Zur Kollineationsgruppe von achtdimensionalen lokalkompakten Translationsebenen

Von Hermann Hähl

§ 1. Einleitung

1.1. Studiert man die Gruppe $\mathfrak{G}^c$ der stetigen affinen Kollineationen einer achtdimensionalen lokalkompakten Translationsebene mit dem Ziel, die Ebenen mit großen Kollineationsgruppen zu klassifizieren, so ist die Betrachtung von kompakten zusammenhängenden Untergruppen, die zwei Punkte auf der Translationsachse L_∞ festlassen und auf L_∞ fast effektiv wirken, sehr wichtig. Dies läßt sich etwa aus den in § 1 von [6] geschilderten Ergebnissen entnehmen.

Ist K eine solche Untergruppe, so kann man zur Eingrenzung der Möglichkeiten die Klassifikation von Richardson [15] der Wirkungen kompakter Liegruppen auf der 4-Sphäre heranziehen; L_∞ ist ja als projektive Gerade homöomorph zur 4-Sphäre. Da K Fixpunkte in L_∞ haben soll, ist nach dieser Klassifikation die Wirkung von K auf L_∞ die Einpunktkompaktifizierung der gewöhnlichen linearen Wirkung einer der Gruppen $SO_4(\mathbb{R})$, $U_2(\mathbb{C})$, $SU_2(\mathbb{C})$ oder $SO_3(\mathbb{R})$ auf $\mathbb{R}^4 = \mathbb{C}^2$, falls nicht $\dim K \leqq 2$ ist.

1.2. In den Fällen, in denen K auf L_∞ als $SO_4(\mathbb{R})$, $U_2(\mathbb{C})$ oder $SU_2(\mathbb{C})$ wirkt, hat K dort außer zwei Fixpunkten lauter zur 3-Sphäre homöomorphe Bahnen. Nach dem Sphärensatz [5: 1.2] ist daher die Ebene (falls es sich nicht um die klassische Quaternionenebene handelt) vom Lenz-Typ V, oder aber die beiden Fixpunkte von K in L_∞ (die wir in Übereinstimmung mit [5] s und w nennen) sind Fixpunkte sogar der Zusammenhangskomponente Γ von $\mathfrak{G}^c$. Die Ebenen vom Lenz-Typ V dieser Art wurden in [4: § 5] im einzelnen angegeben; im ihnen ist $\dim \Gamma = 18$. — Betrachtet man die Situation, daß Γ zwei Fixpunkte in L_∞ hat, so kann man annehmen, daß K maximal unter den kompakten, zusammenhängenden fast effektiv auf L_∞ wirkenden Untergruppen ist. Γ erweist sich dann als das semidirekte Produkt des Normalteilers der Dilatationen (Translationen und Streckungen) mit einer Untergruppe, in der K Kodimension höchstens 1 hat ([5: 2.1]). Ist dabei $K \mid L_\infty \cong SO_4(\mathbb{R})$, so folgt $15 \leqq \dim \Gamma \leqq 17$; diese Situation wurde in [7] und [8] eingehend behandelt, und es gelang auch hier, alle Ebenen dieses Typs — die sogenannten $SO_4(\mathbb{R})$-*Ebenen* und Spin(4)-*Ebenen* — explizit zu bestimmen. Für $K \mid L_\infty \cong U_2(\mathbb{C})$ bzw. $K \mid L_\infty \cong SU_2(\mathbb{C})$ ergibt sich hingegen $\dim \Gamma \leqq 15$ bzw. $\dim \Gamma \leqq 14$, so daß diese Fälle unter dem Gesichtspunkt großer Kollineationsgruppen nicht mehr von Belang sind.

1.3. Die nächste wichtige Aufgabe im Rahmen des Klassifikationsprogramms ist damit das Studium der Situation $K \mid L_\infty \cong SO_3(\mathbb{R})$. Wir können dabei die bereits erwähnten $SO_4(\mathbb{R})$-Ebenen und Spin(4)-Ebenen, in denen Untergruppen dieser Art natürlich auch schon auftreten, beiseite lassen. Einen weiteren bereits analysierten Sonderfall zu dieser Situation bilden die Ebenen, in denen $\mathfrak{G}^c$ eine zu $SL_2(\mathbb{C})$ isomorphe abgeschlossene Untergruppe Λ enthält, die sogenannten $SL(\mathbb{C})$-*Ebenen* (siehe [9]); eine maximale kompakte Untergruppe $K \cong SU_2(\mathbb{C})$ von $\Lambda \cong SL_2(\mathbb{C})$ wirkt auf L_∞ als die Zentrumsfaktorgruppe $SO_3(\mathbb{R})$ von $SU_2(\mathbb{C})$. Die Kollineationsgruppe einer $SL_2(\mathbb{C})$-Ebene ist 15- oder 16-dimensional; von den bisher erwähnten Ebenen unterscheiden sich die $SL_2(\mathbb{C})$-Ebenen von vornherein dadurch, daß in ihnen Γ keinen Fixpunkt hat.

Man fragt sich nun, welche Möglichkeiten über diese Sonderfälle hinaus zur Realisierung der Situation $K \mid L_\infty \cong SO_3(\mathbb{R})$ noch bestehen. Diese Frage wird schließlich zu zwei weiteren großen Ebenenfamilien führen, die unter dem Gesichtpunkt großer Kollineationsgruppen von Bedeutung sind. Die explizite Aufstellung dieser Ebenen soll an anderer Stelle ([10, 11]) erfolgen; die vorliegende Arbeit ist der grundsätzlichen Klärung der für die Kollineationsgruppe in dieser Situation bestehenden Möglichkeiten gewidmet, auf der die explizite Bestimmung der Ebenen dann aufbauen kann. Das Ergebnis ist der folgende

1.4. $SO_3(\mathbb{R})$**-Satz.** *Sei Γ die Zusammenhangskomponente der Gruppe der stetigen affinen Kollineationen einer nicht desarguesschen, achtdimensionalen lokalkompakten Translationsebene, in der der Stabilisator Γ_0 eines (als Koordinatenursprung gewählten) affinen Punkts o eine kompakte, zusammenhängende, zu* $SO_3(\mathbb{R})$ *lokal isomorphe Untergruppe Σ enthält, welche auf der Translationsachse L_∞ Fixpunkte hat und eine zu* $SO_3(\mathbb{R})$ *isomorphe Transformationsgruppe induziert.*

Dann bestehen die folgenden alternativen Möglichkeiten:

(0a) *Die Ebene ist eine* $SO_4(\mathbb{R})$*-Ebene oder eine* Spin(4)*-Ebene (im Sinne von* [7] *und* [8]).

(0b) *Die Ebene ist eine* $SL_2(\mathbb{C})$*-Ebene (im Sinne von* [9]).

(1) *Σ ist ein Normalteiler von Γ_0, und* $\dim \Gamma \leqq 14 + d$, *wo* $d \in \{1, 2\}$ *die Dimension des Kerns der Ebene ist.*

(2) *Γ hat genau einen Fixpunkt s in L_∞, und Γ_0 enthält einen dreidimensionalen abgeschlossenen Normalteiler $N \cong \mathbb{R}^3$, der aus Scherungen mit Scherungszentrum s besteht.*

Im Hinblick auf Ebenen mit großen Kollineationsgruppen ist hiervon die Alternative (2) von besonderem Interesse. In der Tat gelingt es auch, alle Ebenen, die unter diese Alternative fallen, explizit zu bestimmen; dies soll an anderer Stelle ausgeführt werden ([10, 11]).

Der Beweis des Satzes erfolgt in zwei Etappen. In § 2 wird die behauptete Alternative grundsätzlich bewiesen (2.2 und 2.3), wobei aber von dem in Alternative (2) auftretenden Normalteiler N nur die gruppentheoretische

Struktur aufgehellt werden kann. Der Beweis, daß N eine Gruppe von Scherungen ist, erfordert dann noch eine sehr eingehende Analyse der Situation, die in § 3 durch einige Aussagen über lineare Gruppen vorbereitet und in § 4 durchgeführt wird. Dabei wird es notwendig sein, ein angenommenes Gegenbeispiel regelrecht ein Stück weit zu konstruieren, ehe sich seine Lebensuntüchtigkeit erweist.

