecting interfaces, a boundary intersecting interface etc.

  - Construction of supplementary splines in three (or arbitrary) dimensions

- From an applied mathematician's or numerical analysist's point of view:
  - Stabilization of the interface spline basis. Perhaps an extension procedure as with the tensor product b-splines on domains will lead to an stabilized basis for the interface spline space. Then one could use a priori an ordinary *cg*-type solver for solving the system stably also for small h without a Schur complement decomposition.
  - Development of an optimal or sufficiently well-working preconditioner for the „small“ system, resulting from the Schur complement decomposition.
  - Determination of an optimal δ for the supports of the supplementary splines.

- From the point of view of a computer-science-orientated numerical analysist
  - Implementation of a program being as general as possible (e.g. boundaries and interface curves implemented as spline curves).
  - Implementation of several interfaces.
  - Optimization of the code, development of stable and efficient algorithms.
  - Optimized assembly of the Galerkin matrix, in particular the efficient implementation of the occasionally complicated cut patterns.
  - Heuristical determination of an optimal δ for the strip S_δ.
  - Adapting the program in $3d$.

Anhang

Hier stellen wir lose Sätze und Konzepte aus der elementaren Analysis und Funktionalanalysis zusammen, die nur an einzelnen Stellen benötigt werden und deshalb hier nachgeschlagen werden können. Die Beweise finden sich in ähnlicher Darstellung in jedem Lehrbuch über die genannten Themen, siehe z.B. zu Teil A [56],[57] und zu Tweil B [3].

A. Analysis

Satz A.1 (Young'sche Ungleichung)
Es ist für $a, b \geq 0, \epsilon > 0$

$$ab \leq \frac{\epsilon}{2}a^2 + \frac{1}{2\epsilon}b^2.$$

Satz A.2 (Mittelwertsatz)
Sei $U \subset \mathbb{R}^d$ *offen,* $f \in C^1(U)$ *sowie* $x \in U$ *und* $\xi \in \mathbb{R}^d$*, so dass die Verbindungsstrecke* $x + \theta\xi, 0 \leq \theta \leq 1$ *in* U *liegt. Dann gilt*

$$f(x+\xi) - f(x) = \int_0^1 \langle \nabla(f(x+\theta\xi)), \xi \rangle d\theta.$$

Satz A.3 (Parsevalsche Gleichung)
Es sei $f \in L^2(0, 2\pi)$ *und* $a_0, a_k, b_k, k = 1, ..., \infty$ *die reellen Fourierkoeffizinten der mit* f *gebildeten reellen Fourierreihe. Dann ist*

$$\frac{1}{2}|a_0|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(|a_k|^2 + |b_k|^2\right) = \frac{1}{2\pi}\|f\|^2_{L^2(0,2\pi)}.$$

Satz A.4 (Abschneidefunktion)
Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ *ein beschränktes Gebiet und* $\Omega_0 \Subset \Omega$*. Dann existiert eine* Abschneidefunktion *Funktion* $\chi \in C_0^\infty(\Omega)$*, so dass* $0 \leq \chi \leq 1$ *und* $\chi_{|\Omega_0} \equiv 1$*. Ist* $\operatorname{dist}(\partial\Omega, \partial\Omega_0) = \delta > 0$*, dann kann* χ *so gewählt werden, dass*

$$|\partial^\alpha \chi(x)| \leq C_{d,\alpha}\delta^{-|\alpha|}, \quad |\alpha| \in \mathbb{N}, x \in \Omega \setminus \Omega_0.$$

Definition A.1 (Ausschöpfung)
Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$*. Mann nennt eine Folge von Mengen* $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \Omega_3 \subset ... \subset \Omega$ *mit* $\Omega = \cup_{k\in\mathbb{N}}\Omega_k$ *eine* Ausschöpfung *von* Ω*.*

