Ü/155

E n g e l i s, G. K. [= G. ENGELIS]

ÜBER EINIGE ZWEIDIMENSIONALE ANALOGA DER KLASSISCHEN ORTHOGONALEN POLYNOME

Staatliche Lettische P.Stutschki-Universität

Übersetzung aus:

Latvijskij matematičeskij ežegodnik. Riga: Verlag "Zinatne", 15 (1974), S. 169 - 202.

Russ.: О НЕКОТОРЫХ ДВУМЕРНЫХ АНАЛОГАХ КЛАССИЧЕСКИХ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ПОЛИНОМОВ
O nekotorych dvumernych analogach klassičeskich ortogonal'nych polinomov

Annotation

The paper deals with some families of polynomials in two variables-eigenfunctions of a linear operator in partial derivatives of second order with polynomial coefficients. These polynomials have certain orthogonality properties with respect to a scalar product defined in the space of polynomials by means of a double sequence of moments. In greater detail is investigated a special class of operators when the corresponding polynomials form two biorthogonal sequences analogical to the classical orthogonal polynomials. An enumeration of all operators belonging to the special class is given.

Übersetzungsstelle
der Universitätsbibliothek Stuttgart

§ 1

1. In diesem Artikel werden die folgenden Bezeichnungen verwendet:

Π - Menge aller Polynome der beiden Argumente x und y über dem Körper der komplexen Zahlen;

Π_N - Menge aller Polynome, deren Grad nicht größer ist als N ;

Π'_N - Menge aller Polynome, deren Grad gleich N ist;

Π'_{mn} - Menge aller Polynome der Art $x^m y^n + q$, mit $q \in \Pi_{m+n-1}$.

Zur Bezeichnung der Polynomkoeffizienten wird gewöhnlich der Buchstabe verwendet, der zur Bezeichnung des Polynomes selbst genommen wird und mit Indizes versehen, z.B.

$$\varepsilon = \varepsilon(x,y) = \sum_{i,j} \varepsilon_{ij} x^i y^j ,$$

für gewisse Koeffizienten hingegen, denen man in einigen Polynomen begegnet, werden Einzelbezeichnungen angegeben (A, B usw.).

2. Für Π sei das lineare Funktional J vorgegeben, z.B. mit Hilfe der Doppelmomentenfolge $\{\mu_{kl}\}$:

$$J(x^k y^l) = \mu_{kl} , \; k, l = 0, 1, 2 \ldots \tag{1.1}$$

Dann wird das Skalarprodukt (p,q) für $p, q \in \Pi$ durch die Gleichung

$$(p, q) = J(pq) \tag{1.2}$$

bestimmt. Es versteht sich, daß (p, q) immer ein bilineares Funktional von p und q ist; doch (p, p) kann bei $p \neq 0$ auch eine nicht positive Zahl sein.

Die Polynome p und q heißen orthogonal, wenn $(p, q) = 0$.

Bekanntlich ist die Anwendung des Schmidt - Orthogonalisierungsverfahrens auf die Doppelfolge mit der Umwandlung in eine einfache Folge und dem Verlust der natürlichen Symmetrie verbunden. Doch gibt es eine Methode zur Aufstellung von zwei biorthogonalen Doppelfolgen aus Π, die diese Symmetrie bewahrt. Dabei wird eine der Polynomfolgen $\{p_{mn}\}$ vorgegeben durch die Bedingungen

$$p_{mn} \in \Pi'_{mn} \; ; \tag{1.3}$$

$$(p_{mn}, q) = 0 \quad \text{für} \quad q \in \Pi_{m+n-1} \; , \tag{1.4}$$

und die zweite $\{q_{kl}\}$ durch

$$q_{kl} = \sum_{i=0}^{k+l} \alpha(k, l, i)\, p_{i,k+l-i} \; ; \tag{1.5}$$

$$(q_{kl}, p_{i,k+l-i}) = \delta_{ki} \tag{1.6}$$

(mit δ_{ki} - Kronecker-Symbol). Offensichtlich existieren beide Folgen und sind eindeutig, wenn bei beliebigem natürlichem N die Gramsche Determinante aller Monome $x^i y^j$ mit $i + j < N$ von Null verschieden ist. Es ist ebenfalls offensichtlich, daß aus (1.3) - (1.6) folgt:

$$(p_{mn}, q_{kl}) = \delta_{mk}\, \delta_{nl} \; .$$

Wir nennen das Folgenpaar $\{p_{mn}\}$, $\{q_{kl}\}$ eine <u>normale biorthogonale Polynomenschar bezüglich des Funktionals J und der Basis (x,y)</u>. Bei dem Übergang zu den neuen Variablen

$$\begin{cases} x = t_{11}\bar{x} + t_{12}\bar{y} + t_{10} \; ; \\ y = t_{21}\bar{x} + t_{22}\bar{y} + t_{20} \; ; \end{cases} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{vmatrix} \neq 0 \; ; \tag{1.7}$$

wird das Funktional J auf natürliche Weise im Raum $\bar{\Pi}$ der Polynome von $\bar{x}$, $\bar{y}$ mit Hilfe der Gleichungen

$$J((t_{11}\bar{x} + t_{12}\bar{y} + t_{10})^k\, (t_{21}\bar{x} + t_{22}\bar{y} + t_{20})^l) = \mu_{kl} \tag{1.8}$$

bestimmt, und wir können die normale biorthogonale Polynomschar bezüglich des Funktionals J und der Basis $(\bar{x}, \bar{y})$ aufstellen. Diese Schar soll $\{\bar{p}_{mn}\}$, $\{\bar{q}_{kl}\}$ sein. Dann kann man die Verbindung zwischen den beiden Scharen ausreichend einfach mit Hilfe der Matrixfolge $A_N (N = 1,2,3, \ldots)$ formulieren.

A_N - quadratische Matrix vom Typ $(N + 1, N + 1)$, in der das l - te Element der k - ten Zeile gleich dem Koeffizienten bei $\bar{x}^{N-l+1}$ im Polynom $(t_{11}\bar{x} + t_{12})^{N-k+1}(t_{21}\bar{x} + t_{22})^{k-1}$ ist. Es sei P_N - Spaltenmatrix aus den Elementen $p_{N,0}, p_{N-1,1}, \ldots, p_{0,N}$, und analog dazu sind die Spalten in $\bar{P}_N$, Q_N, $\bar{Q}_N$ definiert. Man kann

sich leicht davon überzeugen, daß

$$\overline{P}_N = A_N^{-1} P_N \; ; \quad \overline{Q}_N = A_N' Q_N \tag{1.9}$$

(' - Transponierungszeichen).

3. Im vorliegenden Artikel wird der Fall untersucht, wenn alle Polynome p_{mn} und q_{kl} Eigenfunktionen eines Differentialoperators zweiter Ordnung einer bestimmten Art sind. Auf natürliche Weise dient zur Aufstellung dieser Theorie die Theorie der klassischen orthogonalen Polynome (eine Variable). Deshalb ist die Aufzählung einiger Eigenschaften der klassischen orthogonalen Polynome in der für unsere Zwecke geeigneten Form sinnvoll. Beweise werden nicht angeführt, da sie entweder offensichtlich sind oder leicht in Analogie zum Fall der Polynome zweier Argumente aufgestellt werden können.

1) Für jedes natürliche n hat die Gleichung

$$\Lambda(z) \equiv a(x)z'' + b(x)z' - n[(n-1)a''(x)/2 + b'(x)]z = 0$$

(mit $a(x) = a_2x^2 + a_1x + a_o$, $b(x) = b_1x + b_o$, a_i, b_i - komplexe Zahlen und $ka_2 + b_1 \neq 0$, $k = 0,1,2,\ldots$) als Lösung ein Polynom vom Grad n mit dem Koeffizienten 1 beim höchsten Glied. Wir bezeichnen dieses Polynom mit $p_n(x)$.

2) J sei ein lineares Funktional, das in der Menge aller Polynome von x erklärt, nicht identisch gleich 0 und so beschaffen ist, daß für jedes Polynom p gilt

$$J(ap' + bp) = 0 \; ,$$

und das Skalarprodukt sei mit Hilfe von (1.2) eingeführt. Dann folgt aus $m \neq n$

$$(p_m, p_n) = 0 \; .$$

Die Existenz des Funktionals J folgt aus einer anderen, der vorhergehenden gleichwertigen Definition:

$$J(x^k) = \mu_k, \quad k = 0,1,2,\ldots \; ,$$

mit $\mu_o \neq 0$, und für $k = 0,1,2,\ldots$ gilt die Gleichung

$$ka_o\mu_{k-1} + (ka_1 + b_o)\mu_k + (ka_2 + b_1)\mu_{k+1} = 0 \; .$$

3) Es existiert eindeutig bis auf einen konstanten Faktor eine Funktion $\rho(x)$, die nicht gleich identisch mit 0 ist und zwar derart, daß die Gleichung $\rho(x)\Lambda(z) = 0$ selbstadjungiert ist, d.h.

$$(\rho az)'' - (\rho bz)' = \rho az'' + \rho bz' .$$

Diese Funktion erfüllt die Pearson - Gleichung

$$a\rho' = (b - a')\rho .$$

Wenn die Zahlen $x_1, x_2 (x_1 \neq x_2)$ existieren, daß

$$\lim_{x \to x_i} \rho(x)\, a(x) = 0 \quad (i = 1,2) ,$$

dann läßt das Funktional J den Integralausdruck

$$J(p) = \int_{x_1}^{x_2} \rho(x)\, p(x)\, dx$$

zu (es wird angenommen, daß der Integrationsweg eine Kurve ohne Schlingen in der komplexen Ebene ist).

4) Die Polynome $q_n(x)$, die für jedes natürliche n durch die Rodriguez - Formel definiert werden,

$$q_n(x) = \rho^{-1}(\rho a^n)^{(n)} ,$$

haben folgende Orthogonalitätseigenschaft: wenn $m < n$, dann ist $(x^m, q_n) = 0$. Hieraus folgt, daß sich p_n und q_n nur durch einen konstanten Faktor unterscheiden.

5) Mit Hilfe einer linearen Argumenttransformation kann erreicht werden, daß $a(x)$ gleich einer der Funktionen: $x^2 - 1$, x^2, x oder 1 ist. Die Polynome $p_n(x)$ gehen bei dieser Transformation eigentlich in Jacobi -, Besselpolynome (wenn nach der Transformation $b_o \neq 0$) oder in x^n (wenn $b_o = 0$), Laguerre - oder Hermitepolynome über.

In § 2 dieses Artikels sind einige Analoga der Behauptungen 1 - 4 für den Fall bewiesen, wenn $\Lambda(z)$ durch einen linearen Operator zweiter Ordnung in partiellen Ableitungen mit beliebigen Polynomkoeffizienten ersetzt wird. Dabei ist die Existenz des Funktionals J zu postulieren. Zu Beginn von § 3 präzisieren wir die Art der Koeffizienten des Operators so, daß die Menge der Eigenfunktionen

dieses Operators einen ausreichenden Polynomvorrat enthält. Dann sind die Glieder der normalen biorthogonalen Schar bezüglich des Funktionals J bei beliebiger Basis (x,y) die Eigenfunktionen dieses Operators. In diesem Fall kann man die notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz des Funktionals J finden und (unter einigen zusätzlichen Bedingungen) zeigen, daß es eine solche Basis gibt, in der die Polynome q_{kl} eine gewisse Analogie der Rodriguez - Formel besitzen. In § 4 wird die Klassifikation der Operatoren angeführt, für die das Funktional J existiert und p_{mn}, q_{kl} gleichartig definiert sind; die Normalformen der entsprechenden Gleichungen $\Lambda(z) = 0$ werden aufgezählt. Schließlich wird die Beziehung zwischen den biorthogonalen Scharen, welche diesen Normalformen entsprechen, und den in der Literatur zu begegnenden Polynomscharen geklärt und einige Probleme formuliert, die nach Meinung des Autors der Untersuchung wert sind.

§ 2

1. In diesem Paragraph untersuchen wir die Differentialgleichung

$$az''_{xx} + 2bz''_{xy} + cz''_{yy} + dz'_x + ez'_y + fz = 0 , \qquad (2.1)$$

mit $a, b, c, d, e, f \in \Pi$. Wir benötigen auch die mit dieser Gleichung verbundenen Operatoren D_i $(i = 1,2,3,4)$:

$$D_1 p = ap'_x + bp'_y + dp \quad ; \qquad (2.2)$$

$$D_2 p = bp'_x + cp'_y + ep \quad ; \qquad (2.3)$$

$$D_3 p = D_1 p - dp \quad ; \qquad (2.4)$$

$$D_4 p = D_2 p - ep \quad . \qquad (2.5)$$

Angenommen, das Funktional J, welches das Skalarprodukt (1.2) in Π bestimmt, besitze die Eigenschaft:

für jedes $p \in \Pi$

$$J(D_1 p) = J(D_2 p) = 0 \qquad (2.6)$$

(Die Existenz eines nichttrivialen Funktionals mit dieser Eigenschaft wird für einen bestimmten Einzelfall der Gleichung (2.1) untersucht werden). Es zeigt sich, daß aus (2.6) eine gewisse

Orthogonalitätseigenschaft der Lösungen folgt.

<u>Theorem 1</u>. Gleichung (2.1) habe bei $f = f_1$ die Lösung $u \in \Pi$ und bei $f = f_2$ die Lösung $v \in \Pi$; dann ist

$$((f_1 - f_2)\, u\, , v\,) = 0\ .$$

<u>Beweis</u>: Für alle $p,\ q \in \Pi$ ist

$$J(q\, D_1\, p) + J(p\, D_3\, q) = J(D_1(pq)) = 0\ ,$$
$$J(q\, D_2\, p) + J(p\, D_4\, q) = J(D_2(pq)) = 0\ .$$

Aber dann ist

$$((f_1 - f_2)\ u,\ v) = J(f_1\, u \cdot v) - J(u \cdot f_2 v) =$$
$$= -J((D_1\, u'_x + D_2\, u'_y)\, v) + J((D_1\, v'_x + D_2\, v'_y)\, u) =$$
$$= J(u'_x\, D_3\, v + u'_y\, D_4\, v - v'_x\, D_3\, u - v'_y\, D_4\, u) = J(0) = 0\ .$$

<u>Folgerung</u>: Wenn $f_1,\ f_2 \in \Pi_0$, $f_1 \neq f_2$, dann ist $(u,v) = 0$.

2. Wir wollen jetzt zeigen, daß man in einigen Fällen das Funktional J, das die Eigenschaft (2.6) besitzt, als Integral über einem zweidimensionalen Bereich interpretieren kann. Dafür brauchen wir einige Hilfsbegriffe und Hilfssätze.

Gleichung (2.1) nennen wir formal selbstadjungiert, wenn sie mit

$$(az)''_{xx} + 2(bz)''_{xy} + (cz)''_{yy} - (dz)'_x - (ez)'_y + fz = 0$$

übereinstimmt; sie wird potentiell selbstadjungiert genannt, wenn sie nach Multiplikation mit einer bestimmten Funktion $\rho(x,y)$, die nicht identisch gleich null ist, formal selbstadjungiert wird.

