Dimensionierung gekoppelter Schwingkreise mit ausgeglichenem Gewinn und Verlust

Bachelorarbeit von
Simon Rehwald

25. August 2024

Prüfer: Prof. Dr. Jörg Main
Betreuer: Dr. Daniel Dizdarevic

Vorgelegt an der

Universität Stuttgart

Institut für Theoretische Physik I
Pfaffenwaldring 57, 70569 Stuttgart

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **5**
1.1 Motivation . . . 5
1.2 Aufbau der Arbeit . . . 6

2 Theoretische Grundlagen **9**
2.1 Grundlagen nicht-Hermitescher Quantensysteme . . . 9
2.1.1 $\mathcal{PT}$- und anti-$\mathcal{PT}$-Symmetrie . . . 10
2.2 Beschreibung eines elektromagnetischen Schwingkreises . . . 11
2.2.1 Idealer Schwingkreis . . . 11
2.2.2 Beschreibung eines idealen Schwingkreises im Moden-Formalismus 12
2.2.3 Realer Schwingkreis mit Verlust . . . 14
2.2.4 Schwingkreis mit einlaufender Welle . . . 16
2.2.5 Allgemeine Beschreibung im Moden-Formalismus . . . 19
2.3 Beschreibung gekoppelter Schwingkreise . . . 22
2.3.1 Induktiv gekoppelte Schwingkreise . . . 23
2.3.2 Kapazitiv gekoppelte Schwingkreise . . . 28
2.3.3 Kapazitiv gekoppelte Schwingkreise mit negativer Kapazität und negativer Induktivität . . . 31
2.3.4 Beziehung zwischen den Kopplungskonstanten . . . 33

3 Realisierung $\mathcal{PT}$- und anti-$\mathcal{PT}$-symmetrischer Systeme **35**
3.1 Bedingungen für $\mathcal{PT}$-symmetrische Schwingkreise . . . 36
3.1.1 Exakte und gebrochene $\mathcal{PT}$-Symmetrie . . . 38
3.2 Bedingungen für anti-$\mathcal{PT}$-symmetrische Schwingkreise . . . 39
3.2.1 Exakte und gebrochene anti-$\mathcal{PT}$-Symmetrie . . . 41

4 Dimensionierung der gekoppelten Schwingkreise **43**
4.1 Induktive Systeme ohne Gewinn und Verlust . . . 45
4.1.1 Rekonstruktion der Stromstärken und Spannungen der Schwingkreise 49
4.1.2 Allgemeine Lösungen . . . 50
4.2 Dimensionierung $\mathcal{PT}$-symmetrischer Schwingkreise . . . 51
4.2.1 Induktive Kopplung . . . 51

4.2.2 Kapazitive Kopplung mit negativer Induktivität und negativer Kapazität 56
4.3 Dimensionierung anti-$\mathcal{PT}$-symmetrischer Schwingkreise 57
4.3.1 Herkömmliche kapazitive Kopplung 57
4.3.2 Kapazitive Kopplung mit negativer Induktivität und negativer Kapazität 62

5 Zusammenfassung und Ausblick **63**

A Übersicht der verwendeten Größen **65**

Literatur **67**

Danksagung **69**

1 Einleitung

1.1 Motivation

Kurz nach dem Aufkommen der ersten elektrischen Netzwerke zum Betrieb von Glühlampen am Ende des 19. Jahrhunderts kam es zum sogenannten „Stromkrieg“ zwischen Thomas Edison und seinem Ansatz zur Verwendung von Gleichstrom und Nikola Tesla und seinem Vorschlag, direkt den durch die Generatoren erzeugten Wechselstrom zu verwenden. Trotz einer Negativ-Kampagne durch Edison, dass Wechselstrom gefährlich sei, setzte sich Teslas Ansatz bis heute aufgrund einer höheren Übertragungseffizienz über große Strecken und eine einfachere Transformierbarkeit des Stroms durch [1]. Die Durchsetzung des Wechselstroms führte zu vielen weiteren Ansätzen, wie zum Beispiel Teslas eigener Vision eines globalen, drahtlosen Energiesystems [2], einen mittels fokussierter Mikrowellen betriebenen Helikopter der US-Armee [3] oder dem heute verbreiteten kabellosen Laden elektronischer Geräte. Des Weiteren wird aktuell beispielsweise an einer Aufladung von Elektroautos während der Fahrt gearbeitet [4]. Trotz der langjährigen Forschung und großen Verbreitung der kabellosen Energieübertragung gibt es immer noch einige Probleme. So hängt beispielsweise die Übertragungseffizienz bei der induktiven Energieübertragung, wie sie zum Beispiel für das kabellose Laden von Smartphones verwendet wird, vom Abstand der beiden verwendeten Spulen ab [5].

Ein Ansatz, um dieses Problem zu umgehen, ist, die Übertragungsfrequenz adaptiv anzupassen und damit die Übertragungseffizienz zu erhöhen. Ein weiterer Ansatz beruht darauf, Eigenschaften nicht Hermitescher Quantensysteme auf ein elektromagnetisches System zu übertragen. Dafür wird die aus der Quantenmechanik stammende $\mathcal{PT}$-Symmetrie auf ein System aus zwei gekoppelten Schwingkreisen übertragen. Im Fall der $\mathcal{PT}$-Symmetrie sind die Verluste durch Widerstände und der Gewinn durch eine Anregung in einem der Schwingkreise ausgeglichen, wodurch sich stationäre Zustände für das System ergeben. Dadurch ist im Vergleich zur aktiven Frequenzregulierung über einen größeren Bereich eine hohe Übertragungseffizienz realisierbar, ohne dass dabei aktive Komponenten benötigt werden [5], weshalb diese Systeme deutlich einfacher realisierbar sind.

Das Ziel dieser Arbeit ist ein System aus zwei gekoppelten elektromagnetischen Schwingkreisen mit ausgeglichenem Gewinn und Verlust zu realisieren. Dazu kann, wie oben

beschrieben, eine fundamentale Symmetrie der Physik, die $\mathcal{PT}$-Symmetrie, betrachtet werden. Für die Realisierung von Systemen mit ausgeglichenem Gewinn und Verlust werden in dieser Arbeit experimentell realisierbare Schwingkreise mit intrinsischen Verlusten und einer äußeren Anregung betrachtet. Dafür wird der zur Beschreibung dieser gekoppelten Schwingkreise verwendete Moden-Formalismus von Grund auf hergeleitet. Dadurch können die effektiven Größen, durch welche die gekoppelten Schwingkreise und deren Symmetrie untersucht werden, auf die in den Schwingkreisen verwendeten Bauteile zurückgeführt werden. Neben der $\mathcal{PT}$-Symmetrie wird zusätzlich noch die anti-$\mathcal{PT}$-Symmetrie untersucht, bei der Gewinn und Verlust zwar auch symmetrisch, aber nicht ausgeglichen sind. Für die Dimensionierung verschiedener $\mathcal{PT}$- und anti-$\mathcal{PT}$-symmetrischer Systeme werden insgesamt drei verschiedene Kopplungsvarianten betrachtet und verglichen. Dabei werden jeweils möglichst einfache Schwingkreise betrachtet, damit die in dieser Arbeit theoretisch betrachteten Systeme auch einfach experimentell realisiert werden können.

1.2 Aufbau der Arbeit

In Kapitel 2 wird zuerst die Theorie zur Beschreibung gekoppelter Schwingkreise hergeleitet. Dazu wird im Abschnitt 2.1 nach einem kurzen Überblick zur $\mathcal{PT}$-Symmetrie und der daraus resultierenden Eigenschaften für Gewinn und Verlust des Systems im Abschnitt 2.2 ein idealer Schwingkreis betrachtet und für diesen eine Darstellung im Moden-Formalismus hergeleitet. Anschließend wird diese Beschreibung erst auf reale Schwingkreise mit Verlust durch einen Widerstand und anschließend auf Schwingkreise mit einem zusätzlichem Gewinn durch eine einlaufende Welle ausgeweitet. Im Abschnitt 2.3 wird die hergeleitete Moden-Darstellung verwendet, um zwei gekoppelte Schwingkreise zu beschreiben. Dabei werden eine induktive und eine kapazitive Kopplung untersucht, wobei für die kapazitive Kopplung zusätzlich noch der Fall betrachtet wird, in dem die Induktivität und die Kapazität in einem der Schwingkreise negativ sind. Der Sonderfall einer kapazitiven Kopplung mit negativer Induktivität und Kapazität wird betrachtet, da diese im Vergleich zur kapazitiven Kopplung mit herkömmlichen Bauteilen größere Freiheiten besitzt und dadurch sowohl $\mathcal{PT}$-symmetrisch als auch anti-$\mathcal{PT}$-symmetrisch sein kann.

In Kapitel 3 werden anhand der in Kapitel 2 hergeleiteten Modenbeschreibung die verschiedenen gekoppelten Systeme mithilfe der hergeleiteten effektiven Größen untersucht, sowie unter welchen Bedingungen diese eine $\mathcal{PT}$- oder anti-$\mathcal{PT}$-Symmetrie aufweisen. Zusätzlich wird noch das allgemeine Verhalten eines $\mathcal{PT}$- beziehungsweise anti-$\mathcal{PT}$-symmetrischen Systems betrachtet.

In Kapitel 4 werden für die in Kapitel 3 hergeleiteten Bedingungen an die effektiven Größen beispielhafte Werte für die einzelnen Bauteile verwendet, um damit ein $\mathcal{PT}$- be-

ziehungsweise anti-$\mathcal{PT}$-symmetrisches System zu realisieren. Bei dieser Dimensionierung werden jeweils verschiedene Systeme zur Realisierung der verschiedenen Symmetrien angegeben und verglichen, um die Eigenschaften und Einflüsse der einzelnen Größen zu untersuchen.

Abschließend werden in Kapitel 5 die Befunde dieser Arbeit zusammengefasst und ein Ausblick gegeben.

Als Übersicht und Nachschlagemöglichkeit für die verschiedenen verwendeten Größen zur Beschreibung der Schwingkreise ist im Anhang A die Tabelle A.1 zu finden, welche die wichtigsten in dieser Arbeit verwendeten Größen sowie deren Definitionen und Bedeutungen zusammenfasst.

2 Theoretische Grundlagen

In diesem Kapitel wird der Moden-Formalismus hergeleitet, mit welchem sowohl ein einzelner, als auch zwei gekoppelte Schwingkreise einfach und elegant durch eine beziehungsweise für den gekoppelten Fall durch zwei gekoppelte Differentialgleichungen erster Ordnung beschrieben werden können. Dabei kann der hergeleitete Moden-Formalismus mit nur geringen Anpassungen auf alle in dieser Arbeit betrachteten Kopplungsvarianten angewandt werden.

2.1 Grundlagen nicht-Hermitescher Quantensysteme

Im mathematischen Formalismus der Quantenmechanik werden Messgrößen durch Operatoren beschrieben, wobei die Eigenwerte der Operatoren den möglichen Messergebnissen entsprechen. In der herkömmlichen Quantenmechanik wird gefordert, dass ein Operator Hermitesch ist ($A^\dagger = A$), da dies reelle Messwerte und damit einen unitären Zeitentwicklungsoperator garantiert. Dies wird gefordert, da es die mathematische Folge hat, dass das Betragsquadrat der Zustandsvektoren und damit zum Beispiel die Energie in einem geschlossenen System erhalten bleibt, eine Forderung die alle geschlossenen Systeme erfüllen müssen.

Zur Beschreibung offener Quantensysteme, welche mit ihrer Umgebung durch Teilchen- oder Energieaustausch interagieren können, eignen sich oft komplexe Potentiale. Hier beschreibt der Realteil das herkömmliche Potential und der Imaginärteil einen Gewinn, falls dieser größer null ist, oder Verlust, falls dieser kleiner null ist. Durch diese komplexen Potentiale sind die zugehörigen Hamilton-Operatoren der Systeme im Allgemeinen aber nicht mehr Hermitesch. Aufgrund dessen kann anstatt der Hermitezität des Operators als Bedingung die $\mathcal{PT}$-Symmetrie, welche im Abschnitt 2.1.1 eingeführt wird, betrachtet werden. Die $\mathcal{PT}$-Symmetrie beschreibt den Fall, dass Gewinn und Verlust in diesem System ausgeglichen sind. Deswegen besitzt das System unter bestimmten Bedingungen rein reelle Eigenwerte und damit stationäre Zustände. Als Bedingung für einen $\mathcal{PT}$-symmetrischen Hamilton-Operator muss das Potential lediglich einen symmetrischen Realteil und einen antisymmetrischen Imaginärteil aufweisen. Diese Phänomene lassen sich zwar auch explizit in der Hermiteschen Quantenmechanik beschreiben, indem die

gesamte Umgebung etwa in Form eines Teilchenreservoirs beachtet wird, dies ist aber deutlich komplizierter als eine effektive Beschreibung mithilfe komplexer Potentiale.

2.1.1 $\mathcal{PT}$- und anti-$\mathcal{PT}$-Symmetrie

Die $\mathcal{PT}$-Symmetrie ist die Kombination aus zwei fundamentalen physikalischen Symmetrien, unter welchen die meisten physikalischen Systeme invariant sind. $\mathcal{P}$ beschreibt den Paritätsoperator, der einer Raumspiegelung entspricht. Dies kann durch

$$\mathcal{P} : \hat{\boldsymbol{r}} \mapsto -\hat{\boldsymbol{r}},\ \hat{\boldsymbol{p}} \mapsto -\hat{\boldsymbol{p}} \tag{2.1}$$

beschrieben werden. $\mathcal{T}$ beschreibt den Zeitumkehroperator, welcher dem Umkehren des Zeitpfeils entspricht. Dieser kann durch

$$\mathcal{T} : \hat{\boldsymbol{r}} \mapsto \hat{\boldsymbol{r}},\ \hat{\boldsymbol{p}} \mapsto -\hat{\boldsymbol{p}},\ i \mapsto -i \tag{2.2}$$

beschrieben werden [6]. Neben der Umkehrung des Vorzeichens der Zeit t bewirkt dieser zusätzlich eine komplexe Konjugation, da durch Zeitumkehr ein Verlust des Systems zu einem Gewinn wird und umgekehrt.

Ein System ist $\mathcal{PT}$-symmetrisch, falls der Kommutator des $\mathcal{PT}$-Operators mit dem Hamilton-Operator des Systems verschwindet, also $[\mathcal{PT}, \mathcal{H}] = 0$. Dies ist äquivalent zu der Bedingung

$$\mathcal{PTH} = \mathcal{HPT}, \tag{2.3}$$

also dass der Hamilton-Operator des Systems invariant unter der Wirkung des $\mathcal{PT}$-Operators ist. Analog dazu kann die anti-$\mathcal{PT}$-Symmetrie durch das Verschwinden des Antikommutators zwischen dem $\mathcal{PT}$-Operator und dem Hamilton-Operator $\{\mathcal{PT}, \mathcal{H}\} = 0$ definiert werden. Dies kann äquivalent durch die Bedingung

$$\mathcal{PTH} = -\mathcal{HPT} \tag{2.4}$$

ausgedrückt werden, also dass der Hamilton-Operator des Systems unter der Wirkung des $\mathcal{PT}$-Operators sein Vorzeichen wechselt.

Ein $\mathcal{PT}$-symmetrisches System besitzt eine exakte $\mathcal{PT}$-Symmetrie, falls die Eigenzustände des Hamilton-Operator gleichzeitig auch Eigenzustände des $\mathcal{PT}$-Operators sind [6]. In diesem Fall ist das Spektrum rein reell. Außerhalb dieses Bereichs ist das Spektrum komplex, wobei jeweils zwei Eigenwerte zueinander komplex konjugiert sind. Die entsprechenden Zustände sind dadurch nicht mehr stationär, weshalb dies als gebrochene $\mathcal{PT}$-Symmetrie bezeichnet wird. Analog dazu kann für den anti-$\mathcal{PT}$-symmetrischen Fall die exakte anti-$\mathcal{PT}$-Symmetrie mit rein imaginärem Spektrum und die gebrochene Symmetrie mit jeweils zwei Lösungen, deren Realteile verschiedene Vorzeichen besitzen, definiert werden. Aufgrund dessen treten in diesem Fall nie stationäre Zustände auf.

2.2 Beschreibung eines elektromagnetischen Schwingkreises

In diesem Abschnitt wird der Moden-Formalismus zur Beschreibung eines idealen Schwingkreises, bestehend aus einer Spule und einem Kondensator, hergeleitet. Anschließend wird diese Beschreibung auf Schwingkreise mit einem Widerstand und einer angeschlossenen Transmission-Line erweitert. Dabei handelt es sich um einem Wellenleiter, wie zum Beispiel einem Koaxialkabel, der an einen Frequenzgenerator angeschlossen ist. Abschließend wird für den allgemeinen Schwingkreis, bestehend aus einem Kondensator, einer Spule einem Widerstand und einer Transmission-Line eine Darstellung im Moden-Formalismus hergeleitet.

2.2.1 Idealer Schwingkreis

Ein idealer, verlustfreier elektromagnetischer Schwingkreis besteht lediglich aus einem Kondensator und einer Spule, wie in Abbildung 2.1 dargestellt. Das Verhalten der Stromstärke und Spannung im Schwingkreis kann aus den Gleichungen der Spule und des Kondensators hergeleitet werden:

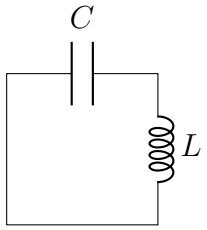


Abbildung 2.1: Idealer elektromagnetischer Schwingkreis, bestehend aus einem Kondensator der Kapazität C und einer Spule der Induktivität L.

- Der Strom I am Kondensator lädt oder entlädt diesen, wodurch sich die Spannung im Kondensator ändert,
$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{dt}} = -\frac{I}{C}, \tag{2.5}$$
wobei C die Kapazität des Kondensators beschreibt.
- Fließt ein Strom durch die Spule, so wird durch das dabei entstehende Magnetfeld eine Gegenspannung in der Spule induziert, welche dem Stromfluss entgegenwirkt. Aufgrund dessen ist die an der Spule anliegende Spannung proportional zur Änderung der Stromstärke,
$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{dt}} = \frac{U}{L} \tag{2.6}$$
mit der Induktivität L der Spule.

Die beiden Gleichungen der Bauteile (2.5) und (2.6) können als zwei gekoppelte Differentialgleichungen erster Ordnung betrachtet werden, anhand derer das System beschrieben werden kann. Alternativ können die beiden Gleichungen auch mithilfe der Kirchhoff'schen Gesetze zu einer Differentialgleichung zweiter Ordnung der Spannung U beziehungsweise

der Stromstärke I umformuliert werden, woraus sich

$$\frac{\mathrm{d}^2 U}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 U = 0, \tag{2.7}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 I}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 I = 0 \tag{2.8}$$

ergeben. Dabei beschreibt

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{2.9}$$

die Eigenfrequenz des Schwingkreises. Die im Schwingkreis gespeicherte Energie oszilliert zwischen der Spule in Form eines Magnetfelds, und dem Kondensator als ein elektrisches Feld, hin und her. Aufgrund dieses Verhaltens kann der elektromagnetische Schwingkreis analog zu einem harmonischen Oszillator mit der Eigenfrequenz ω_0 beschrieben werden. Das Lösen der Differentialgleichung (2.7) liefert die allgemeine Lösung der Spannung

$$U(t) = U_0 e^{i\omega_0 t} + U_0^* e^{-i\omega_0 t}, \tag{2.10}$$

woraus mithilfe von Gleichung (2.5) auch die Stromstärke

$$I(t) = -C\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = -i\omega_0 C U_0 e^{i\omega_0 t} + i\omega_0 C U_0^* e^{-i\omega_0 t} \tag{2.11}$$

hergeleitet werden kann. Dieselben Lösungen ergeben sich beim Lösen der Differentialgleichung der Stromstärke (2.8) und das anschließende Einsetzen in Gleichung (2.6).

2.2.2 Beschreibung eines idealen Schwingkreises im Moden-Formalismus

Eine weitere Möglichkeit zur Beschreibung des Schwingkreises ist die Einführung einer neuen Größe, um die beiden Gleichungen des Kondensators (2.5) und der Spule (2.6) zu entkoppeln. Dafür wird die neue Größe a, die Mode des Schwingkreises mithilfe des Vorfaktors α, als allgemeine Linearkombination der Spannung und Stromstärke

$$a = U + \alpha I \tag{2.12}$$

definiert. Einsetzen der Gleichungen (2.5) und (2.6) für Spannung und Stromstärke und das Vergleichen mit dem ursprünglichen Ansatz liefert die Gleichung

$$U + \alpha I = L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} - \alpha C\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}, \tag{2.13}$$

welche durch das Teilen durch den Faktor αC und Ausklammern der Ableitung auf der rechten Seite zu

$$-\frac{1}{\alpha C}(U + \alpha I) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(U - \frac{L}{\alpha C} I\right) \tag{2.14}$$

umgeformt werden kann. Um hieraus die gewünschten Differentialgleichungen zu erhalten, müssen die Moden, welche jeweils dem Term in Klammern entsprechen, auf beiden Seiten der Gleichung übereinstimmen. Aus diesem Vergleich kann der Faktor

$$\alpha = \pm \frac{i}{\omega_0 C} \tag{2.15}$$

der Mode bestimmt werden. Das Einsetzen dieses Vorfaktors liefert die beiden ungekoppelten Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\frac{\mathrm{d}a_\pm}{\mathrm{d}t} = \pm i\omega_0 a_\pm, \tag{2.16}$$

welche äquivalent zu den beiden Bauteilgleichungen (2.5) und (2.6) sind. Für die Moden folgt damit

$$a_\pm = \sqrt{\frac{C}{8}} \left(U \pm \frac{i}{\omega_0 C} I \right), \tag{2.17}$$

wobei der Vorfaktor $\sqrt{\frac{C}{8}}$ so gewählt ist, dass das Betragsquadrat der Amplitude $|a_\pm|^2$ der im Schwingkreis gespeicherten Energie entspricht.

Die Lösungen der Differentialgleichung (2.16) können direkt als $a_\pm = A_\pm(0)e^{\pm i\omega_0 t}$ abgelesen werden. Um aber die Moden $a_\pm$ in Abhängigkeit der Stromstärke und Spannung darzustellen, kann erneut die Differentialgleichung (2.7) verwendet werden. Da die Differentialgleichungen dasselbe System beschreiben, müssen auch deren Lösungen übereinstimmen. Damit kann die allgemeine Lösung der Spannungs-Differentialgleichung (2.10) in die Definition der Mode (2.17) eingesetzt werden, was die beiden Lösungen

$$a_+ = \sqrt{\frac{C}{2}} U_0 e^{i\omega_0 t}, \tag{2.18}$$

$$a_- = \sqrt{\frac{C}{2}} U_0^* e^{-i\omega_0 t} \tag{2.19}$$

liefert. Daran ist erkennbar, dass die beiden Lösungen der Mode jeweils proportional zu dem Spannungsanteil mit positiver, beziehungsweise negativer Frequenz sind. Dies folgt aus der Tatsache, dass die beiden Differentialgleichungen der Mode (2.16) zueinander komplex-konjugiert sind. Dies muss auch für deren Lösungen gelten, weshalb es ausreicht im Folgenden lediglich eine der beiden Lösungen $a \equiv a_+$ zu betrachten, da die negative Lösung $a_- = (a_+)^*$ der komplexen Konjugation der Mode a entspricht. Für eine analoge Darstellung der Mode in Abhängigkeit der Stromstärke kann die Spannung durch das Einsetzen der allgemeinen Lösung der Stromstärke-Differentialgleichung (2.8) in die Gleichung (2.6) über die Stromstärke ausgedrückt werden. Das Einsetzen dieser Darstellungen der Stromstärke und Spannung in die Definition der Mode liefert eine Darstellung der Mode in Abhängigkeit der Stromstärke.

2.2.3 Realer Schwingkreis mit Verlust

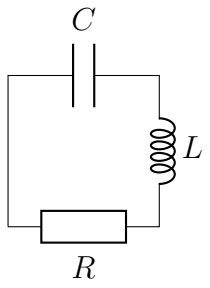


Abbildung 2.2: Realer elektromagnetischer Schwingkreis mit einem Widerstand R, sowie einem Kondensator und einer Spule wie in Abbildung 2.1.

Die in Abschnitt 2.2.1 hergeleitete Beschreibung des Schwingkreises gilt nur für den idealen Fall, in welchem die intrinsischen Widerstände der Bauteile, sowie die Widerstände der Leitungen zwischen den Bauteilen vernachlässigt werden. Für die Beschreibung eines realen Schwingkreises wird der ideale Schwingkreis um einen Widerstand R ergänzt, der alle auftretenden Widerstände effektiv zusammenfasst. Der daraus resultierende Schwingkreis ist in Abbildung 2.2 dargestellt. Der Widerstand R enthält zum einen den intrinsischen Widerstand des Schwingkreises, welcher durch

$$R = \rho \frac{l}{A} \approx \rho \frac{2\pi R_{\text{Spule}}}{\pi r_{\text{Draht}}^2} N = 2N\rho \frac{R_{\text{Spule}}}{r_{\text{Draht}}^2} \tag{2.20}$$

abgeschätzt werden kann, da der Widerstand der Leitungen gegenüber dem Widerstand der Spule vernachlässigbar ist. Dabei beschreibt ρ den spezifischen Widerstand des verwendeten Leiters und r_{Draht} dessen Querschnittradius. Des Weiteren steht N für die Anzahl der Windungen der Spule und R_{Spule} für den Radius einer dieser Windungen. Zum anderen kann durch ein zusätzliches Bauteil ein weiterer Widerstand eingebaut werden. In diesem Fall entspricht der Widerstand R der Summe aller intrinsischen und externen Widerstände.

