

Untersuchungen zur gravimetrischen Inversion mittels genetischer Algorithmen

Diplomarbeit im Studiengang
Geodäsie und Geoinformatik
an der Universität Stuttgart

Markus Körner

Stuttgart, September 2010

Betreuer: Dr.-Ing. Oliver Baur
Universität Stuttgart

Prüfer: Prof. Dr.-Ing. Nico Sneeuw
Universität Stuttgart

Eidesstatliche Erklärung

Ich erkläre hiermit an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit ohne Hilfe Dritter und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Hilfsmittel angefertigt habe; die aus fremden Quellen direkt oder indirekt übernommenen Gedanken sind als solche kenntlich gemacht. Die Arbeit wurde bisher in gleicher oder ähnlicher Form in keiner anderen Prüfungsbehörde vorgelegt und auch noch nicht veröffentlicht.

Lorch-Waldhausen, den 29.09.2010

Markus Körner

Zusammenfassung

Die gravimetrische Inversion ist ein zentrales Problem in der Geophysik. Wiewohl die entsprechenden Forschungstätigkeiten auf eine lange Geschichte zurückblicken, sind mit innovativen Techniken selbst heutzutage neue Lösungsansätze zu finden.

Das Grundprinzip der gravimetrischen Inversion ist, aus einer Schwereanomalie den Körper oder die Struktur zu extrahieren, welche für die Anomalie verantwortlich ist. Es existiert eine Vielzahl von Berechnungsmethoden, die es erlauben für (fast) jeden beliebigen Körper dessen Gravitationskraft zu berechnen. Diese Formeln werden, an entsprechender Stelle, für die in dieser Arbeit verwendeten Körper dargelegt. Durch Programme, die teilweise im Rahmen der Arbeit entstanden, kann der Anwender idealisierte Signale erzeugen und diese gemessenen Werten gegenüberstellen. Eine Möglichkeit beide Messwerte zu vergleichen stellt die Berechnung des rms Wertes dar. Dieser errechnet sich über die Summe der quadratischen Differenzen beider Signale, die durch die Anzahl der Messwerte geteilt und anschließend die Wurzel gezogen wird. Ein kleiner rms Wert indiziert eine hohe Übereinstimmung zwischen simuliertem und gemessenem Signal.

Das Hauptproblem dabei ist, dass verschiedene Körper dasselbe Signal erzeugen können. Somit gibt es unendlich viele Körper, welche der Schwereanomalie zugewiesen werden können. Es ist nun das Ziel, im Rahmen der Möglichkeiten genau den Körper zu finden, der am „wahrscheinlichsten“ ist. Durch geologische Untersuchungen und daraus resultierenden Randbedingungen können die Möglichkeiten deutlich eingeschränkt werden; die Anzahl der verbleibenden Körper ist jedoch zu groß für gesicherte Aussagen. Ein Verfahren ist zu finden, das in der Lage ist durch „probieren“ ein gewähltes Modell immer weiter zu verbessern und sich dem „wahren“ Körper immer weiter anzunähern.

Informatiker begannen Anfang der 1950er Jahre die sogenannten evolutionären Strategien zu entwickeln. Den Verfahren liegt ein biologischer Evolutionsprozess zugrunde, welche mit Hilfe von mathematischen Operationen umgesetzt ist. Aus diesem Spektrum ist für die Arbeit der Genetische Algorithmus (GA) gewählt worden, bei dem es sich um einen globalen Optimierer handelt. Besonders wichtig in diesem Zusammenhang ist die Tatsache, dass dieser Optimierer keinerlei Ableitungen der verwendeten Optimierungsfunktion benötigt. Somit ist der GA geeignet, für nicht lineare Probleme, wie im Fall der gravimetrischen Inversion.

Eine Einführung in dessen Funktionsweise sowie die Adaption an die Problematik ist Bestandteil dieser Arbeit. Dabei wird vor allem auf die Anwendung des sogenannten hybriden GA eingegangen. Bei diesem gemischten Ansatz wird zuerst der GA durchlaufen und die resultierenden Parameter in einem zweiten Schritt mit einem lokalen Optimierungsverfahren, der Downhill Simplex Methode (DSM), weiter verarbeitet. Unter bestimmten Voraussetzungen, die in der Arbeit betrachtet werden, ist es möglich unter Verwendung dieses Ansatzes die Körperparameter weiter zu optimieren und den rms Wert zu senken.

Für Untersuchungen wurden Simulationen zu Inversion mit fehlerfreien als auch fehlerbehafteten Signalen synthetischer Körper betrachtet. Für beide Versionen und unter Verwendung verschiedener Körper bietet der hybriden GA das größte Potenzial gute Ergebnisse, d. h. den geringsten rms Wert, zu liefern.

Abstract

Gravimetric inversion is a central problem in geophysics. Although research in this field has a long history of innovative techniques new solutions can be found even today.

The basic principle of gravimetric inversion is extracting from a gravity anomaly the body or structure which is responsible for the anomaly. There is a great variety of methods for calculating the gravitational force of almost any body. The formulas used for this thesis are described at the appropriate places. With programs that have partly been created in the course of the work, the user can generate idealized signals and compare them with measured values. One way of comparing both values is the calculation of the rms value. This is calculated by adding the squared differences of the two signals, divided by the number of measurements and then the root is extracted. A small rms value indicates a high correlation between simulated and measured signals.

The main problem is that different bodies can produce the same signal. Thus, there is an infinite number of bodies to which the gravity anomaly may be ascribed. It is now the target, to find that body that is the most likely. With geological investigations and the resulting boundary conditions, the options are clearly limited, but the number of remaining bodies is still too large for safe conclusions. A method has to be found that is able to improve the selected model by „trying“ again and again, and thus approach the „real“ body more and more.

In the early 1950s computer scientists began to develop so-called evolutionary strategies. This method is based on a biological process of evolution, which is implemented by means of mathematical operations. From this spectrum the Genetic Algorithm (GA) has been chosen for the thesis, which is a global optimizer. Particularly important in this context is the fact that this optimizer does not require any derivatives of the optimization function used. Thus, the GA is suitable for nonlinear problems, as in the case of gravimetric inversion.

An introduction to its functioning and the adaptation to the problem is part of this thesis. It will primarily cover the application of the so-called hybrid GA. In this mixed approach, the GA is applied first, and then, in a second step, the resulting parameters are further processed with a local optimization method, the downhill simplex method (DSM). Under certain conditions, which are considered in the thesis, it is possible to optimize the body parameters and reduce the rms value by using this approach.

For research purposes simulations of inversion with error-free as well as faulty signals of synthetic bodies were considered. For both versions, and the use of various body features the hybrid GA offers the greatest potential for good results, which means delivering the lowest rms value.

Danksagung

Danke an alle, die mich so treu auf meinem Weg durch das Studium begleitet haben.

Für das Gelingen dieser Diplomarbeit geht mein Dank vor allem an meinen Betreuer Oliver Baur, der so manche Stunde Zeit mit mir und meinen Problemen verbracht hat.

Das Abstract wäre ohne meinen ehemaligen Lehrer Herrn Schramm wohl etwas holpriger geworden.

Vielen Dank auch an Matthias, Ron und Christof für die Bereitstellung von MATLAB Programmen.

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	1
2	Vorwärtsrechnung	3
2.1	Gravitation	3
2.2	Gravitative Wirkung ausgewählter Körper	5
2.2.1	Polygonaler Querschnitt	5
2.2.2	Rotationskörper	8
2.2.3	Polyeder	12
2.3	Validierung der Programme	15
2.3.1	Test des Programms für die Schwerewirkung eines polygonalen Querschnitts	15
2.3.2	Test der Programme für Rotationskörper	17
2.3.3	Test der Programme für Polyeder	18
3	Optimierungsmethoden	19
3.1	Optimierung und Inversion	19
3.2	Optimierungsverfahren – Der Genetische Algorithmus	21
3.2.1	Allgemeiner Ablauf des Ga	22
3.3	Downhill-Simplex Methode	26
3.4	Verwendung des GA und DSM am Beispiel der Rastringin-Funktion	28
4	Anwendung des GA auf synthetische Körper	31
4.1	Closed-loop Simulation	31
4.1.1	Invertierung eines polygonalen Querschnitts	32
4.1.2	Invertierung rotationssymmetrischer Körper	38
4.1.3	Invertierung von Polyedern	41
4.2	Fehlerbehaftete Signale	45
4.2.1	Quadratischer Querschnitt	45
4.2.2	Zylinder	47
4.2.3	Polyeder	48
5	Schlussbetrachtung und Ausblick	51
5.1	Schlussbetrachtung	51
5.2	Ausblick	53

Abbildungsverzeichnis

1.1	Unterschiedliche Körpergeometrien mit identischem Schweresignal an der Erdoberfläche.	1
2.1	In kleine Volumenelemente ΔV geteilter Körper, mit den Massen M_i . Der Berechnungspunkt ist P , die einzelnen Abstände sind mit r_i bezeichnet.	4
2.2	Ausgedehnter Körper mit einer kontinuierlichen Dichteverteilung in ein kartesisches Koordinatensystem. Der Beobachtungspunkt ist P , der Quellpunkt Q . . .	4
2.3	Querschnitt durch einen in y -Richtung unendlich ausgedehnten Körper. Die x -Achse zeigt nach rechts und die z -Achse positiv nach unten. Der Berechnungspunkt P liegt (hier) im Ursprung. Die Eckpunkte des Polygons sind jeweils durch Koordinatenpaare $\{(x_i, z_i), (x_{i+1}, z_{i+1})\}$ mit Zählrichtung im Uhrzeigersinn gegeben. Die Winkel θ_i sind positiv von der x -Achse zum Polygonpunkt gezählt. .	6
2.4	Abgebildet sind drei verschiedene, polygonale Querschnitte mit zugehöriger Schwerewirkung. Die z -Achse in der unteren Abbildung verläuft positiv nach unten. Der viereckige Schnitt liegt sowohl ober- als auch unterhalb der Beobachtungslinie (Profil, x -Achse). Desweiteren ist ein Sechseck und ein Kreis (angenähert mit 50 Punkten, Radius 25m) dargestellt. Der verwendete Dichtekontrast ist $\Delta\rho = 600 \text{ kg m}^{-3}$	7
2.5	Wirkung einer Schwereanomalie, ausgelöst durch eine Kugel. Es ist b der Abstand von der xy -Ebene bis zum Mittelpunkt, a ist der Radius, φ der Winkel und r der Abstand vom Ursprung. Der Dichtekontrast $\Delta\rho$ zwischen Kugel und Umgebung ist die Differenz $\rho - \rho_0$	8
2.6	Halbunendlicher Zylinder mit Abstand ζ von der Nullebene und einem Beobachtungspunkt P im Abstand r von der Symmetrieachse und z von der Nullebene aus Damiata & Lee (2002b).	9
2.7	Schematische Abbildung: Aus den Schwerewirkungen zweier unendlich ausgedehnter Zylinder geht die eines endlich ausgedehnten durch Differenzenbildung hervor.	10
2.8	Beispiel für einen rotationssymmetrischen Körper. Es ist der Fall eines Hohlzylinders abgebildet, dessen Schwerewirkung auf Grundlage von Gleichung (2.16) berechnet werden kann.	10
2.9	Schematische Darstellung einer Kegels. Es ist b der Abstand von der Nullebene, α der Öffnungswinkel, l die Länge und a_b der Durchmesser am Boden (Damiata & Lee 2002a).	11
2.10	Schematische Darstellung einer Kegelstumpfes. Es ist b der Abstand von der Nullebene bis zur „Kegelspitze“, α der Öffnungswinkel, c der Abstand von der „Kegelspitze“ bis zum Deckel, l die Länge, a_t der Durchmesser am Deckel und a_b der Durchmesser am Boden (Damiata & Lee 2002a).	11

2.11	Schweresignal eines Kegels (durchgezogene, schwarze Linie) mit den Parametern $z = 0 \text{ m}$, $b = 10 \text{ m}$, $\alpha = 30^\circ$, $l = 100 \text{ m}$, $\Delta\rho = 600 \text{ kg m}^{-3}$ und $a_b = 57.7350 \text{ m}$. Die weiteren Kurven zeigen das Schweresignale eines Kegelstumpfes mit $c_1 = 40 \text{ m}$ (schwarz gestrichelte Linie) und $c_2 = 60 \text{ m}$ (grau gestrichelte Linie).	11
2.12	Die Abbildung zeigt das zweidimensionale Schweresignal eines vertikalen Zylinders. Die Parameter sind $z = 0 \text{ m}$, $b = 10 \text{ m}$, $a_b = 86 \text{ m}$, $\Delta\rho = 600 \text{ kg m}^{-3}$ und $l = 100 \text{ m}$	11
2.13	Sicht auf eine Fläche, welche durch ein Polygon begrenzt wird, aus Singh & Guptasarma (2001).	13
2.14	Darstellung des Schweresignals von zwei Polyedern (hier: Quadern). Der Mittelpunkt von Polyeder1 liegt bei $(x, y, z) = (0, 0, 25) \text{ m}$ mit einer Kantenlänge von 400 m in x/y -Richtung und 30 m in z -Richtung. Der zweite Polyeder hat seinen Mittelpunkt bei $(x, y, z) = (0, 0, 50) \text{ m}$ und Kantenlängen von 800 m in x/y -Richtung sowie 20 m in z -Richtung.	14
2.15	Relativer Unterschied zwischen den Programmen <i>Mod2D</i> und <i>gz_poly</i> . Die Geometrie des Querschnittes ist in der unteren Abbildung zu sehen, der verwendete Dichtekontrast beträgt $\Delta\rho = 600 \text{ kg m}^{-3}$ und die, vom Java-Programm fest vorgegebene, Gravitationskonstante $G = 6.670 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2} \text{ kg}^{-1}$	16
2.16	Vergleich einen unendlichen Zylinders mit einem Polygon aus 10^5 Punkten. Dichtekontrast und Gravitationskonstante sind gleich wie in Abbildung 2.15, der Radius ist $a = 1 \text{ m}$ und die Tiefe $b = 2 \text{ m}$	16
2.17	Vergleich eines quadratischen, polygonalen Querschnitts mit einem endlichen Quader. Die Länge des Quaders wird mit der Ausdehnung entlang der x -Achse bezeichnet. Die Breite verläuft in Richtung der y -Achse, hier negativ in die Ebene hinein bzw. positiv heraus. Das Verhältnis von Länge zu Breite ($1:B$) erfolgt, von der obersten Kurven an abwärts, in den Schritten $B = 5, 10, 10^3, 10^5$. Sonstige Einstellungen wie beim Körper in Abbildung 2.15.	16
3.1	Darstellung des schematischen Ablaufes einer Optimierung. Der Vorgang im schwarz umrandeten Kasten deutet einen Optimierungsdurchlauf an. Der Prozess der Optimierung wird erst abgebrochen, wenn ein vorab definiertes Abbruchkriterium erreicht wird.	19
3.2	Darstellung der Rastringin-Funktion für $\nu = 1$. Es sind viele lokale Minima und das globale Minimum an der Stelle 0 zu erkennen.	20
3.3	Schematischer Ablauf des Genetischen Algorithmus.	23
3.4	Beispiel für ein <i>Single-Point-Crossover</i> : Zwischen den Chromosomen beider Eltern findet hier ein Austausch ab der vierten Stelle statt.	24
3.5	Beispiel für die Mutation eines Nachkommen, wobei das letzte Bit invertiert wird.	25
3.6	In dieser Ausgangssituation im 2-dimensionalen Raum sind die Isolinien einer Kostenfunktion zu sehen. Des Weiteren sind die Startposition und die nach (3.5) erzeugten Vektoren V1 und V2 abgebildet.	27
3.7	Reflexion des Vektors W am sogenannten Vektordurchschnitt D	27
3.8	Bei der Expansion wird ein Punkt auserwählt, welcher nicht zu einer Verschlechterung im Rahmen der Optimierung führt.	27
3.9	Es findet eine erneute Reflexion statt um einen Punkt mit geringeren Kosten zu finden.	27
3.10	Zu sehen ist ein einzelner GA Durchlauf, bei dem der beste bzw. mittlere Wert der Kostenfunktion (hier die Rastringin-Funktion) in jeder Generation gezeigt wird.	29

3.11	Vergleich zwischen einem GA mit und ohne Verwendung von DSM. Die Werte auf der Abszisse stehen für die einzelnen x_i , während auf der Ordinate die zugehörigen Werte aufgetragen sind. Die Dreiecke stehen für die Optimierung mittels GA. Durch Nachschaltung des DSM konnten die Werte deutlich „nachgebessert werden“, wie die Lage der Kreise zeigt.	29
3.12	Optimierte Werte der Rastringinfunktion, deren Startpunkt bei $\mathbf{x} = (100, \dots, 100)$ lag. Man sieht deutlich, dass das globale Optimum bei null nicht gefunden wird. Die Abszisse und Ordinate ist definiert wie in Abbildung 3.11.	29
4.1	Schwereanomalie eines quadratischen Querschnittes, von einem in y -Richtung unendlich ausgedehnten Körper mit einem Dichtekontrast $\Delta\rho = 300 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$. Die Koordinaten sind ausgehend von der linken oberen Ecke im Uhrzeigersinn von (x_1, z_1) bis (x_4, z_4) nummeriert.	32
4.2	Abweichungen zwischen originalen und invertierten Koordinaten (aus GA, 2000 Generationen), getrennt in x - und z -Richtung. In den vier Grafiken sind die Ergebnisse für jeweils ein anderes p (1%, 5%, 50% 100%) angegeben. Die Abweichungen sind prozentual zur jeweiligen maximalen Länge des Suchbereiches angegeben. Es gilt für die untere Grenze -100% und die obere Grenze 100%.	34
4.3	Koordinatenabweichungen wie in Abbildung 4.2, berechnet über 10 000 Generationen.	35
4.4	Relativer Fehler zwischen Originalsignal und dem Signal, welches aus den Koordinaten nach Abbildung 4.2 berechnet wurde.	35
4.5	Relativer Fehler zwischen Originalsignal und dem Signal, welches aus den Koordinaten nach Abbildung 4.3 berechnet wurde.	36
4.6	Koordinatenabweichungen wie in Abbildung 4.2 mit 50 000 Generationen und $p = 100\%$	36
4.7	Koordinatenabweichungen wie in Abbildung 4.2 mit nachgeschaltetem DSM für $p = 100\%$. Links ist das Ergebnis des DSM nach 2000 Generation zu sehen und rechts nach 10000 mit den jeweils erreichten Kosten.	37
4.8	Darstellung der Parameter, welche die Lage und Größe eines senkrechten Zylinders eindeutig beschreiben.	39
4.9	Signal des im Text beschriebenen Zylinders.	40
4.10	Relative Signalunterschiede für die Fälle 2 (links) und 5 (rechts) gemäß Tabelle reftab:tabelleZyl.	40
4.11	Aufbau des Körpers, wie in den Simulationen angenommen.	41
4.12	Signal des in Abbildung 4.12 dargestellten und im Text beschriebenen Polyeders.	42
4.13	Vergleich verschiedener Selektionsmechanismen für jeweils 1000 Generationen.	43
4.14	Vergleich verschiedener Selektionsmechanismen für jeweils 18 000 Generationen.	43
4.15	Relativer Unterschied zwischen Originalsignal und dem aus den optimierten Parametern rekonstruierten Signal, links für Glücksrad nach 1000 Generationen und rechts nach 18 000.	43
4.16	Koordinatenabweichungen für verschiedene Selektionsmechanismen und 1000 Generationen.	44
4.17	Koordinatenabweichungen für Turnier und Glücksrad mit jeweils 18 000 Generationen.	44
4.18	Im oberen Bild wird das simulierte Rauschen dargestellt, während im unteren Bild der relative Fehler zwischen Originalsignal und dem Rauschen abgebildet ist.	46

4.19	Koordinatenunterschiede aus der Optimierung mittels GA bzw. anschließendem DSM mit zugehörigem relativen Fehler zwischen verrauschtem und dem aus der jeweiligen Optimierung stammenden Signal.	46
4.20	Im linken Bild ist das berechnete Rauschen dargestellt, während im Rechten der relative Fehler zwischen fehlerfreiem Signal und dem Rauschen abgebildet ist. .	47
4.21	Im linken Bild ist der relative Unterschied zwischen Ausgangssignal (mit Rauschen) nach einer Optimierung mittels GA zu sehen, während im Rechten der relative Fehler nach einer anschließenden Optimierung durch DSM (hybrid) zu sehen ist.	47
4.22	Links zu sehen ist das simulierte Rauschen für den Polyeder, während auf der rechten Seite der relative Fehler zwischen Signal und Rauschen betrachtet werden kann.	48
4.23	Relative Unterschiede nach 1000 Generationen (links) und nach 18 000 Generationen (rechts).	49
4.24	Relative Unterschiede nach Anwendung des DSM, links nach 1000 Generationen und rechts nach 18 000 Generationen.	49

Tabellenverzeichnis

2.1	Unterscheidung falls sich der der/die Polygonpunkt/e über- oder unterhalb der Beobachterposition befindet/n, ein Polygonpunkt genau im Beobachtungspunkt liegt und/oder eine Polygonseite genau senkrecht steht.	7
2.2	Parameter zur Berechnung verschiedener rotationsymmetrischer Körper. Bei den Kegelstümpfen ist zu beachten, dass sich diese aus zwei Integralen (Zylinder und Kegel) zusammensetzen.	10
3.1	Ga Terminologie.	21
4.1	Werte der Kostenfunktion für verschiedene Defintionsintervalle und Generationenanzahl.	33
4.2	Optimierungsergebnisse für den Zylinder.	39
4.3	Vergleiche verschiedener Selektionsverfahren und Generationenzahlen hinsichtlich der Kosten.	42
4.4	Optimierungsergebnisse für Zylinder mit verrauschtem Signal.	47

Kapitel 1

Einführung

Ein wichtiger Forschungszweig in der angewandten Geophysik gilt der Bestimmung von Größe und Form geologischer Strukturen. Innerhalb eines bestimmten Gesteinstyp, z. B. Granit, ist diese Struktur durch Abgrenzung zum Umgebenden Material gekennzeichnet. Mögliche Ausprägungen können überall dort gut entdeckt werden, wo ein deutlicher Kontrast zwischen dem Material der Umgebung und dem der Struktur besteht. Dies kann z. B. bei Vulkanen, Erzlagerstätten oder Salzstöcken der Fall sein. Das Hauptinteresse besteht darin, die Gestalt des im Erdreich verborgenen Körpers und somit dessen Ausmaße heraus zu finden. Aufgrund der Dimensionen ist es in der Regel nicht möglich diesen freizulegen. Aus diesem Grund bedient man sich in der Geophysik verschiedener Messmethoden, welche an der Erdoberfläche eingesetzt werden können. Mit Hilfe der gewonnenen Daten ist man dann in der Lage anhand von Modellen den Körper zu rekonstruieren.