Satz A.5 (Integration über Ausschöpfung)
Es sei $u : \Omega \subset \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ *und* $(\Omega_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *eine Ausschöpfung von* Ω*, so dass* $u \in L^1(\Omega_k), k \in \mathbb{N}$*. Dann ist* u *über* Ω *genau dann integrierbar, falls die Folge* $\left(\int_{\Omega_k} |u(x)|dx\right)_{k\in\mathbb{N}}$ *beschränkt ist und es gilt*

$$\int_\Omega u(x)dx = \lim_{k\to\infty} \int_{\Omega_k} u(x)dx.$$

B. Funktionalanalysis

Definition B.1 (Schwache und schwach∗ Konvergenz)
Es sei $(U, \|\cdot\|_U)$ ein unendlichdimensionaler Banachraum und $(U', \|\|_{U'})$ der dazugehörige Dualraum. Man sagt, eine Folge $(u_k)_{k\in N}$ konvergiert schwach *gegen ein $u \in U$, falls*

$$\lim_{k\to\infty} |Fu_k - Fu| = 0, \quad \forall F \in U'$$

und eine Folge $(F_k)_{k\in N}$ aus U' konvergiert schwach∗ *gegen ein $F \in U'$, falls*

$$\lim_{k\to\infty} |F_k u - Fu| = 0, \quad \forall u \in U.$$

Lemma B.1 (Unterhalbstetigkeit der Norm)
Konvergiert eine Folge $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset U$ schwach gegen ein $u \in U$, so ist die reelle Folge $(\|u_k\|_U)_{k\in\mathbb{N}}$ beschränkt und die Norm ist unterhalbstetig, *d.h.*

$$\liminf_{k\to\infty} \|u_k\|_U \geq \|u\|_U.$$

Lemma B.2 (Kriterium für schwach∗ Konvergenz)
Sei U ein Banachraum und $(F_k)_{k\in N}$ eine Folge in U'. Dann konvergiert $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ genau dann im schwach∗ Sinn gegen ein $u \in U'$, falls die Menge $\{\|F_k\|_{U'}\}_{k\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist und falls eine dichte Teilmenge $V \subset U$ existiert, s.d. die Folgen $(F_k v)_{k\in\mathbb{N}}$ für alle $v \in V$ Cauchyfolgen in $\mathbb{R}$ sind.

Wir bezeichnen mit $U'' := \{\Phi : U' \to \mathbb{R} \mid \|\Phi\|_{U''} < \infty\}$ den Bidualraum von U'. Hierbei ist $\|\Phi\|_{U''} = \sup\limits_{f\in U', \|f\|_{U'}\neq 0} \dfrac{|\Phi f|}{\|f\|_{U'}}$. Die Abbildung $i : U \to U''$ mit $i(u) = \Phi_u\cdot$, $\Phi_u F := Fu \forall F \in U'$ nennt man kanonische Inklusion. Ist i bijektiv, so nennt man U reflexiv.

Folgerung B.1 (Hilberträume sind reflexiv)
Jeder Hilbertraum ist reflexiv und der schwache und der schwach∗ Konvergenzbegriff im Dualraum stimmen überein.

Folgerung B.2 (Schwache L^2-Konvergenz)
Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein Gebiet und $(u_k)_{k\in\mathbb{N}})$ eine Folge aus $L^2(\Omega)$. Die Folge konvergiert genau dann schwach, wenn $(\|u_k\|)_{k\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}$ ist und wenn für alle $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ die Folgen $\left(\int_\Omega u_k \phi dx\right)_{k\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folgen in $\mathbb{R}$ sind.

Literaturverzeichnis

[1] N.J. Achieser: *Vorlesungen über Approximationstheorie.* Math. Lerbücher, 2. Auflage, Band II, Akademie Verlag, Berlin, (1967).

[2] R. Adams und J.J. Fournier: *Sobolev Spaces.* Academic Press Elsevier, 2, (2003).

[3] H.W. Alt: *Lineare Funktionalanalysis.* Springer-Berlin, 5, (2006).

[4] C. Apprich: *(Arbeitstitel) B-Spline Approximation auf Gebieten mit Ecken.* Dissertation, Universität Stuttgart, (noch nicht erschienen).

[5] C. Apprich: *Der Penalty-Ansatz bei Spline-Galerkin-Approximation des Poisson-Problems.* Diplomarbeit, Universität Stuttgart, (2001).

[6] C. Apprich et.al.: *Die* `WEB-TOOLBOX`*-Dokumentation.* Softwaremanual, Universität Stuttgart, (2001).

[7] W. Arendt und K. Urban: *Partielle Differenzialgleichungen.* Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, (2010).

[8] H. Attouch, G. Buttazo und G. Michaille: *Variational Analysis in Sobolev and BV Spaces.* MPS-Series in Optimizaton (SIAM), Philadelphia, (2006).