Analog zum idealen Schwingkreis kann die Differentialgleichung des realen Schwingkreises,

$$\frac{\mathrm{d}^2 U}{\mathrm{d}t^2} + 2\gamma_R \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 U = 0 \tag{2.21}$$

mithilfe der Kirchhoff'schen Gesetze, den Gleichungen (2.5) und (2.6) für Kondensator und Spule sowie des Ohm'schen Gesetzes $U = RI$ hergeleitet werden. Dabei steht $\gamma_R = \frac{R}{2L}$ für den Verlustfaktor des Widerstandes im Schwingkreis. Zur Bestimmung der Ersatzfrequenz des Schwingkreises wird der allgemeine Ansatz der Spannung

$$U(t) = U_0 e^{i\omega' t} \tag{2.22}$$

betrachtet. Einsetzen des Ansatzes (2.22) in die Differentialgleichung (2.21) liefert die Ersatzfrequenz

$$\omega' = i\gamma_R \pm \sqrt{\omega_0^2 - \gamma_R^2}. \tag{2.23}$$

Abhängig vom Betrag des Widerstandes ergeben sich zwei verschiedene Fälle:

- Für $|\omega_0| > |\gamma_R|$ ist die Wurzel reell, somit besitzt das Argument der Exponentialfunktion einen Imaginärteil. Dieser Imaginärteil beschreibt die Schwingung mit

einer modifizierten Frequenz und der negative Realteil beschreibt die exponentielle Dämpfung der Amplitude. Daraus folgt

$$U(t) = U_0 e^{-\gamma_R t} e^{i\sqrt{\omega_0^2-\gamma_R^2}t} + U_0^* e^{-\gamma_R t} e^{-i\sqrt{\omega_0^2-\gamma_R^2}t}. \tag{2.24}$$

- Für $|\omega_0| < |\gamma_R|$ ist Ersatzfrequenz ω' rein imaginär. Dadurch ist der Exponent in Gleichung (2.22) rein reell, wodurch keine Schwingung, sondern lediglich eine exponentielle Zu- und Abnahme der Amplitude auftritt,

$$U(t) = U_0 e^{-\left(\gamma_R+\sqrt{\gamma_R^2-\omega_0^2}\right)t} + U_0^* e^{-\left(\gamma_R-\sqrt{\gamma_R^2-\omega_0^2}\right)t}. \tag{2.25}$$

In dieser Arbeit werden nur schwach gedämpfte Systeme mit $|\gamma_R| < |\omega_0|$ betrachtet, weshalb die Schwingungsfrequenz im verlustbehafteten Fall

$$\bar{\omega} \equiv \sqrt{\omega_0^2 - \gamma_R^2} \tag{2.26}$$

eine rein reelle Größe ist. Damit lässt sich die Differentialgleichung der Mode im verlustbehafteten Fall als

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} = (i\bar{\omega} - \gamma_R)\, a \tag{2.27}$$

schreiben. Die Spannung im verlustbehafteten Fall kann dadurch analog zum idealen Ansatz (2.10) als

$$U(t) = U_0 e^{(i\bar{\omega}-\gamma_R)t} + U_0^* e^{(-i\bar{\omega}-\gamma_R)t}. \tag{2.28}$$

geschrieben werden.

Für sehr kleine Widerstände mit $R \ll 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ kann die Ersatzfrequenz ω' durch eine Taylorentwicklung der Wurzel genähert werden,

$$\omega = i\frac{R}{2L} \pm \omega_0\sqrt{1-\frac{R^2C}{4L}} = i\frac{R}{2L} \pm \omega_0\left(1+\mathcal{O}\left(\frac{R^2C}{2L}\right)\right) \approx i\frac{R}{2L} \pm \omega_0. \tag{2.29}$$

Das Einsetzen dieser genäherten Eigenfrequenz in den Lösungsansatz (2.22) liefert die genäherte Spannung

$$U(t) = e^{-\gamma_R t}\left(U_0 e^{i\omega_0 t} + U_0^* e^{-i\omega_0 t}\right). \tag{2.30}$$

Vergleichen mit der Lösung des idealen Schwingkreises (2.10) zeigt, dass für kleine Widerstände die Spannung lediglich durch eine exponentielle Dämpfung proportional zum Verlustfaktor γ_R modifiziert wird. Durch das Einsetzen der genäherten Eigenfrequenz (2.29) in die Moden-Differentialgleichung (2.16) kann diese für einen verlustbehafteten Schwingkreis näherungsweise als

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} = (i\omega_0 - \gamma_R)\, a \tag{2.31}$$

geschrieben werden.

2.2.4 Schwingkreis mit einlaufender Welle

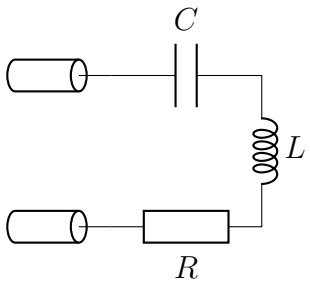


Abbildung 2.3: Realer elektromagnetischer Schwingkreis wie in Abbildung 2.2 mit angeschlossener Transmission-Line.

Bis jetzt wurde implizit immer die Annahme getroffen, dass bereits Energie im Schwingkreis gespeichert ist, da durch die bisher betrachteten Komponenten lediglich Energie durch den Widerstand an die Umgebung abgegeben werden kann. Um dem Schwingkreis von außen Energie zuführen zu können, wird dieser an eine Transmission-Line angeschlossen, was in Abbildung 2.3 dargestellt ist. Dabei handelt es sich um einen Wellenleiter, wie zum Beispiel ein Koaxial-Kabel, welcher mit einem Frequenzgenerator verbunden ist und eine einlaufende Welle der Form $s_+ = S_0 e^{i\tilde{\omega}t}$ erzeugt. Die daraus resultierende Anregung einer Schwingung kann im Moden-Formalismus durch den linearen Term βs_+, mit dem reellen Proportionalitätsfaktor β beschrieben werden. Anschaulich kann dies damit begründet werden, dass sich die Schwingung im Schwingkreis und die einlaufende Welle nach dem Superpositionsprinzip additiv überlagern [7]. Neben der Anregung durch die einlaufende Welle entsteht durch das Anschließen einer Transmission-Line ebenfalls ein weiterer Verlustfaktor, da ein Teil der Welle reflektiert wird und den Schwingkreis durch die Transmission-Line verlässt. Die Verluste durch einen im Schwingkreis vorhandenen Widerstand und durch die Transmission-Line werden in einen Ersatzwiderstand $\bar{R}$ zusammengefasst. Damit kann der Ersatz-Verlustfaktor über

$$\bar{\gamma} = \frac{\bar{R}}{2L} = \gamma_R + \bar{\gamma}_{\text{ext}} \tag{2.32}$$

berechnet werden, der die Verluste durch den Widerstand γ_R und die durch die Transmission-Line $\bar{\gamma}_{\text{ext}}$ zusammenfasst. Mithilfe dieser Größen kann die Differentialgleichung der Mode mit einer einlaufenden Welle als

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} = i\left(\bar{\omega} - \bar{\gamma}\right) a + \beta s_+, \tag{2.33}$$

mit den effektiven Größen (2.26) und (2.32) geschrieben werden.

Analog zu einem getriebenen harmonischen Oszillator kann die Schwingungsmode a in Abhängigkeit der einlaufenden Welle s_+ dargestellt werden. Dazu wird eine einlaufende Welle der Form $s_+ = S_0 e^{i\tilde{\omega}t}$ mit der reellen Frequenz $\tilde{\omega}$ betrachtet. Nach einem Einschwingvorgang, in welchem auch andere Schwingungen auftreten können, schwingt auch der Schwingkreis mit der äußeren Anregungsfrequenz $\tilde{\omega}$. Durch das passende Wählen der einlaufenden Welle, so dass diese die Verluste im Schwingkreis ausgleicht, kann die Mode als $a = A_0 e^{i\tilde{\omega}t}$ dargestellt werden. Das Einsetzen dieser Ansätze für die einlaufende Welle

und die Mode in die Differentialgleichung (2.33) liefert einen Ausdruck der Mode a in Abhängigkeit der einlaufenden Welle,

$$a = \frac{\beta}{i\left(\tilde{\omega} - \bar{\omega}\right) + \bar{\gamma}} s_+. \tag{2.34}$$

Auch der Vorfaktor β ist nicht unabhängig von den Systemgrößen [7] und kann aus der Betrachtung der Energieerhaltung hergeleitet werden. Dazu wird ein idealer Schwingkreis ohne einlaufende Welle betrachtet, weshalb $\gamma_R = 0$ und $s_+ = 0$ gilt. Aufgrund dessen ist die einzige auftretende Energieänderung der Verlust durch die auslaufende Welle in der Transmission-Line. Da keine Schwingung von außen angeregt wird, wird als Ansatz für die Mode $a = A_0 e^{(i\bar{\omega} - \bar{\gamma})t}$ mit der effektiven Eigenfrequenz $\bar{\omega}$ betrachtet. Aus der Betrachtung der Energieerhaltung folgt damit

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} W = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \left|a\right|^2 = -2\bar{\gamma} \left|a\right|^2 \stackrel{!}{=} -\left|s_-\right|^2, \tag{2.35}$$

da nach der Normierung der Mode $\left|a\right|^2$ der im Schwingkreis gespeicherten Energie W entspricht. Da es sich um einen idealen Schwingkreis ohne einlaufende Welle handelt, ist die einzig auftretende Energieänderung die der auslaufenden Welle s_-. Neben dem bisher betrachteten Schwingkreis kann zusätzlich dessen Zeitumkehr betrachtet werden, da die Elektrodynamik in verlustfreien Medien zeitreversibel ist. Für eine klare Unterscheidung der beiden Systeme werden die Größen des zeitinvertierten Schwingkreises mit einem Dach versehen. Durch die Zeitumkehr wird aus der reflektierten Welle des normalen Schwingkreis s_- die einlaufende Welle im zeitinvertierten Schwingkreis

$$\hat{s}_+ = s_-. \tag{2.36}$$

Außerdem ergibt sich die Mode des zeitinvertierten Schwingkreises aus der Mode des normalen Schwingkreises durch das Anwenden des Zeitumkehroperators $\mathcal{T}$, was in diesem Fall

$$\hat{a}(t) = \mathcal{T} a(t) = a^*(-t) = A_0^* e^{(i\bar{\omega} + \bar{\gamma})t} \tag{2.37}$$

liefert. Mithilfe der Ersatzfrequenz $\hat{\omega}' = \bar{\omega} - i\gamma$ kann der Exponent der Exponentialfunktion zusammengefasst werden, womit sich die zeitinvertierte Mode als $\hat{a}(t) = A_0^* e^{i\hat{\omega}' t}$ schreiben lässt. Aufgrund der analogen Struktur lässt sich die zeitinvertierte Mode ebenfalls durch die im zeitinvertierten Schwingkreis einlaufende Welle $\hat{s}_+$ schreiben, wobei anstatt der Frequenz $\tilde{\omega}$ die Ersatzfrequenz $\hat{\omega}'$ eingesetzt wird. Durch das Einsetzen der zeitinvertierten Mode in die Differentialgleichung kann diese analog zu Gleichung (2.34), durch

$$\hat{a} = \frac{\beta}{i\left(\hat{\omega}' - \bar{\omega}\right) + \bar{\gamma}} s_+ = \frac{\beta}{2\bar{\gamma}} \hat{s}_+, \tag{2.38}$$

in Abhängigkeit der einlaufenden Welle angegeben werden. Aus dem Betragsquadrat der Gleichung (2.38) kann der Vorfaktor β bestimmt werden, denn zum Zeitpunkt $t = 0$

stimmen das System und dessen Zeitinversion noch überein. Daraus folgt für diesen Zeitpunkt $|\hat{a}|^2 = |a|^2$ und $|\hat{s}_+|^2 = |s_-|^2$. Zusammen mit Gleichung (2.35) kann das Betragsquadrat der zeitinvertierten, einlaufenden Welle über die Mode dargestellt werden, woraus sich

$$|\hat{s}_+|^2 = |s_-|^2 = 2\bar{\gamma}\,|a|^2 \tag{2.39}$$

ergibt. Einsetzen dieser Beziehung in das Betragsquadrat der Gleichung (2.38) ergibt die Beziehung $\beta^2 = 2\bar{\gamma}$, woraus der Vorfaktor

$$\beta = \sqrt{2\bar{\gamma}} \tag{2.40}$$

hergeleitet werden kann. Dabei kann die Phase von β vernachlässigt werden, da β und s_+ nur als Produkt auftreten und die relative Phase zwischen den beiden Größen somit frei wählbar ist. Da hier der Sonderfall eines verlustfreien Schwingkreises betrachtet wurde, enthält der Verlustfaktor lediglich die externen Verluste durch die Transmission-Line, welche als $\bar{\gamma}_{\text{ext}}$ bezeichnet werden. Das Einsetzen in die Gleichung (2.34) liefert somit insgesamt

$$a = \frac{\sqrt{2\bar{\gamma}_{\text{ext}}}}{i\left(\tilde{\omega} - \bar{\omega}\right) + \bar{\gamma}} s_+ \tag{2.41}$$

als Ausdruck der Mode in Abhängigkeit von der einlaufenden Welle.

Für eine möglichst einfache Beschreibung des bisher betrachteten Schwingkreises ist es hilfreich, die Einkopplung von Energie durch die einlaufende Welle mithilfe eines negativen Widerstandes zu beschreiben. Dadurch kann der Schwingkreis erneut nur durch einen Kondensator, eine Spule und einen Widerstand beschrieben werden. Um dies zu erreichen, wird ein effektiver Verlustfaktor $\breve{\gamma}$ definiert, der sowohl die Einkopplung der einlaufenden Welle als Gewinn, sowie die Verluste des Schwingkreises zusammenfasst und damit auch negativ sein kann, falls mehr Energie eingekoppelt wird, als durch Verluste verloren geht. Da sich durch die Einkopplung einer Welle auch die Eigenfrequenz des Schwingkreises ändert, wird für diese ebenfalls eine effektive Größe $\breve{\omega}$ eingeführt. Das Einsetzen der effektiven Größen in die Moden-Differentialgleichung (2.27) liefert

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} = i\left(\breve{\omega} + i\breve{\gamma}\right) a \tag{2.42}$$

als gewünschte Darstellung. Um zu erreichen, dass sich der Schwingkreis tatsächlich so verhält, muss die einlaufende Welle s_+ passend gewählt werden. Ein Vergleich der beiden hergeleiteten Differentialgleichungen des Systems (2.33) und (2.42) liefert

$$s_+ = \frac{1}{\sqrt{2\bar{\gamma}_{\text{ext}}}}\left[i\left(\breve{\omega} - \bar{\omega}\right) - \left(\breve{\gamma} - \bar{\gamma}\right)\right] a \tag{2.43}$$

als Ausdruck für die einlaufende Welle s_+ zusammen mit dem hergeleiteten Vorfaktor (2.40). Zusätzlich werden die Ansätze

$$a = A_0 e^{(i\breve{\omega}-\breve{\gamma})t} = A_0 e^{-\breve{\gamma}t} \left[\cos(\breve{\omega}t) + i\sin(\breve{\omega}t)\right], \tag{2.44}$$

$$s_+ = S_0 e^{(i\tilde{\omega}-\tilde{\gamma})t} = S_0 e^{-\tilde{\gamma}t} \left[\cos(\tilde{\omega}t) + i\sin(\tilde{\omega}t)\right] \tag{2.45}$$

für die Mode, die durch die effektiven Größen $\breve{\omega}$ und $\breve{\gamma}$ beschrieben wird und die einlaufende Welle, die von der Anregungsfrequenz $\tilde{\omega}$ und dem Verlustfaktor $\tilde{\gamma}$ abhängt, betrachtet. Das Einsetzen der Ansätze in die Gleichung (2.43) und Aufteilen in die Real- und Imaginärteile liefert die beiden Gleichungen

$$\tilde{\omega}t = \arccos\left[-\frac{A_0}{S_0}\frac{e^{-(\breve{\gamma}-\tilde{\gamma})t}}{\sqrt{2\bar{\gamma}_{\text{ext}}}}\left((\breve{\omega}-\bar{\omega})\sin(\breve{\omega}t) + (\breve{\gamma}-\bar{\gamma})\cos(\breve{\omega}t)\right)\right], \tag{2.46}$$

$$\tilde{\omega}t = \arcsin\left[\frac{A_0}{S_0}\frac{e^{-(\breve{\gamma}-\tilde{\gamma})t}}{\sqrt{2\bar{\gamma}_{\text{ext}}}}\left((\breve{\omega}-\bar{\omega})\cos(\breve{\omega}t) - (\breve{\gamma}-\bar{\gamma})\sin(\breve{\omega}t)\right)\right]. \tag{2.47}$$

Da die beiden Gleichungen (2.46) und (2.47) übereinstimmen müssen, können daraus Bedingungen für das Verhältnis der Amplituden $\frac{A_0}{S_0}$ und für den Verlustfaktor der einlaufenden Welle $\tilde{\gamma}$ hergeleitet werden. Des Weiteren kann mithilfe einer der beiden Gleichungen (2.46) oder (2.47) die Anregungsfrequenz $\tilde{\omega}$ bestimmt werden, sodass sich das System wie gewünscht verhält. Dabei fällt auf, dass die Anregungsfrequenz nicht konstant ist, sondern dauerhaft angepasst werden muss, damit das System seinen Zustand beibehält. Da sich die Anregungsfrequenz aus der Mode und den Systemgrößen ergibt, kann deren Form aber bereits zuvor bestimmt werden ohne dauerhaft die Spannung und die Stromstärke im Schwingkreis messen zu müssen, um darüber die Anregungsfrequenz adaptiv anzupassen.

2.2.5 Allgemeine Beschreibung im Moden-Formalismus

Für eine möglichst einfache Beschreibung des realen Schwingkreises mit angeschlossener Transmission-Line wird für diesen ebenfalls eine Darstellung im Moden-Formalismus hergeleitet. Dazu wird grundsätzlich analog zum idealen Fall vorgegangen (siehe Kapitel 2.2.2). Da der ideale Schwingkreis lediglich aus einer Spule und einem Kondensator besteht, sind hier die Spannung und Stromstärke an den beiden Bauteilen betragsmäßig gleich groß. Im hier betrachteten Fall stimmt dies aber aufgrund des zusätzlichen effektiven Widerstandes $\breve{R}$, der die Effekte des echten Widerstandes und der Transmission-Line zusammenfasst, nicht mehr. Da die an den Bauteilen anliegenden Spannungen im Allgemeinen nicht mehr gleich groß sind, werden im Folgenden die Spannung und Stromstärke am Kondensator betrachtet, wobei vereinfachend $U \equiv U_C$ und $I \equiv I_C$ geschrieben wird. Zusätzlich kann $I \equiv I_C \equiv I_{\breve{R}}$ angenommen werden. Mithilfe der Kondensatorgleichung

(2.5) kann die Stromstärke als $I = -C\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}$ geschrieben werden. Zur Darstellung der Spannung U kann außerdem

$$U_L = U - U_{\breve{R}} = L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} \tag{2.48}$$

hergeleitet werden. Dafür wurde für die erste Gleichheit das zweite Kirchhoff'sche Gesetz und für die zweite Gleichheit die Spulengleichung (2.6) verwendet. Einsetzen dieser Darstellungen in den allgemeinen Ansatz der Mode (2.12) und Teilen durch den Faktor $-C\left(\breve{R}+\alpha\right)$ liefert die Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(U - \frac{L}{C\left(\breve{R}+\alpha\right)}I\right) = -\frac{1}{C\left(\breve{R}+\alpha\right)}\left(U+\alpha I\right). \tag{2.49}$$

Um daraus eine Differentialgleichung zu erhalten, müssen die beiden Klammern auf der rechten und linken Seite der Gleichung übereinstimmen. Daraus ergibt sich die Gleichung

$$-\frac{L}{C\left(\breve{R}+\alpha\right)} \stackrel{!}{=} \alpha \tag{2.50}$$

für die Konstante α. Die Lösungen der Gleichung lauten

$$\alpha_\pm = -\frac{\breve{R}}{2} \pm iL\breve{\bar{\omega}}, \tag{2.51}$$

mit der Eigenfrequenz

$$\breve{\bar{\omega}} = \sqrt{\omega_0^2 - \breve{\gamma}^2} \tag{2.52}$$

in Anwesenheit eines Widerstandes und einer Transmission-Line. Der Vorfaktor α kann weiter zu

$$\frac{\breve{R}+\alpha_\pm}{L} = \breve{\gamma} \pm i\breve{\bar{\omega}} \tag{2.53}$$

umgeformt werden. Damit können die beiden Moden als

$$a_\pm = \sqrt{\frac{C}{8}}\frac{\omega_0}{\breve{\bar{\omega}}}\left(U - \frac{1}{C\left(\pm i\breve{\bar{\omega}}+\breve{\gamma}\right)}I\right) \tag{2.54}$$

dargestellt werden, wobei der Vorfaktor $\sqrt{\frac{C}{8}}\frac{\omega_0}{\breve{\bar{\omega}}}$ erneut so gewählt wurde, dass das Betragsquadrat der Amplitude der im Schwingkreis gespeicherten Energie entspricht. Einsetzen der Mode in den Ansatz (2.49), zusammen mit dem Vorfaktor (2.51), geteilt durch die Induktivität L, liefert die Moden-Differentialgleichungen

$$\frac{\mathrm{d}a_\pm}{\mathrm{d}t} = i\underbrace{\left(\pm\breve{\bar{\omega}} + i\breve{\gamma}\right)}_{\equiv\breve{\omega}'}a_\pm \tag{2.55}$$

mit der effektiven Ersatzfrequenz $\breve{\omega}'$, welche die effektive Eigenfrequenz und den effektiven Verlustfaktor zusammenfasst. Ein Vergleich mit der Moden-Differentialgleichung des idealen Schwingkreises (2.16) zeigt, dass der ideale und der allgemeine Fall dieselbe Struktur aufweisen. Der einzige Unterschied liegt darin, dass im allgemeinen Fall statt der Eigenfrequenz des Schwingkreises ω_0 die effektive Ersatzfrequenz $\breve{\omega}'$, bestehend aus der effektiven Eigenfrequenz $\breve{\omega}$ und dem Verlustfaktor $\breve{\gamma}$, auftritt. Außerdem gilt, genau wie im idealen Fall, dass die beiden Moden $a_\pm$ und deren zugehörige Differentialgleichungen zueinander komplex konjugiert sind. Deswegen genügt es erneut nur eine der beiden Moden $a \equiv a_+$ zu betrachten, da hieraus durch die komplexe Konjugation die andere Mode berechnet werden kann.

Zur Darstellung der hergeleiteten Mode in Abhängigkeit von Spannung und Stromstärke kann erneut der allgemeine Ansatz für die Spannung

$$U(t) = U_0 e^{\left(i\breve{\omega}-\breve{\gamma}\right)t} + U_0^* e^{\left(-i\breve{\omega}-\breve{\gamma}\right)t}, \tag{2.56}$$

als allgemeine Lösung der Spannungs-Differentialgleichung zweiter Ordnung (2.21) mit dem effektiven Widerstand $\breve{R}$ betrachtet werden. Da Gleichung (2.56) die Spannung am Kondensator beschreibt, kann mithilfe von Gleichung (2.5) eine allgemeine Gleichung der Stromstärke am Kondensator

$$I(t) = -C\left[\left(i\breve{\omega}-\breve{\gamma}\right)U_0 e^{\left(i\breve{\omega}-\breve{\gamma}\right)t} - \left(i\breve{\omega}+\breve{\gamma}\right)U_0^* e^{\left(-i\breve{\omega}-\breve{\gamma}\right)t}\right] \tag{2.57}$$

hergeleitet werden. Einsetzen von Spannung und Stromstärke in die Moden-Darstellung (2.54) liefert die Mode in Abhängigkeit der Spannung,

$$a = \sqrt{\frac{C}{8}}\frac{\omega_0}{\breve{\omega}}\left(1+\frac{i\breve{\omega}-\breve{\gamma}}{i\breve{\omega}+\breve{\gamma}}\right)U_0 e^{\left(i\breve{\omega}-\breve{\gamma}\right)t} = \sqrt{\frac{C}{2}}\frac{i\omega_0}{i\breve{\omega}+\breve{\gamma}}U_+(t). \tag{2.58}$$

Aus dieser Darstellung der Mode in Abhängigkeit der Spannung kann auch eine Darstellung in Abhängigkeit der Stromstärke hergeleitet werden. Da die Spannungskomponente $U_+ = U_0 e^{\left(i\breve{\omega}-\breve{\gamma}\right)t}$ proportional zu einer Exponentialfunktion ist, kann die Spannung auch über ihre Ableitung geschrieben werden. Zusammen mit der Kondensator-Gleichung (2.5) folgt damit

$$U_+(t) = \frac{1}{i\breve{\omega}-\breve{\gamma}}\frac{\mathrm{d}U_+(t)}{\mathrm{dt}} = -\frac{1}{i\breve{\omega}-\breve{\gamma}}\frac{I_+(t)}{C} \tag{2.59}$$

als Darstellung der Spannung in Abhängigkeit der Stromstärke. Einsetzen dieser Beziehung in die Modendarstellung in Abhängigkeit der Spannung (2.58) liefert die Modendarstellung

$$a = \frac{i}{\sqrt{2C}}\frac{1}{\omega_0}I_+(t) = i\sqrt{\frac{L}{2}}I_+(t) \tag{2.60}$$

in Abhängigkeit der Stromstärke.

Insgesamt wurden nun zwei Moden-Differentialgleichung zur Beschreibung eines Schwingkreises, bestehend aus Kondensator, Spule, Widerstand und Transmission-Line, hergeleitet. Zum einen die Darstellung mithilfe der effektiven Größen (2.42), zum anderen die aus dem allgemeinen Modenansatz hergeleitete Darstellung (2.55). Da diese Darstellungen dasselbe System beschreiben, müssen auch die Differentialgleichungen übereinstimmen. Daraus folgt die Bedingung

$$\breve{\omega} = \breve{\bar{\omega}}, \tag{2.61}$$

dass die beiden hergeleiteten effektiven Eigenfrequenzen übereinstimmen müssen. Der effektive Verlustfaktor $\breve{\gamma}$ hängt dabei von der einlaufenden Welle s_+ ab. Wird die einlaufende Welle nach Gleichung (2.46) gewählt, so ist der effektive Verlustfaktor des Systems konstant und die allgemeine Dynamik des Schwingkreises kann durch Gleichung (2.42) beschrieben werden.