Häufig eingesetzte Methoden sind Seismik, Geomagnetik, Geoelektrik und Gravimetrie, die auch untereinander kombiniert werden können (Grant & West 1965). Aus den, mittels der genannten Verfahren prozessierten Signalen, kann durch die sogenannte Interpretation ein realitätsnaher Körper modelliert werden. Dieser Prozess wird auch *inverse Modellierung* genannt, weil der zu untersuchende Gegenstand nicht direkt zugänglich ist und aus den gemessenen Daten durch Rückrechnung erfolgt. Die Rekonstruktion ist ein i. A. *schlecht gestelltes Problem*, weil eine Vielzahl unterschiedlicher Körper zu den gleichen Messergebnissen führt und somit eine Mehrdeutigkeit vorliegt (vgl. Abbildung 1.1). Es ist daher zwingend notwendig gewisse Annahmen zu treffen, z. B. konstanter Dichtekontrast zwischen dem Körper und dem umgebenden Gestein und eine (erste) grobe Abschätzung der Gestalt und Lage. Für die in dieser Arbeit verwendeten gravimetrischen Daten können mathematisch-physikalische Modelle benutzt werden. Durch geeignete Anpassung der darin enthaltenen Parameter sollen diese „optimal“ bestimmt werden.

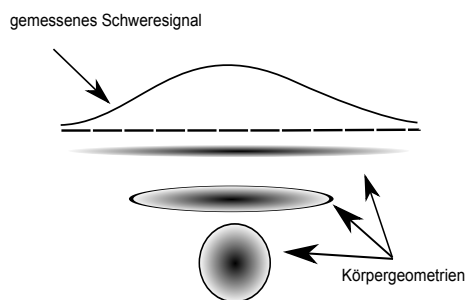


Abbildung 1.1: Unterschiedliche Körpergeometrien mit identischem Schweresignal an der Erdoberfläche.

Das Ziel einer optimalen Anpassung soll auf der Basis eines Genetischen Algorithmus (GA) erfolgen. Dieser wird besonders in Fällen nicht-linearer Probleme eingesetzt, weil keine Ableitungen verwendeter Funktionen benötigt werden. Grundlage dafür sind die sogenannten evolutionären Algorithmen. Diese basieren auf der von Charles Darwin¹ propagierten Evolutionstheorie (Schmid & Bechly 2009) mit den Mechanismen von Selektion, Mutation und Rekombination. Mitte der 1950er Jahre wurden diese umgesetzt in Algorithmen, die in der Lage sind diese natürlichen Mechanismen in Form mathematischer Operationen zu imitieren (Weicker 2002, Nissen 1997). Computer, die immer leistungsfähiger wurden, begünstigten die rasche Entwicklung. Heutzutage kommen Genetischen Algorithmen überall dort zur Anwendung, wo andere Optimierungsverfahren zu rasch auf ein lokales Minimum bzw. Maximum konvergieren und nicht in der Lage sind den gesamten Parameterraum abzusuchen.

Der Aufbau der Arbeit gliedert sich in vier Teile. Im nächsten Kapitel wird, ausgehend vom Gravitationsgesetz, die anziehende Wirkung von verschiedenen Körpern für die sogenannte Vorwärtsmodellierung hergeleitet. In Kapitel 3 wird der Zusammenhang zwischen Inversion und Optimierung hergestellt, sowie eine Einführung in den GA gegeben. Daran anknüpfend wird die Downhill-Simplex Methode erläutert, welche in Verbindung mit dem GA bessere Optimierungsergebnisse liefern kann. Das Kapitel 4 umfasst verschiedene numerische Simulationen. In einer ersten Untersuchung werden, mittels closed-loop Simulationen, fehlerfrei Signale synthetischer Körpern invertiert. Daran anschließend wird untersucht, wie sich ein künstlicher Fehler bei der Invertierung auswirkt. Am Ende der Arbeit wird in Kapitel 5 die Schlussbetrachtung und ein möglicher Ausblick vorgestellt.

¹Charles Darwin, geb. 12. Februar 1809 in Shrewsbury, gest. 19. April 1882 in Downe, Naturforscher

Kapitel 2

Vorwärtsrechnung

Schwereanomalien Δg innerhalb eines Messgebietes, die beispielsweise durch Relativmessungen mit einem Gravimeter beobachtet werden, haben ihre Ursache in Dichteunterschieden im Erdinneren. Eine Aussage darüber, welche Form der die Störung verursachende Körper hat, kann aus den Messwerten nicht eindeutig erfolgen. Aus diesem Grund ist es notwendig, Modellkörper zu konstruieren, deren Schwerewirkung berechnet werden kann. Diese Körper bilden gleichzeitig die Grundlage der inversen Modellierung. Im Folgenden sollen, ausgehend vom Gravitationsgesetz, die Schwerewirkung verschiedener Geometrien und die dafür benötigten Formeln gezeigt werden.

2.1 Gravitation

Das Gravitationsgesetz, welches Isaac Newton¹ im Jahre 1687 formulierte, bildet die Grundlage zum Verständnis über die Kräftebeziehung zweier Massen,

$$\mathbf{F} = G \frac{Mm}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}. \quad (2.1)$$

Es ist \mathbf{F} die Kraft, mit der sich zwei (punktförmige) Massen M und m entlang \mathbf{r} anziehen, wenn der Abstand zwischen beiden $|\mathbf{r}| = r$ beträgt. Die auftretende Gravitationskonstante hat einen Wert von $G = 6.672 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2} \text{ kg}^{-1}$.

Platziert man eine Punktmasse im Raum, so erzeugt diese ein Gravitationsfeld. Die Wirkung auf eine Probemasse, die sich frei in diesem Feld bewegt ist gerade durch (2.1) beschrieben. Mit

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{F}}{m} = G \frac{M}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (2.2)$$

wird die sogenannte Gravitationsfeldstärke oder auch Gravitationsbeschleunigung bezeichnet, welche die Probemasse, bezogen auf die Masseneinheit, spürt. Diese Beschreibung resultiert aus der Gleichsetzung von schwerer und träger Masse, die an sich verschiedene Eigenschaften besitzen. Bei $\mathbf{g}(\mathbf{r})$ handelt es sich um eine vektorielle Größe, deren Betrag g ist und in Richtung der ortsfesten Masse zeigt. Im Raum kann somit jedem Punkt ein Gravitationsvektor zugeordnet werden. Falls es sich bei der Gravitationsquelle nicht nur um eine Punktmasse, sondern um

¹Sir Isaac Newton (1642-1727)

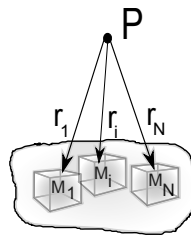


Abbildung 2.1: In kleine Volumenelemente ΔV geteilter Körper, mit den Massen M_i . Der Beobachtungspunkt ist P , die einzelnen Abstände sind mit \mathbf{r}_i bezeichnet.

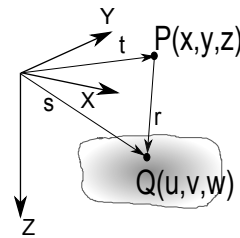


Abbildung 2.2: Ausgedehnter Körper mit einer kontinuierlichen Dichteverteilung in ein kartesisches Koordinatensystem. Der Beobachtungspunkt ist P , der Quellpunkt Q .

einen im Raum ausgedehnten Körper handelt, ist dessen Einfluss anders zu berechnen. Dafür unterteilt man den räumlichen Körper in N Massenelemente (Abbildung 2.1), deren Wirkung einzeln auf den Beobachtungspunkt P berechnet werden. Aufgrund des Superpositionsprinzips summieren sich die Kräfte der einzelnen Massen im Punkt P auf. Die resultierende Beschleunigung setzt sich demnach folgendermaßen zusammen

$$\mathbf{g}(P) = G \sum_{i=1}^N \frac{M_i}{r_i^3} \mathbf{r}_i \quad (2.3)$$

und ist auf den Massenmittelpunkt (Schwerpunkt) gerichtet. Im Grenzübergang, d. h. bei immer kleiner werdenden Volumenelementen ΔV , wird die Dichte ρ berechnet über

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} \quad (2.4)$$

und Gleichung (2.3) geht in das Integral

$$\mathbf{g}(P) = G \iiint_V \frac{\rho(Q)}{r^3} \mathbf{r} dV \quad (2.5)$$

über. Die Dichte ρ hängt hier vom Punkt Q ab, damit wird zum Ausdruck gebracht, dass diese innerhalb des Körpers variieren kann. Führt man, wie in Abbildung 2.2, ein kartesisches Koordinatensystem mit den Achsen x, y und z ein, so kann der gravitative Anteil in die jeweilige Koordinatenrichtung berechnet werden. Setzt man (siehe hierzu Abbildung 2.2)

$$\mathbf{r} = \mathbf{s} - \mathbf{t} \quad (2.6)$$

in (2.5) ein, so ergibt sich der Anteil in z -Richtung zu

$$g_z(P) = G \iiint_V \frac{\rho(u, v, w)(w - z)}{((u - x)^2 + (v - y)^2 + (w - z)^2)^{3/2}} du dv dw. \quad (2.7)$$

Insbesondere dieser Richtungsanteil ist im Weiteren von Interesse. Die Summe aus Gravitationsbeschleunigung und Zentrifugalbeschleunigung, verursacht durch die Erdrotation, an jedem Punkt der Erde wird Schwere genannt. Der Anteil dieses Vektors 2.7 in z -Richtung ist die Größe, die von einem Gravimeter aufgezeichnet wird. Ausgehend davon werden in den folgenden Abschnitten Berechnungen von g_z für verschiedenen Körper gezeigt. Wird im Folgenden

von der Schwerewirkung eines Körpers gesprochen, so ist damit sein gravitativer Anteil in z -Richtung gemeint. Eine weitere wichtige Größe ist ρ , welche im Folgenden immer als Dichtekontrast $\Delta\rho$ geschrieben wird, womit die Dichtedifferenz vom umgebenden Material zum (homogenen) Körper ausgedrückt wird.

2.2 Gravitative Wirkung ausgewählter Körper

2.2.1 Polygonaler Querschnitt

In der Literatur, z. B. bei Alvers (1998), Jacoby & Smilde (2009) oder Talwani et al. (1959) wird die Schwerewirkung sogenannter zweidimensionalen Körper beschrieben. Damit sind (geologische) Strukturen gemeint, bei denen die Ausdehnung in Längs- (hier entlang der y -Achse) sehr viel größer ist als in Querrichtung, wie in Abbildung 2.3 dargestellt. Die Herleitung der Berechnungsformel beruht auf einem in y -Richtung *unendlich* ausgedehntem Körper. Für reale Anwendungen sollte das Objekt, wie bei Grant & West (1965) vorgeschlagen, ein Längen- zu Breitenverhältnis von mindestens 1 : 5 aufweisen. Die Länge ist dabei auf der x -Achse und die Breite entlang der y -Achse. In Abbildung 2.17 wird gezeigt innerhalb welcher Größenordnungen sich die relativen Fehler bewegen, welche zwischen simulierten Messwerten eines quadratischen Querschnittes und denen, eines parallel zu den Achsen liegenden Quaders, berechnet wurden. Bei dem in der Literatur vorgeschlagenem Verhältnis von 1:5 liegt der relative Fehler im Bereich von 10^{-3} . Bei Verwendung der Formel sollte der Anwender darauf achten, dass der Schnitt des Messprofils näherungsweise senkrecht zur Objektlängsachse verläuft.

Bei Talwani et al. (1959) wird ein Algorithmus vorgestellt, der die vertikale Schwerekomponente, die solch eine Dichtestörung erzeugt, berechnet. Eine Weiterentwicklung ist bei Grant & West (1965) zu finden, bei der die Verwendung trigonometrischer Funktionen deutlich reduziert ist. Die hier zur Implementierung verwendeten Formeln entstammen Won & Bevis (1987), welche auf einer Fortsetzung beider oben erwähnten Arbeiten beruhen. Auftretende Sonderfälle werden durch Abfragen, wie in Tabelle 2.1 aufgelistet, entsprechend berücksichtigt. Es wird abgefragt, ob sich der Beobachtungspunkt innerhalb, über oder unter dem Polygon befindet. Die Umsetzung des Algorithmus erfolgte in dem MATLAB-Programm `g_zpoly`. In Abbildung 2.4 sind drei Querschnitte gezeigt, deren Schwereanomalie mit diesem Programm berechnet wurde.

Ausgehend von (2.7) und einem konstanten Dichtekontrast $\Delta\rho$ wird das Integral über y mit der oberen und unteren Grenze $y_u = -\infty$ bzw. $y_o = +\infty$ gebildet (Grant & West 1965). Das daraus entstehende Oberflächenintegral lautet:

$$\Delta g_z(P) = 2G\Delta\rho \iint_S \frac{(w-z)}{(v-y)^2 + (w-z)^2} dv dw. \quad (2.8)$$

Setzt man den Beobachtungspunkt P in den Ursprung des Koordinatensystem, kann (2.8) auch als Linienintegral dargestellt werden (Hubbert 1948). Wird nun die Fläche in der xz -Ebene durch ein n_p -seitiges Polygon (siehe Abbildung 2.3) begrenzt, so ist eine Auflösung dieses Linienintegrals in eine Summe möglich (Talwani et al. 1959).

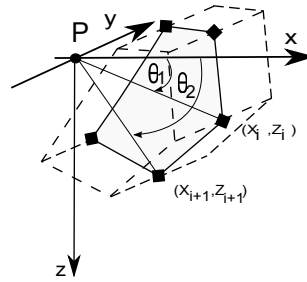


Abbildung 2.3: Querschnitt durch einen in y -Richtung unendlich ausgedehnten Körper. Die x -Achse zeigt nach rechts und die z -Achse positiv nach unten. Der Berechnungspunkt P liegt (hier) im Ursprung. Die Eckpunkte des Polygons sind jeweils durch Koordinatenpaare $\{(x_i, z_i), (x_{i+1}, z_{i+1})\}$ mit Zählrichtung im Uhrzeigersinn gegeben. Die Winkel θ_i sind positiv von der x -Achse zum Polygonpunkt gezählt.

In der Formulierung

$$\Delta g_{z_{\text{Polygon}}}(0) = 2G\Delta\rho \sum_{i=1}^{n_p} Z_i \quad (2.9)$$

ist diese Summe enthalten. Jedes Z_i steht für eine der n_p Polygonseiten, deren Kanten jeweils durch zwei Koordinatenpaare gebildet werden. Für eine bessere Übersicht wird im Folgenden (Gleichungen (2.10) - (2.12)) der Index i weggelassen und Z nur für eine Seite angegeben. Bei der Berechnung von Z für die einzelnen Seiten ist zu beachten, dass $(x_{n_p+1}, z_{n_p+1}) \equiv (x_1, z_1)$ gilt. Als Ergebnis erhält man $\Delta g_{z_{\text{Polygon}}}$ im Koordinatenursprung. Bewegt man sich horizontal und/oder vertikal zum nächsten Beobachtungspunkt, sind die Koordinaten $(x_i, z_i) \forall i = 1, \dots, n_p$ so anzupassen, als ob dieser neue Punkt wiederum im Ursprung läge.

Die Berechnung von Z erfolgt über

$$Z = A \left[\theta_1 - \theta_2 + B \ln \frac{r_2}{r_1} \right], \quad (2.10)$$

und setzt sich zusammen aus

$$A = \frac{(x_2 - x_1)(x_1 z_2 - x_2 z_1)}{(x_2 - x_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}, \quad (2.11a)$$

$$B = \frac{z_2 - z_1}{x_2 - x_1}, \quad (2.11b)$$

$$r_1 = \sqrt{x_1^2 + z_1^2}, \quad (2.11c)$$

$$r_2 = \sqrt{x_2^2 + z_2^2}. \quad (2.11d)$$

Bei der Berechnung von

$$\theta_j = \arctan \frac{z_j}{x_j}, \quad j = 1, 2 \quad (2.12)$$

ist zu beachten, dass bei der Programmierung eine Funktion verwendet wird, die den Wertebereich $\theta \in [-\pi, +\pi]$ wider gibt. Damit, wie schon erwähnt, die Beobachterposition beliebig gewählt werden darf, sind bei der Programmierung verschiedene Fälle zu beachten, wie in Tabelle 2.1 angegeben.

Tabelle 2.1: Unterscheidung falls sich der der/die Polygonpunkt/e über- oder unterhalb der Beobachterposition befindet/n, ein Polygonpunkt genau im Beobachtungspunkt liegt und/oder eine Polygonseite genau senkrecht steht.

Fall	Weitere Bedingung?	Ersetze ...
Vorzeichen von z_1 und z_2 sind unterschiedlich	$(x_1 z_2 < x_2 z_1) \wedge (z_2 \geq 0)$	$\theta_1 = \theta_1 + 2\pi$
s.o.	$(x_1 z_2 > x_2 z_1) \wedge (z_1 \geq 0)$	$\theta_2 = \theta_2 + 2\pi$
s.o.	$x_1 z_2 = x_2 z_1$	$Z = 0$
Kante 1 oder 2 liegt im Ursprung (0,0)	Nein	$Z = 0$
$x_1 = x_2$	Nein	$Z = x_1 \ln \frac{r_2}{r_1}$

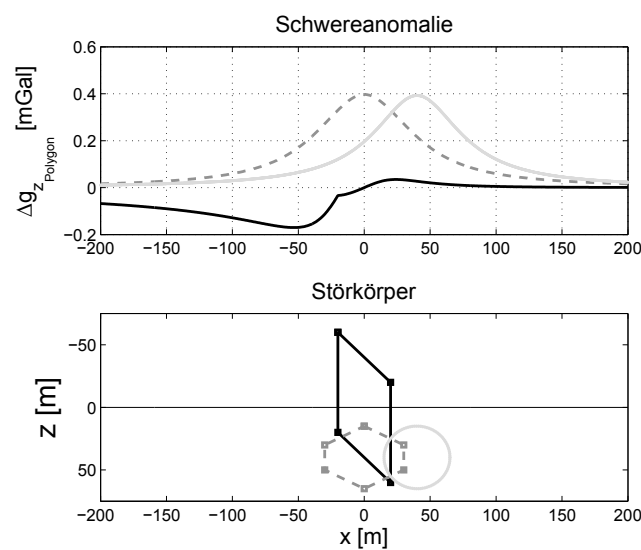


Abbildung 2.4: Abgebildet sind drei verschiedene, polygonale Querschnitte mit zugehöriger Schwerewirkung. Die z-Achse in der unteren Abbildung verläuft positiv nach unten. Der viereckige Schnitt liegt sowohl ober- als auch unterhalb der Beobachtungslinie (Profil, x-Achse). Desweiteren ist ein Sechseck und ein Kreis (angenähert mit 50 Punkten, Radius 25m) dargestellt. Der verwendete Dichtekontrast ist $\Delta\rho = 600 \text{ kg m}^{-3}$.

2.2.2 Rotationskörper

Durch Verwendung rotationsymmetrischer Körper lässt sich die Schwerewirkung einiger geologischer Strukturen beschreiben. Diese sind z. B. Salzstöcke, Atolle, Tiefseekuppen oder Vulkanschlote. Die gravitative Wirkung einer Kugel ist hierbei der einfachste Fall. Wie in Telford et al. (1976) gezeigt, ergibt sich deren Schwereanomalie in einem Punkt P zu $\Delta g(P) = \frac{4G}{3r_M^2} \pi a^3 \Delta \rho$, wobei r_M der Abstand vom Beobachtungspunkt zum Mittelpunkt der Kugel, $\Delta \rho = \rho_0 - \rho$ der Dichteunterschied und a der Kugelradius ist. Befindet man sich in einer Ebene oberhalb einer Kugel, so ist mit

$$g_{z_{\text{Kugel}}} = g \cos \varphi = \frac{4}{3} \frac{\pi a^3 \Delta \rho G b}{(r^2 + b^2)^{3/2}} \quad (2.13)$$

der Anteil in z -Richtung gegeben. Die Formelbestandteile sind in Abbildung 2.5 erklärt.