Zum Schluß dieser Einleitung erinnern wir hinsichtlich der allgemeinen Theorie achtdimensionaler lokalkompakter Translationsebenen an die wichtigsten

1.5. Grundtatsachen (siehe [3: § 3], [5: 1.6], [6: 1.4]). Der Raum $\mathbb{A}$ der affinen Punkte einer achtdimensionalen lokalkompakten Translationsebene läßt sich so mit dem topologischen Vektorraum $\mathbb{R}^8$ identifizieren, daß die Translationen genau die Vektorraumtranslationen sind. Die affinen Geraden durch den Ursprung $o \in \mathbb{R}^8$ sind dann paarweise komplementäre lineare Teilräume der halben Dimension; die übrigen affinen Geraden sind die Bilder dieser Ursprungsgeraden unter den Translationen. Eine solche Identifikation wird stets stillschweigend zugrunde gelegt.

Die Translationsachse L_∞ als uneigentliche Gerade ergänzt die affine Ebene zu einer topologischen projektiven Ebene. L_∞ ist als projektive Gerade homöomorph zur Einpunktkompaktifizierung einer affinen Geraden, also zur 4-Sphäre $\mathbb{S}^4$.

Die Gruppe $\mathbb{G}^c$ der stetigen affinen Kollineationen ist semidirektes Produkt der Translationsgruppe mit der Untergruppe $\mathbb{G}_o^c$ der den Ursprung festlassenden Kollineationen. $\mathbb{G}^c$ ist eine abgeschlossene Untergruppe der generellen linearen Gruppe $\mathrm{GL}_8(\mathbb{R})$ von $\mathbb{A} = \mathbb{R}^8$.

Außer in der desarguesschen Ebene über dem Quaternionenkörper $\mathbb{H}$ sind die Kollineationen aus der Zusammenhangskomponente Γ_0 von $\mathbb{G}_o^c$ linear sogar über dem Kern $\mathbb{K}$ der Ebene, der als lokalkompakter zusammenhängender Körper neben $\mathbb{R}$ noch der Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen oder $\mathbb{H}$ (im Fall der Quaternionenebene) sein kann. Γ_o ist fastdirektes Produkt

$$\Gamma_o = \mathrm{S}\Gamma_o \cdot \Gamma^1_{[o,L_\infty]}$$

des Normalteilers

$$\mathrm{S}\Gamma_0 = \{\gamma \in \Gamma_o;\ \det_{\mathbb{K}} \gamma = 1\}$$

der Kollineationen aus Γ_o, die über dem Kern Determinante 1 haben, mit der Zusammenhangskomponente $\Gamma^1_{[o,L_\infty]}$ des Ineffektivitätskerns der Wirkung von Γ_o auf L_∞; die Kollineationen aus $\Gamma^1_{[o,L_\infty]}$ können ja beschrieben werden als skalare Streckungen mit Elementen aus der Zusammenhangskomponente der multiplikativen Gruppe des Kerns $\mathbb{K}$. Insbesondere ist

$$\dim \Gamma_o = \dim \mathrm{S}\Gamma_o + d,$$

wo d die topologische Dimension

$$d = \dim \mathbb{K}$$

des Kerns ist. Der Schnitt $\Gamma^1_{[0,L_\infty]} \cap S\Gamma_0$ ist endlich, mit anderen Worten: $S\Gamma_0$ wirkt fast effektiv auf L_∞, bewirkt aber im übrigen dort natürlich dieselbe Transformationsgruppe wie Γ_0. — Im Fall der Quaternionenebene erreicht man dasselbe durch die Setzung $S\Gamma_0 = \mathrm{SL}_2(\mathbb{H})$.

Die folgende Aussage ist eine vereinfachte Version eines grundlegenden Ergebnisses aus [5: 2.1], die wir ständig benutzen werden:

1.6. Lemma über Achsenstandgruppen. *Sei Ω eine abgeschlossene, zusammenhängende Untergruppe von $S\Gamma_0$, die zwei verschiedene uneigentliche Punkte $w, s \in L_\infty$ festläßt.*

Dann ist Λ kompakt oder aber direktes Produkt einer kompakten Gruppe mit $\mathbb{R}$. Im zweiten Fall häuft sich jede Bahn von Λ in $L_\infty \setminus \{s, w\}$ sowohl bei s als auch bei w.

Insbesondere ist Λ kompakt, falls sie einen dritten Fixpunkt in L_∞ hat.

§ 2. Kollineationsgruppen von $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$-Ebenen

Ziel dieses Abschnitts ist der Beweis der Fallunterscheidung im $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$-Satz 1.4.

2.1. Im folgenden sei stets eine nicht desarguessche achtdimensionale lokalkompakte Translationsebene (mit den Konventionen von 1.5) zugrunde gelegt, in der Γ_0 eine kompakte, zusammenhängende, zu $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ lokal isomorphe Untergruppe Σ mit $\Sigma \mid L_\infty = \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ enthält, welche in L_∞ Fixpunkte hat. Als quasi-einfache Gruppe ist Σ in dem Normalteiler $S\Gamma_0$ (siehe 1.5) und dann sogar in dessen Zusammenhangskomponente

$$\Delta = (S\Gamma_0)^1$$

enthalten.

Nach [15] wirkt Σ auf der 4-Sphäre L_∞ in der gewohnten Weise, d. h. als zweifache Einhängung der transitiven Wirkung von $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ auf der 2-Sphäre. Insbesondere ist die Menge

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}(\Sigma \mid L_\infty)$$

der Fixpunkte von Σ in L_∞ eine Kreislinie.

Eine grundsätzliche Fallunterscheidung ergibt sich aus der Frage, ob ganz Δ einen Fixpunkt in L_∞ hat oder nicht. Wir behandeln zunächst den zweiten Fall:

2.2. *Hat Δ keinen Fixpunkt in L_∞, so besteht die folgende Alternative: Entweder gilt*

(0) *Die zugrunde liegende Ebene ist eine $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$-Ebene (im Sinne von [9])*

oder aber

(1) *$\mathfrak{F}$ ist eine Bahn von Δ, und Σ ist ein Normalteiler von Γ_0. Dann ist Δ entweder lokal isomorph zu $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R}) \times \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$, oder lokal isomorph zu*

$SO_3(\mathbb{R})\,PSL_2(\mathbb{R})$ *und transitiv auf* $L_\infty \setminus \mathfrak{F}$. *Für die Dimension der vollen Kollineationsgruppe ergibt sich daraus* $\dim \Gamma = 12 + d$ *bzw.* $\dim \Gamma = 14 + d$.

Beweis: (a) Wir verwenden den tiefliegenden Sachverhalt, daß in nicht desarguesschen, achtdimensionalen lokalkompakten Translationsebenen die Gruppe Δ stets eine Bahn der Dimension $\leqq 2$ in L_∞ hat (Hauptsatz von [6]). Eine solche Bahn liegt entweder ganz in $\mathfrak{F}$, oder sie ist eine der zur 2-Sphäre homöomorphen Bahnen von Σ. Wir betrachten die beiden Fälle getrennt:

(b1) $\mathfrak{F}$ *enthalte eine* Δ*-Bahn.* Dann wirkt Δ sogar transitiv auf der Kreislinie $\mathfrak{F}$, da Δ ja keinen Fixpunkt in L_∞ haben soll.

Wir betrachten den Ineffektivitätskern $\Delta_{[\mathfrak{F}]}$ der Wirkung von Δ auf $\mathfrak{F}$ und seine Zusammenhangskomponente $\Delta^1_{[\mathfrak{F}]}$. Sie ist nach dem Lemma über Achsenstandgruppen (siehe 1.6) kompakt; und da eine mindestens 4dimensionale, kompakte effektive Transformationsgruppe der 4-Sphäre höchstens zwei Fixpunkte hat (siehe Richardson [15]), ist

$$\Delta^1_{[\mathfrak{F}]} = \Sigma.$$

Insbesondere ist Σ angesichts der Δ-Invarianz der Bahn $\mathfrak{F}$ ein Normalteiler von Δ und damit auch von Γ_0, da $\Delta = (S\Gamma_0)^1$ fastdirekter Faktor von Γ_0 ist.

Da die Zusammenhangskomponente der Automorphismengruppe von Σ aus inneren Automorphismen besteht, ist Δ fastdirektes Produkt von Σ und der Zusammenhangskomponente Z des Zentralisators von Σ. Wegen $\Delta^1_{[\mathfrak{F}]} = \Sigma$ wirkt Z fast effektiv und immer noch transitiv auf $\mathfrak{F}$. Nach dem Satz von Brouwer über die transitiven Wirkungen von Liegruppen auf der Kreislinie (siehe [16: 3.18]) ist daher Z isomorph zu $SO_2(\mathbb{R})$ oder zu einer endlich-blättrigen Überlagerung $PSL_2(\mathbb{R})^{(k)}$ von $PSL_2(\mathbb{R})$.