Wir führen die Bezeichnungen

$$g = d - a'_x - b'_y\ ; \tag{2.7}$$
$$h = e - b'_x - c'_y\ ; \tag{2.8}$$
$$\alpha = ac - b^2\ ; \tag{2.9}$$
$$\beta = cg - bh\ ; \tag{2.10}$$
$$\gamma = ah - bg \tag{2.11}$$

ein. Man kann leicht erkennen, daß die im weiteren zu verwendenden

Gleichungen

$$a\beta + b\gamma = g\alpha \quad ; \tag{2.12}$$

$$b\beta + c\gamma = h\alpha \tag{2.13}$$

gelten.

Theorem 2. Gleichung (2.1) ist dann und nur dann potentiell selbstadjungiert, wenn eine der Bedingungen erfüllt wird:

$$\alpha \neq 0 \ , \ \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)'_y = \left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)'_x \tag{2.14}$$

oder

$$\alpha = \beta = \gamma = 0 \ . \tag{2.15}$$

Beweis. Man kann leicht verifizieren, daß Gleichung (2.1) dann und nur dann formal selbstadjungiert (*) ist, wenn $g = h = 0$. Folglich wird sie dann und nur dann potentiell selbstadjungiert sein, wenn es eine Funktion ρ gibt, die die Bedingungen erfüllt (siehe (2.7), (2.8)):

$$\rho d - (\rho a)'_x - (\rho b)'_y = 0 \ ;$$

$$\rho e - (\rho b)'_x - (\rho c)'_y = 0$$

oder

$$\begin{aligned} a\rho'_x + b\rho'_y &= g\rho \ ; \\ b\rho'_x + c\rho'_y &= h\rho \ . \end{aligned} \tag{2.16}$$

Wenn (2.16) eine nichttriviale Lösung hat, dann gilt entweder (2.15) oder

$$(\ln \rho)'_x = \frac{\beta}{\alpha} \ , \quad (\ln \rho)'_y = \frac{\gamma}{\alpha} \ ,$$

hieraus folgt (2.14).

Anmerkung. Die Eigenschaft der potentiellen Selbstadjungiertheit ist eigentlich lokal. Wir haben nicht die exakte, sondern die kürzere globale Formulierung verwendet, da die einfache Natur der Koeffizienten von Gleichung (2.1) es gestattet, leicht die notwendigen Präzisierungen vorzunehmen.

Theorem 3. Wenn Gleichung (2.1) potentiell selbstadjungiert ist, die Funktion ρ die Bedingungen (2.16) erfüllt, die stückweise glatte geschlossene Kurve L den zweidimensionalen Bereich D begrenzt, für

(*) im russischen Original nur: adjungiert (Anm.d.Übers.)

jedes $p \in \Pi$ $\iint_D \rho p \, dx \, dy$ existiert und die Gleichung

$$\int_L \rho p \, (a dy - b dx) = \int_L \rho p \, (b dy - c dx) = 0 \qquad (2.17)$$

gilt, dann erfüllt das Funktional

$$J(p) = \iint_D \rho p \, dx \, dy$$

die Gleichung (2.6).

Beweis. Wenn die Funktionen u, v zusammen mit den Ableitungen erster Ordnung stetig auf D sind, dann folgt aus der Greenschen Formel

$$\iint_D u v'_x \, dxdy = \int_L uv \, dy - \iint_D u'_x v \, dxdy \; ;$$

$$\iint_D u v'_y \, dxdy = - \int_L uv \, dx - \iint_D u'_y v \, dxdy \; .$$

Dann aber ist für ein beliebiges $p \in \Pi$

$$J(D_1 p) = \iint_D \rho D_1 p \, dxdy =$$

$$= \int_L \rho p \, (a dy - b dx) - \iint_D p(a\rho'_x + b\rho'_y - g\rho) \, dx \, dy$$

und aus (2.17) und (2.16) folgt $J(D_1 p) = 0$. Ganz analog dazu wird die zweite Gleichung von (2.6) bewiesen.

Das Theorem 3 gestattet eine natürliche Verallgemeinerung auf einen unbeschränkten Bereich. Einen gewissen Hinweis zur Zusammenstellung des Bereiches D einer konkreten Gleichung (2.1) liefert das folgende Theorem.

Theorem 4. Wenn (2.14) gilt, L glatte Kurve ist und für ein beliebiges $p \in \Pi$ (2.17) erfüllt wird, wobei ρ eine auf L analytische Funktion ist, welche die Bedingungen (2.16) erfüllt, dann ist in allen Punkten dieser Kurve $\alpha(x,y) = 0$.

Beweis. L sei durch eine parametrische Gleichung vorgegeben, wobei in jedem Punkt gilt

$$|x'(t)| + |y'(t)| > 0. \qquad (2.18)$$

Da p beliebig ist, erhalten wir aus (2.17)

$$\rho(ay' - bx') = \rho(by' - cx') = 0 \qquad (2.19)$$

in jedem Punkt $(x_o, y_o) \in L$. Wenn $\rho(x_o, y_o) = 0$ und $\alpha(x_o, y_o) \neq 0$, dann folgt aus (2.16) leicht, daß alle Einzelableitungen der Funktion

$\rho(x,y)$ im Punkt (x_o,y_o) zu null und $\rho(x,y) \equiv 0$ werden, was einen Widerspruch ergibt. Wenn jedoch $\rho(x_o,y_o) \neq 0$, dann folgt aus (2.19) und (2.18) wieder $\alpha(x_o,y_o) = 0$.

Anmerkung. Die Analoga der Theoreme 2 - 4 können auch in dem Fall gelten, wenn die Koeffizienten von Gleichung (2.1) keine Polynome sind.

3. Wir wollen jetzt zeigen, daß man in dem Fall, wenn (2.14) und eine bestimmte Zusatzbedingung erfüllt wird, die Folge der Polynome aufstellen kann, deren Glieder orthogonal sind zu den Polynomen mit ausreichend niedrigen Potenzen und die durch ein bestimmtes Analogon der Rodriguez - Formel bestimmt wird. Es seien a_1, a_2, b_1, c_1, $c_2 \in \Pi$ festgesetzt, daß

$$a = a_1 a_2, \quad b = a_1 b_1 c_1, \quad c = c_1 c_2 \tag{2.20}$$

(solche Polynome existieren immer; man kann z.B. $a_1 = c_1 = 1$ annehmen). Dann werden auch die Polynome α_1, δ, ε, κ, λ völlig bestimmt, welche die Gleichungen

$$\alpha = a_1 c_1 \alpha_1 = c_1 \delta = a_1 \varepsilon \; ; \quad \beta = c_1 \kappa \; ; \quad \gamma = a_1 \lambda \tag{2.21}$$

erfüllen. Wenn (2.14) erfüllt wird, dann gilt

$$\frac{\rho'_x}{\rho} = \frac{\kappa}{\delta} \quad , \quad \frac{\rho'_y}{\rho} = \frac{\lambda}{\varepsilon} \quad . \tag{2.22}$$

Wir führen noch die Operatoren

$$\begin{aligned}
D_5 p &= \delta p'_x + (\delta'_x + \kappa)\, p \; ; \\
D_6 p &= \varepsilon p'_x + (\varepsilon'_y + \lambda)\, p \; ; \\
D_7 p &= p'_x + \kappa\delta^{-1} p = \rho^{-1}(\rho p)'_x \; ; \\
D_8 p &= p'_y + \lambda\varepsilon^{-1} p = \rho^{-1}(\rho p)'_y
\end{aligned}$$

ein.

Theorem 5. Wenn das Funktional J die Bedingungen (2.6) erfüllt, dann ist für jedes $p \in \Pi$

$$J(D_5 p) = J(D_6 p) = 0 \; . \tag{2.23}$$

Zum Beweis reicht es aus, anstelle von p in die erste Gleichung (2.6) $c_2 p$ einzusetzen, in die zweite Gleichung (2.6) $a_1 b_1 p$ und die Ergebnisse unter Berücksichtigung der Gestalt der Polynome δ und κ zu subtrahieren.

Theorem 6. Wenn in Gleichung (2.1) die Bedingung (2.14) und außerdem in (2.20)

$$a'_{1y} = c'_{1x} = 0 \ , \tag{2.24}$$

gilt, dann ist

$$Q_{mn} = \rho^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^m \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^n (\rho\, \delta^m\, \varepsilon^n) \in \Pi \tag{2.25}$$

und bei $k < m$ oder $l < n$

$$(x^k y^l \ , \ Q_{mn}) = 0 \ . \tag{2.26}$$

Beweis. Man kann sich leicht davon überzeugen, daß aus (2.14) und (2.22) die Vertauschbarkeit der Operatoren D_7 und D_8 folgt und daß die Gleichung

$$Q_{mn} = D_7^m\, D_8^n\, (\delta^m\, \varepsilon^n) \ . \tag{2.27}$$

gilt. Um die Inklusion (2.25) zu beweisen, reicht es zu zeigen, daß für alle natürlichen i, j

$$D_7\,(\delta^i\, \varepsilon^j\, p) = \delta^{i-1}\, \varepsilon^j\, q \ , \ q \in \Pi \tag{2.28}$$

und

$$D_8\,(\delta^i\, \varepsilon^j\, p) = \delta^i\, \varepsilon^{j-1}\, r \ , \ r \in \Pi \tag{2.29}$$

gilt, falls $p \in \Pi$.
(2.28) folgt aus Gleichung

$$D_7(\delta^i\, \varepsilon^j\, p) = \delta^{i-1}\, \varepsilon^j\, (\kappa p + i\delta'_x\, p + j\delta\varepsilon^{-1}\, \varepsilon'_x\, p + \delta\, p'_x) \ ,$$

da (2.21) und (2.24)

$$\delta\varepsilon^{-1}\, \varepsilon'_x = a_1\, \alpha_1\, c_1^{-1}\, \alpha_1^{-1}\, c_1\, \alpha'_{1x} = a_1\, \alpha'_{1x} \in \Pi$$

ergeben. Analog wird (2.29) bewiesen.
Das heißt, (2.25) ist bewiesen.

Zum Beweis von Gleichung (2.26) benötigen wir drei Eigenschaften der Operatoren D_7 und D_8, die wir nur für D_7 formulieren. Man kann erstens leicht verifizieren, daß (für die beliebig zweimal differenzierbaren Funktionen r und p)

$$r\, D_7\, D_5\, p = D_5(\delta^{-1}\, pr(\kappa + \delta'_x) + p'_x\, r - p\, r'_x) + \delta\, p\, r''_{xx} \ .$$

Hieraus folgt: wenn $r''_{xx} = 0$, $q \in \Pi$, j - natürliche Zahl ist, dann gilt

$$rD_7\, D_5(\delta^j\, q) = D_5(\delta^{j-1}\, q_1), \ q_1 \in \Pi \ . \tag{2.30}$$

Zweitens kann man ebenfalls leicht verifizieren, daß

$$xD_7 p = D_7(xp) - p ,$$

hieraus folgt

$$xD_7^k p = D_7^{k-1}(xD_7 p - (k-1)p) . \tag{2.31}$$

Drittens ist für jede Funktion p

$$D_7(\delta p) = D_5 p . \tag{2.32}$$

Wir beweisen jetzt (2.26) für den Fall, wenn $0 \leqslant k < m$. Es sei

$$s = x^k y^l Q_{mn} ;$$

aus (2.27) und (2.28) folgt

$$s = x^k y^l D_7^m D_8^n (\delta^m \varepsilon^n) = x^k D_7^m (y^l D_8^n (\delta^m \varepsilon^n)) =$$

$$= x^k D_7^m (\delta^m p) , \; p \in \Pi .$$

Gleichung (2.32) liefert jetzt

$$s = x^k D_7^{m-1} D_5(\delta^{m-1} p) .$$

Aus (2.31) finden wir

$$s = x^{k-1} D_7^{m-2} [x D_7 D_5(\delta^{m-1}p) - (m-2) D_5 (\delta^{m-1}p)]$$

und, indem wir (2.30) mit $r = x$ anwenden, erhalten wir

$$s = x^{k-1} D_7^{m-2} D_5 (\delta^{m-2} p_1), \; p_1 \in \Pi .$$

Wir wiederholen diese Transformation noch $k-1$ mal und sehen, daß

$$s = D_7^{m-k-1} D_5({}^{m-k-1}p_k), \; p_k \in \Pi .$$

Jetzt wenden wir $m-k-1$ mal (2.30) mit $r = 1$ an, damit

$$s = D_5 q, \; q \in \Pi .$$

Doch nach Theorem 5 ist

$$J(s) = J(D_5 q) = 0 ,$$

was auch zu beweisen war. Der Fall $l < n$ ist völlig analog dazu. Das Theorem ist bewiesen.

4. Desweiteren benötigen wir noch einige Beziehungen zwischen den Koeffizienten von Gleichung (2.1), die mit dem Kommutanten der Operatoren D_1 und D_2 zusammenhängen.

Theorem 7. Für jedes $p \in \Pi$ ist

$$(D_1 D_2 - D_2 D_1) p = i p'_x + j p'_y + k p \ , \tag{2.33}$$

mit

$$i = D_3 b - D_4 a \ ; \tag{2.34}$$

$$j = D_3 c - D_4 b \ ; \tag{2.35}$$

$$k = D_3 e - D_4 d \tag{2.36}$$

(die Operatoren D_i werden durch die Gleichungen (2.2) - (2.5) bestimmt).

Der Beweis läßt sich auf einfache Berechnungen reduzieren. Ebenso einfach werden die im weiteren Verlauf verwendeten Gleichungen verifiziert:

$$D_3 \alpha = (a'_x + b'_y)\alpha - b + aj \ ; \tag{2.37}$$

$$D_4 \alpha = (b'_x + c'_y)\alpha - ci + bj \ ; \tag{2.38}$$

$$D_3 \beta + D_4 \gamma = (g'_x + h'_y)\alpha - hi + gj \ . \tag{2.39}$$

Theorem 8. Wenn Gleichung (2.1) potentiell selbstadjungiert ist, dann ist

$$(D_4 g - D_3 h)\alpha + i\beta + j\gamma = 0 \ . \tag{2.40}$$

Der Beweis folgt aus Theorem 2. Die Gleichung (2.14) ist gleichwertig zu

$$\alpha\beta'_y - \alpha'_4\beta - \alpha\gamma'_x + \alpha'_x\gamma = 0 \ ,$$

wenn wir aber (2.37) und (2.38) verwenden, erhalten wir

$$\begin{aligned} \alpha\beta'_y - \alpha'_y\beta - \alpha\gamma'_x - \alpha'_x\gamma &= h D_3 \alpha - g D_4 \alpha + (\beta'_y - \gamma'_x)\alpha = \\ &= (a'_x h + b'_y h - b'_x g - c'_y g + \beta'_y - \gamma'_x)\alpha + h(aj - bi) - \\ &\quad - g(bj - ci) = (D_4 g - D_3 h)\alpha + i\beta + j\gamma \ . \end{aligned}$$

Wenn wir anstelle von (2.14) (2.15) haben, dann ist (2.40) offensichtlich.