In diesem Abschnitt werden verschiedene rotationssymmetrische Körper betrachtet. Dabei handelt es sich um Zylinder, Kegel und Kegestumpf. Bewegt man sich bei den eben genannten Körpern auf der Symmetrieachse, die entlang der z -Achse verläuft, ist die Bestimmung von Δg_z in geschlossenen Ausdrücken möglich, wie bei Duska (1958) und Paul (1972) nachzulesen. Für einen Zylinder ist eine analytische Lösung für die Schwerewirkung (sowohl in vertikale als auch horizontale Richtung), wie bei Tsoulis (1999) gezeigt, sogar für einen beliebigen Punkt im Raum möglich. Im Rahmen dieser Diplomarbeit wurde der Ansatz von Damiata & Lee (2002a) benutzt, bei dem die Berechnung über numerische Integration erfolgt. Die Besonderheit dieser Methode besteht in der Möglichkeit, unter Verwendung eines einheitlichen Ansatzes und der Wahl geeigneter Parameter die (vertikale) Schwerewirkung einer Vielzahl von rotationssymmetrischen Körpern zu berechnen.

Als Vorüberlegung (Damiata & Lee 2002a) dient die Betrachtung der vertikalen, gravitativen Wirkung von halb-unendlichen, zylindrischen Schalen („cylindrical shell“). Für deren Herleitung ist die Differenz von zwei halb-unendlichen Vollzylindern (Abbildung 2.6) zu bilden. Die Differenz ihrer Radien ($a_1 - a_2 = \Delta a$) soll infinitesimal klein sein. Zusätzlich ist die Massenverteilung über Volumenelemente $\rho(r')$ in eine Oberflächenmassenverteilung $\sigma(r') = \rho(r') \Delta a$ zu überführen, mit der Bedingung $\sigma(r') \neq 0$ für $\Delta a \rightarrow 0$. Für eine zylindrische (halb-unendliche) Schale ist die Schwerewirkung in jedem Punkt über

$$g_{z_{\text{shell}}}(r, z; \zeta) = 4G\sigma'(r') \frac{K(k)a}{(r+a)^2 + (\zeta - z)^2} \quad (2.14)$$

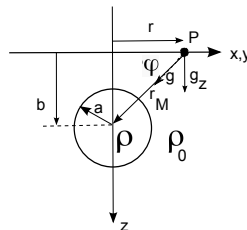


Abbildung 2.5: Wirkung einer Schwereanomalie, ausgelöst durch eine Kugel. Es ist b der Abstand von der xy -Ebene bis zum Mittelpunkt, a ist der Radius, φ der Winkel und r der Abstand vom Ursprung. Der Dichtekontrast $\Delta \rho$ zwischen Kugel und Umgebung ist die Differenz $\rho - \rho_0$.

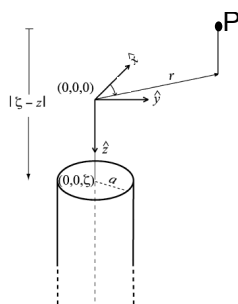


Abbildung 2.6: Halbumendlicher Zylinder mit Abstand ζ von der Nullebene und einem Beobachtungspunkt P im Abstand r von der Symmetrieachse und z von der Nullebene aus Damiata & Lee (2002b).

zu ermitteln. Dabei ist ζ der Abstand der Zylinderoberfläche zum Nullpunkt und $K(k)$ das elliptische Integral erster Art mit Modulus k (vgl. (2.17), wobei für $r' = r$, $r = a$ und $Z_v(r') = \zeta$ einzusetzen ist).

Verfolgt man den Gedanken weiter, lässt sich eine Formel ableiten, die für jeden rotationsymmetrischen Körper dessen Schwerewirkung berechnet. Die Modellierung endlich ausgedehnter Körper erfolgt dabei durch die Differenz zweier unendlich ausgedehnter Geometrien, wie in Abbildung 2.7 veranschaulicht. Die Verwendung von zwei (halb-unendlichen) Körpern ist notwendig, weil der Erste für die Definition der Oberfläche („top“ t) gebraucht wird während der Zweite die Begrenzung nach unten („bottom“ b) bildet. Zusammengefasst ergibt sich folgende Formel für beliebige Rotationskörper:

$$g_{z_{\text{RK}}}(r, z) = \int_t f(r') dr' - \int_b g(r') dr'. \quad (2.15)$$

Die Funktionen $f(r')$ und $g(r')$ sind dabei ähnlich zu (2.14), t und b stehen für die Ober- bzw. Unterseite. Aus vielen „Schalen“ erfolgt somit durch Integration (quasi Summation) die Wirkung eines massiven Körpers. Nach diesem Prinzip wird die g_z -Komponente aller nun folgenden Figuren berechnet. Falls sich die Ober- und Unterseite durch einzelne Funktionen beschreiben lassen, so ist die Gleichung (2.15) in diese Form zu bringen:

$$\Delta g_{z_{\text{RK}}}(r, z) = 4G \int_{R_1}^{R_2} \left[\frac{K(k_t)}{\sqrt{(r+r')^2 + Z_t(r') - z^2}} - \frac{K(k_b)}{\sqrt{(r+r')^2 + Z_b(r') - z^2}} \right] \Delta \rho(r') dr'. \quad (2.16)$$

Die Integralgrenzen R_1 und R_2 (siehe Abbildung 2.8) stehen für den inneren bzw. äußeren Radius der begrenzenden Flächen, z. B. gilt für Zylinder $R_1 = 0$ und $R_2 = a_{\text{Zylinder}}$. Der Dichtekontrast $\Delta \rho$ kann auch, falls konstant, vor das Integral gesetzt werden. Es ist r der Abstand von der Symmetrieachse und r' die Integrationsvariable. Die Funktion $Z_v(r')$ beschreibt die Veränderung der Oberfläche („top“ $v = t$) bzw. der Unterseite („bottom“ $v = b$) des Körpers in vertikaler Richtung in Abhängigkeit der radialen Entfernung zur Achse. Es steht

$$k_v = \sqrt{\frac{4rr'}{(r+r')^2 + Z_v(r') - z^2}} \quad (2.17)$$

für den Modulus des vollständigen elliptischen Integrals erster Art

$$K(k_v) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - k_v^2 \sin^2 \theta}} d\theta \quad 0 < k_v^2 < 1. \quad (2.18)$$

In Tabelle 2.2 sind die zur Berechnung von Zylinder, Kegel und Kegelstumpf benötigten Parameter aufgelistet. Mit den in MATLAB erstellten Programmen *cylinder_damiata*, *cone_damiata*, *frustum* und *inv_frustum*², konnten die Schweresignale in den Abbildungen 2.11 und 2.12 berechnet werden. Die Skizzen der Körper, mit den entsprechenden Parametern, sind in den Abbildungen 2.9, 2.10 und 2.6 zu sehen. Für den umgedrehten Kegelstumpf ist die Figur in 2.10 um 180° zu drehen und c und l zu vertauschen.

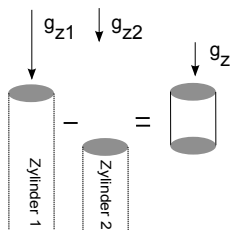


Abbildung 2.7: Schematische Abbildung: Aus den Schwerewirkungen zweier unendlich ausgedehnter Zylinder geht die eines endlich ausgedehnten durch Differenzbildung hervor.

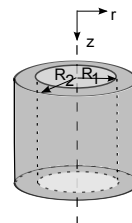


Abbildung 2.8: Beispiel für einen rotationssymmetrischen Körper. Es ist der Fall eines Hohlzylinders abgebildet, dessen Schwerewirkung auf Grundlage von Gleichung (2.16) berechnet werden kann.

Tabelle 2.2: Parameter zur Berechnung verschiedener rotationssymmetrischer Körper. Bei den Kegelstümpfen ist zu beachten, dass sich diese aus zwei Integralen (Zylinder und Kegel) zusammensetzen.

Körper	Integralgrenzen ($R_1 \rightarrow R_2$)	$Z_t(r')$	$Z_b(r')$
Zylinder	$0 \rightarrow a$	b	$b + l$
Kegel	$0 \rightarrow a_b$	$b + r' \frac{l}{a_b}$	$b + l$
Kegelstumpf Int1	$0 \rightarrow a_t$	$b + c$	$b + c + l$
Kegelstumpf Int2	$a_t \rightarrow a_b$	$b + r' \frac{c}{a_t}$	$b + c + l$
umgedrehter Kegelstumpf Int1	$0 \rightarrow a_b$	b	$b + l$
umgedrehter Kegelstumpf Int2	$a_b \rightarrow a_t$	b	$b + c + l - r' \frac{c}{a_b}$

²Hinweis: Die englischen Begriffe cone und frustum entsprechen den deutschen Kegel und Kegelstumpf.

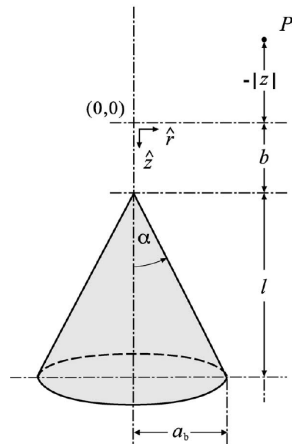


Abbildung 2.9: Schematische Darstellung eines Kegels. Es ist b der Abstand von der Nullebene, α der Öffnungswinkel, l die Länge und a_b der Durchmesser am Boden (Damiata & Lee 2002a).

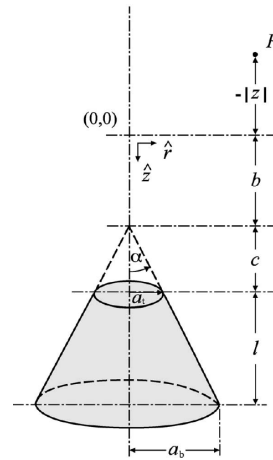


Abbildung 2.10: Schematische Darstellung eines Kegelstumpfes. Es ist b der Abstand von der Nullebene bis zur „Kegelspitze“, α der Öffnungswinkel, c der Abstand von der „Kegelspitze“ bis zum Deckel, l die Länge, a_t der Durchmesser am Deckel und a_b der Durchmesser am Boden (Damiata & Lee 2002a).

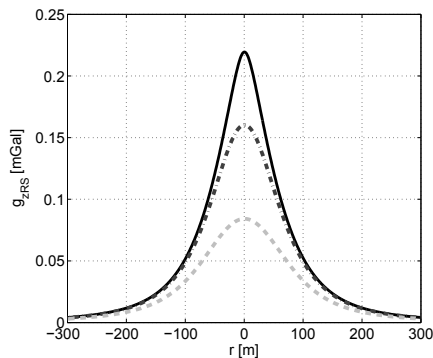


Abbildung 2.11: Schweresignal eines Kegels (durchgezogene, schwarze Linie) mit den Parametern $z = 0$ m, $b = 10$ m, $\alpha = 30^\circ$, $l = 100$ m, $\Delta\rho = 600$ kg m $^{-3}$ und $a_b = 57.7350$ m. Die weiteren Kurven zeigen das Schweresignal eines Kegelstumpfes mit $c_1 = 40$ m (schwarz gestrichelte Linie) und $c_2 = 60$ m (grau gestrichelte Linie).

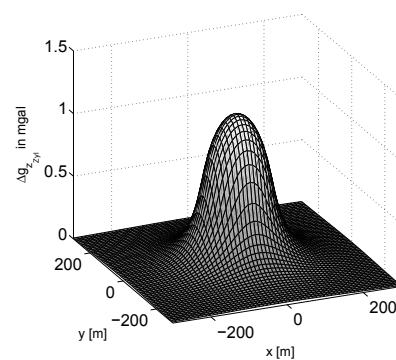


Abbildung 2.12: Die Abbildung zeigt das zweidimensionale Schweresignal eines vertikalen Zylinders. Die Parameter sind $z = 0$ m, $b = 10$ m, $a_b = 86$ m, $\Delta\rho = 600$ kg m $^{-3}$ und $l = 100$ m.

2.2.3 Polyeder

Unter einem Polyeder³ ist hier ein dreidimensionaler Körper gemeint, welcher ausschließlich durch ebene Flächen begrenzt ist, die wiederum durch mindestens drei Eckpunkte definiert sind. Zur Berechnung der Gravitationswirkung eines einfachen Polyeders, welcher aus sechs Flächen besteht, dessen Kanten parallel zu den Koordinatenachsen ausgerichtet und rechtwinklig aufeinander stehen (Quader), finden sich in Chen & Cook (1993) und Tsoulis (1999) Berechnungsformeln. Die Formel nach Tsoulis (1999) ist in dem MATLAB-Programm *accrp* umgesetzt. Für komplexere Körper, die aus vielen Flächen bestehen, gibt es in der Literatur Ansätze, wie deren gravitative Wirkung zu berechnen ist. So ist in Talwani & Ewing (1960) ein Verfahren vorgestellt, bei dem der Körper in viele dünne (horizontale) Schichten (engl. lamina) unterteilt wird, die durch unregelmäßige Polygone begrenzt sind. Deren Wirkungen im Beobachtungspunkt werden einzeln berechnet und aufsummiert. Bei Götze & Lahmeyer (1988) und Tsoulis (1999) wird die Berechnung durch die Auflösung von Volumenintegrale in Summen von Linienintegralen ausgeführt, wobei eine Transformation des Beobachtungspunktes auf die einzelnen Flächen notwendig ist. In Singh & Guptasarma (2001) ist eine Form der Berechnung dargestellt, bei der, im Gegensatz zu den bisher genannten, für jeden Punkt im Raum die gravitative Wirkung eines Polyeders berechnet werden kann ohne Rücksicht auf Sonderfälle nehmen zu müssen. Bei Tsoulis (1999) und Petrovich (1996) sind diese ausführlich dargestellt. Aufgrund der einfacheren Implementierung wird im Folgenden die Herleitung des Berechnungsverfahrens von Singh & Guptasarma (2001) gezeigt.

Das Volumenintegral (2.5) kann als ein Oberflächenintegral dargestellt werden. Gemäß des Divergenz Theorems wird (Barnett 1976)

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{g} &= -G\Delta\rho \iiint_V \nabla \cdot \left(\frac{1}{r} \frac{\mathbf{r}}{r} \right) dV \\ &= +G\Delta\rho \iint_S \frac{1}{r^2} \mathbf{r} \cdot \mathbf{u}_n ds.\end{aligned}\quad (2.19)$$

Es ist ds ein infinitesimales Oberflächenstück (siehe auch Abbildung 2.13) auf einer Ebene des Körpers im Punkt (x, y, z) , \mathbf{r} ist der Einheitsvektor in die Richtung, in welche die entsprechende Komponente von $\Delta \mathbf{g}$ berechnet werden soll und \mathbf{u}_n steht für den normierten Flächennormalenvektor. Die Integration wird über die gesamte, durch das Polygon begrenzte Fläche ausgeführt. Die Wirkung in z -Richtung wird durch Multiplikation des Integranden mit dem Term z/r erhalten. Verallgemeinert für einen Körper, welcher durch S_i Flächen begrenzt ist, ergibt sich durch

$$\Delta g_{z\text{Polyeder}} = G\Delta\rho \sum_{i=1}^{S_i} \mathbf{r}_i \mathbf{u}_i \iint_{S_i} \frac{z}{r^3} ds_i \quad (2.20)$$

die Gesamtwirkung. Der nach außen zeigende Einheitsnormalenvektor \mathbf{u}_i ist für jede, durch ein Polygon begrenzte Fläche S_i , zu berechnen.

³Der Begriff stammt aus dem Griechischen und setzt sich zusammen aus $\pi\omicron\lambda\acute{\upsilon}\zeta$ (=viel) und $\epsilon\delta\rho\alpha$ (=Sitz). Dies bedeutet so viel wie „Vielflächner“.

Für die S_i -te Fläche, welche durch ein m -eckiges Polygon beschrieben ist, sei der Positionsvektor der k -ten Ecke \mathbf{a}_{ik} . Dabei werden die Ecken entgegen dem Uhrzeigersinn, betrachtet von außerhalb des Körpers, gezählt. Die Berechnung von \mathbf{u}_i erfolgt über

$$\mathbf{u}_i = \frac{\mathbf{n}_i}{|\mathbf{n}_i|}, \quad (2.21)$$

wobei der Vektor \mathbf{n}_i durch

$$\mathbf{n}_i = \sum_{l=2}^{m-1} (\mathbf{a}_{i,l} - \mathbf{a}_{i,1}) \times (\mathbf{a}_{i,l+1} - \mathbf{a}_{i,1}) \quad (2.22)$$

ermittelt wird. Für den Fall, dass die Koordinaten einer einzelnen Ecke der Fläche (x_1, y_1, z_1) sind und die Komponenten von $\mathbf{u}_i = (l, m, n)$ (entspricht den Richtungscosine), kann das Produkt $d_i = \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{u}_i = lx_1 + my_1 + nz_1$ negativ oder positiv sein, abhängig von der Orientierung von \mathbf{r}_i bzw. \mathbf{u}_i . Deshalb ist darauf zu achten, dass die Zählrichtung der Ecken für jede Fläche gleich ist.

Auflösung der Oberflächenintegrale Die Auswertung von (2.20) erfolgt über ein Verfahren, welches in Singh & Guptasarma (1999) zur Berechnung magnetischer Felder von Polyedern entwickelt und in Singh & Guptasarma (2001) auf die Berechnung gravitativer Felder übertragen wurde. Für die genaue Herleitung sei auf diese Literatur verwiesen. In kompakter Form sind die Rechenschritte folgend vorgestellt. Für jede Fläche S_i ist mit

$$\Delta g_{z_{S_i}} = -G\Delta\rho d_i (n\Omega + mP_i - lQ_i) \quad (2.23)$$

die Berechnung der z -Komponente möglich. Wobei die Wirkung für einen Punkt P betrachtet wird, der im Ursprung liegt. Das bedeutet der Körper muss für jeden nachfolgenden Beobachtungspunkt P so verschoben werden, als ob P wiederum im Ursprung ist (vgl. Abschnitt 2.2.1). Die Größen P_i und Q_i werden für jede i -te Fläche berechnet, durch die Aufsummierung über alle polygonbegrenzenden Kanten. Seien P_{ij} und Q_{ij} für die j -te Kante der i -ten Fläche über

$$P_{ij} = IL_x \quad (2.24)$$

und

$$Q_{ij} = IL_y \quad (2.25)$$

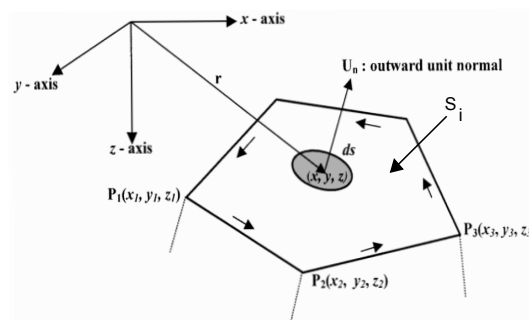


Abbildung 2.13: Sicht auf eine Fläche, welche durch ein Polygon begrenzt wird, aus Singh & Guptasarma (2001).

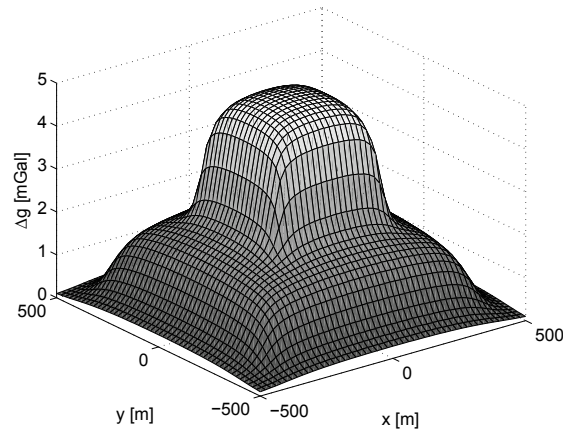


Abbildung 2.14: Darstellung des Schweresignals von zwei Polyedern (hier: Quadern). Der Mittelpunkt von Polyeder1 liegt bei $(x, y, z) = (0, 0, 25)$ m mit einer Kantenlänge von 400m in x/y -Richtung und 30 m in z -Richtung. Der zweite Polyeder hat seinen Mittelpunkt bei $(x, y, z) = (0, 0, 50)$ m und Kantenlängen von 800m in x/y -Richtung sowie 20 m in z -Richtung.

gegeben mit $L_x = x_2 - x_1$ und $L_y = y_2 - y_1$ (und $L_z = z_2 - z_1$), wobei die Koordinatentripel (x_1, y_1, z_1) und (x_2, y_2, z_2) den Anfangs- bzw. Endkoordinaten einer Kante entsprechen. Die Kantenlänge ist somit über $L = (L_x^2 + L_y^2 + L_z^2)^{1/2}$ berechenbar. Zu Berechnung von I gilt

$$I = \begin{cases} \frac{1}{L} \ln \left[\frac{\sqrt{L^2 + b + r_1^2} + L + \frac{b}{2L}}{r_1 + \frac{b}{2L}} \right] & \text{für } r_1 + \frac{b}{2L} \neq 0 \\ \frac{1}{L} \ln \left[\frac{|L - r_1|}{r_1} \right] & \text{für } r_1 + \frac{b}{2L} = 0 \end{cases} \quad (2.26)$$

Es ist $b = 2(x_1 L_x + y_1 L_y + z_1 L_z)$ und $r_1 = (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)^{1/2}$. Zum Schluss ist die Gesamtheit über Summation über alle Kanten zu bekommen mit $P_i = \sum_j P_{ij}$ und $Q_i = \sum_j Q_{ij}$. Die Größe Ω beschreibt den Raumwinkel (engl. solid angle), welcher über ein Verfahren in Singh & Guptasarma (1999) berechnet wird, das hier nicht näher erläutert wird.