[9] I. Babuska: *The Finite Element Method for Elliptic Equations with Discontinous Coefficents.* Computing, 5, S.207-213, (1970).

[10] I. Babuska: *The Finite Element Method with Penalty.* Math. Comp., 27, S.221-228,(1973).

[11] D. Braess: *Finite Elemente - Theorie, schnelle Löser und Anwendungen in der Elastizitätstheorie.* Springer-Berlin, 4, (2007).

[12] J. H. Bramble und J. T. King: *A finite element method for interface problems in domains with smooth boundaries and interfaces.* Advances in Computational Mathematics, 6, S.109-138, (1996).

[13] J.H. Bramble und S. Hilbert: *Estimation of Linear Functionals on Sobolev Spaces with Application to Fourier Transforms and Spline Interpolation.* SIAM Journal on Numerical Analysis, 7(1), 112-123, (1970).

[14] S. Brenner und W. Scott: *The Mathematical Theory of Finite Element Methods.* Springer-Berlin, 5, (2007).

[15] M. Bossle: *$\mathcal{R}$-Funktionen für Finite Elemente Approximationen mit web-Splines.* Diplomarbeit, Universität Stuttgart, (2001).

[16] J. Céa: *Approximation varitionelle de problèmes aux limites.* Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 14, 2, S.345-444, (1964).

[17] P.G. Ciarlet: *The Finite Element Method for Elliptic Problems.* (SIAM Classics in Applied Mathematics), SIAM, Philadelphia, vol.40, (2002).

[18] Z. Chen und J. Zou: *Finite Element Methods and their convergence for elliptic and parabolic interface problems.* Numerische Mathematik, 79, S.175-202, (1998).

[19] L.T. Dechevski und E. Quak: *On the Bramble-Hilbert Lemma.* Numerical Functional Analysis, 11, 485-495, (2001).

[20] W. Dahmen, R. DeVore und K. Scherer: *Multi-Dimensional Spline Approximation.* SIAM Journal on Numerical Analysis, 17(3), S.380-402, (1985).

[21] C. de Boor: *A Practical Guide to Splines (revised Edition).* Springer-Verlag New York, (2001).

[22] C. de Boor: *The Way things were in multivariate splines: A personal view.* In: Nonlinear and Adaptive Approximation, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, S.19-37, (2009).

[23] C. de Boor, K. Höllig und S. Riemenschneider: *Box-Splines.* Springer-Verlag New York, (1993).

[24] M. Dobrowolski: *Angewandte Funktionalanalysis.* Springer-Verlag Berlin, 2, (2011).

[25] M. Dobrowolski: *Privatkommunikation.* Stuttgart, Würzburg, (23.05.2012).

[26] A. Ern und J.-L. Guermond: *Theory and Practice of Finite Elements.* (Applied Mathematical Sciences, 159), Springer-Verlag New York, (2004).

[27] L.C. Evans: *Partial Differential Equations.* American Mathematical Society, New York, (2000).

[28] R.L. Foote: *Regularity of the Distance Function.* Proceedings of the American Mathematical Society, 92, S.153-155, (1984).

[29] D. Gilbarg und N.S. Trudinger : *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order.* (Orig. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Classics in Mathematics), Vol.24, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, (2001).

[30] P. Grisvard: *Elliptic Problems in Nonsmooth Domains.* Pitman, Boston, (1985).

[31] P. Grisvard: *Singularites in Boundary Value Problems.*(RMA 22), Springer-Mason, (1992).

[32] S. Gross und A. Reusken: *Numerical Methods for Two-Phase Incompressible Multiphase Flows.*(Springer Series in Computational Mathematics 40), Springer, Heidelberg (2011).

[33] W. Hackbusch: *Theorie und Numerik elliptischer Differentialgleichungen.* (Teubner Studienbücher Mathematik), Teubner, Stuttgart (1992).

[34] H. Habrecht: *Numerische Mathematik.* Vorlesungsskript, Universität Bonn, (2009).

[35] M.R. Hestenes und E. Stiefel: *Methods of Conjugate Gradients for Solving Linear Systems.* NBS J. Res., 49:S.409-436, (1952).

[36] J. Huang und J. Zoun: *A mortar element method for elliptic problems with discontinous coefficents.* IMA Journal of Numerical Analysis, 22, S.549-576, (2002).