Hinzugefügt sei, daß ein zu Theorem 8 umgekehrtes Theorem falsch ist, da z.B. der Fall möglich ist, daß $\alpha = i = j = 0$, $\beta \neq 0$.

5. In einigen Fällen kann man Gleichung (2.1) oder die mit ihr zusammenhängenden Polynome wesentlich vereinfachen, wenn man die Transformation (1.7) verwendet. Es ist offensichtlich, daß (2.1) dabei wieder in eine lineare Differentialgleichung mit Polynomkoeffizienten übergeht. Die Polynome, die mit der neuen Gleichung zusammenhängen und als Funktionen von $\bar{x}$, $\bar{y}$ betrachtet werden, bezeichnen wir durch den Buchstaben, der für das entsprechende Polynom verwendet wird, das mit (2.1) zusammenhängt, jedoch mit einem Strich versehen. Außerdem werden wir Bezeichnungen des Typs

$$\hat{a}(\bar{x},\bar{y}) = a(x,y) = a(t_{11}\bar{x} + t_{12}\bar{y} + t_{10},\ t_{21}\bar{x} + t_{22}\bar{y} + t_{20})$$

verwenden.

<u>Theorem 9</u>. Bei der Transformation (1.7) geht Gleichung (2.1) in

$$\overline{az}''_{\overline{xx}} + 2\,\overline{bz}''_{\overline{xy}} + \overline{cz}''_{\overline{yy}} + \overline{dz}'_{\bar{x}} + \overline{ez}'_{\bar{y}} + \overline{fz} = 0 \qquad (2.41)$$

über, wobei

a) $\begin{pmatrix} \bar{a} \\ \bar{b} \\ \bar{c} \end{pmatrix} = A_2^{-1} \begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \\ \hat{c} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \bar{d} \\ \bar{e} \end{pmatrix} = A_1^{-1} \begin{pmatrix} \hat{d} \\ \hat{e} \end{pmatrix}$, $\bar{f} = \hat{f}$;

b) $\bar{\alpha} = \Delta^{-2}\hat{\alpha}$;

c) $\begin{pmatrix} \bar{i} \\ \bar{j} \end{pmatrix} = \Delta^{-1} A_1^{-1} \begin{pmatrix} \hat{i} \\ \hat{j} \end{pmatrix}$

d) wenn für Gleichung (2.1) ein nichttriviales Funktional mit der Eigenschaft (2.6) existiert, dann ist dies für Gleichung (2.41) ebenso;

e) wenn Gleichung (2.1) potentiell selbstadjungiert ist, dann auch (2.41).

Die Punkte a) - c) werden durch direkte Berechnungen bewiesen, welche wir weglassen. Gehen wir zum Beweis von Punkt d) über. Die zu (1.7) umgekehrte Transformation sei

$$\bar{x} = s_{11}x + s_{12}y + s_{10} ;$$
$$\bar{y} = s_{21}x + s_{22}y + s_{20}$$

und das Funktional J im Raum der Polynome von x, y sei durch die Gleichungen (1.1) bestimmt. Wir bestimmen das Funktional $\bar{J}$ im Raum der Polynome von $\bar{x}$, $\bar{y}$ mit Hilfe der Gleichungen

$$\bar{J}(\bar{x}^k,\bar{y}^l) = J\,(s_{11}x + s_{12}y + s_{10})^k\,(s_{21}x + s_{22}y + s_{20})^l = v_{kl} ,$$
$$k, l = 0, 1, 2, \ldots .$$

Dann ist

$$J(x^k y^l) = \bar{J}\,(t_{11}\bar{x} + t_{12}\bar{y} + t_{10})^k\,(t_{21}\bar{x} + t_{22}\bar{y} + t_{20})^l$$

und hieraus folgt, daß nicht alle v_{ij} gleich null sind, wenn nicht alle μ_{ij} gleich null sind. Außerdem ist

$$\bar{J}(\bar{a}\bar{p}'_{\bar{x}} + \bar{b}\bar{p}'_{\bar{y}} + \bar{d}\bar{p}) = J\{\Delta^{-2}\,(t_{22}^2 a - 2\,t_{12}\,t_{22} b +$$
$$+ t_{12}^2 c)\,(t_{11}p'_x + t_{21}p'_y) + (-t_{21}t_{22}a + t_{11}t_{22}b + t_{12}t_{21}b -$$
$$- t_{11}t_{12}c)\,(t_{12}p'_x + t_{22}p'_y) + \Delta^{-1}(t_{22}d - t_{12}e)p\} =$$
$$= \Delta^{-1}J[t_{22}(ap_x + bp'_y + dp) - t_{12}(bp'_x + cp'_y + ep)] = 0$$

und analog dazu

$$\bar{J}(\bar{b}p'_{\bar{x}} + \bar{c}p'_{\bar{y}} + ep) = 0 .$$

Zum Beweis von Behauptung e) nehmen wir an, daß es eine Funktion $\rho(x,y)$ gibt, die die Gleichungen (2.16) erfüllt. Es sei $\bar{\rho}(\bar{x},\bar{y}) = \rho(x,y)$. Dann kann man leicht verifizieren, daß

$$\bar{a}\bar{\rho}'_{\bar{x}} + \bar{b}\bar{\rho}'_{\bar{y}} - \bar{g}\bar{\rho} = t_{22}\Delta^{-1}(a\rho'_x + b\rho'_y - g\rho) -$$
$$- t_{21}\Delta^{-1}(b\rho'_x + c\rho'_y - h\rho) = 0 .$$

Analog dazu wird die zweite Gleichung von (2.16) verifiziert. Nach Theorem 2 ist Gleichung (2.41) potentiell selbstadjungiert. Das Theorem ist bewiesen.

<u>Folgerung</u>. Wenn für Gleichung (2.1) die Operatoren D_1 und D_2 kommutieren, dann ist dies für Gleichung (2.41) ebenso.

Hinzugefügt sei, daß Gleichung (2.24) bei der Transformation (1.7) nicht erhalten bleiben kann. Deshalb ist es möglich, daß nach der Transformation die Funktion Q_{mn}, welche durch Formel (2.25) bestimmt wird, kein Polynom ist, und das Skalarprodukt (2.26) keinen Sinn hat.

§ 3

1. Jetzt wählen wir eine bestimmte Klasse von Gleichungen (2.1) aus, die sich dadurch auszeichnet, daß eine beliebige Gleichung dieser Klasse genügend viele Polynomlösungen besitzt.

Theorem 10. In (2.1) sei der Koeffizient f vom natürlichen Parameter N abhängig, und bei jedem N haben wir $f(N) \in \Pi_o$; dann sind die zwei Behauptungen gleichwertig:

a) bei jedem N hat Gleichung (2.1) $N+1$ linear unabhängige Lösungen aus Π_N, doch besitzt sie keine nichttriviale Lösungen aus Π_{N-1} ;

b) Gleichung (2.1) sieht folgendermaßen aus

$$(Ax^2 + a_{10}x + a_{01}y + a_{oo})z''_{xx} + 2(Axy + b_{1o}x + b_{o1}y + b_{oo})z''_{xy} +$$
$$+ (Ay^2 + c_{1o}x + c_{o1}y + c_{oo})z''_{yy} + (Bx + d_{oo})z'_x + (By + e_{oo})z'_y -$$
$$- N(AN - A + B)z = 0 ; \tag{3.1}$$

wobei

$$kA + B \neq 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \quad . \tag{3.2}$$

Beweis. Behauptung a) sei erfüllt. Dann hat (2.1) bei jedem N Lösungen folgender Art:

$$z = P_{mn}(x,y) = x^m y^n + \sum_{k+l<N} z(m,n,k,l)\, x^k y^l \tag{3.3}$$

$$m = 0,1,\ldots, N ; \; n = N - m .$$

Wir bezeichnen mit $\tilde{a}$, $\tilde{b}$, $\tilde{c}$ ($\tilde{d}$, $\tilde{e}$) die Summen jener Glieder der Koeffizienten a, b, c (d,e), deren Potenz größer als 2 (größer als 1) ist. Dann folgt aus der Existenz der Lösungen der Art (3.3), daß bei allen natürlichen m und n die Gleichung

$$\tilde{a} \cdot m(m-1)\, x^{m-2} y^n + 2\tilde{b} \cdot mnx^{m-1} y^{n-1} + \tilde{c} \cdot n(n-1)\, x^m y^{n-2} +$$
$$+ \tilde{d} \cdot mx^{m-1} y^n + \tilde{e} \cdot nx^m y^{n-1} = 0$$

erfüllt ist, woraus folgt, daß

$$\tilde{a} = \tilde{b} = \tilde{c} = \tilde{d} = \tilde{e} = 0 ,$$

d.h. $a, b, c \in \Pi_2$, $d, e \in \Pi_1$. Wir bezeichnen mit a^o, b^o, c^o (d^o ,e^o) die Summen jener Glieder der Koeffizienten a, b, c (d, e) , deren Potenz gleich 2 (gleich 1) ist. Dann erhalten wir für alle natürlichen m, n

$$a^o \cdot m(m-1)\, x^{m-2} y^n + 2b^o \cdot mnx^{m-1} y^{n-1} +$$
$$+ c^o \cdot n(n-1)\, x^m y^{n-2} + d^o \cdot mx^{m-1} y^n +$$
$$+ e^o \cdot nx^m y^{n-1} + f(m+n)\, x^m y^n = 0 . \qquad (3.4)$$

Entsprechend Abschnitt 1 §1 schreiben wir $a^o = a_{2o}x^2 + a_{11}xy + a_{o2}y^2$ und analog dazu auch für b^o, c^o, d^o, e^o . Wir nehmen an $n = 0$ und erhalten aus (3.4)

$$m(m-1)\, a^o + md^o x + f(m)\, x^2 = 0 ;$$

hieraus folgt

$$a_{o2} = a_{11} = d_{o1} = 0 , \; f(m) = -m(ma_{2o} - a_{2o} + d_{1o}) .$$

Ganz analog dazu ist

$$c_{2o} = c_{11} = c_{1o} = 0 , \; f(n) = -n(nc_{o2} - c_{o2} + e_{o1}) .$$

Folglich muß gelten

$$a_{2o} = c_{o2} = A, \; d_{1o} = e_{o1} = B, \; f(N) = -N(NA - A + B) .$$

Wir setzen die gefundenen Werte der Funktionen a^o, c^o, d^o, e^o, f in (3.4) ein und erhalten

$$b_{2o} = b_{o2} = 0, \; b_{11} = A .$$

Damit ist bewiesen: aus a) folgt, daß Gleichung (2.1) die Gestalt (3.1) hat.

Man kann sich ebenfalls davon überzeugen, daß (3.1) für jedes natürliche $m \leqslant N$ die Lösung (3.3) hat. Dafür genügt es zu bemerken, daß $\sum_{kl=0}^{\infty} z_{kl}\, x^k y^l$ dann und nur dann Lösung von Gleichung (3.1) ist, wenn

für alle natürlichen k, l die Gleichung

$$\{N(AN - A + B) - (k + l)\,[A(k + l) - A + B]\}\, z_{kl} +$$
$$+ c_{1o}(l + 2)(l + 1)\, z_{k-1,l+2} + (2\, b_{1o}k + c_{o1}l + e_{oo})(l + 1)\, z_{k,l+1} +$$
$$+ (a_{1o}k + 2\, b_{o1}l + d_{oo})(k + 1)\, z_{k+1,l} + a_{o1}(k + 2)(k + 1)\, z_{k+2,l-1} +$$
$$+ c_{oo}(l + 2)(l + 1)\, z_{k,l+2} + 2\, b_{oo}(k + 1)(l + 1)\, z_{k+1,l+1} +$$
$$+ a_{oo}(k + 2)(k + 1)\, z_{k+2,l} = 0 \qquad (3.5)$$

erfüllt wird, und daß man, wenn man in diese Gleichung die passenden Werte k, l einsetzt, schrittweise (in Reihenfolge der Abnahme der Summe $k + l$) die Koeffizienten $z(m, n, k, l)$ aus (3.3) errechnen kann. (Die Koeffizienten können nicht eindeutig bestimmt sein, wenn wir für ein bestimmtes $N_1 < N$ $f(N_1) = f(N)$ haben.) Wenn bei einem bestimmten natürlichen k Gleichung $kA + B = 0$ erfüllt wird, dann gibt es solche natürlichen N_1 und N_2, daß $N_1 < N_2$, $N_1 + N_2 = k + 1$; doch dann ist $f(N_1) = f(N_2)$,und Gleichung (3.1) mit $N = N_2$ hat eine nichttriviale Lösung aus Π_{N_1} , was der Bedingung a) widerspricht. Damit ist der erste Teil des Beweises beendet.

Es sei jetzt b) erfüllt. Davon, daß (3.1) eine Lösung in der Form von (3.3) hat, haben wir uns bereits überzeugt; aus (3.5) folgt, daß (3.1) dann und nur dann eine nichttriviale Lösung aus Π_{N-1} hat, wenn es ein solches $N' < N$ gibt, daß $f(N') = f(N)$ ist.
Doch hieraus folgt

$$(N + N' - 1)\, A + B = 0 \;,$$

was der Bedingung (3.2) widerspricht.
Das Theorem ist bewiesen.

<u>Anmerkung</u>. Aus (3.5) folgt, daß man Formel (3.3) für die Lösung P_{mn} der Gleichung (3.1) noch präzisieren kann, und zwar indem man über jene Werte k, l summiert, für die $k + 2l \leqslant m + 2n$, $2k + l \leqslant 2m + n$. Wenn aber $a_{o1} = c_{1o} = 0$, dann kann man über jene Werte k, l summieren, für die $k \leqslant m$, $l \leqslant n$.

2. Gehen wir jetzt zu der Frage über, ob es ein nichttriviales Funktional J für Gleichung (3.1) gibt. Es zeigt sich, daß hier die Polynome i, j aus Theorem 7 eine wichtige Rolle spielen. Man kann leicht verifizieren, daß für Gleichung (3.1) aus (2.34) - (2.36) folgt

$$k = 0 \; ; \; i, j \in \Pi_1 \quad ,$$

und dabei gilt

$$\begin{aligned}
i_{10} &= -(Ab_{00} + a_{01}c_{10} - b_{10}b_{01}) \; ; \\
i_{01} &= Aa_{00} + a_{01}b_{10} - a_{10}b_{01} + b_{01}^2 - a_{01}c_{01} \; ; \\
i_{00} &= a_{00}b_{10} - a_{10}b_{00} + b_{01}b_{00} - a_{01}c_{00} \; ; \\
j_{10} &= -(Ac_{00} + b_{01}c_{10} - b_{10}c_{01} + b_{10}^2 - a_{10}c_{10}) \; ; \\
j_{01} &= -i_{10} \; ; \\
j_{00} &= b_{00}c_{01} - b_{01}c_{00} + a_{00}c_{10} - b_{10}b_{00} \; .
\end{aligned}$$

<u>Theorem 11</u>. Das nichttriviale Funktional J, das mit Gleichung (3.1) durch die Beziehungen (2.6) verbunden ist, existiert dann und nur dann, wenn für jedes natürliche $N > 0$ und jedes $p \in \Pi_N'$ solche q und r aus Π_{N-1} existieren, daß

$$ip_x' + jp_y' = D_1 q + D_2 r \quad ; \tag{3.8}$$

bei Erfüllung dieser Bedingung wird das Funktional genau bis auf einen konstanten Faktor bestimmt.