Das Programm *grvmag3d*, welches auf Grundlage des eben vorgestellten Algorithmus die gravitative Wirkung berechnet, wurde von Singh & Guptasarma (2001) übernommen und für die Thematik dieser Diplomarbeit angepasst. Untersuchungen in Lorenz (2010) ergaben, dass die numerischen Ergebnisse (bei identischen Körper) mit dem eben erwähnten und einem auf der Grundlage von Tsoulis (1999) entwickeltem Programm *polygrav* identisch sind. Die benötigten Rechenzeiten weichen jedoch erheblich voneinander ab. Für die Berechnung von 16 000 Beobachtungspunkten (wie es ein Gebiet von 16 km² mit einer Abtastrate von 1 m darstellt) benötigt das Programm *grvmag3d* 16 s, während es bei *polygrav* 0,4 s sind. Wie in den folgenden Kapiteln gezeigt, ist bei der Verwendung eines Genetischen Algorithmus eine möglichst kurze Berechnungszeit sehr wichtig. Aus diesem Grund wird für Arbeit *polygrav* verwendet. In Abbildung 2.14 ist die vertikale Komponente eines Schweresignals berechnet, basierend auf dem eben genannten Programm.

2.3 Validierung der Programme

Die bisher aufgeführten Formeln sind in MATLAB-Programmen umgesetzt worden. Ein wichtiger Bestandteil, im Rahmen der Programmierung, ist die Kontrolle der Ergebnisse. Diese Überprüfung erfolgte, indem die berechneten Werte mit denen aus bereits bestehenden Programmen verglichen wurden. Falls kein entsprechendes Programm vorlag, so erfolgte die Verifikation anhand von Sonderfällen, für die geschlossene Formeln existieren. Als Bewertungsgröße wird im Folgenden immer der relative Fehler, definiert über

$$f_{\text{rel}} = \frac{A(\text{Programm1}) - B(\text{Programm2})}{A(\text{Programm1})} \quad (2.27)$$

untersucht. Die Größen A und B stehen hier stellvertretend für die berechneten Werte der jeweils verwendeten Programme.

2.3.1 Test des Programms für die Schwerewirkung eines polygonalen Querschnitts

Um die Ergebnisse aus dem Programm *g_zpoly* zu verifizieren, wurde das Java-Applet *Mod2D* von Schmidt (2010) verwendet. Das Ergebnis ist in Abbildung 2.15 zu sehen. Aufgrund einer Beschränkung im Java-Programm auf maximal 8 Nachkommastellen ist das Resultat nur bis 10^{-8} genau. Ein anderer Vergleich beruht auf der Formel für einen in y -Richtung unendlich langen, horizontalen Zylinder (Telford et al. 1976) mit Mittelpunkt $x = 0$ und $z = b \geq a$, der über

$$\Delta g_{\text{Zylinder}} = \frac{2G\Delta\rho b\pi a^2}{x^2 + b^2}, \quad (2.28)$$

mit b = Tiefe bis Zylindermitte, a = Radius und x = Abstand vom Mittelpunkt berechnet wird. Die Annäherung erfolgt in *g_zpoly* mit einem Polygon bestehend aus 100 000 Punkten. Das Ergebnis in Abbildung 2.16 hat einen relativen Fehler im Bereich von 10^{-10} . Diese Vergleiche zeigen, dass das Programm hinreichend genau arbeitet.

Schließlich ist nachzuprüfen, wie groß die relativen Abweichungen für verschiedene Längen- zu Breitenverhältnisse eines endlichen Quaders im Vergleich zum polygonalen Querschnitt sind. Dafür wurde der Querschnitt aus Abbildung 2.15 untersucht und mit dem MATLAB-Programm *accrrp*⁴ die Komponente Δg_z eines Quaders mit demselben Querschnitt, jedoch unterschiedlichen Ausdehnungen in die y -Richtung erzeugt. In Abbildung 2.17 sind vier verschiedene Verhältnisse betrachtet worden. Es hat sich gezeigt, dass bei einem Verhältnis von 1:5 (Breite:Länge) der relative Fehler im Bereich von 10^{-2} liegt. In der Literatur (Alvers 1998, Grant & West 1965) wird dieses Verhältnis, als „genau genug“ bezeichnet, wobei der Anwender entscheiden muss ob für seinen Fall diese Genauigkeit ausreicht.

⁴Dieses Programm kann die Schwerewirkung eines beliebigen Quaders berechnen.

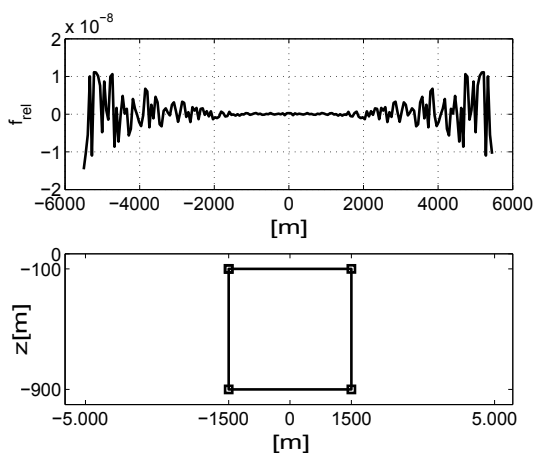


Abbildung 2.15: Relativer Unterschied zwischen den Programmen Mod2D und gz_poly. Die Geometrie des Querschnittes ist in der unteren Abbildung zu sehen, der verwendete Dichtekontrast beträgt $\Delta\rho = 600 \text{ kg m}^{-3}$ und die, vom Java-Programm fest vorgegebene, Gravitationskonstante $G = 6.670 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2} \text{ kg}^{-1}$.

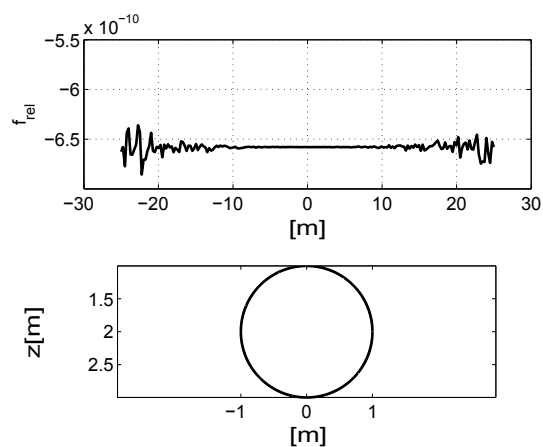


Abbildung 2.16: Vergleich einen unendlichen Zylinders mit einem Polygon aus 10^5 Punkten. Dichtekontrast und Gravitationskonstante sind gleich wie in Abbildung 2.15, der Radius ist $a = 1 \text{ m}$ und die Tiefe $b = 2 \text{ m}$.

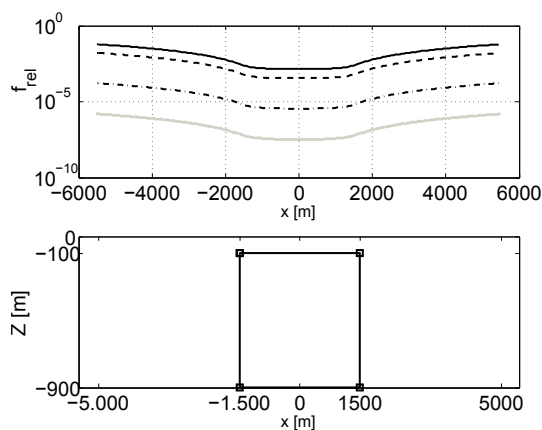


Abbildung 2.17: Vergleich eines quadratischen, polygonalen Querschnitts mit einem endlichen Quader. Die Länge des Quaders wird mit der Ausdehnung entlang der x -Achse bezeichnet. Die Breite verläuft in Richtung der y -Achse, hier negativ in die Ebene hinein bzw. positiv heraus. Das Verhältnis von Länge zu Breite (1:B) erfolgt, von der obersten Kurven an abwärts, in den Schritten $B = 5, 10, 10^3, 10^5$. Sonstige Einstellungen wie beim Körper in Abbildung 2.15.

2.3.2 Test der Programme für Rotationskörper

Bei der Berechnung des relativen Fehlers für den Zylinder wurde das MATLAB-Programm *accoutsphereV2*⁵ verwendet, welches auf den Formeln von Tsoulis (1999) beruht. Die Vergleiche von Kegel und Kegelstumpf erfolgten für den Sonderfall, dass sich der Beobachtungspunkt P entlang der Symmetrieachse (z -Achse) bewegt, d. h. für $r = 0$. Die dafür notwendigen Formeln sind in Duska (1958) und Damiata & Lee (2002a) zu finden. Für den Kegel gilt

$$g_{z_{KE}} = 2\pi G\rho \left[l - (\hat{A} - (b - z)) \cos^2 \alpha + (b - z) \sin^2 \alpha \cos \alpha \right. \\ \left. \times \ln \frac{(b - z)(1 + \cos \alpha)}{\hat{A} + \sqrt{a_b^2 + l^2 + (b - z) \cos \alpha}} \right], \quad (2.29)$$

mit

$$\hat{A} = \sqrt{a_b^2 + (b - z + l)^2}. \quad (2.30)$$

Für den Kegelstumpf ist

$$g_{z_{KS}} = 2\pi G\rho \left[l - (A - B) \cos^2 \alpha + (b - z) \sin^2 \alpha \cos \alpha \right. \\ \left. \times \ln \frac{B + \sqrt{a_t^2 + c^2 + (b - z) \cos \alpha}}{A + \sqrt{a_b^2 (c + l)^2 + (b - z) \cos \alpha}} \right], \quad (2.31)$$

mit

$$A = \sqrt{a_b^2 + (b - z + c + l)^2}, \quad (2.32)$$

$$B = \sqrt{a_t^2 + (b - z + c)^2}. \quad (2.33)$$

Der umgedrehte Kegelstumpf ist dann mit

$$g_{z_{UKS}} = 2\pi G\rho \left[l - (B - D) \cos^2 \alpha + (b - z + c + l) \sin^2 \alpha \cos \alpha \right. \\ \left. \times \ln \frac{B \cos \alpha - (b - z + l) + (b - z + c + l) \sin^2 \alpha}{D \cos \alpha - (b - z) + (b - z + c + l) \sin^2 \alpha} \right], \quad (2.34)$$

zu berechnen und es ist

$$B = \sqrt{a_b^2 + (b - z + l)^2}, \quad (2.35)$$

$$D = \sqrt{a_t^2 + (b - z)^2}. \quad (2.36)$$

Die dabei enthaltenen Paramatern sind gemäß Abschnitt 2.2.2 definiert. Es ist zu beachten, dass diese Formeln keine Gültigkeit haben, wenn man sich innerhalb des Körpers befindet. Die relativen Abweichungen, getestet für die Programme der vorgestellten Körper, ergaben jeweils einen Wert im Bereich von 10^{-14} . Somit liegt kein Fehler in der Programmierung vor und die Genauigkeit ist hinreichend gewährleistet.

⁵Mit diesem Programm kann die Schwerewirkung eines Zylinders in jedem Punkt des Raumes berechnet werden.

2.3.3 Test der Programme für Polyeder

Für den Vergleich wurde die Schwerewirkung der in Abbildung 2.14 beschriebenen Figur sowohl als Polyeder als auch aus der Überlagerung von zwei Quadern berechnet. Als Ergebnis (relativer Unterschied) ergaben sich Werte im Bereich von 10^{-12} . Das zugehörige Schaubild wird, aufgrund der Ähnlichkeit mit 2.15 und 2.16 nicht gezeigt. Weitere numerische Untersuchungen, d. h. Vergleich der Ergebnisse der Programme *polygrav* und *grvmag3d* sind bei Lorenz (2010) finden, wie am Ende von Abschnitt 2.2.3 beschrieben.

Für einen Einsatz im Rahmen des Genetischen Algorithmus wird das Programm *polygrav* verwendet aufgrund seines deutlich geringeren Rechenaufwandes.

Kapitel 3

Optimierungsmethoden

In Kapitel 2 wurde gezeigt, wie sich die Schwerewirkung von Körpern mit bekannter Geometrie berechnen lässt. In Kapitel 4 ist die Kenntnis um das Schweresignal vorausgesetzt, die Geometrie der Störkörper jedoch unbekannt. Aus diesem Grund wird ein Verfahren vorgestellt, dass die Anpassung dieser Modelle, durch Parametervariation, an die Messwerte ermöglicht. Der Inhalt dieses Kapitels beschäftigt sich damit, wie diese Aufgabe in Verbindung mit Optimierungsverfahren gelöst werden kann.

3.1 Optimierung und Inversion

Das Ziel jeglicher Optimierung besteht darin ein gegebenes Problem im Rahmen gewisser Grenzen bestmöglich zu lösen. Es ist dafür so zu formulieren, dass es in Abhängigkeit von n (freien) Parametern $\mathbf{P} = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ beschrieben werden kann. Diese werden im Rahmen einer Optimierung derart verändert, dass deren Auswertung durch eine Bewertungsfunktion, im Weiteren als Kostenfunktion $K(\mathbf{P}) \in \mathbb{R}^1$ bezeichnet, ein Minimum bzw. Maximum annimmt. In einem iterativen Prozess werden immer wieder neue Parameter generiert und eine erneute Auswertung der Kostenfunktion vorgenommen, bis ein bestimmtes Abbruchkriterium erreicht wird. Das zugehörige Ablaufdiagramm ist in Abbildung 3.1 zu sehen.

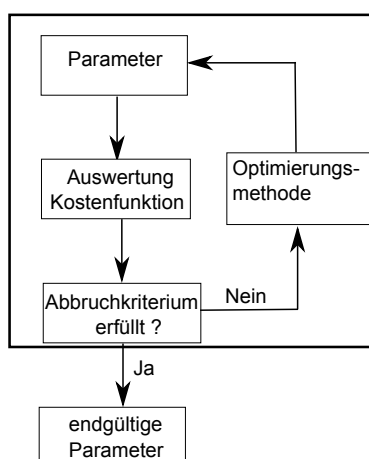


Abbildung 3.1: Darstellung des schematischen Ablaufes einer Optimierung. Der Vorgang im schwarz umrandeten Kasten deutet einen Optimierungsdurchlauf an. Der Prozess der Optimierung wird erst abgebrochen, wenn ein vorab definiertes Abbruchkriterium erreicht wird.

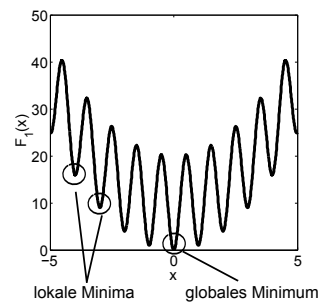


Abbildung 3.2: Darstellung der Rastrigin-Funktion für $v = 1$. Es sind viele lokale Minima und das globale Minimum an der Stelle 0 zu erkennen.

Dieses allgemeine Vorgehen ist auf die Problemstellung der inversen Modellierung wie folgt zu übertragen: Finde zu (linien- oder flächenhaft) beobachteten, relativen Schwerewerten Δg_b die passende Körpergeometrie. Die dabei zu optimierenden Parameter sind in diesem Fall (vgl. Kapitel 2) entweder Körperparameter oder Körperkoordinaten. Für jeden Parametersatz besteht die Auswertung darin, ein synthetisches Schweresignal Δg_s zu berechnen. Die Kostenfunktion ist der rms-Wert¹ aus beobachteten und berechneten Schwerewerten. Sie wird berechnet über

$$K = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^M (\Delta g_{b_i} - \Delta g_{s_i})^2}{M}} \quad (3.1)$$

mit M als Anzahl der Messpunkte. Wie in der Einleitung bereits erwähnt, existieren (unendlich) viele Körper, die exakt dasselbe Signal erzeugen. Deshalb können ohne (geologisch-geophysikalisch) sinnvolle Restriktionen unter Umständen unbrauchbare Ergebnisse entstehen. Diese Restriktionen sind durch Voruntersuchungen zu ermitteln. Des Weiteren ist es möglich, dass die Kostenfunktion für verschiedene Parameterkonstellationen lokale Minima/-Maxima besitzt. In Abbildung 3.2 ist dieser Umstand anhand des Graphen der sogenannten Rastrigin-Funktion (MathWorks 2010) demonstriert, deren Funktionswerte sich über

$$F_v(\mathbf{x}) = 10v + \sum_{\mu=1}^v x_{\mu}^2 - 10 \cos(2\pi x_{\mu}) \quad (3.2)$$

berechnen lassen und viele lokale Minima, jedoch nur ein globales Minimum aufweisen. Die Variable v gibt die Dimension des Vektors $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_v)$ an.

Bei den Optimierungsverfahren unterscheidet man zwei Gruppen (Alvers 1998). Bei den einen werden lokale Informationen der Kostenfunktion verwendet und bei den anderen der gesamte Parameterraum stochastisch² abgesucht. Die Verwendung von lokalen Informationen, z. B. die des Gradienten, birgt die Gefahr einer vorzeitigen Konvergenz auf ein lokales Optimum. Dieses Gebiet kann nicht mehr verlassen werden, weil jede Änderung, die sich vom lokalen Minimum/Maximum entfernt eine Verschlechterung bedeuten würde. Deshalb wird in der Arbeit ein Verfahren eingesetzt, welches in der Lage ist ein lokales Optimum zu verlassen und das Globale zu finden. An dieser Stelle sei angemerkt, dass jedes Maximierungsproblem durch ein Minimierungsproblem ausgedrückt werden kann und umgekehrt durch Vorzeichenwechsel.

¹root mean square

²altgr. $\sigma\tau\omicron\chi\omicron\zeta$ = Vermutung

Tabelle 3.1: Ga Terminologie.

Bezeichnung	Bedeutet ...
Individuum	Kleinste Einheit und Träger des Erbmaterials
Generation	Die Menge aller Individuen zu einem (festen) Zeitpunkt
Population	Gesamtheit aller Individuen in einer Generation
Chromosom	Individuum der Population
Gen	Besteht aus Bits (0 oder 1), wenn binäre Kodierung vorliegt
Allel	Genausprägung (0 oder 1)
Genotyp	Kodierte Lösung
Phänotyp	Dekodierte Lösung
Elter	Individuum, dass seine Gene an die nächste Generation weiter vererbt

3.2 Optimierungsverfahren – Der Genetische Algorithmus

Der genetische Algorithmus setzt an der untersten Ebene der Evolution, der Vererbung von Genen, an. Diese sind über die Individuen der (Start-)Population verteilt und werden durch Imitation eines evolutionären Prozesses optimiert, d. h. die Bestangepassten überleben³. Anhand des binären Ga, wie bei Goldberg (1989), Nissen (1997) und Haupt & Haupt (2004) beschrieben, werden die prinzipiellen Vorgänge vorgestellt, die sich dadurch gut veranschaulichen lassen. Auf Erweiterungen dieses einfachen Ga wird in den späteren Abschnitten und Kapiteln näher eingegangen. Bezeichnungen im Zusammenhang mit Ga entstammen der Biologie und sind in Tabelle 3.1 aufgeführt.

Aufbau von Chromosomen und Genen

Ein einzelnes Chromosom C einer Population besteht aus N_G Genen G mit

$$C = [G_1 G_2 G_3 \cdots G_{N_G}],$$

wobei die einzelnen Gene jeweils für einen zu optimierenden Parameter stehen. Jedes Gen setzt sich wiederum aus N_B Bits B zusammen über

$$G = [B_1 B_2 B_3 \cdots B_{N_B}].$$

Zusammengefasst kann ein Individuum beispielsweise wie folgt aufgebaut sein,

$$C = [\underbrace{0110}_{G_1} \underbrace{1001}_{G_2} \underbrace{1010}_{G_3}]$$

mit $N_G = 3$ und $N_B = 4$.

³In Anlehnung an des von Charles Darwin benutzten Satzes „Struggle for life“ bzw. „Survival of the fittest“.

Genotyp und Phänotyp

Diese biologischen Bezeichnungen stehen für die genetische Ausstattung (Genotyp) und dem Erscheinungsbild (Phänotyp) jedes Individuums. Während die Kostenfunktion anhand von kontinuierlichen Parametern (Phänotyp) ausgewertet wird, ist für den Ga eine binäre Darstellung (Genotyp) notwendig.

Für die Kodierung (dezimal \rightarrow binär) eines Parameters p_k mit $1 \leq k \leq n$ und n als Anzahl der Parameter, ist es notwendig einen Definitionsbereich zu wählen. Hierfür ist eine obere (O_k) bzw. untere (U_k) Grenze festzulegen. Der nächste Schritt besteht darin, N_G und damit die zu erreichende Präzision der Parameter festzulegen. Wählt man beispielsweise den Definitionsbereich $[-1, 2]$ mit einer Schrittweite von 0,1, so ergeben sich insgesamt 30 Teilintervalle. Setzt man $N_G = 5$ ($2^4 < 30 < 2^5$) und $-1 \equiv 00000$ bzw. $2 \equiv 11111$, werden die übrigen Werte linear über den Definitionsbereich verteilt.

Die Dekodierung (binär \rightarrow dezimal) erfolgt über (Nissen 1997):

$$\Gamma(B_1, B_2, \dots, B_{N_B}) = U_k + \frac{O_k - U_k}{2^{N_B} - 1} \left(\sum_{z=1}^{N_B} B_{N_B-z+1} 2^{z-1} \right). \quad (3.3)$$

Wendet man (3.3) auf das Gen 11001 des obigen Beispiels an, so würde sich

$$\Gamma(11001) = -1 + \frac{2 - (-1)}{2^5 - 1} \left(\sum_{z=1}^5 B_{5-z+1} 2^{z-1} \right) \approx 1,4$$

ergeben. Die Nachteile dieser Vorgehensweise liegen im Genauigkeitsverlust im Rahmen der Kodierung. Des Weiteren lässt sich das (wahre) Optimum durch die Diskretisierung im Allgemeinen nur Annähern. Die Alternative dazu besteht in der Verwendung von Fließkommazahlen (kontinuierlicher GA), d. h. man bedient sich der internen Rechengenauigkeit des Computers. Trotzdem gibt es Anwendungen (Chen et al. 2006) in denen auf die binäre Darstellung zurückgegriffen wird. Eine allgemeine Aussage, welche Methode die bessere ist, kann nicht getroffen werden, sondern hängt stark vom gegebenen Problem ab. In dieser Arbeit hat sich der Einsatz des kontinuierlicher GA als besonders geeignet erwiesen.