Nach 1.5 ist $\dim \Gamma_0 = \dim S\Gamma_0 + d = \dim \Delta + d = \dim Z + 3 + d$ und mit der Translationsgruppe $\dim \Gamma = 8 + \dim \Gamma_0 = \dim Z + 11 + d$. Insgesamt ist also $\dim \Gamma = 12 + d$ bzw. $\dim \Gamma = 14 + d$ je nachdem, ob Z isomorph zu $SO_2(\mathbb{R})$ oder zu $PSL_2(\mathbb{R})^{(k)}$ ist.

Man hat somit die in (1) beschriebene Situation, wobei für den Fall $Z \cong PSL_2(\mathbb{R})^{(k)}$ noch zu zeigen ist, daß dann Δ transitiv auf $L_\infty \setminus \mathfrak{F}$ wirkt. Hierzu bestimmen wir den Stabilisator Δ_e eines Punkts $e \in L_\infty \setminus \mathfrak{F}$. Sei Π eine beliebige Einparameteruntergruppe von Δ_e. Wäre $\Pi \cong \mathbb{R}$, so hätte Π neben e einen weiteren Fixpunkt $f \in L_\infty$ (nämlich in $\mathfrak{F}$, wie bei der üblichen Wirkung von $PSL_2(\mathbb{R})$ auf der reellen projektiven Geraden, von der ja die effektive Wirkung von Δ auf $\mathfrak{F}$ eine endlichblättrige Überlagerung ist). Dies geht aber nach dem Lemma über Achsenstandgruppen (siehe 1.6) nicht an, da sich dann jede Π-Bahn in $L_\infty \setminus \{e, f\}$ bei e häufen müßte; für die in $\mathfrak{F}$ eingeschlossenen Bahnen ist das aber nicht möglich. Also ist jede abgeschlossene Einparameteruntergruppe von Δ_e kompakt, und folglich ist die Zusammenhangskomponente $(\Delta_e)^1$ kompakt. Eine maximale kompakte Untergruppe von Δ ist nun lokal isomorph zu $SO_3(\mathbb{R}) \times SO_2(\mathbb{R})$; also ist $(\Delta_e)^1$ höchstens 2-dimensional, da sie wegen $e \notin \mathfrak{F} = \mathfrak{F}(\Sigma \mid L_\infty)$ keine zu Σ konjugierte Untergruppe enthält. Wegen $\dim \Delta = 6$ ist folglich $\dim \Delta(e) \geqq 4$ für alle $e \in L_\infty \setminus \mathfrak{F}$ und somit Δ transitiv auf der 4-Mannigfaltigkeit $L_\infty \setminus \mathfrak{F}$.

Der zweite zu betrachtende Fall ist:

(b2) *Δ lasse eine zur 2-Sphäre homöomorphe Bahn $\mathfrak{S}$ von Σ invariant.* Nach der Klassifikation von Mostow [14] der transitiven Wirkungen von Liegruppen auf Flächen (siehe auch Betten/Forst [1]) ist dann die von Δ auf $\mathfrak{S}$ induzierte Transformationsgruppe isomorph zu einer der einfachen Gruppen $SO_3(\mathbb{R})$, $PSL_2(\mathbb{C})$ oder $SL_3(\mathbb{R})$. Der halbeinfache Kopf von Δ (der abgeschlossen in der linearen Gruppe Δ ist) enthält somit einen abgeschlossenen zusammenhängenden Normalteiler Λ, der zu einer dieser Gruppen lokal isomorph ist und $\Delta = \Lambda \cdot \Delta^1_{[\mathfrak{S}]}$ erfüllt, wo $\Lambda^1_{[\mathfrak{S}]}$ die Zusammenhangskomponente des Trägheitsnormalteilers von Δ auf $\mathfrak{S}$ ist.

Der Fall, daß Λ lokal isomorph zu $SL_3(\mathbb{R})$ ist, scheidet dabei nach [6: 2.3] aus. Ist Λ lokal isomorph zu $PSL_2(\mathbb{C})$, so liegt eine $SL_2(\mathbb{C})$-Ebene im Sinne von [9] vor, entsprechend der Alternative (0) der Behauptung. Ist schließlich Λ lokal isomorph zu $SO_3(\mathbb{R})$, so ist Δ kompakt, da $\Delta^1_{[\mathfrak{S}]}$ nach dem Lemma über Achsenstandgruppen kompakt ist. Da Δ keinen Fixpunkt in L_∞ haben soll, folgt nach der Klassifikation von Richardson [15] der Wirkungen kompakter Liegruppen auf der 4-Sphäre, daß Δ lokal isomorph zu $SO_3(\mathbb{R}) \times SO_2(\mathbb{R})$ ist und die Menge $\mathfrak{F}$ der Fixpunkte von Σ in L_∞ als Bahn hat. Dieser Fall ist in (b1) schon behandelt. □

2.3. *Hat Δ einen Fixpunkt s in L_∞ und ist die betrachtete Ebene keine* $SO_4(\mathbb{R})$-*Ebene oder* Spin(4)-*Ebene (im Sinne von* [8] *und* [7]), *so gilt entweder*

(1) *Σ ist ein Normalteiler von Γ_0, und* $\dim \Gamma \leqq 13 + d$.
oder
(2) *Δ enthält einen analytischen Normalteiler N, der als Liegruppe isomorph zur Vektorgruppe $\mathbb{R}^3$ ist, von Σ nicht zentralisiert wird und frei auf $L_\infty \setminus \{s\}$ wirkt.*

Bemerkung: In § 4 wird darüber hinaus mit Koordinatenmethoden gezeigt werden, daß N eine abgeschlossene Untergruppe der Gruppe der Scherungen mit Scherungszentrum s ist. Zusammen mit 2.2 hat man dann alle Aussagen des $SO_3(\mathbb{R})$-Satzes 1.4.

Beweis: Zunächst folgt anhand der Klassifikation von Richardson [15] die folgende Aussage:

(a) *Σ ist eine maximale kompakte Untergruppe von Δ; insbesondere ist jede kompakte zusammenhängende Untergruppe von Δ, die neben s noch einen weiteren Punkt w von $\mathfrak{F}$ festläßt, in Σ enthalten.*

In der Tat enthält eine maximale kompakte Untergruppe K von Δ eine zu Σ konjugierte Untergruppe und induziert folglich wegen $\Sigma \mid L_\infty \cong SO_3(\mathbb{R})$ auf der 4-Sphäre L_∞ eine der Gruppen $SO_3(\mathbb{R})$ oder $SO_4(\mathbb{R})$, da ja der Punkt s festbleibt. Im ersteren Fall ist aus Dimensionsgründen K konjugiert zu Σ; im zweiten Fall läge eine Spin(4)- oder $SO_4(\mathbb{R})$-Ebene vor (siehe [7], [8]), von denen hier abgesehen werden soll. Also ist Σ eine maximale kompakte Untergruppe von Δ. Nach dem Lemma über Achsenstandgruppen (siehe 1.6) ist

dann Σ die größte kompakte zusammenhängende Untergruppe des Stabilisators Δ_w eines jeden Punktes $w \in \mathfrak{F} \setminus \{s\}$ (womit dann (a) gezeigt ist); genauer folgt $\dim (\Delta_w)^1 \leqq \dim \Sigma + 1 \leqq 4$ und also die Abschätzung

$$\dim \Delta \leqq \dim \Delta(w) + 4, \tag{$*$}$$

von der wir gleich noch Gebrauch machen werden.

(b) *Σ ist halbeinfacher Kopf von Δ.*

Sei nämlich H ein halbeinfacher Kopf von Δ. Er besitzt einen quasi-einfachen fastdirekten Faktor H_1, der eine zu $SO_3(\mathbb{R})$ lokal isomorphe Untergruppe hat. Nach (a) ist dann eine maximale kompakte Untergruppe von H_1 konjugiert zu Σ und also lokal isomorph zu $SO_3(\mathbb{R})$. Die Abschätzung ($*$) zeigt, daß H_1 mit Δ höchstens 8-dimensional ist. Eine quasi-einfache Liegruppe dieser Art ist lokal isomorph zu einer der Gruppen $SO_3(\mathbb{R})$, $SL_2(\mathbb{C})$, $SL_3(\mathbb{R})$ oder $SU_3(\mathbb{C}, 1)$. Nach [6: 2.3] und [5: 3.3] kommen dabei die Typen $SL_3(\mathbb{R})$ und $SU_3(\mathbb{C}, 1)$ prinzipiell nicht in Frage; und in $SL_2(\mathbb{C})$-Ebenen (siehe [9]) hat Δ keinen Fixpunkt in L_∞. Also ist H_1 lokal isomorph zu $SO_3(\mathbb{R})$ und folglich o. B. d. A. gleich Σ. Insbesondere ist Σ ein Normalteiler von H, und H läßt die Kreislinie $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}(\Sigma \mid L_\infty)$ invariant. Für $w \in \mathfrak{F}$ ist damit die Bahn $H(w)$ höchstens eindimensional, so daß analog zur Abschätzung ($*$) $\dim H \leqq 5$ folgt. Da ein weiterer quasi-einfacher Faktor von H neben Σ ebenfalls mindestens dreidimensional wäre, ist somit $H = H_1 = \Sigma$, und (b) ist gezeigt.