Es sei bemerkt, daß aus (2.33) und (3.6) Gleichung (3.8) mit $q = D_2 p$ und $r = -D_1 p$ folgt, doch erfüllen diese q und r nicht die Bedingungen des Theorems, da sie zu Π_{N+1}' gehören.

Den Beweis des Theorems führen wir in drei Schritten durch und erhalten beiläufig noch einige notwendige und hinreichende Bedingungen für die Existenz des nichttrivialen Funktionals J.

a) Das Funktional J ist völlig bestimmt durch die Doppelfolge (1.1), und Gleichungen (2.6) kann man für Gleichung (3.1) als unendliches homogenes System der linearen Gleichungen

$$\begin{aligned}
&a_{00}k\mu_{k-1,l} + b_{00}l\mu_{k,l-1} + a_{01}k\mu_{k-1,l+1} + (a_{10}k + b_{01}l + \\
&+ d_{00})\mu_{kl} + b_{10}l\mu_{k+1,l-1} + A(k+1) + B\,\mu_{k+1,l} = 0 \; ; \\
&b_{00}k\mu_{k-1,l} + c_{00}l\mu_{k,l-1} + b_{01}k\mu_{k-1,l+1} + (b_{10}k + c_{01}l + \\
&+ e_{00})\mu_{kl} + c_{10}l\mu_{k+1,l-1} + [A(k+1) + B]\mu_{k,l+1} = 0 \; , \\
&\qquad k,l = 0,1,2,\ldots
\end{aligned} \tag{3.9}$$

interpretieren.

Aus (3.2) folgt: wenn eine solche Folge überhaupt existiert, dann kann man sie nach der Vorgabe $\mu_{oo} \neq 0$ induktiv aufstellen (nach der Summe $k+l$), und das Verhältnis $\mu_{kl} : \mu_{oo}$ hängt nicht von μ_{oo} ab. Angenommen, alle μ_{kl} seien schon aufgestellt, für die $k + l \leqslant N > 0$. Aus (3.9) ist ersichtlich, daß $\mu_{N+1,0}$ und $\mu_{o,N+1}$ jetzt eindeutig bestimmt werden, doch für jedes der restlichen $\mu_{kl}(k+l = N+1)$ erhällt man zwei Gleichungen. Wir werden erläutern, wann diese Gleichungen widerspruchsfrei sind. Für (3.1) lassen die Polynome D_1p und D_2p (mit homogenen $p \in \Pi'_M$) die Darstellungen

$$D_1p = A(x^2p'_x + xyp'_y) + Bxp + D'_1p = (MA + B)\,xp + D'_1p \;;$$
$$D_2p = (MA + B)\,yp + D'_2p \;,$$

zu, mit D_1p, $D_2p \in \Pi_M$. Es sei $p = x^{k-1}y^{l-1} \in \Pi'_{N-1}$. Dann folgen aus (2.6) die Gleichungen

$$J[D_1(yp)] = J[(A\,(k-1+l) + B)\,xyp + D'_1(yp)] =$$
$$= (NA + B)\,\mu_{kl} + J[D'_1(yp)] = 0$$

und

$$J[D_2(xp)] = (NA + B)\mu_{kl} + J[D'_2(xp)] = 0 \;.$$

Das heißt, bei der Berechnung von μ_{kl} gibt es dann und nur dann keine Widersprüche, wenn für das Monom p gilt

$$J[D'_1(yp) - D'_2(xp)] = 0 \;.$$

Man kann leicht erkennen, daß diese Bedingung gleichwertig ist zu

$$J[D_1(yp) - D_2(xp)] = 0 \qquad (3.10)$$

für jedes $p \in \Pi_{N-1}$. Folglich ist die Forsetzung der Reihe dann und nur dann möglich, wenn der bereits aufgestellte Teil Gleichung (3.10) erfüllt.

b) Angenommen, (3.10) sei für jedes $p \in \Pi_{N-1}$ erfüllt; wir errechnen μ_{kl} für $k+l = N+1$ und verifizieren, ob (3.10) für jedes $p \in \Pi'_N$ erfüllt ist. Dabei können wir (2.6) nicht direkt verwenden, da $D_1(yp) \in \Pi'_{N+2}$, und für $k+l = N+2$ die Momente μ_{kl} nocht nicht gefunden sind. Aber es ist $D_1D'_2p$, $D_2D'_1p \in \Pi_{N+1}$, und aus (3.6) folgt,

daß $(D_1D_2 - D_2D_1)\,p \in \Pi_N$. Deshalb sind die Transformationen

$$\begin{aligned} 0 &= J(D_1D_2'p) - J(D_2D_1'p) = J(D_1D_2'p - D_2D_1'p) = \\ &= J[D_1(D_2p - Axyp_x' - Ay^2p_y' - Byp) - D_2(D_1p - \\ &- Ax^2p_x' - Axyp_y' - Bxp)] = J\,[(D_1D_2 - D_2D_1)p - \\ &- D_1(AN + B)\,yp + D_2(AN + B)\,xp] = \\ &= J[(D_1D_2 - D_2D_1)\,p] - (AN + B)\,J[D_1(yp) - D_2(xp)] \end{aligned}$$

zulässig. Hieraus ist klar, daß (3.10) dann und nur dann für alle $p \in \Pi_N$ erfüllt wird, wenn

$$J\,(D_1D_2 - D_2D_1)\,p = J\,(ip_x' + jp_y') = 0 \qquad (3.11)$$

c) Jetzt ist klar: wenn es für jedes $p \in \Pi_N'$ solch $q, r \in \Pi_{N-1}$ gibt, daß (3.8) erfüllt wird, dann folgt hieraus (3.11). Es bleibt noch die umgekehrte Behauptung zu beweisen; es sei $p = p_N + p_{N-1}$ mit $p_N \in \Pi_N'$, $p_{N-1} \in \Pi_{N-1}$; man kann leicht solche q_{N-1}, $r_{N-1} \in \Pi_{N-1}$ finden, daß

$$p_N = (AN + B)(xq_{N-1} + yr_{N-1})\ ; \quad p = D_1q_{N-1} + D_2r_{N-1} + \tilde{p}$$

mit $\tilde{p} \in \Pi_{N-1}$. Wenn wir jetzt anstelle von p das Polynom $\tilde{p}$ prüfen und diese Überlegung fortsetzen, dann erhalten wir, daß

$$p = D_1q + D_2r + p_o \quad ,$$

mit $q, r \in \Pi_{N-1}$, $p_o \in \Pi_o$. Hieraus ist ersichtlich, daß dann und nur dann $J(p) = 0$, wenn man q und r so wählen kann, daß $J(p_o) = p_o\mu_{oo} = 0$, aber da $\mu_{oo} \neq 0$, ist dies gleichwertig der Gleichung $p_o = 0$. Man kann jedoch anstelle von p in dieser Überlegung $(D_1D_2 - D_2D_1)\,p = i\,p_x' + j\,p_y'$ einsetzen.

Folglich gilt: wenn für jedes $p \in \Pi_N$ (3.11) erfüllt wird, so existieren solche $q, r \in \Pi_{N-1}$, daß (3.8) erfüllt wird. Das Theorem ist bewiesen.

<u>Folgerung 1</u>. Wenn die Operatoren D_1 und D_2 kommutieren, dann existiert das nichttriviale Funktional J für Gleichung (3.1).

<u>Folgerung 2</u>. Wenn für (3.1) das nichttriviale Funktional J existiert, dann ist

$$d_{oo}\, i_{1o} + e_{oo}\, i_{o1} = Bi_{oo} \; ; \quad d_{oo}\, j_{1o} + e_{oo}\, j_{o1} = Bj_{oo} \; , \qquad (3.12)$$

d.h. i und j sind Linearkombinationen der Polynome d und e. Diese Behauptung folgt aus Theorem 11, wenn man $p = x$ und $p = y$ annimmt.

Daß (3.12) nicht hinreichend ist für die Existenz des nichttrivialen Funktionals F, zeigt ein Beispiel, in dem (3.1) die Gestalt

$$(x^2 + x)\, z''_{xx} + 2\,(xy + y + 1)\, z''_{xy} + y^2 z''_{yy} + xz'_x + yz'_y - N^2 z = 0$$

hat. Hier werden die Gleichungen (3.12) erfüllt; das System (3.9) liefert (wenn man $\mu_{oo} = 1$ annimmt):

$$\mu_{o1} = \mu_{1o} = 0 \; ; \quad \mu_{2o} = 0 \; ; \quad \mu_{11} = -\tfrac{1}{2} \; ; \quad \mu_{o2} = 0 \; ; \quad \mu_{3o} = 0 \; ;$$

$$\mu_{21} = \tfrac{1}{3} \; ; \quad \mu_{12} = \mu_{o3} = 0 \; ; \quad \mu_{4o} = 0 \; ; \quad \mu_{31} = -\tfrac{1}{4} \; ; \quad \mu_{22} = \tfrac{1}{4} \; ;$$

$$\mu_{13} = \mu_{o4} = 0 \; ;$$

doch für μ_{32} liefern die Gleichungen (3.9) mit $k = 3$, $l = 1$ und $k = 2$, $l = 2$ verschiedene Werte.

<u>Anmerkung</u>. Wenn man das Theorem auf konkrete Gleichungen anwenden will, verwendet man manchmal geeigneterweise folgende Erörterung.
Wenn q homogenes Polynom der Potenz k ist, dann ist

$$D_1(q) = Q_1(q) + Q_2(q) + Q_3(q) \; ,$$

wobei $Q_i(q)$ ebenfalls homogene Polynome sind, die durch die Gleichungen

$$Q_1(q) = (kA + B)\, xq \; ;$$

$$Q_2(q) = (a_{1o}x + a_{o1}y)\, q'_x + (b_{1o}x + b_{o1}y)\, q'_y + d_{oo}q \; ;$$

$$Q_3(q) = a_{oo}q'_x + b_{oo}q'_y$$

bestimmt werden. Analog bestimmen wir mit Hilfe von D_2 die Operatoren R_1, R_2, R_3. Es sei $p = x^m y^n$, $m + n = N > 1$,

$$q = \sum_0^{N-1} q_k \quad , \quad r = \sum_0^{N-1} r_k \quad ,$$

wobei q_k, r_k homogene Polynome der Potenz k sind. Dann reduziert sich die Bedingung (3.8) auf ein Gleichungssystem bezüglich q_k, r_k:

$$Q_1(q_{N-1}) + R_1(r_{N-1}) = (i_{1o}x + i_{o1}y)\,p'_x + (j_{1o}x + j_{o1}y)\,p'_y \;;$$
$$Q_1(q_{N-2}) + R_1(r_{N-2}) + Q_2(q_{N-1}) + R_2(r_{N-1}) = i_{oo}p'_x + j_{oo}p'_y \;;$$
$$Q_1(q_{N-k}) + R_1(r_{N-k}) + Q_2(q_{N-k+1}) + R_2(r_{N-k+1}) +$$
$$+ Q_3(q_{N-k+2}) + R_3(r_{N-k+2}) = 0 \quad (k = 3,4,\ldots,N) \;;$$
$$Q_2(q_o) + R_2(q_o) + Q_3(q_1) + R_3(r_1) = 0 \;.$$

Aus der ersten Gleichung des Systems kann man leicht q_{N-1}, r_{N-1} finden, aus der zweiten q_{N-2}, r_{N-2} usw., und schließlich aus der vorletzten Gleichung mit großem Freiheitsgrad q_o, r_o. Die letzte Gleichung aber kann man in der Form

$$a_{oo}q_{1o} + b_{oo}(q_{o1} + r_{1o}) + c_{oo}r_{o1} + d_{oo}q_{oo} + e_{oo}r_{oo} = 0 \;. \qquad (3.13)$$

anschreiben. Wenn man für jedes m, n mit $m+n > 1$ solche q_1, r_1, q_o, r_o finden kann, daß (3.13) erfüllt ist, und wenn zusätzlich (3.12) erfüllt ist (was gleichwertig ist zu (3.8) bei $m+n = 1$), dann ist klar, daß das nichttriviale Funktional J existiert.

3. Wir wollen jetzt einige Fälle der Entartung des Funktionals J erörtern. Das Funktional wird entartet genannt, wenn aus $k > 0$ bei einer bestimmten Basis $\mu_{kl} = 0$ folgt. Es wird stark entartet genannt, wenn aus $k+l > 0$ $\mu_{kl} = 0$ folgt. Es ist klar, daß die Gramschen Determinanten von den Monomen $x^k y^l$ für das entartete Funktional zu null werden. Folglich werden die Polynome p_{mn}, q_{mn}, die die Bedingungen (1.3) - (1.6) erfüllen, nicht eindeutig bestimmt.

<u>Theorem 12</u>. Gleichung (3.1) hat dann und nur dann ein stark entartetes nichttriviales Funktional, wenn bei einer bestimmten Basis gilt:

$$a_{oo} = b_{oo} = c_{oo} = d_{oo} = e_{oo} = 0 \quad . \qquad (3.14)$$

Der Beweis folgt aus der Betrachtung des Systems (3.9) für $k = l = 0$; $k = 1$, $l = 0$; $k = 0$, $l = 1$.

<u>Theorem 13</u>. Wenn bei einer bestimmten Basis

$$a_{oo} = b_{oo} = a_{o1} = b_{o1} = d_{oo} = 0 \qquad (3.15)$$

gilt, dann bestimmt Gleichung (3.1) das entartete nichttriviale Funktional J.

Für den Beweis genügt es, dasselbe System (3.9) bei Bedingung (3.15) zu untersuchen. Wenn $m > 0$ und bekannt ist, daß $\mu_{kl} = 0$ bei

$k > 0$ und $k+1 \leqslant N$ ist, dann liefert das System $\mu_{m+1,N-m} = \mu_{m,N+1-m} = 0$. Die Momente μ_{ol} werden immer eindeutig bestimmt.

4. Die notwendige Bedingung der potentiellen Selbstadjungiertheit, die durch das Theorem 8 gegeben ist, hat für Gleichung (3.1) die Form

$$i\beta + j\gamma = 0 . \tag{3.16}$$

Dies folgt aus den Gleichungen $g'_x - h'_y = B - 3A$, $g'_y - h'_x = 0$, $D_4 g - D_3 h = 0$. Man kann sich leicht auch davon überzeugen, daß die potentielle Selbstadjungiertheit von Gleichung (3.1) aus (3.16) und $\alpha \neq 0$ folgt. Insbesondere (3.16) wird erfüllt, wenn die Operatoren D_1 und D_2 kommutieren.