In der Herleitung der Modendarstellung wurde ein allgemeiner Schwingkreis bestehend aus einem Kondensator, einer Spule, einem Widerstand und einer Transmission-Line betrachtet. Aus diesem allgemeinen Ansatz können aber auch direkt die Moden für die Spezialfälle eines verlustbehafteten Schwingkreises ohne Transmission-Line und die eines idealen Schwingkreises bestimmt werden. So gilt beispielsweise für einen verlustbehafteten Schwingkreis ohne Transmission-Line, $\bar{\gamma}_{\mathrm{ext};k} = 0$. Da aufgrund der fehlenden Transmission-Line auch weder eine Ein- noch eine Auskopplung auftritt, gilt auch $\frac{1}{\beta} = 0$, wodurch die effektiven Größen mit denen des verlustbehafteten Schwingkreises übereinstimmen, was als $\breve{\omega} = \bar{\omega}$ und $\breve{\gamma} = \bar{\gamma}$ geschrieben werden kann.

2.3 Beschreibung gekoppelter Schwingkreise

Im Folgenden werden zwei Schwingkreise miteinander gekoppelt, die jeweils aus einem Kondensator, einer Spule, einem Widerstand und einer Transmission-Line bestehen. Durch die Kopplung kann Energie vom einen auf den anderen Schwingkreis übertragen werden, wodurch sich die in den Schwingkreisen gespeicherten Energien ändern. Zur Beschreibung dieser Phänomene wird der hergeleitete Moden-Formalismus ausgeweitet, um damit auch zwei gekoppelte Schwingkreise beschreiben zu können. Bei den verschiedenen betrachteten Kopplungsvarianten handelt es sich um eine induktive Kopplung über die beiden Spulen, eine kapazitive Kopplung mithilfe eines weiteren Kondensators und zusätzlich die kapazitive Kopplung für den Fall, dass die Induktivität und die Kapazität in einem der beiden Schwingkreise negativ sind. Bei der Spule mit negativer Induktivität und dem Kondensator mit negativer Kapazität handelt es sich um komplexe Bauteile, deren Wirkung aber analog zu einer Spule oder einem Kondensator mit negativer Induktivität

beziehungsweise negativer Kapazität beschreibbar ist [8, 9]. Aufgrund dieses Verhaltens können diese Bauteil zur Vereinfachung in dieser Arbeit lediglich als effektive Bauteile mit einer negativen Bauteilgröße beschrieben werden.

2.3.1 Induktiv gekoppelte Schwingkreise

Gegenseitige Induktivität

Die Kopplung der beiden Schwingkreise erfolgt durch die gegenseitigen Induktion in den beiden Spulen. So erzeugt ein veränderlicher Strom in der ersten Spule ein veränderliches Magnetfeld, welches eine Induktionsspannung in der zweiten Spule erzeugt und umgekehrt. Ist A_2 die von der zweiten Spule eingeschlossene Fläche, so kann die Induktionsspannung in der zweiten Spule mithilfe von

$$U_2 = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(A_2 B_1\right) = -A_2 \frac{\mathrm{d}B_1}{\mathrm{dt}} = M \frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{dt}} \tag{2.62}$$

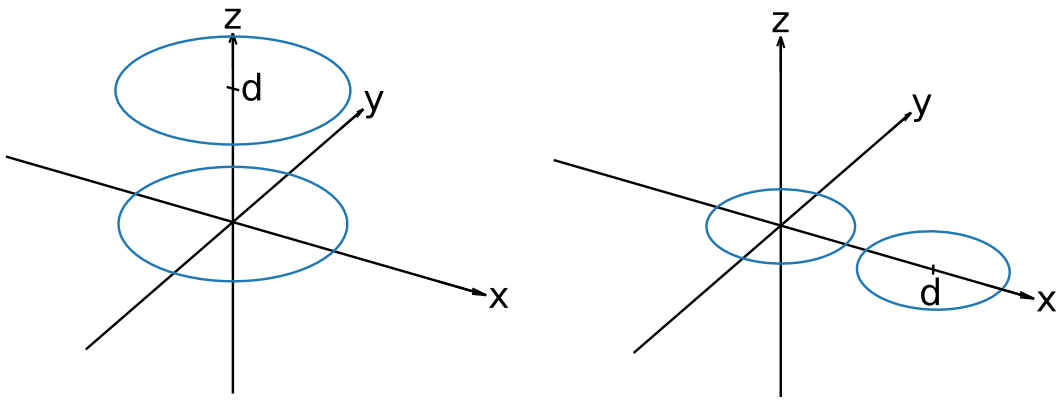
berechnet werden. Die Konstante M bezeichnet dabei die gegenseitige Induktivität und hängt nicht nur von den beiden Spulen, sondern auch von deren Geometrie zueinander ab. Dies ist zum Beispiel daran erkennbar, dass für die Stärke des Magnetfeldes einer Spule, die wie in Abbildung 2.4a orientiert ist, nach dem Biot-Savart-Gesetz $B \sim \frac{1}{d^2}$ für den Abstand d entlang der z-Achse der Spule gilt. Damit gilt für die im Magnetfeld gespeicherte Energie $E_B = \frac{B^2}{2\mu} \sim \frac{1}{d^4}$.

Für zwei Leiterschleifen kann die gegenseitige Induktivität M mithilfe der Neumann-Formel

$$M = \frac{\mu_0}{4\pi} \int\limits_{\partial A_1} \int\limits_{\partial A_2} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}_2}{|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|} \tag{2.63}$$

berechnet werden [10]. Werden dünne Spulen betrachtet, also Spulen deren Länge vernachlässigbar gegenüber ihrer Radien ist, so können diese mithilfe mehrerer Leiterschleifen genähert werden, die sich ohne Abstand alle am selben Ort befinden. Damit kann die gegenseitige Induktivität der beiden dünnen Spulen mithilfe der Neumann-Formel genähert werden, indem Gleichung (2.63) mit den Windungszahlen der beiden Spulen multipliziert wird. Im Folgenden wird die gegenseitige Induktion mithilfe dieser Näherung für zwei Beispiele explizit berechnet.

Beispiel 1 Es werden zwei Leiterschleifen der Radien R_1 und R_2 betrachtet, welche entlang der z-Achse verschoben sind, wie in Abbildung 2.4a dargestellt. Die Linienelemente



(a) Beispiel 1 **(b)** Beispiel 2

Abbildung 2.4: Positionierung der beiden Leiterschleifen im Raum, für welche die gegenseitige Induktion in den beiden Beispielen berechnet wird.

der Leiterschleifen können als

$$\mathrm{d}\boldsymbol{l}_k = \begin{pmatrix} R_k \cos(\varphi_k) \\ R_k \sin(\varphi_k) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.64}$$

geschrieben werden. Nach der Wahl des Ursprungs, wie in Abbildung 2.4a, gilt für die Koordinaten der Leiterschleifen

$$\boldsymbol{r}_1 = \begin{pmatrix} R_1 \cos(\varphi_1) \\ R_1 \sin(\varphi_1) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{r}_2 = \begin{pmatrix} R_2 \cos(\varphi_2) \\ R_2 \sin(\varphi_2) \\ d \end{pmatrix}. \tag{2.65}$$

Damit lässt sich die gegenseitige Induktivität der Leiterschleifen als

$$M = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R_1 R_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}{\sqrt{R_1^2 + R_2^2 - 2R_1 R_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + d^2}} \mathrm{d}\varphi_1 \mathrm{d}\varphi_2 \tag{2.66}$$

schreiben. Um daraus die gegenseitige Induktivität der beiden Spulen zu erhalten, wird das Integral (2.66) mit den Windungszahlen der Spulen N_1 und N_2 multipliziert.

Beispiel 2 Als zweites Beispiel werden zwei zueinander parallele Leiterschleifen mit den Radien R_1 und R_2 betrachtet, welche im Abstand d in der x-y-Ebene liegen, wie in Abbildung 2.4b dargestellt. Aus der Wahl des Ursprungs folgt für die Koordinaten der Leiterschleifen

$$\boldsymbol{r}_1 = \begin{pmatrix} R_1 \cos(\varphi_1) \\ R_1 \sin(\varphi_1) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{r}_2 = \begin{pmatrix} R_2 \cos(\varphi_2) + d \\ R_2 \sin(\varphi_2) \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{2.67}$$

womit sich die gegenseitige Induktion der beiden Leiterschleifen als

$$M = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R_1 R_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}{\sqrt{R_1^2 + R_2^2 - 2R_1 R_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \delta(d) + d^2}} \mathrm{d}\varphi_1 \mathrm{d}\varphi_2 \tag{2.68}$$

mit

$$\delta(d) = 2d \left[R_2 \cos(\varphi_2) - R_1 \cos(\varphi_1) \right] \tag{2.69}$$

schreiben lässt. Das Multiplizieren von Gleichung (2.68) mit den Windungszahlen der Spulen N_1 und N_2 liefert die gegenseitige Induktivität der beiden Spulen.

Mithilfe der gegenseitigen Induktivität kann auch die Induktivität einer Leiterschleife berechnet werden. Die Induktivität einer Leiterschleife entspricht dabei der gegenseitigen Induktivität zwischen zwei identischen Leiterschleifen im Abstand $d = 0$. Daraus kann näherungsweise auch die Induktivität einer Spule bestimmt werden, wobei die Rechnung dafür allerdings nicht trivial ist [11].

Beschreibung der Kopplung

Zur Beschreibung der beiden gekoppelten Schwingkreise, welche in Abbildung 2.5 dargestellt sind, wird die in Abschnitt 2.2.4 hergeleitete Darstellung der Differentialgleichung (2.42) mithilfe der effektiven Größen $\breve{\omega}$ und $\breve{\gamma}$ verwendet. Die gekoppelten Schwingkreise, welche in Abbildung 2.5 dargestellt sind, lassen sich durch die beiden gekoppelten Differentialgleichungen

$$\frac{\mathrm{d}a_1}{\mathrm{d}t} = \left(i\breve{\omega}_1 - \breve{\gamma}_1 \right) a_1 + \kappa_{12} a_2, \tag{2.70}$$

$$\frac{\mathrm{d}a_2}{\mathrm{d}t} = \left(i\breve{\omega}_2 - \breve{\gamma}_2 \right) a_2 + \kappa_{21} a_1 \tag{2.71}$$

beschreiben. Dabei geben die beiden Kopplungskonstanten κ_{kl} die Stärke der Energieübertragung des l-ten auf den k-ten Schwingkreis an. Dass sich die Kopplungskonstanten als

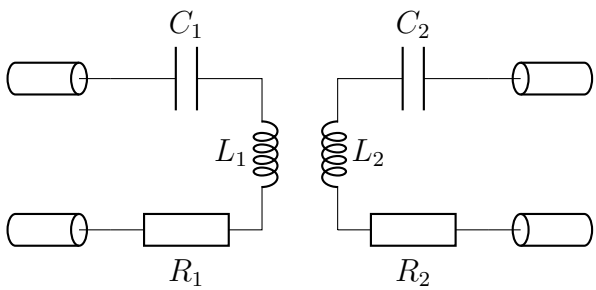


Abbildung 2.5: Induktiv gekoppelte Schwingkreise

einfache komplexe Zahlen schreiben lassen, liegt daran, dass die in dieser Arbeit betrachteten Systeme lediglich eine schwache Kopplung besitzen, also $|\kappa_{kl}| \ll \breve{\omega}_{k;l}$. Aufgrund dessen können die funktionalen Abhängigkeiten der Kopplungskonstanten vernachlässigt werden [7], weshalb sich diese als einfache komplexe Zahlen schreiben lassen. Ein Ausdruck für die beiden Kopplungskonstanten wird im Folgenden über die Energiebilanz der beiden Schwingkreise hergeleitet.

Die Energie im zweiten Schwingkreis nimmt durch die Verluste am Widerstand R_2 und an der Transmission-Line ab, was durch die Leistung $P_{\breve{R}_2}$ mit dem effektiven Widerstand $\breve{R}_2$ beschrieben wird. Ein weiterer Verlustfaktor ist die auf den ersten Schwingkreis übertragene Leistung P_{21}. Gleichzeitig nimmt die Energie durch die vom ersten Schwingkreis übertragene Leistung P_{12} zu. Somit lässt sich die Energieänderung im zweiten Schwingkreis insgesamt als

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} W_2 = -P_{\breve{R}_2} + P_{12} - P_{21} \tag{2.72}$$

schreiben. Die Verlustleistung $P_{\breve{R}_2}$ durch den Widerstand und die Transmission-Line kann durch die Betrachtung eines einzelnen, ungekoppelten Schwingkreises ohne einlaufende Welle hergeleitet werden. In diesem System ist die einzige Energieänderung die Verlustleistung des effektiven Widerstandes, welche durch die Normierung der Moden mithilfe der Differentialgleichung eines einzelnen Schwingkreises (2.42) ausgedrückt werden kann,

$$-P_{\breve{R}_2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} |a_2|^2 = -2\breve{\gamma}_2 |a_2|^2 . \tag{2.73}$$

Mithilfe der Normierung der Moden kann auch die gesamte Energiebilanz des gekoppelten Schwingkreises berechnet werden,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} |a_2|^2 = a_2^* \frac{\mathrm{d}a_2}{\mathrm{d}t} + a_2 \frac{\mathrm{d}a_2^*}{\mathrm{d}t} = -2\breve{\gamma}_2 |a_2|^2 + \kappa_{21} a_1 a_2^* + \kappa_{21}^* a_1^* a_2, \tag{2.74}$$

wobei die auftretenden Ableitungen der Moden mithilfe der Differentialgleichung (2.71) ausgedrückt wurden. Ein Vergleich der beiden Ausdrücke der Energiebilanz liefert

$$P_{12} - P_{21} = \kappa_{21} a_1 a_2^* + \kappa_{21}^* a_1^* a_2 \tag{2.75}$$

für die durch die Kopplung effektiv übertragene Leistung. Da die übertragene Leistung genau wie die Moden der Schwingkreise oszilliert, wird im Folgenden der zeitliche Mittelwert der übertragenen Leistung betrachtet, welcher durch $\langle \ldots \rangle$ dargestellt wird. Analog zu Abschnitt 2.2.5 werden erneut die Spannungen und Stromstärken an den Kondensatoren betrachtet, weshalb diese vereinfacht als $U_k \equiv U_{C_k}$ und $I_k \equiv I_{C_k}$ geschrieben werden. Zusätzlich kann $I_k \equiv I_{L_k} \equiv I_{\breve{R}_k}$ angenommen werden. Die vom ersten auf den zweiten

Schwingkreis übertragene Leistung P_{12} kann damit mithilfe der Definition der Leistung als Produkt von Spannung und Stromstärke durch

$$P_{12} = \langle U_{L_2} I_{L_2} \rangle = \left\langle M \frac{\mathrm{d}I_{L_1}}{\mathrm{d}t} I_{L_2} \right\rangle = \frac{M}{L_1} \left\langle U_1 I_2 - \breve{R}_1 I_1 I_2 \right\rangle \tag{2.76}$$

dargestellt werden. Hierbei steht U_{L_2} für die in der Spule des zweiten Schwingkreises induzierte Spannung, welche nach Gleichung (2.62) über die Zeitableitung der Stromstärke im ersten Schwingkreis I_1 dargestellt werden kann. Diese kann mithilfe von Gleichung (2.6) weiter umgeformt werden, um die Zeitableitung der Stromstärke durch die an der Spule anliegende Spannung auszudrücken. Abschließend kann die an der Spule anliegende Spannung mithilfe des zweiten Kirchhoff'schen Gesetzes als $U_{L_1} = U_1 - U_{\breve{R}_1}$ geschrieben werden, wobei die am Widerstand abfallende Spannung mithilfe des Ohm'schen Gesetzes über die Stromstärke dargestellt werden kann. Als allgemeinen Ansatz für die Spannung wird eine Linearkombination der beiden Spannungen betrachtet, welche mit den beiden Ersatz-Eigenfrequenzen $\breve{\omega}'_k$ und $\breve{\omega}'^*_k$ schwingen. Nach Abschnitt 2.2.4 können diese über die Mode dargestellt werden und sind zueinander komplex konjugiert, also $U_k^+(t) = \left(U_k^-(t)\right)^*$. Einsetzen der Gleichung (2.58) ergibt den Ansatz

$$U_k(t) = \frac{1}{2}\left(U_k^+(t) + U_k^-(t)\right) = \frac{1}{\sqrt{2C_k}} \frac{1}{i\omega_k} \left[\left(i\breve{\omega}_k + \breve{\gamma}_k\right) a_k + \left(i\breve{\omega}_k - \breve{\gamma}_k\right) a_k^*\right] \tag{2.77}$$

für die Spannung. Mithilfe von Gleichung (2.5) kann daraus auch ein allgemeiner Ansatz für die Stromstärke

$$I_k(t) = -C_k \frac{\mathrm{d}U_k(t)}{\mathrm{d}t} = -\frac{i}{\sqrt{2L}} \left(a_k - a_k^*\right) \tag{2.78}$$

hergeleitet werden. Das Einsetzen der Ansätze der Spannung und Stromstärke in den Ansatz der Kopplungsleistung (2.76) liefert

$$\begin{aligned} P_{12} &\approx \frac{M}{2L_1} \left\langle \frac{1}{\sqrt{C_1 L_2}\omega_1} \left[\left(i\breve{\omega}_1 + \breve{\gamma}_1\right) a_1 a_2^* - \left(i\breve{\omega}_1 - \breve{\gamma}_1\right) a_1^* a_2\right] - \underbrace{\breve{R}_1 \frac{1}{\sqrt{L_1 L_2}}}_{=2\breve{\gamma}_1\sqrt{\frac{L_1}{L_2}}} \left[a_1 a_2^* + a_1^* a_2\right] \right\rangle \\ &= \frac{M}{2\sqrt{L_1 L_2}} \left\langle \left(i\breve{\omega}_1 - \breve{\gamma}_1\right) a_1 a_2^* - \left(i\breve{\omega}_1 + \breve{\gamma}_1\right) a_1^* a_2 \right\rangle \\ &= i\frac{M}{2\sqrt{L_1 L_2}} \left\langle \left(\breve{\omega}_1 + i\breve{\gamma}_1\right) a_1 a_2^* - \left(\breve{\omega}_1 - i\breve{\gamma}_1\right) a_1^* a_2 \right\rangle , \end{aligned} \tag{2.79}$$

wobei für die zwei Umformungen jeweils die Definition der Eigenfrequenz (2.9) eingesetzt wurde. Zusätzlich wurden in der Rechnung im ersten Schritt die Terme proportional zu $a_1 a_2$ und $a_1^* a_2^*$ im Mittelwert vernachlässigt, da diese mit den Frequenzen $\pm\left(\breve{\omega}_1 + \breve{\omega}_2\right)$ schwingen. Diese sind deutlich größer als die Frequenzen der verbleibenden Terme $\pm\left(\breve{\omega}_1 - \breve{\omega}_2\right)$, weshalb die Terme proportional zu $a_1 a_2$ und $a_1^* a_2^*$ im Mittelwert näherungsweise null sind. Da die beiden betrachteten Schwingkreise symmetrisch sind, kann die

vom zweiten auf den ersten Schwingkreis übertragene Leistung analog hergeleitet werden,

$$P_{21} \approx i\frac{M}{2\sqrt{L_1 L_2}} \left\langle \left(\breve{\omega}_2 + i\breve{\gamma}_2\right) a_1^* a_2 - \left(\breve{\omega}_2 - i\breve{\gamma}_2\right) a_1 a_2^* \right\rangle . \tag{2.80}$$

Mithilfe dieser Größen kann die effektiv übertragene Leistung als

$$P_{12} - P_{21} = i\frac{M}{2\sqrt{L_1 L_2}} \left\langle \left[\left(\breve{\omega}_1 + \breve{\omega}_2\right) + i\left(\breve{\gamma}_1 - \breve{\gamma}_2\right)\right] a_1 a_2^* - \left[\left(\breve{\omega}_1 + \breve{\omega}_2\right) - i\left(\breve{\gamma}_1 - \breve{\gamma}_2\right)\right] a_1^* a_2 \right\rangle \tag{2.81}$$

geschrieben werden. Ein Vergleich mit der Gleichung (2.75) liefert einen Ausdruck für die Kopplungskonstante

$$\kappa_{21} = i\frac{M}{2\sqrt{L_1 L_2}} \left[\left(\breve{\omega}_1 + \breve{\omega}_2\right) + i\left(\breve{\gamma}_1 - \breve{\gamma}_2\right)\right] . \tag{2.82}$$

Als Überprüfung der Rechnung kann aus dem Vergleich auch die komplex-konjugierte Kopplungskonstante κ_{21}^* hergeleitet werden, welche tatsächlich mit der komplexen Konjugation der hergeleiteten Kopplungskonstante κ_{21} übereinstimmt. Aufgrund der Symmetrie der beiden betrachteten Schwingkreise kann die Kopplungskonstante

$$\kappa_{12} = i\frac{M}{2\sqrt{L_1 L_2}} \left[\left(\breve{\omega}_1 + \breve{\omega}_2\right) - i\left(\breve{\gamma}_1 - \breve{\gamma}_2\right)\right] \tag{2.83}$$

analog hergeleitet werden.

Aus dieser allgemeinen Betrachtung von zwei induktiv gekoppelten Schwingkreisen, welche beide jeweils aus einem Kondensator, einer Spule, einem Widerstand und einer Transmission-Line bestehen, kann auch die Kopplungskonstante für den Spezialfall von zwei idealen, induktiv gekoppelten Schwingkreisen hergeleitet werden. Da die idealen Schwingkreise weder einen Widerstand noch eine Transmission-Line enthalten, gilt $\breve{\gamma}_k = 0$. Aufgrund dessen ist die effektive Eigenfrequenz $\breve{\omega}_k$ nach Gleichung (2.52) äquivalent zur Eigenfrequenz des idealen Schwingkreises ω_k. Dadurch vereinfachen sich die Kopplungskonstanten zu

$$\kappa_{12} = \kappa_{21} = i\frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} . \tag{2.84}$$

2.3.2 Kapazitiv gekoppelte Schwingkreise

Im Gegensatz zum induktiven Fall werden die beiden Schwingkreise bei der kapazitiven Kopplung direkt über einen weiteren Kondensator gekoppelt. Um die am Kopplungskondensator abfallende Spannung durch die Spannungen der beiden Kondensatoren in den Schwingkreisen ausdrücken zu können, werden beide Schwingkreise zusätzlich,

wie in Abbildung 2.6 dargestellt, geerdet. Diese Erdungen sind äquivalent dazu, die beiden Schwingkreise leitend zu verbinden, was in Abbildung 2.6 gestrichelt eingezeichnet ist. Diese Verbindung dient dazu, dass die am Kopplungskondensator anliegende Spannung mithilfe der Kirchhoff'schen Maschenregel, in Abhängigkeit der an den beiden Kondensatoren der Schwingkreise anliegenden Spannungen, angegeben werden kann.

Daran ist auch erkennbar, dass die Position der Bauteile in den Schwingkreisen nicht mehr beliebig ist. Tauschen zum Beispiel Kondensator und Spule im ersten Schwingkreis die Positionen, so hängt die Spannung am Kopplungskondensator nicht mehr von der Spannung am Kondensator C_1, sondern von der Spannung an der Spule L_1 ab, wodurch sich auch die Kopplungskonstante ändert. Da die Herleitung in allen Fällen analog verläuft, werden in dieser Arbeit nur die in Abbildung 2.6 dargestellten Systeme betrachtet, in denen sich die Kondensatoren der Schwingkreise zwischen den Erdungen und dem Kopplungskondensator befinden. Die Kopplung kann wie im induktiven Fall durch die beiden gekoppelten Moden-Differentialgleichungen (2.70) und (2.71) beschrieben werden, wobei die Kopplungskonstanten ebenfalls aus der Energiebilanz der Schwingkreise hergeleitet werden können.

Dazu wird analog zur induktiven Kopplung erneut die durch das Kopplungsbauteil, hier ein Kondensator, übertragene Leistung betrachtet. In diesem Ansatz der übertragenen Leistung

$$P_K = \langle I_{C_C} U_{C_C} \rangle \tag{2.85}$$

ist sowohl die vom ersten auf den zweiten Schwingkreis, als auch die vom zweiten auf den ersten Schwingkreis übertragene Leistung enthalten. Dies ist daran erkennbar, dass die am Kopplungskondensator anliegende Spannung mithilfe der in den beiden Schwingkreisen eingebauten Erdungen über die Spannungen an den Kondensatoren in den beiden Schwingkreisen ausgedrückt werden kann. Aus der zweiten Kirchhoff'schen

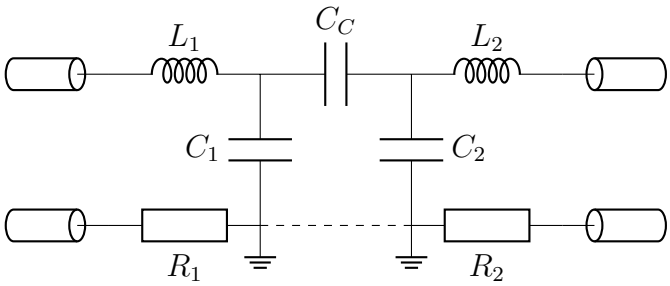


Abbildung 2.6: Zwei kapazitiv gekoppelte Schwingkreise mit jeweils einer Erdung, um die Spannung am Kopplungskondensator über die Spannungen an den Kondensatoren der Schwingkreise darzustellen. Die Erdungen sind äquivalent dazu, die beiden Schwingkreise leitend zu verbinden, was gestrichelt eingezeichnet ist.