[37] K. Höllig et.al.: *Special Issue: Multivariate Splines.* Constructive Approximation, Vol.3 (2), (1987).

[38] K. Höllig: *Grundlagen der Numerik.* MathText, Zavelstein, (1998).

[39] K. Höllig, U. Reif und J. Wipper: *Error Estimates for the web-Method.* In: Mathematical Methods for Curves and Surfaces: Oslo 2000. T. Lyche und L.L. Schumaker (eds.), S. 195-209, Vanderbilt University Press, Nashville, TN, (2001).

[40] K. Höllig, U. Reif und J. Wipper: *Weighted extended b-spline approximation of Dirichlet problems.* SIAM Journal on Numerical Analysis, 39(2), S.442-462, (2001).

[41] K Höllig, U. Reif und J. Wipper: *B-Spline Approximation of Neumann Problems.* preprint, Universität Stuttgart (2001).

[42] K. Höllig, U. Reif und J. Wipper: *Multigrid Methods with web-Splines.* Numerische Mathematik, Volume 91(2), S.237-256, (2002).

[43] K. Höllig und U. Reif: *Nonuniform web-splines.* Computer Aided Geometric Design, 10:S.277-294, (2003).

[44] K. Höllig: *Finite Element Methods with B-Splines.* (SIAM Frontiers in Applied Mathematics, 26), Philadelphia, (2003).

[45] K. Höllig, C. Apprich und A. Streit: *Introduction to the web-Method and its applications.* Advances in Computational Mathematics, 23, S.215-237, (2005).

[46] K. Höllig und A. Hoffacker: *Finite Element Analysis with weighted and isogeometric b-splines.* (LNCS Volume 6920), Springer-Verlag, (2012).

[47] K. Höllig und J. Hörner: *Programming Multigrid Methods with B-Splines.* (preprint) Stuttgarter Mathematische Berichte 2011-016, (2011).

[48] K. Höllig und J. Hörner: *Approximation and Modelling with B-Splines.*, Monographie (noch nicht erschienen).

[49] J. Hörner: *Mehrdimensionale Integration über* NURBS-*Gebiete*, Dissertation, Universität Stuttgart, (noch nicht erschienen).

[50] J. Huang und J. Zou: *A mortar element method for elliptic problems withd discontinous coefficients.* IMA Journal of Numerical Analysis, 22, S.215-237, (2002).

[51] D. Jackson: *Über die Genauigkeit der Annäherung stetiger Funktionen gegebenen Grades und trigonometrischer Summe gegebener Ordnung*, Dissertation, Universtität Göttingen, (1911).

[52] B.S. Jovanovic und L.G. Vulkov: *Finite Element Approximation of an Elliptic Boundary Value Problem with Interface.* In: Lecture Notes in Computer Science, Springer-Verlag Berlin, Vol.5434, S.56-67,(2009).

[53] L.W. Kantorowitsch und W.L. Krylow: *Näherungsmethoden der Höheren Analysis.* VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, (1956).

[54] M. Kumar und P. Joshi: *Some Numerical Techniques for Solving Elliptic Interface Problems.* Numerical Methods for Partial Differential Equations, Vol28(1), S.94-114, (2012).

[55] A. Keller: *Penalized Least Squares Approximation von ganzzahligen Daten auf Rechteckgittern.* Diplomarbeit, Universität Würzburg, (2007).

[56] K. Königsberger: *Analysis 1.* Springer-Verlag Berlin, (2003).

[57] K. Königsberger: *Analysis 2.* Springer-Verlgag Berlin, (2004).

[58] R.J. LeVeque und Z. Li: *The Immersed Interface Method for Elliptic Equations with Discontinous Coefficents and Singular Sources.* SIAM J. Numer. Anal. 31, S.1091-1044, (1994).

[59] Z. Li und I. Kazufumi: *Maximum principle preserving schemes for interface problems with discontinous coefficents.* SIAM J. Sci. Comput. 23, S.339-361, (2001).

[60] Z. Li und T. Lin und Xiaohui Wu: *New cartesian grid methods for interface problems using the finite element formulation.* Numerische Mathematik, 96, S.61-98, (2003).

[61] Z. Li und I. Kazufumi: *The Immersed Interface Method.* (SIAM Frontiers in Applied Mathematics, 33), Philadelphia, (2006).