(c) Sei nun A das auflösbare Radikal von Δ; nach dem Satz von Levi ist dann $\Delta = A \cdot \Sigma$. Wir unterscheiden zwei Fälle:

(c1) *A werde von Σ zentralisiert.* Dann ist Σ ein Normalteiler von Δ, und Δ läßt die Kreislinie $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}(\Sigma \mid L_\infty)$ invariant. Die Abschätzung ($*$) liefert somit $\dim \Delta \leqq 1 + 4 = 5$; nach 1.5 ergibt sich also $\dim \Gamma_0 = \dim S\Gamma_0 + d = \dim \Delta + d \leqq 5 + d$ und mit der Translationsgruppe schließlich $\dim \Gamma = 8 + \dim \Gamma_0 \leqq 13 + d$, wie in (1) behauptet.

(c2) *A werde nicht von Σ zentralisiert.* Da $A \cap \Sigma$ diskret ist, ist die Zusammenhangskomponente des Stabilisators A_w eines Punkts $w \in \mathfrak{F}$ nach (a) kompaktfrei; mit dem Lemma über Achsenstandgruppen (siehe 1.6) folgt

$$\dim A_w \leqq 1$$

und wegen $\dim A = \dim A(w) + \dim A_w$

$$\dim A \leqq 4 + \dim A_w \leqq 5. \tag{$**$}$$

Wir betrachten nun die (nach Voraussetzung (c2) nichttriviale) Wirkung von Σ auf dem Normalteiler A und seiner Liealgebra $\mathscr{L}A$. Die Gruppe Σ ist isomorph zu $SO_3(\mathbb{R})$ oder zur zweiblättrigen universellen Überlagerung Spin (3) von $SO_3(\mathbb{R})$; im Fall $\Sigma \cong$ Spin (3) ist die zentrale Involution von Σ wegen $\Sigma \mid L_\infty = SO_3(\mathbb{R})$ die eindeutig bestimmte Spiegelung mit Achse L_∞

und Zentrum o und folglich zentral auch in Δ. Somit bewirkt Σ in jedem Fall eine zu $SO_3(\mathbb{R})$ isomorphe Automorphismengruppe von A und $\mathscr{L}A$. Für $w \in \mathfrak{F} = \mathfrak{F}(\Sigma \mid L_\infty)$ wird der Stabilisator A_w von Σ normalisiert; die zugehörige Unteralgebra $\mathscr{U}$ von $\mathscr{L}A$ ist also Σ-invariant und wegen $\dim \mathscr{U} = \dim A_w \leqq 1$ folglich enthalten in der Unteralgebra $\mathscr{Z}$ der Elemente von $\mathscr{L}A$, die unter Σ fest bleiben. Mit der Dimensionsaussage (**) folgt $\dim \mathscr{L}A - \dim \mathscr{Z} \leqq 4$. Wegen der vollständigen Reduzibilität der Wirkung von Σ auf $\mathscr{L}A$, und da die einzige irreduzible lineare Darstellung von $SO_3(\mathbb{R})$ einer Dimension $\leqq 4$ die gewöhnliche Wirkung auf $\mathbb{R}^3$ ist, ist somit der Vektorraum $\mathscr{L}A$ die direkte Summe eines 3-dimensionalen Σ-invarianten Unterraums $\mathscr{N} = \mathbb{R}^3$ mit $\mathscr{Z}$, wobei $\Sigma \mid \mathscr{N} = SO_3(\mathbb{R})$.

Wir zeigen zunächst, daß $\mathscr{N}$ ein kommutatives Ideal von $\mathscr{L}A$ ist. Hierzu betrachten wir eine Orthonormalbasis $\{i, j, k\}$ von $\mathscr{N}$; ein geeignetes Element von Σ induziert dann einen Automorphismus φ von $\mathscr{L}A$ mit

$$\varphi(z) = z \quad \text{für alle} \quad z \in \mathscr{Z}$$

$$\varphi(i) = i$$

$$\varphi(j) = -j, \qquad \varphi(k) = -k.$$

Man hat dann $\varphi([i, j]) = [\varphi(i), \varphi(j)] = [i, -j] = -[i, j]$ und für $z \in \mathscr{Z}$ entsprechend $\varphi([z, j]) = -[z, j]$. Daher sind $[i, j]$ und $[z, j]$ in $\mathscr{N}$, und durch Anwendung von Σ ergibt sich, daß $\mathscr{N}$ eine Unteralgebra und dann sogar ein Ideal ist. Mit $\mathscr{L}A$ ist auch $\mathscr{N}$ auflösbar, und wegen der Irreduzibilität der Wirkung von Σ auf $\mathscr{N}$ muß die Kommutatoralgebra $\mathscr{N}' \neq \mathscr{N}$ verschwinden; also ist $\mathscr{N}$ kommutativ.

Sei nun N die zu $\mathscr{N}$ gehörige analytische Untergruppe von Δ in ihrer Topologie als Liegruppe. Da Σ transitiv auf den Einparametergruppen von N operiert, und da Torusgruppen diskrete Automorphismengruppen haben, ist N kompaktfrei und also die Vektorgruppe $\mathbb{R}^3$. — Für das weitere überlegen wir uns noch, daß $N \cdot \Sigma$ erzeugt wird von Σ und einer einzigen weiteren zu Σ konjugierten Untergruppe $\Sigma_1 = \eta\Sigma\eta^{-1}$ mit $\mathrm{id} \neq \eta \in N$. Die Menge $\{\eta\sigma\eta^{-1}\sigma^{-1};\ \sigma \in \Sigma\} = \eta \cdot (\eta^{-1})^\Sigma$ bildet nämlich in $N = \mathbb{R}^3$ eine Sphäre mit η als Zentrum, und diese erzeugt N als Gruppe.

Betrachtet man daher die Einschränkungen der Kollineationen aus N auf die invariante affine Ursprungsgerade $S = \mathbb{R}^4$, die zu dem Fixpunkt $s \in L_\infty$ gehört, so erhält man wegen der Quasieinfachheit von Σ und Σ_1 stets lineare Abbildungen der Determinante 1:

$$N \mid S \subseteqq SL_4(\mathbb{R}).$$

Diese Tatsache wird nun zum Beweis der verbleibenden Behauptung benützt, daß N frei auf $L_\infty \setminus \{s\}$ operiert. Wegen $\Sigma \cap N = \{\mathrm{id}\}$, und da nach (a) alle maximalen kompakten Untergruppen von Δ konjugiert zu Σ sind, genügt es, hierzu zu zeigen, daß für $w \in L_\infty \setminus \{s\}$ der Stabilisator N_w (mit der von Δ

induzierten Topologie) kompakt ist. Für $\eta \in N_w$ können wir auch die Einschränkung von η auf die zu w gehörige affine Ursprungsgerade $W = \mathbb{R}^4$ betrachten. Angesichts $N \subseteqq \Delta = (S\Gamma_0)^1$ hat η als lineare Transformation des affinen Punktraums $\mathbf{A} = \mathbb{R}^8$ Determinante 1; man hat also $1 = \det \eta = \det \eta \mid S \cdot \det \eta \mid W$. Wegen $\det \eta \mid S = 1$ ist somit gleichzeitig auch $\det \eta \mid W = 1$; nach einer detaillierteren Version des Lemmas über Achsenstandgruppen, als wir es bisher (vgl. 1.6) benützt haben, liegt N_w folglich in der größten kompakten Untergruppe der Gruppe der stetigen affinen Kollineationen, die S und W invariant lassen ([5: 2.1(a)]). □

§ 3. Vierdimensionale Darstellungen der Bewegungsgruppe des $\mathbb{R}^3$

Für den $SO_3(\mathbb{R})$-Satz 1.4 steht in der Situation von 2.3 noch der Nachweis aus, daß N eine Gruppe von Scherungen ist. Hierzu ist insbesondere wichtig, zu wissen, wie $\Sigma \cdot N$ auf der zum Fixpunkt $s \in L_\infty$ gehörigen, invarianten Ursprungsgeraden S wirken kann. Vorbereitend hierfür studieren wir hier lineare Darstellungen solcher semidirekter Produkte in $\mathbb{R}^4$, unabhängig vom bisher betrachteten geometrischen Kontext. Die Methoden werden dennoch weitgehend geometrischer Natur sein.

