Optimierung von überdimensionierten Hohlleiterkomponenten

Von der Fakultät Elektrotechnik und Informationstechnik
der Universität Stuttgart zur Erlangung der Würde eines
Doktors der Ingenieurwissenschaften (Dr.-Ing.)
genehmigte Abhandlung

vorgelegt von

Burkhard Plaum

aus Göttingen

Hauptberichter:	Prof. Dr. rer. nat. H. Zohm
Mitberichter:	Prof. Dr.-Ing. F. Landstorfer
Tag der Einreichung:	16. November 2000
Tag der mündlichen Prüfung:	14. Februar 2001

Institut für Plasmaforschung
Universität Stuttgart
2001

Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit befaßt sich mit der Optimierung von überdimensionierten Hohlleiterkrümmern. Überdimensionierte Hohlleiter werden in Hochleistungsmikrowellenanlagen verwendet, um die Leistungsdichte und somit die maximalen Feldstärken zu verringern. Aber auch bei breitbandigen Kleinleistungsanwendungen kann ein Hohlleiter zumindest an der oberen Grenze des Frequenzbereichs überdimensioniert sein. Eine Vergrößerung des Querschnitts hat aber auch zur Folge, daß mehrere Moden ausbreitungsfähig sind, so daß aufgrund von Geometriestörungen, wie Krümmung oder Querschnittsveränderung, Modenwandlungen auftreten. Ziel einer solchen Optimierung ist ein möglichst niedriger Falschmodenanteil am Ausgang des Krümmers sowie möglichst wenig Falschmoden innerhalb des Krümmers. Der Algorithmus kann auch zur Optimierung von schlangenartig gekrümmten Modenwandlern benutzt werden, indem die Eingangsmode als eine Falschmode definiert wird, und die Krümmung so optimiert wird, daß am Ausgang idealerweise nur noch die gewünschte Nutzmode existiert.

Das erste Kapitel gibt eine Einführung in die Wellenausbreitung in einem geraden Hohlleiter. Hier werden Formeln für die Hohlleitermoden zunächst für einen allgemeinen Querschnitt und dann für die im folgenden betrachteten Hohlleitertypen (rechteckig, zylindrisch mit glatter Wand und zylindrisch mit korrugierter Wand) hergeleitet.

Das zweite Kapitel enthält eine Betrachtung der Felder in einem gekrümmten Hohlleiter. In dem Ansatz werden die transversalen Felder des gekrümmten Hohlleiters nach Moden des geraden Hohlleiters entwickelt. Die Summe aus diesen Hohlleitermoden wird in die Maxwellschen Gleichungen eingesetzt, die in dem Koordinatensystem des gekrümmten Hohlleiters aufgestellt wurden. Auf diese Weise wird das dreidimensionale Feldproblem des gekrümmten Hohlleiters in ein einfaches Anfangswertproblem transformiert, wobei die unbekannten Größen die Amplituden der Moden des geraden Hohlleiters sind. Die numerische Lösung dieses Problems benötigt bei guter Genauigkeit nur sehr wenig Rechenzeit. Die gesamte Physik der Maxwellschen Gleichungen ist dann nur noch in den Koppelkoeffizienten enthalten, für die jedoch analytische Ausdrücke zur Verfügung stehen.

Das folgende Kapitel befaßt sich mit der allgemeinen Vorgehensweise bei der Optimierung von Hohlleiterkrümmern und ist vom eigentlichen Optimierungsverfahren unabhängig. Hierzu zählen die Definition einer Bewertungsfunktion und die Darstellung des Krümmungsverlaufs durch eine Fourier- oder Tschebyscheffreihe. Die Koeffizienten dieser Reihe sind dann die Parameter, durch deren Veränderung die Optimierung durchgeführt wird.

Für die Optimierung wurden ein genetischer Algorithmus und ein Simulated Annealing Algorithmus implementiert. Beide Verfahren haben sehr gute Eigenschaften bei schwierigen Optimierungsproblemen, d.h. wenn die Bewertungsfunktion viele lokale Minima aufweist. Nachdem beide Verfahren vorgestellt werden, folgt als Beispiel die Optimierung eines 28 GHz TE_{01}-Krümmers, der für das *Département de Recherche Fondamentale sur la Matière Condensée* des *Commissariat à l'Energie Atomique* (CEA) in Grenoble/Frankreich optimiert und gefertigt wurde. Da das Simulated Annealing Verfahren zur diesem Zeitpunkt noch nicht implementiert war, wurde die Optimierung nur mit dem genetischen Algorithmus vorgenommen. Das Ergebnis ist ein Krümmer, bei dem

der Falschmodenanteil im Inneren nur maximal 11.9 % beträgt. Am Ausgang haben die Falschmoden nur einen Anteil von 0.016 %. Ein Vergleich mit Krümmern, die bei gleichen Abmessungen herkömmliche analytische Krümmungsfunktionen haben, zeigt, daß der optimierte Krümmer in jeder Hinsicht besser ist. Die optimierte Krümmungsfunktion hat zwei lokale Maxima und unterscheidet sich somit grundlegend von allen Krümmungen, die bisher verwendet wurden. Der Krümmer wurde gefertigt, und es wurden Messungen des Modenspektrums am Ausgang des Krümmers vorgenommen, die einen Falschmodenanteil von 1.33 % lieferten. Die Gründe für den höheren Falschmodenanteil liegen teilweise im Meßaufbau, der auch ohne eingebauten Krümmer gewisse Falschmoden aufweist. Andererseits gibt es aufgrund von Fertigungstoleranzen Abweichungen des Krümmers von der optimierten Form. Dennoch ist die gemessene Falschmodenleistung wesentlich geringer, als bei dem Krümmer mit konstanter Krümmung, der als Startkrümmer für die Optimierung diente. Dieser hat am Ausgang einen Falschmodenanteil von ca. 20 %.

Im folgenden Kapitel werden die beiden Optimierungsverfahren verglichen. Zunächst wurde der bereits bekannte 28 GHz TE_{01}-Krümmer bis zu einem bestimmten Zielwert der Bewertungsfunktion optimiert. Verglichen wurden die Anzahl der benötigten Schritte für die beiden Verfahren. In einem weiteren Beispiel wurde ein stärker überdimensionierter 70 GHz TE_{01}-HE_{11}-Wandler optimiert, wobei als Startwert ein gerader Hohlleiter diente. Die Optimierungen wurden hier nach 10000 Berechnungen der Bewertungsfunktion gestoppt, verglichen wurden die erreichten Werte. In beiden Fällen erwies sich das Simulated Annealing Verfahren als wesentlich effizienter. Der genetische Algorithmus hat zusätzlich den Nachteil, daß viele Parameter eingestellt werden müssen, die sich alle auf die Effizienz auswirken, aber nur experimentell ermittelt werden können. Es zeigte sich, daß beim Simulated Annealing Verfahren sehr gute Parameter wesentlich einfacher zu finden sind, und daß sie, anders als beim genetischen Algorithmus, nur grob an das aktuelle Problem angepaßt werden müssen.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **8**

2 Felder im Hohlleiter **10**
2.1 Allgemeiner Querschnitt 10
2.1.1 Lösung der Maxwellschen Gleichungen 10
2.1.2 Normierung der Modenamplituden 15
2.1.3 Ohmsche Verluste 17
2.2 Rechteckiger Querschnitt 18
2.2.1 Lösungen der Maxwellschen Gleichungen 18
2.2.2 Normierung der Modenamplituden 20
2.2.3 Ohmsche Verluste 21
2.3 Zylindrischer Querschnitt mit glatter Wand 22
2.3.1 Lösungen der Maxwellschen Gleichungen 22
2.3.2 Normierung der Modenamplituden 26
2.3.3 Ohmsche Verluste 26
2.4 Zylindrischer Querschnitt mit korrugierter Wand 27
2.4.1 Impedanzmodell 27
2.4.2 Normierung der Modenamplituden 32
2.4.3 Ohmsche Verluste 33

3 Felder im gekrümmten Hohlleiter **34**
3.1 Allgemeiner Querschnitt 34
3.2 Rechteckiger Querschnitt 39
3.2.1 E-Ebenen Krümmer 39
3.2.2 H-Ebenen Krümmer 42
3.3 Kreisförmiger Querschnitt mit glatter Wand 43
3.4 Kreisförmiger Querschnitt mit korrugierter Wand 44
3.5 Das System der gekoppelten Wellengleichungen 45
3.5.1 Spezialfall: Zwei Moden 48
3.5.2 Spezialfall: Zwei entartete Moden 49
3.5.3 Konstante Krümmung mit zwei Moden 51
3.5.4 Beispiel: 70 GHz Rechteckkrümmer 51

4 Optimierung **56**
4.1 Bisherige Verfahren 56
4.2 Bisher verwendete Krümmungen 56
4.3 Definition der Bewertungsfunktion 57
4.4 Definition der zu optimierenden Parameter 58
4.5 Tschebyscheff-Entwicklung des Krümmungsverlaufs 62
4.6 Fourier Entwicklung des Krümmungsverlaufs 64

5 Optimierungsverfahren 66
5.1 Genetische Algorithmen . . . 66
5.1.1 Beschreibung des Verfahrens . . . 66
5.1.2 Initialisierung der Bevölkerung . . . 66
5.1.3 Aussuchen von Paaren . . . 68
5.1.4 Kreuzung, Erzeugung von Nachwuchs . . . 68
5.1.5 Mutation des Nachwuchses . . . 69
5.1.6 Bestimmung der Fitnessfunktionen des Nachwuchses . . . 71
5.1.7 Aussuchen der Elternindividuen der nächsten Generation . . . 71
5.1.8 Abbruchkriterium . . . 71
5.1.9 Kontrollwerte für die Effizienz . . . 72
5.2 Simulated Annealing . . . 74
5.2.1 Prinzip . . . 74
5.2.2 Das Downhill Simplex Verfahren . . . 74
5.2.3 Kombination der Verfahren . . . 76
5.2.4 Senkung der Temperatur . . . 77
5.3 Test der Verfahren . . . 77

6 Beispiel: 28 GHz TE_{01} Krümmer 84
6.1 Optimierung . . . 84
6.2 Vergleich mit analytischen Krümmungen . . . 88
6.3 Messung der Falschmoden . . . 89

7 Vergleich der Verfahren 94
7.1 28 GHz TE_{01} Krümmer . . . 94
7.2 70 GHz TE_{01} - HE_{11} Modenwandler . . . 96
7.3 Breitbandiger Rechteckkrümmer . . . 102
7.4 Bewertung der Verfahren . . . 104

8 Zusammenfassung und Ausblick 106

A Berechnung der Modenleistung im Rundhohlleiter 109

B Berechnung des Fernfeldes 113
B.1 Rechteckhohlleiter . . . 114
B.2 Zylindrische Hohlleiter . . . 119

C Summary 128

Verwendete Formelzeichen

Symbol	Beschreibung
α_m	Dämpfungskoeffizent der Mode m
β_m	Phasenkonstante der Mode m
γ_m	Ausbreitungskonstante der Mode m ($\gamma_m = \alpha_m + j\beta_m$)
$\vartheta(z)$	Krümmerwinkel an der Stelle z
ϑ_l	Gesamtwinkel eines Krümmers
λ_0	Freiraumwellenlänge
ϕ	Koordinate
Ψ_m	Hüllkurve der Amplitude A_m^+ der hinlaufenden Mode m
σ_m	Mutationsintensität
ω	Kreisfrequenz
A_m	Amplitude der Mode m (bezogen auf Einheitsleistung)
a	Radius eines Zylinderhohlleiters
a	Breite eines Rechteckhohlleiters
b	Höhe eines Rechteckhohlleiters
$C(z)$	Krümmungsfunktion
$\mathbf{C}$	Array mit Optimierungsparametern
c_0	Vakuumlichtgeschwindigkeit
c_{mn}	Krümmungskoppelkonstante der Moden m und n
d_m	Mischungsfaktor der Hybridmode m
$\mathbf{E}_m$	Elektrischer Feldvektor der Mode m
$\mathbf{e}_m$	Elektrischer Feldvektor der Mode m ($\mathbf{E} = \mathbf{e}e^{j(\omega t - \beta_m z)}$)
f	Frequenz
f_b	Bewertungsfunktion für die Optimierung
$\mathbf{H}_m$	Magnetischer Feldvektor der Mode m
$\mathbf{h}_m$	Magnetischer Feldvektor der Mode m ($\mathbf{H} = \mathbf{h}e^{j(\omega t - \beta_m z)}$)
K_{mn}	Krümmungskoppelkoeffizient der Moden m und n
k	Wellenzahl im freien Raum
k_{cm}	Cutoff-Wellenzahl der Mode m
l	Krümmerlänge
m	(Radial-) Index einer Mode im Zylinderhohlleiter
m	(y-) Index einer Mode im Rechteckhohlleiter
N_m	Normierungsfaktor der Mode m
n	(Radial-) Index einer gekoppelten Mode im Zylinderhohlleiter
n	(y-) Index einer gekoppelten Mode im Rechteckhohlleiter
P_m	Leistung der Mode m
p	Azimutalindex einer Mode im Zylinderhohlleiter
p	x-Index einer Mode im Rechteckhohlleiter
p_m	Mutationswahrscheinlichkeit
q	Azimutalindex einer gekoppelten Mode im Zylinderhohlleiter

Symbol	Beschreibung
q	x-Index einer gekoppelten Mode im Rechteckhohlleiter
P_m	Leistung der Mode m
R_m	Normierte Phasenkonstante der Mode m ($R_m = \beta_m/k$)
R_s	Oberflächenwiderstand der Hohlleiterwand
$\mathbf{t_1}$, $\mathbf{t_2}$, $\mathbf{t_3}$	Tangentenvektoren der allgemeinen Koordinaten
u_1, u_2, u_3	Allgemeine Koordinaten
X_m	Radialer Eigenwert einer Mode m im Zylinderhohlleiter
x	Koordinate
x_l	x-Koordinate des Endpunktes eines Krümmers
Y	Überdimensioniertheit des Rundhohlleiters ($Y = k \cdot a$)
y	Koordinate
y_l	y-Koordinate des Endpunktes eines Krümmers
Z	Wellenwiderstand des freien Raumes

1 Einleitung

Computersimulation und computergestützte Optimierung sind in allen Bereichen der Technik stets aktuelle Themen. Eine *Simulation* berechnet grundsätzlich aus gegebenen Input-Werten, z.B. der Geometrie eines Flugzeugflügels unter Verwendung analytischer Formeln oder numerischer Verfahren Output-Werte, wie z.B. das resultierende Strömungsfeld in der Umgebung des Flügels.
Bei der *Optimierung* geht man einen Schritt weiter, indem der Computer Input-Werte *suchen* soll, die zum besten Output führen. Da alle Optimierungsverfahren letztendlich durch Probieren den optimalen Input suchen, kann man sagen, daß jede *Optimierung* immer sehr viele *Simulationen* beinhaltet.
Es ist klar, daß man bei einem Problem, dessen Simulation für sich bereits zeitlich umfangreich ist, sicherlich kein Optimierungsverfahren implementieren wird, welches 10000 Simulationen benötigt. Wegen der ständig zunehmenden Rechnerleistungen werden jedoch Simulationen für neue Probleme möglich. Andere Probleme, die bereits seit Jahren erfolgreich simuliert werden, werden interessant für Optimierungen. Die Ergebnisse von Optimierungen sind teilweise verblüffend, da sie sich nicht selten fundamental von dem unterscheiden, was Entwickler vorher als gut empfunden haben. Eine Optimierung läßt sich fast immer als Suche nach einem globalen Extremum einer reellwertigen Bewertungsfunktion mit vielen Veränderlichen formulieren. Hierbei ist es gleichgültig, ob ein Maximum (z.B. Wirkungsgrad einer Turbine) oder ein Minimum (z.B. Eigenrauschen eines elektronischen Verstärkers) gesucht wird. Die Bewertungsfunktion kann sich auch aus mehreren Größen zusammensetzen, die dann gleichzeitig optimiert werden.
Ein ideales Optimierungsprogramm würde nach *einer* Optimierung ein Ergebnis finden, bei dem man absolut sicher sein kann, daß es keine bessere Möglichkeit gibt, also das globale Extremum der Bewertungsfunktion. In der Realität ist dies bei schwierigen Problemen jedoch nicht der Fall. Es ist deshalb wichtig, daß ein Optimierungsverfahren an irgendeiner Stelle Zufallszahlen verwendet. Wird der Zufallszahlengenerator dann jedesmal unterschiedlich initialisiert, kommen in der Tat bei jeder Optimierung andere Ergebnisse heraus. Unterscheiden sich die Ergebnisse nur geringfügig, so erhöht dies die Gewißheit, daß man tatsächlich ein globales Extremum der Bewertungsfunktion gefunden hat.
Das Ziel dieser Arbeit war die Erstellung eines Computerprogramms zur Optimierung von überdimensionierten Hohlleiterkomponenten. Überdimensionierte Hohlleiter werden überall in der Hochleistungsmikrowellentechnik, also z.B. in Elektron-Zyklotron-Resonanzheizungs-Anlagen (ECRH) für Kernfusionsexperimente und in Mikrowellensinteranlagen, verwendet. Bei hohen Leistungen kann es in einem Hohlleiter wegen der hohen Feldstärken zu Überschlägen kommen. Eine Überdimensionierung verringert die Leistungsdichte und somit die Feldstärken. Außerdem haben überdimensionierte Hohlleiter im allgemeinen geringere ohmsche Verluste. Aber auch im Kleinleistungsbereich haben überdimensionierte Hohlleiter den Vorteil einer gewissen Breitbandigkeit, weshalb sie z.B. in Plasmadiagnostikanwendungen oder auch in der Radioastronomie eingesetzt werden können. In einem überdimensionierten Hohlleiter sind jedoch mehrere Moden ausbreitungsfähig, weshalb bei Geometriestörungen Modenwandlungen auftreten.
In der Simulation wird die Reaktion der Felder im Hohlleiter auf Geometriestörungen

bestimmt, wobei als Geometriestörung nur die Krümmung implementiert wurde. Der Lösungsansatz besteht in der Entwicklung des Gesamtfeldes nach Moden des geraden Hohlleiters, die dann in die Maxwellschen Gleichungen im Koordinatensystem des gekrümmten Hohlleiters eingesetzt werden. Somit wird aus dem anfänglichen dreidimensionalen Feldproblem ein System skalarer gekoppelter Differentialgleichungen, welches nur die Modenamplituden enthält. Programme, die die Modenwandlung in einem gekrümmten Hohlleiter berechnen, wurden bereits 1983 am IPF entwickelt [10]. Die Berechnung dauert auf einem heutigen PC nur Sekundenbruchteile, weshalb man eine Optimierung des Krümmungsverlaufes hier sehr gut implementieren kann.
Die Programmierung bestand im wesentlichen darin, die Berechnung der Modenwandlung neu zu implementieren, wobei die alten Codes als Referenz galten. Die Neuimplementierung war erforderlich, da viele Verbesserungen (z.B. unbeschränkte Zahl der Hohlleitermoden) eingebaut wurden. Ferner wurden die Routinen in bezug auf Geschwindigkeit optimiert, und es mußte ein Interface für den Datenaustausch mit dem Optimierungsalgorithmus geschaffen werden. Die Software wurde stark modularisiert, so daß z.B. jedes Programm durch Austausch nur weniger Komponenten in Versionen für rechteckige, glattwandige zylindrische und korrugierte zylindrische Hohlleiter zur Verfügung stand.
Als Optimierungsverfahren wurde zunächst ein genetischer Algorithmus implementiert. Mit diesem wurde ein 28 GHZ TE_{01}-Krümmer optimiert. Das Optimierungsziel war hier sowohl ein möglichst geringer Falschmodenanteil am Ausgang als auch eine möglichst geringe Falschmodenleistung innerhalb des Krümmers. Der genetische Algorithmus lieferte einen Krümmer mit einem Falschmodenanteil von 0.016 % am Ausgang und maximal 11.9 % im Inneren. Ein Vergleich zeigt auch, daß diese Werte mit Krümmern, die die gleichen Abmessungen und analytische Krümmungsfunktionen (sin, $\sin^2$) haben, nicht erreicht werden können.
Der Krümmer wurde gefertigt und Messungen lieferten einen Falschmodenanteil von 1.33 % am Ausgang des Krümmers. Der Unterschied von Messung und Rechnung liegt zum Teil am Meßaufbau, der auch ohne Krümmer einen gewissen Falschmodenanteil aufweist. Andere Gründe sind Fertigungstoleranzen und eventuelle Fehler, die durch die Verwendung eines vereinfachten Modells zur Beschreibung der Wandrillung als anisotrope Oberflächenimpedanz gemacht werden. Dennoch ist der tatsächliche Falschmodenanteil wesentlich geringer, als bei anderen Krümmern mit gleichen Abmessungen und anderen Krümmungen.
Als zweiter Optimierungsalgorithmus wurde ein Hybridverfahren aus Downhill Simplex und Simulated Annealing implementiert. Ein Vergleich der beiden Verfahren zeigt, daß die erreichbaren Ergebnisse prinzipiell die gleichen sind. Die Rechenzeit, die im wesentlichen durch die Zahl der während der Optimierung berechneten Krümmer bestimmt wird, ist beim Simulated Annealing Verfahren jedoch deutlich geringer. Bei beiden Verfahren kann der Fall auftreten, daß der Algorithmus sehr lange im Bereich eines schlechteren lokalen Minimums der Bewertungsfunktion verweilt. Doch auch hier hat die Erfahrung gezeigt, daß dies beim Simulated Annealing seltener der Fall ist. Es sind dennoch bei beiden Verfahren mehrere Optimierungen nötig, um sicherzustellen, daß man ein globales Minimum der Bewertungsfunktion gefunden hat.

2 Felder im Hohlleiter

2.1 Allgemeiner Querschnitt

In diesem Abschnitt sollen alle wichtigen Beziehungen für Hohlleitermoden hergeleitet werden. Die Berechnungen der Felder im Hohlleiter sind auch in der Literatur zu finden (z.B. [23]). Dennoch sollen sie hier noch einmal vorgestellt werden, da in dieser Arbeit teilweise andere Bezeichnungen und Vorfaktoren für die Feldkomponenten verwendet werden, die später für die Definition von Hybridmoden und die Berechnung der Felder im gekrümmten Hohlleiter wichtig sind. Es wird zunächst von einem allgemeinen Querschnitt und einem allgemeinen Koordinatensystem ausgegangen. Als Spezialfälle werden dann Hohlleiter mit rechteckigem und zylindrischem Querschnitt behandelt, für die auch die später beschriebene Optimierung von Krümmern implementiert wurde.

2.1.1 Lösung der Maxwellschen Gleichungen

Um allgemeine Formen für Hohlleiterwellen herzuleiten, geht man zunächst von den Maxwellschen Gleichungen in einem homogenen, linearen, isotropen sowie strom- und ladungsfreien Medium aus:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \varepsilon \, \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \tag{2.1a}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \, \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \tag{2.1b}$$

$$\nabla \mathbf{B} = 0 \tag{2.1c}$$

$$\nabla \mathbf{D} = 0 \tag{2.1d}$$

$$\mathbf{B} = \mu \, \mathbf{H} \tag{2.1e}$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon \, \mathbf{E} \tag{2.1f}$$

Für ein Koordinatensystem kann man die zu den Koordinatenachsen u_1, u_2 und u_3 gehörigen Tangentenvektoren $\mathbf{t}_2$, $\mathbf{t}_2$ und $\mathbf{t}_3$ in kartesischen Koordinaten angeben:

$$\mathbf{t}_1 = \left(\frac{\partial x}{\partial u_1}, \frac{\partial y}{\partial u_1}, \frac{\partial z}{\partial u_1} \right) \tag{2.2a}$$

$$\mathbf{t}_2 = \left(\frac{\partial x}{\partial u_2}, \frac{\partial y}{\partial u_2}, \frac{\partial z}{\partial u_2} \right) \tag{2.2b}$$

$$\mathbf{t}_3 = \left(\frac{\partial x}{\partial u_3}, \frac{\partial y}{\partial u_3}, \frac{\partial z}{\partial u_3} \right) \tag{2.2c}$$

Das Koordinatensystem soll orthogonal sein, d.h. es gilt:

$$\mathbf{t}_1 \cdot \mathbf{t}_1 = 0 \tag{2.3a}$$
$$\mathbf{t}_2 \cdot \mathbf{t}_3 = 0 \tag{2.3b}$$
$$\mathbf{t}_1 \cdot \mathbf{t}_3 = 0 \tag{2.3c}$$

Da ein gerader Hohlleiter angenommen wird, wählt man unabhängig vom Querschnitt des Hohlleiters eine Geometrie, in der die z-Achse parallel zur Hohlleiterachse liegt. Dies ist z.B. der Fall für kartesische Koordinaten und Zylinderkoordinaten. Es gilt dann:

$$u_3 = z \tag{2.4}$$

$$\mathbf{t}_3 = (0,0,1) \tag{2.5}$$

Es werden nun einzelne Moden mit den Feldern $\mathbf{E}_m$ und $\mathbf{H}_m$ definiert, die sich in z-Richtung mit einer noch zu bestimmenden Phasenkonstante β_m ausbreiten. Ferner wird eine harmonische Zeitabhängigkeit angenommen. Man kann dann Feldstärken $\mathbf{e}_m$ und $\mathbf{h}_m$ definieren, die von der Zeit t und von z unabhängig sind:

$$\mathbf{E}_m = \mathbf{e}_m \, e^{j(\omega t - \beta_m z)} \tag{2.6a}$$
$$\mathbf{H}_m = \mathbf{h}_m \, e^{j(\omega t - \beta_m z)} \tag{2.6b}$$

Außerdem nimmt man an, daß die Tangentenvektoren $\mathbf{t_1}$ und $\mathbf{t_2}$ von z unabhängig sind:

$$\frac{\partial \mathbf{t_1}}{\partial z} = 0 \tag{2.7a}$$
$$\frac{\partial \mathbf{t_2}}{\partial z} = 0 \tag{2.7b}$$

Unter diesen Annahmen kann man die Gleichungen 2.1a bis 2.1d durch $e^{j(\omega t - \beta_m z)}$ dividieren und dann wie folgt ausdrücken:

$$\frac{1}{t_2}\left[\frac{\partial}{\partial u_2} h_{m,z} + j\beta_m (h_{m,2} t_2)\right] = j\omega\varepsilon e_{m,1} \tag{2.8a}$$

$$\frac{1}{t_1}\left[-j\beta_m (h_{m,1} t_1) - \frac{\partial}{\partial u_1} h_{m,z}\right] = j\omega\varepsilon e_{m,2} \tag{2.8b}$$

$$\frac{1}{t_1 t_2}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}(h_{m,2} t_2) - \frac{\partial}{\partial u_2}(h_{m,1} t_1)\right] = j\omega\varepsilon e_{m,z} \tag{2.8c}$$

$$\frac{1}{t_2}\left[\frac{\partial}{\partial u_2}e_{m,z} + j\beta_m(e_{m,2}t_2)\right] = -j\omega\mu h_{m,1} \tag{2.8d}$$

$$\frac{1}{t_1}\left[-j\beta_m(e_{m,1}t_1) - \frac{\partial}{\partial u_1}e_{m,z}\right] = -j\omega\mu h_{m,2} \tag{2.8e}$$

$$\frac{1}{t_1 t_2}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}(e_{m,2}t_2) - \frac{\partial}{\partial u_2}(e_{m,1}t_1)\right] = -j\omega\mu h_{m,z} \tag{2.8f}$$

$$\frac{\partial}{\partial u_1}(h_{m,1}t_2) + \frac{\partial}{\partial u_2}(h_{m,2}t_1) - jt_1t_2\beta_m h_{m,z} = 0 \tag{2.8g}$$

$$\frac{\partial}{\partial u_1}(e_{m,1}t_2) + \frac{\partial}{\partial u_2}(e_{m,2}t_1) - jt_1t_2\beta_m e_{m,z} = 0 \tag{2.8h}$$

Die Beträge der Tangentenvektoren $\mathbf{t}_1$, $\mathbf{t}_2$ und $\mathbf{t}_3$ werden hier mit t_1, t_2 und t_3 bezeichnet. Aus (2.8a) und (2.8e) kann man $e_{m,1}$ und $h_{m,2}$ als Funktionen von $e_{m,z}$ und $h_{m,z}$ bestimmen. Außerdem kann man aus (2.8b) und (2.8d) $e_{m,2}$ und $h_{m,1}$ als Funktionen von $e_{m,z}$ und $h_{m,z}$ angeben. Die Ergebnisse lauten:

$$e_{m,1} = \frac{-j\beta_m\frac{1}{t_1}\frac{\partial e_{m,z}}{\partial u_1} - jkZ\frac{1}{t_2}\frac{\partial h_{m,z}}{\partial u_2}}{k^2-\beta_m^2} \tag{2.9a}$$

$$e_{m,2} = \frac{-j\beta_m\frac{1}{t_2}\frac{\partial e_{m,z}}{\partial u_2} + jkZ\frac{1}{t_1}\frac{\partial h_{m,z}}{\partial u_1}}{k^2-\beta_m^2} \tag{2.9b}$$

$$h_{m,1} = \frac{j\frac{k}{Z}\frac{1}{t_2}\frac{\partial e_{m,z}}{\partial u_2} - j\beta_m\frac{1}{t_1}\frac{\partial h_{m,z}}{\partial u_1}}{k^2-\beta_m^2} \tag{2.9c}$$

$$h_{m,2} = \frac{-j\frac{k}{Z}\frac{1}{t_1}\frac{\partial e_{m,z}}{\partial u_1} - j\beta_m\frac{1}{t_2}\frac{\partial h_{m,z}}{\partial u_2}}{k^2-\beta_m^2} \tag{2.9d}$$

Hier ist k die Wellenzahl des unendlich ausgedehnten Mediums, Z ist der Wellenwiderstand. Setzt man diese Formeln in (2.8g) und (2.8h) ein, so erhält man skalare Differentialgleichungen für $e_{m,z}$ und $h_{m,z}$:

$$\frac{1}{t_1t_2}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{t_2}{t_1}\frac{\partial e_{m,z}}{\partial u_1}\right) + \frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{t_1}{t_2}\frac{\partial e_{m,z}}{\partial u_2}\right)\right] + (k^2-\beta_m^2)e_{m,z} = 0 \tag{2.10a}$$

$$\frac{1}{t_1t_2}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{t_2}{t_1}\frac{\partial h_{m,z}}{\partial u_1}\right) + \frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{t_1}{t_2}\frac{\partial h_{m,z}}{\partial u_2}\right)\right] + (k^2-\beta_m^2)h_{m,z} = 0 \tag{2.10b}$$

Der skalare Laplace-Operator Δ_t, der nur partielle Ableitungen in transversaler Richtung enthält, ist folgendermaßen definiert:

$$\Delta_t = \frac{1}{t_1 t_2}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}\frac{t_2}{t_1}\frac{\partial}{\partial u_1};\ \frac{\partial}{\partial u_2}\frac{t_1}{t_2}\frac{\partial}{\partial u_2};\ 0\right] \tag{2.11}$$

Damit erhält man Wellengleichungen für die longitudinalen Komponenten der elektrischen und magnetischen Felder:

$$\Delta_t e_{m,z} + (k^2 - \beta_m^2) e_{m,z} = 0 \tag{2.12a}$$

$$\Delta_t h_{m,z} + (k^2 - \beta_m^2) h_{m,z} = 0 \tag{2.12b}$$

Nun werden transversale elektrische und magnetische Wellen (TM- und TE-Wellen) definiert, für die gilt:

$$h_{m,z}^{\mathrm{TM}} = 0 \tag{2.13a}$$

$$e_{m,z}^{\mathrm{TE}} = 0 \tag{2.13b}$$

So erhält man für TM-Wellen:

$$\Delta_t e_{m,z}^{\mathrm{TM}} + (k^2 - \beta_m^2) e_{m,z}^{\mathrm{TM}} = 0 \tag{2.14a}$$

$$e_{m,1}^{\mathrm{TM}} = \frac{-j\beta_m \frac{1}{t_1}\frac{\partial e_{m,z}^{\mathrm{TM}}}{\partial u_1}}{k^2 - \beta_m^2} \tag{2.14b}$$

$$e_{m,2}^{\mathrm{TM}} = \frac{-j\beta_m \frac{1}{t_2}\frac{\partial e_{m,z}^{\mathrm{TM}}}{\partial u_2}}{k^2 - \beta_m^2} \tag{2.14c}$$

$$h_{m,1}^{\mathrm{TM}} = \frac{j\frac{k}{Z}\frac{1}{t_2}\frac{\partial e_{m,z}^{\mathrm{TM}}}{\partial u_2}}{k^2 - \beta_m^2} \tag{2.14d}$$

$$h_{m,2}^{\mathrm{TM}} = \frac{-j\frac{k}{Z}\frac{1}{t_1}\frac{\partial e_{m,z}^{\mathrm{TM}}}{\partial u_1}}{k^2 - \beta_m^2} \tag{2.14e}$$

Für TE-Wellen gilt:

$$\Delta_t h_{m,z}^{\mathrm{TE}} + (k^2 - \beta_m^2) h_{m,z}^{\mathrm{TE}} = 0 \tag{2.15a}$$

$$e_{m,1}^{\mathrm{TE}} = -\frac{jkZ\frac{1}{t_2}\frac{\partial h_{m,z}^{\mathrm{TE}}}{\partial u_2}}{k^2-\beta_m^2} \tag{2.15b}$$

$$e_{m,2}^{\mathrm{TE}} = j\frac{kZ\frac{1}{t_1}\frac{\partial h_{m,z}^{\mathrm{TE}}}{\partial u_1}}{k^2-\beta_m^2} \tag{2.15c}$$

$$h_{m,1}^{\mathrm{TE}} = -\frac{j\beta_m\frac{1}{t_1}\frac{\partial h_{m,z}^{\mathrm{TE}}}{\partial u_1}}{k^2-\beta_m^2} \tag{2.15d}$$

$$h_{m,2}^{\mathrm{TE}} = -\frac{j\beta_m\frac{1}{t_2}\frac{\partial h_{m,z}^{\mathrm{TE}}}{\partial u_2}}{k^2-\beta_m^2} \tag{2.15e}$$

Für spezifische Querschnitte erhält man aus (2.12a) und (2.12b) i.A. ein Eigenwertproblem, dessen Lösungen ein Orthogonalsystem bilden. Man kann die Felder $\mathbf{e}_m$ $\mathbf{h}_m$ der Moden auch durch zwei Eigenfunktionen T_m und T_m' ausdrücken, die die Wellengleichung erfüllen:

$$(\Delta_t + k^2 - \beta_m^2)T_m = 0 \tag{2.16a}$$

$$(\Delta_t + k^2 - \beta_m^2)T_m' = 0 \tag{2.16b}$$

Außerdem muß die Funktion T_m die Randbedingungen für $e_{m,z}^{\mathrm{TM}}$ erfüllen, T_m' die Randbedingungen für $h_{m,z}^{\mathrm{TE}}$.

Die Eigenfunktionen müssen später normiert werden, damit alle Moden mit der gleichen Amplitude auch die gleiche Leistung haben. Diese Normierung ist in Hohlleitern, in denen mehrere Moden existieren, wichtig, wenn man die Leistungen der einzelnen Moden vergleichen will oder wenn durch Modenwandlung eine Mode Leistung an eine andere Mode abgibt.

Die Amplitude hat die Dimension $\sqrt{\mathrm{W}}$. Damit alle Feldstärken die richtigen Dimensionen bekommen, erhalten die Felder der TM- und TE-Moden Vorfaktoren B_{TM} und B_{TE}:

$$B_{\mathrm{TM}} = \sqrt{R_m Z} \tag{2.17a}$$

$$B_{\mathrm{TE}} = \frac{(R_m)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{Z}} \tag{2.17b}$$

Hier ist $R_m = \frac{\beta_m}{k}$ eine normierte Phasenkonstante. Diese Wahl der Vorfaktoren führt auch bei der späteren Definition von Hybridmoden zu einfacheren Termen.

Schließlich werden alle Feldkomponenten noch mit der imaginären Einheit j multipliziert, was zu reellen Transversalkomponenten und dadurch zu einfacheren Rechnungen

führt. Die Felder der TM-Moden ergeben sich dann zu:

$$e_{m,z}^{\mathrm{TM}} = jA_m\sqrt{R_m Z}\frac{k^2-\beta_m^2}{\beta_m}T_m \tag{2.18a}$$

$$e_{m,1}^{\mathrm{TM}} = A_m\sqrt{R_m Z}\frac{1}{t_1}\frac{\partial T_m}{\partial u_1} \tag{2.18b}$$

$$e_{m,2}^{\mathrm{TM}} = A_m\sqrt{R_m Z}\frac{1}{t_2}\frac{\partial T_m}{\partial u_2} \tag{2.18c}$$

$$h_{m,1}^{\mathrm{TM}} = -A_m\frac{1}{\sqrt{R_m Z}}\frac{1}{t_2}\frac{\partial T_m}{\partial u_2} \tag{2.18d}$$

$$h_{m,2}^{\mathrm{TM}} = A_m\frac{1}{\sqrt{R_m Z}}\frac{1}{t_1}\frac{\partial T_m}{\partial u_1} \tag{2.18e}$$

Für TE-Moden gilt:

$$h_{m,z}^{\mathrm{TE}} = jA_m R_m\sqrt{\frac{R_m}{Z}}\frac{k^2-\beta_m^2}{\beta_m}T'_m \tag{2.19a}$$

$$e_{m,1}^{\mathrm{TE}} = A_m\sqrt{R_m Z}\frac{1}{t_2}\frac{\partial T'_m}{\partial u_2} \tag{2.19b}$$

$$e_{m,2}^{\mathrm{TE}} = -A_m\sqrt{R_m Z}\frac{1}{t_1}\frac{\partial T'_m}{\partial u_1} \tag{2.19c}$$

$$h_{m,1}^{\mathrm{TE}} = A_m R_m^2\frac{1}{\sqrt{R_m Z}}\frac{1}{t_1}\frac{\partial T'_m}{\partial u_1} \tag{2.19d}$$

$$h_{m,2}^{\mathrm{TE}} = A_m R_m^2\frac{1}{\sqrt{R_m Z}}\frac{1}{t_2}\frac{\partial T'_m}{\partial u_2} \tag{2.19e}$$

Um diese Formeln auf einen konkreten Hohlleiterquerschnitt zu übertragen, braucht man lediglich die Funktionen T_m und T'_m, die die Gleichungen 2.16a und 2.16b und die Randbedingungen erfüllen.

2.1.2 Normierung der Modenamplituden

Breiten sich in einem Hohlleiter mehrere Moden aus, so müssen die Eigenfunktionen normiert werden, um die Amplituden der verschiedenen Moden vergleichen zu können.

Für die Modenleistung P_m soll gelten:

$$P_m = \frac{1}{2}|A_m|^2 \tag{2.20}$$

Zunächst wird von unnormierten Eigenfunktionen $\tilde{T}_m$ und $\tilde{T}'_m$ ausgegangen für die gilt:

$$T_m = N_m \tilde{T}_m \tag{2.21}$$

$$T'_m = N_m \tilde{T}'_m \tag{2.22}$$

Die Modenleistung ergibt sich, wenn man den Anteil des Poyntingvektors in Ausbreitungsrichtung über den Hohlleiterquerschnitt A integriert:

$$P_m = \frac{1}{2} \iint_A (e_{m,1} h^*_{m,2} - e_{m,2} h^*_{m,1}) dA \tag{2.23}$$

In diese Beziehung werden nun die die Funktionen $\tilde{T}_m$ und $\tilde{T}'_m$ sowie die Koordinaten u_1 und u_2 und die Beträge der Tangentenvektoren t_1 und t_2 eingesetzt:

$$P_m^{\mathrm{TM}} = \frac{1}{2}(|A_m|N_m)^2 \int_{u_{1,min}}^{u_{1,max}} \int_{u_{2,min}}^{u_{2,max}} \left[\left(\frac{1}{t_1} \frac{\partial \tilde{T}_m}{\partial t_1} \right)^2 + \left(\frac{1}{t_2} \frac{\partial \tilde{T}_m}{\partial t_2} \right)^2 \right] t_2 t_1 du_2 du_1 \tag{2.24a}$$

$$P_m^{\mathrm{TE}} = \frac{1}{2}(|A_m|N_m)^2 R_m^2 \int_{u_{1,min}}^{u_{1,max}} \int_{u_{2,min}}^{u_{2,max}} \left[\left(\frac{1}{t_1} \frac{\partial \tilde{T}'_m}{\partial t_1} \right)^2 + \left(\frac{1}{t_2} \frac{\partial \tilde{T}'_m}{\partial t_2} \right)^2 \right] t_2 t_1 du_2 du_1 \tag{2.24b}$$

In korrugierten Hohlleitern gibt es aufgrund der Randbedingungen Hybridmoden, deren Felder man als Überlagerung eines TE- und eines TM-Anteils auffassen kann. Es gilt dann im allgemeinen Fall:

$$\mathbf{e}^{\mathrm{hybrid}} = d_m^{\mathrm{TM}} \mathbf{e}^{\mathrm{TM}} + d_m^{\mathrm{TE}} \mathbf{e}^{\mathrm{TE}} \tag{2.25a}$$

$$\mathbf{h}^{\mathrm{hybrid}} = d_m^{\mathrm{TM}} \mathbf{h}^{\mathrm{TM}} + d_m^{\mathrm{TE}} \mathbf{h}^{\mathrm{TE}} \tag{2.25b}$$

Für die Modenleistung folgt daraus:

$$P_m^{\mathrm{hybrid}} = (d_m^{\mathrm{TM}})^2 P_m^{\mathrm{TM}} + (d_m^{\mathrm{TE}})^2 P_m^{\mathrm{TE}}$$

$$+ \frac{1}{2} d_m^{\mathrm{TM}} d_m^{\mathrm{TE}} \iint_A (e_{m,1}^{\mathrm{TM}} h_{m,2}^{\mathrm{TE}*} + e_{m,1}^{\mathrm{TE}} h_{m,2}^{\mathrm{TM}*} - e_{m,2}^{\mathrm{TM}} h_{m,1}^{\mathrm{TE}*} - e_{m,2}^{\mathrm{TE}} h_{m,1}^{\mathrm{TM}*}) dA =$$

$$(d_m^{\mathrm{TM}})^2 P_m^{\mathrm{TM}} + (d_m^{\mathrm{TE}})^2 P_m^{\mathrm{TE}} +$$

$$\frac{1}{2}(|A_m|N_m)^2 d_m^{\mathrm{TM}} d_m^{\mathrm{TE}} \left(1 + R_m^2\right) \int_{u_{1,min}}^{u_{1,max}} \int_{u_{2,min}}^{u_{2,max}} \left[\frac{\partial \tilde{T}_m}{\partial u_1} \frac{\partial \tilde{T}'_m}{\partial u_2} - \frac{\partial \tilde{T}_m}{\partial u_2} \frac{\partial \tilde{T}'_m}{\partial u_1} \right] du_2 du_1 \tag{2.26}$$

Um den Normierungsfaktor N_m zu bestimmen, werden die Modenleistungen berechnet und die Ergebnisse in Gleichung 2.20 eingesetzt. Der Ausdruck wird dann nach N_m aufgelöst.