Regel folgt

$$U_{C_C} = -\left(U_1 + U_2\right). \tag{2.86}$$

Deswegen müssen nicht die einzelnen übertragenen Leistungen betrachtet werden, sondern der Ansatz P_K enthält bereits die beiden in der induktiven Kopplung betrachteten Übertragungsleistungen P_{12} und P_{21}. Deswegen kann die Kopplungskonstante mithilfe dieser übertragenen Leistung wie in Gleichung (2.75), als

$$P_K = \kappa_{21} a_1 a_2^* + \kappa_{21}^* a_1^* a_2 \tag{2.87}$$

geschrieben werden. Die Stromstärke I_{C_C} im Ansatz der Übertragungsleistung kann mithilfe der Kondensatorgleichung (2.5) ebenfalls über die Stromstärken in den Schwingkreisen beschrieben werden, woraus

$$I_{C_C} = -C_C \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = C_C \left(\frac{\mathrm{d}U_{C_1}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}U_{C_2}}{\mathrm{d}t}\right) = -\frac{C_C}{C_1} I_1 - \frac{C_C}{C_2} I_2 \tag{2.88}$$

folgt. Das Einsetzen der Ausdrücke für die Spannung (2.86) und die Stromstärke (2.88) in die Übertragungsleistung (2.85)

$$P_K = C_C \left\langle \frac{U_1 I_1}{C_1} + \frac{U_2 I_1}{C_1} + \frac{U_1 I_2}{C_2} + \frac{U_2 I_2}{C_2} \right\rangle \tag{2.89}$$

zeigt, dass neben der übertragenen Energie noch zwei weitere Terme auftreten, die lediglich Größen aus einem Schwingkreis enthalten und damit nicht mit der Kopplung zwischen den Schwingkreisen zusammenhängen. Aufgrund dessen wird für die Übertragungsleistung lediglich

$$P_K = C_C \left\langle \frac{U_2 I_1}{C_1} + \frac{U_1 I_2}{C_2} \right\rangle \tag{2.90}$$

betrachtet. Das Einsetzen der allgemeinen Ansätze (2.77) und (2.78) für die Spannung und Stromstärke in die Übertragungsleistung (2.90) ergibt

$$\begin{aligned} P_K &= -i \frac{C_C}{2} \left\langle \frac{1}{C_1} \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} \left(\breve{\omega}_2'^* a_2 + \breve{\omega}_2' a_2^*\right)\left(a_1 - a_1^*\right) + \frac{1}{C_2} \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} \left(\breve{\omega}_1'^* a_1 + \breve{\omega}_1' a_2^*\right)\left(a_2 - a_2^*\right) \right\rangle \\ &\approx -i \frac{C_C}{2} \sqrt{L_1 L_2} \left\langle \omega_1^2 \left(\breve{\omega}_2' a_1 a_2^* - \breve{\omega}_2'^* a_1^* a_2\right) + \omega_2^2 \left(\breve{\omega}_1' a_1^* a_2 - \breve{\omega}_1'^* a_1 a_2^*\right) \right\rangle \\ &= -i \frac{C_C}{\sqrt{C_1 C_2}} \frac{1}{2\omega_1 \omega_2} \left\langle \left(\omega_1^2 \breve{\omega}_2' - \omega_2^2 \breve{\omega}_1'^*\right) a_1 a_2^* - \left(\omega_1^2 \breve{\omega}_2'^* - \omega_2^2 \breve{\omega}_1'\right) a_1^* a_2 \right\rangle, \end{aligned} \tag{2.91}$$

wobei im zweiten Schritt erneut alle Terme proportional zu $a_1 a_2$ und $a_1^* a_2^*$, wie in Gleichung (2.79), vernachlässigt wurden. Ein Vergleich der Übertragungsleistung mit der alternativen Darstellung (2.87), welche aus der Energieerhaltung hergeleitet wurde, liefert die Kopplungskonstante

$$\kappa_{21} = -i \frac{C_C}{\sqrt{C_1 C_2}} \frac{1}{2\omega_1 \omega_2} \left(\omega_1^2 \breve{\omega}_2' - \omega_2^2 \breve{\omega}_1'^*\right). \tag{2.92}$$

Der Vergleich liefert ebenfalls κ_{21}^*, welches tatsächlich der komplexen Konjugation von κ_{21} entspricht. Aufgrund der Symmetrie der beiden Schwingkreise kann die Kopplungskonstante

$$\kappa_{12} = i\frac{C_C}{\sqrt{C_1 C_2}}\frac{1}{2\omega_1\omega_2}\left(\omega_1^2\breve{\omega}_2'^* - \omega_2^2\breve{\omega}_1'\right) \tag{2.93}$$

analog hergeleitet werden.

2.3.3 Kapazitiv gekoppelte Schwingkreise mit negativer Kapazität und negativer Induktivität

Neben der kapazitiven Kopplung von zwei herkömmlichen Schwingkreisen, wie sie in Abschnitt 2.3.2 betrachtet wurde, kann zusätzlich der Spezialfall betrachtet werden, dass sowohl die Induktivität als auch die Kapazität in einem der beiden kapazitiv gekoppelten Schwingkreise negativ sind. Bei diesen Bauteilen mit negativen Bauteilgrößen handelt es sich um komplexe Bauteile, die sich aber wie ein Kondensator oder eine Spule mit negativer Kapazität beziehungsweise negativer Induktivität verhalten. Experimentell können solche Bauteile beispielsweise mithilfe von Negative-Impedance-Converter und Negative-Impedance-Inverter realisiert werden [8, 9, 12]. Zur Vereinfachung werden diese Bauteile in dieser Arbeit lediglich als Kondensatoren oder Spulen mit negativer Kapazität beziehungsweise negativer Induktivität dargestellt. Dieser Sonderfall der kapazitiven Kopplung ist insofern interessant, da ein solcher Schwingkreis trotz der negativen Bauteile eine positive Eigenfrequenz (2.9) besitzt. Des weiteren unterscheiden sich die Kopplungskonstanten im Vergleich zur herkömmlichen kapazitiven Kopplung, wodurch sich auch die Dynamiken der beiden Systeme voneinander unterscheiden. Das in Abbildung 2.7 dargestellte System besteht aus zwei kapazitiv gekoppelten Schwingkreisen mit negativer Kapazität und negativer Induktivität im zweiten Schwingkreis. Die Differentialgleichungen des Systems sind identisch zu dem Fall mit gewöhnlichen Bauteilen. Da die Differential-

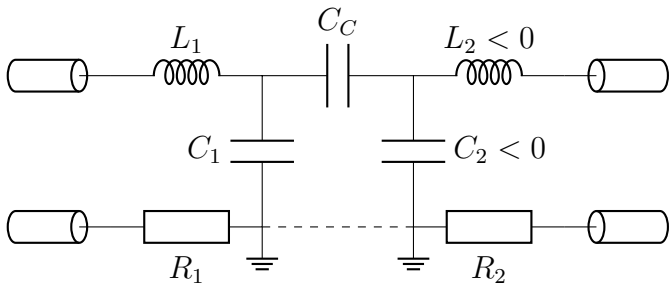


Abbildung 2.7: Kapazitiv gekoppelte Schwingkreise mit negativer Induktivität und negativer Kapazität im zweiten Schwingkreis, wobei die gestrichelte Verbindung äquivalent zu den beiden Erdungen ist.

gleichungen dieselbe Struktur wie das in Abschnitt 2.3.2 betrachtete System besitzen, können auch die Kopplungskonstanten analog bestimmt werden. Dazu wird erneut die effektiv durch die Kopplung übertragene Leistung (2.87) betrachtet, welche alternativ auch über die Spannungen und Stromstärken wie in Gleichung (2.90) dargestellt werden kann. Für die Stromstärke und die Spannung werden erneut die Ansätze (2.77) und (2.78) betrachtet. Aufgrund der negativen Kapazität im zweiten Schwingkreis, folgen für die Spannung und die Stromstärke im zweiten Schwingkreis

$$I_2(t) = \pm \frac{1}{\sqrt{2\,|L_2|}} \left(a_2 + a_2^*\right), \tag{2.94}$$

$$U_2(t) = \pm i \frac{1}{\sqrt{2\,|C_2|\omega_2}} \left(\breve{\omega}_2'^* a_2 - \breve{\omega}_2' a_2^*\right). \tag{2.95}$$

Die Vorzeichen $\pm$ stammen daher, dass die Gleichung $x^2 = -1$ die beiden Lösungen $x = \pm i$ besitzt. Dabei können die Vorzeichen der Stromstärke und Spannung im zweiten Schwingkreis unabhängig voneinander gewählt werden. Dadurch ergeben sich zwei Fälle mit jeweils verschiedenen Kopplungskonstanten:

Fall 1 Besitzen die Stromstärke (2.94) und Spannung (2.95) des zweiten Schwingkreises dasselbe Vorzeichen, so liefert das Einsetzen dieser Ansätze in die Übertragungsleistung (2.90) die Gleichung

$$\begin{aligned} P_K &= \pm \frac{C_C}{\sqrt{C_1\,|C_2|}} \frac{1}{2\omega_1\omega_2} \left\langle \omega_1^2 \left(a_1 - a_1^*\right) \left(\breve{\omega}_2'^* a_2 - \breve{\omega}_2' a_2^*\right) - \omega_2^2 \left(a_2 + a_2^*\right) \left(\breve{\omega}_1'^* a_1 + \breve{\omega}_1' a_1^*\right) \right\rangle \\ &\approx \mp \frac{C_C}{\sqrt{C_1\,|C_2|}} \frac{1}{2\omega_1\omega_2} \left\langle \left(\omega_1^2 \breve{\omega}_2' + \omega_2^2 \breve{\omega}_1'^*\right) a_1 a_2^* + \left(\omega_1^2 \breve{\omega}_2'^* + \omega_2^2 \breve{\omega}_1'\right) a_1^* a_2 \right\rangle, \end{aligned} \tag{2.96}$$

wobei im zweiten Schritt erneut die Terme proportional zu $a_1 a_2$ und $a_1^* a_2^*$ wie in Abschnitt 2.3.2 vernachlässigt wurden. Die beiden Vorzeichen $\pm$ können dabei physikalisch als ein Phasenunterschied zwischen den beiden Moden der Schwingkreise interpretiert werden. So entspricht das negative Vorzeichen einem Phasenunterschied von π zwischen den Moden der Schwingkreise. Damit beschreiben die beiden Lösungen eine Kopplung ohne, beziehungsweise eine mit einem Phasenunterschied von π zwischen den Moden. Aus einem Vergleich mit dem aus der Energieerhaltung abgeleiteten Ansatz der Übertragungsleistung (2.87) kann die Kopplungskonstante

$$\kappa_{21}^{(1)} = \mp \frac{C_C}{\sqrt{C_1\,|C_2|}} \frac{1}{2\omega_1\omega_2} \left(\omega_2^2 \breve{\omega}_1'^* + \omega_1^2 \breve{\omega}_2'\right) \tag{2.97}$$

bestimmt werden. Analog folgt für die zweite Kopplungskonstante

$$\kappa_{12}^{(1)} = \mp \frac{C_C}{\sqrt{C_1\,|C_2|}} \frac{1}{2\omega_1\omega_2} \left(\omega_2^2 \breve{\omega}_1' + \omega_1^2 \breve{\omega}_2'^*\right). \tag{2.98}$$

Fall 2 Besitzen die Stromstärke (2.94) und Spannung (2.95) verschiedene Vorzeichen, so liefert das Einsetzen dieser Ansätze in die Übertragungsleistung (2.90)

$$\begin{aligned} P_K &= \mp \frac{C_C}{\sqrt{C_1 \left|C_2\right|}} \frac{1}{2\omega_1\omega_2} \left\langle \omega_1^2 \left(a_1 - a_1^*\right) \left(\breve{\omega}_2'^* a_2 - \breve{\omega}_2' a_2^*\right) + \omega_2^2 \left(a_2 + a_2^*\right) \left(\breve{\omega}_1'^* a_1 + \breve{\omega}_1' a_1^*\right) \right\rangle \\ &\approx \mp \frac{C_C}{\sqrt{C_1 \left|C_2\right|}} \frac{1}{2\omega_1\omega_2} \left\langle \left(-\omega_1^2 \breve{\omega}_2' + \omega_2^2 \breve{\omega}_1'^*\right) a_1 a_2^* + \left(-\omega_1^2 \breve{\omega}_2'^* + \omega_2^2 \breve{\omega}_1'\right) a_1^* a_2 \right\rangle , \end{aligned} \tag{2.99}$$

wobei im zweiten Schritt ebenfalls die Terme proportional zu $a_1 a_2$ und $a_1^* a_2^*$ wie in Abschnitt 2.3.2 vernachlässigt wurden. Im Vergleich zu der Übertragungsleistung (2.96) des ersten betrachteten Falls ändern sich hier lediglich die Vorzeichen der ersten beiden Terme des Mittelwerts. Auch hier kann aus dem Vergleich mit dem aus der Energieerhaltung abgeleiteten Ansatz der Übertragungsleistung (2.87) die Kopplungskonstante

$$\kappa_{21}^{(2)} = \mp \frac{C_C}{\sqrt{C_1 \left|C_2\right|}} \frac{1}{2\omega_1\omega_2} \left(\omega_2^2 \breve{\omega}_1'^* - \omega_1^2 \breve{\omega}_2'\right) \tag{2.100}$$

bestimmt werden. Analog folgt für die zweite Kopplungskonstante

$$\kappa_{12}^{(2)} = \pm \frac{C_C}{\sqrt{C_1 \left|C_2\right|}} \frac{1}{2\omega_1\omega_2} \left(\omega_2^2 \breve{\omega}_1' - \omega_1^2 \breve{\omega}_2'^*\right) . \tag{2.101}$$

2.3.4 Beziehung zwischen den Kopplungskonstanten

Im Sonderfall der konservativen Kopplung, in welchem die gekoppelten Schwingkreise keine Energie mit der Umgebung, beispielsweise durch einen Widerstand oder eine Transmission-Line, austauschen können, hängen die beiden Kopplungskonstanten κ_{12} und κ_{21} voneinander ab. Aus der Betrachtung der Energieerhaltung kann $\kappa_{12} = -\kappa_{21}^*$ hergeleitet werden. Dazu werden erneut zwei ideale Schwingkreise ohne ein- und auslaufende Wellen betrachtet. Durch das Fehlen von Widerständen und Transmission-Lines erfolgt der einzige Energieaustausch durch die Kopplung zwischen den Schwingkreisen. Da im idealen Fall keine Energie verloren geht, bleibt die Gesamtenergie in den beiden Schwingkreisen erhalten. Aufgrund der Normierung der Moden kann dies als

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\left|a_1\right|^2 + \left|a_2\right|^2\right) = 0 \tag{2.102}$$

geschrieben werden. Diese Ableitungen können durch das Einsetzen der Differentialgleichungen des idealen Schwingkreises (2.16) ersetzt werden, woraus sich die Bedingung

$$\left(\kappa_{12} + \kappa_{21}^*\right) a_1^* a_2 + \left(\kappa_{12}^* + \kappa_{21}\right) a_1 a_2^* = 0 \tag{2.103}$$

ergibt. Da diese Gleichung immer erfüllt sein muss und die Amplituden sowie die relative Phase der Moden zum Zeitpunkt $t = 0$ frei gewählt werden können, muss die Gleichung unabhängig von den Moden a_1 und a_2 erfüllt sein. Daraus folgt die Bedingung an die Kopplungskonstanten

$$\kappa_{21} = -\kappa_{12}^{*}. \tag{2.104}$$

Damit können die beiden Kopplungskonstanten κ_{12} und κ_{21} über eine gemeinsame Größe κ mittels $\kappa_{12} \equiv \kappa$ und $\kappa_{21} \equiv -\kappa^{*}$ ausgedrückt werden.

Im Fall einer dissipativen Kopplung, in welchem das System Energie mit der Umgebung beispielsweise über einen Widerstand oder eine Transmission-Line austauscht, gilt diese Eigenschaft im Allgemeinen nicht mehr. Dies liegt daran, dass aufgrund der Interaktion des Systems mit der Umgebung die Gleichung (2.102) nicht mehr gilt. Trotz dessen besitzen auch manche dissipativ gekoppelten Systeme diese Eigenschaft, wie zum Beispiel die in Abschnitt 2.3.1 betrachtete induktive Kopplung.

3 Realisierung $\mathcal{PT}$- und anti-$\mathcal{PT}$-symmetrischer Systeme

Mit dem in Kapitel 2 hergeleiteten Moden-Formalismus können die auf verschiedene Weisen gekoppelten Schwingkreise einfach mithilfe der beiden gekoppelten Differentialgleichungen

$$\frac{\mathrm{d}a_1}{\mathrm{d}t} = (i\breve{\omega}_1 - \breve{\gamma}_1)\, a_1 + i\breve{\kappa}_{12} a_2, \tag{3.1}$$

$$\frac{\mathrm{d}a_2}{\mathrm{d}t} = (i\breve{\omega}_2 - \breve{\gamma}_2)\, a_2 + i\breve{\kappa}_{21} a_1 \tag{3.2}$$

beschrieben werden. Hierbei wurden, im Gegensatz zu den Gleichungen (2.70) und (2.71), die Kopplungsterme zusätzlich mit der imaginären Einheit i als Vorfaktor definiert, um eine Darstellung analog zu einem offenen Zwei-Mulden-System zu erhalten [13]. Um die beiden Darstellungen zu unterscheiden, werden die Kopplungskonstanten in diesem Kapitel als $\breve{\kappa}_{kl} \equiv -i\kappa_{kl}$ geschrieben. Dazu können die Differentialgleichungen auch vektoriell mit einer 2×2-Matrix A durch

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \tag{3.3}$$

mit

$$A = \begin{bmatrix} i\breve{\omega}_1 - \breve{\gamma}_1 & i\breve{\kappa}_{12} \\ i\breve{\kappa}_{21} & i\breve{\omega}_2 - \breve{\gamma}_2 \end{bmatrix} \tag{3.4}$$

geschrieben werden. Dieses Matrixmodell ist mathematisch äquivalent zu der Matrixdarstellung eines offenen Zwei-Mulden-Systems [11, 13]. Damit kann ein zu den gekoppelten Schwingkreisen äquivalentes Quantensystem, welches ebenfalls durch die Matrixgleichung (3.3) beschrieben wird, betrachtet werden. Der Hamilton-Operator dieses Systems kann aus dem Vergleich der Matrix-Differentialgleichung mit der zeitabhängigen Schrödinger-Gleichung

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \mathcal{H}\psi \tag{3.5}$$

erhalten werden. Dieser Vergleich liefert

$$\mathcal{H} = i\hbar A = \hbar \begin{bmatrix} -\breve{\omega}_1 - i\breve{\gamma}_1 & -\breve{\kappa}_{12} \\ -\breve{\kappa}_{21} & -\breve{\omega}_2 - i\breve{\gamma}_2 \end{bmatrix} \tag{3.6}$$

und

$$\psi = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}. \tag{3.7}$$

Zur Vereinfachung kann durch eine geeignete Wahl der Einheiten $\hbar = 1$ gesetzt werden.

Damit kann das Konzept der $\mathcal{PT}$- und anti-$\mathcal{PT}$-Symmetrie durch die Betrachtung des hergeleiteten effektiven Hamilton-Operators auf die gekoppelten elektromagnetischen Schwingkreise übertragen werden. Aufgrund dessen können aus der Betrachtung der Symmetrie des effektiven Hamilton-Operators Bedingungen an die gekoppelten Schwingkreise und deren charakteristische Größen hergeleitet werden, unter denen sich das System $\mathcal{PT}$-, beziehungsweise anti-$\mathcal{PT}$-symmetrisch verhält.

3.1 Bedingungen für $\mathcal{PT}$-symmetrische Schwingkreise

Nach Abschnitt 2.1.1 ist ein System $\mathcal{PT}$-symmetrisch, falls der Hamilton-Operator des Systems invariant unter der Wirkung des $\mathcal{PT}$-Operators ist. Das Einsetzen des effektiven Hamilton-Operators (3.6) in die Bedingung (2.3) liefert die Matrixgleichung

$$\begin{bmatrix} -\breve{\omega}_2 + i\breve{\gamma}_2 & -\breve{\kappa}_{21}^* \\ -\breve{\kappa}_{12}^* & -\breve{\omega}_1 + i\breve{\gamma}_1 \end{bmatrix} \overset{!}{=} \begin{bmatrix} -\breve{\omega}_1 - i\breve{\gamma}_1 & -\breve{\kappa}_{12} \\ -\breve{\kappa}_{21} & -\breve{\omega}_2 - i\breve{\gamma}_2 \end{bmatrix}, \tag{3.8}$$

aus welcher durch Vergleichen der einzelnen Einträge der beiden Matrizen die Bedingungen

$$\breve{\omega}_1 = \breve{\omega}_2, \tag{3.9}$$

$$\breve{\gamma}_1 = -\breve{\gamma}_2, \tag{3.10}$$

$$\breve{\kappa}_{12} = \breve{\kappa}_{21}^* \tag{3.11}$$

für die effektiven Größen abgelesen werden können. Die Bedingung (3.10) zeigt, dass Gewinn und Verlust ausgeglichen sein müssen. Die Bedingung (3.11) ist hierbei äquivalent zur Eigenschaft (2.104) einer konservativen Kopplung, da $\breve{\kappa}_{kl} = -i\kappa_{kl}$. Dies zeigt, dass auch die dissipativen Anteile der Kopplungskonstanten ausgeglichen sein müssen. Damit lassen sich die neuen Größen $\breve{\omega} \equiv \breve{\omega}_1 = \breve{\omega}_2$, $\breve{\gamma} \equiv \breve{\gamma}_1 = -\breve{\gamma}_2$ und $\breve{\kappa} \equiv \breve{\kappa}_{12} = \breve{\kappa}_{21}^*$ definieren. Mithilfe dieser Größen kann der $\mathcal{PT}$-symmetrische Hamilton-Operator als

$$\mathcal{H}^{\mathcal{PT}} = \begin{bmatrix} -\breve{\omega} - i\breve{\gamma} & -\breve{\kappa} \\ -\breve{\kappa}^* & -\breve{\omega} + i\breve{\gamma} \end{bmatrix} \tag{3.12}$$

geschrieben werden.

Im Folgenden wird untersucht, mit welchen der in Abschnitt 2.3 betrachteten Kopplungsvarianten ein $\mathcal{PT}$-symmetrisches System realisierbar ist und welche Bedingungen an die effektiven Größen sich daraus ergeben.

Induktive Kopplung Nach Abschnitt 2.3.1 gilt für die effektiven induktiven Kopplungskonstanten (2.82) und (2.83)

$$\breve{\kappa}_{12} = \frac{M}{2\sqrt{L_1 L_2}} \left[(\breve{\omega}_1 + \breve{\omega}_2) - i \left(\breve{\gamma}_1 - \breve{\gamma}_2 \right) \right], \tag{3.13}$$

$$\breve{\kappa}_{21} = \frac{M}{2\sqrt{L_1 L_2}} \left[(\breve{\omega}_1 + \breve{\omega}_2) + i \left(\breve{\gamma}_1 - \breve{\gamma}_2 \right) \right]. \tag{3.14}$$

Mit den Bedingungen (3.9) und (3.10) vereinfachen sich die Kopplungskonstanten zu

$$\breve{\kappa}_{12} = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} \left(\breve{\omega} - i\breve{\gamma} \right), \tag{3.15}$$

$$\breve{\kappa}_{21} = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} \left(\breve{\omega} + i\breve{\gamma} \right) \tag{3.16}$$

für ein $\mathcal{PT}$-symmetrisches System. Daran ist auch direkt erkennbar, dass die Kopplungskonstanten die Bedingung (3.11) erfüllen, weshalb sich diese durch

$$\breve{\kappa} = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} \left(\breve{\omega} - i\breve{\gamma} \right). \tag{3.17}$$

zusammenfassen lassen.

Kapazitive Kopplung Für die effektiven kapazitiven Kopplungskonstanten (2.92) und (2.93) gilt

$$\breve{\kappa}_{12} = \frac{C_C}{\sqrt{C_1 C_2}} \frac{1}{2\omega_1\omega_2} \left(\omega_1^2 \breve{\omega}_2'^{*} - \omega_2^2 \breve{\omega}_1' \right), \tag{3.18}$$

$$\breve{\kappa}_{21} = -\frac{C_C}{\sqrt{C_1 C_2}} \frac{1}{2\omega_1\omega_2} \left(\omega_1^2 \breve{\omega}_2' - \omega_2^2 \breve{\omega}_1'^{*} \right). \tag{3.19}$$

Mit den Bedingungen (3.9) und (3.10) vereinfachen sich die Kopplungskonstanten zu

$$\breve{\kappa}_{12} = \frac{C_C}{\sqrt{C_1 C_2}} \frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{2\omega_1\omega_2} \left(\breve{\omega} + i\breve{\gamma} \right), \tag{3.20}$$

$$\breve{\kappa}_{21} = -\frac{C_C}{\sqrt{C_1 C_2}} \frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{2\omega_1\omega_2} \left(\breve{\omega} - i\breve{\gamma} \right) \tag{3.21}$$

für ein $\mathcal{PT}$-symmetrisches System. Dies zeigt allerdings, dass die Kopplungskonstanten die Bedingung (3.11) nicht erfüllen. Dadurch weist der effektive Hamilton-Operator keine $\mathcal{PT}$-Symmetrie mehr auf und wird deshalb nicht weiter betrachtet.