Wir betrachten zunächst die Gruppe der eigentlichen Bewegungen des euklidischen affinen Raums $\mathbb{R}^3$, also das semidirekte Produkt $\mathbb{R}^3 \cdot SO_3(\mathbb{R})$ des Translationsnormalteilers $\mathbb{R}^3$ mit $SO_3(\mathbb{R})$.

3.1. *Eine mindestens vierdimensionale, echte, zusammenhängende abgeschlossene Untergruppe Ξ des semidirekten Produkts $\mathbb{R}^3 \cdot SO_3(\mathbb{R})$ ist semidirektes Produkt*

$$\Xi = \mathbb{R}^3 \cdot T,$$

wo $T \cong SO_2(\mathbb{R})$ eine Torusuntergruppe von $SO_3(\mathbb{R})$ ist.

Beweis: Wir bezeichnen den Translationsnormalteiler $\mathbb{R}^3$ mit N, die Drehgruppe $SO_3(\mathbb{R})$ mit Σ.

Wegen $\dim \Xi \cap \Sigma \geqq 1$ ist eine maximale kompakte Untergruppe von Ξ mindestens eindimensional und also (da $\Sigma = SO_3(\mathbb{R})$ eine maximale kompakte Untergruppe von $\mathbb{R}^3 \cdot SO_3(\mathbb{R})$ ist) isomorph zu $SO_3(\mathbb{R})$ oder zu $SO_2(\mathbb{R})$.

Im ersten Fall kann man bis auf Konjugation annehmen, daß Σ in Ξ enthalten ist. Da andererseits auch $\Xi \cap N$ mindestens eindimensional ist und Σ transitiv auf den Einparameteruntergruppen von N operiert, ist dann auch ganz N in Ξ enthalten, so daß Ξ die ganze Bewegungsgruppe $N \cdot \Sigma$ ist.

Im zweiten Fall ist bis auf Konjugation eine maximale kompakte Untergruppe von Ξ eine eindimensionale Torusuntergruppe T von Σ. Das Bild von Ξ unter der kanonischen Projektion $\pi\colon N \cdot \Sigma \to N \cdot \Sigma/N = \Sigma$ enthält dann T; wir zeigen

$$\pi(\Xi) = T:$$

Wegen der Maximalität von $T \cong \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ unter den analytischen Untergruppen von $\Sigma = \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ wäre sonst $\Sigma = \pi(\Xi) \cong \Xi/\Xi \cap N$. Da $\Xi \cap N$ als abgeschlossene Untergruppe der Vektorgruppe $N \cong \mathbb{R}^3$ verschwindende Homotopiegruppen hat, würde dann aus der exakten Sequenz der Faserung $\Xi \to \Xi/\Xi \cap N$ folgen, daß die Homotopiegruppe $\pi_3(\Xi) \cong \pi_3(\Sigma)$ unendlich zyklisch ist; aber Ξ hat den Homotopietyp der maximalen kompakten Untergruppe T, also der Kreislinie.

Aus $T = \pi(\Xi) \cong \Xi/\Xi \cap N$ ergibt sich nun $\dim \Xi \cap N = \dim \Xi - \dim T = 3$, also $N \subseteq \Xi$ und damit $\Xi = N \cdot T$. □

3.2. *Eine zu* $\mathbb{R}^3 \cdot \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ *isomorphe Untergruppe von* $\mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ *ist bis auf Konjugation das Produkt einer der beiden zur Vektorgruppe* $\mathbb{R}^3$ *isomorphen Matrizengruppen*

$$N_v = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & & & \\ x_1 & 1 & & \\ x_2 & & 1 & \\ x_3 & & & 1 \end{pmatrix}; \quad x_i \in \mathbb{R} \right\}$$

oder

$$N_h = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 & x_3 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}; \quad x_i \in \mathbb{R} \right\}$$

mit der Gruppe $\{\mathrm{id}\} \times \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ *der eigentlichen Rotationen von* $\mathbb{R}^4$, *die* $\mathbb{R} \times \{0\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^4$ *elementweise festlassen.*

Beweis: Sei Ω eine solche Untergruppe von $\mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$, Σ eine zu $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ isomorphe Untergruppe. Da alle zu $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ isomorphen Untergruppen von $\mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ konjugiert sind, können wir o. B. d. A. annehmen, daß $\Sigma = \{\mathrm{id}\} \times \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ ist. Sei N der zur Vektorgruppe $\mathbb{R}^3$ isomorphe Normalteiler von Ω. Wir stellen zunächst fest, daß N und damit auch Ω sogar in $\mathrm{SL}_4(\mathbb{R})$ liegt, da aus Dimensionsgründen $N \cap \mathrm{SL}_4(\mathbb{R})$ nicht diskret ist und Σ durch Konjugation transitiv auf den Einparameteruntergruppen von N wirkt.

Wir betrachten nun die Wirkung von Ω auf dem projektiven Raum $\mathrm{P}_3(\mathbb{R})$ der eindimensionalen Teilräume von $\mathbb{R}^4$. Diese Wirkung ist nicht transitiv, da sonst nach [13] die maximale kompakte Untergruppe Σ ebenfalls transitiv sein müßte; Σ hat aber sogar einen Fixpunkt in $\mathrm{P}_3(\mathbb{R})$.

Also hat Ω in $\mathrm{P}_3(\mathbb{R})$ eine Bahn der Dimension ≤ 2. Der Stabilisator eines Punkts aus einer solchen Bahn ist mindestens 4-dimensional und enthält daher nach 3.1 den Normalteiler $N \cong \mathbb{R}^3$ von Ω. Somit besitzt N Fixpunkte in $\mathrm{P}_3(\mathbb{R})$.

Die Gesamtheit $F(N)$ der Fixpunkte von N in $\mathrm{P}_3(\mathbb{R})$ ist nun eine endliche Vereinigung von Unterräumen. (Dies kann man etwa folgendermaßen einsehen: Die Fixpunktmenge eines einzelnen Elements $\eta \in N$ ist jedenfalls eine solche endliche Vereinigung von Unterräumen, den Eigenräumen von η in $\mathbb{R}^4$ entsprechend. $F(N)$ kann seinerseits gewonnen werden als der Durchschnitt

über die Fixpunktmengen der Elemente einer abzählbaren dichten Teilmenge von N, und dieser Durchschnitt läßt sich schreiben als Durchschnitt über eine *absteigende* Folge von endlichen Vereinigungen von Unterräumen; eine solche muß aber schließlich stationär werden.) $F(N)$ ist invariant unter Σ, und da Σ keine echten Untergruppen von endlichem Index besitzt, ist jeder der endlich vielen Unterräume, deren Vereinigung $F(N)$ bildet, selbst invariant unter Σ. Nun läßt Σ genau zwei Unterräume von $P_3(\mathbb{R})$ invariant, nämlich den Punkt p und die Hyperebene H, die den Teilräumen $\mathbb{R} \times \{0\}$ und $\{0\} \times \mathbb{R}^3$ von $\mathbb{R}^4$ entsprechen. Also besteht entweder H aus Fixpunkten von N, oder p ist der einzige Fixpunkt von N in $P_3(\mathbb{R})$. Wir behandeln die beiden Fälle getrennt:

Fall 1: $H \subseteq P_3(\mathbb{R})$ *bestehe aus Fixpunkten von* N. Dann induziert N eine Gruppe von Dilatationen des affinen Raums $P_3(\mathbb{R}) \setminus H$ und zwar genauer eine Gruppe von Translationen: die Alternative bestünde nämlich wegen der Kommutativität von N darin, daß N eine Gruppe von Streckungen mit festem Zentrum induziert, und dies scheidet aus Dimensionsgründen aus. Wegen $N \subseteq SL_4(\mathbb{R})$ folgt $N = N_v$, da dies die Zusammenhangskomponente der Gruppe derjenigen Transformationen aus $SL_4(\mathbb{R})$ ist, die Translationen von $P_3(\mathbb{R}) \setminus H$ induzieren.