Man kann zeigen, daß für Gleichung (3.1) sich keine einzige der Eigenschaften - "potentielle Selbstadjungiertheit" und "Existenz des nichttrivialen Funktionals" - aus der anderen ergibt. So ist Gleichung

$$(x^2+1)\, z''_{xx} + 2\,xy\, z''_{xy} + (y^2-y)\, z''_{yy} + B\,xz'_x + \\ + (By - B + 2)\, z'_y - N(N-1+B)\, z = 0$$

potentiell selbstadjungiert $(\alpha = y(y-x^2-1),\ \beta = 0,\ \gamma = (B-3)(y-x^2-1),\ i = y,\ j = 0)$, doch wenn $B \neq 3$ ist, liefert das System (3.9) einen Widerspruch für μ_{21} , und folglich existiert das nichttriviale Funktional J nicht. Gleichung

$$yz''_{xx} + xz''_{yy} + xz'_x + yz'_y - Nz = 0$$

ist nicht potentiell selbstadjungiert $(\alpha = xy,\ \beta = x^2,\ \gamma = y^2,\ i = -x,\ j = y)$, doch existiert das nichttriviale Funktional nach Theorem 12.

5. Jetzt wollen wir eine bestimmte Eigenschaft der Funktionen Q_{mn} aus Theorem 5 für den Fall untersuchen, wenn die Gleichung die Gestalt (3.1) hat.

<u>Theorem 14</u>. Wenn Gleichung (3.1) die folgenden Eigenschaften hat:

a) (2.14) wird erfüllt;

b) $a'_y = c'_x = 0$;

c) es gibt solche Polynome a_1, a_2, b_1, c_1, c_2, so daß die Gleichungen (2.20) gelten und außerdem

$$a'_{2x} = 2\, b'_{1y}\, c_1 + b_1 c'_{1y} \;; \quad c'_{2y} = 2\, a_1\, b'_{1x} + a'_{1x} b_1 \;, \tag{3.18}$$

dann erfüllt das Polynom Q_{mn}, das durch Gleichung (2.27) bestimmt wird, Gleichung (3.1) mit $N = m + n$.

Die Beweisführung schließt damit, daß wir schrittweise die Differentialgleichungen aufstellen, die von den Funktionen v, u, z erfüllt werden, mit

$$v = \rho\, \delta^m\, \varepsilon^n \tag{3.19}$$

(δ, ε sind in (2.21) bestimmt);

$$u = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^m \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^n v \;; \tag{3.20}$$

$$z = \rho^{-1}\, u \tag{3.21}$$

und uns davon überzeugen, daß die letzte Gleichung mit (3.1) übereinstimmt. Doch bevor wir zur Durchführung dieses Vorhabens schreiten, sei bemerkt, daß aus (2.12), (2.13) und (2.20) folgt:

$$a_2 \kappa + a_1 b_1 \lambda = g\, \alpha_1 \;; \quad b_1 c_1 \kappa + c_2 \lambda = h\, \alpha_1 . \tag{3.22}$$

Wenn wir desweiteren (2.34), (2.35), (3.17), (2.20) und (3.18) kombinieren, erhalten wir

$$i = a_1^2 c_1 (a_2 b'_{1x} - b_1 b'_{1y} c_1) \;, \quad j = a_1 c_1^2 (a_1 b_1 b'_{1x} - b'_{1y} c_2) \;.$$

Da $\alpha_1 = a_2 c_2 - a_1 b_1^2 c_1$, folgt hieraus:

$$-\, bi + aj = -a_1^2\, b'_{1y}\, c_1^2\, \alpha_1 \;, \quad -\, ci + bj = -a_1^2\, b'_{1x}\, c_1^2\, \alpha_1 \;.$$

Doch dann, wenn wir berücksichtigen, daß $\alpha = a_1 c_1 \alpha_1$, erhalten wir aus (2.37), (2.38)

$$D_3\, \alpha_1 = a_1\, a'_{2x}\, \alpha_1 \;; \quad D_4\, \alpha_1 = c_1\, c'_{2y}\, \alpha_1 \;. \tag{3.23}$$

Jetzt gehen wir zur Aufstellung der Gleichungen für v, u, z über.

a) Da man (3.19) in der Form

$$v = \rho\, a_1^m\, c_1^n\, \alpha_1^{m+n}$$

anschreiben kann, so ist, unter Berücksichtigung von (2.22),

$$a_1 \alpha_1 v'_x = [\kappa + m(a'_{1x} \alpha_1 + a_1 \alpha'_{1x}) + n a_1 \alpha'_{1x}]\, v \;;$$

$$c_1 \alpha_1 v'_y = [\lambda + m c_1 \alpha'_{1y} + n(c'_{1y} \alpha_1 + c_1 \alpha'_{1y})]\, v \;.$$

Wir multiplizieren die erste dieser Gleichungen mit a_2, die zweite mit $a_1 b_1$ und addieren die Ergebnisse. Wir erhalten

$$a\alpha_1 v'_x + b\alpha_1 v'_y = [\, a_2\kappa + a_1 b_1 \lambda + m(a'_{1x} a_2 \alpha_1 + \\ + a\alpha'_{1x} + b\alpha'_{1y}) + n(a\alpha'_{1x} + a_1 b_1 c'_{1y}\alpha_1 + b\alpha'_{1y})\,]\, v \,.$$

Jetzt ist wesentlich, daß aus (3.22) und (3.23) die Teilbarkeit des rechten Teils der letzten Gleichung durch α_1 folgt, und infolge der Bedingung a) des Theorems die Möglichkeit zu kürzen. (Der Sinn der Bedingung (3.18) besteht darin, daß sie hinreichend ist für (3.23). Nachdem Kürzen erhalten wir

$$av'_x + bv'_y = [\, g + ma'_x + n(a_1 a'_{2x} + a_1 b_1 c'_{1y})\,]\, v$$

oder, wenn wir noch einmal (3.18) und (3.17) benutzen:

$$av'_x + bv'_y - (g + ma'_x + 2\,nb'_y)\, v = 0 \,.$$

Wir ersetzen an dieser Stelle g durch seinen Ausdruck aus (2.7) und differenzieren beide Teile der gewonnenen Gleichung nach x, wobei wir (3.17) berücksichtigen. Wir erhalten

$$av''_{xx} + bv''_{xy} - [d + (m - 2)a'_x + (2\,n - 1)\, b'_y\,]\, v'_x + b'_x v'_y - \\ - [(2\,N - 3)\, A + B\,]\, v = 0 \,.$$

Es ist offensichtlich, daß man auf ganz analoge Weise

$$bv''_{xy} + cv''_{yy} + b'_y v'_x - [e + (2\,m - 1)\, b'_x + (n - 2)\, c'_y]\, v'_y - \\ - [(2\,N - 3)\, A + B\,]v = 0$$

erhalten kann. Wir addieren die zwei letzten Gleichungen und finden die gesuchte Gleichung für v:

$$av''_{xx} + 2\,bv''_{xy} + cv''_{yy} - [d + (m - 2)\, a'_x + (2\,n - 2)\, b'_y]\, v'_x - \\ - [e + (2\,m - 2)\, b'_x + (n - 2)\, c'_y\,]v'_y - [(4\,N - 6)\, A + 2\,B]v = 0 \,. \qquad (3.24)$$

b) Wir differenzieren beide Teile von Gleichung (3.24) m mal nach x und n mal nach y. Wir berücksichtigen die Potenz der Koeffizienten von Gleichung (3.1) und Gleichung (3.17) und erhalten

$$au''_{xx} + 2\,bu''_{xy} + cu''_{yy} + (2\,a'_x + 2\,b'_y - d)\,u'_x +$$
$$+ (2\,b'_x + 2\,c'_y - e)\,u'_y - [\,(N^2 - N - 6)\,A + (N + 2)\,B]u = 0\,. \qquad (3.25)$$

c) Aus (3.21) folgt (unter Berücksichtigung von (2.14):

$$u = \rho\, z$$
$$u'_x = \rho\,(\alpha^{-1}\beta\, z + z'_x)\,;$$
$$u''_{xx} = \rho[\,\alpha^{-2}(\beta^2 + \alpha\beta'_x - \alpha'_x\beta)\,z + 2\,\alpha^{-1}\beta z'_x + z''_{xx}\,]\,;$$
$$u''_{xy} = \rho[\,2^{-1}\alpha^{-2}(2\,\beta\gamma + \alpha\beta'_y - \alpha'_y\beta + \alpha\gamma'_x - \alpha'_x\gamma)\,z +$$
$$+ \alpha^{-1}\gamma z'_x + \alpha^{-1}\beta z'_y + z''_{xy}\,]$$

und die analogen Ausdrücke für u'_y, u''_{yy}. Wir setzen diese Ausdrücke in (3.25) ein und erhalten nach Kürzen mit ρ

$$az''_{xx} + 2\,bz''_{xy} + cz''_{yy} +$$
$$+ [\,2\alpha^{-1}(a\beta + b\gamma) + 2\,a'_x + 2\,b'_y - d\,]z'_x +$$
$$+ [\,2\alpha^{-1}(b\,\beta + c\gamma) + 2\,b'_x + 2\,c'_y - e\,]z'_y + \qquad (3.26)$$
$$+ \{\alpha^{-2}[\,a(\beta^2 + \alpha\beta'_x - \alpha'_x\beta) + b(2\,\beta\gamma + \alpha\beta'_y - \alpha'_y\beta +$$
$$+ \alpha\gamma'_x - \alpha'_x\gamma) + c(\gamma^2 + \alpha\gamma'_y - \alpha'_y\gamma)\,] +$$
$$+ \alpha^{-1}[\,(2\,a'_x + 2\,b'_y - d)\beta + (2\,b'_x + 2\,c'_y - e)\gamma\,] -$$
$$- (N^2 - N - 6)\,A - (N + 2)\,B\}\,z = 0\,.$$

d) Der Koeffizient bei z'_x in Gleichung (3.26) wird einfacher, wenn man (2.12) und (2.7) verwendet:

$$2\,\alpha^{-1}\,(a\beta + b\gamma) + 2\,a'_x + 2\,b'_y - d = 2\,g + 2\,a'_x + 2\,b'_y - d = d\,.$$

Analog dazu können wir uns davon überzeugen, daß der Koeffizient bei z'_y gleich e ist.

Jetzt vereinfachen wir den Koeffizienten bei z, wobei wir (2.12), (2.13), (2.37) - (2.39) und jene Tatsache berücksichtigen, daß $g'_x = h'_y = B - 3\,A$ ist. Auf diese Weise ermitteln wir, daß dieser Koeffizient gleich

$$\alpha^{-2}\{\beta\,[g\,\alpha - (a'_x + b'_y)\,\alpha + bi - aj\,] + \gamma\,[h\,\alpha -$$
$$- (b'_x + c'_y)\alpha + ci - bj]\} + \alpha^{-1}[\,(g'_x + h'_y)\alpha - hi + gj +$$
$$+ \beta(d - 2\,g) + \gamma(e - 2\,h)\,] - (N_2 - N - 6)\,A - (N + 2)\,B =$$

$$= \alpha^{-2}[i(b\beta + c\gamma) - j(a\beta + b\gamma)] + \alpha^{-1}[\beta(g - a'_x - b'_y) +$$
$$+ \gamma(h - b'_x - c'_y) - hi + gj + \beta(d - 2g) + \gamma(e - 2h)] +$$
$$+ 2B - 6A - (N^2 - N - 6)A - (N + 2)B =$$
$$= \alpha^{-2}(hi\alpha - gj\alpha) + \alpha^{-1}[\beta(2g - d) + \gamma(2h - e) -$$
$$- hi + gj + \beta(d - 2g) + \gamma(c - 2h)] - (N^2 - N)A - NB =$$
$$= \alpha^{-1}(hi - gj - hi + gj) - N(NA - A + B) =$$
$$= - N(AN - A + B)$$

ist. So stimmt (3.26) mit (3.1) überein, was auch zu beweisen war.

Theorem 15. Wenn Gleichung (3.1) die Forderungen a) - e) von Theorem 14 erfüllt und das Funktional J die Bedingungen (2.6), dann gibt es solche konstanten λ_{mn}, daß die normale biorthogonale Familie bezüglich des Funktionals J aus den Polynomen P_{mn}, welche in (3.3) definiert wurden, und den Polynomen $\lambda_{mn} Q_{mn}$ besteht, wobei Q_{mn} (2.25) bestimmt.

Beweis. Bemerkt sei, daß $Q_{mn} \in \Pi$, da (2.24) aus (3.17) folgt. Deshalb hat das Symbol (P_{kl}, Q_{mn}) einen Sinn. Es sei $k + l \neq m + n$. Dann ist

$$(P_{kl}, Q_{mn}) = 0$$

nach Theorem 1 (unter Berücksichtigung von Theorem 14). Es sei $k + l = m + n$, aber $k < m$. Aus (3.5) und (3.17) (was gleichwertig ist zu $a_{o1} = c_{1o} = 0$) ist ersichtlich, daß P_{kl} Polynom der Potenz k bezüglich x und der Potenz l bezüglich y ist. Doch dann erhalten wir nach Theorem 6 wiederum (3.27). Es bleibt uns nur, λ_{mn} so zu wählen, daß

$$(P_{kl}, \lambda_{kl} Q_{kl}) = 1 .$$

6. Wir wollen jetzt einige Präzisierungen von Theorem 9 für Gleichung (3.1) untersuchen.

Theorem 16. Bei der Transformation von (1.7) sind die Koeffizienten A und B von Gleichung (2.1) und auch der Matrixrang

$$\begin{pmatrix} i_{1o} & i_{o1} \\ j_{1o} & j_{o1} \end{pmatrix}$$

Invarianten.

Den Beweis erhält man aus den Behauptungen a) und b) von Theorem 9 durch unkomplizierte Transformationen.

In den Theoremen 14 und 15 spielt die Bedingung (3.17) eine große Rolle, die offensichtlich im Falle der beliebigen Gleichung (3.1) bei der Transformation von (1.7) nicht erhalten bleibt. Mit der Klärung dieser Frage befaßt sich das folgende Theorem.

Theorem 17. Wenn für Gleichung (2.1) die Bedingung

$$a_{o1} = c_{1o} = c_{o1} - 2b_{1o} = a_{1o} - 2b_{o1} = 0 \tag{3.28}$$

erfüllt wird, dann ist nach Transformation von (1.7) ebenfalls

$$\bar{a}_{o1} = \bar{c}_{1o} = 0 \quad ; \tag{3.29}$$

wenn (3.28) nicht erfüllt wird, aber

$$\begin{aligned} 3\,(a_{1o} - 2b_{o1})\,c_{1o} &= (c_{o1} - 2b_{1o})^2 , \\ 3\,(c_{o1} - 2b_{1o})\,a_{o1} &= (a_{1o} - 2b_{o1})^2 , \end{aligned} \tag{3.30}$$

dann existiert eine Transformation von (1.7), nach der Gleichung (3.29) erfüllt wird; wenn keine der Bedingungen (3.28), (3.30) erfüllt wird, dann existieren Transformationen, die sowohl auf (3.29) reduzieren als auch nicht auf sie reduzieren.