Kapazitive Kopplung mit negativen Bauteilen Analog zum herkömmlichen kapazitiv gekoppelten Fall vereinfachen sich die effektiven Kopplungskonstanten des ersten Falls (2.97) und (2.98) durch die Bedingungen (3.9) und (3.10) zu

$$\breve{\kappa}_{12}^{(1)} = \pm i \frac{C_C}{\sqrt{C_1 \left|C_2\right|}} \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2\omega_1\omega_2} \left(\breve{\omega} + i\breve{\gamma}\right), \tag{3.22}$$

$$\breve{\kappa}_{21}^{(1)} = \pm i \frac{C_C}{\sqrt{C_1 \left|C_2\right|}} \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2\omega_1\omega_2} \left(\breve{\omega} - i\breve{\gamma}\right) \tag{3.23}$$

und die des zweiten Falls (2.100) und (2.101) zu

$$\breve{\kappa}_{12}^{(2)} = \pm i \frac{C_C}{\sqrt{C_1 \left|C_2\right|}} \frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{2\omega_1\omega_2} \left(\breve{\omega} + i\breve{\gamma}\right), \tag{3.24}$$

$$\breve{\kappa}_{21}^{(2)} = \mp i \frac{C_C}{\sqrt{C_1 \left|C_2\right|}} \frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{2\omega_1\omega_2} \left(\breve{\omega} - i\breve{\gamma}\right). \tag{3.25}$$

Dies zeigt dass die Kopplungskonstanten des ersten Falls die Bedingung (3.11) nicht erfüllen, weshalb sich damit kein $\mathcal{PT}$-symmetrisches System realisieren lässt. Die Kopplungskonstanten des zweiten Falls erfüllen die Bedingung (3.11), wodurch diese durch

$$\breve{\kappa} = \pm i \frac{C_C}{\sqrt{C_1 \left|C_2\right|}} \frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{2\omega_1\omega_2} \left(\breve{\omega} + i\breve{\gamma}\right) \tag{3.26}$$

zusammengefasst werden können. Der Index zur Unterscheidung der beiden Fällen wird dabei der Einfachheit halber vernachlässigt, da nur mit dem zweiten Fall ein $\mathcal{PT}$-symmetrisches System realisierbar ist.

Dies zeigt, dass es zwei verschiedene Möglichkeiten zur Realisierung $\mathcal{PT}$-symmetrischer Systeme gibt. Zum einen die induktive Kopplung zweier gewöhnlicher Schwingkreise und zum anderen die kapazitive Kopplung mit negativer Induktivität und negativer Kapazität in einem der beiden Schwingkreise.

3.1.1 Exakte und gebrochene $\mathcal{PT}$-Symmetrie

Die Energieeigenwerte des Systems sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms des Hamilton-Operators. Für den $\mathcal{PT}$-symmetrischen Hamilton-Operator (3.12) lauten diese

$$E_\pm = -\breve{\omega} \pm \sqrt{\left|\breve{\kappa}\right|^2 - \breve{\gamma}^2}. \tag{3.27}$$

Daran ist erkennbar, dass das System für $|\kappa| > |\breve{\gamma}|$ rein reelle Energieeigenwerte und somit eine exakte $\mathcal{PT}$-Symmetrie besitzt. Für den Fall $|\breve{\kappa}| < |\breve{\gamma}|$ ist die $\mathcal{PT}$-Symmetrie

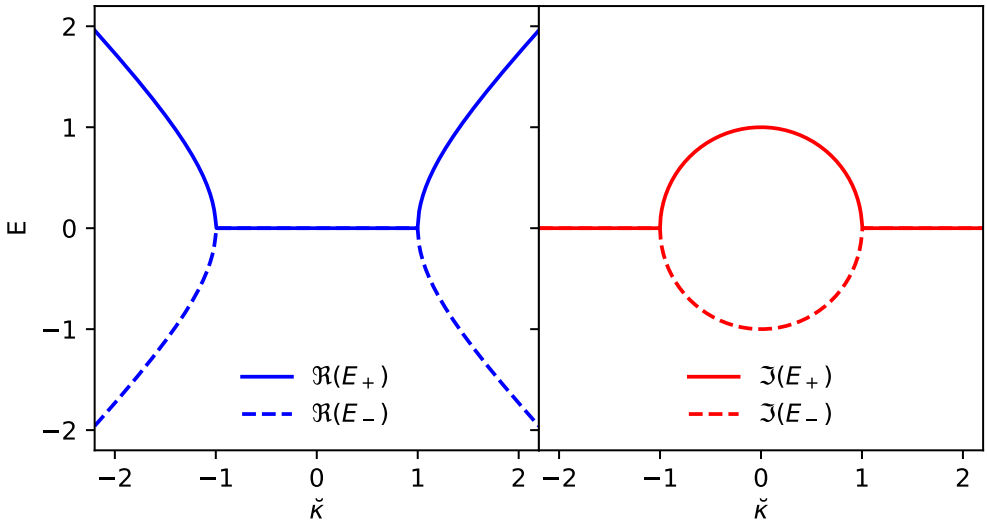


Abbildung 3.1: Real- und Imaginärteile der Eigenwerte des $\mathcal{PT}$-symmetrischen Hamilton-Operators (3.12) für die dimensionslosen Werte $\breve{\gamma} = 1$ und $\breve{\omega} = 0$.

gebrochen und die Eigenwerte sind zueinander komplex konjugiert. Im Fall $|\breve{\kappa}| = |\breve{\gamma}|$ ist der Energieeigenwert zweifach entartet. Genauer gesagt handelt es sich dabei um einen exzeptionellen Punkt, in welchem sowohl die Eigenwerte als auch die Eigenzustände gleichzeitig entartet sind [14]. Dieses Verhalten der Eigenwerte ist in Abbildung 3.1 dargestellt, welche den Real- und Imaginärteil der beiden Eigenwerte für verschiedene Beträge der Kopplungskonstanten zeigt.

3.2 Bedingungen für anti-$\mathcal{PT}$-symmetrische Schwingkreise

Für ein anti-$\mathcal{PT}$-symmetrisches System muss der Hamilton-Operator unter der Wirkung des $\mathcal{PT}$-Operators sein Vorzeichen wechseln. Das Einsetzen des Hamilton-Operators (3.6) in die Bedingung (2.4) liefert die Gleichung

$$\begin{bmatrix} -\breve{\omega}_2 + i\breve{\gamma}_2 & -\breve{\kappa}_{21}^* \\ -\breve{\kappa}_{12}^* & -\breve{\omega}_1 + i\breve{\gamma}_1 \end{bmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{bmatrix} \breve{\omega}_1 + i\breve{\gamma}_1 & \breve{\kappa}_{12} \\ \breve{\kappa}_{21} & \breve{\omega}_2 + i\breve{\gamma}_2 \end{bmatrix}, \tag{3.28}$$

woraus aus einem Vergleich der einzelnen Einträge die Bedingungen

$$\breve{\omega}_1 = -\breve{\omega}_2, \tag{3.29}$$

$$\breve{\gamma}_1 = \breve{\gamma}_2, \tag{3.30}$$

$$\breve{\kappa}_{12} = -\breve{\kappa}_{21}^* \tag{3.31}$$

für die charakteristischen Größen folgen. Die Bedingungen (3.30) und (3.31) zeigen, dass Gewinne und Verluste im Fall der anti-$\mathcal{PT}$-Symmetrie nicht mehr ausgeglichen sind. Damit lassen sich die neuen Größen $\breve{\omega} \equiv \breve{\omega}_1 = -\breve{\omega}_2$, $\breve{\gamma} \equiv \breve{\gamma}_1 = \breve{\gamma}_2$ und $\breve{\kappa} \equiv \breve{\kappa}_{12} = -\breve{\kappa}_{21}^*$ definieren. Mithilfe dieser Größen kann der effektive Hamilton-Operator des anti-$\mathcal{PT}$-symmetrischen Systems als

$$\mathcal{H}^{\mathcal{APT}} = \begin{bmatrix} -\breve{\omega} - i\breve{\gamma} & -\breve{\kappa} \\ \breve{\kappa}^* & \breve{\omega} - i\breve{\gamma} \end{bmatrix} \tag{3.32}$$

geschrieben werden. In der Literatur wird dieser oft auch in der Form

$$\mathcal{H}^{\mathcal{APT}} = \begin{bmatrix} -\breve{\omega} - i\breve{\gamma} & -i\kappa \\ -i\kappa & \breve{\omega} - i\breve{\gamma} \end{bmatrix}, \tag{3.33}$$

mit $\breve{\kappa} = -i\kappa$ geschrieben [15]. Diese Darstellung hat den Vorteil, dass daran die Zusammenhänge zwischen der $\mathcal{PT}$- und anti-$\mathcal{PT}$-Symmetrie deutlicher ersichtlich sind, was am Ende des Abschnitts 3.2.1 kurz diskutiert wird.

Auch in diesem Fall werden die verschiedenen Kopplungsmethoden auf Bedingungen an die effektiven Größen untersucht, unter welchen das jeweilige System eine anti-$\mathcal{PT}$-Symmetrie aufweist.

Induktive Kopplung Das Einsetzen der Bedingungen (3.29) und (3.30) in die induktiven Kopplungskonstanten (3.13) und (3.14) liefert $\breve{\kappa}_{12} = 0 = \breve{\kappa}_{21}$ für die beiden Kopplungskonstanten. Anschaulich bedeutet dies, dass eine anti-$\mathcal{PT}$-Symmetrie mathematisch nur für ungekoppelte Schwingkreise möglich wäre und somit in der Realität kein anti-$\mathcal{PT}$-symmetrisches, induktiv gekoppeltes System realisierbar ist. Da die anti-$\mathcal{PT}$-Symmetrie allerdings nur für gekoppelte Systeme sinnvoll ist, wird diese Kopplungsvariante im Weiteren nicht mehr betrachtet.

Kapazitive Kopplung Für die kapazitiven Kopplungskonstanten (3.18) und (3.19) folgen mit den beiden Bedingungen (3.29) und (3.30)

$$\breve{\kappa}_{12} = -\frac{C_C}{\sqrt{C_1 C_2}} \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2\breve{\omega}^2} \left(\breve{\omega} + i\breve{\gamma}\right), \tag{3.34}$$

$$\breve{\kappa}_{21} = \frac{C_C}{\sqrt{C_1 C_2}} \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2\breve{\omega}^2} \left(\breve{\omega} - i\breve{\gamma}\right) \tag{3.35}$$

für ein anti-$\mathcal{PT}$-symmetrisches System. Dies zeigt, dass die Kopplungskonstanten ohne weitere Einschränkungen die Bedingung (3.31) erfüllen. Aufgrund dessen lassen sich diese in einer Größe als

$$\breve{\kappa} = -\frac{C_C}{\sqrt{C_1 C_2}} \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2\omega_1\omega_2} \left(\breve{\omega} + i\breve{\gamma}\right) \tag{3.36}$$

mit $\breve{\kappa} \equiv \breve{\kappa}_{12} = -\breve{\kappa}_{21}^*$ zusammenfassen.

Kapazitive Kopplung mit negativen Bauteilen Die Kopplungskonstanten der beiden Fälle (2.97) und (2.98) sowie (2.100) und (2.101) vereinfachen sich durch die Bedingungen (3.29) und (3.30) zu

$$\breve{\kappa}_{12}^{(1)} = \pm i \frac{C_C}{\sqrt{C_1 \left|C_2\right|}} \frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{2\omega_1\omega_2} \left(\breve{\omega} + i\breve{\gamma}\right), \tag{3.37}$$

$$\breve{\kappa}_{21}^{(1)} = \pm i \frac{C_C}{\sqrt{C_1 \left|C_2\right|}} \frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{2\omega_1\omega_2} \left(\breve{\omega} - i\breve{\gamma}\right) \tag{3.38}$$

und

$$\breve{\kappa}_{12}^{(2)} = \pm i \frac{C_C}{\sqrt{C_1 \left|C_2\right|}} \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2\omega_1\omega_2} \left(\breve{\omega} + i\breve{\gamma}\right), \tag{3.39}$$

$$\breve{\kappa}_{21}^{(2)} = \mp i \frac{C_C}{\sqrt{C_1 \left|C_2\right|}} \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2\omega_1\omega_2} \left(\breve{\omega} - i\breve{\gamma}\right) \tag{3.40}$$

für ein anti-$\mathcal{PT}$-symmetrisches System. Im Gegensatz zum $\mathcal{PT}$-symmetrischen Fall in Abschnitt 3.1 erfüllen lediglich die Kopplungskonstanten des ersten Falls die Bedingung (3.31) ohne weitere Einschränkungen, weshalb diese analog zur herkömmlichen Kopplung durch

$$\breve{\kappa} = \pm i \frac{C_C}{\sqrt{C_1 \left|C_2\right|}} \frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{2\omega_1\omega_2} \left(\breve{\omega} + i\breve{\gamma}\right) \tag{3.41}$$

zusammengefasst werden können. Da der zweite Fall die Bedingung (3.31) nicht erfüllt wird diese nicht weiter betrachtet, weshalb auch hier der Index zur Unterscheidung der beiden Fälle vernachlässigt werden kann.

Daraus folgt, dass auch es auch zur Realisierung von anti-$\mathcal{PT}$-symmetrischen Systemen zwei verschiedene Möglichkeiten gibt. Zum einen die kapazitive Kopplung zweier herkömmlicher Schwingkreise, sowie die kapazitive Kopplung mit negativer Induktivität und negativer Kapazität in einem der beiden Schwingkreise.

3.2.1 Exakte und gebrochene anti-$\mathcal{PT}$-Symmetrie

Die Energieeigenwerte, als Nullstellen des charakteristischen Polynoms des anti-$\mathcal{PT}$-symmetrischen Hamilton-Operators (3.32), ergeben sich zu

$$E_\pm = -i\breve{\gamma} \pm i\sqrt{\left|\breve{\kappa}\right|^2 - \breve{\omega}^2}. \tag{3.42}$$

Für die exakte anti-$\mathcal{PT}$-Symmetrie, also ein rein imaginäres Spektrum, muss somit $|\breve{\kappa}| > |\breve{\omega}|$ gelten. Im Fall $|\breve{\kappa}| < |\breve{\omega}|$ ist die anti-$\mathcal{PT}$-Symmetrie gebrochen, wodurch die

Realteile der Eigenwerte ungleich null sind und umgekehrte Vorzeichen besitzen. Auch hier tritt, analog zum $\mathcal{PT}$-symmetrischen Fall, für $|\breve{\kappa}| = |\breve{\omega}|$ ein exzeptioneller Punkt auf. Dieses Verhalten der Eigenwerte ist für verschiedene Werte der Kopplungskonstanten in Abbildung 3.2 dargestellt.

Ein Vergleich der Energieeigenwerte des effektiven Hamilton-Operators im Fall der $\mathcal{PT}$-Symmetrie in Abbildung 3.1 und der anti-$\mathcal{PT}$-Symmetrie in Abbildung 3.2 zeigt, dass in den beiden Fällen lediglich der Real- und Imaginärteil die Rollen tauschen. Dies kann damit begründet werden, dass bei der Multiplikation eines $\mathcal{PT}$-symmetrischen Operators mit der imaginären Einheit i der daraus entstehende Operator immer anti-$\mathcal{PT}$-symmetrisch ist und umgekehrt. Dies kann beispielsweise an den Hamilton-Operatoren eines $\mathcal{PT}$- und anti-$\mathcal{PT}$-symmetrischen Systems (3.12) und (3.33) durch

$$i\mathcal{H}^{\mathcal{PT}} = \mathcal{H}^{A\mathcal{PT}}\Big|_{\kappa=\breve{\kappa}} \tag{3.43}$$

beobachtet werden. Um diese Bedingung zu erfüllen, wird die Kopplungskonstante für anti-$\mathcal{PT}$-symmetrische Systeme oft, wie in Gleichung (3.33), mit der imaginären Einheit i als Vorfaktor definiert. Dies zeigt, dass zwischen dem $\mathcal{PT}$-symmetrischen und anti-$\mathcal{PT}$-symmetrischen Hamilton-Operator (3.12) und (3.32) die Größen $\breve{\omega}$ und $\breve{\gamma}$ die Rollen tauschen, was sich auch in den jeweiligen Energieeigenwerten (3.27) und (3.42) widerspiegelt.

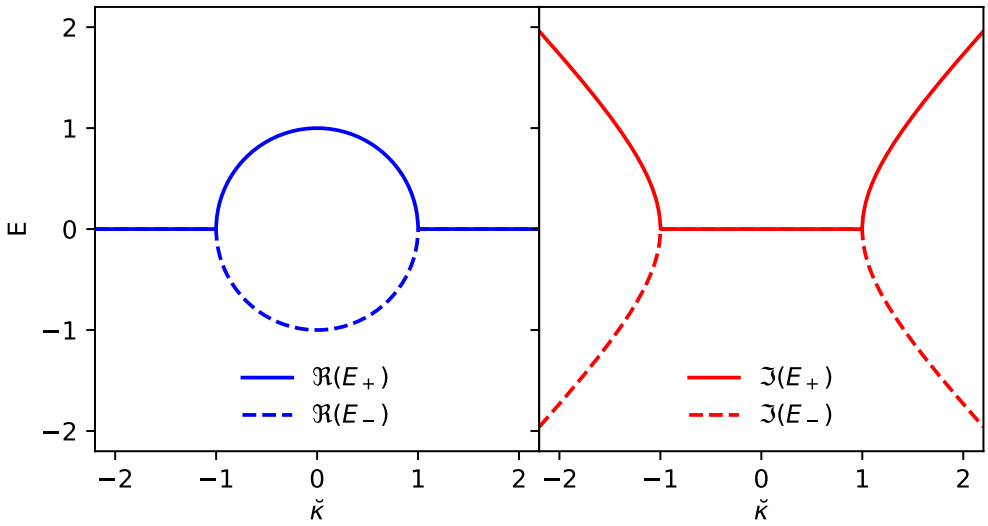
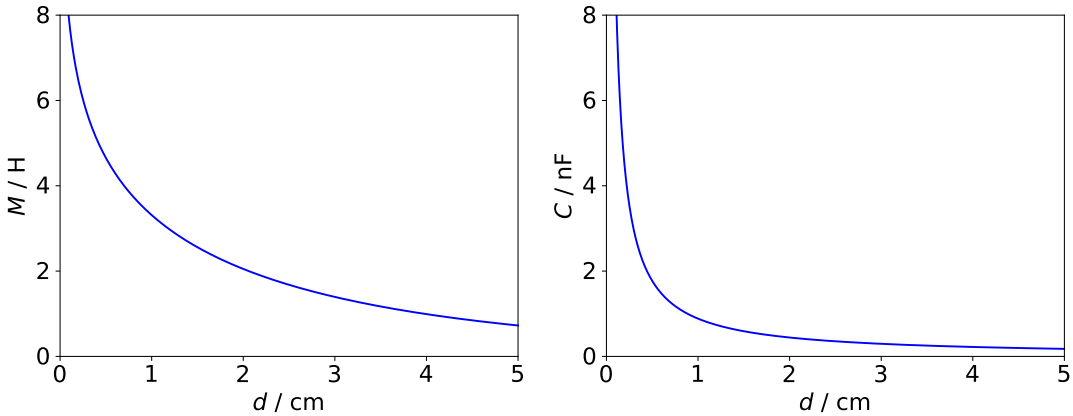


Abbildung 3.2: Real- und Imaginärteile der Eigenwerte des anti-$\mathcal{PT}$-symmetrischen Hamilton-Operators (3.32) für die dimensionslosen Werte $\breve{\gamma} = 0$ und $\breve{\omega} = 1$.

4 Dimensionierung der gekoppelten Schwingkreise

In diesem Kapitel werden anhand der aus Kapitel 3 hergeleiteten Bedingungen die Größen für die einzelnen Komponenten der verschiedenen betrachteten gekoppelten Schwingkreise gewählt, um damit $\mathcal{PT}$- und anti-$\mathcal{PT}$-symmetrische Systeme zu realisieren. Da sich die verschiedenen Symmetrien jeweils mithilfe verschiedener Systeme realisieren lassen, können diese zusätzlich noch verglichen werden, um die Einflüsse der verschiedenen Systemgrößen zu untersuchen. Die Größen aus den Kapiteln 2 und 3 sind dabei so definiert, dass die effektiven Größen $\breve{\omega}$, $\breve{\gamma}$ und $\breve{\kappa}$ sowie die Energie, welche dem Betragsquadrat der Mode a entspricht, alle die Einheit Hz besitzen. Eine Ausnahme bildet hier die Definition (2.40), in der $\bar{\gamma}$ und damit β dimensionslos sind.

Die Dynamik des gekoppelten Systems hängt lediglich von der Matrix (3.4) und damit von den drei effektiven Größen $\breve{\omega}$, $\breve{\gamma}$ und $\breve{\kappa}$ ab. Dabei beschreibt die effektive Eigenfrequenz, wie schnell die Moden und damit die Spannungen und Stromstärken in den beiden Schwingkreisen oszillieren. Die Differenz aus dem Betrag der Kopplungskonstanten und dem effektiven Verlustfaktor gibt an, wie schnell die Energie zwischen den beiden Schwingkreisen hin und her oszilliert, falls der Zustand des Systems nicht stationär ist. Dieses Phänomen ist an den Einhüllenden der Moden sichtbar und wird in Abschnitt 4.1.2 diskutiert. Durch Variation der effektiven Eigenfrequenzen können die Frequenzen der Moden verändert werden, allerdings beeinflusst dies auch den Betrag der Kopplungskonstanten, da für alle Kopplungskonstanten der verschiedenen betrachteten Kopplungsvarianten $\breve{\kappa} \sim \frac{\breve{\omega} \pm i\breve{\gamma}}{\breve{\omega}^2}$ gilt. Um nur den Betrag der Kopplungskonstanten zu verändern, kann das jeweilige Kopplungsbauteil modifiziert werden. Im induktiv gekoppelten Fall können, wie in Abschnitt 2.3.1 beschrieben, der Abstand oder die Geometrie der Spulen variiert werden, da die gegenseitige Induktivität und damit die Kopplungskonstante von der Geometrie der beiden Spulen abhängt. Das Verhalten der gegenseitigen Induktivität in Abhängigkeit des Abstandes für zwei zueinander parallele Spulen, wie in Abbildung 2.4a, ist in der Abbildung 4.1a dargestellt. Daran ist erkennbar, dass die gegenseitige Induktivität M und damit die Kopplungskonstante $\breve{\kappa}$ mit zunehmendem Abstand zwischen den Spulen abnimmt. Daraus folgt, dass die Kopplungskonstante und damit das Verhalten der Moden ohne den Austausch von Komponenten der Schwingkreise lediglich durch



(a) Gegenseitige Induktivität **(b)** Kapazität eines Plattenkondensators

Abbildung 4.1: Abhängigkeit der gegenseitigen Induktivität M zweier Spulen und der Kapazität C eines Plattenkondensators vom Abstand d zwischen den Spulen, beziehungsweise den Kondensatorplatten.

Bewegung der Spulen verändert werden kann. Im kapazitiv gekoppelten Fall kann der Kopplungskondensator beispielsweise durch einen einfachen Plattenkondensator realisiert werden. In diesem Fall kann die Kapazität des Kondensators und damit der Betrag der Kopplungskonstante ebenfalls durch das Verändern des Abstandes zwischen den beiden Kondensatorplatten variiert werden. Für die Kapazität eines Plattenkondensators gilt

$$C = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{A}{d} \tag{4.1}$$

mit der Querschnittsfläche der Kondensatorplatten A und dem Abstand d zwischen diesen. Die daraus resultierende Abhängigkeit der Kapazität und damit der Kopplungskonstanten vom Abstand zwischen den Kondensatorplatten ist in Abbildung 4.1b dargestellt. Auch diese nimmt mit zunehmendem Abstand ab, wobei diese im Vergleich zur gegenseitigen Induktivität etwas schneller abfällt. Dies ist zum einen in der Abbildung 4.1 erkennbar, kann aber auch mathematisch begründet werden, da nach Gleichung (4.1) $C \sim \frac{1}{d}$ gilt, wohingegen die gegenseitige Induktivität M über das Integral (2.66) vom Abstand d abhängt.

Gemäß Kapitel 3 lässt sich das System der gekoppelten Schwingkreise mithilfe der zeitabhängigen Schrödinger-Gleichung (3.5) beschreiben, wobei die Wellenfunktion ψ in Gleichung (3.7) die Moden der beiden Schwingkreise enthält. Durch Einsetzen des Ansatzes $\psi(t) = \psi(0)e^{-iEt}$ in die zeitabhängige Schrödinger-Gleichung (3.5) kann die zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung

$$\mathcal{H}\psi = E\psi \tag{4.2}$$

hergeleitet werden. Diese entspricht der Eigenwertgleichung des effektiven Hamilton-Operators, dessen Eigenwerte bereits in Kapitel 3 für sowohl im Fall der $\mathcal{PT}$- als auch im Fall der anti-$\mathcal{PT}$-Symmetrie bestimmt wurden. Damit können die Lösungen der zeitabhängigen Schrödinger-Gleichung des Systems als

$$\psi_+(t) = \psi_+(0)e^{-iE_+t}, \tag{4.3}$$

$$\psi_-(t) = \psi_-(0)e^{-iE_-t} \tag{4.4}$$

geschrieben werden, wobei $E_\pm$ für die Eigenwerte und $\psi_\pm(0)$ für die zugehörigen Eigenzustände stehen. Dabei sind die Indizes der Energien so gewählt, dass $E_+ > E_-$ gilt, weshalb ψ_+ als der angeregte Zustand und ψ_- als Grundzustand des Systems bezeichnet werden. Aufgrund der Normierung der Moden gibt dabei das Betragsquadrat der einzelnen Komponenten des Zustandsvektors die in dem jeweiligen Schwingkreis gespeicherte Energie an. Da sich die eventuelle Symmetrie der einzelnen Systeme auch in deren Energien zeigt, werden diese im Folgenden neben den Moden für verschiedene Systeme betrachtet.

4.1 Induktive Systeme ohne Gewinn und Verlust

Vor der Betrachtung $\mathcal{PT}$- und anti-$\mathcal{PT}$-symmetrischer Systeme wird in diesem Abschnitt zunächst der Spezialfall induktiv gekoppelter Systeme betrachtet, in denen kein effektiver Gewinn und Verlust auftritt. Anschaulich bedeutet dies, dass in jedem der beiden Schwingkreise durch die Transmission-Line genauso viel Energie eingekoppelt wird wie durch Verluste verloren gehen. Damit gilt für die effektiven Widerstände $\breve{R}_k = 0$, weshalb die beiden Schwingkreise äquivalent zu zwei idealen Schwingkreisen, die lediglich aus einem Kondensator und einer Spule bestehen, beschrieben werden können. Dadurch, dass effektiv keine Widerstände auftreten, bleibt die in den Schwingkreisen gespeicherte Energie erhalten, weshalb dieses System damit einem abgeschlossenen, Hermiteschen Quantensystem entspricht. Dies folgt auch aus dem Moden-Formalismus, da hier die Bedingung, dass weder Gewinn noch Verlust auftritt, durch $\breve{\gamma} = 0$ ausgedrückt wird. Dadurch ist der effektive Hamilton-Operator (3.12) rein reell, da die Kopplungskonstante (3.17) in diesem Fall ebenfalls eine reelle Größe ist. Da der Hamilton-Operator reell und symmetrisch ist, ist dieser automatisch Hermitesch. Dadurch lassen sich diese Systeme sowohl mit der gewöhnlichen Hermiteschen Quantenmechanik als auch mit dem in dieser Arbeit betrachteten Moden-Formalismus beschreiben.