Fall 2: N *habe in* $P_3(\mathbb{R})$ *genau den Fixpunkt* p. Dann ist p ein Fixpunkt von ganz Ω, und wir können die Wirkung von Ω auf der projektiven Ebene $\mathfrak{P}$ betrachten, deren Punkte und Geraden die Geraden und Hyperebenen von $P_3(\mathbb{R})$ durch p sind. Da der Stabilisator eines Punkts von $\mathfrak{P}$ mindestens vierdimensional ist, ergibt sich wiederum aus 3.1, daß N einen Punkt von $\mathfrak{P}$ festläßt. Nun wirkt aber $\Sigma = \{\mathrm{id}\} \times SO_3(\mathbb{R})$ transitiv auf den Punkten von $\mathfrak{P}$, wie man unmittelbar sieht. Also läßt der Normalteiler N alle Punkte von $\mathfrak{P}$ fest und damit auch alle Geraden. In $P_3(\mathbb{R})$ gedeutet, bedeutet dies, daß alle Hyperebenen durch p unter N invariant bleiben. Die Situation ist somit dual zu Fall 1, so daß man dual zum dortigen Ergebnis $N = N_h$ erhält. □

Wir betrachten nun noch die zerfallende Erweiterung der Vektorgruppe $\mathbb{R}^3$ mit der universellen Überlagerung Spin (3) von $SO_3(\mathbb{R})$, die auf dem Normalteiler $\mathbb{R}^3$ als $SO_3(\mathbb{R})$ wirkt. Wir zeigen:

3.3. $GL_4(\mathbb{R})$ *enthält keine zu* $\mathbb{R}^3 \cdot \mathrm{Spin}\,(3)$ *isomorphe Untergruppe.*

Beweis: Angenommen, $GL_4(\mathbb{R})$ enthält eine solche Untergruppe Ω; seien Σ und N die Spin (3) bzw. $\mathbb{R}^3$ entsprechenden Untergruppen von Ω. Bezüglich einer geeigneten Identifikation von $\mathbb{R}^4$ mit $\mathbb{C}^2$ ist $\Sigma = SU_2(\mathbb{C}) \subseteq GL_4(\mathbb{R})$. Wir betrachten die Wirkung von Ω auf der 3-Sphäre $\mathfrak{S}$ der orientierten eindimensionalen Teilräume von $\mathbb{R}^4$. Die Wirkung von Σ auf $\mathfrak{S}$ ist scharf transitiv. Die Vektorgruppe N hingegen kann nicht transitiv auf $\mathfrak{S}$ wirken und hat deshalb in $\mathfrak{S}$ Bahnen der Dimension $\leqq 2$. Da N ein Normalteiler ist, permutiert Σ die N-Bahnen; und wegen der Transitivität von Σ auf $\mathfrak{S}$ ist jede N-Bahn gleichzeitig Bahn ihres Stabilisators in Σ. Da N zusammenhängend ist, ist dieser Stabilisator eine zusammenhängende, abgeschlossene Untergruppe von Σ, das heißt eine Torusgruppe. Ist T der Stabilisator der N-Bahn von

$\vec{e} \in \mathfrak{S}$, so ergibt sich der Stabilisator der N-Bahn eines weiteren Elements $\vec{x} \in \mathfrak{S}$, indem man T konjugiert mit demjenigen Element $\sigma \in \Sigma$, das $\vec{e}$ in $\vec{x}$ überführt. Aufgrund der scharf transitiven Wirkung von Σ auf $\mathfrak{S}$ identifizieren wir nun Σ und $\mathfrak{S}$ vermöge der Bijektion

$$\Sigma \to \mathfrak{S}: \quad \sigma \mapsto \sigma(e).$$

Für $\sigma \in \Sigma$ ist dann $\sigma T \sigma^{-1}$ der Stabilisator der N-Bahn von σ, und für die N-Bahn von σ, die gleichzeitig Bahn dieses Stabilisators ist, erhält man $\sigma T \sigma^{-1} \cdot \sigma = \sigma T$. Das System der N-Bahnen in $\mathfrak{S}$ bildet also die Hopf-Faserung der 3-Sphäre; genauer: Es kann eine (andere!) Identifikation von $\mathbb{R}^4$ mit $\mathbb{C}^2$ gefunden werden (bezüglich der T gerade die Gruppe der Streckungen mit komplexen Skalaren vom Betrag 1 beschreibt) derart, daß eine N-Bahn in $\mathfrak{S}$ genau aus allen orientierten $\mathbb{R}$-Unterräumen der Dimension 1 eines festen $\mathbb{C}$-Unterraumes der Dimension 1 besteht. Bezüglich dieser $\mathbb{C}$-linearen Struktur läßt N alle $\mathbb{C}$-Unterräume der Dimension 1 invariant und besteht somit aus Streckungen mit komplexen Skalaren. Dies geht aber aus Dimensionsgründen nicht an. □

§ 4. Scherungsgruppen in $SO_3(\mathbb{R})$-Ebenen

In diesem Abschnitt betrachten wir die Situation (2) des Satzes 2.3 näher. Es sei also wieder eine achtdimensionale lokalkompakte Translationsebene gegeben, in der Γ_0 eine zu $SO_3(\mathbb{R})$ lokal isomorphe, abgeschlossene zusammenhängende Untergruppe Σ mit $\Sigma \mid L_\infty \cong SO_3(\mathbb{R})$ enthält. Ferner nehmen wir nun an, daß Σ nicht normal in Γ_0 ist und daß $\Delta = (S\Gamma_0)^1$ einen Fixpunkt s in L_∞ besitzt. Mit S bezeichnen wir die zu s gehörige Ursprungsgerade.

Nach 2.3 (2) enthält Δ in dieser Situation einen analytischen Normalteiler $N \cong \mathbb{R}^3$, der nicht von Σ zentralisiert wird (so daß Σ durch Konjugation gewöhnlich als $SO_3(\mathbb{R})$ auf N operiert) und frei auf $L_\infty \setminus \{s\}$ wirkt. Wir zeigen:

Satz. *In dieser Situation ist N eine abgeschlossene Untergruppe der Gruppe der Scherungen mit Zentrum s und Achse S.*

Beweis: Die Hauptschwierigkeit besteht darin, zu zeigen, daß N aus Scherungen besteht. Da dann auch alle Translate von S als Achsen von nichtidentischen Scherungen auftreten, ist die Gruppe der Scherungen mit Zentrum s kommutativ, und alle ihre nichtidentischen Elemente haben unendliche Ordnung wie die Elemente von N (dies ist die Dualisierung eines bekannten Satzes über Translationsgruppen, vgl. etwa [12: Theorem 4.14 S. 97]). Ihre Zusammenhangskomponente muß also kompaktfrei und folglich eine Vektorgruppe sein; als analytische Untergruppe ist N dann eine abgeschlossene Vektoruntergruppe.

Falls nun N nicht effektiv auf S operiert, ergibt sich schnell, daß N aus Scherungen besteht: Da der Kern der Wirkung von N auf S invariant bei Konjugation mit Σ ist, enthält er dann eine 2-Sphäre $\mathbb{S}^2 \subseteq \mathbb{R}^3 \cong N$; da eine

solche ganz N als Gruppe erzeugt, muß also N trivial auf S operieren, d. h. die Kollineationen aus N haben S als Achse. Da N frei auf $L_\infty \setminus \{s\}$ wirkt, handelt es sich um Scherungen.

Wir nehmen also im folgenden an, N wirke effektiv auf S, und führen diese Annahme zum Widerspruch.

Da Σ viele Fixpunkte in L_∞ hat (vgl. 2.1), lassen sich die Wirkungen von Σ auf verschiedenen invarianten Ursprungsgeraden durch geeignete affine Perspektivitäten ineinander überführen; insbesondere wirkt Σ effektiv auf jeder invarianten Ursprungsgeraden, also z. B. auf S. Infolgedessen wirkt das semidirekte Produkt $N \cdot \Sigma$ insgesamt effektiv auf $S = \mathbb{R}^4$, da Σ kompakt und $N \cong \mathbb{R}^3$ kompaktfrei ist, und induziert dort also eine zu $N \cdot \Sigma$ isomorphe Untergruppe von $\mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$. Nach 3.3 kann folglich Σ nicht isomorph zur zweiblättrigen universellen Überlagerung Spin (3) von $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ sein.

Da Σ zu $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ lokal isomorph ist, bleibt damit nur der Fall

$$\Sigma \cong \mathrm{SO}_3(\mathbb{R}),$$

den wir nun zugrunde legen. Es wird leider noch einigen Schweiß kosten, auch ihn auszuschließen.