3.2.1 Allgemeiner Ablauf des Ga

In diesem Abschnitt sind die einzelnen Schritte eines (einfachen) binären Ga beschrieben. Werden in den nachfolgenden Abschnitten bzw. Kapiteln Erweiterungen benutzt, so gibt es jeweils eine entsprechende gesonderte Beschreibung. Als grobe Übersicht dient das Ablaufdiagramm in Abbildung 3.3. Die Schritte werden im Folgenden gesondert erklärt.

Schritt 0: Initialisierung

Zu Beginn des Ga legt man die Urpopulation an. Dazu wird die Anzahl an Individuen N_I bestimmt, die Anzahl der Bits pro Gen und der Definitionsbereich der Parameter. Ein Zufallsgenerator erzeugt dann für jedes Gen/Individuum eine Reihe von Nullen und Einsen, so dass der durch die Parameter aufgespannte Suchraum möglichst gut abgedeckt wird.

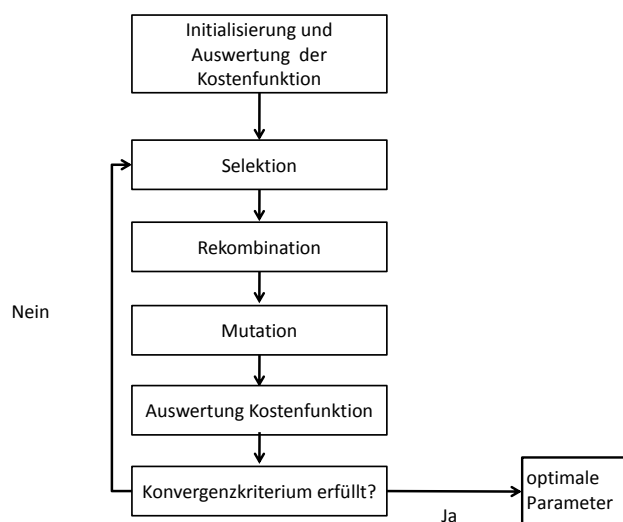


Abbildung 3.3: Schematischer Ablauf des Genetischen Algorithmus.

Schritt 1: Bewertung der Population

Entscheidendes Merkmal eines Individuums in der Natur ist seine Fitness, d. h. je besser angepasst desto höher ist die Überlebenschance und damit die Wahrscheinlichkeit der Weitervererbung seiner Gene. Im Algorithmus entspricht dies der Auswertung der Kostenfunktion, angewandt auf die dekodierten Werte eines Chromosoms $K(\Gamma(C_k))$. Die beste Fitness entspricht hier den geringsten Kosten.

Schritt 2: Selektion

Für die Vererbung wird nun ein gewisser Teil der Population ausgewählt (selektiert), wobei es unterschiedliche Ansätze gibt. Der Naheliegende besteht darin, die Individuen nach ihren Kosten zu sortieren und anschließend daraus die Eltern der nachfolgenden Population zu bestimmen.

Für die Bestimmung der Eltern ist hier, aufgrund der Anschaulichkeit, das sogenannte Glücksrad-Verfahren (roulette wheel) beschrieben. Zuerst wird dafür jedem Individuum C_k mit $1 \leq k \leq N_I$ ein kostenproportionaler Wert zugewiesen über die Formel

$$\alpha_k(C_k) = \frac{K(\Gamma(C_k))}{\sum_{j=1}^{N_I} K(\Gamma(C_j))}. \quad (3.4)$$

Als nächstes wird das Intervall $[0, 1[$ in N_I Abschnitte aufgeteilt, wobei jeder so breit wird wie der zugehörige Wert α_k . Im Anschluss daran werden Zufallszahlen im Intervall $[0, 1[$ generiert. Als Elter wird dann jedes Individuum genommen in dessen Abschnitt die Zufallszahl liegt.

Dieses wird dann in den sogenannten *mating pool* gelegt. Dieser Vorgang wird N_I -mal wiederholt, somit hat jedes Individuum einen Erwartungswert, wie oft es im *mating pool* liegt, von $N_I \cdot \alpha_k(C_k)$.

Aus diesem Topf werden die Eltern E , mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{N_I}$, ohne Zurücklegen gezogen. In den nächsten beiden Schritten entstehen daraus die Nachkommen.

Schritt 3: Rekombination

Der Vorgang Nachkommen zu zeugen geschieht über die Rekombination, dem sogenannten *Crossover* (CO). Häufige Verwendung finden dabei *Single-Point*-, *Two-Point*- oder auch *Multi-Point-Crossover*. Der prinzipielle Vorgang bei allen drei Methoden ist ähnlich und anhand des *Single-Point-Crossover* erklärt.

Für die Zeugung von zwei Nachkommen $N1, N2$ wird ein Elternpaar $E1, E2$ benötigt. Dafür wird zuerst eine a priori Wahrscheinlichkeit p_{CO} festgelegt, ob ein CO stattfinden soll. Im Anschluss daran wird eine Zufallszahl $U \in [0, 1[$ generiert, falls $U \leq p_{CO}$ findet ein CO statt. Gilt $U > p_{CO}$, so gehen die Eltern unverändert in die Nachkommen über, d. h. $E1=N1$ und $E2 = N2$. Soll ein Austausch stattfinden, so wird durch einen stochastischen Prozess ein CO-Punkt generiert. Diese Zahl gibt die Stelle an, ab der ein Austausch zwischen den Eltern stattfindet, wie in Abbildung 3.4 grafisch veranschaulicht. Aus den beiden Eltern $E1$ und $E2$ entstehen dann die Nachkommen $N1$ und $N2$. Es wird dabei keine Rücksicht auf die einzelnen Gene genommen, sondern immer das ganze Chromosom betrachtet. Bei den anderen CO Verfahren werden entsprechend mehr Punkte (≥ 2) gewählt, ab denen ein Austausch stattfindet. Das Ziel dabei ist, einen möglichst großen Suchraum mit ein zu beziehen.

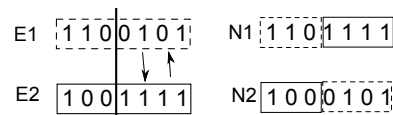


Abbildung 3.4: Beispiel für ein *Single-Point-Crossover*: Zwischen den Chromosomen beider Eltern findet hier ein Austausch ab der vierten Stelle statt.

Schritt 4: Mutation

Durch Mutationen können bei Lebewesen neue Arten entstehen, die besser aber auch schlechter an die Umgebung angepasst sind. Im GA werden zu diesem Zweck bei den Nachkommen einzelne, ausgewählte Bits invertiert. Der Vorgang ist wichtig um „neues Blut“ in den Prozess einfließen zu lassen und dient letztendlich dazu eine vorzeitige Konvergenz auf ein lokales Minimum zu verhindern.

Damit die Mutation nicht dominiert, wird diese nur mit einer geringen Wahrscheinlichkeit α_m eingesetzt. Typische Werte sind $\alpha_m = 0,01$ bzw. $\alpha_m = 0,001$. Ein Bit wird invertiert falls für eine Zufallszahl $U \in [0, 1[$ gilt $U \leq \alpha_m$. In Abbildung 3.5 ist dies am Beispiel eines Nachkommen demonstriert.

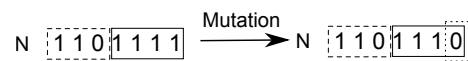


Abbildung 3.5: Beispiel für die Mutation eines Nachkommen, wobei das letzte Bit invertiert wird.

In die nächste Generation werden eine vorher festgelegte Zahl an „Altindividuen“ übernommen und der Rest mit den Nachkommen aufgefüllt, bis die Population wieder ihre Ausgangsgröße hat.

Schritt 5: Auswertung der Kosten und Überprüfen der Konvergenz

In der neuen Generation werden wiederum die Kosten ermittelt. Wird eines der folgenden Abbruchkriterien erfüllt so endet der GA, ansonsten beginnt er von Neuem. Mögliche Abbruchkriterien sind:

- Erreichen einer festgelegten Anzahl an Generationen
- Überschreitung eines festgelegte Zeitbudgets
- Die gefundene Lösung kann über einen längeren Zeitraum nicht verbessert werden
- Kein erkennbarer Fortschritt, weil sich die Individuen an einzelnen Bitpositionen nicht mehr ändern

Bei Abbruch werden die aktuellen Parameter als die „Optimalen“ betrachtet und ausgegeben. Aufgrund des Einsatzes von Zufallszahlen genügt es nicht ein einzelnes Ergebnis zu betrachten, sondern es sollten immer mehrere Durchläufe generiert werden. Am Ende sind diese dann zu mitteln.

Erweiterungen, im Sinne von verschiedenen Selektions-, CO- oder Mutationsvarianten, des oben beschriebenen einfachen GA gibt es in der Literatur viele. Sie sind entstanden, weil bis heute keine verlässlichen theoretischen Grundlagen existieren (Weicker 2002) auf deren Basis der optimale GA für ein gegebenes Problem gewählt werden kann. Wie schon erwähnt, werden aus diesem Grund in den später durchgeführten Simulationen auch verschiedene Strategieparameter getestet und diese an gegebener Stelle erklärt. Eine Möglichkeit die Ergebnisse zu verbessern ist der sogenannte hybride GA. Hybrid bedeutet in diesem Zusammenhang, dass die Nachschaltung eines *lokalen* Optimierers erfolgt. Die vom GA gefunden Lösungen sind zugleich die Startwerte des *lokalen* Optimierers. Dabei wird angenommen, dass die GA Lösung bereits nahe genug am globalen Optimum liegt. Für diesen Fall konvergiert der lokale Optimierer schneller zur optimalen Lösung als der GA. Untersuchungen von Alvers (1998) haben gezeigt, dass sich die sogenannte *Downhill-Simplex Methode* besonders eignet. Aus diesem Grund wird das Verfahren in Abschnitt 3.3 vorgestellt. Desweiteren wird im weiteren Verlauf der kontinuierliche GA benutzt. Neueste Untersuchungen (Haupt & Haupt 2004) deuten darauf hin, dass dieser sich besser für die Optimierung eignet. Der Unterschied zum binären GA besteht hauptsächlich darin, dass die Gene nicht durch Bits sondern Fließkommazahlen repräsentiert werden und somit die interne Präzession des Computers benutzt werden kann. Das Vorgehen, wie in Schritten 1 - 5 beschrieben, muss entsprechend angepasst werden; so besteht nicht mehr die Notwendigkeit eine Kodierung bzw. Dekodierung. Der beschriebene Ablauf bleibt jedoch gleich.

Im Rahmen der Arbeit wurde die GA-Toolbox in MATLAB verwendet. Die Einstellungen werden in der Hilfefunktion und im User's Guide (MathWorks 2010) ausführlich erläutert.

3.3 Downhill-Simplex Methode

Der Algorithmus (Downhill-Simplex-Method DSM), bietet sich in Kombination mit dem GA an, weil beide auf *Funktionswerten* basieren. Er ist im Original bei Nelder & Mead (1965) beschrieben. Das Verfahren dient dazu eine Funktion, abhängig von n Variablen (entspricht Größe des Parameterraumes), zu minimieren. Das Verfahren kann sich dabei den lokalen Gegebenheiten der Kostenfunktion sehr gut anpassen, wobei angemerkt werden muss, dass keine globale Suche durchgeführt wird, womit auch eine vorzeitige Konvergenz eintreten kann. Das bei Nelder & Mead (1965) sehr ausführlich beschriebene Verfahren soll hier in den wesentlichen Teilschritten dargestellt werden.

Ein Simplex ist, mathematisch betrachtet, der „einfachste“ Körper in einem n -dimensionalem Raum (Bronstein et al. 2001). Er besitzt in diesem Fall genau $n + 1$ -Ecken. Ein Beispiel wäre ein Tetraeder mit 4 Eckpunkten im 3-dimensionalen Raum, wobei beim DSM i. d. R. jedoch kein regulärer Körper entsteht.

Der Körper wird, ausgehend von einem Startvektor \mathbf{S} , durch n Vektoren \mathbf{V}_i aufgebaut. Diese berechnen sich über

$$\mathbf{V}_i = \mathbf{S} + \lambda \mathbf{e}_i, \quad \forall i = 1, \dots, n \quad (3.5)$$

mit λ als skalaren Parameter (bestimmt die Größe des Simplex) und \mathbf{e}_i dem Einheitsvektor in der jeweiligen Dimension. Mit diesem Satz von $n + 1$ Vektoren wird folgende Prozedur durchgeführt (siehe auch Abbildungen 3.6 - 3.9):

- Ermittle den Vektor \mathbf{W} mit den maximalen Kosten aus der Menge $\mathbf{W} \in \{\mathbf{S}, \mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_n\}$ (Abbildung 3.7).
- **Reflexion:** Der Vektor \mathbf{W} wird in die Richtung des Vektordurchschnitts \mathbf{D} der n verbliebenen Vektoren (Abbildung 3.7) gespiegelt. Es ist \mathbf{W} mit einem vorher festzulegenden Reflexionsfaktor F_r zu multiplizieren.
- **Expansion:** Ist die Spiegelung erfolgreich, so wird \mathbf{W} zusätzlich expandiert (Abbildung 3.8), d. h. mit einem Faktor F_e multipliziert. Falls im neuen (expandierten) Punkt die Kosten höher sind, wird dieser verworfen. Der neue Simplex wird einer erneuten Reflexion unterzogen (Abbildung 3.9), falls der neue Punkt in einem Gebiet mit höheren Kosten zum liegen kommt.
- **Kontraktion:** War die Reflexion nicht erfolgreich, so wird \mathbf{W} in Richtung des Vektordurchschnittes bewegt, also die Länge verkleinert. Mit einem Faktor F_c wird bestimmt wie weit sich der Vektor bewegt.

Der Algorithmus endet, falls keine der oben genannten Operationen zu geringeren Kosten führt bzw. nach einigen Iterationen die gleiche Position erreicht wird. Somit wurde ein (möglicherweise globales) Optimum gefunden und das Simplex degeneriert zu Null. Die Realisierung des DSM ist in MATLAB über die Funktion *fminsearch* implementiert und wird im Rahmen der Arbeit eingesetzt.

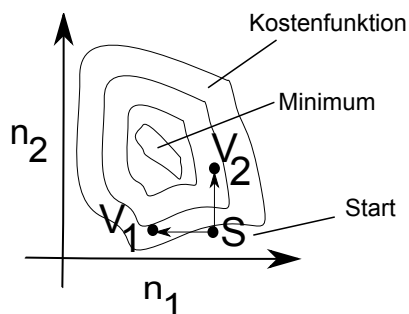


Abbildung 3.6: In dieser Ausgangssituation im 2-dimensionalen Raum sind die Isolinien einer Kostenfunktion zu sehen. Des Weiteren sind die Startposition und die nach (3.5) erzeugten Vektoren V_1 und V_2 abgebildet.

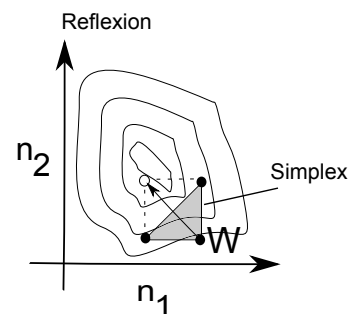


Abbildung 3.7: Reflexion des Vektors W am sogenannten Vektordurchschnitt D .

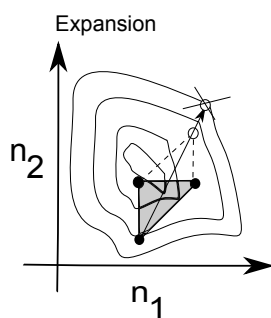


Abbildung 3.8: Bei der Expansion wird ein Punkt auserwählt, welcher nicht zu einer Verschlechterung im Rahmen der Optimierung führt.

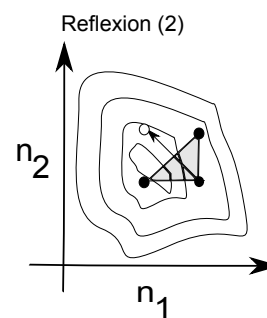


Abbildung 3.9: Es findet eine erneute Reflexion statt um einen Punkt mit geringeren Kosten zu finden.

3.4 Verwendung des GA und DSM am Beispiel der Rastringin-Funktion

Ausgangspunkt ist die Funktion wie in Gleichung (3.2) beschrieben. Untersucht werden soll, wie sich GA und DSM dazu eignen, für diesen Fall das globale Minimum zu finden.

Die Anzahl der zu optimierenden Parameter wird durch die Wahl von ν bestimmt. Dieser Wert spiegelt die Dimension des Vektorraumes und somit die Größe von \mathbf{x} wider. Der berechnete Funktionswert entspricht gleichzeitig den Kosten, somit entfällt die Berechnung des rms-Wertes (Gleichung (3.1)). Das globale Optimum befindet sich im Koordinatenursprung und ist der Nullvektor $\mathbf{x}_O = \mathbf{0}$, wobei $\mathbf{x}_O \in \mathbb{R}^\nu$. Durch dieses Vorwissen können direkte Aussagen über die Qualität der Ergebnisse getroffen werden.

Für folgenden Fall wird der \mathbb{R}^{10} betrachtet. Es ist demnach jeder Wert des Vektors $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_{10})$ zu optimieren. Untersucht wurden GA, GA & DSM (hybrid) sowie nur DSM. Für die Berechnungen wird die GA-Toolbox von MATLAB eingesetzt mit

- einer Populationsgröße von 100,
- einem Two-Point-CO,
- den Intervallgrenzen von $[-100, 100]^4$
- und den Abbruchkriterien von maximal 1000 Generationen bzw. einer Änderung des Funktionswertes, der kleiner als 10^{-16} ist.

Die weiteren Werte wurden auf *Standard* gesetzt (MathWorks 2010). In Abbildung 3.11 ist das Mittel aus 10 Durchläufen zu sehen, wobei die optimierten Parameter einmal ohne bzw. mit DSM in einer Grafik aufgetragen sind. Die mittlere Generationenzahl, bei der abgebrochen wurde, lag bei etwa 500. In Abbildung 3.10 ist ein Durchlauf herausgegriffen worden. Es sind dabei die mittleren bzw. besten Kosten über die Generationen aufgetragen; dabei ist gut zu erkennen wie rasch sich der GA in den ersten Generationen auf das Minimum zu bewegt und dann immer weiter abflacht.

Wird nun versucht, mit einem Startvektor \mathbf{x}_S mit $x_i = 100 \forall 1 \leq i \leq 10$, nur DSM einzusetzen, ist in Abbildung 3.12 zu erkennen, wie stark die Kostenfunktion und Parameter von Null abweichen. In beiden Fällen wäre das Minimum Null.

⁴Das entspricht den Startvektoren $\mathbf{x}_U = (-100, \dots, -100)$ für die untere und $\mathbf{x}_O = (100, \dots, 100)$ für die obere Grenze.

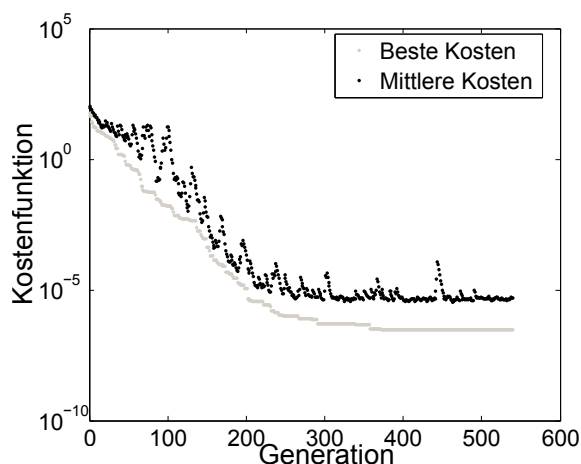


Abbildung 3.10: Zu sehen ist ein einzelner GA Durchlauf, bei dem der beste bzw. mittlere Wert der Kostenfunktion (hier die Rastringin-Funktion) in jeder Generation gezeigt wird.

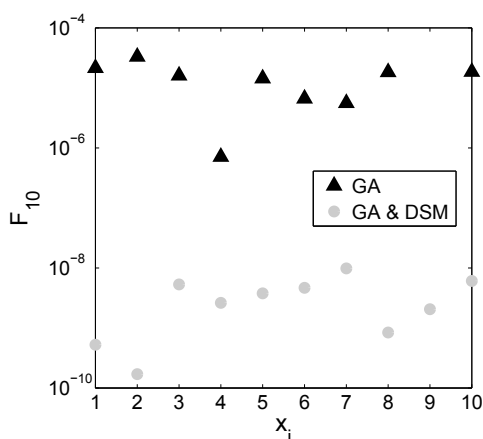


Abbildung 3.11: Vergleich zwischen einem GA mit und ohne Verwendung von DSM. Die Werte auf der Abszisse stehen für die einzelnen x_i , während auf der Ordinate die zugehörigen Werte aufgetragen sind. Die Dreiecke stehen für die Optimierung mittels GA. Durch Nachschaltung des DSM konnten die Werte deutlich „nachgebessert werden“, wie die Lage der Kreise zeigt.