Realisierbar ist die Bedingung $\breve{\gamma} = 0$ nach Gleichung (2.46) durch eine geeignete Wahl der beiden Anregungsfrequenzen. Daraus folgt mithilfe der Gleichung (2.52), dass die effektive Eigenfrequenzen $\breve{\omega}_k$ mit den Eigenfrequenzen der idealen Schwingkreise ω_k übereinstimmen. Damit ist die Bedingung (3.9) äquivalent dazu, dass die Eigenfrequenzen der beiden idealen Schwingkreise identisch seien müssen, wodurch diese als $\omega_0 \equiv \omega_1 = \omega_2$

zusammengefasst werden können. Damit vereinfacht sich die Kopplungskonstante (3.17) zu

$$\breve{\kappa} = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}\omega_0. \tag{4.5}$$

Dies zeigt, dass die Kopplungskonstante mit der in Abschnitt 2.3.1 hergeleiteten Kopplungskonstante (2.84) für zwei induktiv gekoppelte ideale Schwingkreise übereinstimmt. Dies folgt daraus, dass für die effektive Widerstände in beiden Schwingkreisen $\breve{R}_k = 0$ gilt und das System somit effektiv durch zwei ideale gekoppelte Schwingkreise beschrieben werden kann.

Zur Untersuchung der Dynamik solcher Systeme werden im Folgenden zwei Systeme exemplarisch betrachtet und verglichen.

System 1 Das erste System, welches in Abbildung 4.2 dargestellt ist, besteht aus zwei symmetrischen Schwingkreisen, die jeweils einen Kondensator der Kapazität $C = 240\,\mathrm{pF}$ und eine Spule mit einer Induktivität von $L = 740\,\mathrm{mH}$ enthalten und induktiv über die beiden Spulen gekoppelt sind. Die verwendeten Spulen besitzen einen intrinsischen Widerstand von $R_L = 395\,\Omega$ [16], der jeweils dem Gesamtwiderstand in den Schwingkreisen entspricht, da keine zusätzlichen Widerstände eingebaut werden. Damit betragen die Eigenfrequenzen der beiden Schwingkreise $\omega_k = 75{,}038\,\mathrm{kHz}$. Platziert man die beiden Spulen in einem Abstand von $d = 20\,\mathrm{cm}$ parallel zueinander, so beträgt die gegenseitige Induktivität nach Gleichung (2.66) $M = 6{,}193\,\mathrm{mH}$, womit für die Kopplungskonstante mithilfe der Gleichung (4.5) $\breve{\kappa} = 0{,}628\,\mathrm{kHz}$ folgt. Die Moden und Energien, welche aufgrund der Normierung der Moden deren Betragsquadraten entsprechen, können mithilfe der Ansätze (4.3) und (4.4) berechnet werden und sind in Abbildung 4.3 exemplarisch für den Grundzustand des Systems dargestellt. Um dieses System zu realisieren muss $\breve{\gamma} = 0$ gelten. Dies kann durch die passende Wahl der Anregungsfrequenz mithilfe der Gleichung

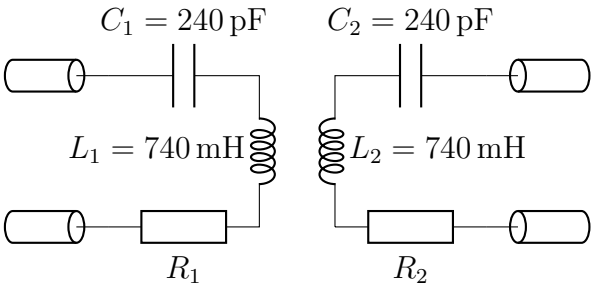
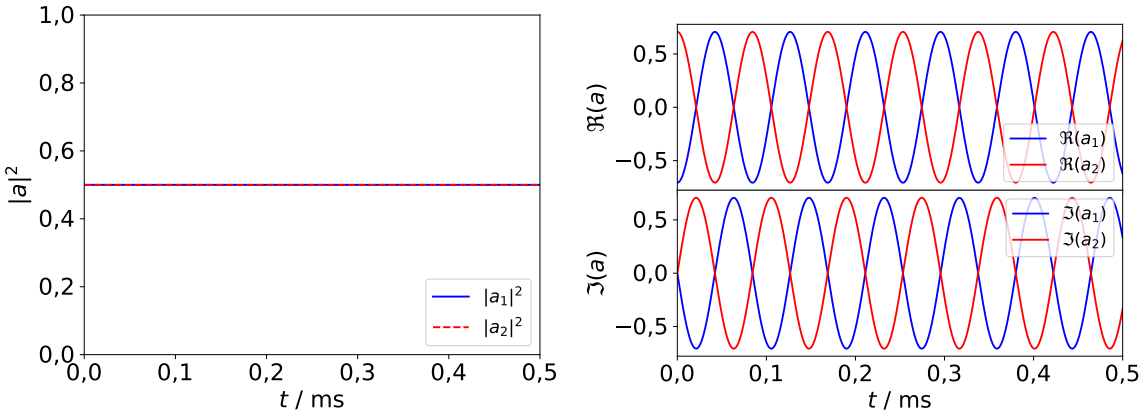


Abbildung 4.2: Zwei induktiv gekoppelte, symmetrische Schwingkreise, die jeweils aus einem Kondensator, einer Spule, einem Widerstand und einer Transmission-Line bestehen.



(a) Betragsquadrat des Zustandsvektors **(b)** Moden der Schwingkreise

Abbildung 4.3: Real- und Imaginärteile der Lösungen für die Moden a_k sowie die Energien $|a_k|^2$ der in Abbildung 4.2 dargestellten Hermiteschen, gekoppelten Schwingkreise im Grundzustand.

(2.46) erreicht werden. Für Transmission-Lines mit $\bar{\gamma}_{\text{ext};1} = 0,1$ und $\bar{\gamma}_{\text{ext};2} = 40$ sind die daraus resultierenden einlaufenden Wellen der beiden Schwingkreise in Abbildung 4.4 dargestellt. Die unterschiedlichen Amplituden der beiden einlaufenden Wellen liegen an den verschiedenen Transmission-Lines in den Schwingkreisen. Da diese verschiedene Verlustfaktoren $\bar{\gamma}_{\text{ext};k}$ besitzen, müssen die einlaufenden Wellen verschieden große Verluste ausgleichen, weshalb sich die Amplituden der einlaufenden Wellen unterscheiden.

Abbildung 4.3a zeigt, dass die Betragsquadrate der Moden $|a_k|^2$, welche den in den Schwingkreisen gespeicherten Energien entsprechen, konstant sind, weshalb es sich hierbei

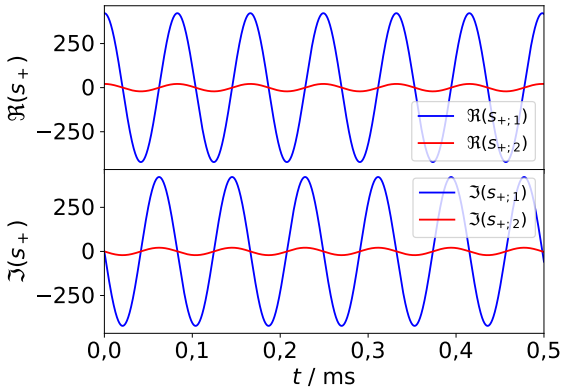


Abbildung 4.4: Real- und Imaginärteile der einlaufenden Wellen $s_{+;k}$ zur Realisation des in Abbildung 4.2 dargestellten Hermiteschen Systems.

um einen stationären Zustand des Systems handelt. Dies entspricht den Erwartungen, da es sich bei dem hier betrachteten System aufgrund von $\breve{\gamma} = 0$ um ein geschlossenes Hermitesches System handelt und somit die Energie im System erhalten bleibt. Abbildung 4.3b zeigt zusätzlich die Moden der beiden Schwingkreise, welche beide mit der effektiven Eigenfrequenz und konstanten Amplituden oszillieren.

System 2 Das zweite System, welches in Abbildung 4.5 dargestellt ist, besteht ebenfalls aus zwei symmetrischen induktiv gekoppelten Schwingkreisen, wobei die Kondensatoren je eine Kapazität von $C = 500\,\mathrm{pF}$ und die Spulen je eine Induktivität von $L = 511\,\mu\mathrm{H}$ besitzen. Die dafür verwendeten Spulen bestehen aus $r_{\mathrm{Draht}} = 0{,}101\,\mathrm{mm}$ dickem Kupferdraht der zu 36 Windungen der Radien $R = 5\,\mathrm{cm}$ gewickelt wird. Damit kann mithilfe der Gleichung (2.20) der intrinsische Widerstand der Spulen von $R_L = 6{,}175\,\Omega$ berechnet werden. Auch hier werden keine zusätzlichen Widerstände verwendet, womit der Widerstand der Spulen dem Gesamtwiderstand des jeweiligen Schwingkreises entspricht. Damit liegt die Eigenfrequenz der beiden Schwingkreise bei $\omega_k = 1{,}978\,\mathrm{MHz}$. Im Vergleich zu dem in Abbildung 4.2 dargestellten System besitzen die verwendeten Spulen eine deutlich geringere Induktivität, wohingegen die Kapazität der Kondensatoren in derselben Größenordnung liegt. Die Bauteile wurden so gewählt, um einerseits ein System mit größeren Eigenfrequenzen ω_k zu betrachten und zusätzlich bewirken die kleineren Induktivitäten einen größeren Verlustfaktor $\gamma_{R;k}$, um auch dessen Effekte genauer betrachten zu können. Die für das Hermitesche System benötigten Anregungsfrequenzen können erneut aus der Gleichung (2.46) bestimmt werden. Mit einem Abstand von $d = 20\,\mathrm{cm}$ zwischen den Spulen beträgt die gegenseitige Induktivität nach Gleichung (2.66) $M = 1{,}685\,\mu\mathrm{H}$, womit für die Kopplungskonstante (4.5) $\breve{\kappa} = 6{,}524\,\mathrm{kHz}$ folgt.

Da auch in diesem System der effektive Verlustfaktor aufgrund der Wahl der Anregungs-

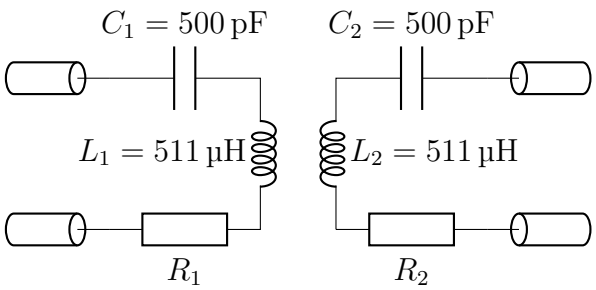


Abbildung 4.5: Ein weiteres induktiv gekoppeltes System bestehend aus zwei symmetrischen Schwingkreisen, analog zu dem in Abbildung 4.2 dargestellten System, wobei die Induktivitäten der verwendeten Spulen drei Größenordnungen kleiner sind, die Kapazitäten jedoch in derselben Größenordnung liegen.

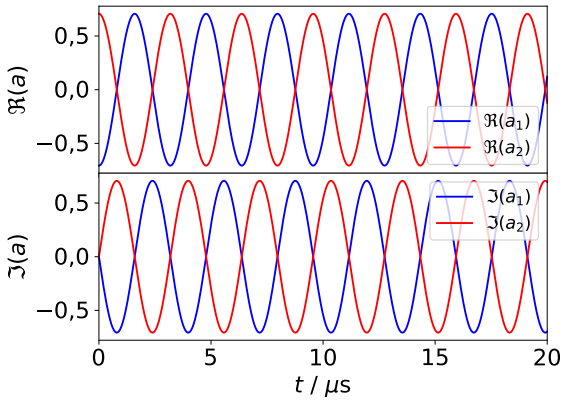
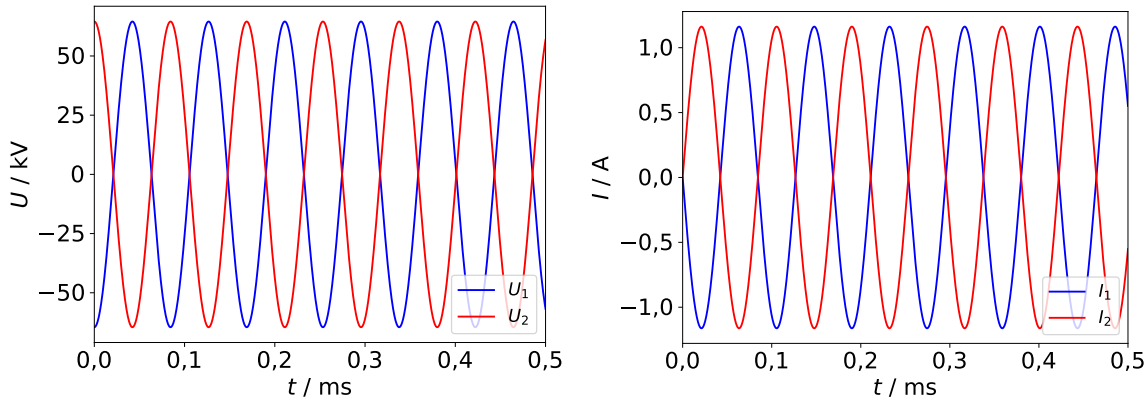


Abbildung 4.6: Real- und Imaginärteile der Lösungen für die Moden a_1 und a_2 des in Abbildung 4.5 dargestellten Systems.

frequenzen null ist, sind die Energien der Schwingkreise, analog zu denen aus Abbildung 4.3a, erhalten. Der Vergleich der Moden des Systems, welche in Abbildung 4.6 dargestellt sind, mit denen aus Abbildung 4.3b zeigt, dass sich die beiden Systeme qualitativ gleich verhalten. So beträgt die Phasendifferenz zwischen den beiden Moden jeweils genau π und auch die Phasendifferenz zwischen den Real- und Imaginärteilen der Moden liegt jeweils bei $\frac{\pi}{2}$. Der einzige Unterschied liegt in den verschiedenen Frequenzen der Moden, welche für die des zweiten Systems in Abbildung 4.6 deutlich über der aus Abbildung 4.3b liegt. Dies liegt an den verschiedenen effektiven Eigenfrequenzen der beiden Systeme.

4.1.1 Rekonstruktion der Stromstärken und Spannungen der Schwingkreise

Aus den Moden der jeweiligen Schwingkreise können mithilfe der Gleichungen (2.58) und (2.60) sowie den allgemeinen Ansätzen (2.78) und (2.77) die Stromstärke und Spannung in jedem der Schwingkreise bestimmt werden. Damit lassen sich exemplarisch die Spannungen und Stromstärken des ersten Beispielsystems berechnen, welche in Abbildung 4.7 dargestellt sind. Daran ist erkennbar, dass die Phasendifferenz zwischen der Stromstärke und der Spannung $\frac{\pi}{2}$ beträgt. Dies folgt auch aus den Gleichungen (2.10) und (2.11) für die Stromstärke und Spannung aus der Betrachtung eines idealen Schwingkreises in Abschnitt 2.2.1.

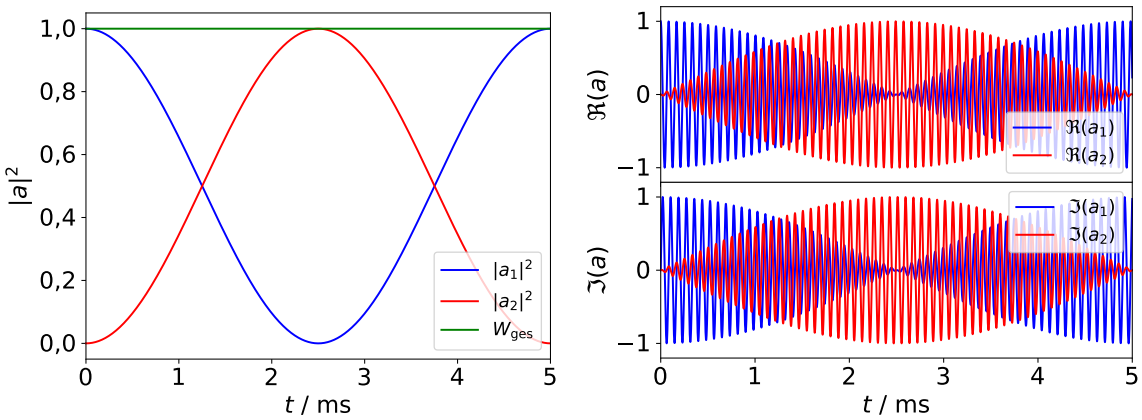


(a) Spannung U **(b)** Stromstärke I

Abbildung 4.7: Spannungen und Stromstärken des in Abbildung 4.2 dargestellten Systems, welche aus den Moden-Lösungen berechnet wurden.

4.1.2 Allgemeine Lösungen

Am Anfang des Kapitels wurden die beiden Lösungen der zeitabhängigen Schrödinger-Gleichung (4.3) und (4.4) für die verschieden gekoppelten Systeme hergeleitet. Dies sind aber nicht die einzigen Lösungen, denn aus der Mathematik ist bekannt, dass wenn $\psi_+(t)$ und $\psi_-(t)$ Lösungen einer Differentialgleichung sind, so ist auch jede Linearkombination dieser beiden Lösungen eine Lösung der Differentialgleichung. Die Lösungen (4.3) und (4.4) werden dabei als reine Zustände des Systems bezeichnet, da es sich um Eigenzustände des Hamilton-Operators handelt und diese somit erhalten bleiben. Die Linearkombinationen dieser reinen Zustände werden als gemischt bezeichnet, da es sich bei diesen im Allgemeinen nicht mehr um Eigenzustände des Hamilton-Operators handelt, wodurch diese Zustände nicht erhalten bleiben. Aufgrund dieses Verhaltens sind solche gemischten Zustände ungeeignet, um ein System auf Symmetrien zu untersuchen, da die Zustände um den gemeinsamen Gleichgewichtszustand der beiden reinen Lösungen oszillieren und somit nicht stationär sind. Dies ist exemplarisch in Abbildung 4.8 dargestellt, welche erneut die Moden des Systems aus Abbildung 4.2, sowie die in den Schwingkreisen gespeicherten Energien zeigt. Dabei wurde das System allerdings nicht in einem seiner Eigenzustände $\psi_\pm(0)$ präpariert, sondern der Fall betrachtet, in dem zum Zeitpunkt $t = 0$ lediglich im ersten Schwingkreis Energie gespeichert ist. Abbildung 4.8a zeigt, dass die Gesamtenergie $W_{\text{ges}} = |a_1|^2 + |a_2|^2$ erhalten ist. Da diese aber zwischen den beiden Schwingkreisen hin und her oszilliert, ist dieser Zustand nicht stationär. Dies ist auch an den Moden des Systems in Abbildung 4.8b zu sehen, da deren Amplituden ebenfalls zu- und abnehmen. Dabei ist die Frequenz, mit welcher die Energie zwischen den beiden Schwingkreisen hin und her oszilliert proportional zur Differenz der Kopplungskonstanten zu dem effektiven Verlustfaktor.



(a) In den Schwingkreisen gespeicherte Energien und Gesamtenergie $W_{\text{ges}} = |a_1|^2 + |a_2|^2$

(b) Moden der Schwingkreise

Abbildung 4.8: In den Schwingkreisen gespeicherte Energien $|a_k|^2$ und deren Summe W_{ges} sowie die Moden a_k des in Abbildung 4.2 dargestellten Systems in einem gemischten Zustand.

Zur Untersuchung der Symmetrien der verschiedenen Systeme werden deswegen lediglich Eigenzustände der Systeme betrachtet.

4.2 Dimensionierung $\mathcal{PT}$-symmetrischer Schwingkreise

Im Abschnitt 3.1 wurde gezeigt, dass ein $\mathcal{PT}$-symmetrisches System sowohl durch zwei induktiv gekoppelte Schwingkreise, als auch durch zwei kapazitiv gekoppelte Schwingkreise mit negativer Induktivität und negativer Kapazität in einem der beiden Schwingkreise realisierbar ist. Deswegen werden im Folgenden beide Kopplungsvarianten untersucht und verglichen.

4.2.1 Induktive Kopplung

Zur Untersuchung der verschiedenen Eigenschaften der induktiv gekoppelten Schwingkreise werden im Folgenden erneut die beiden Systeme aus Abschnitt 4.1 betrachtet und so modifiziert, dass diese eine $\mathcal{PT}$-Symmetrie aufweisen.

Zur Realisierung eines Systems mit einem nicht verschwindenden Verlustfaktor müssen die einlaufenden Wellen nach Gleichung (2.46) mit $\breve{\gamma} \neq 0$ gewählt werden. Im Fall $\breve{\gamma} < 0$ wird mehr Energie durch die einlaufende Welle im Schwingkreis eingekoppelt als durch Verluste verloren geht, wodurch die im Schwingkreis gespeicherte Energie zunimmt. Im

Fall $\breve{\gamma} > 0$ geht mehr Energie verloren als durch die einlaufende Welle eingekoppelt wird, weshalb die Energie des Schwingkreises abnimmt. Für ein $\mathcal{PT}$-symmetrisches System mit ausgeglichenem Gewinn und Verlust muss also ein Schwingkreis einen effektiven Verlustfaktor $\breve{\gamma}_k < 0$ und der andere einen mit $\breve{\gamma}_k > 0$ besitzen.

System 3 Als drittes Beispiel wird erneut das in Abbildung 4.2 dargestellte System betrachtet, dieses Mal aber mit einem effektiven Verlustfaktor ungleich null. Des weiteren wird erneut eine Transmission-Line mit $\bar{\gamma}_{\text{ext};1} = 0,1$ im ersten Schwingkreis und eine mit $\bar{\gamma}_{\text{ext};2} = 40$ im zweiten Schwingkreis verwendet. Neben den intrinsischen Widerständen der Schwingkreise wird im zweiten Schwingkreis ein zusätzlicher Widerstand der Größe $R_{\text{add};2} = 100\,\Omega$ zum Simulieren eines Verbrauchers eingebaut. Der effektive Verlustfaktor des Systems wird als $\breve{\gamma} = -0{,}330\,\text{kHz}$ gewählt. Da die betrachteten Schwingkreise symmetrisch sind, ist auch die Bedingung (3.9) erfüllt. Die benötigten Anregungsfrequenzen können mithilfe der gewählten Größen über Gleichung (2.46) bestimmt werden. Damit folgt nach Gleichung (2.52) $\breve{\omega} = 75{,}037\,\text{kHz}$ für die effektive Eigenfrequenz des Systems.

Um das allgemeine Verhalten des Systems für verschiedene Stärken der Kopplung zu untersuchen, können die Energieeigenwerte des Systems für verschiedene Werte der Kopplungskonstanten analog zum Abschnitt 3.1.1, betrachtet werden. Da der Betrag der Kopplungskonstante, wie in Abbildung 4.1a dargestellt, über den Abstand d zwischen den Spulen variiert werden kann, kann damit das Spektrum des Systems über den Abstand d zwischen den Spulen aufgetragen werden. Das Verhalten der Eigenwerte, welches in Abbildung 4.9 dargestellt ist, zeigt, dass für Abstände $d \leq 30{,}6\,\text{cm}$ zwischen den Spulen das Spektrum rein reell ist und somit das System eine exakte $\mathcal{PT}$-Symmetrie aufweist.

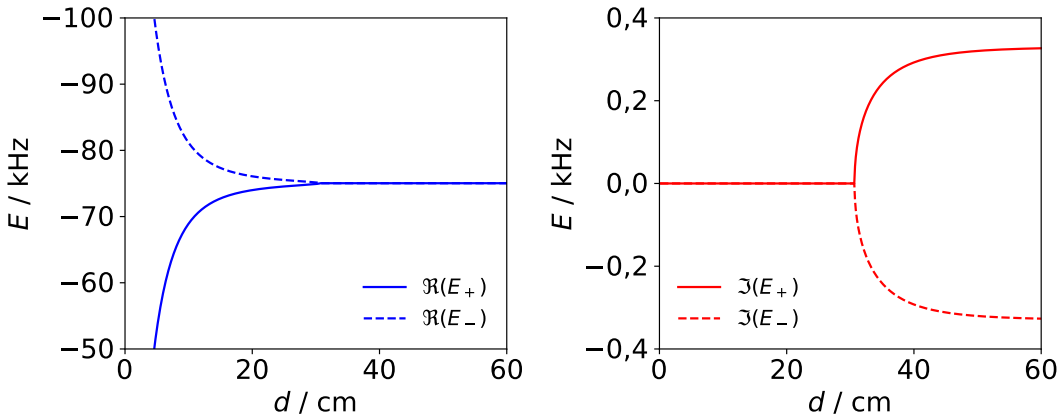
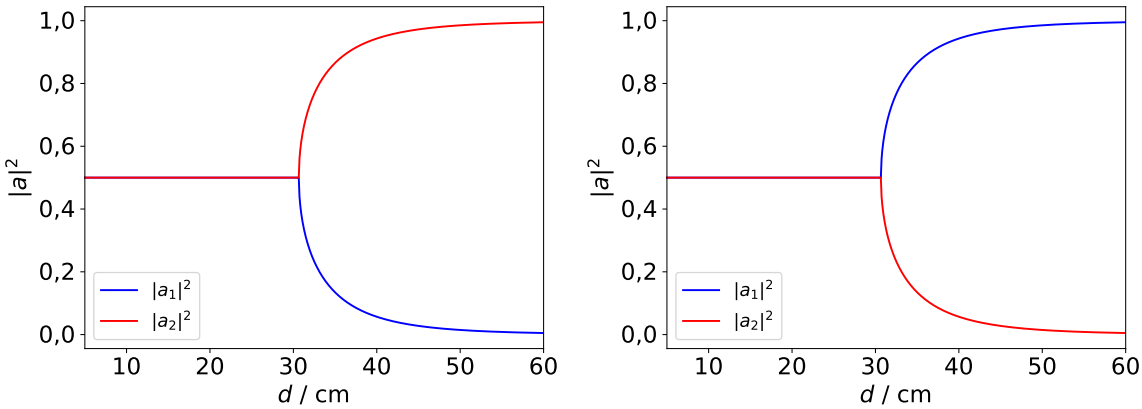


Abbildung 4.9: Real- und Imaginärteile der Energieeigenwerte (3.27) des in Abbildung 4.2 dargestellten Systems mit auftretendem Gewinn und Verlust in Abhängigkeit des Abstands d zwischen den Spulen.