Nach 3.2 ist bei geeigneter Identifikation von S mit $\mathbb{R}^4$ bis auf Transposition

$$N \cdot \Sigma \mid S = N_h \cdot \big(\{\mathrm{id}\} \times \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})\big)$$

mit

$$N_h = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 & x_3 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}; \quad x_i \in \mathbb{R} \right\}.$$

Die nötigenfalls anzuwendende Transposition der Wirkung auf S ist hierbei auf dem Hintergrund der Technik der Transposition von lokalkompakten zusammenhängenden Translationsebenen zu sehen, vgl. [2].

Sei nun W eine von S verschiedene, unter Σ invariante Ursprungsgerade. Wir identifizieren den Raum $\mathbb{A}$ der affinen Punkte so mit $\mathbb{R}^8 = \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4$, daß

$$W = \mathbb{R}^4 \times \{0\}, \qquad S = \{0\} \times \mathbb{R}^4.$$

Da S unter $N \cdot \Sigma$ invariant bleibt, hat dann ein Element $\gamma \in N \cdot \Sigma$ als 8×8-Matrix die Form

$$\gamma = \begin{pmatrix} B_\gamma & \\ A_\gamma & C_\gamma \end{pmatrix} \qquad (A_\gamma, B_\gamma, C_\gamma\ 4 \times 4\text{-Matrizen})$$

mit

$$C_\gamma = \gamma \mid S \in N_h \cdot \big(\{\mathrm{id}\} \times \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})\big).$$

Wir betrachten den Homomorphismus

$$\beta\colon\ N \cdot \Sigma \to \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})\colon\ \gamma \mapsto B_\gamma.$$

Die Einschränkung $\beta \mid \Sigma$ beschreibt die effektive Wirkung von Σ auf W und ist also injektiv. Wegen der Wirkung von Σ auf N ist wieder der Kern der Einschränkung $\beta \mid N$ ganz N oder trivial, und im zweiten Fall ist β insgesamt injektiv. Nach 3.2 kann also die Identifikation von W mit $\mathbb{R}^4$ und damit von $\mathbf{A}$ mit $\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^8$ noch so eingerichtet werden, daß entweder

$$\beta(N \cdot \Sigma) = \{\mathrm{id}\} \times \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$$

oder

$$\beta(N \cdot \Sigma) = N_h \cdot \big(\{\mathrm{id}\} \times \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})\big)$$

oder

$$\beta(N \cdot \Sigma) = N_v \cdot \big(\{\mathrm{id}\} \times \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})\big)$$

mit

$$N_v = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & & & \\ x_1 & 1 & & \\ x_2 & & 1 & \\ x_3 & & & 1 \end{pmatrix}; \quad x_i \in \mathbb{R} \right\}.$$

Natürlich sind diese Identifikationen immer so gemeint, daß $\Sigma \mid S$ und $\Sigma \mid W = \beta(\Sigma)$ der Gruppe $\{\mathrm{id}\} \times \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ entsprechen soll. Die Abbildung $B_\sigma = \beta(\sigma) = \sigma \mid W \mapsto C_\sigma = \sigma \mid S$ $(\sigma \in \Sigma)$ ist dann ein Automorphismus dieser Gruppe. Da $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ nur innere Automorphismen hat, können folglich die fraglichen Identifikationen nötigenfalls durch Anwendung einer Koordinatentransformation aus $\{\mathrm{id}\} \times \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ auf W oder S noch so modifiziert werden, daß

$$B_\sigma = C_\sigma \in \{\mathrm{id}\} \times \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$$

ist für alle $\sigma \in \Sigma$.

In den Fällen $\beta(N) = N_h$ bzw. $\beta(N) = N_v$ ist damit die Abbildung $C_\eta = \eta \mid S \mapsto B_\eta = \beta(\eta)$ $(\eta \in N)$ ein Isomorphismus von N_h auf N_h bzw. N_v, der äquivariant ist bezüglich der Wirkung von $\{\mathrm{id}\} \times \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ vermöge Konjugation. Bei naheliegender Identifikation von N_h und N_v mit $\mathbb{R}^3$ wird dieser Isomorphismus beschrieben durch ein Element des Zentralisators von $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ in $\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$, das heißt durch eine Streckung mit einem konstanten Skalar $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Infolgedessen liegt einer der beiden folgenden Fälle vor:

Fall (i): Für $C_\eta = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 & x_3 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$ ist $B_\eta = \begin{pmatrix} 1 & \lambda x_1 & \lambda x_2 & \lambda x_3 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$

Fall (ii): Für $C_\eta = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 & x_3 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$ ist $B_\eta = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ \lambda x_1 & 1 & & \\ \lambda x_2 & & 1 & \\ \lambda x_3 & & & 1 \end{pmatrix}$;

der Fall $\beta(N \cdot \Sigma) = \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$, also $\beta(N) = \{\mathrm{id}\}$, ist dabei mit berücksichtigt, wenn man im Fall (ii) auch $\lambda = 0$ zuläßt.

Zur näheren Bestimmung der Möglichkeiten für die Gestalt der Teilmatrizen A_η in der Matrizendarstellung

$$\eta = \begin{pmatrix} B_\eta & \\ A_\eta & C_\eta \end{pmatrix}$$

von $\eta \in N$ notieren wir zunächst, wie sich Matrizen dieser Art multiplizieren: Es ist

$$A_{\eta_1 \circ \eta_2} = A_{\eta_1} B_{\eta_2} + C_{\eta_1} A_{\eta_2}. \tag{1}$$

Wir schränken nun die Betrachtung vorübergehend auf eine Einparameteruntergruppe von N ein. Für $t \in N$ sei $\eta(t)$ dasjenige Element von N mit

$$C_{\eta(t)} = \begin{pmatrix} 1 & t & 0 & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix};$$

wir schreiben

$$C(t) \text{ für } C_{\eta(t)}$$

$$B(t) \text{ für } B_{\eta(t)}$$

$$A(t) \text{ für } A_{\eta(t)}.$$

Der Zentralisator der Einparameteruntergruppe

$$N_1 = \{\eta(t);\ t \in \mathbb{R}\}$$

von N in Σ ist eine Torusuntergruppe Σ_1. In der Beschreibung von Σ durch $\{\mathrm{id}\} \times \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ muß sie dem Zentralisator der Matrizen $C(t)$ $(t \in \mathbb{R})$ in $\{\mathrm{id}\} \times \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ entsprechen, also der Untergruppe $\{\mathrm{id}\} \times \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ derjenigen linearen Transformationen von $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$, die auf $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ die Identität und auf $\{0\} \times \mathbb{R}^2$ eine eigentliche Drehung induzieren; es ist also $\sigma \in \Sigma_1$ genau dann, wenn $B_\sigma = C_\sigma \in \{\mathrm{id}\} \times \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$. Die Matrizen $A(t)$ müssen dann aber ebenfalls mit den Transformationen aus $\{\mathrm{id}\} \times \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ kommutieren, d. h. es ist

$$A(t) = \begin{pmatrix} Q(t) & \\ & R(t) \end{pmatrix}$$

mit 2×2-Matrizen $Q(t)$ und $R(t)$, wobei noch $R(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ mit allen eigentlichen Drehungen vertauschbar sein muß, also in $\mathbb{R} \cdot \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ liegt. Aus (1) folgt für $t_i \in \mathbb{R}$

$$R(t_1 + t_2) = R(t_1) + R(t_2),$$

so daß also

$$R(t) = t \cdot R'.$$

Wegen $R(t) \in \mathbb{R} \cdot \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ für alle $t \in \mathbb{R}$ hat dabei R' die Gestalt

$$R' = \begin{pmatrix} \varrho & \sigma \\ -\sigma & \varrho \end{pmatrix}.$$

Im weiteren benutzen wir nun entscheidend die Kommutativität von ganz N, die mit (1) besagt, daß für alle $\eta_1, \eta_2 \in N$ die Beziehung

$$A_{\eta_2} B_{\eta_1} + C_{\eta_1} A_{\eta_2} = A_{\eta_1} B_{\eta_2} + C_{\eta_2} A_{\eta_1} \tag{2}$$

gilt. Wir werten sie aus, indem wir η_1 aus N_1 und η_2 aus einer weiteren Einparametergruppe N_2 wählen. Für N_2 nehmen wir dabei die Konjugierte von N_1 unter dem Element ι von Σ, das der Matrix

$$J = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & -1 & \\ & 1 & 0 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \in \{\mathrm{id}\} \times \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$$

entspricht, also unter

$$\iota = \begin{pmatrix} J & \\ & J \end{pmatrix}.$$

Setzt man für $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ in (2) $\eta_1 = \eta(t_1)$ und $\eta_2 = \iota\eta(t_2)\,\iota^{-1}$, so ergibt sich

$$\begin{aligned} &A(t_1)\, JB(t_2)\, J^{-1} + C(t_1)\, JA(t_2)\, J^{-1} \\ &= JA(t_2)\, J^{-1}B(t_1) + JC(t_2)\, J^{-1}A(t_1). \end{aligned} \tag{2a}$$