Der Beweis gründet auf jener Tatsache (die aus Theorem 9 folgt), daß

$$\begin{aligned} \bar{a}_{o1} &= \Delta^{-2}[a_{o1}\,t_{22}^3 + (a_{1o} - 2\,b_{o1})\,t_{22}^2\,t_{12} + \\ &+ (c_{o1} - 2\,b_{1o})\,t_{22}\,t_{12}^2 + c_{1o}\,t_{12}^3\,]; \\ \bar{c}_{1o} &= \Delta^{-2}[a_{o1}\,t_{21}^3 + (a_{1o} - 2\,b_{o1})\,t_{21}^2\,t_{11} + \\ &+ (c_{o1} - 2\,b_{1o})\,t_{22}\,t_{11}^2 + c_{1o}\,t_{11}^3\,] . \end{aligned}$$

Es ist klar, daß aus (3.28) (3.29) folgt, unabhängig von den Werten der Koeffizienten t_{ij}. Weder (3.28) noch (3.30) seien erfüllt. Wir untersuchen die Gleichung

$$a_{o1}\,\tau^3 + (a_{1o} - 2\,b_{o1})\,\tau^2 + (c_{o1} - 2\,b_{1o})\,\tau + c_{1o} = 0 \quad , \tag{3.31}$$

und sie habe die zwei verschiedenen Wurzeln τ_1, τ_2. Wenn wir annehmen, daß

$$t_{22} = \tau_1\,t_{12} \quad , \quad t_{21} = \tau_2\,t_{11} \quad ,$$

dann erhalten wir eine Transformation, die auf (3.29) reduziert. Die Überlegung ist analog für den Fall, wenn $a_{o1} = a_{1o} - 2b_{o1} = 0$. Doch ist (2.30) notwendige und hinreichende Bedingung, damit alle Wurzeln von Gleichung (3.31) gleich sind. Das Theorem ist bewiesen.

§ 4

1. Wir wollen jetzt die Klassifikation der Gleichungen (3.1), die die Bedingung (3.2) erfüllen und ein nichtentartetes Funktional besitzen, untersuchen. Die Gesamtheit dieser Funktionen wird in Klassen eingeteilt, die bezüglich der Transformation (1.7) invariant sind, und es wird für jede Klasse eine bestimmte Gleichungsnormalform aufgezeigt werden.

<u>Theorem 18</u>. Wenn (3.1) die Bedingung (3.2) erfüllt und das dieser Gleichung entsprechende Funktional J nichtentartet ist, dann ist die Gleichung potentiell selbstadjungiert und läßt sich mit Hilfe der Transformation (1.7) auf eine der unten aufgeführten Gleichungen reduzieren.

$$\text{I)}\quad (x^2 - x)\, z''_{xx} + 2\,xyz''_{xy} + (y^2 - y)\, z''_{yy} + (B\,x + d_{oo})\, z'_x + \\ + (By + e_{oo})\, z'_y - N\,(N - 1 + B)\, z = 0$$

$$(k + B \neq 0, \quad k = 0,1,2,\ldots) \;;$$

$$(d_{oo} \neq 0 \quad ; \quad e_{oo} \neq 0) \;;$$

$$\alpha = xy(1 - x - y) \;;$$

$$\rho = x^{-d_{oo}-1}\, y^{-e_{oo}-1} (1 - x - y)^{d_{oo}+e_{oo}+B-1}$$

$$\text{II)}\quad x^2 z''_{xx} + 2\,xyz''_{xy} + (y_2 - y)\, z''_{yy} + (B\,x + d_{oo})\, z'_x + \\ + (By + e_{oo})\, z'_y - N(N - 1 + B)\, z = 0$$

$$(k + B \neq 0\;, \quad k = 0,1,2,\ldots) \;;$$

$$(d_{oo} \neq 0 \quad , \quad e_{oo} \neq 0);$$

$$\alpha = -\,x^2 y \;;$$

$$\rho = x^{B+e_{oo}-2}\; y^{-e_{oo}-1}\; \exp \frac{d_{oo}(y - 1)}{x} \;.$$

III) $x^2 z''_{xx} + 2xy\, z''_{xy} + (y^2 + x)\, z''_{yy} + (B\,x + d_{oo})\, z'_x + (B\,y + e_{oo})\, z'_y - N\,(N - 1 + B)\, z = 0$

$$(k + B \neq 0\ ,\quad k \neq 0,1,2,\ldots),$$

$$(d_{oo} \neq 0); \qquad \alpha = x^3$$

$$\rho = x^{B-3} \exp \frac{-d_{oo} y^2 + 2\, e_{oo}\, x - 2\, d_{oo}\, x}{2\, x^2} .$$

IV) $-x\, z''_{xx} - y\, z''_{yy} + (x + d_{oo})\, z'_x + (y + e_{oo})\, z'_y - N\, z = 0$

$$(d_{oo} \neq 0\ ,\quad e_{oo} \neq 0)\ ;$$

$$\alpha = x\, y\ ;$$

$$\rho = x^{-1-d_{oo}}\, y^{-1-e_{oo}} \exp(-x - y) .$$

V) $2\, xz''_{xy} + y\, z''_{yy} + (x + d_{oo})\, z'_x + (y + e_{oo})\, z'_y - N\, z = 0$

$$(d_{oo} \neq 0)\ ;$$

$$\alpha = -\, x^2\ ;$$

$$\rho = x^{e_{oo}-2} \exp\left(y + \frac{d_{oo} y}{x} \right)$$

VI) $-x\, z''_{xx} - z''_{yy} + (x + d_{oo})\, z'_x + y\, z'_y - N\, z = 0$

$$(d_{oo} \neq 0)\ ;$$

$$\alpha = x\ ;$$

$$\rho = x^{-1-d_{oo}} \exp\left(-x - \frac{y^2}{2} \right) .$$

VII) $-z''_{xx} - z''_{yy} + x\, z'_x + y\, z'_y - N\, z = 0\ ;$

$$\alpha = 1\ ;$$

$$\rho = \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2} \right) .$$

VIII) $y\, z''_{xx} + 2\, z''_{xy} + x\, z'_x + y\, z'_y - N\, z = 0\ ;$

$$\alpha = -1\ ;$$

$$\rho = \exp\left(x\, y - \frac{y^3}{3} \right) .$$

$$\text{IX)}\quad (x^2 - 1)\, z''_{xx} + 2\,xy\, z''_{xy} + (y^2 - 1)\, z''_{yy} + B\,x\, z'_x + B\,y\, z'_y - \\ - N\,(N - 1 + B)\, z = 0$$

$$(k + B \neq 0 \quad , \; k = 0,1,2,\ldots) \; ;$$

$$\alpha = 1 - x^2 - y^2 \; ;$$

$$\rho = (1 - x^2 - y^2)^{\frac{B-3}{2}} \; .$$

Den Beweis beginnen wir damit, daß nach (2.9) und (3.1) gilt:

$$\begin{aligned} \alpha = {} & A\,c_{10}x^3 + A\,(c_{01} - 2\,b_{10})\,x^2y + A\,(a_{10} - 2\,b_{01})\,xy^2 + A\,a_{01}y^3 + \\ & + (A\,c_{00} + a_{10}c_{10} - b_{10}^2)\,x^2 + (a_{10}c_{01} + a_{01}c_{10} - 2\,b_{10}b_{01} - 2\,Ab_{00})xy + \\ & + (A\,a_{00} + a_{01}c_{01} - b_{01}^2)\,y^2 + (a_{10}c_{00} + a_{00}c_{10} - 2\,b_{10}b_{00})\,x + \\ & + (a_{01}c_{00} + a_{00}c_{01} - 2\,b_{01}b_{00})\,y + (a_{00}c_{00} - b_{00}^2) \; . \end{aligned} \tag{4.1}$$

Nach Theorem (9) kann man die Kurve $\alpha = 0$ mit Hilfe der Transformation (1.7) auf einige Normalformen reduzieren, denen die Normalformen von Gleichung (3.1) entsprechen. Außerdem ist es von Vorteil, die Invarianz des Matrixranges, wie in Theorem 16 dargestellt, zu verwenden.

Die Fälle der zu untersuchenden Gleichung werden so numeriert, daß man nach der Nummer leicht die Eigenschaften der Gleichungen aufstellen kann, welche im jeweiligen Augenblick verwendet werden.

1) $i = j = 0$. Nach Folgerung 1 von Theorem 11 ist die Existenz des nichttrivialen Funktionals in diesem Fall gesichert. Aus (3.7) folgt, daß die Koeffizienten von Gleichung (3.1) das System

$$\begin{cases} i_{01} = Aa_{00} + a_{01}b_{10} - a_{10}b_{01} + b_{01}^2 - a_{01}c_{01} = 0 \; ; \\ j_{01} = -\,i_{10} = \;\; Ab_{00} \;\; + a_{01}c_{10} - b_{10}b_{01} = 0 \; ; \\ j_{10} = Ac_{00} + b_{00}c_{10} - b_{10}c_{01} + b_{10}^2 - a_{10}c_{10} = 0 \; ; \\ i_{00} = a_{00}b_{10} - a_{10}b_{00} + b_{01}b_{00} - a_{01}c_{00} = 0 \; ; \\ j_{00} = b_{00}c_{01} - b_{01}c_{00} + a_{00}c_{10} - b_{10}b_{00} = 0 \end{cases} \tag{4.2}$$

erfüllen müssen.

11) $A \neq 0$; ohne Verlust der Allgemeinheit kann man annehmen, daß $A = 1$.

111) $\alpha \in \Pi_3$.

1111) Gleichung

$$\alpha_{3o}\,\tau^3 + \alpha_{21}\tau^2 + \alpha_{12}\tau + \alpha_{o3} = 0 \,, \tag{4.3}$$

hat drei verschiedene Wurzeln (es ist ebenfalls ∞ zulässig). Dann kann man durch die geeignete Transformation (1.7) erreichen, daß

$$\alpha_{3o} = 0 \,, \quad \alpha_{21} = -1 \,, \quad \alpha_{12} = -1 \,, \quad \alpha_{o3} = \alpha_{2o} = \alpha_{o2} = 0 \,.$$

Aus (4.1) folgt, daß dann

$$c_{1o} = 0 \,, \quad c_{o1} = 2b_{1o} - 1 \,, \quad a_{1o} = 2b_{o1} - 1 \,, \quad a_{o1} = 0 \,, \quad c_{oo} = b_{1o}^2 \,,$$
$$a_{oo} = b_{o1}^2 \,.$$

Wir setzen dieser Werte in (4.2) ein und erhalten

$$b_{1o} = b_{o1} = b_{oo} = 0 \,,$$

doch diese Werte der Koeffizienten liefern Gleichung I.

1112) Gleichung (4.3) hat eine zweifache und eine einfache Wurzel. Dann kannman die Transformation (1.7) so wählen, daß

$$\alpha_{3o} = 0 \,, \quad \alpha_{21} = -1 \,, \quad \alpha_{12} = \alpha_{o3} = \alpha_{2o} = \alpha_{11} = 0 \,.$$

Aus (4.1) folgt

$$c_{1o} = 0 \,, \quad c_{o1} = 2b_{1o} - 1 \,, \quad a_{o1} = 2b_{o1}, \quad a_{o1} = 0 \,, \quad c_{oo} = b_{1o}^2 \,,$$
$$b_{oo} = b_{o1}(b_{1o} - 1) \,.$$

Wir setzen dieserWerte in (4.2) ein und erhalten

$$b_{1o} = b_{o1} = a_{oo} = 0 \,.$$

Wir sind bei Gleichung II angelangt.

1113) Gleichung (4.3) hat eine dreifache Wurzel. Dann kann man erzielen, daß

$$\alpha_{3o} = 1 \,, \quad \alpha_{21} = \alpha_{12} = \alpha_{o3} = \alpha_{2o} = 0 \,.$$

Aus (4.1) folgt

$$c_{1o} = 1 \,, \quad c_{o1} = 2b_{1o} \,, \quad a_{1o} = 2b_{o1} \,, \quad a_{o1} = 0 \,, \quad c_{oo} = b_{1o}^2 - 2b_{o1}$$

und das System (4.2) liefert

$$b_{o1} = a_{oo} = b_{oo} = 0 .$$

Folglich ist

$$a = x^2 , \quad b = xy + b_{1o}x , \quad c = (y + b_{1o})^2 + x .$$

Mit Hilfe der Transformation $x = \bar{x}$, $y = \bar{y} - b_{1o}$ kann man noch vereinfachen, und wir gelangen zu Gleichung III.

112) $\alpha \in \Pi_3$. Dann ist offensichtlich

$$c_{1o} = 0 , \quad c_{o1} = 2b_{1o} , \quad a_{1o} = 2b_{o1} , \quad a_{o1} = 0 ,$$

und aus (4.2) erhalten wir

$$a_{oo} = b_{o1}^2 , \quad b_{oo} = b_{1o}b_{o1} , \quad c_{oo} = b_{1o}^2 .$$

Wir haben ermittelt, daß

$$a = (x + b_{o1})^2 , \quad b = (x + b_{o1})(y + b_{1o}) , \quad c = (y + b_{1o})^2 .$$

Nach Ersetzen der Variablen gelangen wir zu der Gleichung

$$x^2 z''_{xx} + 2\,xy\, z''_{xy} + y^2 z''_{yy} + (B\,x + d_{oo})\, z'_x + (B\,y + e_{oo})\, z'_y - \\ - N(N - 1 + B)\, z = 0 . \qquad (4.4)$$

Wenn $d_{oo}e_{oo} = 0$, dann ist, nach Theorem 13, das entsprechende Funktional entartet. Wenn $e_{oo} \neq 0$, dann reduziert die Transformation

$$x = \bar{x} + d_{oo}\bar{y} \; ; \quad y = e_{oo}\bar{y}$$

(4.4) auf die Form (wir schreiben hier anstelle von $\bar{x},\bar{y}$ wieder x,y)

$$x^2 z''_{xx} + 2\,xy\, z''_{xy} + y^2 z''_{yy} + B\,x\, z'_x + (B\,y + 1)\, z'_y - \\ - N(N - 1 + B)\, z = 0 ,$$

und das Funktional ist aufgrund von Theorem 13 entartet.

12) $A = 0$. In diesem Fall kann man von $B = 1$ ausgehen. Zur Vereinfachung der Notierung führt man geeigneterweise die Matrix

$$\begin{pmatrix} a_{1o} & b_{1o} & a_{o1} & b_{o1} & a_{oo} & b_{oo} \\ b_{1o} & c_{1o} & b_{o1} & c_{o1} & b_{oo} & c_{oo} \end{pmatrix}$$

ein und bezeichnet mit Δ_{ij} die Determinante, deren erste und zweite Spalte mit der i - ten und j - ten Spalte dieser Matrix übereinstimmen. Dann kann man (4.1) folgendermaßen anschreiben

$$\begin{aligned} \alpha = \Delta_{12}x^2 + (\Delta_{14} - \Delta_{23})\,xy + \Delta_{34}y^2 + \\ + (\Delta_{16} - \Delta_{25})x + (\Delta_{36} - \Delta_{45})y + \Delta_{56} \end{aligned} \tag{4.5}$$

und das System (4.2) in der Form

$$\begin{cases} i_{o1} = -\Delta_{13} - \Delta_{34} = 0 \; ; \\ j_{o1} = -\Delta_{23} = 0 \; ; \\ j_{1o} = \Delta_{24} + \Delta_{12} = 0 \; ; \\ i_{oo} = -\Delta_{15} - \Delta_{36} = 0 \; ; \\ j_{oo} = -\Delta_{46} - \Delta_{25} = 0 \; . \end{cases} \tag{4.6}$$

121) $\alpha \in \Pi_2'$.