Für Abstände $d > 30{,}6\,\mathrm{cm}$ ist das Spektrum komplex konjugiert, somit ist die Symmetrie gebrochen. Diese Symmetrieeigenschaften zeigen sich auch in den Eigenzuständen für die verschiedenen Abstände, welche in Abbildung 4.10 dargestellt sind. Im Fall der exakten $\mathcal{PT}$-Symmetrie sind die Betragsquadrate der beiden Moden gleich groß, was bedeutet, dass in beiden Schwingkreisen dieselbe Energiemenge gespeichert ist. Im Gegensatz dazu sind die Energien im Fall der gebrochenen $\mathcal{PT}$-Symmetrie verschieden. Außerdem fällt auf, dass sich die beiden Zustände lediglich im Bereich der gebrochenen $\mathcal{PT}$-Symmetrie dadurch unterscheiden, dass hier die Beträge der beiden Moden vertauscht sind.

Das Verhalten des Systems in den jeweiligen Fällen wird im Folgenden für zwei exemplarische Abstände genauer betrachtet. Zur Untersuchung der exakten $\mathcal{PT}$-Symmetrie kann beispielsweise ein Abstand von $d = 20\,\mathrm{cm}$ zwischen den Spulen betrachtet werden. Die Kopplungskonstante des Systems $\check{\kappa} = (627,989 + 2,762i)\,\mathrm{Hz}$ kann mithilfe der Gleichung (3.17) berechnet werden. Damit können mithilfe der Gleichung (2.46) auch die beiden Anregungsfrequenzen bestimmt werden, welche in Abbildung 4.11 dargestellt sind. In diesem Fall unterscheiden sich die Amplituden nicht nur aufgrund der verschiedenen Transmission-Lines, sondern auch wegen der verschiedenen effektiven Verlustfaktoren nach Gleichung (3.10). Die Energien in den Schwingkreisen, welche in Abbildung 4.12a zu sehen sind, sind wie bereits in Abbildung 4.10, dargestellt, gleichverteilt und zeitlich konstant, womit es sich hierbei um einen stationären Zustand des Systems handelt. Die Moden des Systems sind in Abbildung 4.12b dargestellt. Dabei fällt auf, dass im Vergleich zu den Moden des Hermiteschen Falls aus Abbildung 4.3b die Phasendifferenz der beiden Moden geringer ist als im Hermiteschen Fall, in welchem diese π beträgt.

Zur Betrachtung der gebrochenen $\mathcal{PT}$-Symmetrie kann gemäß Abbildung 4.9 ein größerer



(a) Grundzustand **(b)** Angeregter Zustand

Abbildung 4.10: Betragsquadrat der Komponenten des Zustandsvektors (3.7) des in Abbildung 4.2 dargestellten Systems für die beiden Lösungen der Energieeigenwerte.

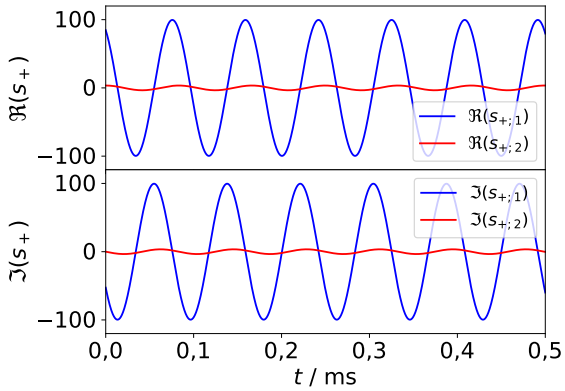
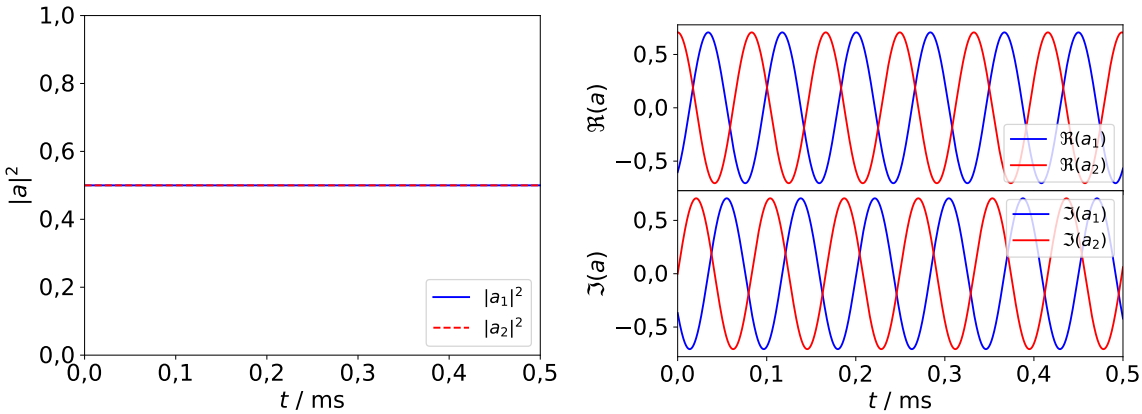


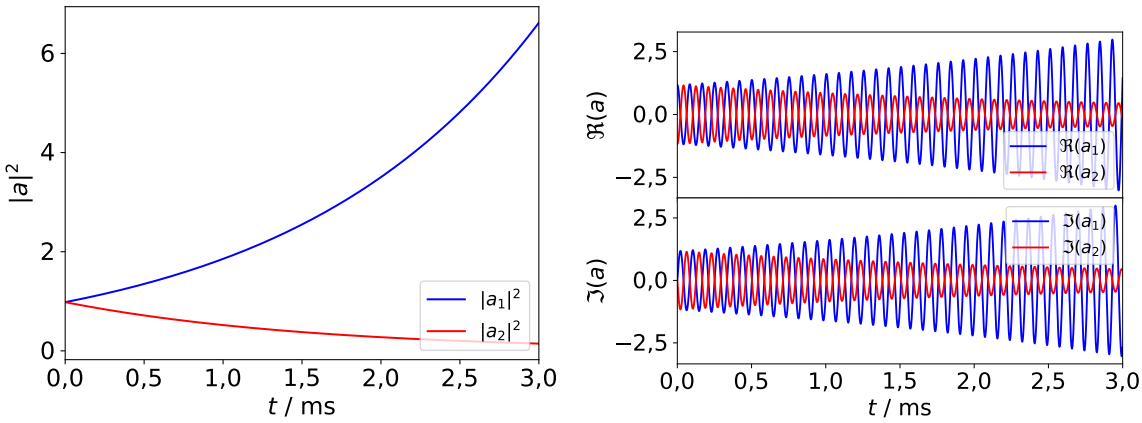
Abbildung 4.11: Real- und Imaginärteile der einlaufenden Wellen $s_{+;k}$ zur Realisation des in Abbildung 4.2 dargestellten Systems mit exakter $\mathcal{PT}$-Symmetrie.

Abstand von beispielsweise $d = 40\,\text{cm}$ zwischen den Spulen betrachtet werden. Dadurch beträgt die gegenseitige Induktivität $M = 0{,}868\,\text{mH}$, womit $\breve{\kappa} = (88,018 + 0,387i)\,\text{Hz}$ nach Gleichung (3.17) berechnet werden kann. Auch hier folgen die Anregungsfrequenzen aus der Gleichung (2.46). Aufgrund der gebrochenen Symmetrie sind Gewinn und Verlust nicht mehr ausgeglichen, wodurch die Energie im ersten Schwingkreis exponentiell ansteigt, wohingegen die Energie im zweiten Schwingkreis exponentiell auf null absinkt, wie in Abbildung 4.13b dargestellt. Mathematisch folgt das daraus, dass die Eigenwerte (3.27) komplex konjugiert sind, wodurch die Exponenten der Zustandsfunktionen (4.3) und (4.4) neben einem Imaginärteil, welcher die Schwingung der Mode beschreibt, einen zusätzlichen Realteil besitzen. Ist dieser Realteil größer null, so nimmt die Norm des Zustands und



(a) Betragsquadrat des Zustandsvektors **(b)** Moden der Schwingkreise

Abbildung 4.12: In den Schwingkreisen gespeicherte Energien $|a_k|^2$ und Moden a_k des Grundzustands des in Abbildung 4.2 dargestellten System im Fall exakter $\mathcal{PT}$-Symmetrie.



(a) Betragsquadrat des Zustandsvektors

(b) Moden der Schwingkreise

Abbildung 4.13: In den Schwingkreisen gespeicherten Energien $|a_k|^2$ und Moden a_k des in Abbildung 4.2 dargestellten System im Fall der gebrochenen $\mathcal{PT}$-Symmetrie.

damit die Energie mit der Zeit zu, wohingegen diese für ein negatives Vorzeichen mit der Zeit abnimmt. Diese Zu- und Abnahme der Energie ist auch im Verhalten der Moden, welche in Abbildung 4.13a dargestellt sind, erkennbar. So nimmt die Amplitude des ersten Schwingkreises analog zu dessen Energie exponentiell zu, wohingegen die Amplitude der zweiten Mode exponentiell auf null absinkt.

System 4 Als zweites Beispiel wird erneut das in Abbildung 4.5 dargestellte System betrachtet, aber wieder mit einem nicht verschwindenden Verlustfaktor. Dazu wird analog zum dritten Beispiel im ersten Schwingkreis eine Transmission-Line mit $\bar{\gamma}_{\text{ext};1} = 0,1$ und im zweiten eine Transmission-Line mit $\bar{\gamma}_{\text{ext};2} = 40$ eingebaut. Es werden keine zusätzlichen Widerstände eingebaut und der effektive Verlustfaktor des Systems wird als $\check{\gamma} = -7{,}500\,\text{kHz}$ gewählt. Da auch hier symmetrische Schwingkreise betrachtet werden, ist die Bedingung (3.9) erfüllen, womit die effektive Eigenfrequenz nach Gleichung (2.52) $\check{\omega} = 1{,}978\,\text{MHz}$ beträgt. Für einen Abstand von $d = 18\,\text{cm}$ zwischen den Spulen beträgt die gegenseitige Induktivität $M = 2{,}229\,\mu\text{H}$, wodurch für die Kopplungskonstante nach Gleichung (3.17) $\check{\kappa} = (8,630 - 0,033i)\,\text{kHz}$ folgt. Dabei wurde der Abstand zwischen den Spulen im Vergleich zum zweiten System reduziert, da sonst die Kopplungskonstante betragsmäßig kleiner als der Verlustfaktor und somit die $\mathcal{PT}$-Symmetrie bereits gebrochen wäre. Mithilfe dieser Größen können die Moden der Schwingkreise berechnet werden, welche in Abbildung 4.14 dargestellt sind.

Da auch hier aufgrund der exakten $\mathcal{PT}$-Symmetrie das Betragsquadrat der Moden konstant ist, werden in Abbildung 4.14 lediglich die Moden des Schwingkreises dargestellt. Im Vergleich zu den Moden aus Abbildung 4.12b fällt auf, dass die Phasendifferenzen

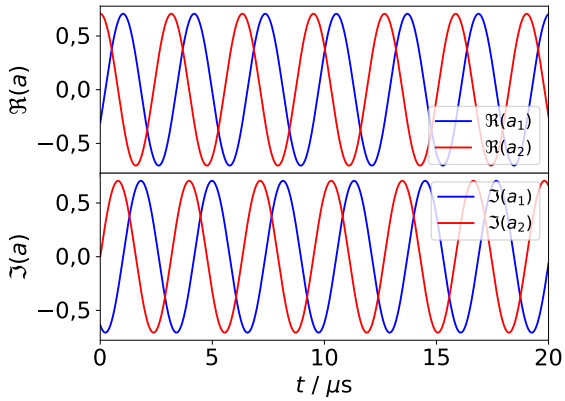


Abbildung 4.14: Moden des in Abbildung 4.5 dargestellten Systems im Grundzustand.

zwischen den beiden Moden a_1 und a_2 in beiden Systemen jeweils unterschiedlich sind. Im Hermiteschen Fall aus Abbildung 4.3b liegt diese bei exakt π, wohingegen diese im Fall der $\mathcal{PT}$-Symmetrie geringer ist. Die Größe der Phasendifferenz hängt dabei von dem Verhältnis der Kopplungskonstanten und dem effektiven Verlustfaktors ab. Dies kann beispielsweise am Vergleich der beiden Abbildungen 4.12b und 4.14 beobachtet werden. Die Phasendifferenz der Moden aus Abbildung 4.12b liegt knapp unter π, wohingegen diese in Abbildung 4.14 etwas über $\frac{\pi}{2}$ beträgt. Die Phasendifferenz hängt dabei von dem Verhältnis des Betrags der Kopplungskonstanten und des effektiven Verlustfaktors ab. In Abbildung 4.12b beträgt des Verhältnis etwa 2, wohingegen dieses in Abbildung 4.14 bei ungefähr 1,1 liegt. Dies zeigt, dass im Grenzfall $\frac{\breve{\kappa}}{\breve{\gamma}} \to 1$ die Phasendifferenz zwischen den beiden Moden gegen $\frac{\pi}{2}$ und für den Grenzfall $\frac{\breve{\kappa}}{\breve{\gamma}} \to \infty$ gegen π konvergiert. Dies stimmt auch mit den Befunden aus Abschnitt 4.1 überein, da der Fall ohne effektiven Gewinn und Verlust durch $\breve{\gamma} = 0$ dem Grenzfall $\frac{\breve{\kappa}}{\breve{\gamma}} \to \infty$ entspricht und damit die Phasendifferenz, wie in Abbildung 4.3b zu sehen, tatsächlich π beträgt.

4.2.2 Kapazitive Kopplung mit negativer Induktivität und negativer Kapazität

Obwohl diese Kopplungsvariante nach Abschnitt 3.2 die Bedingungen für ein $\mathcal{PT}$-symmetrisches System erfüllt, kann damit kein $\mathcal{PT}$-symmetrisches System experimentell realisiert werden. Dies liegt daran, dass für die Kopplungskonstante (3.26) $\breve{\kappa} \sim \omega_1^2 - \omega_2^2$ gilt. Aufgrund dessen können die beiden Schwingkreise nicht symmetrisch bezüglich dem Betrag ihrer Eigenfrequenzen $|\omega_k|$ gewählt werden, da sonst $\breve{\kappa} = 0$ gilt und die beiden Schwingkreise somit effektiv ungekoppelt sind. Nach Abschnitt 3.1 muss das System zusätzlich die Bedingungen (3.9) und (3.10) erfüllen. Einsetzen der zweiten Bedingung in

die erste, zusammen mit den Gleichungen (2.52) und (2.61) liefert die Gleichung

$$\sqrt{\omega_1^2 - \breve{\gamma}^2} = \sqrt{\omega_2^2 - \breve{\gamma}^2} \quad \Leftrightarrow \quad \omega_1^2 = \omega_2^2. \tag{4.6}$$

Diese ist aber nur erfüllbar, wenn die beiden Schwingkreise symmetrisch bezüglich des Betrags ihrer Eigenfrequenzen $|\omega_k|$ gewählt werden. Dies hat nach der vorherigen Betrachtung $\breve{\kappa} = 0$ zur Folge. Dies zeigt, dass mit der kapazitiven Kopplung mit negativer Induktivität und negativer Kapazität in einem der beiden Schwingkreise experimentell kein $\mathcal{PT}$-symmetrisches System aus zwei gekoppelten Schwingkreisen realisierbar ist.

4.3 Dimensionierung anti-$\mathcal{PT}$-symmetrischer Schwingkreise

Gemäß der Betrachtung der Energieeigenwerte des anti-$\mathcal{PT}$-symmetrischen Systems in Abschnitt 3.2.1 muss für eine exakte anti-$\mathcal{PT}$-Symmetrie $|\breve{\kappa}| > \breve{\omega}$ gelten. Der in dieser Arbeit verwendete Ansatz der linearen Kopplung, wodurch die Differentialgleichungen der gekoppelten Schwingkreise in der Form (3.1) und (3.2) geschrieben werden können, gilt allerdings nur für den Fall der schwachen Kopplung $|\breve{\kappa}| \ll \omega_k$. Obwohl dies im Fall der exakten anti-$\mathcal{PT}$-Symmetrie nicht mehr erfüllt ist, wird der Einfachheit halber trotzdem von einer näherungsweise linearen Kopplung ausgegangen [15].

Gemäß Abschnitt 3.2 ist ein anti-$\mathcal{PT}$-symmetrisches System sowohl durch zwei herkömmliche, kapazitiv gekoppelte Schwingkreise, als auch durch zwei kapazitiv gekoppelte Schwingkreise mit negativer Induktivität und negativer Kapazität in einem der beiden Schwingkreise realisierbar. Zum Vergleich der verschiedenen Kopplungsmöglichkeiten wird das System 4.2 aus Abschnitt 4.1 für die beiden verschiedenen Kopplungsvarianten angepasst, um damit jeweils die anti-$\mathcal{PT}$-Symmetrie zu realisieren.

4.3.1 Herkömmliche kapazitive Kopplung

Es wird erneut das in Abbildung 4.2 dargestellte System betrachtet, wobei die Schwingkreise jetzt kapazitiv gekoppelt sind, sodass sich die Kondensatoren der Schwingkreise wie in Abbildung 2.6 jeweils zwischen der Erdung und dem Kopplungskondensator befinden. Um die Bedingung (3.30) zu erfüllen, welche anschaulich besagt, dass in beiden Schwingkreisen ein effektiver Gewinn beziehungsweise Verlust auftritt, müssen beide Schwingkreise einen effektiven Verlustfaktor $\breve{\gamma}_k \gtrless 0$ besitzen. Aufgrund dessen wird als erstes Beispiel ein System betrachtet, in dem in beiden Schwingkreisen ein effektiver Gewinn auftritt. Zusätzlich werden in beiden Schwingkreisen Transmission-Lines mit

$\bar{\gamma}_{\text{ext};k} = 0,1$ betrachtet. Auch hier wird in keinem der beiden Schwingkreise ein zusätzlicher Widerstand eingebaut, sodass der Gesamtwiderstand in beiden Schwingkreisen jeweils dem intrinsischen Widerstand der Spulen entspricht. Zusätzlich wird der effektive Verlustfaktor erneut als $\breve{\gamma} = -330\,\text{Hz}$ gewählt. Mit der effektiven Eigenfrequenz $\breve{\omega} = 75{,}037\,\text{kHz}$ aus der Gleichung (2.52) können erneut mithilfe der Gleichung (2.46) die Anregungsfrequenzen bestimmt werden. Um das allgemeine Verhalten des Systems zu untersuchen, können analog zum Abschnitt 4.2 die Energieeigenwerte des Systems für verschiedene Kopplungskonstanten betrachtet werden. Dazu kann die Kopplungskonstante über verschiedene Kapazitäten des Kopplungskondensators variiert werden. Die daraus resultierende Abbildung 4.15, welche die Real- und Imaginärteile der Energieeigenwerte für verschiedene Werte der Kapazität des Kopplungskondensators darstellt, zeigt erneut die verschiedenen Symmetriebereiche des Systems. So ist für Kapazitäten $C_C \geq 240\,\text{pF}$ die anti-$\mathcal{PT}$-Symmetrie des Systems exakt, da hier die Eigenwerte rein imaginär sind. Für Kapazitäten $C_C < 240\,\text{pF}$ ist diese hingegen gebrochen, da in diesem Fall die Realteile der Eigenwerte ungleich null sind. Dieses Verhalten zeigt sich erneut auch im Betragsquadrat der Zustandsvektoren, welche in Abbildung 4.16 ebenfalls für verschiedene Kapazitäten des Kopplungskondensators dargestellt sind. Diese verhalten sich analog zum $\mathcal{PT}$-symmetrischen Fall, der in Abbildung 4.10 dargestellt ist. Auch hier sind im Fall der exakten Symmetrie die in den beiden Schwingkreisen gespeicherten Energien gleich groß, wohingegen sich diese im Fall der gebrochenen Symmetrie unterscheiden. Ebenfalls gleich ist, dass der einzige Unterschied zwischen dem Grund- und dem angeregten Zustand darin liegt, dass im Bereich der gebrochenen Symmetrie die Beträge der beiden Moden vertauscht sind.

Zur Betrachtung der exakten Symmetrie kann exemplarisch ein Kopplungskondensator

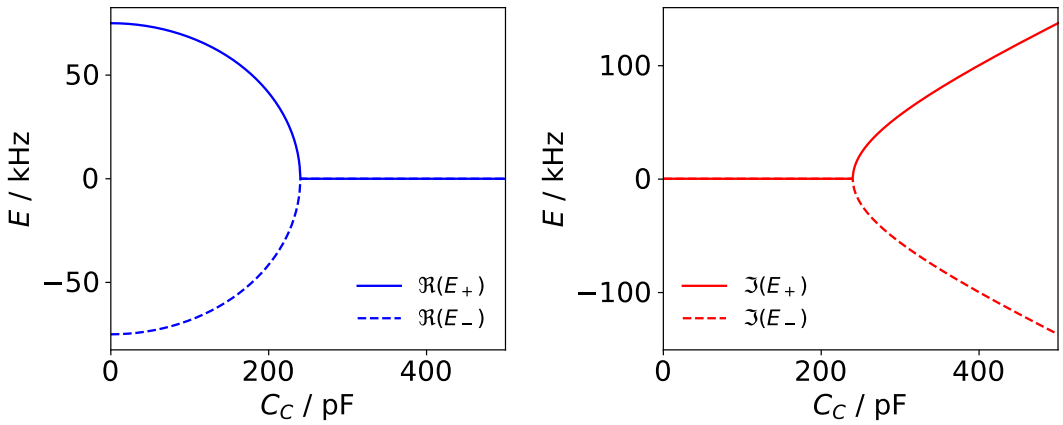
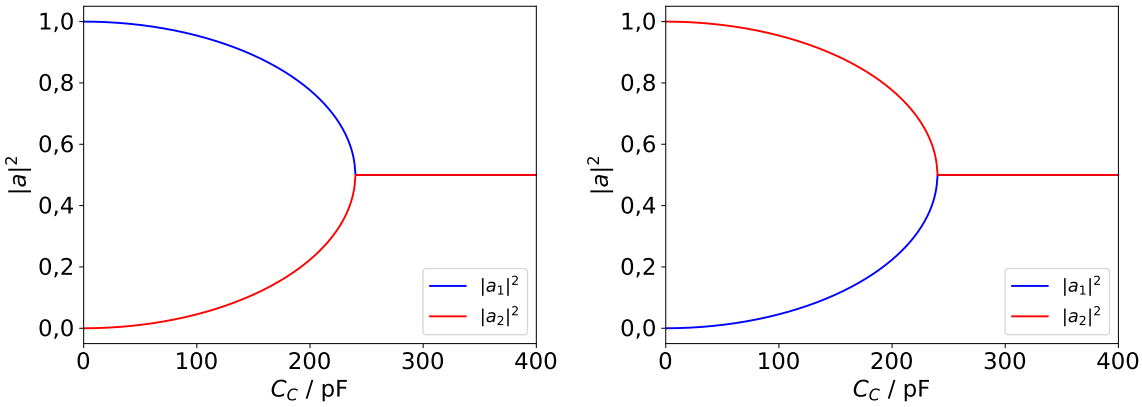


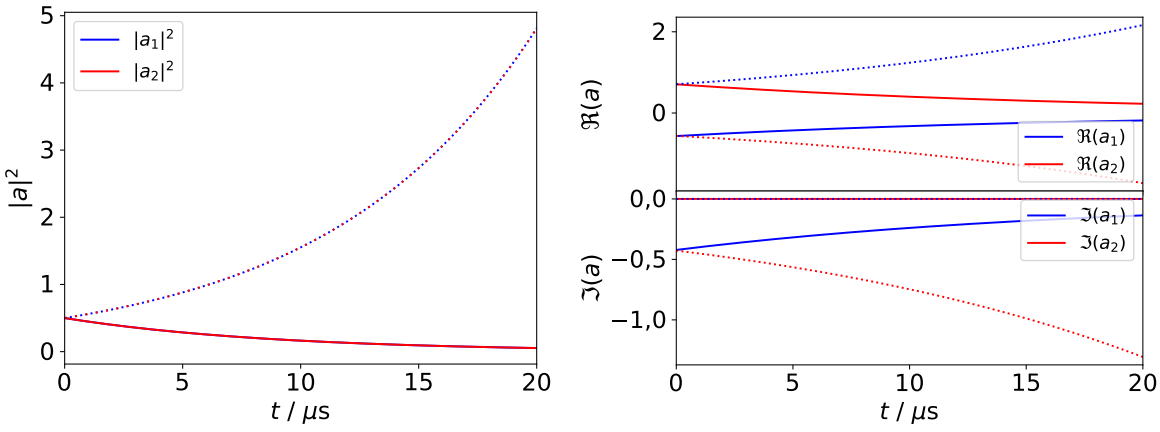
Abbildung 4.15: Real- und Imaginärteile der Energieeigenwerte des in Abbildung 4.2 dargestellten Systems in Abhängigkeit der Kapazität des Kopplungskondensators.