Durch Ableiten erst nach t_1, dann nach t_2 an der Stelle $(t_1, t_2) = (0, 0)$ folgt

$$A'JB'J^{-1} + C'JA'J^{-1} = JA'J^{-1}B' + JC'J^{-1}A', \tag{2'}$$

wobei

$$A' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} A(t)|_{t=0}, \qquad B' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} B(t)|_{t=0}, \qquad C' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} C(t)|_{t=0}.$$

Im *Fall* (ii), den wir nun als erstes zu Ende behandeln, werten wir die Beziehung (2′) von 4×4-Matrizen jeweils für die rechte obere 2×2-Matrix aus. Man erhält so nach leichter koeffizientenweiser Rechnung $\varrho = 0$ und $\sigma = -\sigma$, also $R' = 0$. Für $\eta \in N_1$ ist somit A_η singulär.

Die Existenz eines von der Identität verschiedenen Elements $\eta \in N$, für das A_η singulär ist, ist nun aber nicht verträglich mit den sonst über die Wirkung von N gewonnenen Einsichten: Wäre $0 \neq x \in \mathbb{R}^4$ mit $A_\eta(x) = 0$, so würde η den Punkt

$$\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4$$

der Geraden $W = \mathbb{R}^4 \times \{0\}$ in den Punkt

$$\begin{pmatrix} B_\eta(x) \\ A_\eta(x) + C_\eta(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_\eta(x) \\ 0 \end{pmatrix}$$

abbilden, der wiederum in W liegt; W bliebe also invariant unter $\eta \neq \mathrm{id}$. Dies steht im Widerspruch zu der Tatsache, daß in der hier untersuchten Situation N frei auf $L_\infty \setminus \{s\}$ wirkt.

Im verbleibenden *Fall* (i) empfiehlt es sich, die linke untere 2×2-Matrix der Beziehung (2′) zu betrachten. Schreibt man dabei die linke obere 2×2-Matrix $Q(t)$ von $A(t)$ in Koeffizienten

$$Q(t) = \begin{pmatrix} \alpha(t) & \beta(t) \\ \gamma(t) & \delta(t) \end{pmatrix}$$

und ihre abgeleitete Matrix $Q' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} Q(t)|_{t=0}$ als

$$Q' = \begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{pmatrix},$$

so ergibt sich mit leichter Rechnung $\lambda \cdot \gamma' = 0$. Da wir im Fall (i) $\lambda \neq 0$ annehmen können (der Fall $\lambda = 0$ ist schon in Fall (ii) mitbehandelt), folgt

$$\gamma' = 0.$$

Aus (1) für $\eta_i = \eta(t_i) \in N_1$ $(i = 1, 2)$ erhält man nun für die Koeffizienten von $Q(t)$ die Beziehungen

$$\gamma(t_1 + t_2) = \gamma(t_1) + \gamma(t_2)$$
$$\alpha(t_1 + t_2) = \alpha(t_1) + \alpha(t_2) + t_1 \cdot \gamma(t_2).$$

Aus der ersten folgt $\gamma(t) = t \cdot \gamma'$ für alle $t \in \mathbb{R}$, so daß $\gamma(t)$ wegen $\gamma' = 0$ identisch verschwindet. Die zweite Beziehung ergibt dann

$$\alpha(t) = t \cdot \alpha'.$$

Die Einparametergruppe N_1 besteht demnach aus Matrizen der Gestalt

$$\eta(t) = \begin{pmatrix} 1 & \lambda t & & & & & & \\ & 1 & & & & 0 & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ \alpha' \cdot t & & & & 1 & t & & \\ 0 & & & & 0 & 1 & & \\ 0 & & ? & & 0 & & 1 & \\ 0 & & & & 0 & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Durch Konjugation mit ι erhält man daraus die Elemente von N_2 in der Form

$$\iota\eta(t)\,\iota^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda t & 0 & & & & \\ & 1 & & & & 0 & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ \alpha'\cdot t & & & & 1 & 0 & t & 0 \\ 0 & & & & 0 & 1 & & \\ 0 & & ? & & 0 & & 1 & \\ 0 & & & & 0 & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Das Produkt von $\eta(t_1)$ und $\iota\eta(t_2)\,\iota^{-1}$ $(t_1, t_2 \in \mathbb{R})$ liefert ein Element von N der Gestalt

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda t_1 & \lambda t_2 & 0 & & & & \\ & 1 & & & & 0 & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ \alpha'\cdot(t_1+t_2) & & & & 1 & t_1 & t_2 & 0 \\ 0 & & & & & 1 & & \\ 0 & & ? & & & & 1 & \\ 0 & & & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Für $0 \neq t_2 = -t_1$ ergibt sich so eine von der Identität verschiedene Kollineation $\eta \in N$, für die die linke untere 4×4-Matrix A_η singulär ist. Damit ist derselbe Widerspruch erreicht wie im Fall (ii), und der Satz ist bewiesen.

Auf dem Hintergrund von 2.2 und 2.3 hat man somit alle Aussagen des $SO_3(\mathbb{R})$-Satzes beisammen.

Der Verfasser dankt der Deutschen Forschungsgemeinschaft für das Stipendium, zu dessen Ergebnissen die vorliegende Arbeit gehört.

Literatur

[1] D. Betten, M. Forst, Transitive Wirkungen auf Flächen / Effektive Lie-Algebren-Paare der Codimension 2. Mathematisches Seminar der Universität Kiel, 1977.

[2] T. Buchanan, H. Hähl, The transposition of locally compact, connected translation planes. J. Geometry **11**, 84–92 (1978).

[3] H. Hähl, Automorphismengruppen von lokalkompakten zusammenhängenden Quasikörpern und Translationsebenen. Geometriae Dedicata **4**, 305–321 (1975).

[4] H. Hähl, Geometrisch homogene vierdimensionale reelle Divisionsalgebren. Geometriae Dedicata **4**, 333–361 (1975).

[5] H. Hähl, Lokalkompakte zusammenhängende Translationsebenen mit großen Sphärenbahnen auf der Translationsachse. Resultate der Math. **2**, 62–87 (1979).

[6] H. Hähl, Zur Klassifikation von 8- und 16-dimensionalen lokalkompakten Translationsebenen nach ihren Kollineationsgruppen. Math. Z. **159**, 259–294 (1978).

[7] H. Hähl, Achtdimensionale lokalkompakte Translationsebenen mit großen Streckungsgruppen. Arch. Math. **34**, 231–242 (1980).

[8] H. Hähl, Achtdimensionale lokalkompakte Translationsebenen mit großen kompakten Kollineationsgruppen. Mh. Math. 90, 207–218 (1980).
[9] H. Hähl, Achtdimensionale lokalkompakte Translationsebenen mit zu $SL_2(\mathbb{C})$ isomorphen Kollineationsgruppen. J. reine angew. Math. 330, 76–92 (1982).
[10] H. Hähl, Eine Klasse achtdimensionaler lokalkompakter Translationsebenen mit großen Scherungsgruppen. Erscheint demnächst.
[11] H. Hähl, Achtdimensionale lokalkompakte Translationsebenen mit mindestens 17dimensionalen Kollineationsgruppen. Erscheint demnächst.
[12] D. R. Hughes, F. C. Piper, Projective planes. New York–Heidelberg–Berlin, 1973.
[13] D. Montgomery, Simply connected homogeneous spaces. Proc. Amer. Math. Soc. 1, 467–469 (1950).
[14] G. D. Mostow, The extensibility of local Lie groups of transformations and groups on surfaces. Ann. Math. 52, 606–636 (1950).
[15] R. W. Richardson, Groups acting on the 4-sphere. Illinois J. Math. 5, 474–485 (1961).
[16] H. Salzmann, Topological planes. Adv. in Math. 2, 1–60 (1967).

Eingegangen am 27. 10. 1981

Anschrift des Autors: Hermann Hähl, Mathematisches Seminar der Universität Kiel, Olshausenstr. 40–60, 2300 Kiel 1