2.1.3 Ohmsche Verluste

Für die Berechnung der Felder im Hohlleiter ist es ausreichend, die Randbedingungen einer ideal leitenden Hohlleiterwand anzunehmen. Für die ohmschen Verluste muß jedoch die endliche Leitfähigkeit der Hohlleiterwand berücksichtigt werden. Um den Dämpfungskoeffizienten zu bestimmen, muß zunächst die Leistungsabnahme $\frac{dP_m}{dz}$ aufgrund der Wandströme berechnet werden. Es gilt weiterhin die Annahme, daß die tangentiale elektrische Feldstärke an der Wand Null ist, und deshalb keine Wandströme hervorruft. Es werden nur die Wandströme berücksichtigt, die dem tangentialen magnetischen Feld an der Wand entsprechen. Außerdem wird angenommen, daß die Skintiefe wesentlich kleiner als die Wanddicke des Hohlleiters ist.
Bei TM-Wellen hat das Magnetfeld nur Transversalkomponenten. Es fließt also ein longitudinaler Flächenstrom $K_{m,z}$, für den gilt:

$$K_{m,z} = h_{m,t}|_{Wand} \tag{2.27}$$

Der Leistungsabfall in einem Längenelement dz ist somit:

$$\frac{dP_m^{\mathrm{TM}}}{dz} = \frac{R_s}{2} \oint_l |h_{m,t}|^2 dl, \tag{2.28}$$

wobei das Integral über den Rand des gesamten Querschnitts zu bestimmen ist. R_s ist der Oberflächenwiderstand der Hohlleiterwand. Er errechnet sich zu:

$$R_s = R_c \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}} \tag{2.29}$$

mit der Leitfähigkeit σ. Die Oberflächenrauhigkeit, die zu einer Erhöhung des effektiven Oberflächenwiderstandes führt, wird durch einen Korrekturfaktor R_c berücksichtigt. Meist wird für R_c ein Wert von 2 gewählt [10], in neueren Untersuchungen wurde ein Wert von 1.3 experimentell ermittelt [11].
TE-Wellen haben im allgemeinen Fall Wandströme, die eine Komponente in z-Richtung und in transversaler Richtung haben. Für die Komponenten gilt:

$$K_{m,z} = h_t|_{Wand} \tag{2.30}$$

$$K_{m,t} = h_{m,z}|_{Wand} \tag{2.31}$$

Es gilt dann für den Leistungsabfall:

$$\frac{dP_m^{\mathrm{TE}}}{dz} = \frac{R_s}{2} \oint_l (|h_{m,t}|^2_{Wand} + |h_{m,z}|^2_{Wand}) dl \tag{2.32}$$

Ist der Leistungsabfall $\frac{dP_m}{dz}$ für die Moden m bestimmt, so erhält man für den Dämpfungskoeffizienten α_m:

$$\alpha_m = \frac{dP_m}{dz} \frac{1}{2P_m} \tag{2.33}$$

2.2 Rechteckiger Querschnitt

2.2.1 Lösungen der Maxwellschen Gleichungen

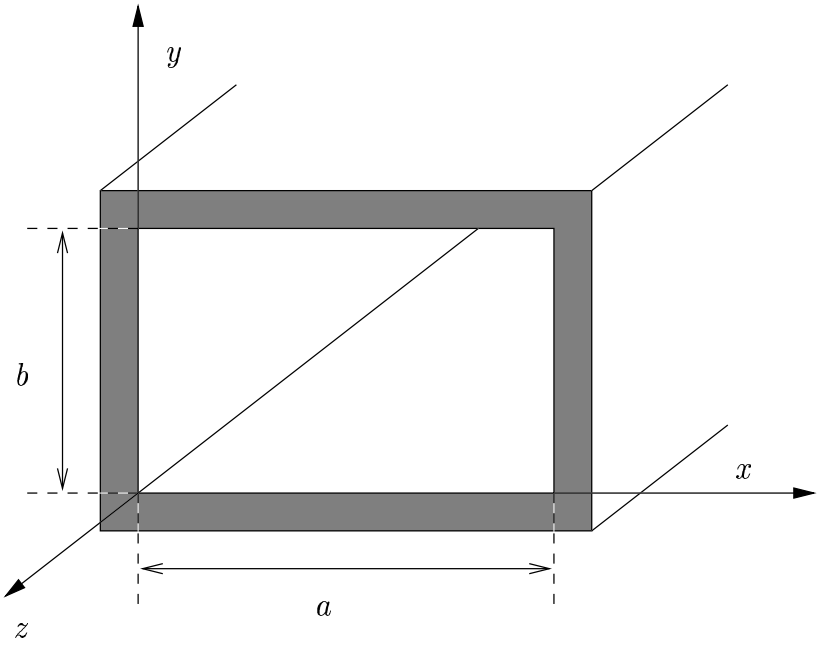


Abbildung 1: Geometrie in einem Rechteckhohlleiter

In Hohlleitern mit rechteckigem Querschnitt werden kartesische Koordinaten verwendet (siehe Abb. 1). Es gilt daher:

$$u_1 = x \tag{2.34}$$
$$u_2 = y \tag{2.35}$$
$$t_1 = 1 \tag{2.36}$$
$$t_2 = 1 \tag{2.37}$$

Da die Wand als ideal leitend angenommen werden darf, gelten als Randbedingungen:

$$e_z\big|_{\text{Wand}} = 0 \tag{2.38}$$
$$\left.\frac{\partial h_z}{\partial \mathbf{n}}\right|_{\text{Wand}} = 0, \tag{2.39}$$

wobei **n** der Normalenvektor auf der Hohlleiterwand ist. Als Lösungen der Maxwellschen Gleichungen erhält man somit für die Eigenfunktionen T_m und T'_m:

$$T_m = N_m \sin\left(\frac{p\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \tag{2.40}$$
$$T'_m = N_m \cos\left(\frac{p\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \tag{2.41}$$

mit den ganzzahligen Indizes p und m. Für die Phasenkonstante β_m gilt:

$$\beta_m = \sqrt{k^2 - \left(\frac{p\pi x}{a}\right)^2 - \left(\frac{m\pi y}{b}\right)^2} \tag{2.42}$$

Man sieht, daß TE_{pm} und TM_{pm}-Moden die gleiche Phasenkonstante haben, also entartet sind. Die Phasenkonstante muß positiv reell sein. Deshalb ist eine Hohlleitermode nur ausbreitungsfähig, wenn für die Freiraumwellenzahl k gilt:

$$k > k_{cm}, \tag{2.43}$$

wobei

$$k_{cm} = \sqrt{\left(\frac{p\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2} \tag{2.44}$$

die Cutoff-Wellenzahl der Mode m ist.

Für die Feldkomponenten der TM_{pm}- und TE_{pm}-Moden im Rechteckhohlleiter gilt:

$$e_x^{\mathrm{TM}} = A_m N_m \sqrt{R_m Z} \qquad \frac{p\pi}{a} \cos\left(\frac{p\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \tag{2.45a}$$

$$e_y^{\mathrm{TM}} = A_m N_m \sqrt{R_m Z} \qquad \frac{m\pi}{b} \sin\left(\frac{p\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \tag{2.45b}$$

$$e_z^{\mathrm{TM}} = jA_m N_m \sqrt{R_m Z} \frac{k_{cm}^2}{\beta_m} \qquad \sin\left(\frac{p\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \tag{2.45c}$$

$$h_x^{\mathrm{TM}} = -A_m N_m \frac{1}{\sqrt{R_m Z}} \qquad \frac{m\pi}{b} \sin\left(\frac{p\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \tag{2.45d}$$

$$h_y^{\mathrm{TM}} = A_m N_m \frac{1}{\sqrt{R_m Z}} \qquad \frac{p\pi}{a} \cos\left(\frac{p\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \tag{2.45e}$$

$$e_x^{\mathrm{TE}} = -A_m N_m \sqrt{R_m Z} \qquad \frac{m\pi}{b}\cos\left(\frac{p\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \tag{2.46a}$$

$$e_y^{\mathrm{TE}} = A_m N_m \sqrt{R_m Z} \qquad \frac{p\pi}{a}\sin\left(\frac{p\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \tag{2.46b}$$

$$h_x^{\mathrm{TE}} = -A_m N_m R_m^2 \frac{1}{\sqrt{R_m Z}} \qquad \frac{p\pi}{a}\sin\left(\frac{p\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \tag{2.46c}$$

$$h_y^{\mathrm{TE}} = -A_m N_m R_m^2 \frac{1}{\sqrt{R_m Z}} \qquad \frac{m\pi}{b}\cos\left(\frac{p\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \tag{2.46d}$$

$$h_z^{\mathrm{TE}} = jA_m N_m R_m^2 \frac{1}{\sqrt{R_m Z}} \frac{k_{cm}^2}{\beta_m} \qquad \cos\left(\frac{p\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \tag{2.46e}$$

Man sieht, daß TM-Wellen nur existieren, wenn beide Indizes von Null verschieden sind. Deshalb wird in Monomode-Rechteckhohlleitern die TE_{10}-Mode verwendet, da sie die niedrigste Cutoff-Frequenz hat, und keine entartete TM-Mode existiert.

2.2.2 Normierung der Modenamplituden

Um die Normierungsfaktoren N_m zu berechnen, werden nun die Eigenfunktionen der Moden im Rechteckhohlleiter in die allgemeinen Gleichungen 2.24a und 2.24b eingesetzt:

$$P_m^{\mathrm{TM}} = \frac{|A_m|^2 N_m^2 \pi^2}{2} \int_0^a \int_0^b \left[\frac{p^2}{a^2}\cos^2\left(\frac{p\pi x}{a}\right)\sin^2\left(\frac{m\pi y}{b}\right) + \frac{m^2}{b^2}\sin^2\left(\frac{p\pi x}{a}\right)\cos^2\left(\frac{m\pi y}{b}\right)\right] dydx \tag{2.47}$$

$$P_m^{\mathrm{TE}} = \frac{|A_m|^2 N_m^2 R_m^2 \pi^2}{2} \int_0^a \int_0^b \left[\frac{m^2}{b^2}\cos^2\left(\frac{p\pi x}{a}\right)\sin^2\left(\frac{m\pi y}{b}\right) + \frac{p^2}{a^2}\sin^2\left(\frac{p\pi x}{a}\right)\cos^2\left(\frac{m\pi y}{b}\right)\right] dydx \tag{2.48}$$

Zur Lösung werden folgende Integralbeziehungen verwendet:

$$\int_0^a \sin^2\left(\frac{px\pi}{a}\right) dx = \begin{cases} 0 & \text{für } p = 0 \\ \frac{a}{2} & \text{für } p > 0 \end{cases} \tag{2.49}$$

$$\int_0^a \cos^2\left(\frac{px\pi}{a}\right) dx = \begin{cases} a & \text{für } p = 0 \\ \frac{a}{2} & \text{für } p > 0 \end{cases} \tag{2.50}$$

Da bei TM-Moden immer beide Indizes größer als Null sind, gilt für die Modenleistung:

$$P_m^{\mathrm{TM}} = \frac{|A_m|^2 N_m^2 abk_{cm}^2}{8} \tag{2.51}$$

Bei TE-Wellen erhält man:

$$P_m^{\mathrm{TE}} = \frac{|A_m|^2 N_m^2 R_m^2 abk_{cm}^2}{4\varepsilon_{pm}} \tag{2.52}$$

mit

$$\varepsilon_{pm} = \begin{cases} 2 & \text{für } p > 0, m > 0 \\ \\ 1 & \text{sonst} \end{cases} \tag{2.53}$$

Setzt man nun $P_m = \frac{1}{2}|A_m|^2$ in diese Gleichungen ein und löst nach N_m auf, so erhält man für die Normierungsfaktoren:

$$N_m^{\mathrm{TM}} = \sqrt{\frac{4}{abk_{cm}^2}} \tag{2.54}$$

$$N_m^{\mathrm{TE}} = \sqrt{\frac{2\varepsilon_{pm}}{R_m^2 abk_{cm}^2}} \tag{2.55}$$

Meist werden Hohlleiter verwendet, bei denen die Breite a größer ist als die Höhe b. Bei TE-Wellen ist dann immer der x-Index größer als Null. Bei den hier angegebenen Formeln für die Modenleistung wurde jedoch auch der umgekehrte Fall berücksichtigt, so daß man z.B. auch die Leistung von $\mathrm{TE}_{0\mathrm{m}}$-Wellen bestimmen kann.

2.2.3 Ohmsche Verluste

Das Integral für den Leistungsabfall im Rechteckhohlleiter lautet für TM-Wellen:

$$\frac{dP_m^{\mathrm{TM}}}{dz} = \frac{R_s}{2}\left(\int_0^a |h_x(x,0)|^2 dx + \int_0^a |h_x(x,b)|^2 dx + \int_0^b |h_y(0,y)|^2 dy + \int_0^b |h_y(a,y)|^2 dy\right) \tag{2.56}$$

Setzt man die Feldkomponenten hier ein, so erhält man unter Verwendung der Integralbeziehungen (2.49) und (2.50):

$$\frac{dP_m^{\mathrm{TM}}}{dz} = \frac{R_s}{2}\left(\frac{A_m N_m B_{\mathrm{TM}}}{R_m Z}\right)^2 \left[\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 \int_0^a \sin^2\left(\frac{p\pi x}{a}\right) dx + \left(\frac{p\pi}{a}\right)^2 \int_0^a \sin^2\left(\frac{m\pi y}{b}\right) dy\right]$$
$$= \frac{R_s}{2}\left(\frac{A_m N_m B_{\mathrm{TM}}}{R_m Z}\right)^2 \left[\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 a + \left(\frac{p\pi}{a}\right)^2 b\right] \tag{2.57}$$

Für den Dämpfungskoeffizienten α_m^{TM} erhält man so:

$$\alpha_m^{\mathrm{TM}} = \frac{dP_m^{\mathrm{TM}}}{dz}\frac{1}{2P_m^{\mathrm{TM}}} = R_s\left(\frac{A_m N_m B_{\mathrm{TM}}}{R_m Z}\right)^2\left[\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 a+\left(\frac{p\pi}{a}\right)^2 b\right]\frac{2R_m Z}{|A_m|^2 N_m^2 B_{\mathrm{TM}}^2 ab\left[\left(\frac{p\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2\right]} = \frac{2R_s}{R_m Z b}\frac{m^2+p^2\left(\frac{b}{a}\right)^3}{m^2+p^2\left(\frac{b}{a}\right)^2} \quad (2.58)$$

Der Leistungsabfall für TE-Wellen lautet:

$$\frac{dP_m^{\mathrm{TE}}}{dz} = \frac{R_s}{2}\left[\int_0^a(|h_x(x,0)|^2+|h_z(x,0)|^2)dx+\int_0^a(|h_x(x,b)|^2+|h_z(x,b)|^2)dx+\int_0^b(|h_y(0,y)|^2+|h_z(0,y)|^2)dy+\int_0^b(|h_y(a,y)|^2+|h_z(a,y)|^2)dy\right] \quad (2.59)$$

Für $p \neq 0$ erhält man:

$$\frac{dP_m^{\mathrm{TE_{pm}}}}{dz} = \frac{R_s}{2}(A_m N_m B_{\mathrm{TE}})^2\left[\frac{k_{cm}^4}{\beta_m^2}(a+b)+\frac{p^2\pi^2}{a}+\frac{m^2\pi^2}{b}\right] \quad (2.60)$$

Der Dämpfungskoeffizient wird dann zu:

$$\alpha_m^{\mathrm{TE_{pm}}} = \frac{2R_s}{ZbR_m}\left[\left(1-R_m^2\right)\left(1+\frac{b}{a}\right)+R_m^2\frac{\frac{b}{a}\left(\frac{b}{a}p^2+m^2\right)}{p^2\frac{b^2}{a^2}+m^2}\right] \quad (2.61)$$

Bei $\mathrm{TE_{p0}}$-Moden wird die Dämpfung gesondert hergeleitet. Für den Leistungsabfall dieser Moden gilt:

$$\frac{dP_m^{\mathrm{TE_{p0}}}}{dz} = \frac{R_s}{2}(A_m N_m B_{\mathrm{TE}})^2\left\{\left[\left(\frac{p\pi}{a}\right)^2+\frac{k_{cm}^4}{\beta_m^2}\right]a+2b\frac{k_{cm}^4}{\beta_m^2}\right\} \quad (2.62)$$

Die Dämpfung ergibt sich dann zu:

$$\alpha_m^{\mathrm{TE_{p0}}} = \frac{R_s}{ZbR_m}\left[1+2\frac{b}{a}(1-R_m^2)\right] \quad (2.63)$$

2.3 Zylindrischer Querschnitt mit glatter Wand

2.3.1 Lösungen der Maxwellschen Gleichungen

Für Hohlleiter mit kreisförmigem Querschnitt nimmt man ein Zylinderkoordinatensystem an (siehe Abbbildung 2). Der Radius des Hohlleiters wird mit *a* bezeichnet. Es gilt für die

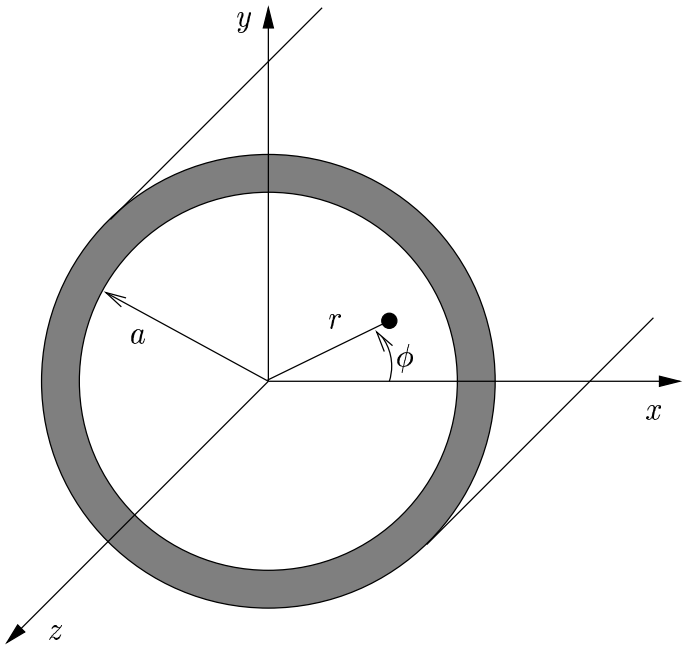


Abbildung 2: Geometrie in einem zylindrischen Hohlleiter

Koordinaten u_1 und u_2 und die Beträge der Tangentenvektoren t_1 und t_2:

$$u_1 = r \tag{2.64}$$

$$u_2 = \phi \tag{2.65}$$

$$t_1 = 1 \tag{2.66}$$

$$t_2 = r \tag{2.67}$$

Die Randbedingungen auf der ideal leitenden Wand lauten:

$$e_z|_{r=a} = 0 \tag{2.68}$$

$$\left.\frac{\partial h_z}{\partial r}\right|_{r=a} = 0 \tag{2.69}$$

Im folgenden wird für die Felder der Moden eine Darstellung verwendet, die sich von den in der Literatur angegebenen Formeln (z.B. [23]) darin unterscheidet, daß die transversalen Felder der TM_{pm}- und TE_{pm}-Wellen die gleiche Azimutalabhängigkeit haben. Dieser Ansatz ist nötig, da die Formeln später auf Hybridmoden des korrugierten Hohlleiters übertragen werden sollen. Auch für die Berechnung der Modenwandlung im gekrümmten Hohlleiter ist es wichtig, daß TM- und TE-Wellen die gleiche Azimutalabhängigkeit haben.

Setzt man die Differentialgleichungen (2.16a) und (2.16b) für Zylinderkoordinaten an, so erhält man als Lösung für die Funktionen T_m und T'_m:

$$T_m = N_m J_p(rk_{cm})\sin(p\phi) \tag{2.70}$$

$$T'_m = N_m J_p(rk_{cm})\cos(p\phi), \tag{2.71}$$

wobei für die Phasenkonstante β_m gilt:

$$\beta_m = \sqrt{k^2 - k_{cm}^2} \tag{2.72}$$

Daraus folgt, daß eine Mode nur ausbreitungsfähig ist, wenn die Freiraumwellenzahl k größer als k_{cm} ist. Aus den Randbedingungen erhält man für die Cutoff-Wellenzahlen:

$$k_{cm}^{\mathrm{TM}} = \frac{j_{pm}}{a} \tag{2.73}$$

$$k_{cm}^{\mathrm{TE}} = \frac{j'_{pm}}{a}, \tag{2.74}$$

wobei j_{pm} die m'te Nullstelle der Besselfunktion J_p ist, j'_{pm} ist die m'te Nullstelle der Ableitung J'_p. Es wird nun noch ein radialer Eigenwert X_m definiert, für den gilt:

$$X_m = k_{cm}a \tag{2.75}$$

Für die Felder der Moden gilt dann:

$$e_r^{\mathrm{TM}_{\mathrm{pm}}} = A_m N_m \sqrt{R_m Z}\frac{X_m}{a} \quad \sin(p\phi)J'_p\left(\frac{rX_m}{a}\right) \tag{2.76a}$$

$$e_\phi^{\mathrm{TM}_{\mathrm{pm}}} = A_m N_m \sqrt{R_m Z}\frac{p}{r} \quad \cos(p\phi)J_p\left(\frac{rX_m}{a}\right) \tag{2.76b}$$

$$e_z^{\mathrm{TM}_{\mathrm{pm}}} = A_m N_m \sqrt{R_m Z}\, j\frac{k_{cm}^2}{\beta_m}\sin(p\phi)J_p\left(\frac{rX_m}{a}\right) \tag{2.76c}$$

$$h_r^{\mathrm{TM}_{\mathrm{pm}}} = -A_m N_m \frac{1}{\sqrt{R_m Z}}\frac{p}{r}\cos(p\phi)J_p\left(\frac{rX_m}{a}\right) \tag{2.76d}$$

$$h_\phi^{\mathrm{TM}_{\mathrm{pm}}} = A_m N_m \frac{1}{\sqrt{R_m Z}}\frac{X_m}{a} \quad \sin(p\phi)J'_p\left(\frac{rX_m}{a}\right) \tag{2.76e}$$

$$e_r^{\mathrm{TE}_{\mathrm{pm}}} = -A_m N_m \sqrt{ZR_m}\frac{p}{r} \quad \sin(p\phi)J_p\left(\frac{rX_m}{a}\right) \tag{2.77a}$$

$$e_\phi^{\mathrm{TE}_{\mathrm{pm}}} = -A_m N_m \sqrt{ZR_m}\frac{X_m}{a} \quad \cos(p\phi)J'_p\left(\frac{rX_m}{a}\right) \tag{2.77b}$$

$$h_r^{\mathrm{TE}_{\mathrm{pm}}} = A_m N_m R_m \sqrt{\frac{R_m}{Z}}\frac{X_m}{a} \quad \cos(p\phi)J'_p\left(\frac{rX_m}{a}\right) \tag{2.77c}$$

$$h_\phi^{\mathrm{TE}_{\mathrm{pm}}} = -A_m N_m R_m \sqrt{\frac{R_m}{Z}}\frac{p}{r} \quad \sin(p\phi)J_p\left(\frac{rX_m}{a}\right) \tag{2.77d}$$

$$h_z^{\mathrm{TE}_{\mathrm{pm}}} = jA_m N_m R_m \sqrt{\frac{R_m}{Z}}\frac{k_{cm}^2}{\beta_m}\cos(p\phi)J_p\left(\frac{rX_m}{a}\right) \tag{2.77e}$$

Die TM_{0m}-Moden müssen hier gesondert betrachtet werden, da ihre Felder verschwinden, wenn man in den allgemeinen Gleichungen für die TM_{pm}-Wellen $p = 0$ wählt. TM_{0m}-Moden sind rotationssymmetrisch. Das elektrische Feld hat nur Komponenten in z- und r-Richtung, das magnetische Feld hat nur eine Komponente in azimutaler Richtung. Die Feldkomponenten der TM_{0m}-Moden ergeben sich zu:

$$e_r^{\mathrm{TM}_{0m}} = A_m N_m \sqrt{R_m Z} \frac{X_m}{a} \; J_p' \left(\frac{r X_m}{a} \right) \tag{2.78a}$$

$$e_z^{\mathrm{TM}_{0m}} = A_m N_m \sqrt{R_m Z}\, j \frac{k_{cm}^2}{\beta_m} J_p \left(\frac{r X_m}{a} \right) \tag{2.78b}$$

$$h_\phi^{\mathrm{TM}_{0m}} = A_m N_m \frac{1}{\sqrt{R_m Z}} \frac{X_m}{a} \; J_p' \left(\frac{r X_m}{a} \right) \tag{2.78c}$$

Um die Felder direkt auf der Hohlleiterachse, d.h. bei $r = 0$ zu bestimmen, muß in diesen Gleichungen für $r \to 0$ ein Grenzwert für den Term $\frac{p}{r} J_p \left(\frac{r X_m}{a} \right)$ gebildet werden. Man erhält:

$$\lim_{r \to 0} \frac{p}{r} J_p \left(\frac{r X_m}{a} \right) = \begin{cases} \frac{1}{2} \frac{X_m}{a} & \text{für } p = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{2.79}$$

Ferner gilt:

$$J_p'(0) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{für } p = 1 \\ 0 & \text{für } p \neq 1 \end{cases} \tag{2.80}$$

Daraus folgt, daß nur Moden mit dem Azimutalindex $p = 1$ transversale Feldkomponenten bei $r = 0$ haben.
Der Winkel ϕ ist auf der Hohlleiterachse ebenfalls nicht definiert. Man kann jedoch die Azimutalabhängigkeiten der Felder so interpretieren, daß bei TE_{1m}- und TM_{1m}-Moden das elektrische Feld dort nur eine y-Komponente besitzt, das magnetische Feld hat nur eine x-Komponente. Es gilt also für TM_{1m}-Moden:

$$e_y^{\mathrm{TM}_{1m}}\big|_{r=0} = \quad \frac{1}{2} A_m N_m \sqrt{R_m Z} \frac{X_m}{a} \tag{2.81a}$$

$$h_x^{\mathrm{TM}_{1m}}\big|_{r=0} = -\frac{1}{2} A_m N_m \frac{1}{\sqrt{R_m Z}} \frac{X_m}{a} \tag{2.81b}$$

Für TE_{1m}-Moden gilt:

$$e_y^{\mathrm{TE}_{1m}}\big|_{r=0} = - \quad \frac{1}{2} A_m N_m \sqrt{R_m Z} \frac{X_m}{a} \tag{2.82a}$$

$$h_x^{\mathrm{TE}_{1m}}\big|_{r=0} = \quad \frac{1}{2} A_m N_m R_m \sqrt{\frac{R_m}{Z}} \frac{X_m}{a} \tag{2.82b}$$

2.3.2 Normierung der Modenamplituden

Im glatten Hohlleiter gilt für die Leistungen P_m^{TM} und P_m^{TE}:

$$P_m^{\mathrm{TM}} = \frac{1}{2}|A_m|^2 N_m^2 \times \int_0^{\phi}\int_0^{r_0}\left[\frac{X_m^2}{a^2}\sin^2(p\phi)J_p'^{\,2}\left(\frac{rX_m}{a}\right) + \frac{p^2}{r^2}\cos^2(p\phi)J_p^2\left(\frac{rX_m}{a}\right)\right] r dr d\phi \quad (2.83)$$

$$P_m^{\mathrm{TE}} = \frac{1}{2}|A_m|^2 N_m^2 R_m^2 \times \int_0^{\phi}\int_0^{r_0}\left[\frac{p^2}{r^2}\sin^2(p\phi)J_p^2\left(\frac{rX_m}{a}\right) + \frac{X_m^2}{a^2}\cos^2(p\phi)J_p'^{\,2}\left(\frac{rX_m}{a}\right)\right] r dr d\phi \quad (2.84)$$

Die Lösung dieser Integrale wird im Anhang (Kapitel A, Seite 109) beschrieben. Man erhält:

$$P_m^{\mathrm{TM}} = \varepsilon_p \frac{\pi}{4} N_m^2 |A_m|^2 X_m^2 J_p'^{\,2}(X_m) \quad (2.85)$$

$$P_m^{\mathrm{TE}} = \varepsilon_p \frac{\pi}{4} N_m^2 |A_m|^2 R_m^2 X_m^2 J_p^2(X_m)\left(1 - \frac{p^2}{X_m^2}\right) \quad (2.86)$$

Mit:

$$\varepsilon_p = \begin{cases} 2 & \text{für } p = 0 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.87)$$

Für die Normierungsfaktoren N_m gilt daher:

$$N_m^{\mathrm{TM}} = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon_p \frac{\pi}{2} X_m^2 J_p'^{\,2}(X_m)}} \quad (2.88)$$

$$N_m^{\mathrm{TE}} = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon_p \frac{\pi}{2} R_m^2 X_m^2 J_p^2(X_m)\left(1 - \frac{p^2}{X_m^2}\right)}} \quad (2.89)$$

2.3.3 Ohmsche Verluste

Die Dämpfungskonstanten der Moden in einem glatten Zylinderhohlleiter mit der Oberflächenimpedanz R_s ergeben sich für TE-Moden zu [5],[23]:

$$\alpha_m^{\mathrm{TE}} = \frac{R_s}{Z R_m a}\left(\frac{X_m^2}{Y_m^2} + \frac{p^2}{X_m^2 - p^2}\right) \quad (2.90)$$

Hier ist $Y = k \cdot a$. Für TM-Moden gilt:

$$\alpha_m^{\mathrm{TM}} = \frac{R_s}{Z R_m a} \quad (2.91)$$

2.4 Zylindrischer Querschnitt mit korrugierter Wand

2.4.1 Impedanzmodell

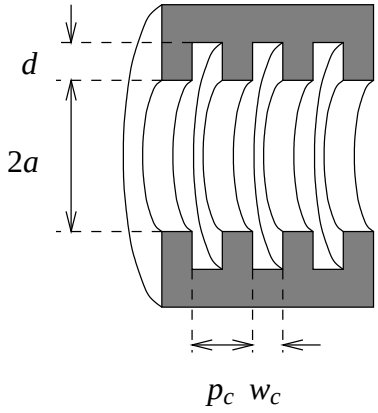


Abbildung 3: Schnitt durch einen korrugierten Rundhohlleiter

Im glatten zylindrischen Hohlleiter sind die Wellentypen TE_{0m} und die TM_{1m}-Wellen entartet und somit stark verkoppelt. Insbesondere in gekrümmten Hohlleitern kann eine vollständige Wandlung der TE_{0m}-Welle in die TM_{1m}-Welle und zurück erfolgen. Da die TE_{0m}-Moden häufig verwendet werden, kann man den Hohlleiter korrugieren, d.h. ihn mit einer in azimutaler Richtung gerillten Innenwand versehen (siehe Abb. 3), was die Entartung der TE_{0m}- und TM_{1m}-Wellen aufhebt und die Modenwandlung reduziert.
Eine solche Hohlleiterwand kann, wenn die Rillungsperiode p_c kleiner als etwa 0.3λ ist, gut durch eine anisotrope Oberflächenimpedanz beschrieben werden [5]. Nimmt man an, daß die Wellen durch die Verluste an der Oberfläche nicht beeinflußt werden, so gilt für die Komponenten der Oberflächenimpedanz:

$$Z_\phi = 0 \tag{2.92}$$

$$Z_z = jZ\frac{w_c}{p_c}\,\frac{\tan kd}{1+\frac{2\tan kd}{ka}} = jZ_wZ \tag{2.93}$$

Die Rillen selbst werden hier als kurzgeschlossene Leitungsstücke aufgefaßt. Der Nenner $1+\frac{2\tan kd}{ka}$ wird eingeführt, um die Krümmung der Hohlleiterwand zu berücksichtigen [5]. Das Verhältnis von Rillungsweite zur Rillungsperiode w_c/p_c trägt der Tatsache Rechnung, daß nur die Rillen selbst zur Impedanz beitragen. Eine Korrugationstiefe von $\frac{\lambda}{2}$ entspricht nach dem Impedanzmodell wieder einem glatten Hohlleiter. Wenn sich also in einem Hohlleiter die Korrugationstiefe sprungartig von Null auf $\frac{\lambda}{2}$ erhöht, werden die Felder der Hohlleitermoden dadurch nicht beeinflußt. Wird die Impedanz Z_z unendlich, so verschwinden die longitudinalen Wandströme und die berechnete Dämpfung der Moden wird sehr gering. In der Praxis ist die Dämpfung jedoch aufgrund der Wandströme, die *innerhalb* der Rillen fließen, etwas größer.

Bei dieser Wandimpedanz ergeben sich als Randbedingungen für die Felder:

$$e_\phi|_{r=a} = 0 \tag{2.94a}$$

$$-\frac{e_z}{h_\phi}\bigg|_{r=a} = Z_z \tag{2.94b}$$

Da nach wie vor ein zylindrisches Koordinatensystem angenommen wird, sind die Funktionen T_m und T'_m der Moden gleich wie im glatten Hohlleiter. Setzt man die Feldkomponenten der Moden in die Randbedingungen ein, so erhält man aus (2.94a) für $\mathrm{TE}_{0\mathrm{m}}$-Wellen:

$$J'(X_m) = 0 \tag{2.95}$$

Da die $\mathrm{TE}_{0\mathrm{m}}$-Wellen keine longitudinalen Wandströme haben, werden sie durch die azimutale Korrugation also nicht beeinflußt, sie haben im korrugierten Hohlleiter die gleichen Eigenwerte und somit auch das gleiche Feldlinienbild wie im glatten Hohlleiter. Für $\mathrm{TM}_{0\mathrm{m}}$-Wellen gilt:

$$X_m J_0(X_m) + Z_w k a J'_p(X_m) = 0 \tag{2.96}$$

Da $\mathrm{TM}_{0\mathrm{m}}$ keine e_ϕ-Komponente haben, ist die Bedingung (2.94a) hier immer erfüllt. Es können also auch $\mathrm{TM}_{0\mathrm{m}}$-Wellen im korrugierten Hohlleiter alleine existieren; da der Eigenwert X_m jedoch nun die Bedingung (2.96) erfüllen muß, ändert sich das Feldlinienbild mit zunehmender Korrugationstiefe.

Für $p > 0$ können die Felder einer reinen TM- oder TE-Welle nicht beide Randbedingungen erfüllen. Es existieren daher Hybridmoden, die aus der Überlagerung einer $\mathrm{TM}_{\mathrm{pm}}$ und einer $\mathrm{TE}_{\mathrm{pm}}$-Welle gebildet werden. Wie schon erwähnt, kann man die Felder der Hybridmoden mit Mischungsfaktoren d_m^{TM} und d_m^{TE} ausdrücken:

$$\mathbf{e}_m^{\mathrm{hybrid}} = d_m^{\mathrm{TM}} \mathbf{e}_m^{\mathrm{TM}} + d_m^{\mathrm{TE}} \mathbf{e}_m^{\mathrm{TE}} \tag{2.97a}$$

$$\mathbf{h}_m^{\mathrm{hybrid}} = d_m^{\mathrm{TM}} \mathbf{h}_m^{\mathrm{TM}} + d_m^{\mathrm{TE}} \mathbf{h}_m^{\mathrm{TE}} \tag{2.97b}$$

Im folgenden gilt analog zu Doane [5]:

$$d_m^{\mathrm{TM}} = 1 \tag{2.98}$$

$$d_m^{\mathrm{TE}} = d_m \tag{2.99}$$

Es gibt also nur einen Mischungsfaktor, der den Anteil der TE-Wellen angibt. Somit erhält

man für die Felder der Hybridmoden:

$$e_r = A_m N_m \sqrt{R_m Z} \left[\frac{X_m}{a} J'_p\left(\frac{rX_m}{a}\right) - d_m \frac{p}{r} J_p\left(\frac{rX_m}{a}\right) \right] \qquad \sin(p\phi) \qquad (2.100a)$$

$$e_\phi = A_m N_m \sqrt{R_m Z} \left[\frac{p}{r} J_p\left(\frac{rX_m}{a}\right) - d_m \frac{X_m}{a} J'_p\left(\frac{rX_m}{a}\right) \right] \qquad \cos(p\phi) \qquad (2.100b)$$

$$e_z = jA_m N_m \sqrt{R_m Z} \frac{k_{cm}^2}{\beta_m} J_p\left(\frac{rX_m}{a}\right) \qquad \sin(p\phi) \qquad (2.100c)$$

$$h_r = A_m N_m \frac{1}{\sqrt{R_m Z}} \left[-\frac{p}{r} J_p\left(\frac{rX_m}{a}\right) + d_m R_m^2 \frac{X_m}{a} J'_p\left(\frac{rX_m}{a}\right) \right] \cos(p\phi) \qquad (2.100d)$$

$$h_\phi = A_m N_m \frac{1}{\sqrt{R_m Z}} \left[\frac{X_m}{a} J'_p\left(\frac{rX_m}{a}\right) - d_m R_m^2 \frac{p}{r} J_p\left(\frac{rX_m}{a}\right) \right] \qquad \sin(p\phi) \qquad (2.100e)$$

$$h_z = jd_m A_m N_m \frac{R_m^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{Z}} \frac{k_{cm}^2}{\beta_m} J_p\left(\frac{rX_m}{a}\right) \qquad \cos(p\phi) \qquad (2.100f)$$

Werden diese Felder in Gleichung 2.94a eingesetzt, so erhält man für den Mischungsfaktor d_m:

$$d_m = \frac{pJ_p(X_m)}{X_m J'_p(X_m)} \qquad (2.101)$$

Setzt man diesen Ausdruck in die Gleichungen für e_z und h_ϕ ein und bildet die Randbedingung 2.94b, so erhält man nach einigen Umformungen folgende Dispersionsbeziehung:

$$F(X_m) := \frac{X_m J'_p(X_m)}{pJ_p(X_m)} - \frac{pJ_p(X_m) R_m^2}{X_m J'_p(X_m)} + \frac{X_m^2}{Z_w pka} = 0 \qquad (2.102)$$

Im glatten Hohlleiter sind die Werte X_m bekannt. Aus diesen und mit Hilfe der Ableitung $\frac{dF}{dX_m}$ können mit dem Newton-Verfahren rekursiv die Eigenwerte für eine zunehmende Korrugationstiefe bestimmt werden. Aus den TM-Moden des glatten Hohlleiters werden bei zunehmender Korrugationstiefe sogenannte HE-Moden, die TE-Moden des glatten Hohlleiters werden zu EH-Moden. Der Unterschied zwischen HE- und EH-Moden besteht in der Phasenlage der TM- und TE-Anteile bzw. im Vorzeichen des Mischungsfaktors d_m.
Die Abbildungen 4 und 5 zeigen den Verlauf der Eigenwerte für einige Moden niedriger Ordnung für einen Hohlleiter mit 70 mm Durchmesser für die Frequenzen 14 GHz und 140 GHz. Als Maß für die Überdimensioniertheit eines zylindrischen Hohlleiters wird meist eine Größe $Y = ka$ definiert. Nach dem Impedanzmodell entspricht eine Korrugationstiefe von $\frac{\lambda}{2}$ wieder einem glatten Hohlleiter. In Abbildung 5 sieht man, daß in einem stark überdimensionierten Hohlleiter die Kurven der Eigenwerte bei Korrugationstiefen um $\frac{\lambda}{4}$ flacher verlaufen als in einem schwach überdimensionierten Hohlleiter. Das bedeutet, daß man bei korrugierten Hohlleitern durch eine starke Überdimensionierung auch eine gewisse Breitbandigkeit erreichen kann.
Tabelle 1 faßt die Modenwandlungen zusammen, die in einem Hohlleiter auftreten, wenn die Korrugationstiefe allmählich von 0 bis $\frac{\lambda}{2}$ erhöht wird.