[62] M. Marsden: *An Identity for spline functions with applications to variation diminishing spline approximations.* Journal of Approximation Theory, vol.3, (1970).

[63] A. Meister: *Numerik Linearer Gleichungssysteme.* Vieweg+Teubner Verlag, Wiesbaden, (2011).

[64] N. Meyers und J.Serrin: *$W = H$.* Proc. Nat. Acad. Sci. USA, vol.51(1), S.1055-1056, (1964).

[65] B. Mössner: *B-Splines als Finite Elemente.* Dissertation, TU Darmstadt (2006).

[66] B. Mössner und U. Reif: *Stability of Tensor Product Splines on Domains.* Journal of Approximation Theory, Vol.154(1), S.1-19, (2008).

[67] M. Neamtu: *What is the Natural Generalization of Univariate Splines to Higher Dimensions.* In: Mathematical Methods for Curves and Surfaces: Oslo 2000. T. Lyche und L.L. Schumaker (eds.), Vanderbilt University Press, Nashville, TN, S.355-392, (2000).

[68] S.J. Owen: *A Survey of unstrucured mesh generation techology.* Int. Proceedings, 7th Information Meshing Roundtable, Sandia National Laboratories, S.233-268 (1998).

[69] M. Petzold: *Regularity and error estimators for elliptic problems with discontinous coefficents.* Dissertation, Freie Universität Berlin, (2001).

[70] J. Prasiswa: *Lokale und globale Algorithmen zur Approximation mit erweiterten B-Splines.* Dissertation, Technische Universität Darmstadt, (2009).

[71] A. Quarteroni und A. Valli: *Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations.* Oxford Science Publications, (1999).

[72] V. Rvachev und T.I. Sheiko: *R-Functions in boundary value problems in mechanics.* Applied Mechanics Revue, 48, S.151-188, (1995).

[73] U. Reif: *Polynomial approximation on domains bounded by diffeomorphic images of graphs.* Journal of Approximation Theory, 164, S.954-970, (2012).

[74] I.J. Schoenberg: *Contributions to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions, Part A: On the problem of smoothing or graduation, a first class of analytic approximation formulas.* Quart. Appl. Math., 4, S.45-99, (1946).

[75] L.L. Schumaker: *Spline-Functions: Basic Theory.* (Pure & Applied Mathematics), Wiley-Interscience, (1981).

[76] L. L. Schumaker und Ming-Jun Lai: *Spline Functions on Triangulations.* (Encyclopedia of Mathematics), Cambridge University Press, (2007).

[77] З. Г. Шефтел: нергетические неравенства и общие граничные задачи дл ллиптических уравнении с разрывными коффициентами. Сибирск. Мат. Ж. **6**, S.636-668, (1965).

[78] Z. G. Sheftel: *A general theory of boundary value problems for elliptic systems with discontinous coefficents.* Ukrain. Mat. Zurnal, Vol.18(3), S.132-136, (Russisch), (1966).

[79] O. Steinbach: *Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme.* Teubner, Wiesbaden, (2005).

[80] A.H. Stroud und D. Secrest: *Gaussian Quadratur Formulas.* Prentice-Hall, (1966).

[81] J. A. Roitberg und Z.G Sheftel: *A Theorem on Homoemorphisms for elliptic systems and applications.* (Englische Übersetzung) Math. USSR Sbornik. Vol.7(3), S.439-465, (1969).

[82] N. Sissouno: *Multivariate Splineapproximation auf Gebieten.* Dissertation, TU Darmstadt (2011).

[83] G. Strang und G. Fix : *An Analysis of the Finite Element Method - New Edition.* Wellesley-Cambridge Press, Wellesley MA, (2008).

[84] A. Streit: *Finite Elemente Approximation der Plattengleichung mit web-Splines.* Diplomarbeit, Universität Stuttgart, (2002).

[85] V.P. Uday, D.B. Amba und K.S. Ravindra: *Finite Element Mesh Generation of Human Body Segment in 2-D and 3-D Using B-Spline Method.* Computer Aided Design & Applications, vol9(3), S.307-320, (2008).

[86] J. Wloka: *Partielle Differentialgleichungen, Sobolevräume und Randwertaufgaben.* Teubner, Stuttgart, (1982).

[87] J. Wipper: *Finite-Elemente-Approximation mit WEB-Splines.* Dissertation, Universität Stuttgart, (2005).