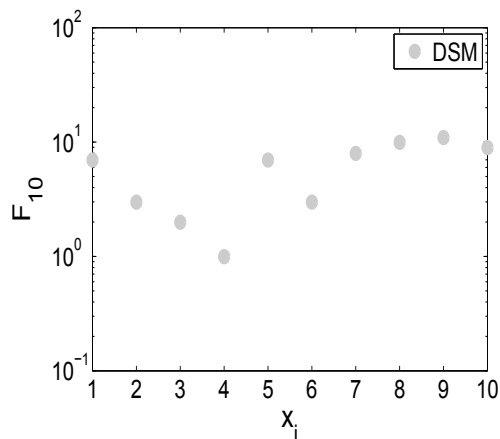


Abbildung 3.12: Optimierte Werte der Rastringin-funktion, deren Startpunkt bei $\mathbf{x} = (100, \dots, 100)$ lag. Man sieht deutlich, dass das globale Optimum bei null nicht gefunden wird. Die Abszisse und Ordinate ist definiert wie in Abbildung 3.11.

Kapitel 4

Anwendung des GA auf synthetische Körper

In den Kapiteln 2 und 3 wurden Formeln und Methoden sowohl für die Vorwärtsrechnung als auch inverse Modellierung („Rückwärtsrechnung“) beschrieben. Im Folgenden werden die vorgestellten Verfahren dazu genutzt das inverse Problem zu lösen. Es wird insbesondere untersucht, wie gut sich der GA für die Invertierung anhand ausgewählter Beispiele eignet. Dabei werden zwei Gruppen von Szenarien im Rahmen von closed-loop Simulationen behandelt. Zuerst werden fehlerfrei Signale vorausgesetzt um Aussagen über die zu erreichende Genauigkeit zu bekommen. In einem anschließenden Durchlauf wird das Signal bewusst verfälscht.

4.1 Closed-loop Simulation

Die Betrachtung fehlerfreier Signale und deren Rückrechnung (Invertierung) mittels GA und DSM ist das Ziel der folgenden Abschnitte. Auftretende Differenzen zwischen bekannten und invertierten Parametern sind sofort ersichtlich und können analysiert werden. Für einige in Kapitel 2 vorgestellte Körper werden, anhand von Beispielen, die Ergebnisse verschiedener Optimierungsläufe analysiert und verglichen. Ziel ist es, das Potenzial von GA und DSM für die Invertierung aufzuzeigen.

Bei allen Untersuchungen wird die Annahme getroffen, dass ein konstanter Dichteunterschied $\Delta\rho = const$ zwischen Körper und umgebendem Material besteht. Für die hier getätigten untersuchten Strukturen wird $\Delta\rho = 300 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ angenommen. Dieser Wert entspricht einem mittleren Wert, wie er z. B. auf der Schwäbischen Alb vorkommt (Scheider 2010). Ohne Kenntnis der eigentlichen Ausdehnungen und Dichte müssten geologische Voruntersuchungen erfolgen.

Eingesetzt wurde die GA-TOOLBOX von MATLAB. Die dabei verwendeten Strategieparameter sind, falls nicht anders angegeben:

- Sortierung der Individuen aufsteigend anhand der Kosten
- Glücksrad-Verfahren (*Roulette-Wheel*) als Selektionsmechanismus
- Rekombination mittels *Multi-Point-Crossover*
- Mutation über *Adaptive feasible*, vgl. MathWorks (2010)
- Wahrscheinlichkeit für CO 60%, für Mutation 40%, vgl. MathWorks (2010)
- Iterationenabbruch nach einer vorab definierten Anzahl von Generationen bzw. Unterschiede aufeinanderfolgender minimalen Kosten $< 10^{-16}$

Die verwendete Kostenfunktion K entspricht Gleichung (3.1). Die bekannten Körperkoordinaten bzw. Körperparameter dienen zur Berechnung von Δg_{b_i} . Die aus der Optimierung gewonnenen Werte sind für die Bestimmung von Δg_{s_i} notwendig. Es ist $1 \leq i \leq M$, wobei M für die Anzahl der Berechnungspunkte (hier Stationspunkte) steht. Wegen des Zufallsprinzips, welches dem GA innewohnt, wurden in der Regel mehrere Durchläufe gerechnet und anschließend das Mittel gebildet.

Die vorgestellten Strategieparameter ergaben sich aufgrund von Vorschlägen aus Alvers (1998) und Chen et al. (2006), sowie eigenen Erfahrungen. Es wird zusätzlich an ausgewählten Beispielen gezeigt, wie sich andere Strategien auf die Optimierungsergebnisse auswirken.

4.1.1 Invertierung eines polygonalen Querschnitts

Dieser Ansatz ist dann anzuwenden, wenn Daten in Form eines Linienprofils vorliegen und der zu invertierende Körper die Voraussetzungen, wie in Abschnitt 2.2.1 beschrieben, erfüllt. Die Koordinaten der untersuchten Geometrie beschreiben in der xz -Ebene ein Quadrat mit einer Kantenlänge von 10 m. Abbildung 4.1 zeigt den Querschnitt samt dem zu erwartenden Signal. Der Parameterraum, welcher durch die vier Koordinatenpaare aufgespannt wird, hat die Größe $D = 8$. Im Allgemeinen berechnet sich die Dimension über

$$D = 2N_p \quad (4.1)$$

mit N_p als Anzahl der Polygonecken.

Es wird die Fragestellung untersucht wie sich die Wahl des Suchbereiches und der Generationenzahl auf die Optimierung auswirkt. Mit diesem Bereich ist die Wahl der oberen bzw. unteren Grenze gemeint in dem sich die Koordinaten bewegen dürfen. Der GA sucht innerhalb dieser Grenzen das Optimum. Ausgangspunkt für die Optimierung bilden innerhalb des Suchraums zufällige Parameterwerte (Startpopulation). Aufgrund des Zufallcharakters können die einzelnen Suchbereiche, ohne Einschränkung der Allgemeinheit, symmetrisch um die einzelnen Punkte gelegt werden. Die untere bzw. obere Grenze für jedes Koordinatenpaar (x_i, z_i) wird im Rahmen der durchgeführten Untersuchungen über $x_i \pm G_x$ bzw. $z_i \pm G_y$ berechnet. Diese Werte sind wiederum durch einen vorgegebenen Prozentsatz p über

$$G_x = Lp \quad \text{bzw.} \quad G_z = Hp \quad (4.2)$$

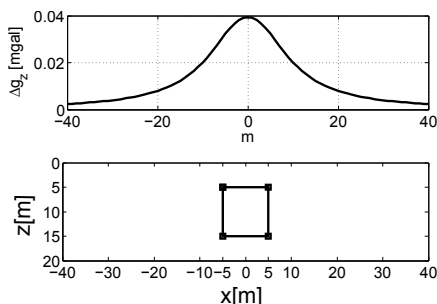


Abbildung 4.1: Schwereanomalie eines quadratischen Querschnitts, von einem in y -Richtung unendlich ausgedehnten Körper mit einem Dichtekontrast $\Delta\rho = 300 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$. Die Koordinaten sind ausgehend von der linken oberen Ecke im Uhrzeigersinn von (x_1, z_1) bis (x_4, z_4) nummeriert.

Tabelle 4.1: Werte der Kostenfunktion für verschiedene Definitionintervalle und Generationenanzahl.

p [%] vgl. (4.2)	K [nGal] 2000 Gen.	K [nGal] 10000 Gen.	K [nGal] 50000 Gen.
1	1,10	0,13	-
3	1,81	0,40	-
5	5,13	0,52	-
10	10,26	0,95	-
50	23,10	9,68	4,57
100	211,75	53,61	34,23

zu erhalten. Es bezeichnet hier L die maximale Länge und H die maximale Höhe des Querschnitts.

Die Gesamtlänge des Profils beträgt 80 m. Für die nachfolgenden Berechnungen wurde angenommen, dass die Abstände zwischen den Stationen 1 m betragen. Somit liegen insgesamt 81 Beobachtungen vor.

In Tabelle 4.1 werden die Ergebnisse aus verschiedenen Optimierungsläufen gezeigt, mit den eingangs erwähnten Strategieparametern. Darin wird verglichen welche Endwerte die Kostenfunktion in Abhängigkeit des Suchbereiches und Anzahl der Generationen annimmt. Es ist dabei zu beobachten, dass für größere Suchbereiche mehr Generationen durchlaufen werden müssen, damit der Wert der Kostenfunktion sinkt.

Des Weiteren wurden Abweichungen der optimierten zu den originalen Koordinaten untersucht, die prozentual in Abhängigkeit zum jeweiligem Suchbereich gegeben sind. Dabei fällt auf, dass bei einer Erhöhung der Anzahl von Generation um den Faktor fünf, sich alle Koordinatenabweichungen verbessern wie in den Abbildungen 4.2 und 4.3 deutlich wird. Trotz des geringen Kostenwertes wird das Optimum jedoch nicht erreicht. Der GA hat im Fall für $p = 100\%$ Schwierigkeiten sich dem Optimum zu Nähern. Selbst bei 50 000 Generation (Abbildung 4.6) sind die Abweichungen nur marginal verbessert worden. Die Betrachtung von Koordinatenabweichungen ist bei realen Messdaten in der Regel schwer möglich, weil der Körper nicht unmittelbar zugänglich ist. In diesen Fällen liegt dem Anwender nur der Wert K aus der Optimierung vor, wonach er diese bewerten muss. Ein Vergleich von K mit den jeweils zugehörigen Abweichungen zeigt auf, dass hohe Kosten größere Abweichungen in den Koordinaten indizieren. Ein weiterer Grund für hohe Kosten kann in der Realität durch die Einschränkung des Suchraumes eintreten. Diese a priori Annahme birgt die Gefahr, dass sich das Optimum nicht innerhalb dieses Bereiches befindet. Somit ist nicht nur der Wert von K interessant, sondern auch die Untersuchung ob sich die Koordinaten am Rande des Gebietes befinden. Dies könnte ein Hinweis darauf sein, dass sich das Optimum außerhalb befindet. Zusätzlich kann der relative Fehler zwischen dem Originalsignal und dem Signal, welches aus den optimierten Koordinaten berechnet wurde, betrachtet werden. Diese relativen Fehler können in den Abbildungen 4.4 und 4.5 betrachtet werden. Erwartungsgemäß führen kleinere Koordinatenabweichungen zu einen geringeren relativen Fehler. Es fällt weiterhin auf, dass das Signal an der Rändern schlechter wird.

Weiterhin ist zu beobachten, dass vor allem die Koordinatenpaare in größerer „Tiefe“ schlechter optimiert werden als diejenigen an der Oberfläche. Dies kann auf eine geringere Sensiti-

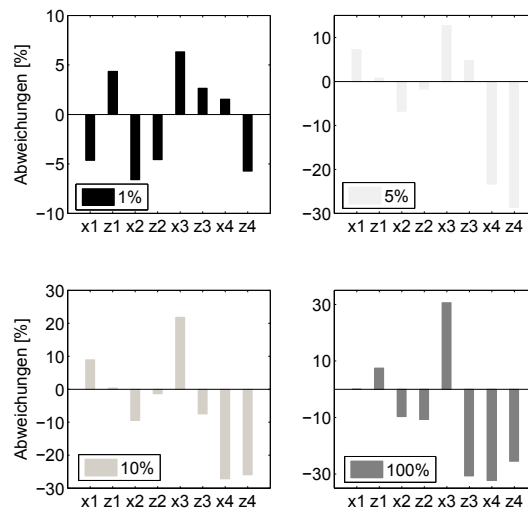


Abbildung 4.2: Abweichungen zwischen originalen und invertierten Koordinaten (aus GA, 2000 Generationen), getrennt in x - und z -Richtung. In den vier Grafiken sind die Ergebnisse für jeweils ein anderes p (1%, 5%, 50% 100%) angegeben. Die Abweichungen sind prozentual zur jeweiligen maximalen Länge des Suchbereiches angegeben. Es gilt für die untere Grenze -100% und die obere Grenze 100%.

vität des GA im Hinblick auf weiter entfernte Punkte hinweisen. Punkte, die weiter von den Beobachtungspunkten liegen, haben eine geringere Auswirkung auf das Signal, gemäß dem Gravitationsgesetz. Ein weiterer wichtiger Aspekt betraf die Frage, welche Ergebnisse ein hybrider GA liefert. Dafür wurden die aus dem GA erhaltenen Koordinaten mit dem DSM weiter optimiert. Hierbei zeigte sich, dass der DSM das Optimum findet, sobald der Wert der Kosten eine bestimmte Schwelle unterschreitet. In diesen Fällen wird das Optimum mit $K = 0$ Gal erreicht und die Koordinatenabweichungen betragen Null. Wendet man den DSM zu früh an, so konvergiert er auf ein Nebenminima, aus dem er nicht mehr heraus findet. In Abbildung 4.7 wird dies gezeigt mit den jeweils erreichten Kosten. Weitere Untersuchungen wiesen darauf hin, dass diese Schwelle, ab welcher die Downhill-Simplex Methode das Optimum findet, bei etwa 35 nGal liegt. In der dritten Spalte von Tabelle 4.1 ist deshalb nur noch der Optimierungs-lauf für die letzten zwei Fälle berechnet. Die ist zum Einen geschehen um zu überprüfen wie weit sich der Wert K senken lässt bzw. ab wann für den Fall $p = 100\%$ durch den DSM das Optimum erreicht wird.

Zwei wesentlich Erkenntnisse der Untersuchung sind:

- ein großer Suchbereich führt zu einer langsameren Konvergenz und
- der Einsatz eines hybriden GA birgt die Gefahr vorzeitiger Konvergenz, wenn die Kosten zu hoch sind.

Dabei ist zu beachten, dass die hier aufgeführten Untersuchungen für den behandelten Körper zutreffen. Es ist jedoch, wie bei Alvers (1998) nachzulesen, der GA an jede Situation und jeden Körper individuell anzupassen. Die Erfahrungen, welche in diesem Abschnitt gesammelt wurden, dienen als erster Anhaltspunkte für weitere Anwendungen des GA auf andere polygonale Querschnitte.

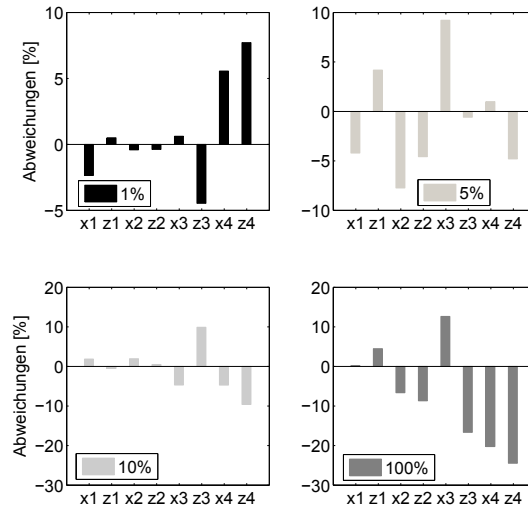


Abbildung 4.3: Koordinatenabweichungen wie in Abbildung 4.2, berechnet über 10 000 Generationen.

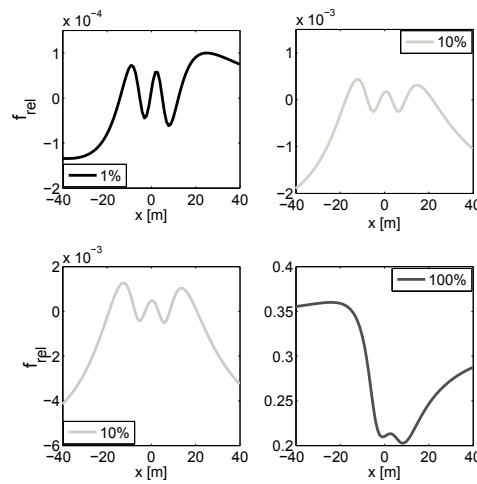


Abbildung 4.4: Relativer Fehler zwischen Originalsignal und dem Signal, welches aus den Koordinaten nach Abbildung 4.2 berechnet wurde.

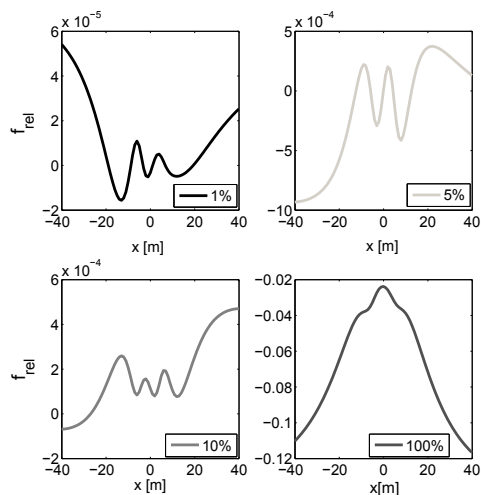


Abbildung 4.5: Relativer Fehler zwischen Originalsignal und dem Signal, welches aus den Koordinaten nach Abbildung 4.3 berechnet wurde.

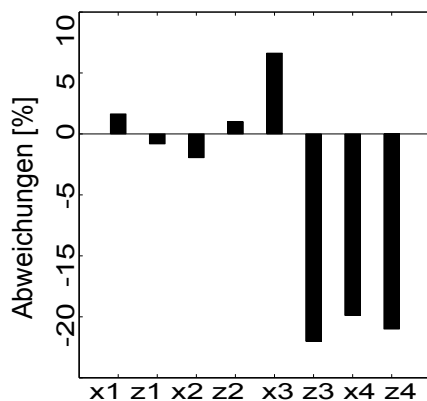


Abbildung 4.6: Koordinatenabweichungen wie in Abbildung 4.2 mit 50 000 Generationen und $p = 100\%$.

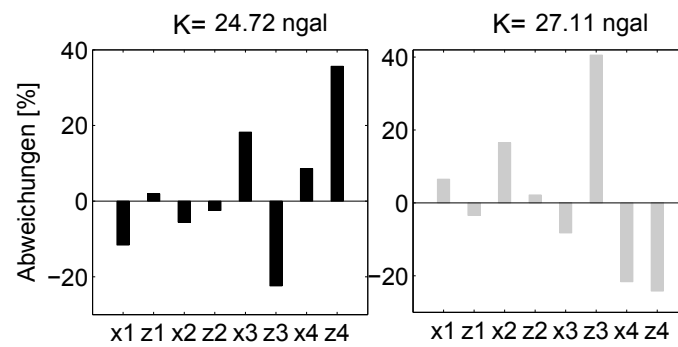


Abbildung 4.7: Koordinatenabweichungen wie in Abbildung 4.2 mit nachgeschaltetem DSM für $p = 100\%$. Links ist das Ergebnis des DSM nach 2000 Generation zu sehen und rechts nach 10000 mit den jeweils erreichten Kosten.

4.1.2 Invertierung rotationssymmetrischer Körper

Im Gegensatz zu den bisher betrachteten, liegen im Folgenden räumlich begrenzte Strukturen vor, die flächenhafte Signale liefern. Die Optimierungsparameter sind hier Körperparameter, welche Lage und Größe festlegen. Von den im Abschnitt 2.2.2 behandelten Rotationskörpern wurde der Zylinder ausgewählt. Bei diesem erfolgt, im Vergleich zu den Kegelstümpfen, die Auswertung deutlich schneller, weil nur eine anstelle von zwei Integrationen benötigt werden. Die den Zylinder bestimmenden Parameter sind Tiefe b , Radius a und Länge l , wie in Abbildung 4.8 verdeutlicht. Der Parameterraum hat demnach eine Dimension von drei. Bei Optimierung der Kegelstümpfe läge die Größe des Parameterraumes bei vier. Der für die Untersuchung verwendete Zylinder ist durch $a = 3$ m und $b = l = 10$ m innerhalb von $-10 \text{ m} \leq x \leq 10 \text{ m}$ und $-10 \text{ m} \leq y \leq 10 \text{ m}$ festgelegt, das zugehörige Signal ist in Abbildung 4.9 gezeigt. Die verwendete Abtastrate betrug 2 m, somit ist die Anzahl der Beobachtungen 100. Die Fragestellung hierbei ist, analog zu Abschnitt 4.1.1, die Suche nach dem Optimum in Abhängigkeit vom Suchbereich und der Generationenanzahl. Die Intervallgrenzen, d. h. die Suchbereiche der Parameter, sind

$$a_u \leq a \leq a_o$$

$$b_u \leq b \leq b_o$$

$$l_u \leq l \leq l_o$$

mit der unteren und oberen Grenze (durch u bzw. o indiziert). Weiterhin gilt $a_u, b_u, l_u > 0$. Analog zu Abschnitt 4.1.1 sind die Suchbereiche über die Prozentsätze $\pm 1\%$, $\pm 5\%$, $\pm 10\%$, $\pm 50\%$ und $\pm 100\%$ von den Größen a, b, l realisiert. In Tabelle 4.2 sind die Suchbereiche, optimierten Parameter und Kosten aufgeführt. Die Größe der Population betrug 50, die Anzahl der Generationen 500. In Abbildung 4.10 ist für die Fälle 2 und 5 der relative Unterschied dargestellt zwischen Originalsignal und dem aus der Invertierung erhaltenen Signal. Es zeigt sich, wie schon in Abschnitt 4.1.1 gezeigt, dass in der Mitte eine bessere Übereinstimmung vorliegt als an den Rändern. Die Resultate mit anschließendem DSM waren alle positiv, d. h. die Differenzen zwischen Ausgangsparametern und den Optimierten als auch die resultierenden Kosten betragen Null. Im Gegensatz zum polygonalen Querschnitt konnten hier mit wenigen Individuen und einer geringen Anzahl an Generationen gute Ergebnisse erzielt werden. Dies wird auf eine geringe Anzahl von Parametern zurückgeführt, wie auch in Chen et al. (2006) dokumentiert.