1211) Die Kurve $\alpha = 0$ ist eine zentrische Kurve. Dann kann man mit Hilfe der Transformation (1.7) erreichen, daß

$$\alpha_{2o} = \alpha_{o2} = \alpha_{1o} = \alpha_{o1} = 0 \; , \; \alpha_{11} = 1 \; .$$

Jetzt ist

$$\Delta_{12} = \Delta_{34} = \Delta_{23} = \Delta_{13} = \Delta_{24} = 0 \; , \qquad \Delta_{14} = 1 \; .$$

Aus den Gleichungen $\Delta_{24} = \Delta_{13} = 0$ folgt:
entweder ist $b_{1o} = b_{o1} = 0$ oder

$$\begin{vmatrix} a_{1o} & a_{o1} \\ c_{1o} & c_{o1} \end{vmatrix} = 0 \; .$$

Doch die Gleichungen $\Delta_{23} = 0$, $\Delta_{14} = 1$ liefern

$$\begin{vmatrix} a_{1o} & a_{o1} \\ c_{1o} & c_{o1} \end{vmatrix} = 1 \; .$$

Folglich muß $b_{1o} = b_{o1} = 0$ sein. Weiter ermitteln wir leicht

$$a_{oo} = b_{oo} = c_{oo} = a_{o1} = c_{1o} = 0 ,$$
$$a_{1o}c_{o1} = 1 .$$

Das heißt $a = a_{1o}x$, $b = 0$, $c = a_{1o}^{-1} y$, doch kann man sich leicht davon überzeugen, daß man mit Hilfe der geeigneten linearen Transformation erreichen kann, daß $a_{1o} = -1$. Wir erhalten Gleichung IV.

1212) Die Kurve $\alpha = 0$ ist eine parabolische Kurve. Dann kann man ermitteln, daß

$$\alpha_{2o} = 1 , \quad \alpha_{11} = \alpha_{o2} = \alpha_{1o} = \alpha_{oo} = 0 .$$

Wir kombinieren dieser Gleichungen mit dem System (4.6) und erhalten

$$-\Delta_{24} = \Delta_{12} = 1 , \Delta_{34} = \Delta_{56} = \Delta_{13} = \Delta_{23} = \Delta_{14} = 0 .$$

Aus den Gleichungen $\Delta_{14} = 0$, $\Delta_{23} = 0$ erhalten wir

$$b_{1o}^2 b_{o1}^2 = a_{1o} a_{o1} c_{1o} c_{o1} ,$$

und aus $\Delta_{12} = 1$, $\Delta_{34} = 0$

$$b_{1o}^2 b_{o1}^2 = a_{1o} a_{o1} c_{1o} c_{o1} + a_{o1} c_{o1} .$$

Deshalb ist $a_{o1}c_{o1} = 0$ und (da $\Delta_{34} = 0$) $b_{o1} = 0$. Aus $\Delta_{24} = -1$ folgt dann $b_{1o}c_{o1} = -1$, d.h. $c_{o1} \neq 0$, $a_{o1} = 0$ und (da $\Delta_{14} = 0$) $a_{1o} = 0$. Weiter kann man leicht $a_{oo} = 0$, $b_{oo} = 0$, $b_{1o}^2 = 1$, $c_{o1} = b_{1o}$ ermitteln. So haben wir $a = 0$, $b = \pm x$, $c = c_{1o}x \pm y + c_{oo}$. Die Transformation

$$\begin{cases} x = \pm \bar{x} , \\ y = c_{1o}\bar{x} \pm \bar{y} - c_{oo} \end{cases}$$

führt uns zu Gleichung V.

122) $\alpha \in \Pi_2'$. Jetzt schließen sich dem System (4.6) die Gleichungen $\Delta_{12} = \Delta_{34} = \Delta_{14} = 0$ an. Einfacher kann man sagen, daß

$$\mathrm{rg} \begin{pmatrix} a_{1o} & b_{1o} & a_{o1} & b_{o1} \\ b_{1o} & c_{1o} & b_{o1} & c_{o1} \end{pmatrix} < 2 \qquad (4.7)$$

und außerdem

$$\Delta_{15} + \Delta_{36} = 0 \quad , \quad \Delta_{46} + \Delta_{25} = 0 \ . \tag{4.8}$$

1221) $\alpha \in \Pi_1'$. Dann kann man erreichen, daß $\alpha_{1o} = 1$, $\alpha_{o1} = \alpha_{oo} = 0$, d.h. außer (4.7) und (4.8) haben wir zusätzlich die Gleichungen $\Delta_{16} - \Delta_{25} = 1$, $\Delta_{36} - \Delta_{45} = 0$, $\Delta_{56} = 0$. Die erste davon zeigt, daß die Gleichung $a_{1o} = b_{1o} = c_{1o} = 0$ unmöglich ist. In Verbindung mit der Bedingung $\Delta_{12} = 0$ liefert dies, daß entweder

$$a_{1o} \neq 0 \ , \quad b_{1o} = ka_{1o} \ , \quad c_{1o} = k^2 a_{1o} \ , \quad k \neq 0 \ . \tag{4.9}$$

oder

$$a_{1o} = b_{1o} = 0 \ , \quad c_{1o} \neq 0 \tag{4.10}$$

12211) Angenommen, wir haben (4.9). Aus (4.7) folgt, daß $b_{o1} = ka_{o1}$, $c_{o1} = k^2 a_{o1}$. Die Gleichungen $\Delta_{16} - \Delta_{25} = 1$, $\Delta_{36} - \Delta_{45} = 0$ liefern entsprechend

$$\begin{aligned} a_{1o}(c_{oo} - 2\,kb_{oo} + k^2 a_{oo}) &= 1 \ ; \\ a_{o1}(c_{oo} - 2\,kb_{oo} + k^2 a_{oo}) &= 0 \ , \end{aligned} \tag{4.11}$$

hieraus folgt $a_{o1} = b_{o1} = c_{o1} = 0$. Die erste der Gleichungen (4.8) liefert jetzt $b_{oo} = ka_{oo}$, und die Gleichung $\Delta_{56} = 0$ hat die Form

$$a_{oo}(c_{oo} - k^2 a_{oo}) = 0 \ .$$

Wenn $c_{oo} = k^2 a_{oo}$, dann erhalten wir einen Widerspruch zu (4.11), d.h. $a_{oo} = 0$ und

$$a = a_{1o}x \quad , \quad b = ka_{1o}x \quad , \quad c = k^2 a_{1o}x + a_{1o}^{-1} \ .$$

Die Transformation

$$x = -\,a_{1o}\bar{x} \quad , \quad y = a_{1o}k\bar{x} + (-\,a_{1o})^{-\frac{1}{2}}\,\bar{y} + (kd_{oo} - e_{oo})$$

führt uns zu Gleichung VI.

12212) Angenommen, wir haben (4.10). Aus (4.7) folgt $a_{o1} = b_{o1} = 0$, und aus der Gleichung $\Delta_{16} - \Delta_{25} = 1$

$$c_{1o}a_{oo} = 1 \ . \tag{4.12}$$

Andererseits liefert $\Delta_{36} - \Delta_{45} = 0 \quad c_{01}a_{00} = 0$, d.h. $c_{01} = 0$. Doch dann ersehen wir aus $\Delta_{46} + \Delta_{25}$, daß

$$c_{01}a_{00} = 0 ,$$

was (4.12) widerspricht; so ist dieser Fall unmöglich.

1222) $\alpha \in \Pi_0$. Jetzt gelten (4.7), (4.8) und noch die Gleichungen

$$\Delta_{16} - \Delta_{25} = 0 \quad , \quad \Delta_{36} - \Delta_{45} = 0 . \tag{4.13}$$

12221) $\alpha \neq 0$. Man kann annehmen, daß $\alpha = 1$, d.h.

$$\Delta_{56} = 1 . \tag{4.14}$$

122211) In (4.7) sei der Matrixrang gleich 0. Dann ist $a = a_{00}$, $b = b_{00}$, $c = c_{00}$. Wenn $c_{00} \neq 0$, dann kommen wir mit Hilfe der Transformation

$$x = \frac{b_{00}}{\sqrt{-c_{00}}}\,\bar{x} + \frac{1}{\sqrt{-c_{00}}}\,\bar{y} - d_{00} , \quad y = \sqrt{-c_{00}}\,\bar{x} - e_{00} .$$

zu Gleichung VII. Wenn aber $c_{00} = a_{00} = 0$, dann verwenden wir eine Transformation der Art

$$x = \sqrt{-b_{00}}\,\bar{x} + \sqrt{b_{00}}\,\bar{y} + t_{13} ; \quad y = \sqrt{-b_{00}}\,\bar{x} - \sqrt{b_{00}}\,\bar{y} + t_{23} .$$

122212) In (4.7) sei der Matrixrang gleich 1. Angenommen, ein von 0 verschiedenes Element der Matrix befinde sich in der ersten Zeile (wenn es in der ersten Zeile kein solches gibt, dann wenden wir im voraus die Transformation $x = \bar{y}$, $y = \bar{x}$ an). Man kann leicht erkennen, daß dann kein einziger der Koeffizienten von a_{10}, a_{01} gleich null ist und daß eine solche Zahl existiert, daß

$$b_{10} = ka_{10} , \quad c_{10} = k^2a_{10} , \quad b_{01} = ka_{01} , \quad c_{01} = k^2a_{01} .$$

Aus (4.8) und (4.13) folgt $\Delta_{16} + \Delta_{46} = 0$, $\Delta_{15} + \Delta_{45} = 0$ oder

$$(a_{10} + ka_{01}) \begin{vmatrix} 1 & b_{00} \\ k & c_{00} \end{vmatrix} = (a_{10} + ka_{01}) \begin{vmatrix} 1 & a_{00} \\ k & b_{00} \end{vmatrix} = 0 .$$

Wenn wir (4.14) berücksichtigen, sehen wir, daß $a_{10} = -ka_{01}$. In diesem Fall wird Gleichung $\Delta_{15} + \Delta_{36} = 0$ zu

$$a_{o1}(a_{oo}k^2 - 2b_{oo}k + c_{oo}) = 0 ,$$

woraus folgt, daß k gleich der Wurzel von Gleichung

$$a_{oo}\tau^2 - 2b_{oo}\tau + c_{oo} = 0 .$$

Man kann verifizieren, daß alle Gleichungen (4.8), (4.13) erfüllt sind. Folglich ist

$$a = a_{o1}(-kx + y) + a_{oo} ; \quad b = ka_{o1}(-kx + y) + b_{oo} ;$$
$$c = k^2 a_{o1}(-kx + y) + c_{oo} .$$

Mit Hilfe der Transformation

$$x = (a_{o1})^{\frac{1}{3}}\,\bar{x} + t_{12}\bar{y} + t_{13}$$
$$y = k(a_{o1})^{\frac{1}{3}}\,\bar{x} + [\,kt_{12} + (a_{o1})^{-\frac{1}{3}}]\bar{y} + t_{23} ,$$

wobei t_{12}, t_{13}, t_{23} so gewählt werden, daß die freien Glieder in den Polynomen $\bar{a}, \bar{d}, \bar{e}$ zu null werden, gelangen wir zu Gleichung VIII.

12222) $\alpha = 0$. Da $a, b, c \in \Pi_1$, kann man annehmen, daß die Gleichung die Form

$$az''_{xx} + 2ka''_{xy} + k^2 az''_{yy} + dz'_x + ez'_y - Nz = 0$$

hat, mit $a = a_{1o}x + a_{o1}y$, k - komplexe Zahl. Nach der Transformation

$$x = t_{11}\bar{x} + t_{12}\bar{y} + t_{13} ; \quad y = t_{21}\bar{x} + kt_{12}\bar{y} + kt_{13} + kd_{oo} - e_{oo}$$

erhalten wir die Gleichung (anstelle von $\bar{x},\bar{y}$ schreiben wir wieder x,y)

$$\Delta^{-2}(t_{21}^2 - 2t_{11}t_{21}k + t_{11}^2k^2)\,\bar{a}\,z''_{yy} + xz'_x + \bar{e}\,z'_y - N\,z = 0$$

(hier werden die Bezeichnungen aus Theorem 9 verwendet). Nach Theorem 13 ist das Funktional J entartet.

2. Auch nur eines der Polynome i, j sei von 0 verschieden. Aus (3.12) folgt, daß dann auch einer der Koeffizienten

$$i_{1o}\ (= -j_{o1}),\ i_{o1},\ j_{1o}$$

von 0 verschieden ist.

21) $\operatorname{rg}\begin{pmatrix} i_{1o} & i_{o1} \\ j_{1o} & j_{o1} \end{pmatrix} = 1$. (Nach Theorem 16 ist diese Gleichung bezüglich (1.7) invariant.) Dann kann man leicht erreichen, daß $i_{1o} = j_{o1} = 0$ und $i_{o1}j_{1o} = 0$. Es sei $j_{1o} \neq 0$ (der Fall $i_{o1} \neq 0$ führt zu dieser Transformation $x = \bar{y}$, $y = \bar{x}$). Nach (3.12) ist $i_{oo} = 0$, und man kann leicht erkennen, daß durch die geeignete Transformation erzielt werden kann, daß $j_{1o} = x$. Folglich untersuchen wir den Fall, wenn $i = 0$, $j = x$.

Wir verwenden (2.34) und (2.35) und können verifizieren, daß für Gleichung (3.1) die Gleichungen

$$\begin{cases} D_3 i = b'_y i - a'_y j \ ; \\ D_3 j + D_4 i = (c'_y - b'_x)\, i + (a'_x - b'_y)\, j \ ; \\ D_4 j = -c'_x i + b'_x j \end{cases} \tag{4.15}$$

gelten.
In unserem Fall folgt hieraus

$$a'_y = 0 \ ; \quad a = (a'_x - b'_y)\, x \ ; \quad b = b'_x x \ ;$$

daraus folgt:

$$a_{o1} = a_{oo} = b_{o1} = b_{oo} = 0 \ .$$

(3.12) liefert jedoch noch $d_{oo} = 0$. Nach Theorem 13 ist das Funktional J wieder entartet.