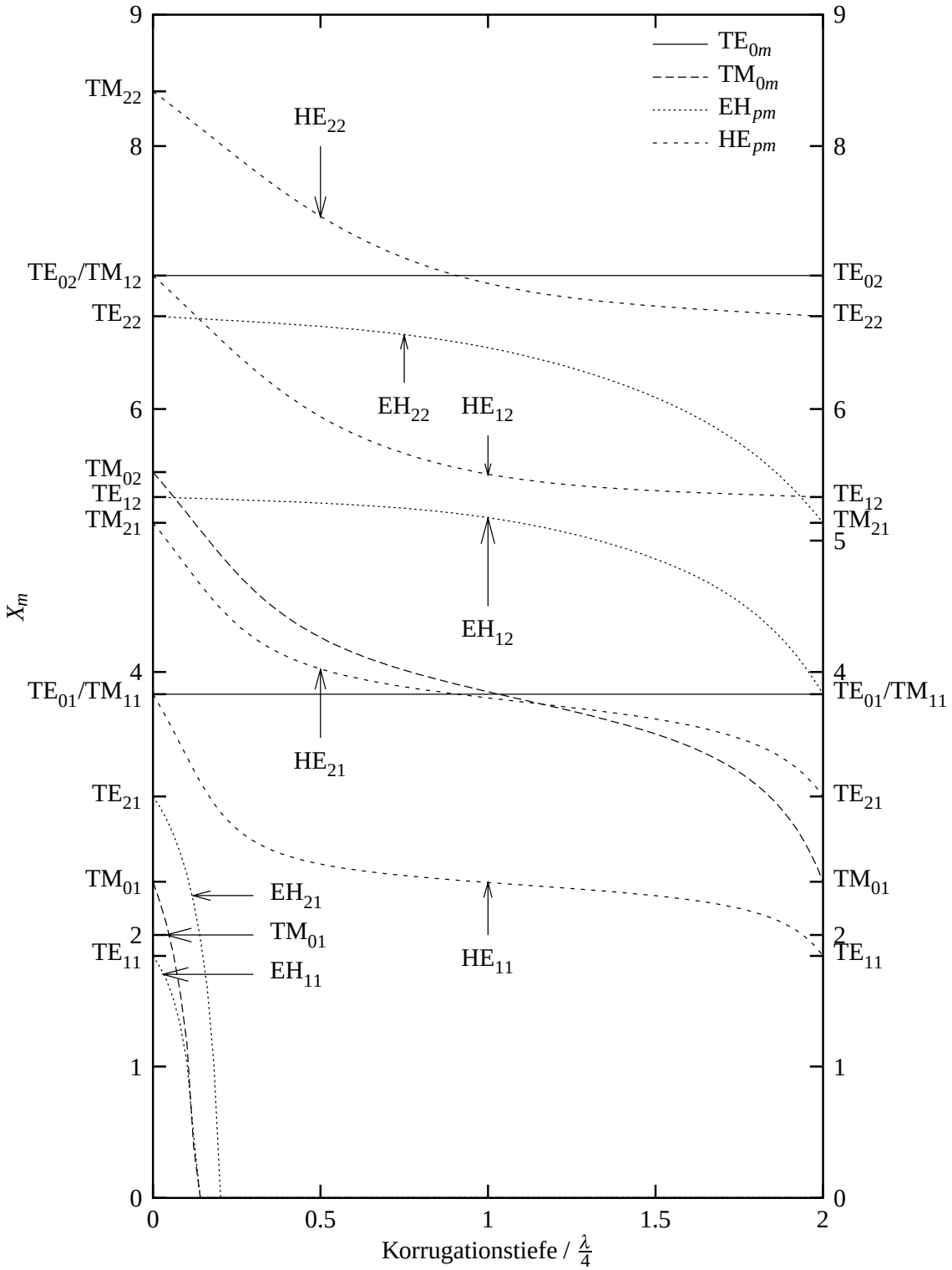


Abbildung 4: Eigenwerte einiger Moden in einem 70 mm Hohlleiter bei 14 GHz ($ka = 10.2696$)

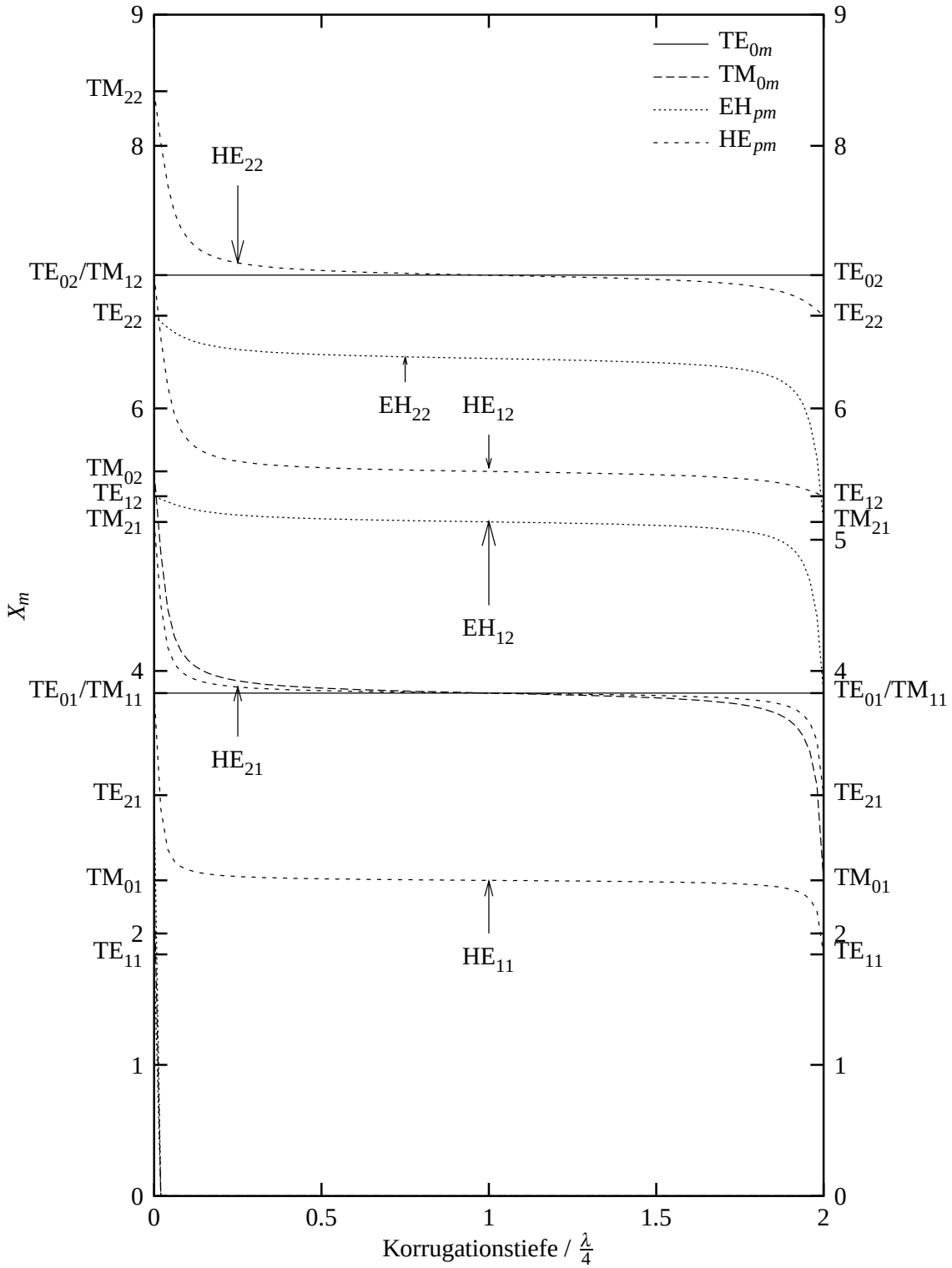


Abbildung 5: Eigenwerte einiger Moden in einem 70 mm Hohlleiter bei 140 GHz ($ka = 102.696$)

$d=0$	$0<d<\frac{\lambda}{2}$	$d=\frac{\lambda}{2}$	Bemerkung
TE_{0m}	TE_{0m}	TE_{0m}	Keine Beeinflussung durch Korrugation
TM_{0m}	TM_{0m}	$TM_{0(m-1)}$	$m>1$
TM_{01}	TM_{01}		Oberflächenwelle
TM_{pm}	HE_{pm}	TE_{pm}	$p>0$
TE_{pm}	EH_{pm}	$TM_{p(m-1)}$	$m>1$
TE_{p1}	EH_{p1}		Oberflächenwelle

Tabelle 1: Modenwandlungen in einem korrugierten Hohlleiter mit wachsender Korrugationstiefe

Interessant für technische Anwendungen ist die HE_{11}-Mode. Sie entspricht in stark überdimensionierten Hohlleitern mit einer Korrugationstiefe von $\frac{\lambda}{4}$ näherungsweise einem linear polarisierten gaußschen Strahl, der sich im Hohlleiter ausbreitet. An einem offenen Hohlleiterende koppelt die HE_{11}-Mode nahezu zu 100 % an einen gaußschen Strahl an. Die HE_{11}-Mode hat nach der in [5] angegebenen Formel eine sehr geringe Dämpfung. Allerdings werden, wie bereits erwähnt, hier nicht die Wandströme berücksichtigt, die in den Rillen selbst fließen und für einen zusätzlichen Leistungsverlust sorgen.
Wie man in den Abbildungen 4 und 5 sehen kann, kann man eine HE_{11}-Mode erzeugen, indem man zunächst eine TM_{11}-Mode in einem glatten Hohlleiter erzeugt und dann die Korrugationstiefe langsam auf $\frac{\lambda}{4}$ erhöht. Eine andere Möglichkeit besteht darin, eine TE_{11}-Mode zu erzeugen. Die Korrugationstiefe wird dann sprungartig auf $\frac{\lambda}{2}$ erhöht, und dann langsam auf $\frac{\lambda}{4}$ verringert.
Das im Verlauf der vorliegenden Arbeit entwickelte Programmodul für korrugierte Hohlleiter berechnet bei der Initialisierung für alle Frequenzen die Eigenwerte an jeweils 100 Stützstellen zwischen 0 und $\frac{\lambda}{2}$. Es kann dann z.B. für die Berechnung eines Krümmers eine beliebige Korrugationstiefe gewählt werden. Der Eigenwert wird zunächst mit linearer Interpolation aus den Stützwerten berechnet. Aus dem interpolierten Wert wird dann unter Verwendung der Dispersionsfunktion F und deren Ableitung $\frac{\partial F}{\partial X_m}$ mit dem Newton Verfahren der genaue Eigenwert bestimmt. Wegen der großen Zahl von Stützstellen braucht das Newton Verfahren selten mehr als zwei Iterationen. Die Frequenz kann nicht beliebig gewählt werden. Man gibt am Anfang ein Frequenzintervall und die Zahl der Frequenzpunkte an. Diese Methode benötigt zwar etwas länger zur Initialisierung, danach können die Eigenwerte für eine bestimmte Korrugationstiefe jedoch sehr schnell bestimmt werden. Das ist hauptsächlich während einer Optimierung von Vorteil.

2.4.2 Normierung der Modenamplituden

Die Modenleistung kann durch Anwendung von Gleichung 2.26 berechnet werden. Die Lösung wird im Anhang (Kapitel A, Seite 109) beschrieben. Man erhält für TM_{0m}-Moden:

$$P_m^{\mathrm{TM}_{0m}} = \frac{\pi}{2} N_m^2 |A_m|^2 \frac{1}{R_m Z} B_{\mathrm{TM}}^2 X_m^2 \left[J'^2_0(X_m) + \frac{2}{X_m} J_0(X_m) J'_0(X_m) + J_0^2(X_m) \right] \qquad (2.103)$$

Für den Normierungsfaktor gilt daher:

$$N_m^{\mathrm{TM}_{0\mathrm{m}}} = B_{\mathrm{TM}} X_m \sqrt{\frac{R_m Z}{\pi \left[J'^2_0(X_m) + \frac{2}{X_m} J_0(X_m) J'_0(X_m) + J_0^2(X_m) \right]}} \tag{2.104}$$

Für $\mathrm{TE}_{0\mathrm{m}}$-Wellen gilt:

$$P_m^{\mathrm{TE}_{0\mathrm{m}}} = |A_m|^2 N_m^2 \frac{\pi}{2} R_m^2 X_m^2 J_p^2(X_m) \tag{2.105}$$

$$N_m^{\mathrm{TE}_{0\mathrm{m}}} = \sqrt{\frac{1}{\pi R_m^2 X_m^2 J_p^2(X_m)}} \tag{2.106}$$

Für die Modenleistung der Hybridmoden im korrugierten Hohlleiter gilt:

$$P_m^{\mathrm{hybrid}} = |A_m|^2 N_m^2 \frac{\pi}{4} X_m^2 J_p^2(X_m) \left\{ \left(1 + d_m^2 R_m^2\right) \left[1 - \frac{p^2}{X_m^2} + \frac{2p}{d_m X_m^2} + \frac{p^2}{X_m^2 d_m^2} \right] - 2\left(1 + R_m^2\right) d_m \frac{p}{X_m^2} \right\} \tag{2.107}$$

Der Normierungsfaktor ergibt sich dann zu:

$$N_m^{\mathrm{hybrid}} = \sqrt{\frac{2}{\pi X_m^2 J_p^2(X_m) \left[(1 + d_m^2 R_m^2) \left(1 - \frac{p^2}{X_m^2} + \frac{2p}{d_m X_m^2} + \frac{p^2}{X_m^2 d_m^2} \right) - 2(1 + R_m^2) d_m \frac{p}{X_m^2} \right]}} \tag{2.108}$$

2.4.3 Ohmsche Verluste

Für die Dämpfungen der Hybridmoden gilt nach Doane [5]:

$$\alpha_m^{\mathrm{hybrid}} = \frac{R_s X_m^2}{2 Z D_m R_m a Y^2} \left(\frac{1}{Z_w^2} + d_m^2 R_m^2 \right) \tag{2.109}$$

Mit:

$$D_m = \frac{1}{2} \left[(1 + R_m^2 d_m^2) \left(1 - \frac{p^2}{X_m^2} + \frac{2p}{d_m X_m^2} + \frac{p^2}{d_m^2 X_m^2} \right) - 2(1 + R_m^2) d_m \frac{p}{X_m^2} \right] \tag{2.110}$$

Für die $\mathrm{TM}_{0\mathrm{m}}$- und $\mathrm{TE}_{0\mathrm{m}}$-Moden gilt:

$$\alpha_m^{\mathrm{TM}_{0\mathrm{m}}} = \frac{R_s}{Z R_m a} \left[1 - \frac{2 Y Z_w}{X_m^2} + \left(\frac{Y Z_w}{X_m} \right)^2 \right]^{-1} \tag{2.111}$$

$$\alpha_m^{\mathrm{TE}_{0\mathrm{m}}} = \frac{R_s X_m^2}{Z R_m a Y^2} \tag{2.112}$$

3 Felder im gekrümmten Hohlleiter

3.1 Allgemeiner Querschnitt

Die folgende Behandlung der Felder im gekrümmten Hohlleiter ist weitgehend analog zu [15], wobei darauf geachtet wurde, daß alle Beziehungen unabhängig von Querschnitt und Randbedingungen des eigentlichen Hohlleiters sind. In den nachfolgenden Abschnitten werden dann die Spezialfälle behandelt.
Im gekrümmten Hohlleiter ist die z-Achse gekrümmt. Die entsprechende Koordinate, in deren Richtung sich die Welle ausbreitet, wird mit u_3 bezeichnet. Die transversalen Koordinatenachsen u_1 und u_2 sollen weiterhin denen des geraden Hohlleiters entsprechen. Ferner sind die Tangentenvektoren der transversalen Koordinaten $\mathbf{t}_1$ und $\mathbf{t}_2$ von u_3 unabhängig und das Koordinatensystem ist weiterhin orthogonal. Die Maxwellschen Gleichungen lassen sich dann wie folgt angeben:

$$\frac{1}{t_2 t_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_2}(t_3 H_3) - \frac{\partial}{\partial u_3} H_2 t_2\right] = j\frac{k}{Z} E_1 \tag{3.1a}$$

$$\frac{1}{t_1 t_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_3} H_1 t_1 - \frac{\partial}{\partial u_1}(t_3 H_3)\right] = j\frac{k}{Z} E_2 \tag{3.1b}$$

$$\frac{1}{t_1 t_2}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}(H_2 t_2) - \frac{\partial}{\partial u_2}(H_1 t_1)\right] = j\frac{k}{Z} E_3 \tag{3.1c}$$

$$\frac{1}{t_2 t_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_2}(t_3 E_3) - \frac{\partial}{\partial u_3} E_2 t_2\right] = -jkZH_1 \tag{3.1d}$$

$$\frac{1}{t_1 t_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_3} E_1 t_1 - \frac{\partial}{\partial u_1}(t_3 E_3)\right] = -jkZH_2 \tag{3.1e}$$

$$\frac{1}{t_1 t_2}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}(E_2 t_2) - \frac{\partial}{\partial u_2}(E_1 t_1)\right] = -jkZH_3 \tag{3.1f}$$

Die transversalen Gesamtfelder im gekrümmten Hohleiter werden nun in Reihen nach Feldern des geraden Hohlleiters entwickelt:

$$\mathbf{E}_t = \sum_m V_m \tilde{\mathbf{e}}_{t,m} \tag{3.2a}$$

$$\mathbf{H}_t = \sum_m I_m \tilde{\mathbf{h}}_{t,m} \tag{3.2b}$$

Hier entspricht V_m einer Spannung, I_m entspricht einem Strom. Demzufolge haben $\tilde{\mathbf{e}}_{t,m}$ und $\tilde{\mathbf{h}}_{t,m}$ als Einheit m^{-1}, es handelt sich also nicht um Feldstärken im physikalischen Sinne, sondern um Vektorfunktionen, die proportional zu den physikalischen Feldstärken sind.

Die Felder des geraden Hohlleiters werden in ihrer allgemeinen Form als Hybridmoden mit den Mischungsfaktoren d_m^{TM} und d_m^{TE} und den Eigenfunktionen T_m und T_m' angesetzt. Für die transversalen Felder gilt also:

$$\tilde{\mathbf{e}}_{t,m} = d_m^{\mathrm{TM}} \nabla_t T_m + d_m^{\mathrm{TE}} \nabla_t T_m' \times \mathbf{t}_z \tag{3.3}$$

$$\tilde{\mathbf{h}}_{t,m} = -d_m^{\mathrm{TM}} \nabla_t T_m \times \mathbf{t}_z + d_m^{\mathrm{TE}} R_m^2 \nabla_t T_m' \tag{3.4}$$

In diesem Ansatz ist der Normierungsfaktor N_m in den Funktionen T_m und T_m' enthalten. Demzufolge gilt für die transversalen Feldkomponenten der TM- und TE-Anteile:

$$\tilde{h}_{m1}^{\mathrm{TM}} = -\tilde{e}_{m2}^{\mathrm{TM}} \tag{3.5a}$$

$$\tilde{h}_{m2}^{\mathrm{TM}} = \tilde{e}_{m1}^{\mathrm{TM}} \tag{3.5b}$$

$$\tilde{h}_{m1}^{\mathrm{TE}} = -R_m^2 \tilde{e}_{m2}^{\mathrm{TE}} \tag{3.5c}$$

$$\tilde{h}_{m2}^{\mathrm{TE}} = R_m^2 \tilde{e}_{m1}^{\mathrm{TE}} \tag{3.5d}$$

Für die $u3$-Komponenten der Modenfelder des geraden Hohlleiters gilt:

$$\tilde{e}_{m3} = jkZ d_m^{\mathrm{TM}} \frac{k_{cm}^2}{k^2} T_m \tag{3.6a}$$

$$\tilde{h}_{m3} = j\frac{k}{Z} d_m^{\mathrm{TE}} \frac{k_{cm}^2}{k^2} T_m' \tag{3.6b}$$

mit der Cutoff-Wellenzahl $k_{cm} = \sqrt{k^2 - \beta_m^2}$. Setzt man (3.2b) in (3.1c) ein und (3.2a) in (3.1f), so erhält man für die u_3-Komponenten des Gesamtfeldes im gekrümmten Hohlleiter:

$$E_3 = jkZ \sum_m d_m^{\mathrm{TM}} I_m \frac{k_{cm}^2}{k^2} T_m \tag{3.7a}$$

$$H_3 = j\frac{k}{Z} \sum_m d_m^{\mathrm{TE}} V_m \frac{k_{cm}^2}{k^2} T_m' \tag{3.7b}$$

Um die Spannungs- und Stromkoeffizienten I_m und V_m zu bestimmen, wird die Gleichung 3.1d mit $(t_3 \tilde{h}_{n1})$ multipliziert, Gleichung 3.1e wird mit $(t_3 \tilde{h}_{n2})$ multipliziert, wobei $\tilde{h}_{n1}$ und $\tilde{h}_{n2}$ die u_1- bzw. u_2-Komponenten einer gekoppelten Mode n sind.

$$\sum_m \left[jkZ d_m^{\mathrm{TM}} \frac{k_{cm}^2}{k^2} I_m \frac{\partial}{t_2 \partial u_2} (T_m t_3) \tilde{h}_{n1} - \frac{\partial V_m}{\partial u_3} \tilde{e}_{m2} \tilde{h}_{n1} \right] = -jkZ \sum_m \tilde{h}_{m1} I_m t_3 \tilde{h}_{n1} \tag{3.8a}$$

$$\sum_m \left[\frac{\partial V_m}{\partial u_3} \tilde{e}_{m1} \tilde{h}_{n2} - jkZ d_m^{\mathrm{TM}} \frac{k_{cm}^2}{k^2} I_m \frac{\partial}{t_1 \partial u_1} (T_m t_3) \tilde{h}_{n2} \right] = -jkZ \sum_m \tilde{h}_{m2} I_m t_3 \tilde{h}_{n2} \tag{3.8b}$$

Addiert man diese Gleichungen, so erhält man:

$$\sum_m \left[\frac{\partial V_m}{\partial u_3} \left(\tilde{e}_{m1} \tilde{h}_{n2} - \tilde{e}_{m2} \tilde{h}_{n1} \right) + jkZ d_m^{\mathrm{TM}} \frac{k_{cm}^2}{k^2} I_m \left(\frac{\partial}{t_2 \partial u_2} (t_3 T_m) \tilde{h}_{n1} - \frac{\partial}{t_1 \partial u_1} (t_3 T_m) \tilde{h}_{n2} \right) \right] =$$

$$- jkZ \sum_m I_m t_3 (\tilde{h}_{m1} \tilde{h}_{n1} + \tilde{h}_{m2} \tilde{h}_{n2}) \tag{3.8c}$$

Außerdem wird Gleichung 3.1a mit $(-t_3 \tilde{e}_{n1})$ multipliziert; Gleichung 3.1b wird mit $(-t_3 \tilde{e}_{n2})$ multipliziert. Man erhält:

$$\sum_m \left[\frac{\partial I_m}{\partial u_3} \tilde{h}_{m2} \tilde{e}_{n1} - j \frac{k}{Z} d_m^{\mathrm{TE}} \frac{k_{cm}^2}{k^2} V_m \frac{\partial}{t_2 \partial u_2} (t_3 T_m') \tilde{e}_{n1} \right] = -j \frac{k}{Z} \sum_m V_m \tilde{e}_{m1} \tilde{e}_{n1} t_3 \tag{3.9a}$$

$$\sum_m \left[j \frac{k}{Z} d_m^{\mathrm{TE}} \frac{k_{cm}^2}{k^2} V_m \frac{\partial}{t_1 \partial u_1} (t_3 T_m') \tilde{e}_{n2} - \frac{\partial I_m}{\partial u_3} \tilde{h}_{m1} \tilde{e}_{n2} \right] = -j \frac{k}{Z} \sum_m V_m \tilde{e}_{m2} \tilde{e}_{n2} t_3 \tag{3.9b}$$

Die Addition dieser Gleichungen ergibt:

$$\sum_m \left[\frac{\partial I_m}{\partial u_3} (\tilde{e}_{n1} \tilde{h}_{m2} - \tilde{e}_{n2} \tilde{h}_{m1}) + j \frac{k}{Z} d_m^{\mathrm{TE}} \frac{k_{cm}^2}{k^2} V_m \left(\frac{\partial}{t_1 \partial u_1} (t_3 T_m') \tilde{e}_{n2} - \frac{\partial}{t_2 \partial u_2} (t_3 T_m') \tilde{e}_{n1} \right) \right] =$$

$$- j \frac{k}{Z} \sum_m V_m t_3 (\tilde{e}_{m1} \tilde{e}_{n1} + \tilde{e}_{m2} \tilde{e}_{n2}) \tag{3.9c}$$

Den Tangentenvektor t_3 kann man immer durch den Tangentenvektor der z Koordinate des geraden Hohlleiters und eines Störterms $\xi(u_1, u_2)$ ausdrücken. Es gilt also:

$$t_3 = 1 + \xi(u_1, u_2) \tag{3.10}$$

Die Felder der Moden sind orthonormal, d.h. es gilt im geraden Hohlleiter:

$$\iint_A (\tilde{e}_{m1} \tilde{h}_{n2} - \tilde{e}_{m2} \tilde{h}_{n1}) dA = \delta_{(pm)(qn)} \tag{3.11}$$

Mit:

$$\delta_{(mn)} = \begin{cases} 1 & \text{für } m = n \text{ und } p = q \\ 0 & \text{für } m \neq n \text{ oder } p \neq q \end{cases}$$

Die Gleichungen 3.8c und 3.9c werden nun über den gesamten Querschnitt integriert. Für die Einzelterme gilt:

$$\iint_A \sum_m \frac{\partial V_m}{\partial u_3} (\tilde{e}_{m1} \tilde{h}_{n2} - \tilde{e}_{m2} \tilde{h}_{n1}) dA = \frac{\partial V_n}{\partial u_3} \tag{3.12}$$

$$\iint_A \sum_m \frac{\partial I_m}{\partial u_3}(\tilde{e}_{n1}\tilde{h}_{m2} - \tilde{e}_{n2}\tilde{h}_{m1})dA = \frac{\partial I_n}{\partial u_3} \tag{3.13}$$

$$\iint_A \sum_m jkZI_m \left[d_m^{\mathrm{TM}} \frac{k_{cm}^2}{k^2} \left(\frac{\partial T_m}{t_2 \partial u_2}\tilde{h}_{n1} - \frac{\partial T_m}{t_1 \partial u_1}\tilde{h}_{n2} \right) + \tilde{h}_{m1}\tilde{h}_{n1} + \tilde{h}_{m2}\tilde{h}_{n2} \right] dA = jkZI_n R_n^2 \tag{3.14}$$

$$\iint_A \sum_m j\frac{k}{Z}V_m \left[d_m^{\mathrm{TE}} \frac{k_{cm}^2}{k^2} \left(\frac{\partial T'_m}{t_1 \partial u_1}\tilde{e}_{n2} - \frac{\partial T_m}{t_2 \partial u_2}\tilde{e}_{n1} \right) + \tilde{e}_{m1}\tilde{e}_{n1} + \tilde{e}_{m2}\tilde{e}_{n2} \right] dA = j\frac{k}{Z}V_n \tag{3.15}$$

Insgesamt erhält man:

$$\frac{\partial V_n}{\partial u_3} = -jkZI_n R_n^2 - jkZ\sum_m I_m D_{mn} \tag{3.16a}$$

$$\frac{\partial I_n}{\partial u_3} = -j\frac{k}{Z}V_n - j\frac{k}{Z}\sum_m V_m E_{mn} \tag{3.16b}$$

Mit:

$$D_{mn} = \iint_A \left[d_m^{\mathrm{TM}} \frac{k_{cm}^2}{k^2} \left(\frac{\partial(\xi T_m)}{t_2 \partial u_2}\tilde{h}_{n1} - \frac{\partial(\xi T_m)}{t_1 \partial u_1}\tilde{h}_{n2} \right) + \xi(\tilde{h}_{m1}\tilde{h}_{n1} + \tilde{h}_{m2}\tilde{h}_{n2}) \right] dA \tag{3.17a}$$

$$E_{mn} = \iint_A \left[d_m^{\mathrm{TE}} \frac{k_{cm}^2}{k^2} \left(\frac{\partial(\xi T'_m)}{t_1 \partial u_1}\tilde{e}_{n2} - \frac{\partial(\xi T'_m)}{t_2 \partial u_2}\tilde{e}_{n1} \right) + \xi(\tilde{e}_{m1}\tilde{e}_{n1} + \tilde{e}_{m2}\tilde{e}_{n2}) \right] dA \tag{3.17b}$$

Die erste Green'sche Formel lautet im ebenen Fall:

$$\begin{aligned} \iint_A [\nabla_t(\xi T_m)](\nabla_t T_n)dA &= \oint_l \xi T_m \frac{\partial T_n}{\partial \mathbf{n}} dl - \iint_A \xi T_m \Delta_t T_n dA \\ &= \oint_l \xi T_m \frac{\partial T_n}{\partial \mathbf{n}} dl + k_{cn}^2 \iint_A \xi T_m T_n dA, \end{aligned} \tag{3.18}$$

wobei **n** der nach außen zeigende Normalenvektor auf der Hohlleiterwand ist. Ein analoger Ausdruck gilt für T'_m und T'_n. Außerdem gilt allgemein für beliebige Skalarfelder a und b:

$$\iint_A \left(\frac{\partial a}{t_1 \partial u_1}\frac{\partial b}{t_2 \partial u_2} - \frac{\partial a}{t_2 \partial u_2}\frac{\partial b}{t_1 \partial u_1} \right) dA = 0 \tag{3.19}$$

Die Terme D_{mn} und E_{mn} werden damit zu:

$$D_{mn} = \iint_A \xi(\tilde{h}_{m1}\tilde{h}_{n1} + \tilde{h}_{m2}\tilde{h}_{n2})dA - d_m^{\mathrm{TM}} d_n^{\mathrm{TM}} \frac{k_{cm}^2}{k^2} \left(\oint_l \xi T_m \frac{\partial T_n}{\partial \mathbf{n}} dl + k_{cn}^2 \iint_A \xi T_m T_n dA \right) \tag{3.20a}$$

$$E_{mn} = \iint_A \xi(\tilde{e}_{m1}\tilde{e}_{n1} + \tilde{e}_{m2}\tilde{e}_{n2})dA - d_m^{\mathrm{TE}} d_n^{\mathrm{TE}} \frac{k_{cm}^2}{k^2} \left(\oint_l \xi T'_m \frac{\partial T'_n}{\partial \mathbf{n}} dl + k_{cn}^2 \iint_A \xi T'_m T'_n dA \right) \tag{3.20b}$$

Um von den Spannungs- und Stromkoeffizienten zu den Modenamplituden zu kommen, werden nun hin- und rücklaufende Wellen mit den Amplituden A_n^+ und A_n^- definiert. Es gilt:

$$V_n = \sqrt{R_n Z}(A_n^+ + A_n^-) \tag{3.21a}$$

$$I_n = \frac{1}{\sqrt{R_n Z}}(A_n^+ - A_n^-) \tag{3.21b}$$

Setzt man diese Gleichungen ein und bezeichnet man die Koordinate u_3 wieder mit z, so erhält man für die hin- und rücklaufenden Wellen:

$$\frac{\partial A_n^+}{\partial z} = -j\beta_n A_n^+ - \sum_m^{m\neq n} \left(K_{mn}^+ A_m^+ + K_{mn}^- A_m^- \right) \tag{3.22a}$$

$$\frac{\partial A_n^-}{\partial z} = j\beta_n A_n^- + \sum_m^{m\neq n} \left(K_{mn}^- A_m^+ + K_{mn}^+ A_m^- \right) \tag{3.22b}$$

Es handelt sich um ein System gekoppelter Differentialgleichungen erster Ordnung, das auch als *System der gekoppelten Wellengleichungen* bezeichnet wird. Dieses Gleichungssystem wird im Abschnitt 3.5 (Seite 45) genauer behandelt.
Für die Koppelkoeffizienten K_{mn}^+ und K_{mn}^- gilt:

$$K_{mn}^{\pm} = \frac{jk}{2\sqrt{R_m R_n}}(R_m R_n E_{mn} \pm D_{mn}) \tag{3.23}$$

Wegen der Energieerhaltung muß gelten:

$$K_{nm} = -K_{mn}^* \tag{3.24}$$

In zylindrischen Hohlleitern, die eine azimutale Korrugation haben, sind die Mischungsfaktoren d_m^{TM} und d_m^{TE} immer reell. Somit folgt aus 3.20a, 3.20b und 3.23, daß die Koppelkoeffizienten für Hohlleiterkrümmung immer rein imaginär sind. Es gilt also:

$$K_{nm} = K_{mn} \tag{3.25}$$

3.2 Rechteckiger Querschnitt

Aus den allgemeinen Formeln werden nun die Krümmungskoppelkoeffizienten für Rechteckhohlleiter hergeleitet. Für die Eigenfunktionen der TM_{pm}- und TE_{pm}-Wellen gilt:

$$T_m = N_m \sin\left(\frac{p\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \tag{3.26a}$$

$$T'_m = N_m \cos\left(\frac{p\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \tag{3.26b}$$

Die Normierungsfaktoren ergeben sich zu:

$$N_m^{\mathrm{TM}} = \sqrt{\frac{4}{abk_{cm}^2}} \tag{3.26ca}$$

$$N_m^{\mathrm{TE}} = \sqrt{\frac{2\varepsilon_{pm}}{abk_{cm}^2 R_m^2}} \tag{3.26cb}$$

Mit:

$$\varepsilon_{pm} = \begin{cases} 2 & \text{für } p \neq 0, m \neq 0 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases} \tag{3.26d}$$

Wegen der Randbedingungen der Felder im glatten Hohlleiter gilt für die Eigenfunktionen:

$$\left.\frac{\partial T_m}{\partial \mathbf{n}}\right|_{\mathrm{Wand}} = 0 \tag{3.4}$$

$$\left.T'_m\right|_{\mathrm{Wand}} = 0 \tag{3.5}$$

3.2.1 E-Ebenen Krümmer

Zunächst wird ein Krümmer behandelt, bei dem die Krümmungsebene in der Ebene des E-Feldes der TE_{10}-Mode liegt (siehe Abb. 6). Die von der Krümmung abhängige Störfunktion ξ wird zu:

$$\xi = \frac{y}{R} \tag{3.6}$$

Da die Störfunktion nur von y abhängt, sind nur Moden verkoppelt, bei denen die x-Indizes p und q gleich sind. Im folgenden wird daher $q = p$ gesetzt. Der Koppelkoeffizient für TE_{pm}-TE_{pn}-Kopplungen wird damit zu:

$$K^{\pm}_{(\mathrm{TE_{pm}}\leftrightarrow\mathrm{TE_{pn}})} = \frac{-j\sqrt{\varepsilon_{pm}\varepsilon_{pn}}bk}{R\pi^2(m^2-n^2)^2}$$

$$\times\left[m^2\frac{k_{cn}}{k_{cm}}R_m\left(\sqrt{\frac{R_m}{R_n}}\pm\sqrt{\frac{R_n}{R_m}}\right)+n^2\frac{k_{cm}}{k_{cn}}R_n\left(\sqrt{\frac{R_n}{R_m}}\pm\sqrt{\frac{R_m}{R_n}}\right)\right] \tag{3.7}$$

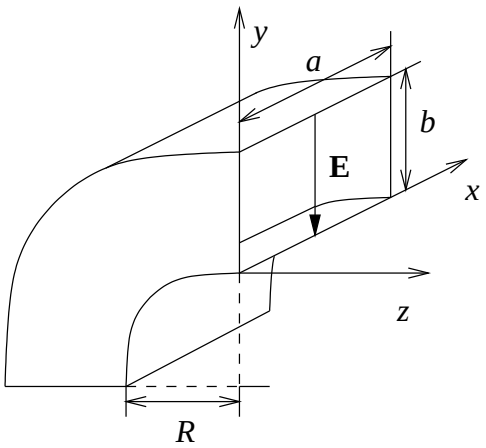


Abbildung 6: E-Ebenen Krümmer mit rechteckigem Querschnitt

wenn $|m-n|$ ungerade ist. Ist $|m-n|$ gerade, wird der Koppelkoeffizient Null. Ein häufiger Fall sind Kopplungen der TE_{10}-Mode mit TE_{1n}-Moden. Setzt man in der oberen Formel $m=0$ und $p=1$, so erhält man einen einfacheren Ausdruck:

$$K^{\pm}_{(TE_{10}\leftrightarrow TE_{1n})} = \frac{-j\sqrt{2}b\beta_n}{R\pi^2 n^2\sqrt{1+\left(\frac{na}{b}\right)^2}}\left(\sqrt{\frac{R_n}{R_m}}\pm\sqrt{\frac{R_m}{R_n}}\right) \tag{3.8}$$

Für die Kopplungen von TE_{pm}- und TM_{pn}-Moden gilt für ungerade $|m-n|$:

$$K^{\pm}_{(TE_{pm}\leftrightarrow TM_{pn})} = \frac{-j\sqrt{2\varepsilon_{pm}}pnk}{Rk_{cm}k_{cn}a(n^2-m^2)}\left(\sqrt{\frac{R_n}{R_m}}\pm\sqrt{\frac{R_m}{R_n}}\right) \tag{3.9}$$

Ist $|m-n|$ gerade, so wird der Koppelkoeffizient Null. Auch dieser Ausdruck wird einfacher im Fall einer TE_{10}-TM_{1n}-Kopplung. Man erhält:

$$K^{\pm}_{(TE_{10}\leftrightarrow TM_{1n})} = \frac{-j\sqrt{2}ak}{R\pi^2 n\sqrt{1+\left(\frac{na}{b}\right)^2}}\left(\sqrt{\frac{R_n}{R_m}}\pm\sqrt{\frac{R_m}{R_n}}\right) \tag{3.10}$$

Durch Vertauschen von m und n erhält man dann den Koppelkoeffizient für TM_{1m}-TE_{1n}-Kopplungen:

$$K^{\pm}_{(TM_{1m}\leftrightarrow TE_{1n})} = \frac{-j\sqrt{2\varepsilon_{pn}}pmk}{Rk_{cm}k_{cn}a(m^2-n^2)}\left(\sqrt{\frac{R_m}{R_n}}\pm\sqrt{\frac{R_n}{R_m}}\right) \tag{3.11}$$

Der Koppelkoeffizient für TM_{pm} - TM_{pn} - Kopplungen lautet ($|m-n|$ ungerade):

$$K^{\pm}_{(TM_{pm}\leftrightarrow TM_{pn})} = \frac{-j2bk}{R\sqrt{R_mR_n}k_{cm}k_{cn}\pi^2(n^2-m^2)^2}$$

$$\times\left[(R_mR_n\pm 1)\left(\frac{mn\pi^2}{b^2}(m^2+n^2)+\frac{p^2\pi^2}{a^2}2mn\right)-\frac{k_{cm}^2k_{cn}^2}{k^2}2mn\right] \tag{3.12}$$

Für gerade $|m-n|$ ist der Koppelkoeffizient Null. Auch dieser Koppelkoeffizient läßt sich für Moden, die in die gleiche Richtung laufen, umformen zu:

$$K^{+}_{(\mathrm{TM_{pm}}\leftrightarrow\mathrm{TM_{pn}})} = \frac{-j2bkmn}{R\pi^2(n^2-m^2)^2}\left[\frac{k_{cn}}{k_{cm}}R_m\left(\sqrt{\frac{R_n}{R_m}}+\sqrt{\frac{R_m}{R_n}}\right)+\frac{k_{cm}}{k_{cn}}R_n\left(\sqrt{\frac{R_n}{R_m}}+\sqrt{\frac{R_m}{R_n}}\right)\right] \tag{3.13}$$

Ist die $\mathrm{TE_{10}}$-Mode in einem E-Ebenen-Krümmer die Nutzmode, so existieren als Falschmoden die entarteten $\mathrm{TE_{1m}}$- und $\mathrm{TM_{1m}}$-Moden, die die gleiche Phasenkonstante haben. Im System der gekoppelten Wellengleichungen können diese Moden zu einem Modenpaar zusammengefaßt werden, was die Rechengeschwindigkeit deutlich erhöht. Da die $\mathrm{TE_{10}}$-Mode keine e_x-Komponente hat, darf auch die Summe der Falschmoden kein elektrisches Feld in x-Richtung haben. Für ein entartetes $\mathrm{TM_{1m}}/\mathrm{TE_{1m}}$-Modenpaar bedeutet das:

$$e_x^{\mathrm{TM_{1m}}} + e_x^{\mathrm{TE_{1m}}} = 0, \tag{3.14}$$

oder für die Amplituden der beiden Moden:

$$A_m^{\mathrm{TM_{1m}}} = \frac{ma}{R_m b}A_m^{\mathrm{TE_{1m}}} \tag{3.15}$$

Man kann das $\mathrm{TE_{1m}}/\mathrm{TM_{1m}}$-Modenpaar dann als eine Mode auffassen, für deren Amplitude A_{1m} gilt:

$$A_{1m} = \sqrt{A^2_{\mathrm{TE_{1m}}} + A^2_{\mathrm{TM_{1m}}}} \tag{3.16}$$

Daraus ergeben sich unmittelbar folgende Zusammenhänge:

$$A_{1m} = \sqrt{1+\left(\frac{ma}{R_m b}\right)^2}A_{\mathrm{TE_{1m}}} \tag{3.17}$$

$$A_{1m} = \sqrt{1+\left(\frac{R_m b}{ma}\right)^2}A_{\mathrm{TM_{1m}}} \tag{3.18}$$

Dies führt dann zu anderen Koppelkoeffizienten. Es gilt für $\mathrm{TE_{10}}$-$\mathrm{TE_{1n}}/\mathrm{TM_{1n}}$-Kopplungen:

$$K^{+}_{(\mathrm{TE_{10}}\leftrightarrow\mathrm{TE_{1n}/TM_{1n}})} = \sqrt{1+\left(\frac{ma}{R_m b}\right)^2}K^{+}_{(\mathrm{TE_{10}}\leftrightarrow\mathrm{TE_{1n}})} = \sqrt{1+\left(\frac{R_m b}{ma}\right)^2}K^{+}_{(\mathrm{TE_{10}}\leftrightarrow\mathrm{TM_{1n}})} =$$

$$= -j\frac{\sqrt{2}b}{Rn^2\pi^2}\beta_m\left(\sqrt{\frac{R_m}{R_n}}+\sqrt{\frac{R_n}{R_m}}\right) \tag{3.19}$$

Für die Kopplungen der Modenpaare untereinander gilt:

$$K^{+}_{(\mathrm{TE_{1m}/TM_{1m}}\leftrightarrow\mathrm{TE_{1n}/TM_{1n}})} = \frac{\sqrt{1+\left(\frac{na}{R_n b}\right)^2}}{\sqrt{1+\left(\frac{ma}{R_m b}\right)^2}}\frac{R_n b}{na}\left(K_{(\mathrm{TE_{1m}}\leftrightarrow\mathrm{TM_{1n}})} + K_{(\mathrm{TM_{1m}}\leftrightarrow\mathrm{TM_{1n}})}\frac{ma}{R_m b}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{1+\left(\frac{na}{R_n b}\right)^2}}{\sqrt{1+\left(\frac{ma}{R_m b}\right)^2}}\left(K_{(\mathrm{TE_{1m}}\leftrightarrow\mathrm{TE_{1n}})} + K_{(\mathrm{TM_{1m}}\leftrightarrow\mathrm{TE_{1n}})}\frac{ma}{R_m b}\right)$$

$$= \frac{-j2kb}{R\pi^2(n^2-m^2)^2}(m^2R_n + n^2R_m)\left(\sqrt{\frac{R_n}{R_m}} + \sqrt{\frac{R_m}{R_n}}\right) \quad (3.20)$$

3.2.2 H-Ebenen Krümmer

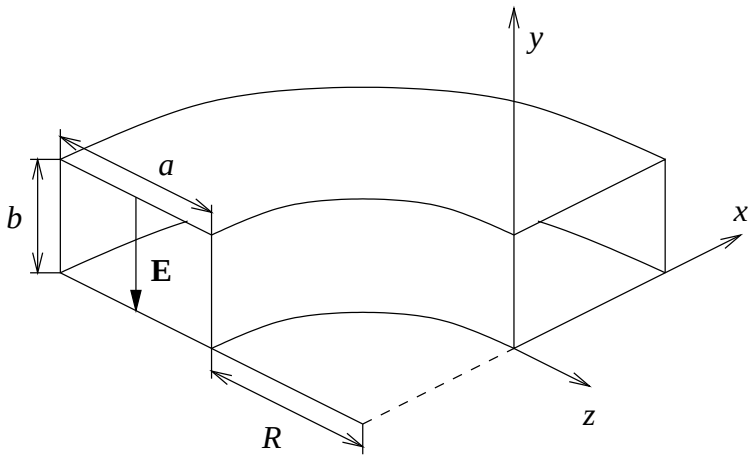


Abbildung 7: H-Ebenen-Krümmer mit rechteckigem Querschnitt

In einem H-Ebenen-Krümmer (siehe Abb. 7) lautet die Störfunktion ξ:

$$\xi = \frac{x}{R} \quad (3.21)$$

Das bedeutet, daß eine $\mathrm{TE_{p0}}$-Welle nur in $\mathrm{TE_{q0}}$-Wellen umgewandelt wird, es gilt daher $m = n = 0$.
Man erhält für $|p-q|$ ungerade:

$$K^{\pm}_{(\mathrm{TE_{p0}}\leftrightarrow\mathrm{TE_{q0}})} = \frac{-j4apq}{R\pi^2(p^2-q^2)^2}\sqrt{\beta_m\beta_n}\left\{\frac{1}{R_m R_n}\left[1 - \frac{p^2+q^2}{8}\left(\frac{\lambda}{a}\right)^2\right] \pm 1\right\} \quad (3.22)$$

Hier ist λ die Freiraumwellenlänge. Wenn $|p-q|$ gerade ist, wird $K^{\pm}_{mn}$ Null. In einem Hohlleiter, der in der H-Ebene gekrümmt ist, sind also alle $\mathrm{TE_{p0}}$-Moden direkt oder indirekt, d.h. über andere Moden, miteinander verkoppelt.

Die Krümmungskoppelkoeffizienten für Rechteckhohlleiter wurden 1965 von Quine veröffentlicht [21]. Die hier angegebenen Formeln stimmen mit denen von Quine überein, wobei hier zusätzlich noch der Koppelkoeffizient $K^{+}_{(\mathrm{TE}_{1m}/\mathrm{TM}_{1m}\leftrightarrow\mathrm{TE}_{1n}/\mathrm{TM}_{1n})}$ für die entarteten TE/TM-Modenpaare bestimmt wurde, der in [21] fehlt.