Trotz der guten Optimierungsergebnisse eignen sich die Formeln nur bedingt für den praktischen Einsatz. Ausgangspunkt bilden perfekt rotationssymmetrische Körper, welche in der Natur nicht zu finden sind. Desweiteren steigt die Berechnungszeit bei Zylindern mit größeren Radien ($b > 10$ m), Kegelstümpfen und großflächigen Gebieten stark an. Die benötigte Rechenzeit liegt für den betrachteten Zylinder mit $b = 15$ m bereits bei ca. 5 s für die Auswertung eines einzelnen Individuums, wogegen die Zeit für $b = 3$ m ca. 0.45 s beträgt.

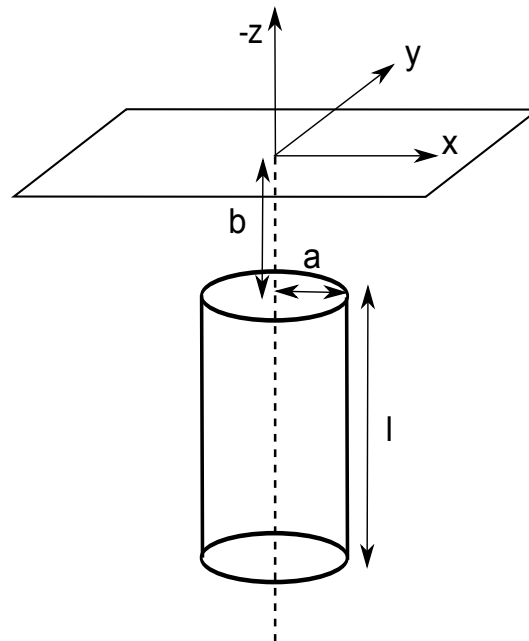


Abbildung 4.8: Darstellung der Parameter, welche die Lage und Größe eines senkrechten Zylinders eindeutig beschreiben.

Tabelle 4.2: Optimierungsergebnisse für den Zylinder.

Fall	a_u a_o [m]	$b_u = l_u$ $b_o = l_o$ [m]	Opt. Parameter $a b l$ [m]	K [nGal]
1	2,97	9,90	3,00 9,98 10,00	0,07
	3,03	10,10		
2	2,95	9,50	3,02 9,84 10,03	0,68
	3,05	10,50		
3	2,70	9,00	3,06 9,55 10,09	1,73
	3,30	11,00		
4	1,50	5,00	3,25 8,25 10,40	6,67
	4,50	15,00		
5	0,01	0,01	3,66 6,71 10,76	13,07
	6,00	20,00		

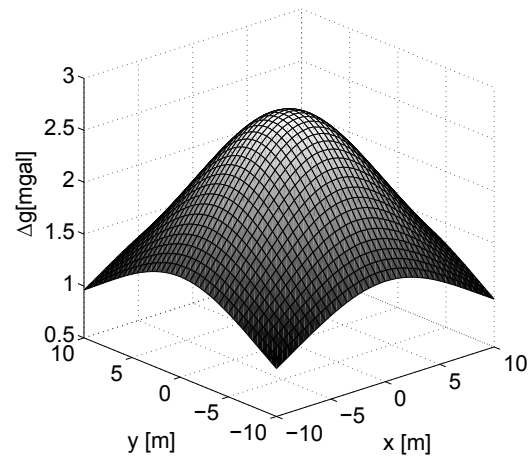


Abbildung 4.9: Signal des im Text beschriebenen Zylinders.

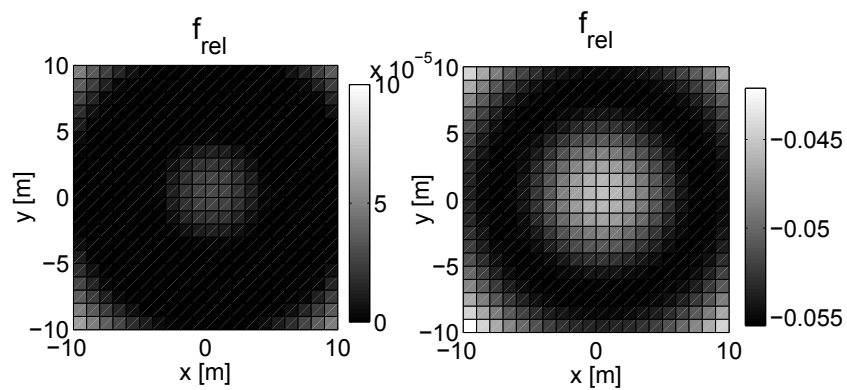


Abbildung 4.10: Relative Signalunterschiede für die Fälle 2 (links) und 5 (rechts) gemäß Tabelle reftab:tabelleZyl.

4.1.3 Invertierung von Polyedern

Es werden im Folgenden Untersuchungen an einem Körper durchgeführt, welcher den Anforderungen aus Abschnitt 2.2.3 genügt. In Anlehnung an den Vulkan, welcher in Scheider (2010) beschrieben wird, wurde eine Struktur konstruiert wie Abbildung 4.12 zu sehen. Wichtig dabei war, dass alle Flächen als Dreiecke beschrieben werden. So wird hier beispielsweise das Dreieck 1 über die Eckpunkte 1,4 und 2 (entgegen dem Uhrzeigersinn) aufgespannt.

Die drei horizontalen Ebenen beschreiben jeweils quadratische Flächen. Die erste Ebene ist zwischen $-5\text{ m} \leq x \leq 5\text{ m}$ und $-5\text{ m} \leq y \leq 5\text{ m}$ definiert, die beiden unteren zwischen $-3\text{ m} \leq x \leq 3\text{ m}$ und $-3\text{ m} \leq y \leq 3\text{ m}$. Die erste Ebene liegt bei $z = 5\text{ m}$, die Zweite bei $z = 10\text{ m}$ und die Dritte bei $z = 25\text{ m}$. Das Signal des Polyeders ist in Abbildung 4.11 zu sehen. Die Berechnungspunkte innerhalb des Gebietes, definiert durch $-10\text{ m} \leq x \leq 10\text{ m}$ und $-10\text{ m} \leq y \leq 10\text{ m}$, liegen jeweils in einem Abstand von 2 m voneinander entfernt, wodurch 100 Beobachtungen entstehen. Die Anzahl der zu optimierenden Parameter liegt bei $12 \times 3 = 36$. Es wurde mit insgesamt 200 Individuen gerechnet.

Bei der Wahl der Suchbereiche ist zu beachten, dass es während der Optimierung zu keinen Überschneidungen der Dreiecke kommt. Dadurch würden die Bedingungen, auf denen die zur Berechnung benötigten Formeln gründen, verletzt. Bei komplexeren Strukturen als die hier verwendete bedarf es einen größeren Aufwandes diese Bedingungen umzusetzen und einzuhalten. Für die getätigten Untersuchung lag der zulässige Bereich der Koordinaten bei $\pm 1\%$ der jeweiligen Länge bzw. Tiefe. Dieser Suchbereich ist für Untersuchungen in diesem Fall ausreichend. Im Vergleich zum polygonalen Querschnitt sind mehr Parameter zu optimieren, was zu einer langsameren Konvergenz führt und die Auswertung der Kostenfunktion benötigt deutlich länger (im Vergleich zum polygonalen Querschnitt). Aus diesem Grund wurde für den größten Teil der Untersuchungen die Anzahl der Generationen auf 1000 beschränkt. Wichtige Erkenntnisse konnten für verschiedene Strategieparameter, in diesem Fall Selektionsmechanismen, hinsichtlich der Konvergenz beobachtet werden. Diese Selektionsmechanismen sind im Einzelnen

Uniform Wählt die Eltern anhand deren Erwartungswerten aus, bis eine vorgegebene Anzahl erreicht ist.

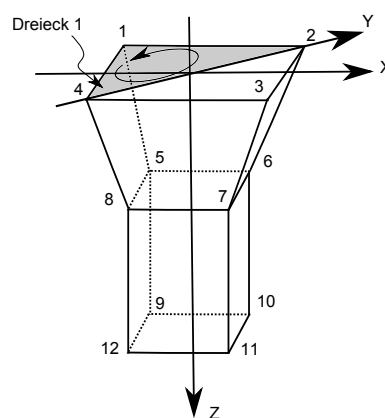


Abbildung 4.11: Aufbau des Körpers, wie in den Simulationen angenommen.

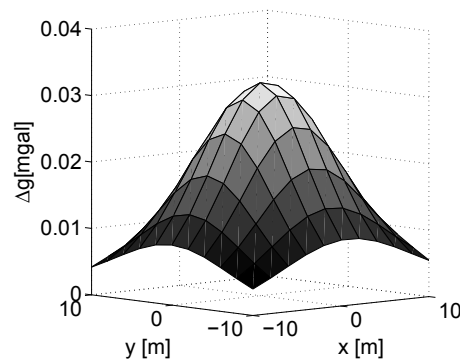


Abbildung 4.12: Signal des in Abbildung 4.12 dargestellten und im Text beschriebenen Polyeders.

Turnier Es werden zufällig zwei Eltern gewählt, die gegeneinander „kämpfen“ müssen. Es gewinnt derjenige, welcher die geringsten Kosten besitzt.

Remainder Mit diesem Verfahren werden Eltern ausgewählt über den ganzzahligen Anteil ihres (skalierten) Kostenwertes und in einem zweiten Schritt mit dem Glücksradverfahren der verbleibende Rest. Sei z. B. der skalierte Wert 2,3, so wird dieses Individuum zweimal als Eltern aufgeführt, aufgrund der ganzzahligen Anteils von 2. Nachdem alle Eltern mit diesem Verfahren abgehandelt sind wird der Rest stochastisch verteilt (siehe Glücksrad).

Glücksrad In Abschnitt 3.2.1 vorgestellt.

In Tabelle 4.3 sind zu den einzelnen, angewandten Verfahren die jeweils erreichten Kosten dargestellt. Es ist deutlich zu erkennen, dass das Glücksradverfahren die „besten“ Ergebnisse liefert. In Abbildung 4.13 ist der Kostenverlauf über die Generationen für die einzelnen Varianten dargestellt. Durch Erhöhung der Generationenzahl ist weiterhin zu prüfen in welchem Maße der Kostenwert sinkt. Für diesen Fall wurden Turnier und Glücksrad ausgewählt. Aufgrund der Ähnlichkeit des Remainder zum Glücksrad kam das Turnierverfahren zum Zuge damit zwei unterschiedliche Verfahren für eine höhere Generationenzahl verglichen werden konnten. Der zugehörige Optimierungsverlauf ist in Abbildung 4.14 gezeigt. Desweiteren sind die (relativen) Abweichungen der Koordinaten (vgl. Abschnitt 4.1.1) berechnet und in den Abbildungen 4.16 und 4.17 zu sehen. Es wurde hierbei, zur besseren Übersicht, getrennt nach der x -, y - und z -Koordinate untersucht. Die Nummern auf der Ordinate geben den jeweils betrachteten Eckpunkt an. Es fällt wiederum auf, dass Punkte die näher an der Oberfläche liegen kleinere Abweichungen haben und somit besser bestimmt werden konnten als diejenigen welche sich weiter vom Beobachter entfernt befinden.

Tabelle 4.3: Vergleiche verschiedener Selektionsverfahren und Generationenzahlen hinsichtlich der Kosten.

Selektionsmechanismus	K [nGal]	K [nGal]
	1000 Gen.	18000 Gen.
Uniform	8,11	-
Turnier	5,84	0,61
Remainder	5,59	-
Glücksrad	3,14	0,25

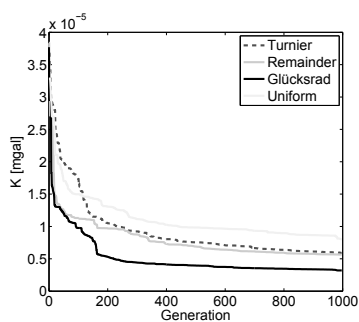


Abbildung 4.13: Vergleich verschiedener Selektionsmechanismen für jeweils 1000 Generationen.

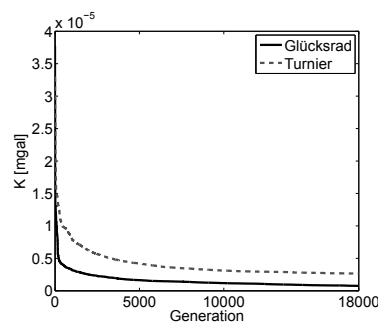


Abbildung 4.14: Vergleich verschiedener Selektionsmechanismen für jeweils 18000 Generationen.

In den ersten 1000 Generationen sind kaum Unterschiede festzustellen, erst nachdem 18000 Generationen durchlaufen wurden sind die Abweichungen in den Koordinaten in einem akzeptablen Bereich. Zusätzlich sind in Abbildung 4.15 die relativen Unterschiede zwischen dem Originalsignal und dem mit denen aus der Optimierung für Glücksrad, 1000 Generationen und Glücksrad 18000 Generationen stammenden gegenüber gestellt. Wiederum sind im Randbereich größere relative Unterschiede als in der Mitte jedoch ist der Unterschied diesmal nicht so deutlich wie bei den Ergebnissen in den vorigen Abschnitten.

Wie in den anderen Abschnitten bereits erwähnt, sind die hier vorgestellten Ergebnisse speziell für diesen Körper gültig. Bei Änderung der Geometrie oder dem Messgebiet können andere Strategieparameter zum Erfolg führen. Die Anwendung des DSM führte in keinem Fall zum Ziel, im Gegensatz zu den vorangegangenen Untersuchungen. Die Abweichungen und Kosten, welche durch dieses Optimierungsverfahren erhalten wurden, lagen in einem ähnlichen Bereich, wie bei alleiniger GA Anwendung. Das weist darauf hin, dass die Abweichungen zum Optimum immer noch zu groß sind und mit dem DSM nur ein Nebenminima erreicht wird. Ein Fehler im Programm kann ausgeschlossen werden, aufgrund der Tatsache, dass der DSM das Optimum findet sobald die originalen Koordinaten eingegeben werden.

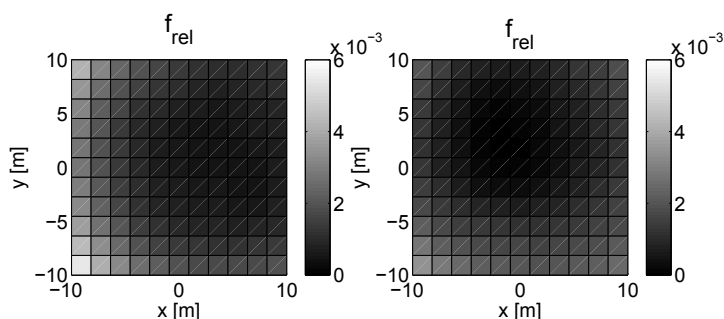


Abbildung 4.15: Relativer Unterschied zwischen Originalsignal und dem aus den optimierten Parametern rekonstruierten Signal, links für Glücksrad nach 1000 Generationen und rechts nach 18000.

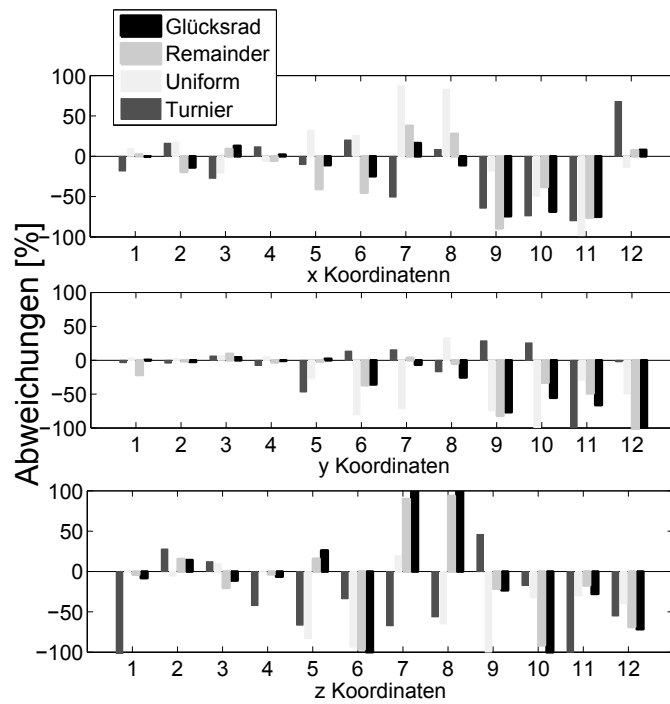


Abbildung 4.16: Koordinatenabweichungen für verschiedene Selektionsmechanismen und 1000 Generationen.

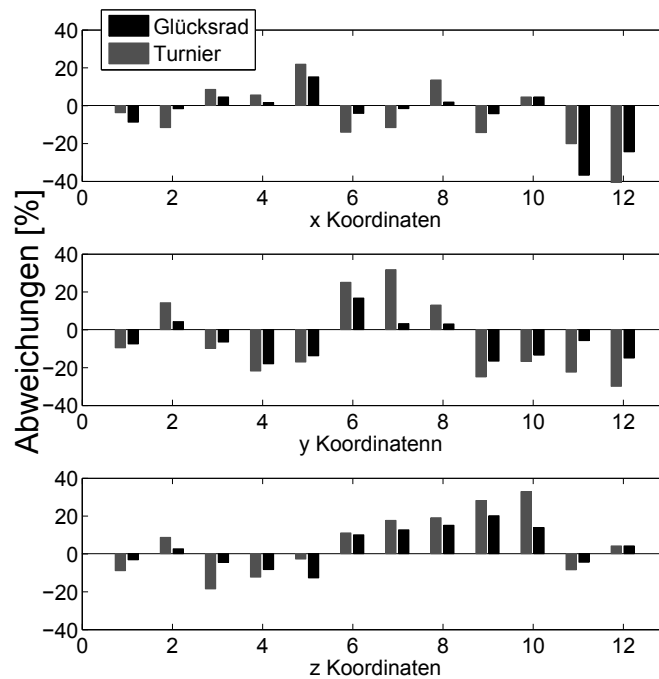


Abbildung 4.17: Koordinatenabweichungen für Turnier und Glücksrad mit jeweils 18 000 Generationen.

4.2 Fehlerbehaftete Signale

In den folgenden Simulationen wird dem originalen Signal ein Fehler hinzugefügt. Diese Betrachtung wird motiviert durch die Anwendung des GA auf gemessene Signale, welche immer mit Messfehlern behaftet sind. Bei einem Relativgravimeter liegt die Standardabweichung typischerweise im Bereich von $10 - 30 \mu\text{Gal}$.

Durch die folgenden Untersuchungen wird aufgezeigt welche Einflüsse Fehler, die im Signal vorhanden sind, auf die optimierten Koordinaten bzw. Parameter haben.

4.2.1 Quadratischer Querschnitt

Es wird der Körper mit dem zugehörigen Signal in Abbildung 4.1 betrachtet. Der Wertebereich des Signals liegt jedoch innerhalb des Fehlerbereiches eines Gravimeters, weshalb ein künstlicher Fehler angenommen wurde. Für diesen wurde eine Standardabweichung von

$$\sigma_S = \frac{\mu_S}{100} \quad (4.3)$$

angenommen, wobei μ_S den Mittelwert des Signals darstellt. Die Generierung erfolgte über die Funktion `randn(N)` in MATLAB, welche normalverteilte Zufallszahlen erzeugt. In diesen Fall erfolgt der Aufruf über `0 + muS * randn(N)`, wobei der Mittelwert 0 ist und N für die Anzahl an benötigten Werte steht. Für das vorliegende Signal beträgt $\mu_S = 13,1 \mu\text{Gal}$.

Für die Untersuchung wurde der Suchbereich für die Koordinaten auf ein Intervall von $p = \pm 10\%$ gesetzt, vergl. dazu Abschnitt 4.1.1. Das verrauschte Signal und der relative Unterschied zum fehlerfreien Signal sind in Abbildung 4.18 dargestellt.

Die Strategieparameter für den GA sind identisch zur fehlerfreien Simulation. Es wurde mit verschiedener Generationenanzahl (2000,5000,10 000) gerechnet. Die Ergebnisse (Kosten, Koordinatenabweichungen) aus diesen drei Versuchen waren untereinander nur leicht unterschiedlich, während der anschließend verwendete DSM (hybrider Fall) gleiche Ergebnisse liefert.

In Abbildung 4.19 sind eine GA Optimierung mit 10 000 Generationen und ein daran anschließender DSM gezeigt. Zum einen werden die relativen Unterschiede zwischen dem fehlerbehafteten Signal und dem aus der jeweiligen Optimierung stammenden dargestellt sowie die Koordinatenabweichungen im Bezug auf die Ausgangskordinaten. Die Abweichungen in den Koordinaten liegen bei maximal 35 %, der relative Unterschied ist jedoch ähnlich dem, welcher in Abbildung 4.18 abgebildet ist. Die Kosten liegen nach dem GA bei $K = 115,5 \text{ nGal}$ und nachträglicher DSM Anwendung bei $K = 114,1 \text{ nGal}$. Weder der eine noch andere Optimierungsansatz ist in der Lage die Kosten deutlich zu senken. In der Praxis hat der Anwender nur Zugriff auf den Kostenwert bzw. den relativen Unterschied als Güte der Optimierung.

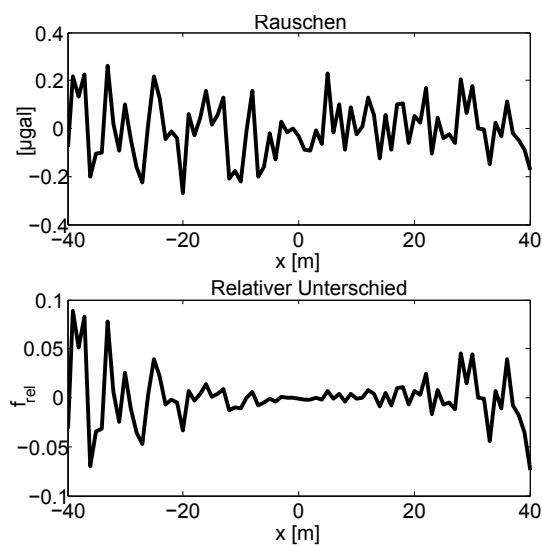


Abbildung 4.18: Im oberen Bild wird das simulierte Rauschen dargestellt, während im unteren Bild der relative Fehler zwischen Originalsignal und dem Rauschen abgebildet ist.