(a) Grundzustand **(b)** Angeregter Zustand

Abbildung 4.16: Betragsquadrate $|a_k|^2$ der Zustandsvektoren des in Abbildung 4.2 dargestellten Systems.

der Kapazität $C_C = 300\,\mathrm{pF}$ verwendet werden, wodurch für die Kopplungskonstante (3.36) $\check{\kappa} = (93,798 - 0,413i)\,\mathrm{kHz}$ berechnet werden kann. Die Moden des Systems sowie deren Betragsquadrate sind in Abbildung 4.17 sowohl für den Grundzustand als auch den angeregten Zustand dargestellt. Diese zeigt, dass keiner der beiden Zustände stationär ist, da im Grundzustand die Energien in beiden Schwingkreisen exponentiell auf null abfallen, wohingegen die Energien im angeregten Zustand beide exponentiell zunehmen. Dies zeigt sich auch in den Amplituden der Moden in Abbildung 4.17b, wobei die Realteile der Moden jeweils mit verschiedenen Vorzeichen zu oder abnehmen. Im Gegensatz dazu ist der Imaginärteil einer der beiden Moden konstant null, wodurch jeweils eine der beiden Moden eine rein reelle Größe ist. Im Grundzustand ist die Mode des zweiten Schwingkreises reell und der Imaginärteil der ersten Mode nimmt exponentiell ab. Dagegen ist im angeregten Zustand die Mode des ersten Schwingkreis reell und der Imaginärteil der zweiten Mode nimmt exponentiell zu. Dieses Verhalten folgt daraus, dass im Fall der exakten anti-$\mathcal{PT}$-Symmetrie die Energieeigenwerte rein imaginär sind, wodurch die Exponenten der Ansätze (4.3) und (4.4) rein reell sind. Dadurch tritt keine Oszillation der Moden auf, sondern lediglich eine exponentielle Zu- oder Abnahme. Dies zeigt, dass sich $\mathcal{PT}$- und anti-$\mathcal{PT}$-symmetrische Systeme grundlegend anders verhalten, obwohl sich die entsprechenden Hamilton-Operatoren gemäß Gleichung (3.43) nur um eine imaginäre Einheit unterscheiden. So sind die Energien in den Schwingkreisen in beiden Fällen zwar zum Zeitpunkt $t = 0$ gleichverteilt, im $\mathcal{PT}$-symmetrischen Fall sind die Energien aber konstant, wohingegen diese im anti-$\mathcal{PT}$-symmetrischen Fall exponentiell zu- oder abnehmen. Auch die Moden unterscheiden sich, da im Fall der $\mathcal{PT}$-Symmetrie die Maximalamplitude der Moden ebenfalls konstant sind und diese oszillieren, wohingegen im Fall der anti-$\mathcal{PT}$-Symmetrie die Moden nicht oszillieren und die Maximalamplituden

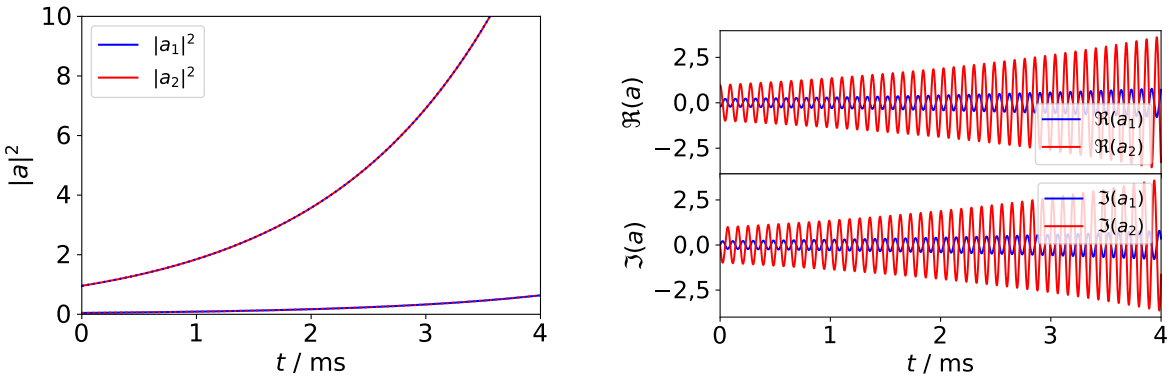


(a) Betragsquadrat des Zustandsvektors **(b)** Moden des Systems

Abbildung 4.17: Verhalten der Moden a_k und der in den Schwingkreisen gespeicherten Energien $|a_k|^2$ der in Abbildung 4.2 dargestellten kapazitiv gekoppelten Schwingkreise im Fall exakter anti-$\mathcal{PT}$-Symmetrie, wobei der angeregte Zustand jeweils gepunktet eingezeichnet ist.

exponentiell zu- oder abnehmen.

Im Gegensatz dazu kann gemäß Abbildung 4.15 durch Verwendung eines Kopplungskondensators der Kapazität $C_C = 100\,\mathrm{pF}$ ein System mit gebrochener anti-$\mathcal{PT}$-Symmetrie realisiert werden. In diesem Fall gilt für die Kopplungskonstante nach Gleichung (3.36) $\breve{\kappa} = (31,266 - 0,138i)\,\mathrm{kHz}$, wodurch sich das in Abbildung 4.18a dargestellte Verhalten der Moden ergibt. Hier nimmt die Energie in den Schwingkreisen in beiden Moden exponentiell zu, sowohl im Grund- als auch im angeregten Zustand. Dabei nimmt die Energie in den Schwingkreisen unterschiedlich schnell zu. Der einzige Unterschied zwischen den beiden Zuständen besteht darin, dass hier die beiden Moden die Rollen tauschen. Damit nehmen auch die Amplituden der beiden Moden, die in Abbildung 4.18a dargestellt sind, exponentiell zu, wobei die Moden zusätzlich eine Schwingung ausführen. Die Schwingungen der Moden stammen daher, dass die Energieeigenwerte im Fall der gebrochenen Symmetrie zusätzlich jeweils einen Realteil besitzen, der die Oszillation der Moden beschreibt. Ein Vergleich der Abbildung 4.18 mit Abbildung 4.13 des $\mathcal{PT}$-symmetrischen Systems mit gebrochener Symmetrie zeigt, dass diese sich sehr ähnlich verhalten. In beiden Fällen oszillieren die Moden der Schwingkreise mit nicht konstanter Maximalamplitude. Der einzige Unterschied besteht darin, dass im $\mathcal{PT}$-symmetrischen Fall die Maximalamplitude einer Mode zunimmt und die Maximalamplitude der anderen abnimmt, wohingegen im anti-$\mathcal{PT}$-symmetrischen System beide Maximalamplituden zunehmen. Dieser Unterschied folgt aus den Bedingungen zur Realisierung der $\mathcal{PT}$- beziehungsweise anti-$\mathcal{PT}$-Symmetrie, welche in Kapitel 3 hergeleitet wurden. So müssen für die $\mathcal{PT}$-Symmetrie nach der Be-



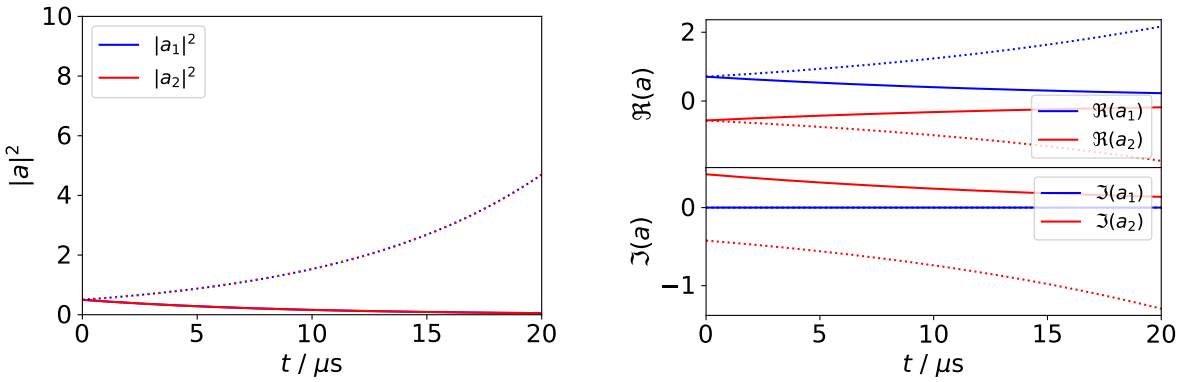
(a) Betragsquadrat des Zustandsvektors, wobei der angeregte Zustand gepunktet eingezeichnet ist.

(b) Real- und Imaginärteile der Moden des Systems im Grundzustand.

Abbildung 4.18: Verhalten der Moden a_k und der in den Schwingkreisen gespeicherten Energien $|a_k|^2$ der in Abbildung 4.2 dargestellten kapazitiv gekoppelten Schwingkreise mit einer gebrochenen anti-$\mathcal{PT}$-Symmetrie.

dingung (3.10) die beiden effektiven Verlustfaktoren der Schwingkreise verschiedene Vorzeichen besitzen, weshalb die Energie in einem der Schwingkreise zu- und im anderen abnimmt. Dahingegen müssen für die anti-$\mathcal{PT}$-Symmetrie nach Bedingung (3.30) die beiden effektiven Verlustfaktoren übereinstimmen, weshalb die Energie in beiden Schwingkreisen zunimmt.

In den bis jetzt betrachteten Systemen trat in jedem der Schwingkreise ein effektiver Gewinn auf. Im Gegensatz dazu kann auch ein System mit einem positiven effektiven Verlustfaktor in beiden Schwingkreisen betrachtet werden. Dafür wird der effektive Verlustfaktor als $\breve{\gamma} = 0{,}273\,\mathrm{kHz}$ gewählt. Damit kann mithilfe der Gleichung (3.36) die Kopplungskonstante $\breve{\kappa} = (93,798 + 0,341i)\,\mathrm{kHz}$ berechnet werden. Ein Vergleich der Moden dieses Systems, welche in Abbildung 4.19b dargestellt sind, mit denen aus Abbildung 4.17 zeigt, dass sich diese qualitativ gleich verhalten. Der einzige Unterschied besteht in den Imaginärteilen der Moden. In diesem Fall ist die Mode des ersten Schwingkreises in beiden Zuständen rein reell und die Maximalamplitude der zweiten Mode nimmt exponentiell zu oder ab. Dies folgt aus der Struktur der Wellenvektoren (4.3) und (4.4). Da die Eigenwerte $E_\pm$ nach Abschnitt 3.2 rein imaginär sind und die Wurzel $\sqrt{|\breve{\kappa}|^2 - \breve{\omega}^2}$ in diesem System betragsmäßig deutlich größer als der effektive Verlustfaktor $\breve{\gamma}$ ist, hat die Änderung des Vorzeichens des effektiven Verlustfaktors keinen signifikanten Einfluss auf den Exponenten der Ansätze (4.3) und (4.4) und damit auf die Zeitentwicklung der Zustände des Systems. Die Unterschiede in den Imaginärteilen der Moden ergeben sich aus den unterschiedlichen Eigenzuständen der beiden Systeme.



(a) Betragsquadrat des Zustandsvektors, wobei der angeregte Zustand gepunktet eingezeichnet ist.

(b) Real- und Imaginärteile der Moden des Systems im Grundzustand.

Abbildung 4.19: Verhalten der Moden a_k und der in den Schwingkreisen gespeicherten Energien $|a_k|^2$ der in Abbildung 4.2 dargestellten kapazitiv gekoppelten Schwingkreise mit exakter anti-$\mathcal{PT}$-Symmetrie und einem positiven effektiven Verlustfaktor.

4.3.2 Kapazitive Kopplung mit negativer Induktivität und negativer Kapazität

Analog zum Abschnitt 4.2.2 erfüllt diese Kopplungsvariante zwar die mathematischen Bedingungen aus Abschnitt 3.2, trotzdem lässt sich damit experimentell kein System aus gekoppelten Schwingkreisen mit einer anti-$\mathcal{PT}$-Symmetrie realisieren. Dies liegt erneut daran, dass für die Kopplungskonstante (3.41) ebenfalls $\breve{\kappa} \sim \omega_1^2 - \omega_2^2$ gilt und somit die beiden Schwingkreise für ein gekoppeltes System erneut nicht symmetrisch bezüglich ihrer Eigenfrequenzen $|\omega_k|$ gewählt werden dürfen. Dies steht aber im Widerspruch zu der Bedingung (3.29), welche durch das Einsetzen der Gleichungen (2.52) und (2.61) ebenfalls äquivalent zu Gleichung (4.6) ist. Daraus folgt, dass mit der kapazitiven Kopplung mit negativer Induktivität und negativer Kapazität in einem der beiden Schwingkreise experimentell weder ein $\mathcal{PT}$-symmetrisches noch ein anti-$\mathcal{PT}$-symmetrisches System aus zwei gekoppelten Schwingkreisen experimentell realisierbar ist.

5 Zusammenfassung und Ausblick

Das Ziel dieser Arbeit war es, explizite Bauteile zur Realisierung von $\mathcal{PT}$- und anti-$\mathcal{PT}$-symmetrischen gekoppelten Schwingkreisen zu bestimmen. Dafür wurde der Moden-Formalismus, mit welchem solche gekoppelten Systeme einfach beschrieben werden können, von Grund auf hergeleitet. Um diese Schwingkreise auch experimentell realisieren zu können, wurden nicht nur ideale Schwingkreise, sondern auch reale, experimentell realisierbare Schwingkreise mit Verlusten betrachtet. Durch die vollständige Herleitung des Formalismus können die Bedingungen für die Symmetrien der betrachteten Systeme nicht nur in Abhängigkeit der effektiven Größen des Moden-Formalismus angegeben werden, sondern diese können auch direkt auf die Bauteilgrößen der einzelnen Schwingkreise zurückgeführt werden, was die Dimensionierung der verschiedenen Systeme ermöglicht.

Zur Realisierung der $\mathcal{PT}$- und anti-$\mathcal{PT}$-Symmetrie wurden drei verschiedene Kopplungsvarianten untersucht. Diese Untersuchung zeigt, dass sich $\mathcal{PT}$-symmetrische Systeme einfach durch zwei induktive gekoppelte Schwingkreise aus gewöhnlichen Bauteilen realisieren lassen. Für die Realisierung eines anti-$\mathcal{PT}$-symmetrischen Systems können zwei kapazitiv gekoppelte Schwingkreise mit herkömmlichen Bauteilen betrachtet werden. Insgesamt wurde also für beide Symmetrien jeweils ein experimentell realisierbares System gefunden. Da für beide Kopplungsvarianten lediglich gewöhnliche Bauteile verwendet wurden, sind die in dieser Arbeit exemplarisch betrachteten Schwingkreise einfach experimentell realisierbar. Damit können Eigenschaften der $\mathcal{PT}$- und anti-$\mathcal{PT}$-Symmetrie an einfachen Systemen beobachtet und untersucht werden. Ein weiterer Vorteil ist, dass gekoppelte elektromagnetische Schwingkreise anschaulicher sind als Quantensysteme und damit einen einfacheren Zugang zu diesem Themengebiet ermöglichen. Das betrachtete System aus zwei kapazitiv gekoppelten Schwingkreisen mit negativer Induktivität und negativer Kapazität in einem der Schwingkreise ist insofern interessant, da dieses System mit minimalen Anpassungen sowohl eine $\mathcal{PT}$-symmetrische als auch eine anti-$\mathcal{PT}$-symmetrische Struktur aufweisen kann. Eine genauere Untersuchung zeigt allerdings, dass sich weder die $\mathcal{PT}$- noch die anti-$\mathcal{PT}$-Symmetrie experimentell mit diesem System realisieren lassen. Zusätzlich würden für diese Kopplungsvariante komplexe Komponenten, die sich wie Kondensatoren und Spulen mit negativer Kapazität beziehungsweise Induktivität verhalten, benötigt, was eine einfache experimentelle Realisierbarkeit ausschließt.

Die Untersuchung der verschiedenen Symmetrien und ihrer Eigenschaften zeigt, dass

sich stationäre Zustände lediglich in $\mathcal{PT}$-symmetrischen Systemen ergeben. Im Fall der anti-$\mathcal{PT}$-Symmetrie nehmen die Energien je nach Zustand des Systems exponentiell zu oder ab. Dies zeigt auch, dass sich $\mathcal{PT}$- und anti-$\mathcal{PT}$-symmetrische Systeme im Fall der exakten Symmetrie grundlegend unterscheiden, wohingegen diese im Fall der gebrochenen Symmetrie ein ähnliches Verhalten aufweisen. Sowohl in der $\mathcal{PT}$- als auch in der anti-$\mathcal{PT}$-Symmetrie treten exzeptionelle Punkte auf, welche in dieser Arbeit aber nicht genauer untersucht wurden. Aufgrund dessen könnte sich eine zukünftige Arbeit mit der Realisierung eines Systems zur Untersuchung dieser exzeptionellen Punkte befassen. In der theoretischen Betrachtung zweier gekoppelter Schwingkreise wurde außerdem der Einfachheit halber die Annahme einer linearen Kopplung verwendet, welche aber eigentlich nur im Fall $|\check{\kappa}| \ll \omega_k$ gilt. Diese Annahme ist aber im Fall der exakten anti-$\mathcal{PT}$-Symmetrie nicht mehr erfüllt. Aufgrund dessen könnte diese Annahme in einer zukünftigen Arbeit mit einem allgemeinen Ansatz einer nichtlinearen Kopplung überprüft werden. Außerdem wurden die zur Realisierung der Systeme benötigten äußeren Anregungsfrequenz nur am Rande betrachtet und aufgrund dessen nur numerisch bestimmt. In einer zukünftigen Arbeit können diese genauer bezüglich ihrer Eigenschaften und einer geschlossenen Form untersucht werden.

Weitere mögliche Ansatzpunkte zukünftiger Arbeiten sind die Untersuchung anderer Kopplungsmethoden, zum Beispiel die Kopplung über einen zusätzlichen Widerstand als eine alternative Realisierungsmöglichkeit eines anti-$\mathcal{PT}$-symmetrischen Systems [15]. Des weiteren können Systeme aus mehr als zwei gekoppelten Schwingkreisen als erweiterte Möglichkeit zur Energieübertragung untersucht werden. Für die Realisierung eines Systems zur Untersuchung der in dieser Arbeit betrachteten Symmetrien, können gekoppelte Schwingkreise mit Potentiometern als Widerstände verwendet werden. Damit können durch eine geeignete Wahl der Transmission-Lines die verschiedenen Symmetriebereiche des Systems ohne das Tauschen oder Bewegen von Komponenten, lediglich durch das Verändern der Widerstände beobachtet werden.

A Übersicht der verwendeten Größen

Symbol	Definition	Bedeutung
ω_k	$\frac{1}{\sqrt{C_k L_k}}$	Eigenfrequenz eines idealen Schwingkreises
$\bar{\omega}_k$	$\sqrt{\omega_k^2 - \gamma_{R;k}^2}$	Eigenfrequenz eines verlustbehafteten Schwingkreises
$\breve{\bar{\omega}}_k$	$\sqrt{\omega_k^2 - \breve{\gamma}_k^2}$	Eigenfrequenz eines verlustbehafteten Schwingkreises mit angeschlossener Transmission-Line
$\tilde{\omega}_k$		Frequenz der durch die Transmission-Line einlaufenden Welle
$\breve{\omega}_k$	$\sqrt{\omega_k^2 - \breve{\gamma}_k^2}$	Effektive Frequenz des Schwingkreises bei äußerer Anregung
$\gamma_{R;k}$	$\frac{R_{\text{ges};k}}{2L}$	Verlustfaktor durch die Widerstände im Schwingkreis
$\bar{\gamma}_{\text{ext};k}$		Verlustfaktor durch die an der Transmission-Line reflektierten Welle
$\bar{\gamma}_k$	$\gamma_{R;k} + \bar{\gamma}_{\text{ext};k}$	Gesamt-Verlustfaktor durch den Widerstand und die Transmission-Line
$\breve{\gamma}_k$		Effektiver Verlustfaktor, der die Verluste durch Widerstand und Transmission-Line und den Gewinn durch die einlaufende Welle zusammenfasst
ω'_k	$\bar{\omega}_k + i\gamma_{R;k}$	Ersatzfrequenz bestehend aus der Eigenfrequenz und dem Verlustfaktor
$\breve{\omega}'_k$	$\breve{\omega}_k + i\breve{\gamma}_k$	Effektive Ersatzfrequenz bestehend aus der effektiven Eigenfrequenz und dem effektiven Verlustfaktor

Tabelle A.1: Eine Übersicht der verschiedenen, in dieser Arbeit verwendeten Eigenfrequenzen und Verlustfaktoren zur Beschreibung von Schwingkreisen.

Wird lediglich ein Schwingkreis betrachtet, dann wird der Index k der Größen weggelassen, mit Ausnahme der Eigenfrequenz, welche als ω_0 bezeichnet wird. In einem System aus zwei gekoppelten Schwingkreisen beschreibt der Index $k = 1, 2$ zu welchem der beiden Schwingkreise die jeweilige Größe gehört.

Literatur

[1] John Cowdrey. „The War of the Currents“. In: *Home Power* 111 (2006), S. 88–92.

[2] A. S. Marincic. „Nikola Tesla and the Wireless Transmission of Energy“. In: *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems* PAS-101.10 (1982), S. 4064–4068. DOI: 10.1109/TPAS.1982.317084.

[3] William C. Brown. „The history of wireless power transmission“. In: *Solar Energy* 56.1 (1996). Wireless Power Transmission, S. 3–21. ISSN: 0038-092X. DOI: 10.1016/0038-092X(95)00080-B.

[4] Hunter Hanzhuo Wu, Aaron Gilchrist, Ky Sealy, Paul Israelsen und Jeff Muhs. „A review on inductive charging for electric vehicles“. In: *2011 IEEE International Electric Machines and Drives Conference (IEMDC)*. 2011, S. 143–147. DOI: 10.1109/IEMDC.2011.5994820.

[5] Sid Assawaworrarit, Xiaofang Yu und Shanhui Fan. „Robust wireless power transfer using a nonlinear parity-time-symmetric circuit“. In: *Nature* 546 (Juni 2017), S. 387–390. DOI: 10.1038/nature22404.

[6] Carl Bender, Dorje Brody und Hugh Jones. „Complex Extension of Quantum Mechanics“. In: *Physical Review Letters* 89 (Jan. 2003), S. 270401. DOI: 10.1103/PhysRevLett.89.270401.

[7] H.A. Haus. *Waves and Fields in Optoelectronics*. CBLS, 2004. ISBN: 9781595290151. URL: https://books.google.de/books?id=2OA8lAEACAAJ.

[8] E.H. Kopp. „Negative impedance inverter circuits“. In: *Proceedings of the IEEE* 53.12 (1965), S. 2125–2126. DOI: 10.1109/PROC.1965.4505.

[9] A. Larky. „Negative-Impedance Converters“. In: *IRE Transactions on Circuit Theory* 4.3 (1957), S. 124–131. DOI: 10.1109/TCT.1957.1086360.

[10] Takehiro Imura und Yoichi Hori. „Maximizing Air Gap and Efficiency of Magnetic Resonant Coupling for Wireless Power Transfer Using Equivalent Circuit and Neumann Formula“. In: *IEEE Transactions on Industrial Electronics* 58.10 (2011), S. 4746–4752. DOI: 10.1109/TIE.2011.2112317.

[11] Daniel Dizdarevic. „Symmetries ans Symmetrisation in Quantum and Electromagnetic Multi-Mode Systems for Balancing Gain and Loss“. Diss. Universität Stuttgart, 2021. DOI: 10.18419/opus-11523.

[12] Avignon-Meseldzija, Emilie, Lepetit, Thomas, Ferreira, Pietro Maris und Boust, Fabrice. „Negative inductance circuits for metamaterial bandwidth enhancement“. In: *EPJ Appl. Metamat.* 4 (2017), S. 11. DOI: 10.1051/epjam/2017009.

[13] Eva-Maria Graefe. „Stationary states of a PT symmetric two-mode Bose–Einstein condensate“. In: *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* 45.44 (Okt. 2012), S. 444015. DOI: 10.1088/1751-8113/45/44/444015.

[14] Tosio Kato. *Perturbation Theory for Linear Operators*. Springer Berlin, Heidelberg, 1995. ISBN: 978-3-540-58661-6. DOI: 10.1007/978-3-642-66282-9.

[15] Youngsun Choi, Choloong Hahn, Jae Woong Yoon und Seok Ho Song. „Observation of an anti-PT-symmetric exceptional point and energy-difference conserving dynamics in electrical circuit resonators“. In: *Nature* (Juni 2018). DOI: 10.1038/s41467-018-04690-y.

[16] José Oscar Mur-Miranda, Giulia Fanti, Yifei Feng, Keerthik Omanakuttan, Roydan Ongie, Albert Setjoadi und Natalie Sharpe. „Wireless power transfer using weakly coupled magnetostatic resonators“. In: *2010 IEEE Energy Conversion Congress and Exposition*. 2010, S. 4179–4186. DOI: 10.1109/ECCE.2010.5617728.

Danksagung

Ich möchte mich ganz herzlich bei Herrn Prof. Dr. Jörg Main für die Möglichkeit, meine Bachelorarbeit am Institut für Theoretische Physik I schreiben zu können und für die gute Betreuung während dieser Zeit, bedanken. Des Weiteren gebührt mein Dank vor allem Dr. Daniel Dizdarevic, der während der ganzen Zeit immer ein offenes Ohr für meine Fragen hatte und stets helfen und motivieren konnte. Ebenfalls unerlässlich sind meine Familie und Freunde, die mir dieses Studium erst ermöglicht und mich während der ganzen Zeit unterstützt und motiviert haben. Abschließend möchte ich noch allen danken, die diese Arbeit Korrektur gelesen haben.

Erklärung

Ich versichere,

- dass ich diese Bachelorarbeit selbstständig verfasst habe,
- dass ich keine anderen als die angegebenen Quellen benutzt und alle wörtlich oder sinngemäß aus anderen Werken übernommenen Aussagen als solche gekennzeichnet habe,
- dass die eingereichte Arbeit weder vollständig noch in wesentlichen Teilen Gegenstand eines anderen Prüfungsverfahrens gewesen ist,
- und dass das elektronische Exemplar mit den anderen Exemplaren übereinstimmt.

Stuttgart, den 25. August 2024 *Simon Rehwald*