3.3 Kreisförmiger Querschnitt mit glatter Wand

Für zylindrische Hohlleiter wird ein Koordinatensystem wie in Abbildung 8 angenommen. Die Transversalkoordinaten r und ϕ entsprechen denen des geraden Hohlleiters. Der Störterm ξ wird zu:

$$\xi = \frac{r}{R}\cos\phi \tag{3.23}$$

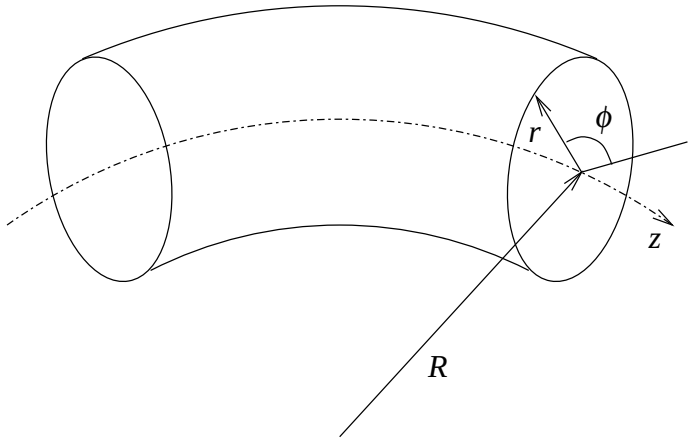


Abbildung 8: Koordinatensystem für gekrümmte zylindrische Hohlleiter

Die Krümmungskoppelkoeffizienten im zylindrischen Hohlleiter mit glatter Wand sind in [15] für Moden, die in gleicher Richtung laufen, angegeben. Modenkopplungen aufgrund eines gekrümmten Hohlleiters treten nur für Moden auf, für deren Azimutalindizes p und q gilt:

$$|p-q| = 1$$

Für Kopplungen der TE_{0m}- und TE_{1n}-Wellen gilt:

$$K^{+}_{(\mathrm{TE}_{0m}\leftrightarrow\mathrm{TE}_{1n})} = j(-1)^{m+n+1}Y\frac{X_m X_n^2(R_m+R_n)^2}{R\sqrt{2R_mR_n(X_n^2-1)}(X_n^2-X_m^2)^2} \tag{3.24}$$

Für die Kopplungen der entarteten TE_{0m}- und TM_{1n}-Wellen gilt:

$$K^{+}_{(\mathrm{TE}_{0m}\leftrightarrow\mathrm{TM}_{1n})} = \begin{cases} j\frac{Y}{R\sqrt{2}X_m} & \text{für } m=n \\ 0 & \text{für } m\neq n \end{cases} \tag{3.25}$$

Die TM_{0m}-Wellen werden "kreuzpolarisiert" angesetzt. Da diese Moden jedoch rotationssymmetrisch sind, wirkt sich dies nur auf die Formeln aus, nicht jedoch auf das Erscheinungsbild der Felder im Hohlleiter. Für die Kopplungen von TM_{0m}-Wellen mit TM_{1n}-Wellen gilt:

$$K^{+}_{(TM_{0m}\leftrightarrow TM_{1n})} = j(-1)^{m+n}Y\frac{(R_m+R_n)[2R_nX_m^2+Y^2(R_m-R_n)(1+R_mR_n)]}{R\sqrt{2R_mR_n}(X_n^2-X_m^2)^2} \tag{3.26}$$

Entsprechend gilt für TM_{0m}-TE_{1n}-Kopplungen:

$$K^{+}_{(TM_{0m}\leftrightarrow TE_{1n})} = j(-1)^{m+n+1}Y\frac{(R_m+R_n)}{R\sqrt{2R_mR_n(X_n^2-1)}(X_n^2-X_m^2)} \tag{3.27}$$

Für die allgemeinen Fälle wird angenommen, daß gilt:

$$q = p+1$$

Für die TE_{pm}-TE_{qn}-Kopplungen gilt:

$$K^{+}_{(TE_{pm}\leftrightarrow TE_{qn})} = j\frac{(-1)^{m+n}Y}{2R\sqrt{R_mR_n(X_m^2-p^2)(X_n^2-q^2)}(X_n^2-X_m^2)^2}$$

$$\times\left\{(1+R_mR_n)[2X_m^2X_n^2-p(p+1)(X_m^2+X_n^2)]-\frac{X_m^2X_n^2}{Y^2}(X_m^2+X_n^2-2pq)\right\} \tag{3.28}$$

Für TE_{pm}-TM_{qn}-Kopplungen gilt:

$$K^{+}_{(TE_{pm}\leftrightarrow TM_{qn})} = j(-1)^{m+n+1}Y\frac{-p(R_m+R_n)}{2R\sqrt{R_mR_n(X_m^2-p^2)}(X_n^2-X_m^2)} \tag{3.29}$$

Entsprechend gilt für TM_{pm}-TM_{qn}-Kopplungen:

$$K^{+}_{(TM_{pm}\leftrightarrow TM_{qn})} = j(-1)^{m+n}Y\frac{(R_m+R_n)(R_mX_n+R_nX_m)}{2R\sqrt{R_mR_n}(X_n^2-X_m^2)} \tag{3.30}$$

3.4 Kreisförmiger Querschnitt mit korrugierter Wand

Die Formeln für Koppelkonstanten im korrugierten Rundhohlleiter wurden für alle Moden von Doane angegeben [5]. Teilweise liefern seine Formeln jedoch keine richtigen Vorzeichen für die Koppelkonstanten. Es werden deshalb, wie beim glattwandigen Hohlleiter, die neueren Formeln von Li und Thumm [15] verwendet. Diese Formeln ergeben sich durch Lösung der im Abschnitt 3 (Seite 34) angegebenen Integrale unter Verwendung der Felder der Moden im korrugierten Hohlleiter. Bei einer Krümmung im Rundhohlleiter sind nur die Moden verkoppelt, für deren Azimutalindizes p und q gilt:

$$|p-q| = 1 \tag{3.31}$$

Für Kopplungen, an denen eine TE_{0m}-Welle beteiligt ist, gilt:

$$K^{+}_{(\mathrm{TE}_{0m}\leftrightarrow\mathrm{HE}_{1n}/\mathrm{EH}_{1n})} = j(-1)^{m+n+1}Y\frac{X_m X_n (R_m+R_n)^2(R_m-R_n+d_nR_n)}{2R\sqrt{R_mR_nD_n}(X_n^2-X_m^2)^2} \tag{3.32}$$

Für Kopplungen von TM_{0m}-Wellen gilt:

$$\begin{aligned} K^{+}_{(\mathrm{TE}_{0m}\leftrightarrow\mathrm{HE}_{1n}/\mathrm{EH}_{1n})} &= j(-1)^{m+n}Y\frac{-X_m(R_m+R_n)}{2R\sqrt{R_mR_nD_mD_n}(X_n^2-X_m^2)^2D_nX_n} \\ &\times\left\{\left[(1+d_nR_n^2+R_mR_n(1+d_n))\frac{1+d_n}{ZY}-\frac{d_nX_n^2}{Y^2}(1+d_nR_n^2+d_nR_mR_n)\right]\right. \\ &\left.\times(R_m-R_n)Y^2+\left[(1+d_n)\frac{2X_m^2}{ZY}-2d_nX_n^2\right]R_n\right\} \end{aligned} \tag{3.33}$$

In den anderen Fällen, d.h. für $p \neq 0$, lassen sich die Koppelkonstanten bestimmen, wenn man annimmt, daß $q = p+1$ ist. Es gilt dann:

$$K^{+}_{(\mathrm{HE}_{pm}/\mathrm{EH}_{pm}\leftrightarrow\mathrm{HE}_{qn}/\mathrm{EH}_{qn})} = j(-1)^{m+n}Y\frac{1}{4R\sqrt{R_mR_nD_mD_n}(X_m^2-X_n^2)^2d_md_nX_mX_n}F_{mn} \tag{3.34}$$

Mit:

$$\begin{aligned} F_{mn} &= R_nX_m^2[2n(n+1)(1+d_n)(1-d_m)+2d_md_nX_n^2] \\ &\times[R_n(1+d_md_nR_m^2)+R_m(1+d_md_nR_n^2)] \\ &+n(n+1)(1+d_n)(1-d_m)[(1+d_mR_m^2)(1+d_nR_n^2) \\ &+(1+d_m)(1+d_n)R_mR_n](X_n^2-X_m^2)+d_md_nX_m^2X_n^2 \\ &\times(R_m^2-R_n^2)[(R_m+R_n)(d_mR_m+d_nR_n)+1+d_md_nR_mR_n] \end{aligned} \tag{3.35}$$

3.5 Das System der gekoppelten Wellengleichungen

Das System der gekoppelten Wellengleichungen wurde in Abschnitt 3.1 hergeleitet (siehe Seite 38). Es beschreibt die Modenwandlung in einem gekrümmten Hohlleiter.
In der Praxis werden reflektierte (d.h. rückwärtslaufende) Wellen vernachlässigt, was bedeutet, daß alle Koppelkoeffizienten K^{-}_{mn} verschwinden. Außerdem wird die Annahme gemacht, daß am Ende des Integrationsbereichs keine Moden rückwärts in den gekrümmten Hohlleiter hineinlaufen. Eine ohmsche Dämpfung der Moden wird berücksichtigt,

indem $j\beta_m$ durch eine komplexe Ausbreitungskonstante $\gamma_m = \alpha_m + j\beta_m$ ersetzt wird, die die ohmsche Dämpfung α_m enthält. Es bleibt dann folgendes Gleichungssystem übrig:

$$\frac{\partial A_n}{\partial z} = -\gamma_n A_n - \sum_{m}^{m\neq n} K^+_{mn} A^+_m \tag{3.36}$$

Sind die Amplituden A_m aller berücksichtigten Moden am Anfang, d.h. bei $z = 0$ bekannt, kann dieses Differentialgleichungssystem mit dem Runge-Kutta-Verfahren gelöst werden. Dieses Verfahren liefert die Modenamplituden an beliebigen Punkten des Krümmers. Die Schrittweite stellt sich bei dem hier verwendeten Runge-Kutta-Verfahren automatisch ein. Es wurde die Runge-Kutta-Routine aus [20] verwendet, die für komplexe Zahlen umgeschrieben wurde. Es handelt sich hier um ein Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung mit automatischer Schrittweiteneinstellung, wobei die Fehlerabschätzung exakt für Polynome 5. Ordnung ist.
Für die Modenwandlung ist nur die relative Phasenlage der Moden zueinander entscheidend. Insbesondere in überdimensionierten Hohlleitern unterscheiden sich die Phasenkonstanten der Moden nur geringfügig, d.h. die Phasendifferenzen der Moden zueinander ändern sich wesentlich langsamer, als die absoluten Phasen. Deshalb ist es aus Gründen der Rechenzeit sinnvoll, mit umnormierten Funktionen $\Psi_n(z)$ zu rechnen, was zu wesentlich größeren effektiven Wellenlängen führt, und somit größere Schrittweiten erlaubt. Für $\Psi_n(z)$ gilt:

$$A^+_n(z) = \Psi_n(z) e^{-j\beta_{ref} z}, \tag{3.37}$$

wobei β_{ref} der Mittelwert aus der größten und kleinsten vorkommenden Phasenkonstante ist:

$$\beta_{ref} = \frac{1}{2}(\beta_{min} + \beta_{max}) \tag{3.38}$$

Durch diese Umnormierung wird ein gemeinsamer Offset von den Phasenkonstanten der Moden abgezogen. In früheren Arbeiten (z.B. [10]) war β_{ref} immer die Phasenkonstante der Nutzmode. Die hier gewählte Methode hat jedoch den Vorteil, daß die kleinste auftretende effektive Wellenlänge maximal wird, das bedeutet, daß man mit noch größeren Schrittweiten auskommt. In einem Experiment brachte diese Methode bei gleichen Ergebnissen eine Verringerung der Rechenzeit um 30 % gegenüber einer Normierung auf die Phasenkonstante der Nutzmode.
Die Koppelkoeffizienten der Moden werden von dieser Normierung nicht beeinflußt, da für die Modenwandlung nur die relative Phasenlage der Moden zueinander entscheidend ist, welche durch die Normierung nicht beeinflußt wird.
Als endgültiges Gleichungssystem erhält man so:

$$\frac{\partial \Psi_n}{\partial z} = -[\alpha_n + j(\beta_n - \beta_{ref})]\Psi_n - \sum_{m}^{m\neq n} K_{mn}\Psi_m \tag{3.39}$$

Die Gleichung kann auch in Matrixschreibweise angegeben werden:

$$\frac{\partial}{\partial z}\Psi = (H)\Psi \tag{3.40}$$

Hier ist

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_1^+ \\ \Psi_2^+ \\ \vdots \\ \Psi_N^+ \end{pmatrix}$$

der Amplitudenvektor für die Moden, N ist die Anzahl der Moden. Die Koeffizienten der symmetrischen Matrix H lauten:

$$h_{ij} = \begin{cases} -[\alpha_i + j(\beta_i - \beta_{ref})] & \text{für } i = j \\ -K_{ij} = -K_{ji} & \text{für } i \neq j \end{cases} \tag{3.41}$$

Die Vektor-Matrix-Multiplikation aus Gleichung 3.40 wird von der Runge-Kutta-Routine sehr oft durchgeführt und hat den weitaus größten Anteil an der Gesamtrechenzeit. Es gilt deshalb, daß die Gesamtrechenzeit etwa proportional zum Quadrat der Modenzahl ist, was insbesondere im Hinblick auf eine spätere Optimierung wichtig ist. Die Koppelmatrix hat gewisse Eigenschaften (Symmetrie, Nichtdiagonalelemente sind rein imaginär), die eine gewisse Optimierung der Vektor-Matrix-Multiplikation erlauben.
In allen Fällen sind die Krümmungskoppelkoeffizienten rein imaginär und proportional zur Krümmung. Es gilt also:

$$K_{mn}^{\pm} = jc_{mn}^{\pm} C(z) \tag{3.42}$$

Hier ist $C(z) = \frac{1}{R}$ die Krümmung; $c_{mn}^{\pm}$ wird Krümmungskoppelkonstante genannt. Die Krümmungskoppelkonstanten müssen nur einmal am Anfang der Berechnung bestimmt werden. Während der Lösung des Differentialgleichungssystems wird der benötigte Krümmungskoppelkoeffizient durch Multiplikation der Krümmungskoppelkonstante mit der aktuellen Krümmung bestimmt. Für die Krümmung $C(z)$ gilt ferner:

$$C(z) = \frac{d\vartheta(z)}{dz}, \tag{3.43}$$

wobei $\vartheta(z)$ der aktuelle Krümmungswinkel an der Stelle z ist. Umgekehrt gilt für den Krümmungswinkel $\vartheta(z)$:

$$\vartheta(z) = \int_0^z C(\xi) d\xi \tag{3.44}$$

Der Gesamtwinkel ϑ_l eines Krümmers mit der Länge l ist dann:

$$\vartheta_l = \int_0^l C(\xi) d\xi \tag{3.45}$$

Das System der gekoppelten Wellengleichungen hat den entscheidenden Vorteil, daß nur mit Modenamplituden gerechnet wird, was zu einem System gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung führt. Eine Lösung der Maxwellschen Gleichungen unter

Berücksichtigung der Gesamtfelder würde zu einer dreidimensionalen partiellen Differentialgleichung führen, die nur mit sehr zeitaufwendigen Verfahren gelöst werden kann. Im Hinblick auf eine Optimierung eines Krümmungsverlaufes, bei der sehr viele Krümmer berechnet werden müssen, scheidet ein solcher Ansatz aus.
Dennoch sollten hier die Näherungen, die bei dem System der gekoppelten Wellengleichungen gemacht werden, zusammengefaßt werden.

- **Vernachlässigung reflektierter Moden:**

  Die Berücksichtigung reflektierter Moden würde bedeuten, daß aus dem Anfangswertproblem ein Randwertproblem wird, da die Moden, die am Ende des Krümmers rückwärts in den Hohlleiter hineinlaufen für die Lösung benötigt werden. Ein solches Randwertproblem kann nur mit zeitaufwendigeren Methoden (z.B. Relaxationsverfahren) gelöst werden. Ferner ist der gemeinsame Offset β_{ref} der Moden nach (3.38) Null, wenn man annimmt, daß jede Mode auch einen rücklaufenden Anteil hat. Die Umnormierung würde dann die Schrittweiten nicht vergrößern. Meist wird man einen Krümmer jedoch so dimensionieren, daß die Krümmung nicht zu stark ist, d.h. daß der Krümmungsradius R immer wesentlich größer ist, als die Hohlleiterdimension, die in der Krümmungsebene liegt. Es gilt also z.B. bei einem Rechteckhohlleiter, der in der E-Ebene gekrümmt ist:

  $$R \gg b$$

  In diesem Fall kann man davon ausgehen, daß die Reflektionen tatsächlich vernachlässigbar sind.

- **Getrennte Berechnung der Dämpfung für jede Mode:**

  Die Berechnung der Dämpfung geschieht für jede Mode einzeln, wobei der Dämpfungskoeffizient α_m aus den von der Mode erzeugten Wandströmen berechnet wird.

  Breiten sich in einem Hohleiter mehrere Moden aus, so können sich die Wandströme der einzelnen Moden konstruktiv oder destruktiv überlagern, was zu einer Veränderung des Leistungsabfalls führt. Ist ein Krümmer länger als die größte vorkommende Schwebungswellenlänge der Moden, so heben sich Effekte der konstruktiven und destruktiven Überlagerung teilweise auf, was den entstehenden Fehler verringert.

- **Berücksichtigung nur weniger Moden:**

  Da die Rechenzeit ungefähr proportional zum Quadrat der Modenzahl ist, werden meist nicht alle im Hohlleiter ausbreitungsfähigen Moden berücksichtigt. Man kann die dominanten Falschmoden jedoch leicht finden, indem man eine Testrechnung mit sehr vielen Moden macht, und die Moden, die dann eine vernachlässigbare Amplitude haben, für die Optimierung wegläßt.

3.5.1 Spezialfall: Zwei Moden

In vielen Fällen gibt es in einem Hohlleiterkrümmer nur eine dominante Falschmode. In diesem Fall läßt sich das System der gekoppelten Wellengleichungen unter Vernachlässi-

gung der ohmschen Verluste folgendermaßen ausdrücken:

$$\frac{\partial \Psi_1}{\partial z} = -jc_{12}C(z)\Psi_2 \tag{3.46a}$$

$$\frac{\partial \Psi_2}{\partial z} = -j\Delta\beta\Psi_2 - jc_{12}C(z)\Psi_1 \tag{3.46b}$$

c_{12} ist die Koppelkonstante der beiden Moden, für die Differenz der $\Delta\beta$ der Phasenkonstanten gilt $\Delta\beta = \beta_2 - \beta_1$, d.h. für die Bezugsphasenkonstante β_{ref} wurde hier β_1 gewählt. Es wird angenommen, daß am Eingang des Krümmers die ganze Leistung in der Nutzmode ist. Es gilt also:

$$\Psi_1(0) = 1 \tag{3.47a}$$

$$\Psi_2(0) = 0 \tag{3.47b}$$

Aus (3.46a) folgt nun:

$$\Psi_2 = \frac{j}{c_{12}C(z)}\frac{\partial \Psi_1}{\partial z} \tag{3.48a}$$

Bildet man die Ableitung nach z, so erhält man:

$$\frac{\partial \Psi_2}{\partial z} = j\frac{c_{12}C(z)\frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial z^2} - c_{12}\frac{\partial C(z)}{\partial z}\frac{\partial \Psi_1}{\partial z}}{[c_{12}C(z)]^2} \tag{3.48b}$$

Setzt man diese Beziehungen in (3.46b) ein, so ergibt sich als endgültige Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial z^2} + \left(j\Delta\beta - \frac{\partial C(z)}{\partial z}\frac{1}{C(z)}\right)\frac{\partial \Psi_1}{\partial z} + [c_{12}C(z)]^2\Psi_1 = 0 \tag{3.49}$$

Man kann für einige Fälle analytische Lösungen der gekoppelten Wellengleichungen mit zwei Moden angeben.

3.5.2 Spezialfall: Zwei entartete Moden

Zwei Moden sind entartet, wenn sie die gleiche Ausbreitungskonstante haben. In diesem Fall gilt also:

$$\Delta\beta = 0$$

Gleichung 3.49 wird dann zu:

$$\frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial z^2} - \frac{\partial C(z)}{\partial z}\frac{1}{C(z)}\frac{\partial \Psi_1}{\partial z} + [c_{12}C(z)]^2\Psi_1 = 0 \tag{3.50}$$

Die allgemeine Lösung lautet:

$$\Psi_1 = a_1 \sin\left(c_{12}\int C(z)dz\right) + a_2 \cos\left(c_{12}\int C(z)dz\right) \tag{3.51}$$

Für die zweite Mode Ψ_2 gilt die gleiche Differentialgleichung. Wählt man als Anfangsbedingung:

$$\Psi_1(0) = 1 \tag{3.52}$$

$$\Psi_2(0) = 0 \tag{3.53}$$

so kann man die Konstanten so wählen, daß gilt:

$$\Psi_1 = \cos\left(c_{12}\int C(z)dz\right) \tag{3.54}$$

$$\Psi_2 = \sin\left(c_{12}\int C(z)dz\right) \tag{3.55}$$

Wegen des Zusammenhangs zwischen Krümmung und dem Krümmungswinkel $\vartheta(z)$ können die Lösungen auch folgendermaßen angegeben werden:

$$\Psi_1 = \cos\left(c_{12}\vartheta(z)\right) \tag{3.56}$$

$$\Psi_2 = \sin\left(c_{12}\vartheta(z)\right) \tag{3.57}$$

Das Modenspektrum hängt also nur vom Krümmungswinkel $\vartheta(z)$ ab, nicht vom eigentlichen Krümmungsverlauf. Ein Beispiel für entartete Moden, die durch Krümmung ineinander umgewandelt werden, sind die TE_{0m} und TM_{1m}-Moden im zylindrischen Hohlleiter mit glatter Wand. Die Krümmungskoppelkonstante ist in diesem Fall (siehe Kapitel 3.3, Seite 43):

$$c_{(\mathrm{TE}_{0m}\leftrightarrow\mathrm{TM}_{1m})} = \frac{ka}{\sqrt{2}X_m}$$

Gibt es keine höheren gekoppelten Moden, wird die TE_{0m}-Mode vollständig in die TM_{1m}-Mode gewandelt, diese wird dann wieder in die TE_{0m}-Mode zurückgewandelt. Für die Winkel ϑ_n, bei denen die gesamte Leistung in der TE_{0m}-Mode ist, gilt:

$$\vartheta_n = \frac{\sqrt{2}X_m\pi n}{ka}$$

mit dem ganzzahligen Index n. Diese Beziehungen wurden für die Entwicklung von TE_{01}-TM_{11}-Modenwandlern genutzt [24].

3.5.3 Konstante Krümmung mit zwei Moden

Ist die Krümmung konstant, so gilt:

$$C(z) = const = C \tag{3.58}$$

$$\frac{\partial C(z)}{\partial z} = 0 \tag{3.59}$$

Die Differentialgleichung für Ψ_1 wird dann zu:

$$\frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial z^2} + j\Delta\beta \frac{\partial \Psi_1}{\partial z} + (c_{12}C)^2 \Psi_1 = 0 \tag{3.60}$$

Die Differentialgleichung hat als allgemeine Lösung:

$$\Psi_1(z) = \frac{e^{-j\frac{1}{2}\Delta\beta z}}{\sqrt{(\Delta\beta)^2 + 4(c_{12}C)^2}} \left[\sqrt{(\Delta\beta)^2 + 4(c_{12}C)^2} \cos\left(\frac{1}{2} z \sqrt{(\Delta\beta)^2 + 4(c_{12}C)^2} \right) + j\Delta\beta \sin\left(\frac{1}{2} z \sqrt{(\Delta\beta)^2 + 4(c_{12}C)^2} \right) \right] \tag{3.61}$$

Die Modenleistung P_1 der Nutzmode verhält sich dann wie:

$$P_1 = \frac{(\Delta\beta)^2 + 4(c_{12}C)^2 \cos^2\left(\frac{1}{2} z \sqrt{(\Delta\beta)^2 + 4(c_{12}C)^2} \right)}{(\Delta\beta)^2 + 4(c_{12}C)^2} \tag{3.62}$$

Daraus kann man die maximale Falschmodenleistung $P_{2,max}$ berechnen. Es gilt:

$$P_{2,max} = \frac{1}{1 + \left(\frac{\Delta\beta}{2(c_{12}C)} \right)^2} \tag{3.63}$$

Diese Beziehung kann beim Design eines Krümmers verwendet werden, um die erforderliche Größe des Krümmers für eine maximale Leistung der dominanten Falschmode abzuschätzen.

3.5.4 Beispiel: 70 GHz Rechteckkrümmer

Abschließend soll ein Beispiel für einen TE_{10}-Rechteckkrümmer vorgestellt werden. Der Hohlleiter ist in der H-Ebene gekrümmt, d.h. daß alle TE_{p0}-Moden miteinander verkoppelt sind. Es handelt sich um einen K-Band Hohlleiter vom Typ WR 42. In diesem Hohlleiter existiert bis zu einer Frequenz von 28.08 GHz nur die TE_{10}-Mode. Bei der verwendeten Frequenz von 70 GHz existieren als gekoppelte Falschmoden die TE_{20}- , die TE_{30}- und die TE_{40}-Mode. Ein solcher Hohlleiter gilt als schwach überdimensioniert. Abbildung 9 zeigt die vorgegebene Geometrie des Krümmers.
Der Krümmungsradius wird von der inneren Hohlleiterwand aus gemessen. Nimmt man eine konstante Krümmung an, so beträgt er bei der vorgegebenen Geometrie 10 cm, was

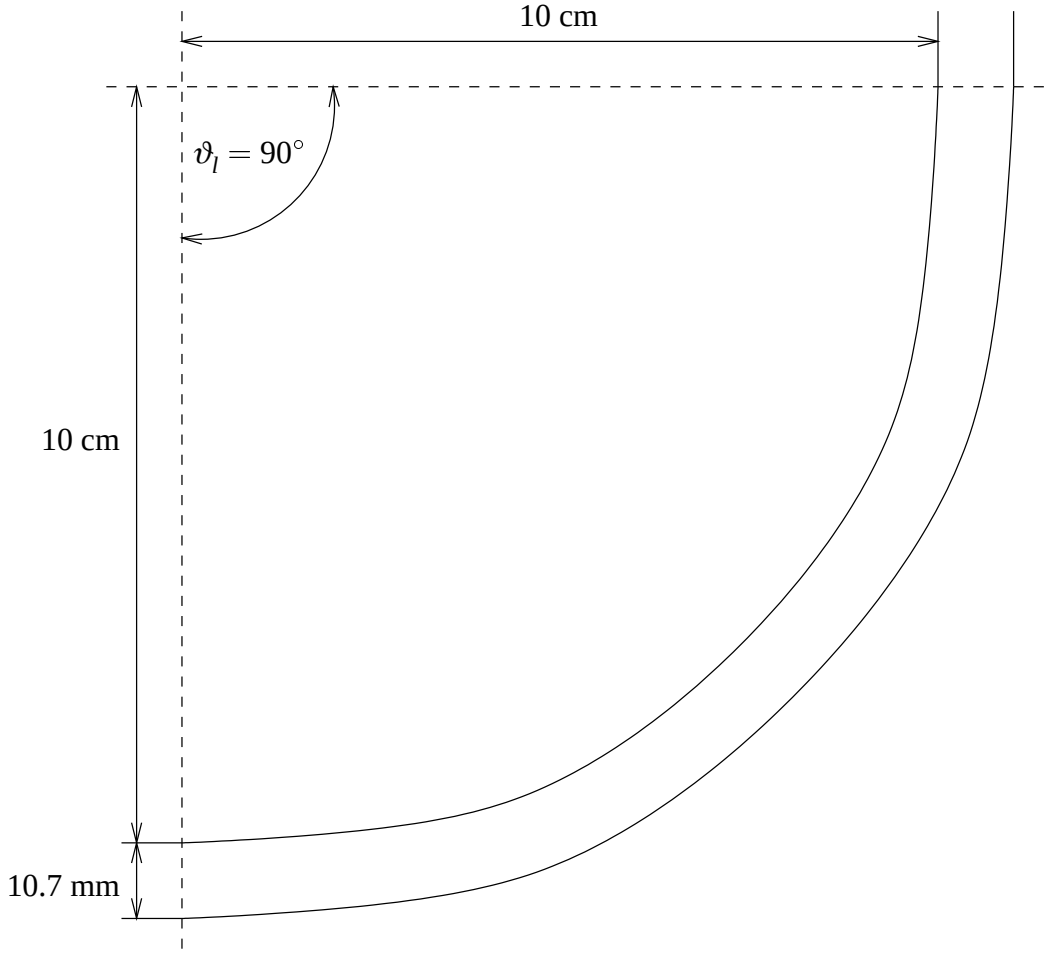


Abbildung 9: Geometrie des 70 GHz TE_{10}-Krümmers

eine Krümmung von 10 m^{-1} ergibt. Die TE_{20}-Mode ist die dominante Falschmode. Aus der Koppelkonstante $c_{(TE_{10} \leftrightarrow TE_{20})}$ errechnet sich die maximale zu erwartende Falschmodenleistung mit Gleichung 3.63 zu 24.98 %.

Abbildung 10 zeigt das Modenspektrum des Krümmers mit konstanter Krümmung. Es wurde durch numerische Integration des Systems der gekoppelten Wellengleichungen ermittelt. In diesem Fall sind die höheren Moden (TE_{30} und TE_{40}) tatsächlich vernachlässigbar. Die maximale Leistung der TE_{20}-Mode beträgt 25.69 %, die Abschätzung mit Gleichung 3.63 war also etwas zu optimistisch. Die Gründe für diese geringe Abweichung liegen in der numerischen Lösung des Problems mit Runge-Kutta-Verfahren.

Einen solchen Krümmer kann man optimieren, indem man die Länge und somit die Krümmung so wählt, daß am Ausgang die Leistung der Nutzmode ein Maximum hat. Dies bedeutet aber auch, daß sich die Abmessungen ändern, d.h. daß der Krümmer unter Umständen nicht mehr in die vorgegebene Geometrie aus Abb. 9 paßt. Außerdem hat ein solcher Krümmer im Inneren immer einen recht hohen Falschmodenanteil, was zu größeren Verlusten führt.

Zum Vergleich wurde noch ein Krümmer mit den gleichen Abmessungen (siehe Abb. 9),

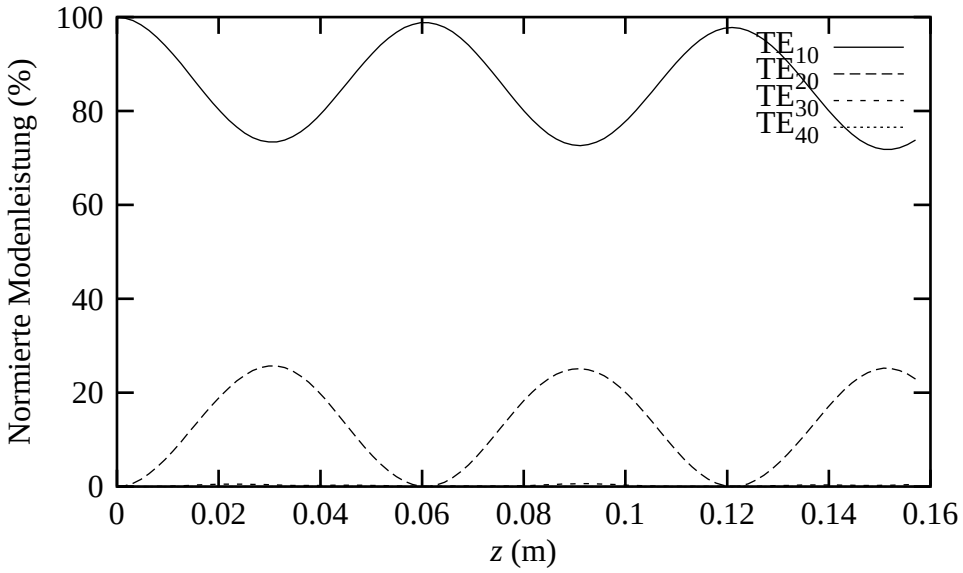


Abbildung 10: Modenspektrum in dem Krümmer mit konstanter Krümmung

aber mit einem anderen Krümmungsverlauf, untersucht. Der Krümmungsverlauf wurde in einer Optimierung mit dem in Kapitel 5.1 (Seite 66) beschriebenen genetischen Algorithmus ermittelt. Als Startwert diente hier der Krümmer mit konstanter Krümmung. Abbildung 11 zeigt die Krümmungsverläufe des Startkrümmers und des optimierten Krümmers. Abbildung 12 zeigt das resultierende Modenspektrum im optimierten Krümmer. Die TE_{20}-Mode hat jetzt eine maximale Leistung von 10.82 %; am Ausgang haben die Falschmoden nur noch einen Anteil von 0.06 %. Mit der Optimierung kann man also bei gleichen Abmessungen, d.h. bei gleichem Start- und Endpunkt, einen maximalen Falschmodenanteil erreichen, der wesentlich geringer ist, als der von Gleichung 3.63 gelieferte Wert. Am Ausgang sind die Falschmoden dann praktisch vernachlässigbar.
Die optimierte Krümmung in Abbildung 11 hat am Anfang des Krümmers bis etwa z = 0.04 m einen stark schwankenden Verlauf. Im Modenspektrum in Abbildung 12 sieht man, daß in diesem Abschnitt aus der einlaufenden TE_{10}-Mode eine TE_{10}/TE_{20}-Modenmischung entsteht. Im Bereich zwischen 0.04 m und 0.12 m sind sowohl die Krümmung als auch die Modenleistungen nahezu konstant. Es scheint sich hier also um eine Eigenmode zu handeln, die an den gekrümmten Hohlleiter mit nahezu konstanter Krümmung in diesem Bereich angepaßt ist. Im letzten Abschnitt wird diese Modenmischung durch eine stark schwankende Krümmung wieder in die TE_{10}-Mode zurückgewandelt.
In diesem Fall hat die Optimierung also gleich mehrere Dinge geliefert:

- Eine TE_{10}-TE_{20} Modenmischung, die einen geringeren TE_{20}-Anteil und somit geringere Verluste hat, als der Startkrümmer, und zudem noch eine Eigenmodenmischung des gekrümmten Hohlleiters im mittleren Abschnitt darstellt.

- Zwei Modenwandler, die die einlaufende TE_{10}-Mode in die Eigenmodenmischung umwandeln, und diese am Krümmerende wieder zurückwandeln.

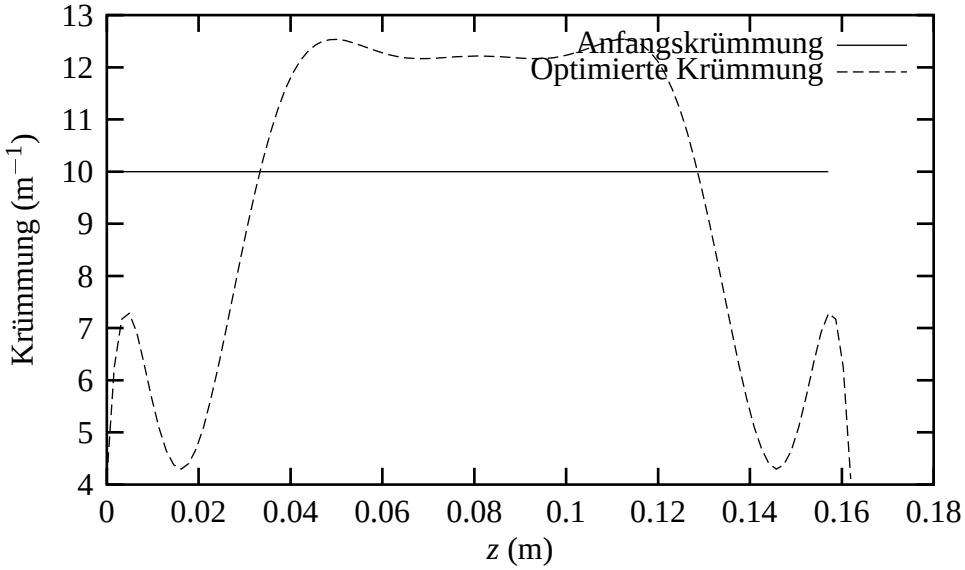


Abbildung 11: Krümmungsverläufe

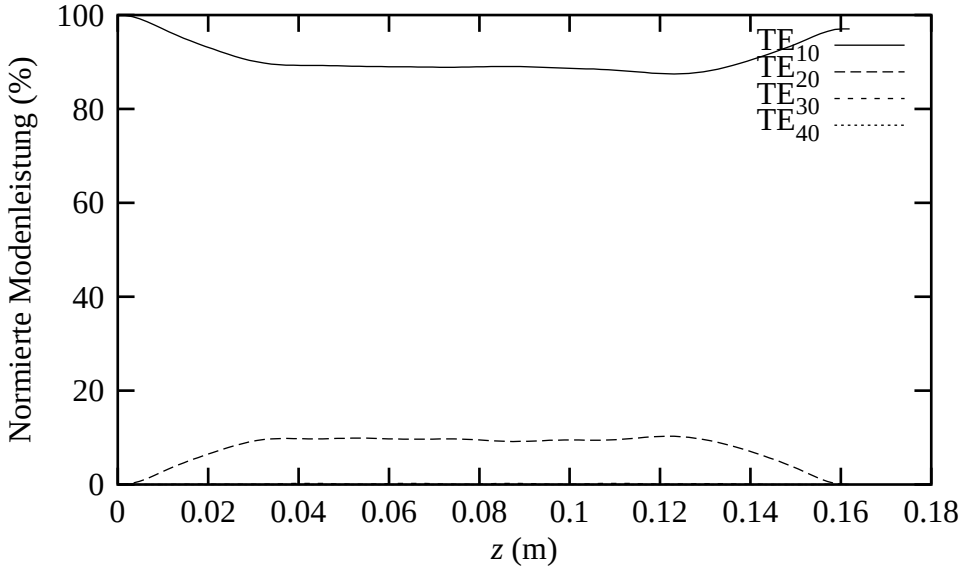


Abbildung 12: Modenspektrum in Krümmer mit optimierter Krümmung

In [13] befindet sich eine Diskussion über Eigenmoden des gekrümmten Hohlleiters und wie diese ermittelt werden können.
Um die Ergebnisse, die vom System der gekoppelten Wellengleichungen geliefert werden, zu veranschaulichen, kann man die Leistungsdichte innerhalb des Krümmers berechnen. Hierzu werden die transversalen elektrischen und magnetischen Feldkomponenten aller Moden addiert. Für die gesamte Leistungsdichte S_z im Hohlleiter gilt:

$$S_z = \mathbf{e}_t \times \mathbf{h}_t^* \tag{3.64}$$

Mit:

$$\mathbf{e}_t = \sum_m \mathbf{e}_{t,m} \tag{3.65a}$$

$$\mathbf{h}_t = \sum_m \mathbf{h}_{t,m} \tag{3.65b}$$

Abbildung 13 zeigt die Leistungsdichten im Startkrümmer und im optimierten Krümmer. Da der Hohlleiter in der H-Ebene gekrümmt ist, ist die gesamte Feldverteilung von der y-Koordinate des Hohlleiters unabhängig und kann deshalb in einem zweidimensionalen Bild gut dargestellt werden.

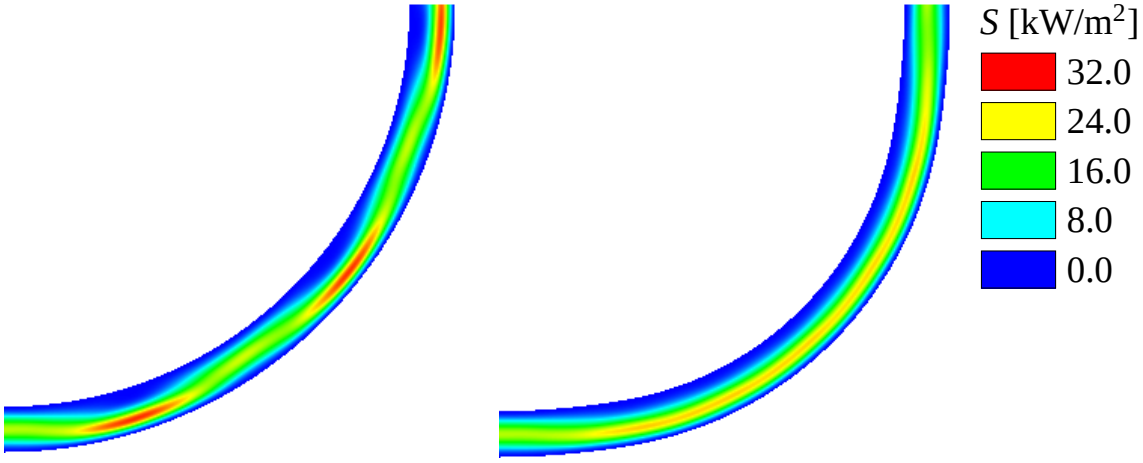


Abbildung 13: Leistungsdichte in einem Krümmer mit konstanter (links) und optimierter (rechts) Krümmung

Der abschnittsweise recht hohe TE_{20}-Anteil beim Krümmer mit konstanter Krümmung sieht in Abbildung 13 (links) aus, wie eine Reflektion der Welle an der Hohlleiterwand. Dort treten auch höhere Feldstärken auf, die in Hochleistungsanwendungen zu Durchschlägen führen können, und größere Wandströme, die die ohmschen Verluste erhöhen.
In einem optimierten Krümmer (siehe Abb. 13, rechts) wird am Anfang die Feldverteilung so verformt, daß sie der Krümmung am besten angepaßt ist. Diese Feldverteilung ist dann im weiteren Verlauf fast konstant. Am Ende des Krümmers wird diese Modenmischung wieder in die TE_{10}-Mode zurückgewandelt.

4 Optimierung

4.1 Bisherige Verfahren

Nimmt man an, daß die Nutzmode nur mit einer weiteren Mode verkoppelt ist, kann man bei bestimmten Krümmungsverläufen die gekoppelte Wellengleichung analytisch integrieren (siehe Kapitel 3.5.1, Seite 48). Im Fall einer konstanten Krümmung kann die Länge eines Hohlleiterkrümmers analytisch optimiert werden, indem man mit Gleichung 3.62 die Länge des Krümmers so wählt, daß die Falschmode am Ausgang verschwindet. Es wurden weitere Untersuchungen mit anderen Krümmungsverläufen gemacht (z.B. [6]). Ebenfalls unter Berücksichtigung von nur zwei Moden kann der Krümmungsverlauf optimiert werden, was zur sog. Fourier-Krümmung führt [7]. Bei korrugierten Krümmern kann ferner bei einer vorgegebenen Krümmung die Korrugationstiefe optimiert werden, da die Korrugationstiefe einen starken Einfluß auf die Koppelkonstanten und somit auf das Modenspektrum hat.
Breiten sich in einem Hohlleiter weitere Falschmoden, die mit den genannten Verfahren nicht berücksichtigt werden, aus, so kann man eine Kontrollrechnung mit allen dominanten Moden durchführen.

4.2 Bisher verwendete Krümmungen

Bisher wurden für Hohlleiterkrümmer einige Krümmungsverteilungen gewählt, die sich, mit Ausnahme der Fourier-Krümmung, alle durch einfache analytische Ausdrücke angeben lassen. Die konstante Krümmung, die bereits in Kapitel 3.5.4 (Seite 51) erwähnt wurde, stellt den Krümmer als Ausschnitt eines Kreises dar:

$$C(z) = \frac{\vartheta_l}{l} \tag{4.1}$$

Oft werden auch Krümmer mit einer sinus- oder $\sin^2$-Krümmung verwendet:

$$C(z) = \frac{\vartheta_l \pi}{2l} \sin\left(\frac{\pi z}{l}\right) \tag{4.2}$$

$$C(z) = \frac{2\vartheta_l}{l} \sin^2\left(\frac{\pi z}{l}\right) \tag{4.3}$$

Bei überdimensionierten Rechteckhohlleitern kann durch eine Integration der gekoppelten Wellengleichungen nachgewiesen werden, daß hier eine Secanshyperbolicus Krümmung optimal ist [6]:

$$C(z) = \frac{1}{R_0} \operatorname{sech}\left(\frac{\pi(z-\frac{l}{2})}{R_0 \vartheta_l}\right) = \frac{1}{R_0 \cosh\left(\frac{\pi(z-\frac{l}{2})}{R_0 \vartheta_l}\right)} \tag{4.4}$$

Der minimale Krümmungsradius R_0 kann hier verändert werden. Eine solche Krümmungsverteilung ergibt einen Winkel von ϑ_l, wenn man die Verteilung von $-\infty$ bis ∞

integriert. Um bei der endlichen Krümmerlänge von l dennoch den richtigen Winkel zu erhalten, kann man einen etwas größeren Winkel ϑ_l' in Gleichung 4.4 einsetzten. Für ϑ_l' gilt:

$$\vartheta_l' = \frac{\vartheta_l}{1 - \frac{1}{\frac{\pi}{4}e^f - f}} \tag{4.5}$$

Mit:

$$f = \frac{l\pi}{2\vartheta_l R_0}$$

Diese Krümmungen können als Startwerte für eine Optimierung verwendet werden.