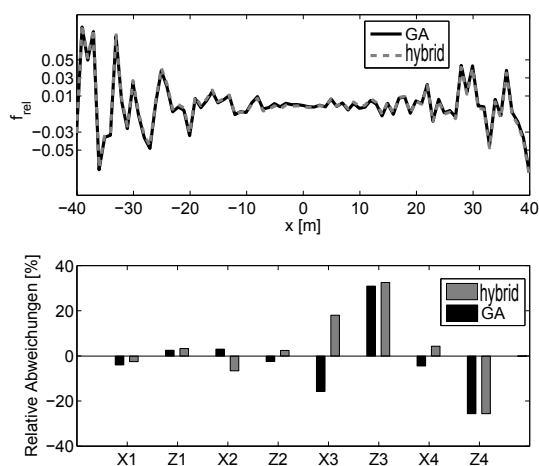


Abbildung 4.19: Koordinatenunterschiede aus der Optimierung mittels GA bzw. anschließendem DSM mit zugehörigem relativen Fehler zwischen verrauschtem und dem aus der jeweiligen Optimierung stammenden Signal.

4.2.2 Zylinder

Der hier betrachtete Körper ist derjenige, welcher in Abschnitt 4.1.2 schon untersucht wurde. Der Mittelwert des fehlerfreien Signals liegt für diesen Fall bei $\mu_S = 1,73 \mu\text{Gal}$. Der Suchbereich wurde auf $\pm 10\%$, die Anzahl der Generationen auf 500 und die Anzahl der Individuen auf 50 gesetzt. Das weitere Vorgehen entspricht dem im vorangegangenen Abschnitt. Die aus GA und anschließend DSM erhaltenen Koordinaten sind in Tabelle 4.4 zusammengefasst.

In Abbildung 4.20 ist das berechnete Rauschen und der relative Unterschied zwischen Rauschen und fehlerfreiem Signal zu sehen, während bei 4.20 die Ergebnisse nach der Optimierung dargestellt werden. Wie auch im vorigen Abschnitt wird hier das Optimum nicht erreicht. Die Optimierung mittels hybriden GA konnte jedoch hier den relativen Fehler deutlich einschränken. In der Realität wären die Abweichungen für die Dimension des Körpers akzeptabel.

Tabelle 4.4: Optimierungsergebnisse für Zylinder mit verrauschtem Signal.

Optimierer	Opt. Parameter $a b l$ [m]	K [nGal]
GA	3,036 9,971 10,064	46,34
DSM	3,001 9,981 10,005	32,13

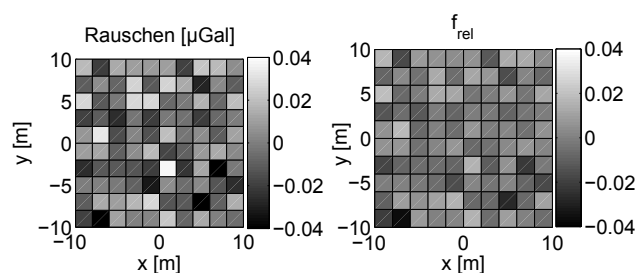


Abbildung 4.20: Im linken Bild ist das berechnete Rauschen dargestellt, während im Rechten der relative Fehler zwischen fehlerfreiem Signal und dem Rauschen abgebildet ist.

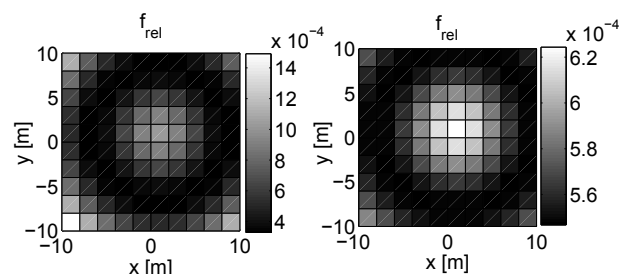


Abbildung 4.21: Im linken Bild ist der relative Unterschied zwischen Ausgangssignal (mit Rauschen) nach einer Optimierung mittels GA zu sehen, während im Rechten der relative Fehler nach einer anschließenden Optimierung durch DSM (hybrid) zu sehen ist.

4.2.3 Polyeder

Im Folgenden sind Untersuchungen für den Polyeder aus Abschnitt 4.1.3 durchgeführt worden. Die für den GA getätigten Einstellung sind $\pm 1\%$ für das Suchintervall und das Glücksradverfahren als Selektionsmechanismus. Der Mittelwert des Signales liegt bei $\mu_S = 15,14 \mu\text{Gal}$, das simulierte Rauschen wird wiederum mit (4.3) berechnet. Dieses Rauschen wird in Abbildung 4.22 dargestellt. Des Weiteren ist darin der relative Fehler zwischen fehlerfreiem Signal und dem Verrauschten als f_{rel} zu sehen.

Es wurden mit 1000 und 18000 Generationen gerechnet. Die relativen Unterschiede (Abbildung 4.23) nach 1000 bzw. 18000 Generation weisen eine hohe Ähnlichkeit auf. Die erreichten Kosten liegen bei $K_{1000} = 167 \text{ nGal}$ bzw. $K_{18000} = 164 \text{ nGal}$. Die relativen Unterschiede sind ähnlich den Ergebnissen aus Abbildung 4.19. Der GA kann aufgrund der Rauschens keine besseren Kosten finden. Im Anschluss daran sind die optimierten Parameter durch den DSM gelaufen, die Ergebnisse sind in Abbildung 4.24 zu sehen. Die Kosten liegen bei 159 nGal bzw. 161 nGal und konnten somit gegenüber den Startkosten noch ein wenig reduziert werden. Die Ähnlichkeit der Ergebnisse spricht dafür, dass hier mit 1000 Generationen und einem hybridem GA das mögliche Optimum erreicht wurde.

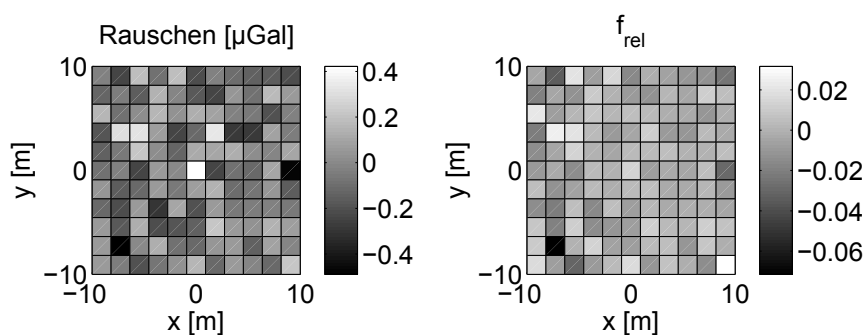


Abbildung 4.22: Links zu sehen ist das simulierte Rauschen für den Polyeder, während auf der rechten Seite der relative Fehler zwischen Signal und Rauschen betrachtet werden kann.

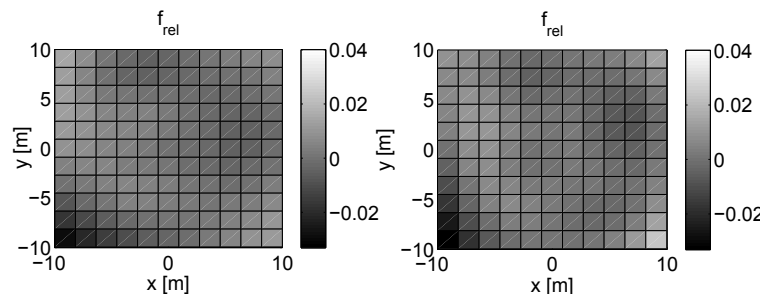


Abbildung 4.23: Relative Unterschiede nach 1000 Generationen (links) und nach 18 000 Generationen (rechts).

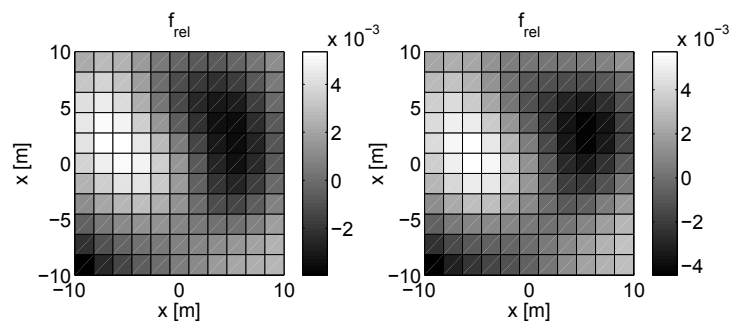


Abbildung 4.24: Relative Unterschiede nach Anwendung des DSM, links nach 1000 Generationen und rechts nach 18 000 Generationen.

Kapitel 5

Schlussbetrachtung und Ausblick

Als Abschluss der Arbeit sind in diesem Kapitel die Resultate und Erkenntnisse der getätigten Untersuchungen kompakt beschrieben. Zusätzlich wird im Ausblick diskutiert, in welchen Bereichen sich das hier Vorgestellte verbessern ließe.

5.1 Schlussbetrachtung

Beginnend mit der Vorwärtsrechnung wurden Formeln abgeleitet, die es ermöglichen die Schwereanomalien verschiedener Körper zu berechnen. Dies ist ein wichtiger Schritt im Hinblick auf das inverse Problem, denn ohne geeignete Modelle wäre die Rückwärtssuche nicht durchführbar. Programme, die auf diesen Formeln beruhen, wurden in MATLAB umgesetzt bzw. schon vorhandene Programme vorgestellt. Die wichtigsten Strukturen bzw. Körper sind dabei der polygonale Querschnitt bzw. Polyeder. Damit lässt sich der größte Teil realer Körper modellieren. Mit den in Abschnitt 2.2.2 vorgestellten Formeln sind beliebige rotationssymmetrische Körper beschreibbar, jedoch ist die Anwendung im Rahmen einer GA-Optimierung nicht sinnvoll, wie später auch gezeigt wurde. Das Hauptproblem liegt dabei in den relativ langen Berechnungszeiten. Durch eine anschließende Validierung konnte die Richtigkeit der Programme demonstriert werden.

In einem nächsten Schritt wurde das Prinzip der Optimierung beschrieben. Insbesondere wurde in diesem Zusammenhang auf die Verbindung zwischen Inversion und Optimierung eingegangen. Das verbindende Element ist die Kostenfunktion (3.1). Diese vergleicht das Eingangssignal mit dem Signal basierend auf den optimierten Parametern. Das Ziel dabei ist, die Kosten im Laufe der Optimierung zu minimieren, im besten Fall wird $K = 0$.

Die Optimierungsverfahren können in zwei Gruppen eingeteilt werden. Bei den einen ist es notwendig den Gradienten der entsprechenden Funktion zu berechnen, im anderen Fall wird der gesamte Parameterraum gleichmäßig durchsucht. Gradientenverfahren bergen die Gefahr einer vorzeitigen Konvergenz in einem Nebenoptima, weil dies nicht mehr verlassen werden kann, weswegen hierfür sehr gut Näherungswerte benötigt werden. Aus diesen Gründen fiel die Wahl auf den GA, weil dieser weder Ableitungen der Kostenfunktion benötigt noch die Gefahr einer vorzeitigen Konvergenz birgt. Das Prinzip hinter dem GA stammt aus der Biologie und beruht auf der Evolutionstheorie von Darwin. Er setzt auf der untersten Ebene der Vererbung, bei den Genen, an. Diese werde über mehrere Generationen vererbt, wobei immer die besten, in diesem Fall diejenigen mit den geringsten Kosten, weitergegeben werden. Durch Mutation gelingt es immer wieder Gebiete zu erreichen, die außerhalb liegen. Dadurch ist das Verfahren in der Lage lokale Optima zu verlassen. Für eine anschließende, feinere Suche, ist

der DSM zum Einsatz gekommen. Dieser wiederum kann in einem lokalen Optimum „stecken bleiben“, benötigt aber keine Ableitungen. Durch die Voranwendung des GA wird diese Problem jedoch nahezu ausgeschlossen. Die Verbindung dieser beiden Verfahren wird hybrider GA genannt und wurde in Abschnitt 3.4 an einem Beispiel demonstriert.

Nachdem die benötigten Werkzeuge ausführlich beschrieben wurden, sind diese anhand ausgewählter Körper zum Einsatz gekommen. Das Ziel hierbei war das Potenzial des GA herauszufinden, z. B. durch den Einsatz verschiedener Strategieparameter. Diese sind Einstellung, die den Verlauf des GA beeinflussen, wie z. B. die Anzahl der Generationen oder die Selektionsmechanismen. Für die ersten Testreihen wurde die Annahme eines fehlerfreien Signales getroffen und sogenannte *closed-loop* Simulationen durchgeführt. Betrachtet wurden ein quadratischer Querschnitt, Zylinder und Polyeder. Die Ergebnisse sind nachfolgend zusammengefasst.

Quadratischer Querschnitt Untersucht wurden in diesem Fall vier Eckpunkte $(x_i, z_i) \forall i = 1, \dots, 4$, welche zu acht Parametern führen. Die Testreihen wurden für verschiedene Suchbereiche und Generationen durchgeführt. Für den kleinsten Bereich, in dem die Parameter nur $p = \pm 1\%$ Spielraum hatten konnte nach 2000 Generationen und anschließendem DSM das Optimum gefunden werden. Beim größten Suchbereich $p = \pm 100\%$ war das Optimum erst nach 50 000 Generation zu finden. Es zeigt sich vor allem, dass der hybride GA die besten Ergebnisse liefert.

Zylinder In diesem Fall sind nur drei Parameter zu optimieren. Aufgrund einer längeren Berechnungszeit wurden jedoch nur wenige Fälle und kleine Geometrien untersucht. Die optimalen Ergebnisse sind wiederum nur durch GA in Kombination mit DSM zu erhalten.

Polyeder Für den Polyeder wurden verschiedene Selektionsmechanismen untersucht. Dabei wurde vor das Glücksradverfahren als besonders geeignet gefunden. Hierbei konnte der DSM leider keine Verbesserungen erreichen, sondern nur ähnliche Ergebnisse wie GA selbst liefern. Dies ist ein Hinweis darauf, dass die Abweichungen zum Optimum noch zu groß waren.

Von gleichem Interesse sind Betrachtungen, bei denen dem Signal ein Fehler hinzugefügt wird. Dieser entspricht normalverteilten Zufallszahlen mit einer Standardabweichung die jeweils ein Prozent vom Signal betrug. Dadurch sollten mögliche Messfehler simuliert werden, die bei realen Messungen auftreten. Untersucht wurden wieder die oben genannten Körper. In allen drei Fällen konnte das Optimum, d. h. die Originalkoordinaten bzw. -parameter nicht erreicht werden. Als besonders hervorzuheben ist jedoch dass die Anwendung des hybriden GA die Kosten und relativen Abweichungen jedes Mal senken konnte.

Wie durchgehend gezeigt ist es in dieser Arbeit gelungen, durch Kombination der zwei Optimierungsverfahren GA und DSM, gute Ergebnisse zu erzielen. Dem Anwender, welcher die hier vorgestellten Methoden benutzt, konnten aufgrund der gemachten Erfahrungen wichtige Hinweise im Hinblick auf mögliche Interpretationen der invertierten Werte gegeben werden. Liegen größere Strukturen vor bzw. ausgedehnte Messgebiete so stoßen die vorgestellten Programme jedoch an Grenzen. Ein denkbarer Ausweg ist im nächsten Abschnitt dargestellt.

5.2 Ausblick

In dieser Arbeit wurden vor allem kleinräumige Strukturen und Gebiete betrachtet. Dies hat seinen Grund im hohen Berechnungsaufwand vor allem für Polyeder und rotationssymmetrische Körper. Der Tatsache, dass der GA eine große Anzahl an Generationen benötigt um sich dem Optimum zu nähern, müsste in der Programmierung Rechnung getragen werden. Vorschläge dafür sind bei Haupt & Haupt (2004) zu finden. Hier wird vorgeschlagen den GA zu parallelisieren, d. h. mit mehreren Prozessoren die Kosten für die Individuen einer Generation gleichzeitig zu berechnen. Damit wäre es auch möglich reale Messdaten in einer angemessenen Zeitspanne zu invertieren.

Literaturverzeichnis

- Alvers, M. R. (1998), *Zur Anwendung von Optimierungsstrategien auf Potentialfeldmodelle*, Dissertation, Fachbereich Geowissenschaften der Freien Universität Berlin.
- Barnett, T. C. (1976), 'Theoretical modelling of the magnetic and gravitational fields of an arbitrarily shaped three-dimensional body', *Geophysics* **41**, 1353–1364.
- Bronstein, I. N., Semendjajew, K. A., Musiol, G. & Muehlig, H. (2001), *Taschenbuch der Mathematik*, Harri Verlag.
- Chen, C., Xia, J., Liu, J. & Feng, G. (2006), 'Nonlinear inversion of potential-field data using a hybrid-encoding genetic algorithm.', *Computers and Geosciences* **32**, 230–239.
- Chen, Y. T. & Cook, A. (1993), *Gravitational Experiments in the Laboratory*, Cambridge University Press.
- Damiata, B. N. & Lee, T.-C. (2002a), 'Gravitational attraction of solids of revolution, part 2: General expressions', *Journal of Applied Geophysics* **50**, 351–373.
- Damiata, B. N. & Lee, T.-C. (2002b), 'Gravitational attraction of solids of revolution, part 2: Vertical circular cylinder with radial variation of density', *Journal of Applied Geophysics* **50**, 333–349.
- Duska, L. (1958), 'Maximum gravity effect of certain solids of revolution', *Geophysics* **23**, 506–519.
- Goldberg, D. E. (1989), *Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning*, Addison-Wesley.
- Grant, F. S. & West, G. F. (1965), *Interpretation Theory in Applied Geophysics*, McGraw-Hill Book Company.
- Götze, H. J. & Lahmeyer, B. (1988), 'Application of three-dimensional interactive modelling in gravity and magnetics.', *Geophysics* **53**, 1096–1108.
- Haupt, R. L. & Haupt, S. E. (2004), *Practical Genetic Algorithms*, Addison Wiley.
- Hubbert, M. K. (1948), 'A line-integral method of computing the gravimetric effects of two-dimensional masses', *Geophysics* **13**, 215–225.
- Jacoby, W. & Smilde, P. L. (2009), *Gravity Interpretation*, Springer-Verlag.
- Lorenz, C. (2010), 'Photography-aided gravity modelling of solid bodies', Studienarbeit, Geodätisches Institut, Universität Stuttgart.
- MathWorks (2010), 'Global optimization toolbox 3: User's guide, www.mathworks.com/access/helpdesk/help/pdf_doc/gads/gads_tb.pdf, 31.03.2010'.

- Nelder, J. A. & Mead, R. (1965), 'A simplex method for function minimization', *Computer Journal* **7** No 4, 308–313.
- Nissen, V., ed. (1997), *Einführung in Evolutionäre Algorithmen, Optimierung nach dem Vorbild der Evolution*, Friedr. Vieweg und Sohn Verlag.
- Paul, M. K. (1972), 'Interpretation of the gravity anomaly over a causative body with circular symmetry', *Geophysical Prospecting* **20**, 118–129.
- Petrovich, S. (1996), 'Determination of the potential of homogenous polyhedral bodies using line integrals', *Journal of Geodesy* **71**, 44–52.
- Scheider, A. (2010), *Nachweis einer vulkanischen Struktur auf der Schwäbischen Alb mittels gravimetrischer Messungen und unterstützender Höhenbestimmung*, Diplomarbeit, Geodätisches Institut, Universität Stuttgart.
- Schmid, U. & Bechly, G. (2009), *Evolution - Der Fluss des Lebens*, Stuttgarter Beiträge zur Naturkunde, Serie C, Band 66/67.
- Schmidt, S. (2010), 'Java programm - interpretation of measured gravity anomalies by 2d-modelling, www.gravity.uni-kiel.de/software/mod2d.htm, 5.02.2010'.
- Singh, B. & Guptasarma, D. (1999), 'New scheme for computing the magnetic field resulting from a uniformly magnetized arbitrary polyhedron', *Geophysics* **67**, 70–74.
- Singh, B. & Guptasarma, D. (2001), 'New method for fast computation of gravity and magnetic anomalies from arbitrary polyhedra', *Geophysics* **66**, 521–526.
- Talwani, M. & Ewing, M. (1960), 'Rapid computation of gravitational attraction of three-dimensional bodies of arbitrary shape', *Geophysics* **25**, 203–225.
- Talwani, M., Worzel, J. L. & Landisman, M. (1959), 'Rapid gravity computations for two-dimensional bodies with application to the mendocino submarine fracture zone', *Journal of Geophysical Research* **64**, 49–59.
- Telford, W. M., Geldart, L. P., Sheriff, R. & Keys, D. A. (1976), *Applied geophysics*, Cambridge Univ. Press.
- Tsoulis, D. (1999), *Analytical and Numerical Methods in Gravity Field Modelling of Ideal and Real Masses*, DGK Reihe C 510.
- Weicker, K. (2002), *Evolutionäre Algorithmen*, B. G. Teubner Verlag.
- Won, I. J. & Bevis, M. (1987), 'Computing the gravitational and magnetic anomalies due to a polygon: Algorithms and fortran subroutines', *Geophysics* **52**, 232–238.