22) $\operatorname{rg}\begin{pmatrix} i_{1o} & i_{11} \\ j_{1o} & j_{o1} \end{pmatrix} = 2$. Jetzt können wir erreichen, daß

$$i = -y \ , \quad j = x \ , \tag{4.16}$$

doch sind dabei alle Koeffizienten der Transformation (1.7) zu verwenden. Aus (3.12) und (4.16) folgt

$$d_{oo} = e_{oo} = 0 \ ,$$

und (4.15) und (4.16) liefern

$$\begin{cases} b = b'_y y + a'_y x \ ; \\ a - c = -(c'_y - b'_x)\, y + (a'_x - b'_y)\, x \\ b = c'_x y + b'_x x \ , \end{cases}$$

und daraus

$$a_{oo} = c_{oo} \ , \quad b_{oo} = 0 \ , \quad a_{o1} = b_{1o} \ , \quad c_{1o} = b_{o1} \ .$$

Schließlich kombinieren wir (4.16) mit (3.7) und erhalten die Bedingung

$$Aa_{oo} + b_{1o}^2 + b_{o1}^2 - a_{1o}b_{o1} - b_{1o}c_{o1} = -1 \ . \tag{4.17}$$

Folglich müssen wir klären, wann Gleichung

$$\begin{aligned} &(Ax^2 + a_{1o}x + b_{1o}y + a_{oo})\, z''_{xx} + 2\,(Axy + b_{1o}x + b_{o1}y)\, z''_{xy} + \\ &+ (Ay^2 + b_{o1}x + c_{o1}y + a_{oo}) z''_{yy} + Bxz'_x + Byz'_y - \\ &\qquad - N\,(NA - A + B)\, z = 0 \ , \end{aligned} \tag{4.18}$$

wobei (4.17) erfüllt wird, ein nichtentartetes Funktional J besitzt. Zunächst ist klar, daß $a_{oo} \neq 0$, weil im entgegengesetzten Fall das Funktional nach Theorem 12 entartet ist. Unter Berücksichtung der Anmerkung zum Theorem 11 mit $N = 3$ erhalten wir das System

$$\begin{cases} (2A + B)(xq_2 + yr_2) = -yp'_x + xp'_y \ ; \\ (A + B)(xq_1 + yr_1) + (a_{1o}x + b_{1o}y)\, q'_{2x} + (b_{1o}x + \\ + b_{o1}y)(q'_{2y} + r'_{2x}) + (b_{o1}x + c_{o1}y)\, r'_{2y} = 0 \ ; \\ B(xq_o + yr_o) + (a_{1o}x \qquad + b_{1o}y)q'_{1x} + (b_{1o}x + b_{1o}y)(q'_{1x} + \\ + r'_{1x}) + (b_{o1}x + c_{o1}y)r'_{1y} + a_{oo}(q'_{2x} + r'_{2y}) = 0 \ ; \\ a_{oo}(q'_{1x} + r'_{1y}) = 0 \ . \end{cases} \tag{4.19}$$

Die letzte Gleichung ist gleichwertig zur Bedingung $q_{1o} + r_{o1} = 0$. Wir sondern jetzt in der zweiten Gleichung die Glieder aus, die x^2 und entsprechend y^2 enthalten, und erhalten

$$\begin{cases} a_{1o}q_{2o} + b_{1o}(q_{11} + 2r_{2o}) + b_{o1}r_{11} = 0 \ ; \\ b_{1o}q_{11} + b_{o1}(2q_{o2} + r_{11}) + c_{o1}r_{o2} = 0 \ . \end{cases} \tag{4.20}$$

Wenn jetzt $p = x^3$ ist, dann liefert die erste Gleichung von System (4.19)

$$q_{2o} = q_{o2} + r_{11} = r_{o2} = 0 \ , \quad q_{11} + r_{2o} \neq 0$$

und aus (4.20) folgt $b_{1o} = 0$. Analog dazu erhalten wir bei $p = y^3$ $b_{o1} = 0$, bei $p = x^2y$ und $p = xy^2$ entsprechend $a_{1o} = 0$, $c_{o1} = 0$. Jetzt liefert (4.17) $Aa_{oo} = -1$, und ohne Verlust der Allgemeinheit kann man $A = 1$, $a_{oo} = -1$ annehmen. Doch dann geht (4.18) zu Gleichung IX über. Weil alle Fälle erschöpft und, wie man leicht verifizieren kann, alle ermittelten Gleichung I - IX selbstadjungiert sind, ist somit das Theorem bewiesen.

2. Wir wollen jetzt detaillierter die normalen biorthogonalen Familien der Polynome, die mit den Gleichungen I - IX zusammenhängen, untersuchen. Für diesen Zweck ist es von Vorteil, diese Gleichungen in 4 Klassen einzuteilen: A (die Fälle I, IX), B (IV, VI, VII), C (II, V), D (III, VIII).

Die Klassen A, B , C enthalten Gleichungen, die auf einer gewissen Basis die Bedingungen der Theoreme 14 und 15 erfüllen (in der Formulierung von Theorem 18 sind die Gleichungen gerade auf einer solchen Basis gegeben). Auf diese Weise kann man eine Folge P_{mn} finden, indem man die Koeffizienten nach Gleichung (3.5) errechnet, und Q_{mn} nach Formel (2.25). Der Übergang zu einer anderen Basis wird nach (1.9) durchgeführt.

Die Gleichungen von Klasse D erfüllen auf keiner einzigen Basis die Bedingungen der Theoreme 14 und 15 (davon kann man sich leicht überzeugen, wenn man Theorem 17 verwendet).

Die Klassen A und B (und nur diese Klassen) enthalten Gleichungen, für die man (sogar bei einigen Werten der Parameter B, d_{oo}, e_{oo}) das skalare Produkt als Integral für einen bestimmten Bereich D der reellen Ebene interpretieren kann. Im Fall I ist der Bereich D ein Dreieck, bei IX das Innere eines zentrischen nichtentarteten Kegelschnitts, bei IV - ein Winkel, bei VI - eine Halbebene und im Fall VIII die ganze Ebene (dieses Ergebnis wurde in [9] dargelegt).

Die Klasse B (und nur diese Klasse) enthält Gleichungen mit der folgenden Eigenschaft: es existiert eine Basis (auf die dieser Basis entsprechenden Gleichungsformen wurde in der Formulierung von Theorem 18 hingewiesen), auf der P_{mn} und Q_{mn} genau bis auf einen konstanten Faktor übereinstimmen, d.h. die biorthogonalen Folgen vereinigen sich zu einer orthogonalen; dabei wird jedes Glied dieser Familie als

Produkt eines bestimmten klassischen orthogonalen Polynoms von x mit einem klassischen orthogonalen Polynom von y ausgedrückt. Im Fall IV sind beide Faktoren LAGUERREsche Polynome, bei VI der eine ein LAGUERREsches Polynom, der andere ein HERMITE - Polynom und im Fall VII beide HERMITE - Polynome. Hieraus folgt jedoch nicht, daß die Untersuchung der Familien P_{mn}, Q_{mn} völlig auf eine Theorie der klassischen Polynome hinausläuft, weil der Übergang zu einer anderen Basis (Anwendung der Formeln (1.9))die Situation stark komplizieren kann.

Die Polynome, die den Gleichungen der Klasse A entsprechen, lassen sich auf keiner Basis auf das Produkt der klassischen Polynome zurückführen.

In der Literatur wurden Polynome untersucht, die den Gleichungen I, IX entsprechen. Der Fall I wurde unter der Einschränkung

$$B = 1 - d_{oo} - e_{oo} \tag{4.21}$$

von Appell untersucht [1, 2, 6, 7] ; die Polynome P_{mn} werden (genau bis auf einen konstanten Faktor) gewöhnlich durch E_{mn} bezeichnet, die Polynome Q_{mn} durch F_{mn} . In 8 wurde gezeigt, daß Bedingung (4.21) überflüssig ist, und die Biorthogonalität in allen Fällen gilt, wenn die entsprechenden Integrale vorhanden sind. Wenn man das Skalarprodukt mit Hilfe des Funktionals J bestimmen will, dann ist diese Einschränkung offensichtlich auch nicht notwendig. (Die Bedingung (4.21) trat bei Appell deshalb auf, weil er von der Theorie der hypergeometrischen Funktionen von zwei Argumenten ausgeht und die Polynome durch ein Gleichungspaar charakterisiert. Dieses Paar kann man ermitteln, wenn man im Beweis von Theorem 14 anstelle von (3.24) die zwei vorhergehenden Gleichungen untersucht und alle darauffolgenden Transformationen über jeder Gleichung im Einzelnen durchführt. Wenn die Bedingung (4.21) erfüllt wird, dann charakterisieren diese Gleichungen die hypergeometrischen Funktionen, und E_{mn} und F_{mn} werden durch diese Funktionen ausgedrückt.

Der Fall IX wurde von HERMITE und anderen französischen Mathematikern untersucht [4 - 7] ; P_{mn} wird (genau bis auf einen konstanten Faktor) gewöhnlich durch N_{mn}, Q_{mn} durch U_{mn} bezeichnet. Für die in der Formulierung von Theorem 18 gegebene Gleichungsform ist der Biorthogonalitätsbereich der Einheitskreis. Die im vorliegenden Artikel dargelegte

Theorie erlaubt es, vom Kreis zur Ellipse und Hyperbel überzugehen (im letzteren Fall sind die Koeffizienten in (1.7) imaginär). Es gibt eine Theorie analoger Polynome für die k - dimensionale Kugel [6,7] .

Der Fall V sind HERMITE - Polynome von zwei Argumenten [3,6,7]; gewöhnlich wird P_{mn} durch G_{mn} , Q_{mn} durch H_{mn} bezeichnet.

3. Zum Schluß wollen wir noch einige Fragen anschneiden.

1) Der Inhalt von § 2 und 3 kann leicht auf den Fall verallgemeinert werden, wenn die Zahl der Argumente größer als zwei ist. Wie lautet das Analogon von Theorem 18?

2) Eine natürliche Verallgemeinerung von Theorem 10 erhält man, wenn man fordert, daß der Koeffizient f in (2.1) von den beiden natürlichen Parametern m und n, $f(m,n) \in \Pi_o$ abhängt , und daß für jedes Paar von m, n die Gleichung genau eine Lösung aus Π'_{mn} habe. Dann wird die Gleichung in der Form

$$(a_{2o}x^2 + a_{1o}x + a_{o1}y + a_{oo})z''_{xx} + 2(b_{11}xy + b_{1o}x + b_{o1}y + b_{oo})z''_{xy} +$$
$$+ (c_{o2}y^2 + c_{1o}x + c_{o1}y + c_{oo})z''_{yy} + (d_{1o}x + d_{oo})z'_x + (e_{o1}y + e_{oo})z'_y -$$
$$-[m(m-1)a_{2o} + 2mnb_{11} + n(n-1)c_{o2} + md_{1o} + ne_{o1}]z = 0$$

angeschrieben.

Wie lauten die Analoga der Theoreme 11 und 14 für diese Gleichung?

3) Im Theorem 14 sind die Bedingungen a) - c) hinreichend. Wie lauten die notwendigen Bedingungen dafür, daß das Polynom Q_{mn} Gleichung (3.1) erfüllt?

4) Gibt es die Möglichkeit, die Forderung (2.6) für das Funktional J so zu verändern, daß die Fundamentaltheoreme 1 und 6 erhalten bleiben, aber die Klasse der Gleichungen, die ein nichtentartetes Funktional besitzen, größer wird? Ist es insbesondere erlaubt, (2.6) durch (2.23) mit einigen zusätzlichen Bedingungen zu ersetzen?

5) Für die Gleichungen der Klasse D wird das Polynom q_{mn} nicht mit Hilfe der Rodriguez - Formel ausgedrückt. Man kann zeigen (dies wird in einem weiteren Artikel getan), daß im Fall VIII die Gleichung

$$q_{mn}(x,y) = \lambda_{mn}\, \rho^{-1}(x,y) \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^m \left[\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\right]^n \rho(x,y)$$

gilt ($\delta = \varepsilon = 1$) . Gibt es eine analoge Formel im Fall III?

6) In den Fällen VII und IX gibt es für die Polynome P_{mn} ebenfalls Formeln, die den Rodriguez - Formeln ähnlich sind (siehe [7], 12.5 (18) und 12.8 (20), (21)). Gibt es solche Formeln in den übrigen Fällen?

7) Bekanntlich sind die Besselschen Polynome nicht in irgendeinem Teil der reellen Achse orthogonal, sondern im Einheitskreis der komplexen Ebene. Ist es erlaubt, das Funktional J für die Gleichungen der Klassen C und D als Integral für einen bestimmten Bereich des zweidimensionalen komplexen Raumes zu interpretieren?

Literatur

1. Appell, P.: Sur les polynômes de deux variables analogues aux polynômes de Jacobi.
In: Archiv der Mathematik und Physik. Leipzig, 66 (1881), Nr 3, S. 238 - 245.

2. Appell, P.: Sur les fonctions hypergeométriques de deux variables.
In: Journal de mathématiques pures et appliquées. Paris, 8 (3) (1882), S. 173 - 217.

3. Hermite, Ch.: Sur un noveau développement en série des fonctions.
In: C. r. Acad. sci. Paris, 58 (1864), S. 93 - 100, 266 - 273.

4. Hermite, Ch.: Extrait d'une lettre de M. Hermite a M. Borchardt.
In: Journal für die reine und angewandte Mathematik. Berlin, 64 (1865), S. 294 - 296.

5. Hermite, Ch.: Sur quelques développements en série de fonctions de plusieurs variables.
In: C. r. Acad. sci. Paris, 60 (1865), S. 370 - 377, 432 - 440, 461 - 466, 512 - 518.

6. Appell, Paul, Kampé de Fériet, Joseph: Fonctions hypergéométriques et hypersphériques. - Polynômes d'Hermite.
Paris: 1926.

7. Г. Бейтмен, А. Эрдейи. Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. М., «Наука», 1966.
Bejtmen, G., Êrdeji, A.: Vysšie transcendentnye funkcii. Funkcii Besselja, funkcii paraboličeskogo cilindra, ortogonal'nye mnogočleny.
Moskva: Verlag "Nauka", 1966.
Übersetzung aus dem Englischen von:
BATEMAN, Harry, ERDÉLY, Arthur: Higher Transcendental Functions. (Bessel Functions, Functions of the Parabolic Cylinder, Orthogonal Polynomials in Several Variables).
New York/Toronto/London: McGraw-Hill, 1953, Vol. 2.

8. 8. Г. К. Энгелис. О полиномах, ортогональных на треугольнике. — Уч. зап. ЛГУ им. П. Стучки, 58, 1964, 43—48.
Êngelis, G.K.: O polinomach, ortogonal'nych na treugol'nike. In: Učenye zapiski. Latvijskij gosudarstvennyj universitet imeni P. Stučki. Riga, 58 (1964), S. 43 - 48.
⟨Über Polynome, die über einem Dreieck orthogonal sind⟩

9. 9. Г. К. Энгелис. Двумерные аналоги классических ортогональных полиномов. — Тезисы кратких научных сообщений. (Международный конгресс математиков), секция 4. М., 1966, 94.
Êngelis, G.K.: Dvumernye analogi klassičeskich ortogonal'nych polinomov.
In: Tezisy kratkich naučnych soobščenij. (Meždunarodnyj kongress matematikov), sekcija 4. Moskva, 1966, S. 94.
⟨Zweidimensionale Analoga der klassischen orthogonalen Polynome⟩

Redaktionseingang
5. August 1971

Stuttgart, den 9.5.1977

übersetzt von
Ottmar Pertschi
(Ottmar Pertschi)
Dipl.-Übersetzer

Übersetzungsstelle
der Universitätsbibliothek Stuttgart