4.3 Definition der Bewertungsfunktion

Fast jedes Optimierungsproblem läßt sich als Suche nach einem globalen Minimum einer reellwertigen Funktion f_b beschreiben, die im folgenden als Bewertungsfunktion bezeichnet wird. Wird die Mikrowelle zu einer Antenne transportiert, z.B. für eine ECRH oder Radaranwendung, sollte ein Hohlleiterkrümmer am Ausgang möglichst wenig Falschmoden haben, da diese die Feldverteilung und die Polarisation stören. Ein gewisser Anteil an Falschmoden innerhalb des Krümmers kann jedoch toleriert werden, wenn die Falschmoden bis zum Ende des Krümmers wieder in die Nutzmode zurückgewandelt werden. Allerdings haben Falschmoden i.A. höhere lokale Feldstärken und eine höhere Dämpfung, so daß der Falschmodenanteil insbesondere bei Hochleistungsanwendungen, wenn die Gefahr eines Durchschlags besteht, nicht über z.B. 20 % liegen sollte.
Es gibt aber auch Anwendungen, z.B. Sinteröfen, bei denen eine gewisse Feldhomogenität durch eine möglichst hohe Modenunreinheit erreicht wird. Hier sind im Prinzip nur die ohmschen Verluste von Bedeutung, da diese den Krümmer aufheizen und den Gesamtwirkungsgrad verringern.
Um allen Forderungen gerecht zu werden, wird die Bewertungsfunktion f_b, die die Qualität des Krümmers angibt, folgendermaßen definiert:

$$f_b = \frac{w_l P_l + w_{s,max} P_{s,max} + w_{s,out} P_{s,out}}{P_{in} \cdot (w_l + w_{max} + w_{out})} \tag{4.6}$$

Hier ist P_l die gesamte ohmsche Verlustleistung im Krümmer. Sie gibt an, wie stark sich der Krümmer erwärmt. $P_{s,max}$ ist die maximale Falschmodenleistung innerhalb des Krümmers. Um diese Größe exakt zu bestimmen, müßte man während der Lösung der gekoppelten Wellengleichungen den maximal auftretenden Wert zwischenspeichern. Dies würde jedoch zu einer drastischen Verlangsamung der Rechnung und somit der gesamten Optimierung führen. Deshalb wird z.B. an 10 Punkten innerhalb des Krümmers die Falschmodenleistung berechnet. Der größte auftretende Wert ist dann $P_{s,max}$. Es ist sehr wichtig, daß die maximale Falschmodenleistung mit in die Optimierung einbezogen wird, da es theoretisch Krümmer gibt, die in der Mitte einen Falschmodenanteil von 80 % oder mehr haben, der bis zum Ende wieder vollständig in die Nutzmode zurückgewandelt wird. Solche Krümmer sind jedoch nicht praktikabel, da sie im Inneren sehr hohe

lokale Feldstärken haben und außerdem sehr empfindlich gegenüber Fertigungstoleranzen sind. Der Wert $P_{s,out}$ gibt schließlich die Falschmodenleistung am Ausgang an, die ein Maß für die Qualität der dortigen Feldverteilung ist. Alle Leistungen werden auf die Eingangsleistung P_{in} normiert. Die Bewertungsfunktion wird in Prozent angegeben.
Die Gewichtsfaktoren w_l, $w_{s,max}$ und $w_{s,out}$ können je nach Anwendung frei gewählt werden. Bei Breitbandanwendungen wird f_b für jeden betrachteten Frequenzpunkt berechnet, und dann der arithmetische Mittelwert berechnet. Um die Rechenzeit möglichst gering zu halten, werden von den Größen P_l, $P_{s,max}$ und $P_{s,out}$ nur diejenigen bestimmt, deren Gewichtsfaktor nicht Null ist.
Die Optimierungsroutine hat nun die Aufgabe, durch Variation der Krümmung und eventuell auch der Korrugationstiefe, ein globales Minimum von f_b zu finden.

4.4 Definition der zu optimierenden Parameter

Ein weiterer Schritt für die Implementierung eines Optimierungsprogramms ist die Definition eines Parameterraums, in dem die Optimierungsroutine die Parameter idealerweise beliebig ändern kann, ohne daß sinnlose Ergebnisse herauskommen. Die Optimierungsparameter, die zu einem Vektor **C** zusammengefaßt werden können, sind die Argumente für die Bewertungsfunktion f_b.
Im vorliegenden Fall wird die Krümmungsfunktion durch eine Reihenentwicklung dargestellt. Faßt man die Reihenkoeffizienten zu einem Array zusammen, so hat man einen Satz von Parametern, durch deren Änderung das Ergebnis optimiert werden kann. Wichtig sind hier folgende Kriterien:

- Jedem Satz von Parametern muß genau ein Krümmer entsprechen.
- Jeder Krümmer sollte nach Möglichkeit nur durch *einen* Parametersatz beschreibbar sein.
- Jeder einzelne Parameter sollte idealerweise beliebig änderbar sein, ohne daß sinnlose Ergebnisse herauskommen.

In vielen Fällen sind geometrische Randbedingungen eines Hohlleiterkrümmers bereits vorgegeben (siehe Abb. 14). Das Koordinatensystem wird hier so gewählt, daß der Krümmeranfang im Koordinatenursprung liegt; der gerade Hohlleiter vor dem Krümmer liegt parallel zur x-Achse. Jeder von der Optimierungsroutine vorgeschlagene Krümmer muß einen vorgegebenen Gesamtwinkel ϑ_l haben. Soll der Krümmer in ein bereits bestehendes System eingebaut werden, muß das Ende des Krümmers an einem fest vorgegebenen Ort (x_l, y_l) liegen, wo sich dann das folgende gerade Stück anschließt.
Für die Koordinaten x und y eines Punktes z im Krümmer gilt:

$$\frac{\partial x}{\partial z} = \cos[\vartheta(z)] \tag{4.7a}$$

$$\frac{\partial y}{\partial z} = \sin[\vartheta(z)] \tag{4.7b}$$

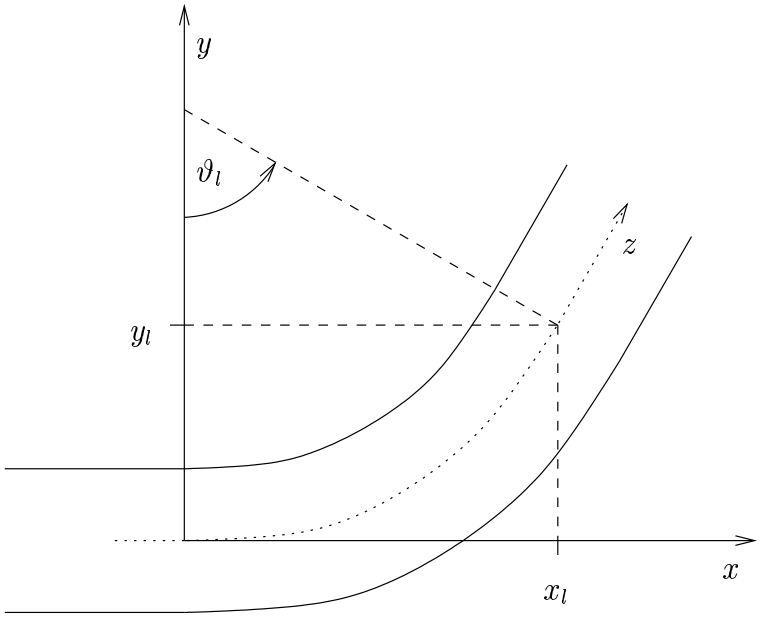


Abbildung 14: Vorgegebene Geometrie eines Hohlleiterkrümmers

wobei

$$\vartheta(z) = \int_0^z C(z')dz' \tag{4.8}$$

der Winkel an einer bestimmten Stelle z innerhalb des Krümmers ist. Demzufolge gilt für $x(z)$ und $y(z)$:

$$x(z) = \int_0^z \cos[\vartheta(\xi)]d\xi \tag{4.9a}$$

$$y(z) = \int_0^z \sin[\vartheta(\xi)]d\xi \tag{4.9b}$$

Die Koordinaten x_l und y_l des Endpunktes ergeben sich dann zu:

$$x_l = \int_0^l \cos[\vartheta(\xi)]\,d\xi \tag{4.10}$$

$$y_l = \int_0^l \sin[\vartheta(\xi)]\,d\xi \tag{4.11}$$

Für den Gesamtwinkel ϑ_l gilt:

$$\vartheta_l = \int_0^l C(z)dz \tag{4.12}$$

Diese Randbedingungen müssen immer gelten, d.h. jeder Krümmer, der von einer Optimierungsroutine vorgeschlagen wird, muß sie erfüllen.
Bei den verwendeten Reihenentwicklungen ist das Integral für $\vartheta(z)$ immer geschlossen lösbar, d.h. der Winkel an einer Stelle z läßt sich durch eine Reihe darstellen:

$$\vartheta(z) = \sum_{i=0}^{N} C_i f_i(z) \tag{4.13}$$

Somit können x_l bzw. y_l durch eine einfache numerische Integration der Gleichungen 4.10 und 4.11 z.B. mit dem Simpson Verfahren bestimmt werden. Außerdem kann der Koeffizient nullter Ordnung so immer aus dem Gesamtwinkel und den anderen Koeffizienten berechnet werden.
Das Parameterarray $\tilde{\mathbf{C}}$ kommt von der Optimierungsroutine und kann beliebige reelle Zahlen enthalten. Das Array $\mathbf{C}$ enthält die Reihenkoeffizienten für eine Krümmungsfunktion, die alle Randbedingungen erfüllt. Es wird nun folgendes Schema verwendet, um aus dem Array $\tilde{\mathbf{C}}$ die Koeffizienten $\mathbf{C}$ zu bestimmen:

- Die Krümmungskoeffizienten in $\tilde{\mathbf{C}}$ gelten für eine normierte Länge von 1. Die tatsächliche Länge wird später ermittelt.
- Das Array $\tilde{\mathbf{C}}$ enthält keinen Koeffizienten nullter Ordnung, da dieser aus dem Winkel und den anderen Koeffizienten bestimmt wird. Dies bedeutet, daß die Optimierungsroutine einen Krümmungsverlauf liefert, zu dem dann ein konstanter Anteil addiert wird, mit dem die Bedingung des Gesamtwinkels erfüllt wird. Auf diese Weise wird zusätzlich die Zahl der Optimierungsparameter um 1 verringert, was eine schnellere Optimierung ermöglicht. Der Krümmungskoeffizient nullter Ordnung wird nun für die Länge 1 und den gewünschten Winkel ϑ_l ermittelt.
- Für eine Länge von 1 wird mit den Koeffizienten $\tilde{\mathbf{C}}$ entweder $\tilde{x}_l$ oder $\tilde{y}_l$ berechnet.
- Aus der berechneten Koordinate kann nun ein Skalierungsfaktor bestimmt werden, der angibt, um wieviel der Krümmer bei einer Länge von 1 zu groß oder zu klein ist. Für den Skalierungsfaktor s gilt:

  $$s = \frac{x_l}{\tilde{x}_l}$$

  oder

  $$s = \frac{y_l}{\tilde{y}_l}$$

  Die Länge l wird dann zu:

  $$l = s$$

  Für die endgültigen Krümmungskoeffizienten c_i gilt:

  $$c_i = \frac{\tilde{c}_i}{s}$$

Es ist nicht möglich, sowohl x_l als auch y_l beliebig festzulegen. In einem symmetrischen Krümmer, bei dem die Krümmung eine gerade Funktion ist, hängen x_l und y_l zusammen:

$$x_l = \cos\left(\frac{\vartheta_l}{2}\right)\sqrt{x_l^2+y_l^2}$$

$$y_l = \sin\left(\frac{\vartheta_l}{2}\right)\sqrt{x_l^2+y_l^2}$$

Man könnte noch einen ungeraden Koeffizienten zulassen, der eine beliebige Wahl sowohl von x_l als auch von y_l erlauben würde. Die Berechnungen hierfür würden jedoch numerische Iterationsverfahren erfordern, die die Rechenzeit deutlich erhöhen würden, da sie für jeden von der Optimierungsroutine vorgeschlagenen Krümmer erfolgen müßten.
In korrugierten Hohlleitern ändern sich die Eigenwerte, und somit alle Eigenschaften des Krümmers periodisch mit der Korrugationstiefe, da nach dem verwendeten Impedanzmodell eine Korrugationstiefe von $\frac{\lambda}{2}$ wieder einem glatten Hohlleiter entspricht. Diese Periodizität stört Optimierungsverfahren, die den Gradienten der Bewertungsfunktion direkt oder indirekt auswerten (z.B. Downhill Simplex). Es ist deshalb sinnvoll, wenn der Optimierungsalgorithmus die Korrugationstiefe nur innerhalb des Intervalls $[0;\frac{\lambda}{2}]$ ändern darf. Es kann sogar sinnvoll sein, den Bereich noch weiter einzuschränken, und z.B. nur Korrugationstiefen zwischen $0.1\frac{\lambda}{4}$ bis $0.9\frac{\lambda}{4}$ zu verwenden. Hier bietet es sich an, als Transformationsfunktion den Arcustangens zu verwenden, der beliebige reelle Argumente in ein Intervall von $-\pi/2$ bis $\pi/2$ abbildet. An die Optimierungsroutine wird dann ein Parameter $\tilde{D}$ übergeben, für den gilt:

$$\tilde{D} = \tan\left(\frac{D-D_{min}}{D_{max}-D_{min}}\pi - \frac{\pi}{2}\right) \tag{4.14}$$

Hier ist D die tatsächliche Korrugationstiefe. Aus dem Optimierungsparameter $\tilde{D}$ kann die Korrugationstiefe D dann folgendermaßen bestimmt werden:

$$D = \frac{\arctan(\delta)+\frac{\pi}{2}}{\pi}(D_{max}-D_{min})+D_{min} \tag{4.15}$$

Mit diesen Normierungen und Transformationen ist zudem gewährleistet, daß jeder Krümmer nur durch *genau* ein Parameterarray $\mathbf{C}$ beschreibbar ist.
Die Bewertungsfunktion f_b muß also zunächst aus dem Array $\tilde{\mathbf{C}}$ den Koeffizienten nullter Ordnung und dann die tatsächlichen Reihenkoeffizienten bestimmen. Wird die Korrugationstiefe mitoptimiert, wird aus dem Optimierungsparameter $\tilde{D}$ die tatsächliche Korrugationstiefe bestimmt. In diesem Fall müssen dann auch noch noch die Eigenwerte der Moden sowie die Ausbreitungs- und Krümmungskoppelkonstanten für die jeweilige Korrugationstiefe bestimmt werden. Dann werden das Modenspektrum am Ausgang, die ohmschen Verluste und, falls gewünscht, die maximale Falschmodenleistung innerhalb des Krümmers bestimmt.
Im folgenden werden Methoden vorgestellt, mit denen der Krümmungsverlauf durch eine Fourierreihe oder eine Reihe aus Tschebyscheff-Polynomen approximiert wird. Kriterien für die Wahl der Entwicklungen war eine gute Approximation der bisher verwendeten Krümmungen sowie die analytische Lösbarkeit des Integrals für $\vartheta(z)$.

4.5 Tschebyscheff-Entwicklung des Krümmungsverlaufs

Tschebyscheffpolynome eignen sich gut für die Approximation von Funktionen, deren Verlauf nur innerhalb eines Intervalls von Bedeutung ist. Bei Krümmern ist dies der Fall, da die Krümmungsfunktion nur für $0 \leq z \leq l$ interessant ist.
Die Tschebyscheff-Polynome $T_n(t)$ sind definiert als:

$$T_n(t) = \cos(n \arccos t) \tag{4.16}$$

Mit trigonometrischen Umformungen erhält man:

$$\begin{aligned} T_0(t) &= 1 \\ T_1(t) &= t \\ T_2(t) &= 2t^2 - 1 \\ T_3(t) &= 4t^3 - 3t \\ T_4(t) &= 8t^4 - 8t^2 + 1 \\ &\dots \\ T_{n+1}(t) &= 2tT_n(t) - T_{n-1}(t) \text{ für } n \geq 1 \end{aligned} \tag{4.17}$$

Ein Tschebyscheff-Polynom $T_n(x)$ hat n reelle Nullstellen $x_{k,n}$, für die gilt:

$$x_{k,n} = \cos\left(\frac{\pi(k-\frac{1}{2})}{n}\right) \text{ mit } k = 1,2,3...n \tag{4.18}$$

Für die Nullstellen $x_{k,n}$ von T_n gilt die diskrete Orthogonalitätsrelation für $i, j < n$:

$$\sum_{k=1}^{n} T_i(x_{k,n}) T_j(x_{k,n}) = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq j \\ n/2 & \text{für } i = j = 0 \\ n & \text{sonst} \end{cases} \tag{4.19}$$

Man kann eine Funktion $C(t)$ im Intervall $[-1;1]$ durch eine Reihe aus Tschebyscheffpolynomen annähern:

$$C(t) \approx \left[\sum_{i=0}^{N-1} c_i T_i(t)\right] - \frac{1}{2}c_0, \tag{4.20}$$

wobei für die Koeffizienten c_i gilt:

$$c_i = \frac{2}{N} \sum_{k=1}^{N} C \left[\cos\left(\frac{\pi(k-\frac{1}{2})}{N} \right) \right] \cos\left(\frac{\pi i(k-\frac{1}{2})}{N} \right) \tag{4.21}$$

Werden nur symmetrische Krümmungsverläufe zugelassen, so verschwinden alle Koeffizienten c_i für ungerade i. Da die Krümmung $C(z)$ im Intervall $[0;l]$ definiert ist, wird folgende Variablentransformation verwendet:

$$t = \frac{2}{l} z - 1 \tag{4.22}$$

Für die Krümmung gilt also:

$$C(z) = \left[\sum_i c_i T_i \left(\frac{2}{l} z - 1 \right) \right] - \frac{1}{2} c_0 \tag{4.23}$$

Für die Integrale von Tschebyscheff-Polynomen gilt:

$$\int T_0(t)dt = t \tag{4.24a}$$

$$\int T_1(t)dt = \frac{1}{2} t^2 \tag{4.24b}$$

$$\int T_n(t)dt = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{n+1} T_{n+1}(t) - \frac{1}{n-1} T_{n-1}(t) \right] \text{ für } n > 1 \tag{4.24c}$$

Man kann demzufolge das Integral einer Funktion, die durch Tschebyscheff-Polynome angenähert wird, wiederum durch Tschebyscheff-Polynome darstellen:

$$\int \left[\sum_{i=0}^{N-1} c_i T_i(t) \right] dt = \sum_{i=0}^{N-1} C_i T_i(t) \tag{4.25}$$

Wobei für die Koeffizienten C_i der Stammfunktion gilt:

$$C_0 \text{ beliebig} \tag{4.26}$$

$$C_i = \frac{c_{i-1} - c_{i+1}}{2k} \text{ für } i > 0 \tag{4.27}$$

Wählt man den Koeffizienten C_0 so, daß das Integral bei -1 verschwindet, kann man dann den Krümmungswinkel in Abhängigkeit von t angeben:

$$\vartheta(z) = \frac{l}{2} \sum_{i=0}^{N-1} C_i T_i \left(\frac{2}{l} z - 1 \right) \tag{4.28}$$

	Konstant	sin	$\sin^2$	Natürlich	sech $R_0 = 0.5\text{m}$
c_0	π	2.32923	2.18579	2.63563	2.68514
c_2	0.0	−1.23223	−1.52504	−0.65807	−0.55026
c_4	0.0	0.06906	0.47571	−0.41129	0.09027
c_6	0.0	−0.00147	−0.04569	−0.18279	−0.01424
c_8	0.0	$1.65424 \cdot 10^{-5}$	0.00218	−0.05483	0.00223
c_{10}	0.0	$-1.14814 \cdot 10^{-7}$	$-6.31302 \cdot 10^{-5}$	−0.00997	−0.00035
c_{12}	0.0	$5.41214 \cdot 10^{-10}$	$1.22252 \cdot 10^{-6}$	−0.00083	$5.50141 \cdot 10^{-5}$
c_{14}	0.0	$-1.85101 \cdot 10^{-12}$	$-1.71846 \cdot 10^{-8}$	0.0	$-9.92734 \cdot 10^{-6}$

Tabelle 2: Tschebyscheff-Koeffizienten von Krümmungsverläufen, $l = 1$ m, $\vartheta_l = 90^\circ$

Will man den Gesamtwinkel, so wird von $z = 0$ bis $z = l$ integriert. Werden diese Integrationsgrenzen in die Tschebyscheffpolynome eingesetzt, gilt allgemein:

$$T_n(1) - T_n(-1) = \begin{cases} 2 & \text{für } n \text{ ungerade} \\ 0 & \text{für } n \text{ gerade} \end{cases} \tag{4.29}$$

Sind nun c_i die Tschebyscheff-Koeffizienten einer Krümmungsfunktion $C(z)$, ergibt sich dann für den Krümmungswinkel:

$$\vartheta_l = l \left[\frac{c_0}{2} - \frac{c_2}{3} - \frac{c_4}{15} \cdots - \frac{c_{2k}}{(2k-1)(2k+1)} \right] \tag{4.30}$$

Andererseits bedeutet dieser Zusammenhang, daß sich der Koeffizient c_0 direkt aus den anderen geraden Koeffizienten bestimmen läßt, wenn der Winkel bekannt ist:

$$c_0 = 2 \left[\frac{\vartheta_l}{l} + \frac{c_2}{3} + \frac{c_4}{15} \cdots \frac{c_k}{(2k-1)(2k+1)} \right] \tag{4.31}$$

Man kann nun Tschebyscheff-Koeffizienten für die bisher verwendeten Krümmungsverläufe angeben. Wie man in Tabelle 2 sieht, konvergieren die Entwicklungen recht schnell, was die Zahl der Koeffizienten und somit die Optimierungszeit verringert.

4.6 Fourier Entwicklung des Krümmungsverlaufs

Schlangenförmige Modenwandler haben einen näherungsweise cosinusförmigen Verlauf der Hohlleiterachse. Da sich die Krümmung bei kleinen Amplituden nur wenig vom geometrischen Verlauf unterscheidet, ist auch diese näherungsweise cosinusförmig. Wird eine periodische Funktion mit Tschebyscheff Polynomen angenähert, benötigt man sehr viele Koeffizienten. Es kann deshalb sinnvoll sein, bei einer Optimierung von Modenwandlern die Krümmung durch eine Fourierreihe darzustellen.
Die Fourierreihe einer Funktion lautet:

$$C(z) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} \left(a_k \cos \frac{k2\pi z}{l} + b_k \sin \frac{k2\pi z}{l} \right) \tag{4.32}$$

Aus einer bekannten Krümmung für einen periodischen Modenwandler können die Fourierkoeffizienten wie folgt berechnet werden:

$$a_k = \frac{2}{l}\int_0^l C(z)\cos\left(\frac{2\pi kz}{l}\right)dz \tag{4.33a}$$

$$b_k = \frac{2}{l}\int_0^l C(z)\sin\left(\frac{2\pi kz}{l}\right)dz \tag{4.33b}$$

Für die in Kapitel 4.4 (Seite 58) beschriebene Transformation der Optimierungsparameter in die Reihenkoeffizienten der Krümmung wird ein analytischer Ausdruck für den Krümmungswinkel $\vartheta(z)$ benötigt. Er lautet:

$$\vartheta(z) = \int_0^z C(\xi)d\xi = \frac{a_0}{2}z + \sum_{k=1}^{N}\frac{l}{2\pi k}\left\{a_k\sin\left(\frac{k2\pi z}{l}\right) + b_k\left[1-\cos\left(\frac{k2\pi z}{l}\right)\right]\right\} \tag{4.34}$$

Für den Gesamtwinkel der Krümmung folgt dann:

$$\vartheta z = \frac{a_0}{2}l, \tag{4.35}$$

was bedeutet, daß auch hier der Koeffizient nullter Ordnung nicht an die Optimierungsroutine übergeben wird, da er mit dem Gesamtwinkel ϑ_l bereits festliegt.

5 Optimierungsverfahren

5.1 Genetische Algorithmen

5.1.1 Beschreibung des Verfahrens

Genetische Algorithmen wurden gerade in den letzten Jahren für viele elektromagnetische Optimierungsprobleme erfolgreich angewandt (z.B. [27], [22]). Bei einem genetischen Algorithmus (GA) wird ein Satz von Optimierungsparametern als *Chromosom* bezeichnet. Ein Chromosom enthält *Gene*, die gewissermaßen die kleinste Informationseinheit darstellen. Die klassischen genetischen Algorithmen sind binär kodiert, d.h. die Gene sind einzelne Bits, die später beschriebenen genetischen Operatoren (Kreuzung, Mutation) sind boolesche Operationen, die auf die einzelnen Gene angewandt werden. Z.B. kann so eine zufällige Mutation durchgeführt werden, indem einzelne Bits invertiert werden.
Heutzutage werden für Optimierungsprobleme mit kontinuierlich veränderbaren Parametern oft reelle genetische Algorithmen verwendet, d.h. die Gene sind reelle Zahlen; die Chromosomen sind Vektoren mit reellen Koeffizienten. Die genetischen Operatoren werden hier durch arithmetische Operationen dargestellt, die auf einzelne Gene oder ganze Chromosomen angewandt werden. Ein Chromosom beinhaltet mit seinen Genen die komplette Information über den Erscheinungstyp eines Individuums. In der vorliegenden Implementierung für Hohlleiterkrümmer werden die Reihenkoeffizienten für den Krümmungsverlauf zusammen mit der Korrugationstiefe zu einem Chromosom zusammengefaßt, d.h. ein Chromosom ist genau das Parameterarray $\mathbf{C}$, das in Abschnitt 4.4 (Seite 58) definiert wurde.
Bei genetischen Algorithmen wird aus einem oder mehreren Startchromosomen eine *Bevölkerung* aus vielen verschiedenen Individuen gebildet.
Nach dem Vorbild der natürlichen Evolution werden durch Vererbung und zufällige Mutationen aus der bestehenden Bevölkerung neue Chromosomen erzeugt. Die Funktion f_b, die hier auch als *Fitnessfunktion* bezeichnet wird, erlaubt eine Bewertung der Individuen untereinander. Nach der Erzeugung des Nachwuchses werden nun die besten Individuen selektiert, so daß die Bevölkerungszahl wieder den ursprünglichen Wert annimmt. Ein Flußdiagramm für den hier implementierten genetischen Algorithmus ist in Abbildung 15 zu sehen. Hier ist N_p die Zahl der Elternindividuen, N_k ist die gesamte Zahl der Nachkommen, die in jeder Generation erzeugt werden. Die hier gezeigten genetischen Operationen sollen nun im einzelnen beschrieben werden.

5.1.2 Initialisierung der Bevölkerung

Zunächst muß eine Ausgangsbevölkerung erzeugt werden. Hat man keinen *first guess* für die Lösung, so kann man hier Gene aus Zufallszahlen erzeugen. Bei Hohlleiterkrümmern kann man analytische Krümmungsverläufe als Startkrümmungen nehmen. Die Wahl der Startkrümmung wirkt sich stark auf die benötigte Zeit für die Optimierung aus. Eine Diskussion über gute Startkrümmungen befindet sich in Kapitel 6.1 (Seite 84)
Hat man einen oder mehrere Startwerte, so werden durch die Addition von kleinen Zufallszahlen zu den einzelnen Genen (asexuelle Vermehrung) weitere Chromosomen erzeugt, die noch recht ähnlich zu den Startwerten sind. Eine Möglichkeit besteht darin, auf

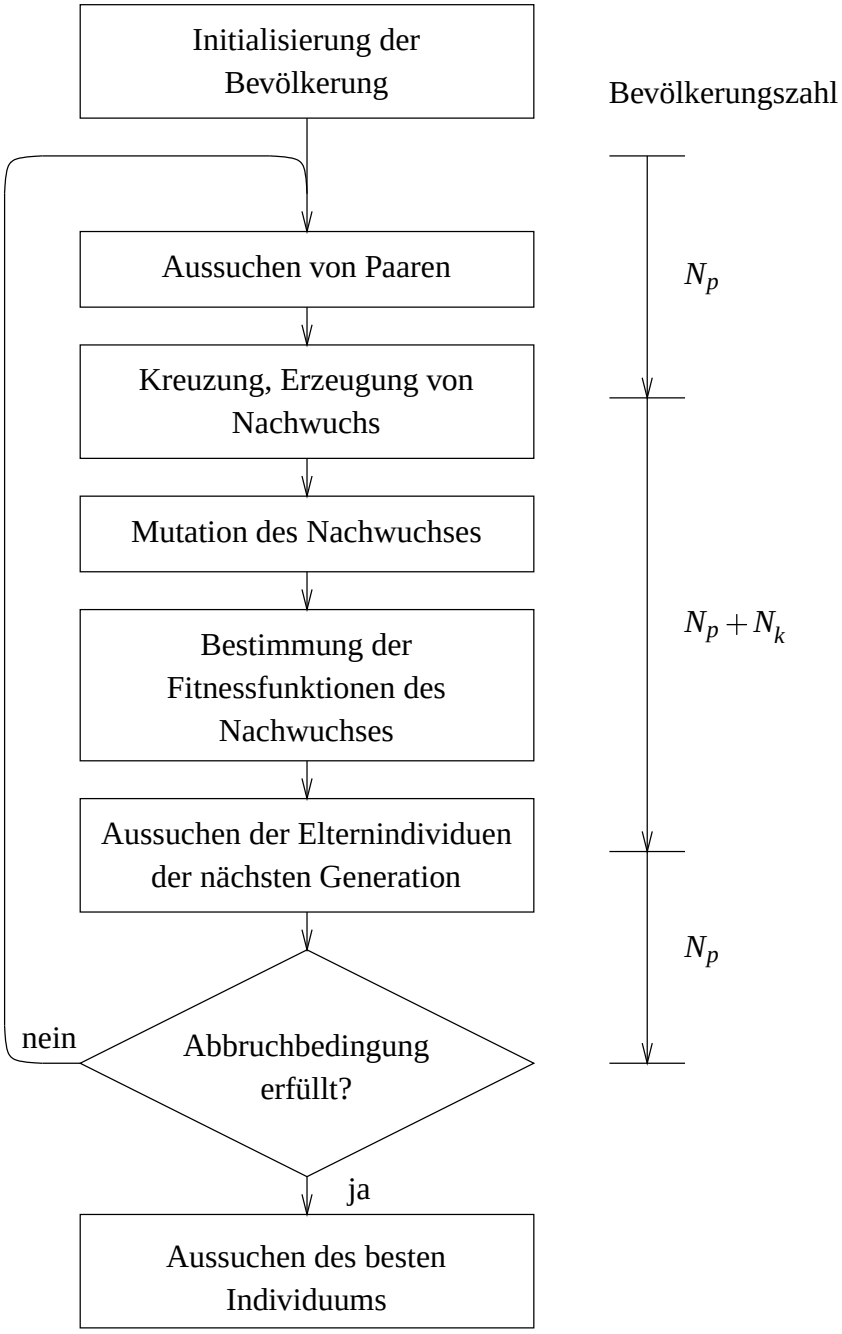


Abbildung 15: Flußdiagramm für den genetischen Algorithmus

diese Weise eine Bevölkerung mit N_p Chromosomen zu erzeugen, die dann die Elternindividuen für die erste Generation sind. In der vorliegenden Implementierung wird aus den Startkrümmern eine Bevölkerung von $N_p + N_k$ Individuen erzeugt, aus der durch eine anfängliche Selektion die N_p besten Individuen ausgesucht werden.

5.1.3 Aussuchen von Paaren

Für die Erzeugung von Nachwuchs müssen die N_p Chromosomen zu Paaren zusammengefaßt werden. Es gibt verschiedene Möglichkeiten zu entscheiden, ob 2 Elternindividuen gut geeignet für eine Paarung sind. Manche Implementierungen suchen die Paare rein zufällig aus. Man kann auch Individuen mit möglichst ähnlichen Chromosomen zusammenfassen. Bei dem vorliegenden Problem ist es jedoch kaum möglich, einen *Abstand* zweier Chromosomen im Parameterraum zu bestimmen, da die unterschiedlichen Reihenkoeffizienten in verschiedenen Größenordnungen liegen. Die Skalierungsfaktoren für die jeweiligen Koeffizienten sind je nach Einzelfall sehr unterschiedlich und vor der Optimierung nicht bestimmbar. Eine andere Möglichkeit besteht darin, Individuen mit ähnlichen Werten der Fitnessfunktion zusammenzufassen. Diese Möglichkeit wurde hier gewählt, da man annehmen kann, daß Chromosomen, die im Parameterraum nah beieinanderliegen, auch ähnliche Werte der Fitnessfunktion haben.

5.1.4 Kreuzung, Erzeugung von Nachwuchs

Für die Erzeugung von Nachwuchs aus Elternchromosomen gibt es ebenfalls viele Möglichkeiten. Bei reell kodierten genetischen Algorithmen kann man die Nachkommen als gewichtetes Mittel der beiden Elternchromosomen erzeugen. In der vorliegenden Implementierung werden n_k Nachkommen aus einem Paar $\mathbf{C}_v, \mathbf{C}_m$ nach folgender Vorschrift erzeugt, wobei die Chromosomen hier als Vektoren im mathematischen Sinn aufzufassen sind:

$$\mathbf{C}_i = w_i \mathbf{C}_v + (1 - w_i)\mathbf{C}_m \text{ mit } 0 \leq i < n_k \tag{5.1}$$

Für den Gewichtsfaktor w_i gilt:

$$w_i = (1 - w_{max})\frac{i}{n_k - 1} + w_{max}\frac{n_k - 1 - i}{n_k - 1} \tag{5.2}$$

Meist wurde $n_k = 3$ und $w_{max} = 2$ gewählt. Somit gilt für die 3 Nachkommen $\mathbf{C}_0$, $\mathbf{C}_1$ und $\mathbf{C}_2$:

$$\mathbf{C}_0 = 2\mathbf{C}_v - \mathbf{C}_m \tag{5.3a}$$

$$\mathbf{C}_1 = \frac{1}{2}(\mathbf{C}_v + \mathbf{C}_m) \tag{5.3b}$$

$$\mathbf{C}_2 = 2\mathbf{C}_m - \mathbf{C}_v \tag{5.3c}$$

In diesem Fall entsteht $\mathbf{C}_1$ als arithmetisches Mittel aus den Eltern. Die Kinder $\mathbf{C}_0$ und $\mathbf{C}_2$ sind lineare Extrapolationen in verschiedenen Richtungen. Für die Zahl N_k der erzeugten Nachkommen pro Generation (siehe Abb. 15) gilt in diesem Fall also:

$$N_k = \frac{n_k N_p}{2} \tag{5.4}$$

Dies ist gleichzeitig auch die Zahl der Bewertungsfunktionen, die in jeder Generation berechnet werden muß.

5.1.5 Mutation des Nachwuchses

Durch eine zufällige Mutation des Nachwuchses soll verhindert werden, daß einzelne Gene bei allen Chromosomen der Bevölkerung identisch werden, was dazu führen würde, daß sie sich durch Kreuzung nicht mehr verändern könnten. Außerdem besteht die Chance, daß einzelne Nachkommen durch eine stärkere Mutation in den Bereich eines besseren lokalen Minimums der Fitnessfunktion gelangen, wo sich dann eine Bevölkerung bilden kann.
Die Erfahrung hat gezeigt, daß die Effizienz der Optimierung insbesondere bei schwierigen Problemen sehr stark von den Parametern der Mutation abhängt.
In der vorliegenden Implementierung wird die Mutation nach folgender Vorschrift durchgeführt:

$$C_{mutiert} = \begin{cases} C_{original}(1 + r_1 \sigma_m) & \text{für } r_2 < p_m \\ C_{original} & \text{sonst} \end{cases} \tag{5.5}$$

Hier sind:

$C_{mutiert}$:	Mutiertes Gen
$C_{original}$:	Originales Gen
r_1:	Gaußverteilte Zufallszahl mit Mittelwert 0 und Standardabweichung 1
r_2:	Gleichverteilte Zufallszahl zwischen 0 und 1
p_m:	Aktuelle Mutationswahrscheinlichkeit
σ_m:	Aktuelle Mutationsintensität

Diese Formel wird für jedes einzelne Gen, d.h. für jedes Element eines Parametervektors mit jeweils neuen Zufallszahlen angewandt.
In der ersten Implementierung wurde noch jedes Gen mutiert. Durch die Einführung der Mutationswahrscheinlichkeit konnte die Effizienz der Optimierung wesentlich verbessert werden.
Die Parameter σ_m und p_m sind während einer Generation konstant für alle Nachkommen. Es ist einleuchtend, daß die Bevölkerung bei der Verwendung eines kleinen Wertes für σ_m im Bereich des nächsten lokalen Minimums bleibt, dort aber in Richtung des Tiefpunktes konvergiert. Bei Mutation mit einer großen Standardabweichung findet eine starke Streuung des Nachwuchses statt. Deshalb besteht die Chance, aus einem lokalen Minimum herauszukommen, und ein besseres Minimum zu finden. Beide Effekte, das Finden

des Tiefpunktes im Bereich eines lokalen Minimums und die Mutation zu einem besseren Minimum, sind erwünscht. In der vorliegenden Implementierung wird deshalb für σ_m alle 5 Generationen ein größerer Wert gewählt [1]. Eine Alternative zur gelegentlichen Erhöhung von σ_m ist die Wahl von cauchyverteilten Zufallszahlen für r_1. Hier tauchen große Werte auch ohne Veränderung von σ_m mit einer wesentlich größeren Wahrscheinlichkeit als bei gaußverteilten Zufallszahlen auf. Man erhält cauchyverteilte Zufallszahlen r_c aus gleichverteilten Zufallszahlen r_u mit folgender Transformation:

$$r_c = \tan(r_u\pi - \frac{\pi}{2}), \tag{5.6}$$

wobei für r_u gilt:

$$0 < r_u < 1$$

Abb. 16 zeigt einen Vergleich der beiden Dichtefunktionen. Die gaußsche Kurve hat hier eine Standardabweichung von 1. Bei der Cauchyverteilung ist die Standardabweichung nicht definiert [2]. Die Kurven gelten, wenn man in beiden Fällen $\sigma_m = 1$ wählt.

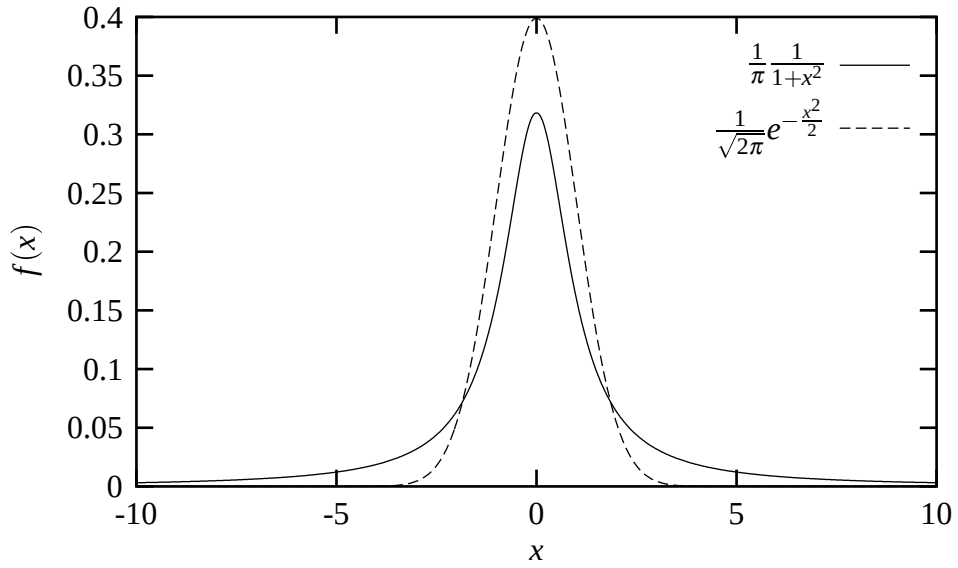


Abbildung 16: Vergleich der Dichtefunktionen einer Gauß- und Cauchyverteilung

Auf jeden Fall darf immer nur der Nachwuchs mutiert werden, nicht jedoch die Eltern. Elternindividuen verändern sich während der Optimierung nicht und verbleiben so lange in der Bevölkerung, bis sie durch bessere Nachkommen ersetzt werden. Dadurch wird gewährleistet, daß sich das Gesamtergebnis nie verschlechtert.
In den Beispielen der folgenden Kapitel werden die gewählten Parameter für das jeweilige Problem angegeben. Obwohl genetische Algorithmen im allgemeinen sehr gut konvergieren und bei verschiedenen Zufallszahlen reproduzierbare Ergebnisse liefern, haben die

[1] Diese Tatsache deckt sich mit der Theorie, daß gelegentliche Umpolungen des Erdmagnetfeldes, die zu zeitweiliger erhöhter Höhenstrahlung und stärkerer Mutation der Lebewesen führen, wichtig für die Entstehung neuer Arten sind.

Mutationsparameter einen starken Einfluß auf die Zahl der Generationen, die für eine bestimmte Optimierung benötigt werden. In der Literatur (z.B. [22]) werden nur Richtwerte für die Mutationsparameter angegeben. Die optimalen Werte müssen immer experimentell ermittelt werden.

5.1.6 Bestimmung der Fitnessfunktionen des Nachwuchses

Für die Berechnung der Fitnessfunktion eines Individuums müssen zunächst der Krümmungsverlauf und eventuell die Korrugationstiefe aus dem Chromosom **C** bestimmt werden. Die Umrechnung von Optimierungsparametern in die Reihenkoeffizienten der Krümmung ist in Kapitel 4.4 (Seite 58) beschrieben. Anschließend wird die Fitnessfunktion f_b, wie in Kapitel 4.3 (Seite 57) beschrieben, berechnet.

5.1.7 Aussuchen der Elternindividuen der nächsten Generation

Für die Auswahl der Elternindividuen für die folgende Generation gibt es auch wieder verschiedene Möglichkeiten [22]. In der vorliegenden Implementierung werden aus der Gesamtbevölkerung einfach die besten N_p Individuen ausgesucht. Hier ist es ebenfalls wichtig, daß die Eltern in Konkurenz zum Nachwuchs stehen. So wird gewährleistet, daß sich die gesamte Bevölkerung innerhalb eines Generationsschrittes *nie* verschlechtert. Ein Individuum stirbt erst dann, wenn es nicht mehr zu den N_p Besten gehört.

5.1.8 Abbruchkriterium

Wie die natürliche Evolution, hört auch ein genetischer Algorithmus im Prinzip nie auf. Man muß also ein Abbruchkriterium definieren. Dies kann z.B. sein:

- Maximale Zahl der Generationen
- Zielwert der Fehlerfunktion (z.B. Falschmodenanteil unter 1 %)
- Konvergenz der Chromosomen, d.h. der Algorithmus wird abgebrochen, wenn sich alle Chromosomen nur noch geringfügig unterscheiden

Die ersten beiden Kriterien lassen sich sehr leicht automatisieren. Wesentlich schwieriger ist es, die Konvergenz zu untersuchen. Die Chromosomen sind vektorielle Größen, deren Koeffizienten nicht direkt miteinander vergleichbar sind. So ist z.B. die Standardabweichung des Tschebyscheff Koeffizienten 12. Ordnung nicht mit der Standardabweichung des Koeffizienten 0. Ordnung vergleichbar, da sich diese normalerweise um mehrere Größenordnungen unterscheiden. Es ist auch nicht möglich, vor der Optimierung geeignete Skalierungsfaktoren zu finden. In dem Computerprogramm, welches im Rahmen dieser Arbeit geschrieben wurde, kann man deshalb zwischen einer maximalen Zahl der Generationen und einem Zielwert der Fitnessfunktion wählen.

5.1.9 Kontrollwerte für die Effizienz

Das interaktive Programm zeigt während der Optimierung den aktuellen Krümmungsverlauf des besten Individuums, den resultierenden Verlauf des Krümmers sowie das Modenspektrum innerhalb des Krümmers an. Ferner werden die Fitnessfunktionen des besten und des schlechtesten Elternindividuums angezeigt. Der Wert $f_{b,min}$ des besten Elternindividuums zeigt das aktuelle Ergebnis der Optimierung. Mit dem Wert $f_{b,max}$ des schlechtesten Elternindividuums kann man abschätzen, wie die Gesamtbevölkerung im Parameterraum verteilt ist. Wenn sich $f_{b,max}$ nur geringfügig von $f_{b,min}$ unterscheidet, dann bedeutet dies in der Regel, daß sich die Bevölkerung in einem lokalen Minimum der Fitnessfunktion befindet. Wichtig ist auch, daß sich $f_{b,max}$ in jeder Generation verringert. Bleibt $f_{b,max}$ über eine Generation konstant, so bedeutet dies, daß alle Nachkommen einer Generation schlechter als das schlechteste Elternindividuum waren.

Abbildung 17 zeigt typische Verläufe von $f_{b,min}$ und $f_{b,max}$ während der Optimierung. Als zusätzlicher Wert ist hier noch die durchschnittliche Fitneß aller Elternindividuen zu sehen. Die Optimierung wurde zweimal durchgeführt, und zwar einmal mit gaußverteilten Zufallszahlen für die Mutation und einmal mit Cauchyzufallszahlen. Bei den Cauchyzahlen war σ immer 0.5. Bei den gaußschen Zahlen wurde alle 5 Generationen $\sigma = 10$ gewählt. Man sieht einen ähnlichen Verlauf der Kurven. Da die Anfangsbevölkerung durch Klonen und Mutieren der Startwerte erzeugt wird, ist die Streuung in den Fitnessfunktionen am Anfang recht groß. In den ersten Generationen sammelt sich daher die Bevölkerung zunächst im Bereich um das beste Startindividuum an. Der Wert für $f_{b,min}$ verringert sich in den ersten ca. 20 Generationen nur unwesentlich. Erst wenn sich die Bevölkerung in einem Bereich des Parameterraums ansammelt, steigen die Chancen für eine deutliche Verbesserung.

In den rechten Diagrammen kann man die Konvergenz in Richtung des Tiefpunktes sehen. Die minimale Fitnessfunktion ist nach 400 Generationen bei gaußverteilten Zufallszahlen etwas kleiner, als bei der Verwendung von Cauchyzahlen. Da der Zufallszahlengenerator immer von der aktuellen Systemzeit initialisiert wird, können die Rechenzeiten bei verschiedenen Programmläufen jedoch deutlich voneinander abweichen. Ein drastischer Unterschied in bezug auf die Effizienz konnte deshalb für die beiden Zufallszahlengeneratoren nicht nachgewiesen werden.

Das Programm läuft solange bis die Abbruchbedingung erfüllt ist. Danach bleibt die Bevölkerung im Arbeitsspeicher, damit die Optimierung nach einer eventuellen Veränderung der Mutationsparameter fortgesetzt werden kann. Die Optimierung kann aber auch manuell unterbrochen werden, wenn abzusehen ist, daß keine wesentliche Verbesserung mehr zu erwarten ist.

Es kann theoretisch passieren, daß ein einzelnes Individuum durch eine starke Mutation in ein besseres Minimum gelangt ist, während sich die restliche Bevölkerung in einem schlechteren Minimum befindet. Man sieht das daran, daß $f_{b,min}$ wesentlich kleiner ist als $f_{b,max}$, und daß die durchschnittliche Fitness etwa gleich wie $f_{b,max}$ ist. Weil für eine erfolgreiche Paarung immer zwei Individuen benötigt werden, die sich möglichst im Bereich des gleichen Minimums befinden, kann dieser Zustand theoretisch beliebig lange dauern, wenn sich nur *ein* Individuum im besten lokalen Minimum befindet. Deshalb wurde eine weitere Verbesserung eingebaut, bei der das beste Individuum jeweils einen

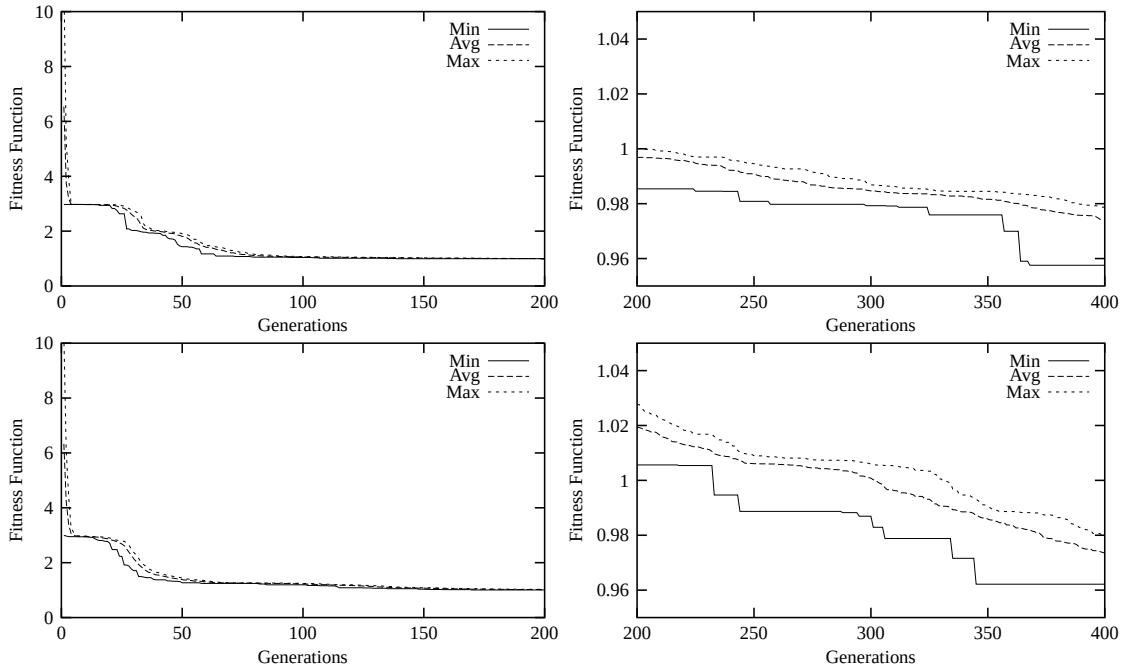


Abbildung 17: Entwicklungen der Fitnessfunktionen im Verlauf der Optimierung mit gaußverteilten Zufallszahlen (oben) und cauchyverteilten Zufallszahlen (unten)

Nachkommen durch Klonung erhält. Dieser Nachkomme wird dann, wie alle anderen Nachwuchsindividuen, mutiert. So steigt die Chance, daß sich, ausgehend vom besten Individuum, schnell eine ganze Bevölkerung im Bereich des Minimums bildet, auch wenn die restliche Bevölkerung sich zunächst noch in einem anderen Gebiet des Parameterraums befindet.

5.2 Simulated Annealing

5.2.1 Prinzip

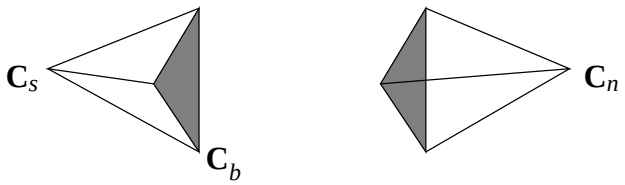
Eine andere Gruppe von Optimierungsalgorithmen sind die *Simulated Annealing* Verfahren. Sie werden ebenfalls für Probleme verwendet, bei denen die zu minimierende Funktion viele lokale Minima besitzt. Der Hintergrund dieser Methode ist die Tatsache, daß ein Metall, wenn es erhitzt und anschließend langsam abgekühlt wird, zu einem Gitter erstarrt, das den niedrigsten Energieinhalt hat. Das Abkühlen hat zur Folge, daß die Beweglichkeit der Atome mit abnehmender Temperatur ebenfalls abnimmt. Veränderungen im entstehenden Gitter, die zu einer Erhöhung der Gesamtenergie beitragen, werden so mit abnehmender Temperatur immer unwahrscheinlicher.
Übertragen auf das Problem der Minimierung einer Funktion mit mehreren Veränderlichen bedeutet dies, daß Änderungen, die zu einer Verschlechterung des Ergebnisses, d.h. zu einer Erhöhung der Bewertungsfunktion f_b führen, mit einer Wahrscheinlichkeit p akzeptiert werden, für die gilt:

$$p = \begin{cases} e^{-\frac{f_{b,neu} - f_{b,alt}}{T}} & \text{für } f_{b,neu} > f_{b,alt} \\ 1 & \text{sonst} \end{cases} \tag{5.7}$$

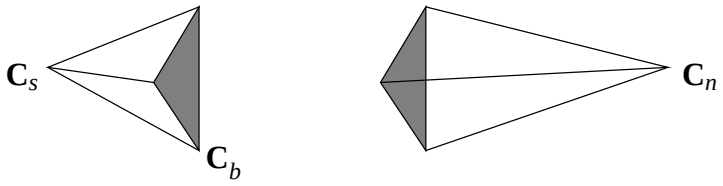
Hier sind $f_{b,alt}$ und $f_{b,neu}$ die alten und neuen Werte der Bewertungsfunktion, ihnen entsprechen in der Thermodynamik Energieniveaus für verschiedene Gitterkonfigurationen. T ist die "Temperatur", die im Laufe der Optimierung verringert wird. Sie entspricht der thermischen Energie, die in der Thermodynamik mit kT bezeichnet wird. Aus Gründen der Einfachheit wird der Faktor k hier weggelassen.
Trägt eine Änderung der Variablen zu einer Verbesserung bei, so wird sie immer akzeptiert, und dient als Start für den nächsten Schritt. Eine Verschlechterung wird mit einer Wahrscheinlichkeit akzeptiert, die aus der Differenz der Funktionswerte und der Temperatur bestimmt wird.
Es gibt viele Methoden, aus einem Parameterarray $\mathbf{C}_{alt}$ ein neues Array $\mathbf{C}_{neu}$ zu erzeugen. Die einfachste Möglichkeit besteht in der Addition von Zufallszahlen. Diese Vorgehensweise hat jedoch den Nachteil, daß der Gradient von f_b hier überhaupt nicht berücksichtigt wird. Es gibt Fälle, in denen $\mathbf{C}_{neu}$ fast immer zu einem schlechteren Ergebnis führt, auch wenn es die Möglichkeit für eine Verbesserung gibt.
Es wurde daher der Simulated Annealing Algorithmus aus [20] implementiert, der eigentlich ein Hybridverfahren aus Simulated Annealing und *Downhill Simplex* ist. Die Änderungen, d.h. die Erzeugung des Arrays $\mathbf{C}_{neu}$ wird hier nach den Regeln des Downhill Simplex Verfahren durchgeführt, welches im nächsten Kapitel beschrieben wird.

5.2.2 Das Downhill Simplex Verfahren

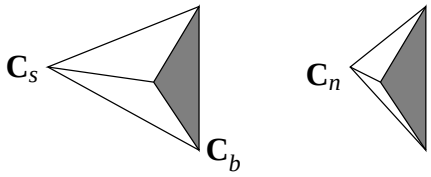
Das Downhill Simplex Verfahren ist ein lokales, gradientenorientiertes Optimierungsverfahren, welches verwendet wird, wenn kein analytischer Ausdruck für den Gradienten der Bewertungsfunktion berechnet werden kann. Ein Simplex im N-dimensionalen Raum besteht aus $N+1$ Punkten, die ein nichtverschwindendes Volumen einschließen. Im dreidimensionalen Raum z.B. ist ein Simplex eine Pyramide. Beim Downhill Simplex Verfahren wird nun in jedem Schritt versucht, den schlechtesten Punkt $\mathbf{C}_s$ zu verbessern.



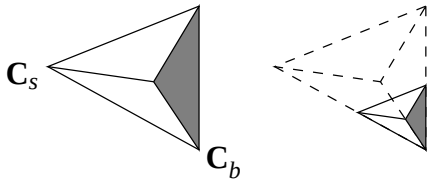
a) Spiegelung des schlechtesten Punktes an der Ebene der anderen Punkte



b) Wie a) aber mit zusätzlicher Expansion



c) Kontraktion in Richtung der Ebene der besseren Punkte



d) Kontraktion der N schlechtesten Punkte in Richtung des besten Punktes

Abbildung 18: Operationen beim Downhill Simplex Verfahren. $\mathbf{C}_s$ und $\mathbf{C}_b$ sind der schlechteste bzw. beste Punkt vor der Operation, $\mathbf{C}_n$ ist der neue Punkt

Abbildung 18 zeigt die Operationen, die hierfür zur Verfügung stehen. Die Fälle a) bis c) können durch folgende Gleichung beschrieben werden, wobei die Parameterarrays $\mathbf{C}_i$ als Vektoren im mathematischen Sinn zu interpretierten sind:

$$\mathbf{C}_n = w\mathbf{C}_s + \frac{1-w}{N-1}\sum_{i}^{i\neq s}\mathbf{C}_i, \tag{5.8}$$

wobei N die Zahl der Punkte im Simplex ist und:

$$w = \begin{cases} -1 & \text{für Fall a} \\ -2 & \text{für Fall b} \\ 0.5 & \text{für Fall c} \end{cases} \tag{5.9}$$

Für Fall d) gilt die Formel:

$$\mathbf{C}_{n,i} = \begin{cases} w\mathbf{C}_i + (1-w)\mathbf{C}_b & \text{für } i \neq b \\ \mathbf{C}_i & \text{für } i = b, \end{cases} \tag{5.10}$$

wobei der Faktor w zu 0.5 gewählt wird. In der vorliegenden Implementierung wird folgendes Schema verwendet:

- $\mathbf{C}_s$ wird an den anderen Punkten gespiegelt (Fall a in Abb. 18). Wenn $\mathbf{C}_n$ besser ist, als $\mathbf{C}_s$, wird $\mathbf{C}_s$ durch $\mathbf{C}_n$ ersetzt.
- Ist $\mathbf{C}_n$ besser als $\mathbf{C}_b$, wird eine zusätzliche Expansion versucht (Fall b in Abb. 18). Ist der neue Punkt besser als vorher, wird der neue Punkt in den Simplex eingesetzt.
- Ist das Ergebnis von Fall a schlechter als der zweitschlechteste Punkt, so wird eine Kontraktion in Richtung der besseren Punkte versucht. (Fall c in Abb. 18).
- Ist $\mathbf{C}_n$ immer noch schlechter als $\mathbf{C}_s$, wird eine Kontraktion in Richtung des besten Punktes vorgenommen (Fall d in Abb. 18).

Dieses Verfahren konvergiert normalerweise immer in Richtung des nächsten lokalen Minimums. Dort zieht sich der Simplex zusammen, bis alle Punkte innerhalb der Maschinengenauigkeit gleich werden.

5.2.3 Kombination der Verfahren

Die Erweiterung der Downhill Simplex Methode, die zum *Simulated Annealing* Verfahren führt, besteht darin, daß bei jedem Vergleich von 2 Werten von f_b exponentiell verteilte Zufallszahlen zu den Funktionswerten addiert werden. Dies bedeutet, daß ein neuer Punkt akzeptiert wird, wenn für die Funktionswerte $f_{b,alt}$ und $f_{b,neu}$ gilt:

$$f_{b,neu} - r_1 < f_{b,alt} + r_2 \tag{5.11}$$

Hier sind r_1 und r_2 exponentiell verteilte Zufallszahlen. Eine exponentiell verteilte Zufallszahl r_e wird durch folgende Transformation aus einer gleichverteilten Zufallszahl r_u erzeugt:

$$r_e = -T \ln(r_u) \tag{5.12}$$

T ist die positive Temperatur, für r_u gilt:

$$0 < r_u < 1 \tag{5.13}$$

Auch bei der anfänglichen Bestimmung von $\mathbf{C}_s$ und $\mathbf{C}_b$ werden Zufallszahlen zu den Funktionswerten addiert, d.h. daß nicht immer der schlechteste Punkt im Simplex verändert wird.
Wählt man als Temperatur Null, so werden alle Zufallszahlen ebenfalls Null und das Verfahren wird exakt zu dem *Downhill Simplex* Verfahren, welches in Abschnitt 5.2.2 beschrieben ist.

5.2.4 Senkung der Temperatur

Es gibt verschiedene Möglichkeiten für das Absenken der Temperatur (siehe [20]). In der vorliegenden Implementierung wird die Temperatur T immer nach m Schritten auf $(1-\varepsilon)T$ reduziert, wobei m und $(1-\varepsilon)$ vom Benutzer, auch während der Optimierung, verändert werden können. Diese Methode entspricht einem exponentiellen Abkühlen.
Ein Problem bei allen Simulated Annealing Verfahren ist, daß das Ergebnis prinzipiell schlechter sein kann, als der Startwert. Das Verfahren kann sogar aus einem besseren lokalen Minimum in ein schlechteres gelangen, und dort konvergieren.
Um dies zu verhindern, wird der beste Punkt, der je erreicht wurde, gespeichert. So kann man das Verfahren nach einer bestimmten Anzahl von Schritten stoppen, und ausgehend vom gespeicherten besten Punkt, neu starten. In diesem Fall werden die übrigen Punkte des Simplex dann durch Addition von cauchyverteilten Zufallszahlen aus dem einen Punkt erzeugt. Man kann auch nach einer bestimmten Zahl von Schritten die Temperatur auf den Startwert zurücksetzten.
Das Programm erlaubt alle genannten Optionen. Gute Erfahrungen wurden mit folgenden Parametern gemacht:

- Die Starttemperatur ist in der gleichen Größenordnung, wie die Bewertungsfunktion. Sie wird grob an die Bewertungsfunktion des Startkrümmers angepaßt. Übertragen auf das Ausglühen eines Metalls bedeutet dies, daß die Anfangstemperatur an die Bindungsenergie des Metalls angepaßt wird.
- Alle 10 Schritte wird die Temperatur um 20 % verringert.
- Alle 200 Schritte wird ein neuer Simplex aus dem besten bisher erreichten Punkt erzeugt.
- Alle 1000 Schritte wird die Temperatur auf den Startwert zurückgesetzt.

5.3 Test der Verfahren

Die beiden Verfahren sollen nun an einem einfachen Beispiel, bei dem eine Lösung bekannt ist, überprüft werden. Es soll ein Krümmer optimiert werden, in dem nur zwei Moden ausbreitungsfähig sind. Die ohmschen Verluste werden vernachlässigt, indem der spezifische Widerstand des Wandmaterials Null gesetzt wird. Für eine konstante Krümmung mit zwei Moden kann das System der gekoppelten Wellengleichungen analytisch gelöst werden (siehe Kapitel 3.5.3, Seite 51). Die Leistung der Nutzmode innerhalb des Krümmers wird durch Gleichung 3.62 beschrieben. Sie wird an einer Stelle z im Krümmer maximal, wenn gilt:

$$\frac{1}{2}z\sqrt{(\Delta\beta)^2+4(c_{12}C)^2} = n\pi \text{ mit } n = 0,1,2,3... \tag{5.14}$$

Der Krümmer soll einen Gesamtwinkel von 90° haben. Für die Krümmerlänge l und die Krümmung C gilt dann folgender Zusammenhang:

$$l = \frac{\pi}{2}\frac{1}{C} \tag{5.15}$$

Ein Krümmer mit konstanter Krümmung hat also am Ausgang, d.h. bei $z = l$, keine Falschmoden, wenn für die Krümmung C gilt:

$$C = \frac{1}{R} = \frac{\Delta\beta}{2n\sqrt{4 - \frac{c_{12}^2}{n^2}}} \tag{5.16}$$

In diesem Fall ist n die Anzahl der Minima der Nutzmode innerhalb des Krümmers. Ferner gilt bei einem 90°-Krümmer mit konstanter Krümmung für die Koordinaten x_l und y_l des Endpunktes:

$$x_l = y_l = R = \frac{1}{C} \tag{5.17}$$

Ein Beispiel für einen Hohlleiter mit nur 2 ausbreitungsfähigen verkoppelten Moden ist der WR 42 Hohlleiter aus Kapitel 3.5.4 (Seite 51), wenn die Frequenz auf 40 GHz verringert wird. Es wird die Bewertungsfunktion $f_b = P_{s,out}/P_{in}$ gewählt. Bei einer konstanten Krümmung wird also ein theoretischer Wert von $f_b = 0$ erreicht. Als Beispiel wurde $n = 1$ gewählt. Hieraus ergibt sich mit (5.16) und (5.17) für x_l und y_l:

$$x_l = y_l = 0.0158315\text{m}$$

Wird die Modenwandlung in einem Krümmer mit diesen Abmessungen und konstanter Krümmung mit dem vorliegenden Programm berechnet, so ergibt sich aufgrund numerischer Fehler ein Falschmodenanteil von $5.37 \cdot 10^{-11}$ % am Ausgang. Da die Bewertungsfunktion in Prozent angegeben wird, ist dies gleichzeitig der Wert für f_b in diesem Fall. Ausgehend von einem Krümmer mit einer $\sin^2$-Krümmung wurden jeweils 10 Optimierungen mit dem genetischen Algorithmus und dem Simulated Annealing Verfahren durchgeführt. Die Optimierungen wurden abgebrochen, nachdem die Bewertungsfunktion einen Wert von $5.37 \cdot 10^{-11}$ % erreicht hatte.
Beim genetischen Algorithmus wurde eine Bevölkerungszahl von $N_p = 50$ Elternindividuen gewählt. Die Parameter für die Erzeugung der Nachkommen waren so, wie in Kapitel 5.1.4 (Seite 68) beschrieben. Das beste Individuum wurde zusätzlich in jeder Generation geklont. Tabelle 3 zeigt die verwendeten Mutationsparameter. Es wurden gaußsche Zufallszahlen verwendet.

	p_m	σ_m
Schwache Mutation	50 %	0.5
Starke Mutation	50 %	10

Tabelle 3: Mutationsparameter für den genetischen Algorithmus

Tabelle 4 zeigt die Zahlen N_i der benötigten Iterationsschritte und die Zahlen N_f der Berechnungen der Bewertungsfunktion für die 10 Programmläufe.
Bei diesem Beispiel muß der genetische Algorithmus im Durchschnitt weniger Bewertungsfunktionen berechnen, um zu dem gewünschten Ergebnis zu kommen. Bei beiden Verfahren unterscheiden sich die Zahlen der benötigten Schritte bei den einzelnen Optimierungen sehr stark.

	Genetischer Algorithmus		Simulated Annealing	
	N_i	N_f	N_i	N_f
Lauf 1	31	2482	1997	3302
Lauf 2	38	3014	1970	3665
Lauf 3	17	1418	1969	3394
Lauf 4	75	5826	4891	8697
Lauf 5	133	10234	738	1345
Lauf 6	8	734	917	1661
Lauf 7	22	1798	4795	8857
Lauf 8	6	582	866	1537
Lauf 9	28	2254	911	1676
Lauf 10	34	2710	855	1582
Minimum	6	582	738	1345
Maximum	133	10234	4891	8857
Durchschnitt	39.2	3105.2	1990.9	3571.6

Tabelle 4: Benötigte Iterationsschritte und Berechnungen der Bewertungsfunktion

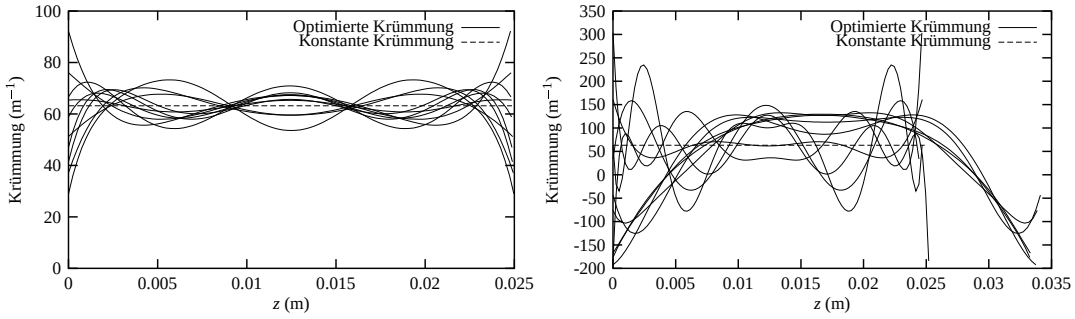


Abbildung 19: Optimierte Krümmungen mit festem Endpunkt für den genetischen Algorithmus (links) und Simulated Annealing (rechts)

Abbildung 19 zeigt die erreichten Krümmungsverläufe für die beiden Verfahren. Obwohl beide Verfahren den Zielwert für die Bewertungsfunktion immer erreicht haben, lieferte das Simulated Annealing Verfahren manchmal Krümmungen, die am Anfang und am Ende negativ sind. Abbildung 20 zeigt für eine solche Krümmung (Simulated Annealing, Lauf 1) den entsprechenden Verlauf der Hohlleiterachse.

Die Ergebnisse der Optimierungen mit dem genetischen Algorithmus unterscheiden sich wesentlich weniger von der konstanten Krümmung. Die gefundenen Krümmer unterscheiden sich in der maximalen Falschmodenleistung im Inneren, da diese in der Bewertungsfunktion nicht berücksichtigt wurde. Das beste Ergebnis lieferte hier das Simulated Annealing Verfahren beim Lauf 8. Hier ist $P_{s,max}$ nur 32.8 %. Der Vergleichskrümmer mit einer konstanten Krümmung hat eine maximale Falschmodenleistung von 45.3 %.

Die Abbildungen 21 und 22 zeigen die Krümmungsfunktionen des optimierten Krümmers und des Vergleichskrümmers sowie die korrespondierenden Verläufe der Hohlleiterach-

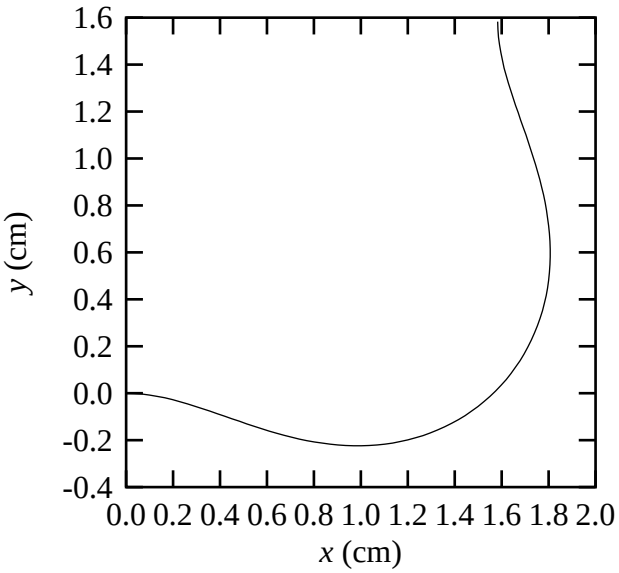


Abbildung 20: Verlauf der Hohlleiterachse beim optimierten Krümmer (Simulated Annealing, Lauf 1)

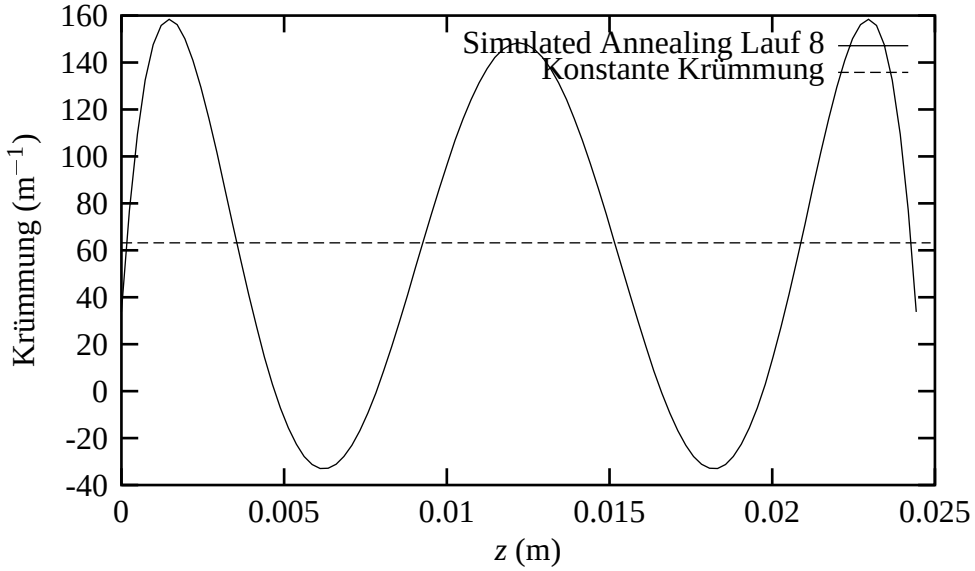


Abbildung 21: Krümmungen für den optimierten Krümmer (Simulated Annealing, Lauf 8) und den Vergleichkrümmer

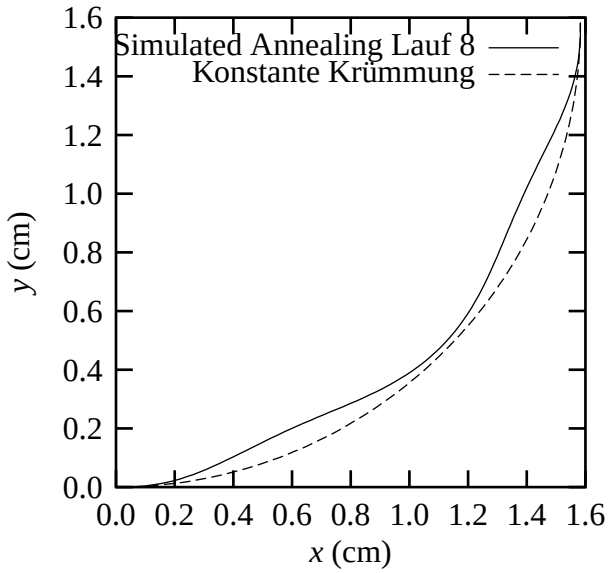


Abbildung 22: Verläufe der Hohlleiterachse für den optimierten Krümmer (Simulated Annealing, Lauf 8) und den Vergleichkrümmer

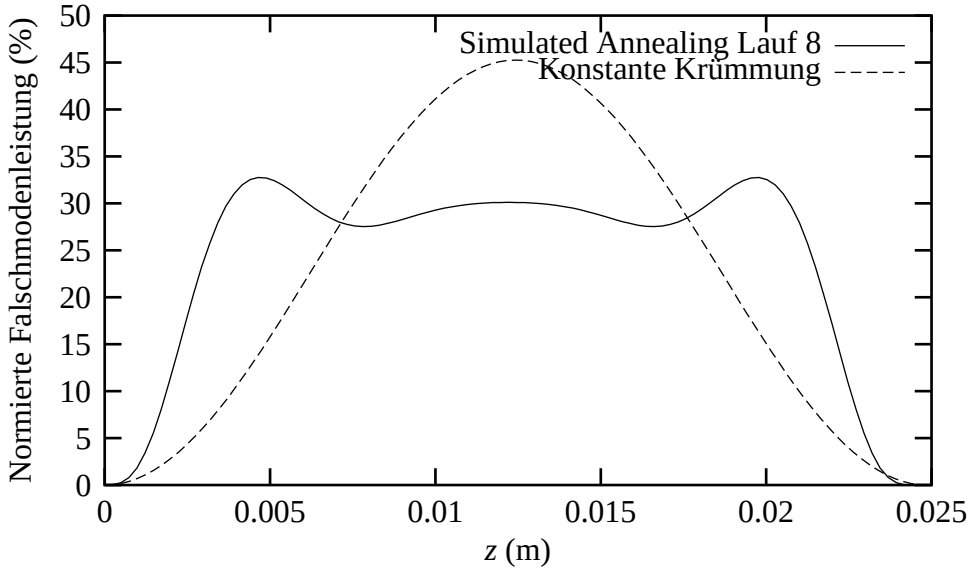


Abbildung 23: Normierte Falschmodenleistung für den optimierten Krümmer (Simulated Annealing, Lauf 8) und den Vergleichkrümmer

	Genetischer Algorithmus		Simulated Annealing	
	N_i	N_f	N_i	N_f
Lauf 1	80	6206	739	1346
Lauf 2	22	1798	888	1648
Lauf 3	32	2558	1789	3287
Lauf 4	28	2254	738	1357
Lauf 5	111	8562	880	1647
Lauf 6	62	4838	1891	3494
Lauf 7	90	6966	1659	3028
Lauf 8	465	35466	600	1047
Lauf 9	50	3926	645	1200
Lauf 10	19	1570	798	1449
Minimum	19	1570	600	1047
Maximum	465	35466	1891	3494
Durchschnitt	95.9	7414.4	1062.7	1950.3

Tabelle 5: Benötigte Iterationsschritte und Berechnungen der Bewertungsfunktion

sen. Abbildung 23 zeigt die Leistung der TE_{20}-Mode für beide Krümmer.
In diesem Beispiel haben beide Verfahren Krümmungsverläufe gefunden, die, insbesondere beim Simulated Annealing Verfahren, teilweise sehr stark von der konstanten Krümmung abweichen, d.h. das bekannte Minimum der Bewertungsfunktion wurde nicht immer gefunden.
Hier muß bemerkt werden, daß es sich bei diesem Beispiel um ein relativ einfaches Optimierungsproblem handelt, da nur die Ausgangsleistung *einer* Falschmode minimiert wurde. Die Bedingung einer vollständigen Zurückwandlung der TE_{20}-Mode in die TE_{10}-Mode kann mit vielen Krümmungen erreicht werden. In der Praxis würde man hier als weiteres Optimierungskriterium z.B. noch die maximale Falschmodenleistung innerhalb des Krümmers wählen. In den Beispielen der Kapitel 6 und 7 wurden immer mehr als ein Optimierungskriterium gewählt mit der Folge, daß verschiedene Programmläufe meist reproduzierbare Ergebnisse lieferten.
Eine andere Möglichkeit der Optimierung besteht darin, daß man keinen festen Endpunkt vorgibt, sondern die Gesamtlänge l des Krümmers konstant hält. Die Schwebungswellenlänge zwischen der TE_{10}-Mode und der TE_{20}-Mode steht nun in einem festen Verhältnis zur Gesamtlänge des Krümmers, was die Freiheit in der Wahl der Krümmung einschränkt. Der Vergleichskrümmer mit der konstanten Krümmung hat eine Länge von 2.48681 cm, die nun als feste Länge für die Optimierungen gewählt wurde. Es wurden wieder 10 Programmläufe mit beiden Verfahren durchgeführt. Tabelle 5 zeigt wieder die benötigten Iterationsschritte und die Berechnungen der Bewertungsfunktion für alle Programmläufe.
Auffallend ist hier, daß der genetische Algorithmus für diese Optimierung länger braucht, als bei einem festen Endpunkt. Das Simulated Annealing Verfahren hingegen benötigt im Durchschnitt wesentlich weniger Iterationsschritte. Abbildung 24 zeigt die gefundenen Krümmungsverläufe für die beiden Verfahren. Hier wurden keine Krümmungsfunktionen

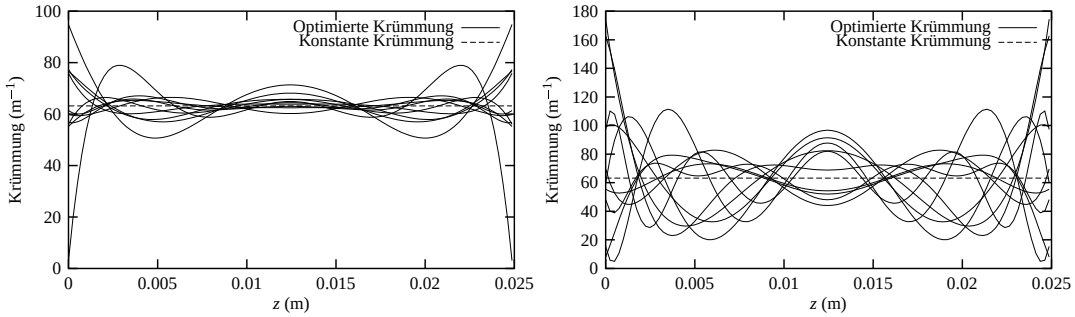


Abbildung 24: Optimierte Krümmungen mit fester Länge für den genetischen Algorithmus (links) und Simulated Annealing (rechts)

mehr gefunden, die negative Werte annehmen. Der genetische Algorithmus hat nun in einigen Programmläufen Krümmungen gefunden, die sich nur noch geringfügig von der konstanten Krümmung unterscheiden. Die Abweichungen dieser Krümmungen von der konstanten Krümmung sind in Abbildung 25 zu sehen.

Die Ergebnisse dieser Tests haben unter anderem gezeigt, daß mit den vorliegenden Programmen keine vollständig automatisierte Optimierung von beliebigen Hohlleiterkrümmern vorgenommen werden kann. Angesichts der starken Abweichungen in den Rechenzeiten ist es effizienter, mehrere kürzere Optimierungen mit einer beschränkten Zahl der Iterationsschritte durchzuführen, als bei einer Optimierung abzuwarten, bis ein bestimmter Zielwert der Bewertungsfunktion erreicht ist. Ferner sind mehrere Programmläufe erforderlich um sicherzustellen, daß die Ergebnisse einander ähnlich sind.

Oft ist auch die erforderliche Größe eines Krümmers zunächst unbekannt. Mit den Näherungsformeln für zwei Moden und konstante Krümmung kann zwar ein maximaler Falschmodenanteil innerhalb des Krümmers abgeschätzt werden, die Ergebnisse von Optimierungen sind jedoch meist wesentlich besser. Deshalb ist man auch hier auf Tests mit verschiedenen Krümmerabmessungen bzw. auf Erfahrungswerte angewiesen.

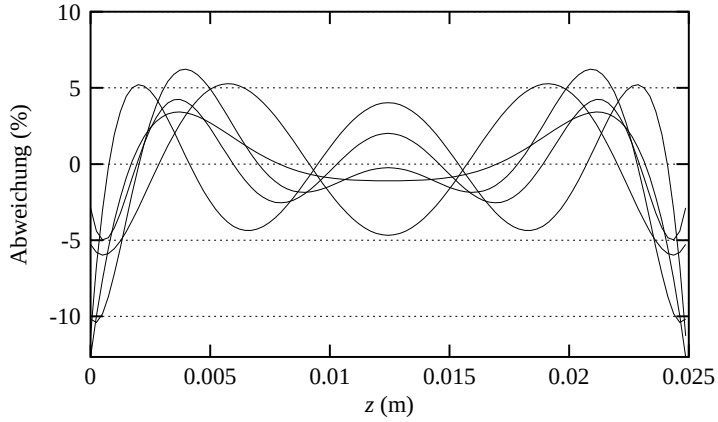


Abbildung 25: Abweichungen von der konstanten Krümmung der Programmläufe 3, 7, 8, 9 und 10 (genetischer Algorithmus)

6 Beispiel: 28 GHz TE_{01} Krümmer

6.1 Optimierung

Als Test für das Optimierungsprogramm wurde ein 28 GHz TE_{01}-Krümmer optimiert und gebaut, der in einer 10 kW Transmissionsleitung für das *Département de Recherche Fondamentale sur la Matière Condensée* der *Commissariat à l'Energie Atomique* in Grenoble/Frankreich eingesetzt werden soll [18]. Das Hohlleitersystem, das die Mikrowelle von einem Gyrotron zu einer Ionenquelle führt, benötigt neben anderen Komponenten einen 90°-Krümmer. Die Leitung besteht aus glattwandigen Hohlleitern. Da die TE_{01}-Mode mit der TM_{11}-Mode entartet und somit stark verkoppelt ist, wurde für den Krümmer ein korrugierter Hohlleiter gewählt, in dem die Entartung aufgehoben wird. Die TE_{01}-Mode selbst wird durch eine Korrugation jedoch nicht beeinflußt. Die Korrugationstiefe wurde mit in die Optimierung einbezogen.
Folgende Werte waren vorgegeben:

Winkel:	90°
Hohlleiterdurchmesser:	32.537 mm ($k \cdot a = 9.55$)

Nach einigen Testrechnungen wurde für den Endpunkt des Krümmers $x_l = y_l = 0.4$ m gewählt, da diese Abmessungen nicht zu groß für die Anlage sind und dennoch einen relativ geringen Falschmodenanteil im Inneren ermöglichen.
Es wurde ein Startkrümmer mit einer konstanten Krümmung und einer Korrugationstiefe von $0.4\frac{\lambda}{4}$ gewählt. Mit diesem einzigen *first guess* wurde eine Bevölkerung von $N_p = 50$ Elternindividuen erzeugt. Für die Mutation wurden gaußverteilte Zufallszahlen mit $\sigma_m = 0.5$ verwendet. Alle 5 Generationen wurde $\sigma_m = 10$ gewählt. Die Mutationswahrscheinlichkeit p_m betrug immer 50 %.
Für die Erzeugung von Nachwuchs wurden die Parameter aus Kapitel 5.1.4 (Seite 68) verwendet. Die Optimierung lief über 400 Generationen. Für die Modenwandlung wurden neben der TE_{01}-Mode drei primär gekoppelte Moden sowie zwei sekundär gekoppelte Moden berücksichtigt. Für die Approximation der Krümmung wurden Tschebyscheff Polynome (bis 12. Ordnung) verwendet, wobei nur gerade Koeffizienten zugelassen wurden. Da der Koeffizient nullter Ordnung nicht an die Optimierungsroutine übergeben wurde, ergab sich zusammen mit der Korrugationstiefe ein 7-dimensionaler Parameterraum für die Optimierung.
Es wurde folgende Bewertungsfunktion verwendet:

$$f_b = \frac{P_{max} + 10 \cdot P_{out}}{11 \cdot P_{in}}$$

Das bedeutet, daß die maximale Falschmodenleistung innerhalb des Krümmers gleichzeitig mit der Falschmodenleistung am Ausgang optimiert wird.
Abbildung 26 zeigt die Krümmungsverläufe des Startkrümmers und des optimierten Krümmers. Die optimierte Krümmungsfunktion hat zwei Maxima und unterscheidet sich somit grundsätzlich von allen analytischen Krümmungsfunktionen, die für Hohlleiter bisher verwendet wurden (siehe Kapitel 4.2, Seite 56). Die resultierenden Verläufe der Hohlleiterachsen sind in Abb. 27 zu sehen. Die optimierte Korrugationstiefe beträgt $0.506\frac{\lambda}{4}$.

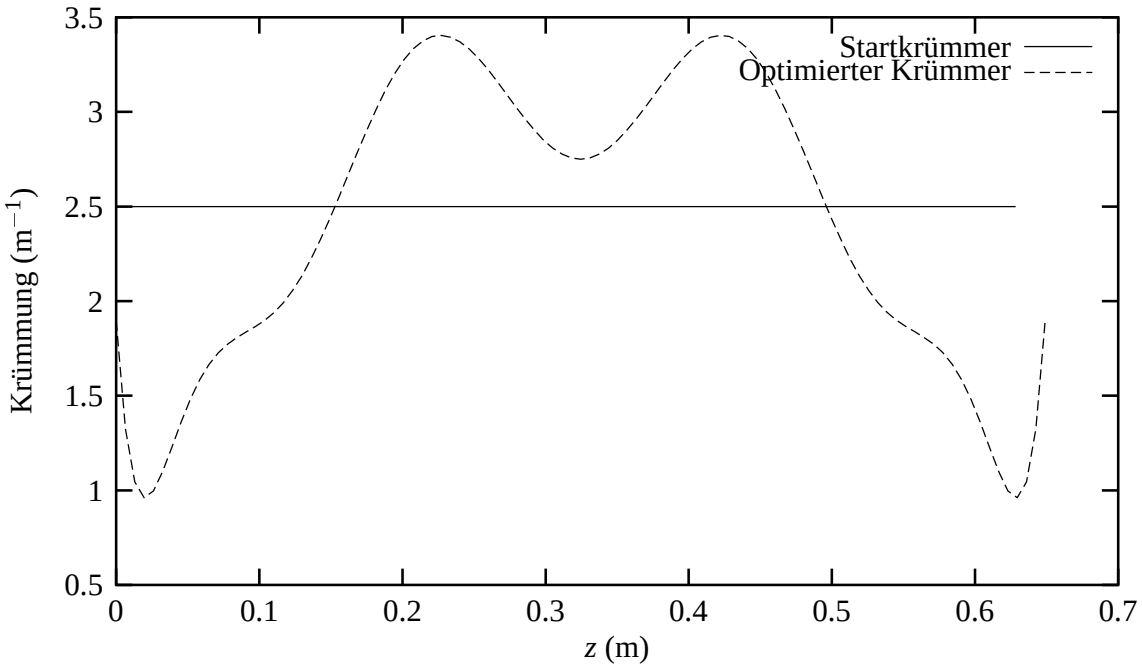


Abbildung 26: Krümmungsverläufe für den Startkrümmer und den optimierten Krümmer

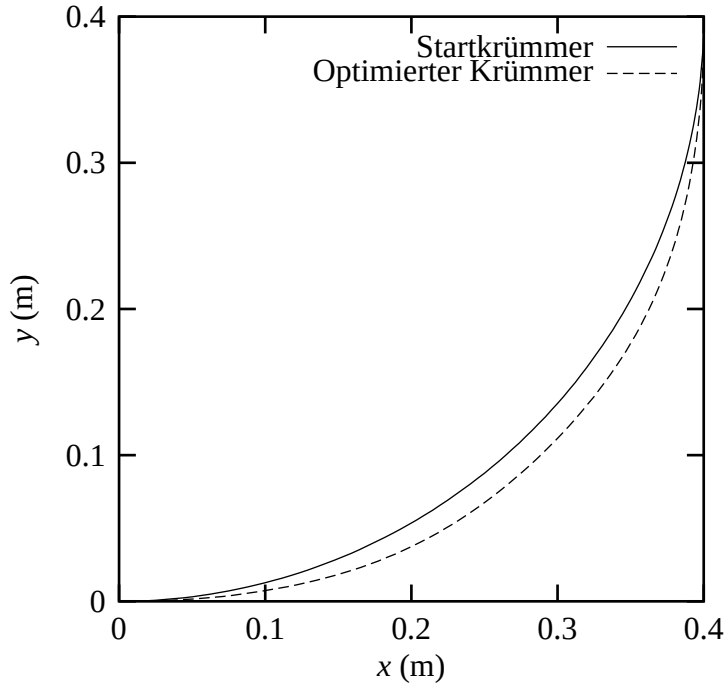


Abbildung 27: Verläufe der Krümmerachse für den Startkrümmer und den optimierten Krümmer

Abbildung 28 zeigt den Verlauf der Modenleistungen entlang des Startkrümmers. Man sieht, daß die Amplituden der beiden dominierenden Falschmoden HE_{11} und EH_{12} einen näherungsweise sinusförmigen Verlauf aufweisen. Bei nur einer dominanten Falschmode kann man einen Krümmer mit konstanter Krümmung *optimieren*, indem man die Abmessungen so wählt, daß am Ausgang die Falschmode ein Minimum hat. Wie bereits erwähnt, sind Krümmer bisher auf diese Weise dimensioniert worden.
Bei mehreren Falschmoden ist diese Methode wegen der unterschiedlichen Schwebungswellenlängen nicht möglich. Außerdem bleibt so die maximale Falschmodenleistung innerhalb des Krümmers in der gleichen Größenordnung, was in Hochleistungsanwendungen zu Problemen führen kann.

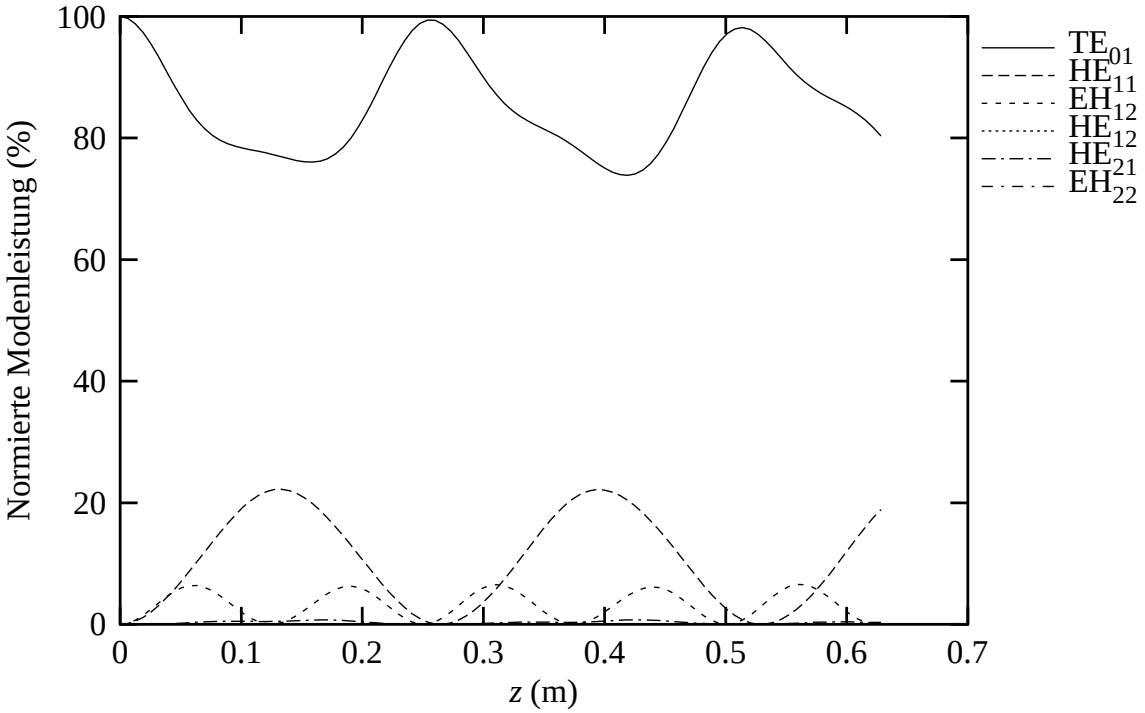


Abbildung 28: Modenspektrum des Startkrümmers

Abbildung 29 zeigt das Modenspektrum des optimierten Krümmers. Die Optimierung hat dazu geführt daß die Falschmoden am Ausgang praktisch verschwinden, bei gleichzeitig minimalem Falschmodenanteil innerhalb des Krümmers.
Es wurden auch Experimente mit anderen Startkrümmungen gemacht. Man könnte annehmen, daß die Optimierung dann besonders effizient ist, wenn man als *first guess* bereits eine sehr gute Krümmung verwendet. Versuche haben jedoch gezeigt, daß die Optimierung am besten verläuft, wenn der Algorithmus am Anfang keine Informationen über die Krümmungsfunktion hat, d.h. daß alle Optimierungsparameter für die Krümmung Null sind. Da der Koeffizient Nullter Ordnung nicht an die Optimierungsroutine übergeben wird, ist dies bei der konstanten Krümmung immer der Fall. So können am Anfang alle denkbaren Krümmungsverläufe mit der gleichen Wahrscheinlichkeit durch Mutation entstehen. Nimmt man in diesem Beispiel als *first guess* eine sin-Krümmung, bei der der

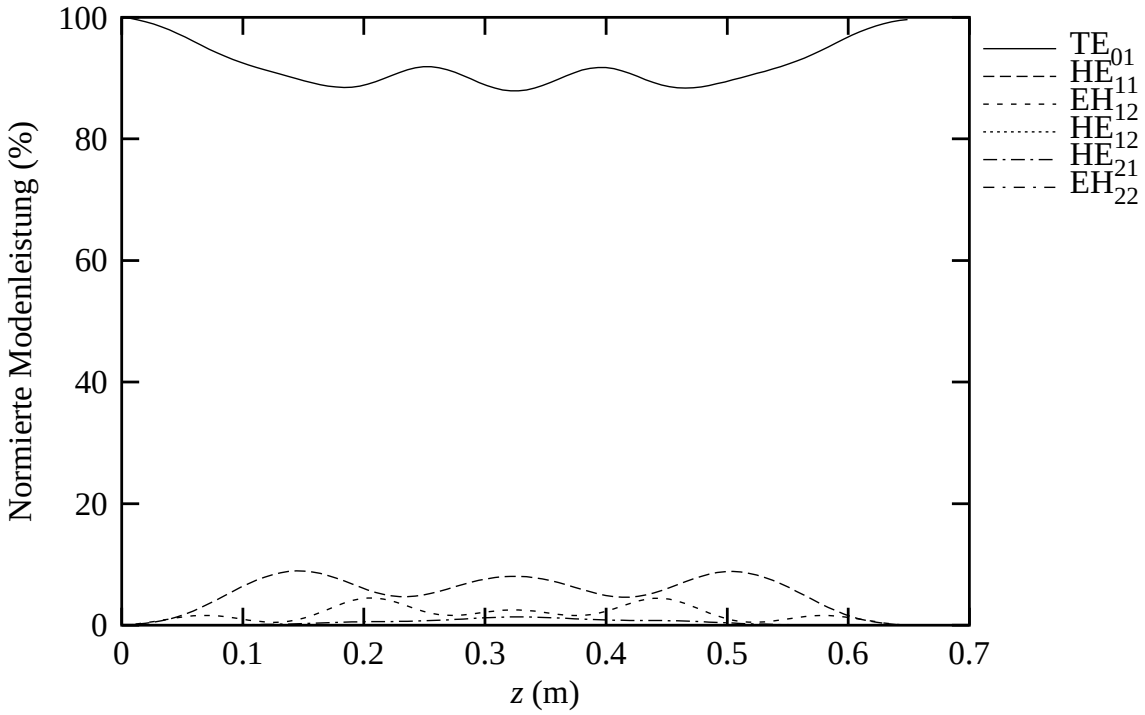


Abbildung 29: Modenspektrum des optimierten Krümmers

Tschebyscheff-Koeffizient 2. Ordnung dominant ist, so wird der Algorithmus sehr lange in einem lokalen Minimum mit einer sin-ähnlichen Krümmung verweilen, bis dann durch Mutation die Krümmung mit zwei Maxima nach Abbildung 26 entsteht. Aufgrund dieser Überlegungen, wurde als *first guess* in allen Optimierungen immer eine konstante Krümmung gewählt.

Um den Krümmer zu fertigen, wurde zunächst ein flexibler Hohlleiter mit einem sinusförmigen Korrugationsprofil durch Galvanoformung hergestellt. Da das Impedanzmodell von einem rechteckigen Korrugationsprofil ausgeht, mußte die eine äquivalente Korrugationstiefe bestimmt werden, die bei einem sinusförmigen Korrugationsprofil die gleiche Wandimpedanz hat, wie die rechteckige Korrugation mit einer Korrugationstiefe von $0.506\frac{\lambda}{4}$. Hierfür existieren Umrechnungsfaktoren (z.B. [4]) für verschiedenen Korrugationsprofile. Eine genauere Möglichkeit besteht darin, mit einem Streumatrixprogramm, welches bereits am IPF zur Verfügung stand, die Korrugationstiefe entsprechend des sinusförmigen Profils umzurechnen. Das Streumatrixprogramm rechnet mit Moden des glatten Hohlleiters, die sinusförmige Korrugation wird als eine Reihe aufeinanderfolgender Querschnittssprünge berücksichtigt [25]. Es ist nun möglich, für ein beliebiges Korrugationsprofil Eigenmodenmischungen zu finden, die durch die Korrugation nicht beeinflußt werden. Die Überlagerung der Einzelmoden einer solchen Mischung, die Moden des glatten Hohlleiters sind, ergibt dann eine Hybridmode des korrugierten Hohlleiters, wie sie auch mit dem Impedanzmodell (siehe Kapitel 2.4.1, Seite 27) bestimmt werden kann. Da für den Umrechnungsfaktor der Korrugationstiefe bei verschiedenen Hybridmoden geringfügig verschiedene Ergebnisse herauskommen, wurde die Umrechnung für die

HE_{11}-Mode, die ja die dominante Falschmode ist, durchgeführt.
In einen Aluminiumblock wurde dann ein Kanal für den flexiblen Hohlleiter gefräst, dessen Verlauf der optimierten Form entspricht. Abbildung 30 zeigt den fertigen Krümmer.

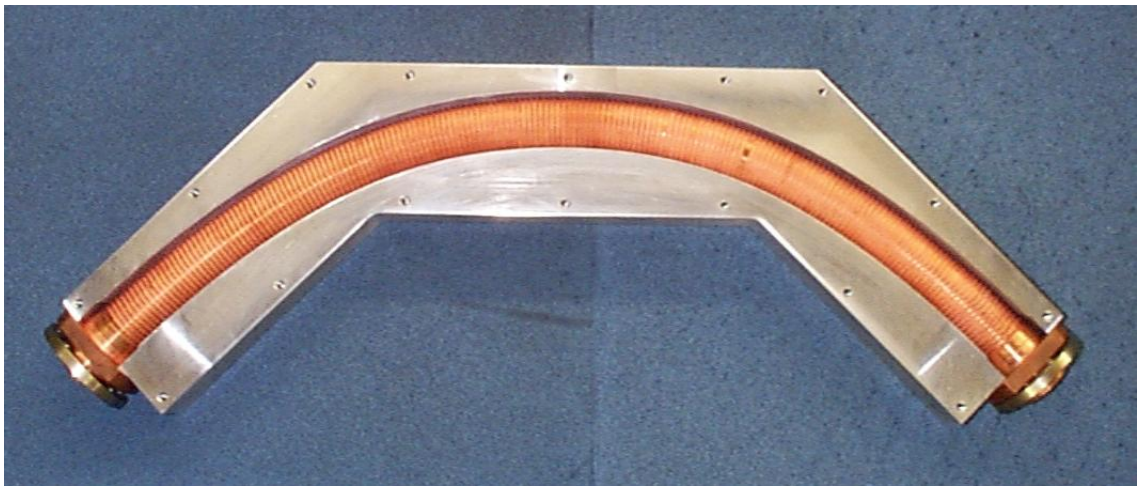


Abbildung 30: Der fertige Krümmer

6.2 Vergleich mit analytischen Krümmungen

Das Ergebnis der Optimierung ist sehr gut in bezug auf die Falschmodenleistung am Ausgang und den Falschmodenanteil innerhalb des Krümmers. Dennoch stellt sich die Frage, ob die gefundene Krümmungsfunktion besser ist, als die bisher verwendeten. Deshalb soll der optimierte Krümmer nun mit Krümmern mit analytischen Krümmungsfunktionen verglichen werden. Die Erfahrung hat gezeigt, daß es nicht möglich ist, die Korrugationstiefe und die Krümmung getrennt voneinander zu betrachten, da es zu jeder Krümmung eine andere optimale Korrugationstiefe gibt. Deshalb wurden für zwei Krümmer mit einer sin- und einer $\sin^2$-Krümmung zunächst die optimale Korrugationstiefe ermittelt. Die Abmessungen des Krümmers, d.h. die Koordinaten x_l und y_l des Endpunktes, sind bei allen Krümmern gleich. Tabelle 6 zeigt für die drei Krümmer die optimale Korrugationstiefe sowie die maximale Falschmodenleistung $P_{s,max}$ innerhalb des Krümmers und die Falschmodenleistung $P_{s,out}$ am Krümmerausgang.

	Korrugationstiefe ($\frac{\lambda}{4}$)	$P_{s,max}$ (%)	$P_{s,out}$ (%)
Optimiert	0.506	11.9	0.016
sin	0.378	20.6	0.054
$\sin^2$	0.448	21.1	0.815

Tabelle 6: Vergleich der optimierten Krümmung mit analytischen Krümmungen

Abbildung 31 zeigt die Verläufe der Falschmodenleistungen innerhalb der Krümmer. Der optimierte Krümmer hat die besten Eigenschaften in bezug auf $P_{s,max}$ und $P_{s,out}$. Ein

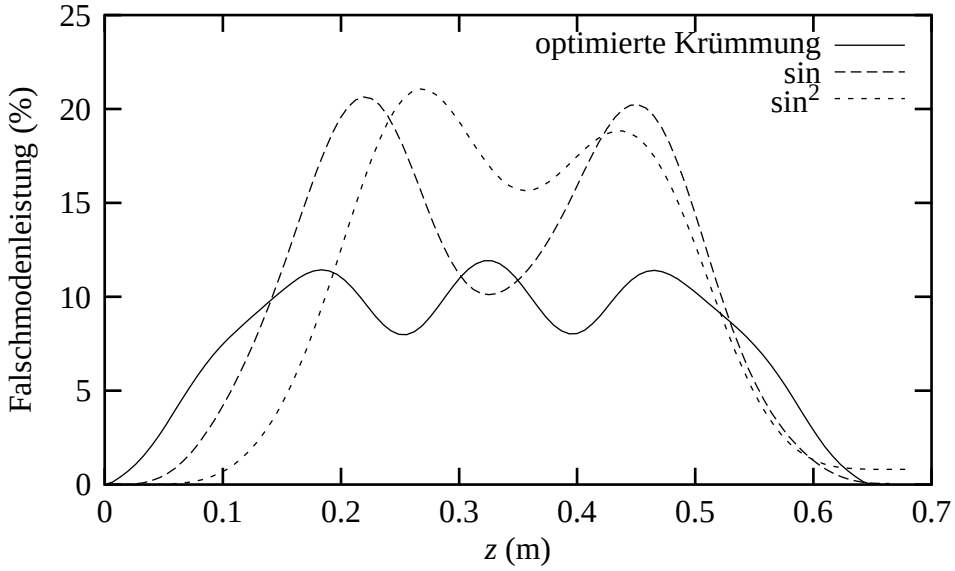


Abbildung 31: Falschmodenleistungen der Krümmer

Krümmer mit einer sin- oder sin^2-Krümmung mit vergleichbarem Eigenschaften müßte wesentlich größere Abmessungen haben, als der optimierte Krümmer.

6.3 Messung der Falschmoden

In einem Experiment wurde die Falschmodenleistung am Ausgang des Krümmers gemessen. Hierzu wurde der Ausgang des Krümmers an ein Wellenzahlspektrometer angeschlossen. Abbildung 32 zeigt die Anordnung.
Ein Wellenzahlspektrometer besteht aus einem Hohlleiter mit vielen kleinen Löchern, die wie eine Antenne wirken, die durch die Wandströme im Hohlleiter erregt wird. Jede einzelne Mode sorgt für einen Mikrowellenstrahl, der unter dem Brillouin-Winkel der Mode in den Außenraum abgestrahlt wird. Mit einer drehbaren Richtantenne können die Moden so identifiziert werden. Da sich die Wandströme verschiedener Moden gleicher Leistung in Betrag und Richtung unterscheiden, müssen zudem Eichfaktoren bestimmt werden, mit denen dann die Anteile der Modenleistungen an der Gesamtleistung ermittelt werden können. Um alle Moden zu erfassen, müssen vom ausgekoppelten Feld müssen beide Polarisationsrichtungen gemessen werden [12].
So erscheinen TE_{0m}-Moden z.B. nur dann im Spektrum, wenn die Antenne die Komponente des elektrischen Feldes aufnimmt, welche senkrecht zur *k*-Ebene ist. Um auch die Spektren der Moden aufzunehmen, die bezüglich der Krümmungsebene kreuzpolarisiert sind, wurde das Wellenzahlspektrometer um 90° gedreht. So ist es gut möglich, die einzelnen Keulen zu identifizieren. Eine Keule, die in Kreuz- und Kopolarisation gleich stark ist, kann z.B. nur zu einer Mode gehören, deren Azimutalindex gerade ist.
Um den Einfluß des Meßaufbaus auf das Modenspektrum zu untersuchen, wurden alle Messungen auch ohne eingebauten Krümmer durchgeführt.
Abbildung 33 zeigt das gemessene Spektrum für $E \perp k$ am Krümmerausgang,

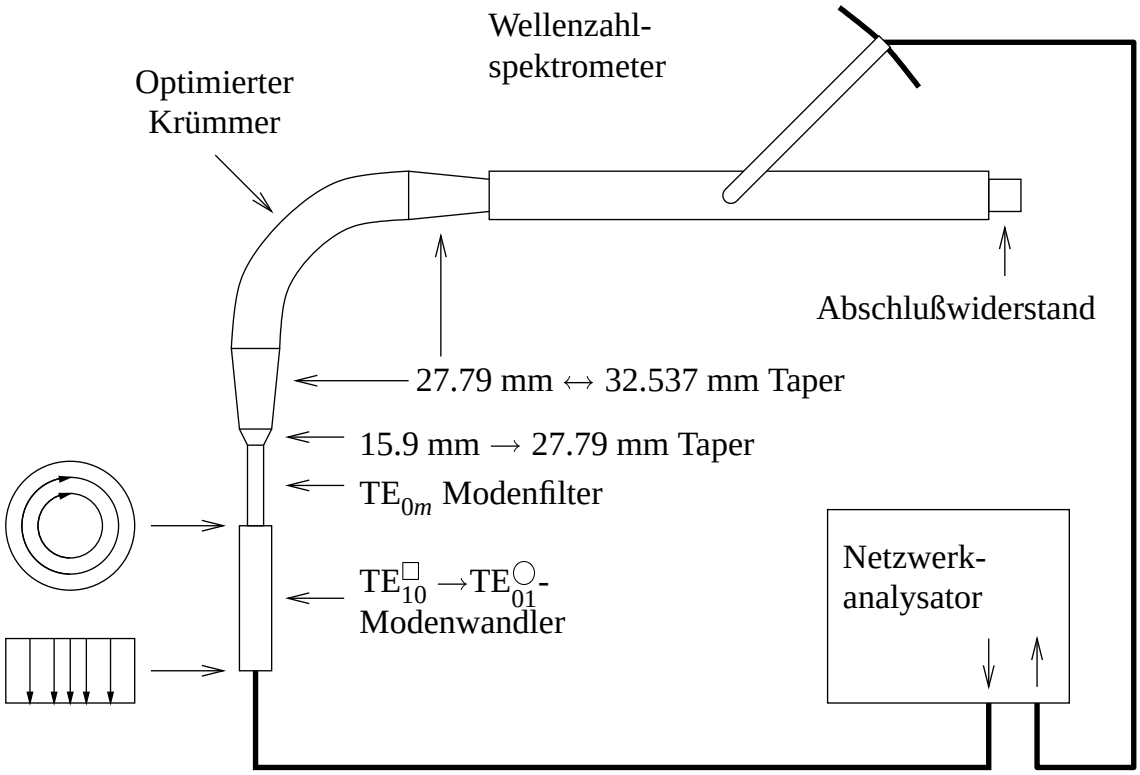


Abbildung 32: Anordnung zur Messung des Modenspektrums am Ausgang des optimierten Krümmers

Abbildung 34 zeigt das Modenspektrum ohne Krümmer. Die Spektren für $E \parallel k$ sind in den Abbildungen 35 (mit Krümmer) und 36 (ohne Krümmer) zu sehen.

In den Diagrammen sind auch relative Koppelkoeffizienten eingetragen. Da die TE_{01} Mode im Vergleich zu den meisten anderen Moden sehr geringe Wandströme hat, wird sie sehr schwach ausgekoppelt. Von den Amplituden der Falschmoden muß daher der relative Koppelkoeffizient von der Amplitude subtrahiert werden. Tabelle 7 zeigt eine Auflistung aller wichtigen Modenamplituden. Eine Unterscheidung zwischen kreuz- und kopolarisierten Moden wird nur bei Moden mit Azimutalindex 1 gemacht. Die kreuzpolarisierten Moden werden z.B. mit TE_{12}^{+} bezeichnet. Zudem sind die korrespondierenden Moden des korrugierten Hohlleiters angegeben, die innerhalb des Krümmers existieren.

In Abbildung 33 sieht man einen recht starken TE_{02}-Anteil, der theoretisch durch Modenwandlungen innerhalb des Krümmers entstehen kann. Wie man in Abbildung 34 sehen kann, tritt diese Mode aber auch ohne Krümmer auf. Deshalb ist es wesentlich wahrscheinlicher, daß die TE_{02}-Mode durch primäre Kopplung in den Querschnittstapern entsteht, da die TE_{01}-Mode und die TE_{02}-Mode bei Querschnittsänderungen direkt miteinander verkoppelt sind.

Die gemessene Leistung der TM_{11}-Mode, die der HE_{11}-Mode des korrugierten Hohlleiters entspricht, ist etwas größer, als in der Rechnung. Man kann jedoch auch hier sehen, daß die TM_{11}-Mode ohne Krümmer existiert (siehe Abb. 36). Die TE_{01}-Mode und die TM_{11}-Mode sind im glatten Rundhohlleiter entartet. Das bedeutet, daß bereits kleinste

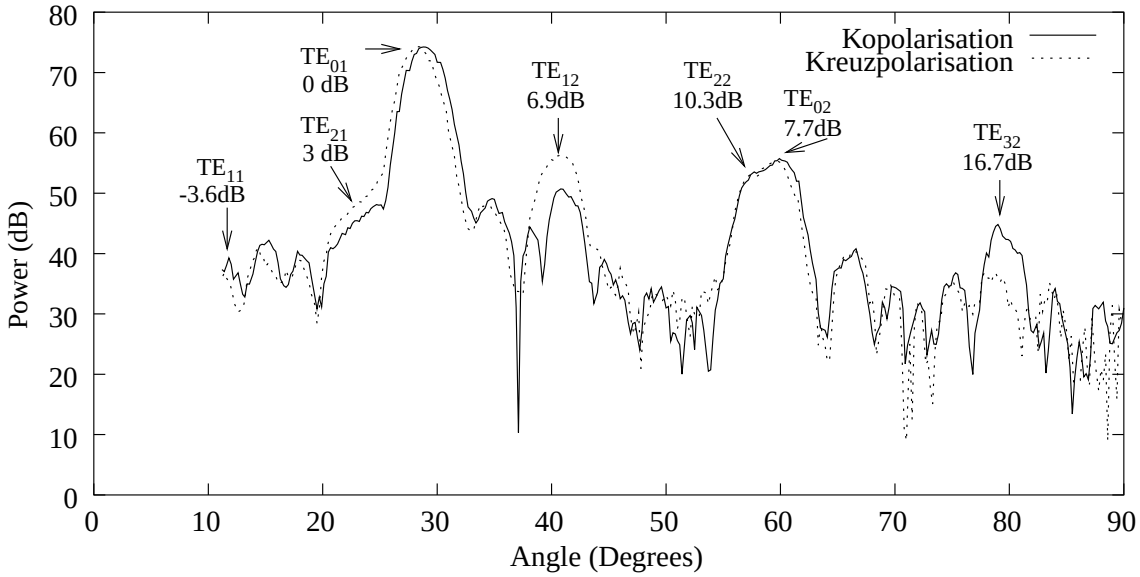


Abbildung 33: Gemessenes Modenspektrum am Krümmerausgang für $E \perp k$

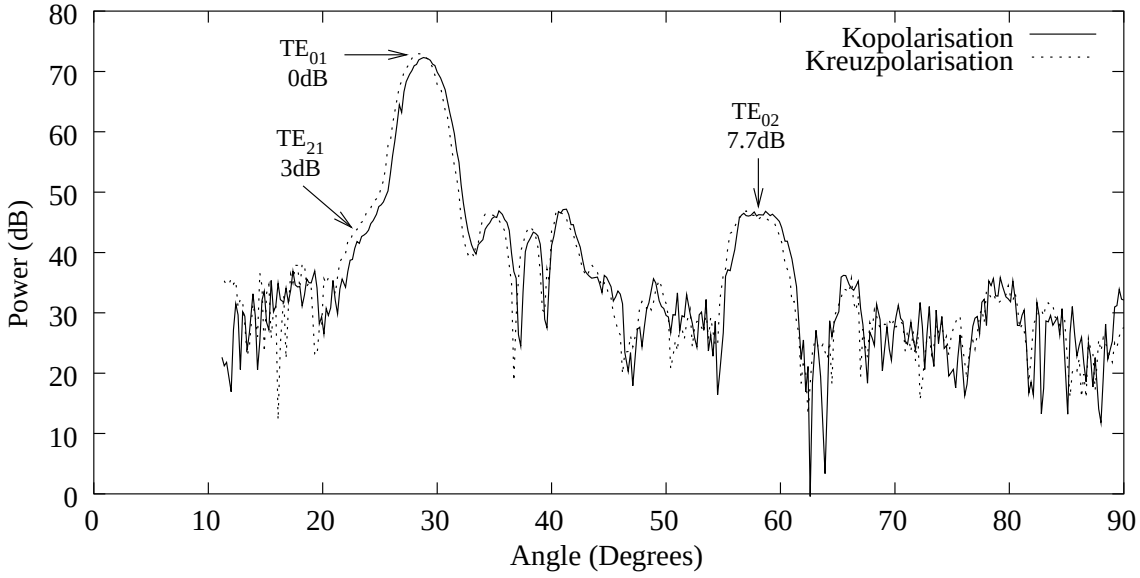


Abbildung 34: Gemessenes Modenspektrum ohne Krümmer für $E \perp k$

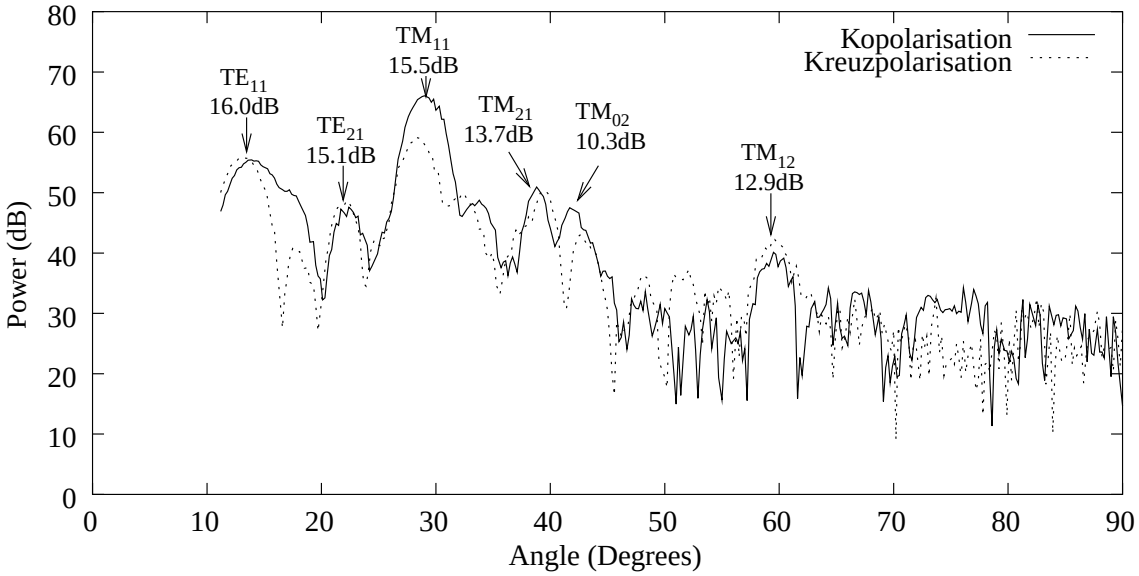


Abbildung 35: Gemessenes Modenspektrum am Krümmerausgang für $E \parallel k$

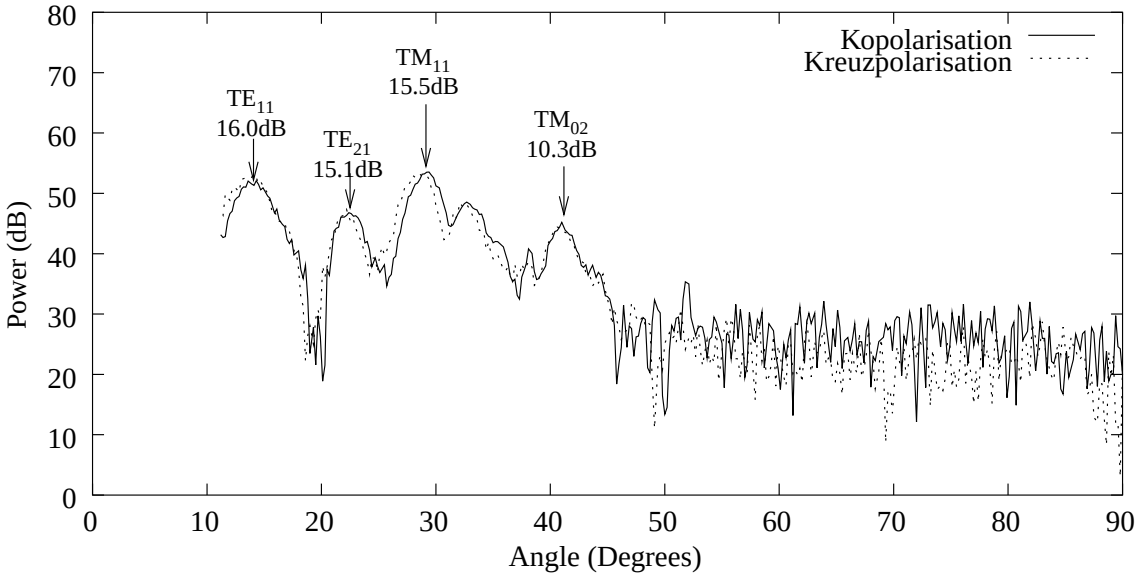


Abbildung 36: Gemessenes Modenspektrum ohne Krümmer für $E \parallel k$

Geometriestörungen eine Modenwandlung verursachen können.
Die Messung lieferte insgesamt einen größeren Falschmodenanteil als die Rechnung, wobei sich gezeigt hat, daß einige Falschmoden auch ohne Krümmer existieren.
Eine weitere Ursache für die Abweichung sind die Näherungen, die durch das Impedanzmodell gemacht werden. Es wurde ein sinusförmiges Korrugationsprofil gewählt, da ein Rechteckprofil, von dem das Impedanzmodell ausgeht, schwerer herzustellen ist. Außerdem besteht bei einer rechteckförmigen Korrugation wegen der scharfen Kanten die Gefahr von Durchschlägen. Es ist nicht möglich, mit einem sinusförmigen Korrugationsprofil die vom Impedanzmodell geforderte Oberflächenimpedanz für alle Moden gleichermaßen zu erreichen. Der hier gemachte Fehler wirkt sich auf die Koppelkoeffizienten und die Phasenkonstanten aus. Da jedoch auch in der Literatur Allgemeine Umrechnungsfaktoren für die Korrugationstiefen bei verschiedenen Korrugationsprofilen gibt [4] [26], ist der zu erwartende Fehler eher gering.
Ferner gibt es aufgrund von Fertigungstoleranzen Fehler im Krümmungsverlauf. Letztere können nur schwer abgeschätzt werden, da der mathematische Zusammenhang zwischen Abweichungen der Fräsmaschine und den resultierenden Tschebyscheff-Koeffizienten der Krümmungsfunktion unbekannt ist.
Beim Wellenzahl-Spektrometer handelt es sich um ein offenes System, welches immer empfindlich gegenüber Streustrahlung ist. Auch hier sind Fehler in den gemessenen Amplituden möglich.
Insgesamt ist jedoch ein Falschmodenanteil von 1.33 % für diese Anwendung vertretbar. Der Startkrümmer mit konstanter Krümmung hatte am Ausgang einen Falschmodenanteil von 19.3 %, was bedeutet, daß der optimierte Krümmer wesentlich besser ist.

Mode (glatt)	Mode (korrugiert)	Amplitude	Koppel-faktor	Normierte Leistung (%) gemessen	Normierte Leistung (%) berechnet
TE_{01}	TE_{01}	74.2 dB	0.0 dB	98.67	99.63
TM_{11}	HE_{11}	66.1 dB	15.5 dB	0.43	$1.39 \cdot 10^{-4}$
TE_{02}	TE_{02}	55.8 dB	7.7 dB	0.24	
TE_{12}	EH_{12}	56.4 dB	6.9 dB	0.33	$2.61 \cdot 10^{-4}$
TM_{11}^{+}	HE_{11}^{+}	59.1 dB	15.5 dB	0.09	
TE_{12}^{+}	EH_{12}^{+}	50.9 dB	6.9 dB	0.09	
TE_{22}	EH_{22}	53.0 dB	10.3 dB	0.06	$4.83 \cdot 10^{-5}$
TE_{11}	EH_{11}	55.9 dB	16.0 dB	0.03	
TM_{21}	HE_{21}	50.9 dB	13.7 dB	0.02	$1.50 \cdot 10^{-2}$
TE_{21}	EH_{21}	48.6 dB	15.1 dB	$8.40 \cdot 10^{-3}$	
TM_{12}^{+}	HE_{12}^{+}	42.4 dB	12.9 dB	$3.34 \cdot 10^{-3}$	
TE_{32}	EH_{32}	44.8 dB	16.8 dB	$2.37 \cdot 10^{-3}$	
TM_{12}	HE_{12}	40.7 dB	12.9 dB	$2.26 \cdot 10^{-3}$	$1.44 \cdot 10^{-4}$

Tabelle 7: Gemessene Modenamplituden am Krümmerausgang

7 Vergleich der Verfahren

Da beide implementierten Verfahren mit Zufallszahlen arbeiten, und die Zufallszahlengeneratoren bei jedem Programmlauf von der Systemzeit initialisiert werden, ist ein exakter Vergleich der Verfahren schwierig.
Die Optimierung läuft bei beiden Algorithmen in der Tat jedesmal anders ab. Wenn aber bei jedem Programmlauf die gleiche Krümmungsfunktion reproduziert werden kann, dann erhöht dies die Gewißheit, daß es sich hier um ein globales Minimum der Bewertungsfunktion handelt.
Ein Beispiel für eine gut reproduzierbare Optimierung ist der 28 GHz TE_{01} Krümmer aus Kapitel 6.

7.1 28 GHz TE_{01} Krümmer

Der Krümmer aus Kapitel 6 (Seite 84) wurde optimiert und gebaut, als das Simulated Annealing Verfahren noch nicht implementiert war.
Die Optimierung mit dem genetischen Algorithmus wurde sehr oft wiederholt, weshalb für dieses spezifische Problem gewisse Erfahrungswerte vorliegen. Die Bewertungsfunktion erreicht bei fast jeder Optimierung einen Wert von unter 1 %. Die Krümmungsfunktion hat dann immer den gleichen prinzipiellen Verlauf mit zwei lokalen Maxima (siehe Abb. 26 auf Seite 85). Dieses Beispiel ist deshalb gut geeignet, um die beiden Verfahren, den genetischen Algorithmus und Simulated Annealing, zu vergleichen.
Es wurden beide Programme mit gleichen Parametern 10 mal gestartet. Als Abbruchbedingung wurde ein erreichter Wert von 1 für die Bewertungsfunktion gewählt.
Beim Simulated Annealing Verfahren wurde eine Anfangstemperatur von 2 eingestellt, die alle 10 Schritte um 20 % verringert wurde. Alle 200 Schritte wurde der Simplex ausgehend vom besten bisher erreichten Punkt neu initialisiert. Alle 1000 Schritte wurde zusätzlich die Temperatur auf den Anfangswert zurückgestellt.
Die Bevölkerungszahl beim genetischen Algorithmus betrug $N_p = 50$ Elternindividuen. Als Parameter für die Erzeugung der Nachkommen wurden die in Kapitel 5.1.4 (Seite 68) angegebenen Werte verwendet. Das beste Individuum wurde zusätzlich in jeder Generation geklont. Es wurde eine Mutation mit gaußschen Zufallszahlen gewählt; Tabelle 8 zeigt die verwendeten Parameter. Die starke Mutation fand alle 5 Generationen statt. Es hat sich in Experimenten gezeigt, daß die Effizienz wesentlich gesteigert werden kann, wenn man die Mutationsintensität verringert, sobald anzunehmen ist, daß das globale Minimum bereits erreicht ist, d.h. daß keine globale Suche mehr erforderlich ist. Die geringere Mutationsintensität begünstigt dann die Konvergenz zum Tiefpunkt, da die Nachkommen nicht mehr so stark gestreut werden, daß sie den Bereich des lokalen Minimums verlassen. Deshalb wurden die Mutationsparameter angepaßt, sobald ein Wert von 1.1 % der Bewertungsfunktion erreicht war. Der Wert für f_b, bei dem die Mutationsparameter anzupassen sind, kann nur experimentell ermittelt werden. Er kann als oberster Punkt des globalen Minimums der Bewertungsfunktion, der unterhalb aller anderen lokalen Minima liegt, angesehen werden. Das bedeutet, daß nach Erreichen dieses Wertes die Mutation nur noch die Konvergenz zum Tiefpunkt begünstigten soll.

In diesem Beispiel wurden mehrere Optimierungen durchgeführt, wobei sich herausstellte, daß die Krümmungsfunktionen aller Krümmer, die eine Bewertungsfunktion von unter 1.1 % haben, bereits den prinzipiellen Verlauf des optimierten Krümmers aus Kapitel 6.1 mit zwei Maxima haben.

	$f_b \geq 1.1\%$		$f_b < 1.1\%$	
	Schwach	Stark	Schwach	Stark
p_m	20 %	50 %	20 %	50 %
σ_m	0.5	1.0	0.05	0.1

Tabelle 8: Mutationsparameter beim genetischen Algorithmus

Tabelle 9 zeigt die Zahl N_i der Iterationsschritte und die Zahl N_f der Berechnungen der Bewertungsfunktion für alle Programmläufe.

	Genetischer Algorithmus		Simulated Annealing	
	N_i	N_f	N_i	N_f
Lauf 1	122	9398	1523	2615
Lauf 2	205	15706	653	1128
Lauf 3	4054	308230	1242	2100
Lauf 4	798	60774	3702	6546
Lauf 5	222	16998	662	1141
Lauf 6	184	14110	2254	3863
Lauf 7	2108	160334	2659	4679
Lauf 8	1009	76810	634	1089
Lauf 9	1129	85930	659	1127
Lauf 10	258	19734	554	950
Minimum	122	9398	554	950
Maximum	4054	308230	3702	6546
Durchschnitt	1008.9	76802.4	1454.2	2523.8

Tabelle 9: Benötigte Iterationsschritte und Berechnungen der Bewertungsfunktion

Am Ende der Optimierung, wenn das endgültige Minimum bereits erreicht ist, hat der verwendete Simulated Annealing Algorithmus den Vorteil, daß der Gradient der Bewertungsfunktion, insbesondere bei niedrigen Temperaturen, durch den enthaltenen Downhill Simplex Algorithmus berücksichtigt wird, was beim genetischen Algorithmus nicht der Fall ist.
Beim genetischen Algorithmus kann gesagt werden, daß die Optimierung immer interaktiv erfolgen sollte. Der Verlauf sollte beobachtet werden damit die Mutationsparameter angepaßt werden können, wenn das Verfahren bei einem lokalen Minimum stehenbleibt. So sollte es in der Praxis nie vorkommen, daß die Optimierung so lange dauert, wie der Programmlauf 3 beim genetischen Algorithmus.
Eine gewisse Automatisierung könnte dadurch erreicht werden, daß man nach einer bestimmten Anzahl von erfolglosen Generationen, d.h. wenn keines der Nachkommen bes-

ser, als das schlechteste Elternindividuum ist, entweder die Mutationsparameter verändert, oder die gesamte Bevölkerung, ausgehend vom besten Individuum neu initialisiert. Beim Simulated Annealing Verfahren ist ein ähnlicher Mechanismus durch die Neuinitialisierung des Simplex nach 200 Schritten bereits realisiert. Dennoch zeigen die Beispiele, daß der genetische Algorithmus auch ohne Anpassung der Parameter immer den Zielwert der Bewertungsfunktion erreicht, auch wenn er dafür sehr viele Generationen benötigt.
Die Ergebnisse der Optimierungen sind in Abbildung 37 für beide Verfahren zu sehen. Wie man sieht, haben alle Krümmungen den gleichen prinzipiellen Verlauf mit zwei Maxima. Auch die ansteigenden Flanken an den Rändern tauchen immer auf. Sie sind offenbar wichtig, um die einfallende TE_{01}-Mode in eine Art Eigenmode für den gekrümmten Hohlleiter umzuwandeln.

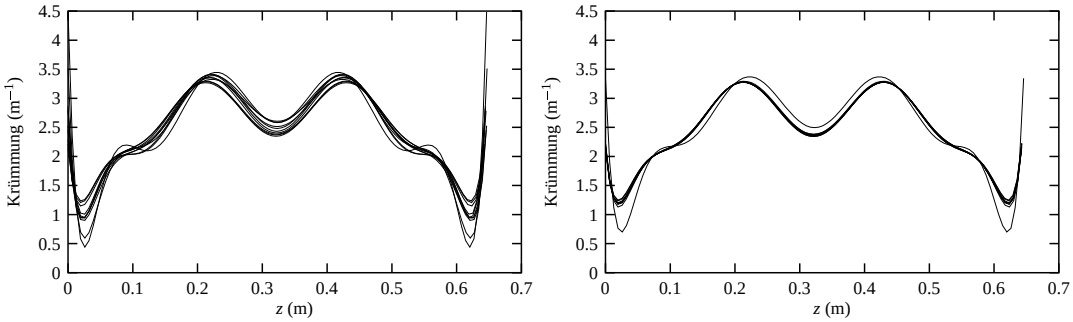


Abbildung 37: Optimierte Krümmungsverläufe für Simulated Annealing (links) und den genetischen Algorithmus (rechts)

Bei den Optimierungen, die sehr viele Schritte benötigt haben, hatte die Krümmung des besten Krümmers oft bereits zwei Maxima, die ansteigenden Flanken an den Rändern waren jedoch noch nicht vorhanden, was zu einem höheren Falschmodenanteil innerhalb des Krümmers führte. Es scheint hier ein schlechteres lokales Minimum vorzuliegen, in dem die Optimierungsalgorithmen sehr lange verweilten.
Bei den schnell verlaufenden Optimierungen fand der Algorithmus bereits am Anfang einen Krümmungsverlauf mit zwei Maxima, der schon die ansteigenden Flanken hatte.
Man kann auch erkennen, daß sich die Krümmungen bei Simulated Annealing Verfahren stärker voneinander unterscheiden, als beim genetischen Algorithmus.

7.2 70 GHz TE_{01} - HE_{11} Modenwandler

Ein weitaus schwierigeres Optimierungsproblem ist ein schlangenartig gekrümmter Modenwandler, wenn als *first guess* ein gerader Hohlleiter gewählt wird. Da in einem geraden Hohlleiter keine Modenwandlung stattfindet, handelt es sich um den denkbar schlechtesten Startwert.
Ein Modenwandler wird prinzipiell analog zu einem Krümmer optimiert. Der einzige Unterschied besteht darin, daß die gewünschte Ausgangsmode als Nutzmode definiert wird. Die Eingangsmode ist eine Falschmode, die am Eingang 100 % der Gesamtleistung hat. Deshalb ist die maximale Falschmodenleistung $P_{s,max}$ in einem Modenwandler immer genau 100 %, weshalb sie in der Bewertungsfunktion nicht berücksichtigt wird. Eine

wichtige Größe ist jedoch die ohmsche Verlustleistung P_l. Sie wird geringer, wenn der Leistungsanteil höherer, verlustreicher Moden minimiert wird.
Es soll ein 70 GHz TE_{01}-HE_{11}-Modenwandler optimiert werden. Um eine HE_{11}-Mode aus einer TE_{01}-Mode zu gewinnen, wurde früher die TE_{01} mit einem glattwandigen Wandler in eine TE_{11}- oder TM_{11}-Mode konvertiert. Diese wurde dann in einem Hohlleiter mit langsam zu- oder abnehmender Korrugationstiefe in die gewünschte HE_{11}-Mode gewandelt [24].
Eine andere Möglichkeit besteht darin, die TE_{01}-Mode in einem gekrümmten korrugierten Hohlleiter direkt in die HE_{11}-Mode umzuwandeln [14]. Da diese Moden ohnehin relativ stark verkoppelt sind, kann ein solcher Wandler sehr einfach entworfen werden, solange es keine weiteren dominanten Moden gibt. Hier sollen die gleichen Hohlleiterdaten verwendet werden wie in [14]. In diesem Fall hat der Hohlleiter einen Durchmesser von 27.79 mm, was eine relativ starke Überdimensionierung bedeutet ($k \cdot a = 40.77$). Dementsprechend müssen auch viele Moden berücksichtigt werden, was sowohl die Rechenzeit erhöht als auch die Optimierung erschwert.
Wird eine rotationssymmetrische HE_{11}-Mode am Ausgang gewünscht, so ist natürlich eine Korrugationstiefe von $\frac{\lambda}{4}$ optimal. Bei dieser Korrugationstiefe sind jedoch die TE_{01}-Mode und HE_{21}-Mode fast entartet, was zur Folge hat, daß gleichzeitig mit der TE_{01}-HE_{11}-Wandlung auch eine HE_{11}-HE_{21}-Wandlung stattfindet. Versuche haben gezeigt, daß in diesem Fall kein Modenwandler mit einer vernünftigen Länge optimiert werden kann. Wesentlich bessere Ergebnisse lassen sich mit einer Korrugationstiefe von $0.4\,\frac{\lambda}{4}$ erreichen. Tabelle 10 zeigt die Schwebungswellenlängen und die Koppelkoeffizienten für die Korrugationstiefen $\frac{\lambda}{4}$ und $0.4 \cdot \frac{\lambda}{4}$.

Korrugationstiefe		$\frac{\lambda}{4}$	$0.4 \cdot \frac{\lambda}{4}$
Schwebungswellenlänge (m)	TE_{01}-HE_{11}	0.40	0.45
	TE_{01}-HE_{21}	97.64	1.44
	HE_{11}-HE_{21}	0.40	0.34
Krümmungskoppelkonstante	TE_{01}-HE_{11}	4.72	4.94
	HE_{11}-HE_{21}	4.66	4.42

Tabelle 10: Schwebungswellenlängen und Krümmungskoppelkonstanten der TE_{01}-, HE_{11}- und HE_{21}-Moden

Bei einer Korrugationstiefe von $\frac{\lambda}{4}$ haben die TE_{11}-Mode und die HE_{21}-Mode eine sehr große Schwebungswellenlänge. Ferner sind die Krümmungskoppelkonstanten $c_{(TE_{01} \leftrightarrow HE_{11})}$ und $c_{(HE_{11} \leftrightarrow HE_{21})}$ fast gleich. Das bedeutet, daß immer ein beträchtlicher Teil der Leistung, die von der TE_{01}-Mode in die HE_{11}-Mode gekoppelt wird, durch die HE_{11}-HE_{21}-Kopplung in die HE_{21}-Mode gelangt, da die Bedingungen für die HE_{11}-HE_{21}-Wandlung fast die gleichen sind, wie für die TE_{01}-HE_{11}-Wandlung.
Wird $0.4 \cdot \frac{\lambda}{4}$ als Korrugationstiefe gewählt, so ist die Schwebungswellenlänge zwischen der TE_{01}-Mode und der HE_{11}-Mode wesentlich geringer. Ferner ist die Koppelkonstante für die erwünschte TE_{01}-HE_{11}-Wandlung etwas größer, die Koppelkonstante für die parasitäre HE_{11}-HE_{21}-Wandlung ist etwas geringer. Die ohmsche Dämpfung der HE_{11}-Mode

beträgt in diesem Fall nach der Formel von Doane [5] nur 0.022 dB/m. In einem entsprechenden glatten Hohlleiter mit den sonst gleichen Daten ist die Dämpfung der TE_{11}-Mode 0.099 dB/m, die TM_{11}-Mode wird sogar mit 0.2364 dB/m gedämpft. Ein korrugierter $TE_{01} \rightarrow HE_{11}$-Wandler mit einer Korrugationstiefe von 0.4 $\frac{\lambda}{4}$ ist also, insbesondere bei hohen Leistungen, günstiger, als ein glattwandiger TE_{01}-TE_{11}- oder TE_{01}-TM_{11}-Wandler. Die Gesamtlänge l des Wandlers beträgt 1.5 m. Die Bewertungsfunktion lautet:

$$f_b = \frac{P_l + P_{s,out}}{2 \cdot P_{in}}$$

Die beiden Forderungen, geringe Verluste und eine hohe Modenreinheit am Ausgang, widersprechen sich teilweise, da eine effektive Modenwandlung oft über höhere Moden geht, die dann auch höhere Verluste haben. Durch die Berücksichtigung der Verlustleistung werden die Programme *gezwungen*, eine Modenwandlung zu wählen, an der möglichst wenig höhere Moden beteiligt sind.
Wie einige vorausgehende Experimente ergaben, ist eine Darstellung der Krümmung mit Tschebyscheff-Polynomen besser, da die Darstellung des optimalen Krümmungsverlaufs durch eine Fourierreihe wesentlich mehr Koeffizienten benötigt, als bei einer Tschebyscheff-Reihe.
Die Programme wurden nach 10000 Berechnungen der Bewertungsfunktion abgebrochen. Das Vergleichskriterium ist nun der erreichte Wert von f_b. Da die Bewertungsfunktion am Anfang der Optimierung wesentlich höher ist, als bei der Optimierung des Krümmers, wurde für das Simulated Annealing Verfahren eine Anfangstemperatur von 10 gewählt. Ansonsten waren alle Parameter gleich, wie in Kapitel 7.1 beschrieben.
Beim genetischen Algorithmus wurden für die Mutation diesmal Cauchy-Zufallszahlen verwendet. Tabelle 11 zeigt die Parameter, die sich nach einigen vorhergehenden Experimenten als brauchbar erwiesen haben. Auch hier wurde alle 5 Generationen eine starke Mutation gewählt. Alle anderen Parameter für den genetischen Algorithmus wurden so gewählt, wie bei der Optimierung des Krümmers in Kapitel 7.1.

	$f_b \geq 0.6\%$		$f_b < 0.6\%$	
	Schwach	Stark	Schwach	Stark
p_m	20 %	50 %	10 %	20 %
σ_m	1.0	1.0	0.005	0.01

Tabelle 11: Mutationsparameter beim genetischen Algorithmus

Tabelle 12 zeigt die Ergebnisse von 10 Programmläufen mit beiden Verfahren. Man sieht, daß bei Simulated Annealing fast immer eine Bewertungsfunktion von unter 0.4 % erreicht wird. Beim genetischen Algorithmus waren die Ergebnisse immer schlechter. Der genetische Algorithmus hat es in 4 Fällen nicht geschafft, eine Bewertungsfunktion von unter 0.5 % zu erreichen; beim Simulated Annealing Verfahren war dies nur einmal der Fall. Abbildung 38 zeigt die Krümmungsverläufe der Modenwandler, deren Bewertungsfunktion schlechter als 0.5 % ist. Man sieht, daß sich die Krümmungsverläufe stark voneinander unterschieden, was darauf hindeutet, daß die Bewertungsfunktion bei diesem

	Genetischer Algorithmus	Simulated Annealing
Lauf 1	1.052990	0.398451
Lauf 2	0.455659	0.398437
Lauf 3	0.445854	0.398412
Lauf 4	0.425937	0.944974
Lauf 5	0.710259	0.398406
Lauf 6	0.434524	0.398452
Lauf 7	2.610810	0.398456
Lauf 8	0.646451	0.398442
Lauf 9	0.410999	0.398422
Lauf 10	0.405898	0.398427
Minimum	0.405898	0.398406
Maximum	2.610810	0.944974
Durchschnitt	0.759938	0.453088

Tabelle 12: Erreichte Werte der Bewertungsfunktion für den genetischen Algorithmus und Simulated Annealing

Problem viele lokale Minima hat, in denen die Optimierungsverfahren teilweise hängengeblieben sind.
Abbildung 39 zeigt die Krümmungen der Wandler mit einer Bewertungsfunktion von unter 0.5. Wie man sieht, kamen hier immer vergleichbare Krümmungsverläufe heraus, die sich höchstens um den Faktor -1 unterscheiden. Bei einem Modenwandler mit dem Gesamtwinkel von 0 entspricht die Multiplikation der Krümmung mit -1 einer Spiegelung des Wandlers an der *x*-Achse. Aus Symmetriegründen hat ein solcher Wandler die gleichen Eigenschaften. Um den Vergleich zu erleichtern, wurden die Kurven in Abbildung 39, bei denen der Koeffizient $\tilde{c}_2$ negativ ist, mit -1 multipliziert. Die Ergebnisse des Simulated Annealing Verfahrens liegen fast exakt aufeinander. Beim genetischen Algorithmus sind die Abweichungen größer, was sich auch in der größeren Streuung der erreichen Bewertungsfunktionen bemerkbar macht (siehe Tabelle 12).

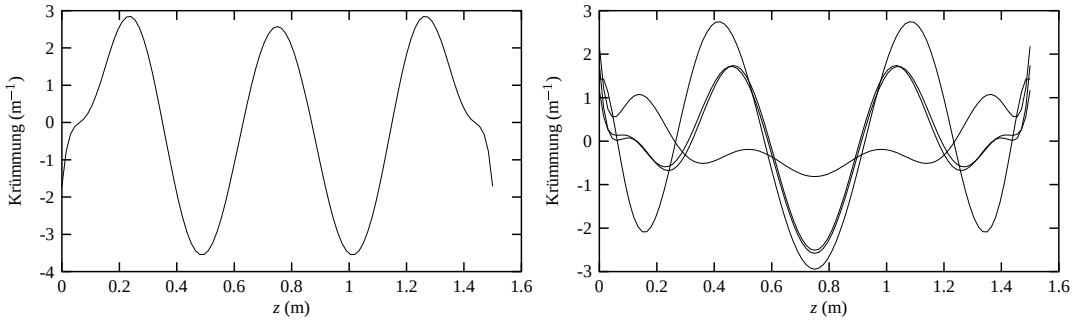


Abbildung 38: Optimierte Krümmungsverläufe mit $f_b > 0.5\%$ für Simulated Annealing (links) und den genetischen Algorithmus (rechts)

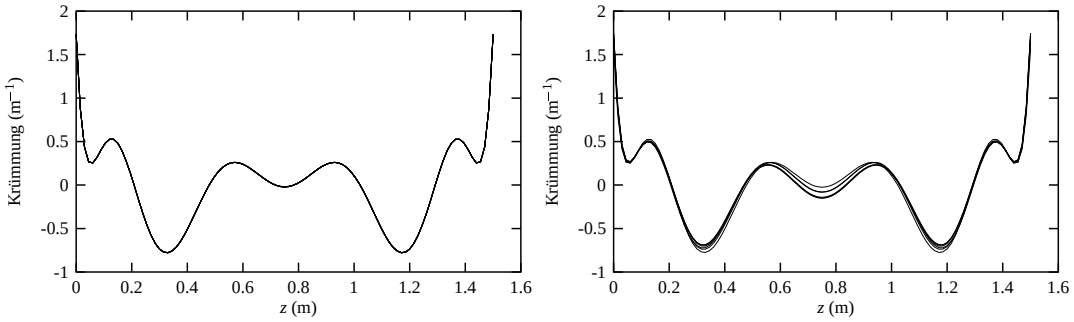


Abbildung 39: Optimierte Krümmungsverläufe mit $f_b <= 0.5\%$ für Simulated Annealing (links) und den genetischen Algorithmus (rechts)

Abbildung 40 zeigt die Krümmung des besten Wandlers (Simulated Annealing, Lauf 5), Abbildung 41 zeigt die resultierende Form des Hohlleiters. Das Modenspektrum ist in Abbildung 42 zu sehen. Es enthält nur die 4 Moden, die einen größeren Anteil an der Gesamtleistung haben. Es ist erkennbar, daß innerhalb des Krümmers auch die EH_{12}- und die HE_{21}-Moden einen gewissen Anteil an der Gesamtleistung haben. Eine Modenwandlung, an denen auch höhere Moden beteiligt sind, scheint in diesem Beispiel effizienter zu sein, als eine reine TE_{01}-HE_{11}-Wandlung. Da jedoch die gesamte Verlustleistung P_l in der Bewertungsfunktion enthalten war, wurden die Amplituden der verlustreicheren höheren Moden indirekt minimiert. Für die Optimierung wurden insgesamt 9 Moden berücksichtigt, die bei Zwischenergebnissen während der Optimierung eine wichtige Rolle spielen. Tabelle 13 zeigt die Leistungen aller berücksichtigten Moden normiert auf die Eingangsleistung. Die gesamten ohmschen Verluste ergeben sich daraus zu 0.52 %.

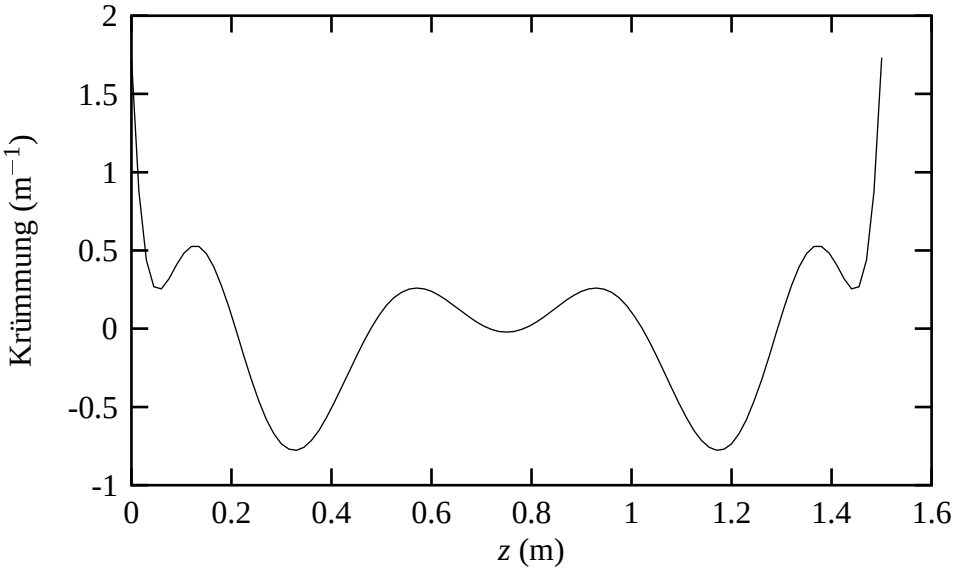


Abbildung 40: Krümmungsverlauf des optimierten Wandlers (Simulated Annealing, Lauf 5)

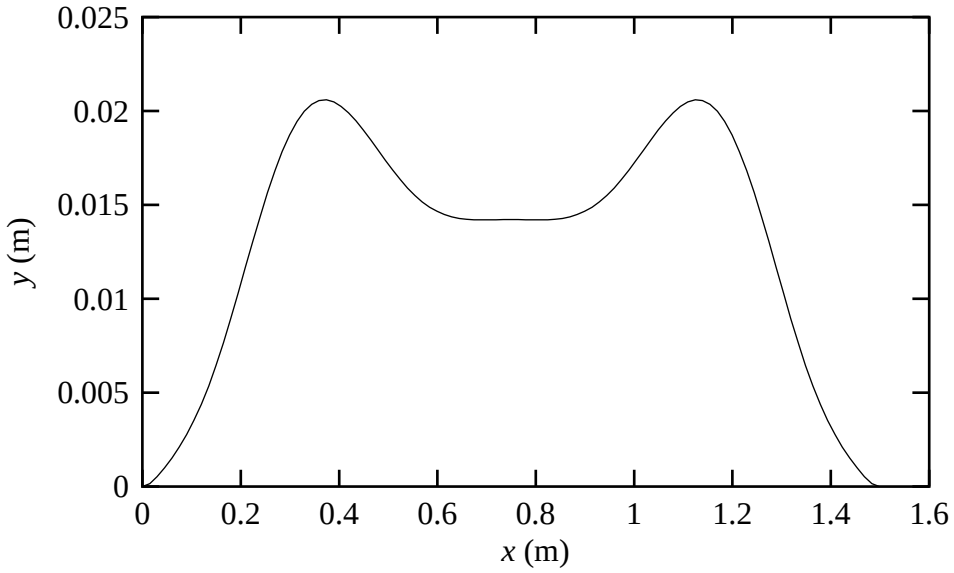


Abbildung 41: Hohlleiterform des optimierten Wandlers (Simulated Annealing, Lauf 5)

Der optimierte TE_{01}-HE_{11}-Wandler aus [14] hat eine Länge von ca. 1.45 m, ist also nur geringfügig kürzer, als der hier vorgestellte Wandler. Der Falschmodenanteil, der bei den verschiedenen Versionen in [14] nie geringer als 1 % war, beträgt hier lediglich 0.42 %.

Mode	Normierte Leistung (%)
HE_{11}	99.1593
TE_{01}	0.0028
EH_{12}	0.1104
HE_{12}	0.0224
HE_{21}	0.1606
EH_{22}	0.0114
HE_{22}	0.0041
EH_{13}	0.0054
HE_{13}	$1.8858 \cdot 10^{-6}$

Tabelle 13: Modenleistungen am Ausgang des Wandlers

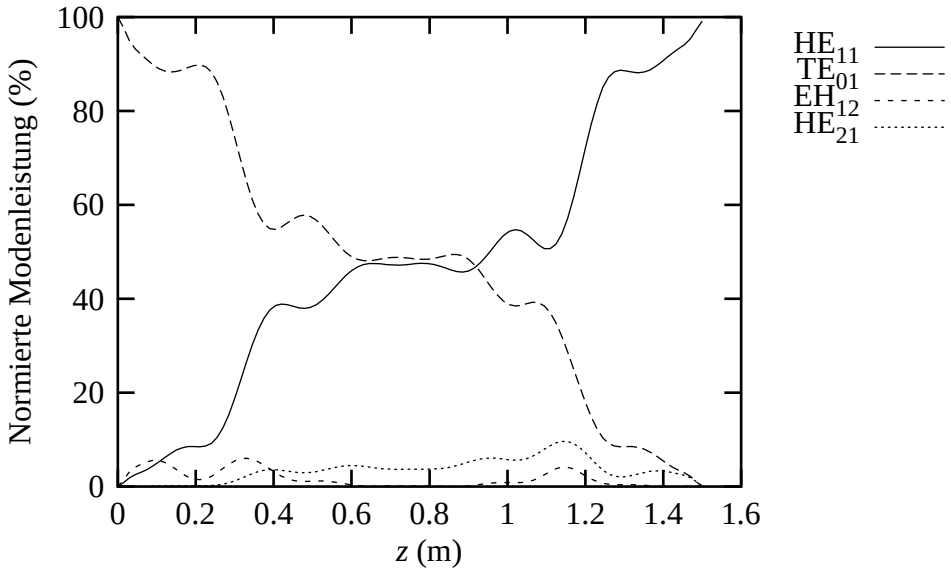


Abbildung 42: Modenspektrum des optimierten Wandlers (Simulated Annealing, Lauf 5)

7.3 Breitbandiger Rechteckkrümmer

Schließlich soll noch die Optimierung eines breitbandigen Krümmers für einen TE_{10}-Rechteckhohlleiter vorgestellt werden. Es handelt sich um den gleichen Hohlleiter vom Typ WR 42 aus Kapitel 3.5.4 (Seite 51), auch die Abmessungen des Krümmers ($x_l = y_l =$ 10 cm) und die Krümmungsebene (H-Ebene) sind gleich. Die Frequenz soll im Bereich von 50 GHz bis 80 GHz liegen. Dieser Frequenzbereich wird für X-Mode Reflektometrie im geplanten Kernfusionsexperiment ITER verwendet werden.
Für die Optimierung wurden 4 äquidistante Frequenzpunkte innerhalb des Intervalls gewählt, d.h. das Modenspektrum wird für 50 GHz, 60 GHz, 70 GHz und 80 GHz berechnet. Die Wahl der Frequenzpunkte ist etwas kritisch. Wenn nämlich die Abstände zwischen den Punkten zu groß sind, können Krümmer gefunden werden, die bei den betrachteten Frequenzpunkten einen sehr geringen Falschmodenanteil haben, der zwischen den Punkten jedoch wesentlich größer wird. Für die Bewertungsfunktion gilt, wie in Kapitel 7.1:

$$f_b = \frac{P_{s,max} + 10 \cdot P_{s,out}}{11 \cdot P_{in}}$$

Es wurden wieder jeweils 10 Optimierungen mit dem genetischen Algorithmus und dem Simulated Annealing Verfahren durchgeführt. Das Abbruchkriterium war ein Wert von 1.05 % für die Bewertungsfunktion, da alle Krümmer, die diesen Wert aufweisen eine sehr ähnliche Krümmungsfunktion haben. Beim Simulated Annealing Verfahren wurde eine Anfangstemperatur von 5 gewählt, alle anderen Parameter waren gleich wie in den vorhergehenden Beispielen. Tabelle 14 zeigt die Mutationsparameter beim genetischen Algorithmus. Es wurden gaußsche Zufallszahlen verwendet. Für die anderen Parameter, wie etwa die Bevölkerungsgröße, wurden die Standardeinstellungen verwendet.

	$f_b \geq 1.1\%$		$f_b < 1.1\%$	
	Schwach	Stark	Schwach	Stark
p_m	50 %	50 %	50 %	50 %
σ_m	10	0.5	1	0.05

Tabelle 14: Mutationsparameter beim genetischen Algorithmus

Tabelle 15 zeigt die Zahl N_i der Iterationsschritte und die Zahl N_f der Berechnungen der Bewertungsfunktion für alle Programmläufe. Wie man sieht, benötigt auch hier das Simulated Annealing Verfahren weniger Berechnungen der Bewertungsfunktion.

	Genetischer Algorithmus		Simulated Annealing	
	N_i	N_f	N_i	N_f
Lauf 1	403	30754	500	887
Lauf 2	147	11298	1677	2797
Lauf 3	139	10690	1936	3451
Lauf 4	422	32198	1633	3156
Lauf 5	164	12590	766	1315
Lauf 6	312	23838	451	796
Lauf 7	358	27334	2708	5077
Lauf 8	220	16846	519	880
Lauf 9	294	22470	547	944
Lauf 10	317	24218	3381	6437
Minimum	139	10690	451	796
Maximum	422	32198	3381	6437
Durchschnitt	278	21224	1412	2574

Tabelle 15: Benötigte Iterationsschritte und Berechnungen der Bewertungsfunktion

Abbildung 43 zeigt die von beiden Verfahren gefundenen Krümmungsverläufe. Hier erkennt man wieder zwei lokale Maxima, die jedoch nicht so stark ausgeprägt sind, wie beim 28 GHz TE_{01}-Krümmer aus Kapitel 6. Ferner habe alle Krümmungen an den Rändern sehr stark ansteigende Flanken. Die Optimierung wurde abgebrochen, wenn ein Wert von 1.05 % der Bewertungsfunktion unterschritten wurde. Den niedrigsten Wert erreichte der genetische Algorithmus beim Lauf 5. Abbildung 44 zeigt für diesen Krümmer die Ausgangsleistung der Nutzmode sowie der Falschmoden für den betrachteten Frequenzbereich. Für das Modenspektrum wurden hier wesentlich mehr Frequenzpunkte gewählt, als für die Optimierung. Man sieht, daß die Ausgangsleistung der Nutzmode auch zwischen den 4 Frequenzpunkten, für die der Krümmer optimiert wurde, nicht niedriger ist.
Der Sprung in der Leistung der Nutzmode bei 56.04 GHz kommt von der Wandlung in die TE_{40}-Mode, die oberhalb dieser Frequenz ausbreitungsfähig wird. Bei einer breitbandigen Optimierung können Moden berücksichtigt werden, die nur in einem Teil des betrachteten Frequenzbereichs ausbreitungsfähig sind. Unterhalb der Grenzfrequenz ist die Amplitude

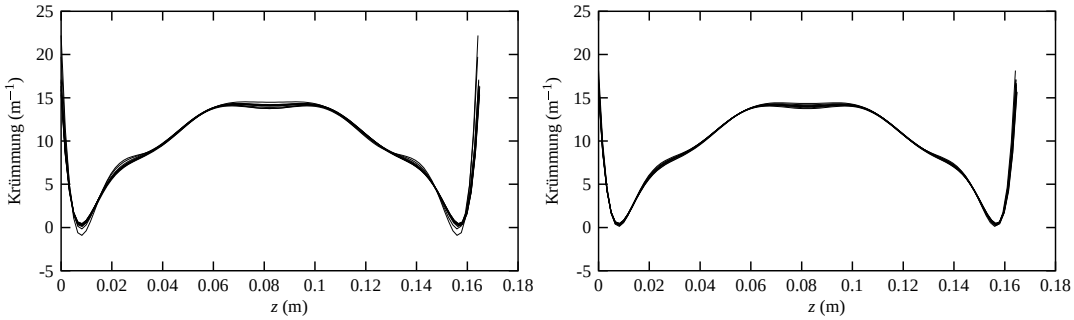


Abbildung 43: Krümmungsverläufe für der optimierten Krümmer beim Simulated Annealing Verfahren (links) und beim genetischen Algorithmus (rechts)

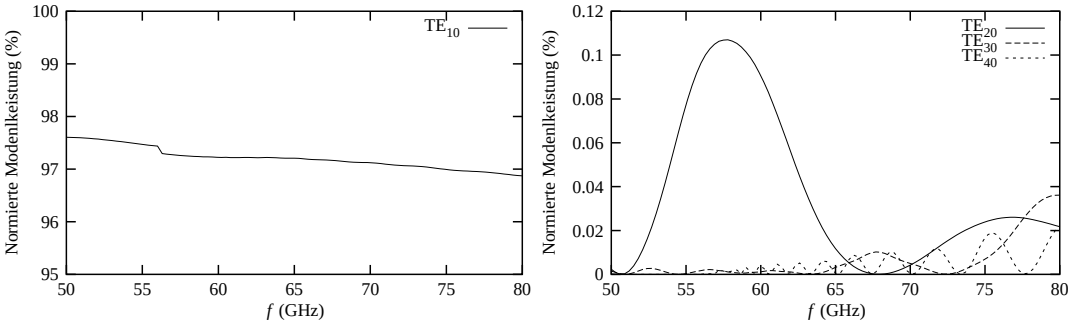


Abbildung 44: Ausgangsleistung der TE_{10}-Mode (links) und der Falschmoden (rechts)

solcher Moden dann immer Null. Abbildung 45 zeigt die Verläufe der Leistungssumme der Falschmoden für 50, 60, 70 und 80 GHz. Erwartungsgemäß steigt die maximale Leistung der Falschmoden bei höheren Frequenzen, da der Hohlleiter hier stärker überdimensioniert ist und deshalb eine stärkere Modenwandlung auftritt. Bei 80 GHz beträgt die Falschmodenleistung innerhalb des Krümmers jedoch nur 22.3 %, was bei Kleinleistungsanwendungen ein vertretbarer Wert ist. Alle Falschmoden werden bis zum Krümmerende nahezu vollständig in die TE_{10}-Mode zurückgewandelt. Wie man auch in Abbildung 44 (links) sieht, sind die ohmschen Verluste der TE_{10}-Mode in jedem Fall dominant gegenüber den Falschmoden.

7.4 Bewertung der Verfahren

Der genetische Algorithmus ist in bezug auf die Rechenzeit wesentlich ungünstiger, als Simulated Annealing. Auch konnte kein Optimierungsbeispiel gefunden werden, bei dem nicht beide Verfahren prinzipiell die gleichen Optimierungsergebnisse liefern können. Bei schwierigen Problemen wie dem Modenwandler können beide Verfahren für sehr viele Iterationsschritte in einem schlechteren lokalen Minimum verweilen. Die Beispiele zeigen jedoch, daß dies bei Simulated Annealing anscheinend seltener passiert.
Ein weiterer Nachteil des genetischen Algorithmus ist, daß man geeignete Mutationsparameter einstellen muß, die sich alle auf die Effizienz auswirken. Wie auch in [22] erwähnt

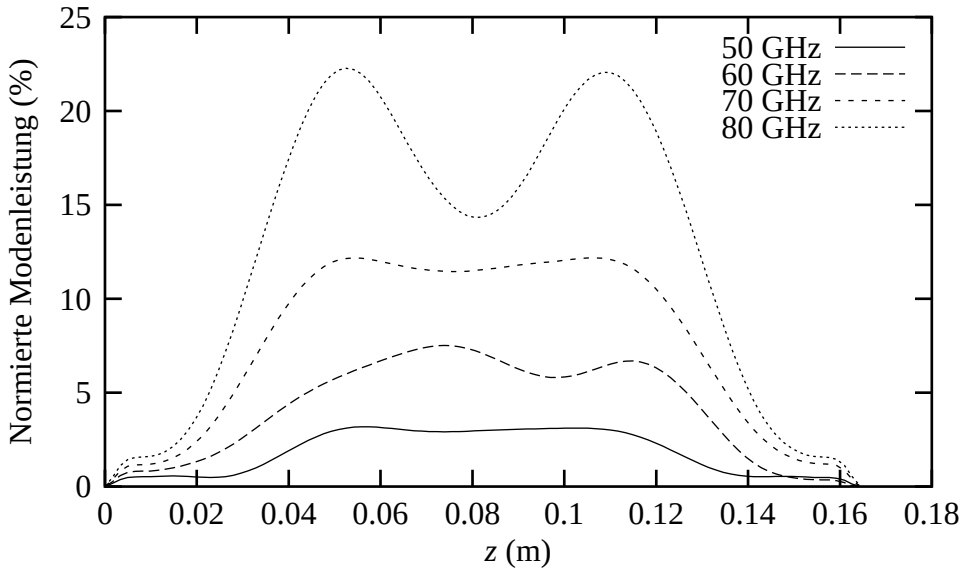


Abbildung 45: Leistungssumme der Falschmoden für 50, 60, 70 und 80 GHz

wird, hängen die optimalen Mutationsparameter bei genetischen Algorithmen stark vom jeweiligen Problem ab, und können nur experimentell ermittelt werden, was grundsätzlich mehrere Optimierungen erfordert.
Beim Simulated Annealing Verfahren wurden die Parameter für die Temperaturabnahme nur einmal ermittelt. Wegen der dadurch erreichten sehr guten Effizienz wurden sie nicht mehr geändert. Lediglich die Anfangstemperatur wurde entsprechend der zu erwartenden Bewertungsfunktion des *first guess* beim Krümmer und Modenwandler unterschiedlich gewählt.
Generell kann gesagt werden, daß man bei keinem der beiden Verfahren nach nur einer Optimierung sicher sein kann, daß man ein globales Minimum der Bewertungsfunktion gefunden hat.
Man könnte beide Programme so erweitern, daß sie selbständig mehrere Optimierungen vornehmen. Bei genetischen Algorithmen gibt es eine interessante Möglichkeit, bei der es mehrere Bevölkerungen gibt, die normalerweise nicht in Konkurenz zueinander stehen. Lediglich einige Individuen wandern gelegentlich von einer Bevölkerung zur einer anderen.

8 Zusammenfassung und Ausblick

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wurden Programme zur numerischen Optimierung von gekrümmten Hohlleiterkomponenten (Krümmer, Modenwandler) entwickelt. Damit wurden mehrere Optimierungen durchgeführt. Als ein Beispiel wurde ein TE_{01}-Krümmer für eine 28 GHz Transmissionsleitung für das *Département de Recherche Fondamentale sur la Matière Condensée* der *Commissariat à l'Energie Atomique* optimiert und gefertigt. Der optimierte Krümmer aus Kapitel 6 hat bessere Eigenschaften, als andere vergleichbare Krümmer, bei denen die Krümmungsfunktion einen sin oder $\sin^2$-Verlauf hat. Obwohl die gemessenen Falschmodenamplituden am Ausgang des Krümmers größer sind, als die vom Optimierungsprogramm errechneten Werte, bleibt der Falschmodenanteil mit 1.33 % in einer Größenordnung, die für diese Anwendung vertretbar ist.

Die Optimierung besteht oft in der Erzeugung einer Art Eigenmodenmischung, die an die Krümmung angepaßt ist. Ein so optimierter Krümmer besteht meist aus drei Abschnitten. Der erste Abschnitt, in dem die Krümmung meist sehr stark schwankt, erzeugt aus der vom geraden Hohlleiter kommenden Mode die Eigenmodenmischung. Der zweite Abschnitt hat eine näherungsweise konstante Krümmung. Hier breitet sich die Eigenmodenmischung aus, d.h. die Amplituden der Moden schwanken hier nur wenig. Im dritten Abschnitt wird diese Modenmischung wieder in die Mode des geraden Hohlleiters zurückgewandelt.

Gekrümmte Modenwandler können mit dem gleichen Programm optimiert werden. Hier wird die Eingangsmode als Falschmode definiert, das Optimierungsziel ist dann eine möglichst große Leistung der Nutzmode am Ausgang und geringe ohmsche Verluste. Ferner wird ein Gesamtwinkel von 0 gewählt. Läßt man in der Optimierung symmetrische Krümmungen zu, so werden von dem Programm nur Modenwandler geliefert, bei denen Anfang und Ende auf einer Achse liegen. Die Modenwandler, die so optimiert werden, haben bei vergleichbarer Länge weniger Falschmoden am Ausgang, als die bisher verwendeten. Die Modenwandlung geht zu einem gewissen Teil auch über höhere Moden, was bei den bisher angewandten Verfahren zum Design solcher Modenwandler nicht leicht möglich war.

Die Ergebnisse der Optimierung sind am besten, wenn als Startwert eine konstante Krümmung verwendet wird. Die bisher verwendeten analytischen Krümmungsfunktionen stellen oft lokale Minima der Bewertungsfunktion dar, unterscheiden sich jedoch stark von den optimierten Krümmungsverläufen. Das bedeutet, daß es für jedes Optimierungverfahren schwierig ist, aus einem solchen lokalen Minimum herauszukommen und schließlich die optimale Form zu finden.

Als Optimierungsverfahren wurde ein genetischer Algorithmus und ein Hybridverfahren aus Simulated Annealing und Downhill Simplex implementiert. Beide Verfahren können prinzipiell zu den gleichen Ergebnissen kommen. Es kann bei beiden Verfahren aber passieren, daß sie sehr lange in einem schlechteren lokalen Minimum verweilen, so daß die Optimierung neu gestartet werden muß.

Experimente haben jedoch gezeigt, daß das Simulated Annealing Verfahren für eine erfolgreiche Optimierung im Mittel weniger Rechenzeit benötigt und seltener in Nebenminima der Bewertungsfunktion hängenbleibt.

Beide Programme können in der Praxis jedoch gut verwendet werden. Die Verfügbar-

keit von zwei verschiedenen Optimierungsprogrammen hat zudem den Vorteil, daß, wenn beide Programme vergleichbare Ergebnisse liefern, die Gewißheit größer ist, daß es sich wirklich um die optimale Lösung, d.h. um das globale Minimum der Bewertungsfunktion handelt.
Angesichts der ständig steigenden Rechnerleistungen können Optimierungsprogramme immer dahingehend erweitert werden, daß Berechnungsverfahren, die bisher wegen der langen Rechenzeiten nur in einmaligen Simulationen verwendet wurden, mit in die Optimierung eingebaut werden.
In den vorliegenden Codes wurde z.B. nur die Modenwandlung aufgrund der Krümmung implementiert. Durch Anwendung der Streumatrixmethode (siehe z.B. [25]) kann auch die Reaktion der Hohlleiterfelder auf Durchmessersprünge berechnet werden. Ein Optimierungsprogramm, in dem die Streumatrixmethode implementiert ist, könnte für die Optimierung von Querschnittstapern und Modenwandlern, bei denen durch eine Durchmesseränderung z.B. eine TE_{0m} in eine TE_{0n}-Mode umgewandelt wird, verwendet werden.
Ferner könnte ein Streumatrixcode die Eigenwerte der Hybridmoden im korrugierten Hohlleiter und deren Verluste exakt, d.h. ohne die Näherungen des Impedanzmodells, bestimmen. So wäre man nicht mehr auf ein rechteckiges Korrugationsprofil angewiesen. Mit diesen Eigenwerten und den Dämpfungskonstanten könnte man, wie in dieser Arbeit beschrieben, unter Verwendung des Systems der gekoppelten Wellengleichungen die Modenwandlung in einem gekrümmten korrugierten Hohlleiter bestimmen.
Es liegt auch die Idee nahe, nicht nur die Hohlleiterkrümmung, sondern auch den Durchmesser und eventuell sogar die Korrugationstiefe innerhalb eines Krümmer variabel zu gestalten, und so mehr Möglichkeiten für eine Optimierung zu schaffen. Allerdings muß gesagt werden, daß sowohl der Durchmesser als auch die Korrugationstiefe die Phasenkonstanten der Moden beeinflussen. Die Annahme, daß jede Mode überall im Krümmer die gleiche Phasenkonstante hat führt dazu, daß das System der gekoppelten Wellengleichungen sehr schnell gelöst werden kann. Variable Phasenkonstanten würden zur Folge haben, daß diese für jede Mode während der Lösung mit dem Runge-Kutta-Verfahren an sehr vielen Stellen im Krümmer bestimmt werden müßten. Außerdem würde die Herstellung eines korrugierten Hohlleiterkrümmers, bei dem Durchmesser und Korrugationstiefe variabel sind, wesentlich komplizierter sein. Angesichts der guten Ergebnisse, die z.B. bei der Optimierung des TE_{01}-Krümmers aus Kapitel 6 erzielt wurden, ist es fraglich, ob eine derartige Erweiterung der Programme für die Optimierung von Hohlleiterkrümmern überhaupt nötig ist.
Eine Überlegung besteht darin, eine andere Methode zur Berechnung der Felder in einem gekrümmten Hohlleiter zu implementieren. Eine Möglichkeit wäre hier z.B. die Parabolic Equation Methode. Diese Methode wird vor allem in der terrestrischen Wellenausbreitung und in der Akustik verwendet; sie läßt sich jedoch auch für gekrümmte Hohlleiter anwenden [19].
In diesem Ansatz wird die Wellengleichung unter Vernachlässigung reflektierter Wellen in eine Parabolische Differentialgleichung transformiert, die dann als Anfangswertproblem formuliert werden kann.
So könnten, ausgehend von der Feldverteilung am Krümmeranfang, die Felder innerhalb des Krümmers berechnet werden. Diese Berechnung wäre wesentlich zeitaufwendiger, da

die Unbekannten hier keine skalaren Modenamplituden sind, sondern zweidimensionale Feldverteilungen im Hohlleiterquerschnitt, die an sehr vielen Stützstellen bestimmt werden müssen. Allerdings könnte man so die ohmsche Dämpfung unter Verwendung der Gesamtfelder bestimmen, was eine Erhöhung der Genauigkeit bedeuten würde. Auch die maximalen Feldstärken, oder Stellen mit sehr hohen Wandströmen innerhalb des Krümmers könnten bei dieser Methode gut ermittelt werden und als Optimierungskriterium dienen.

A Berechnung der Modenleistung im Rundhohlleiter

Für die Berechnung der Modenleistung im zylindrischen Hohlleiter gelten folgende Beziehungen für TM[pm]-Wellen ($p > 0$):

$$P_m^{\mathrm{TM}} = \frac{1}{2} N_m^2 |A_m|^2 \times \int_0^{\phi} \int_0^{r_0} \left[\frac{X_m^2}{a^2} \sin^2(p\phi) J_p'^2 \left(\frac{rX_m}{a} \right) + \frac{p^2}{r^2} \cos^2(p\phi) J_p^2 \left(\frac{rX_m}{a} \right) \right] r dr d\phi \quad \text{(A.1)}$$

Bei TE-Moden gilt entsprechend:

$$P_m^{\mathrm{TE}} = \frac{1}{2} N_m^2 |A_m|^2 R_m^2 \times \int_0^{\phi} \int_0^{r_0} \left[\frac{p^2}{r^2} \sin^2(p\phi) J_p^2 \left(\frac{rX_m}{a} \right) + \frac{X_m^2}{a^2} \cos^2(p\phi) J_p'^2 \left(\frac{rX_m}{a} \right) \right] r dr d\phi \quad \text{(A.2)}$$

Für die Integration in azimutaler Richtung werden folgende Integralbeziehungen verwendet:

$$\int_0^{2\pi} \sin^2(p\phi) d\phi = \begin{cases} 0 & \text{für } p = 0 \\ \pi & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{(A.3)}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2(p\phi) d\phi = \begin{cases} 2\pi & \text{für } p = 0 \\ \pi & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{(A.4)}$$

Somit erhält man für die Leistungen:

$$P_m^{\mathrm{TM}} = \frac{\pi}{2} N_m^2 |A_m|^2 \int_0^{r_0} \left[\frac{X_m^2}{a^2} J_p'^2 \left(\frac{rX_m}{a} \right) + \frac{p^2}{r^2} J_p^2 \left(\frac{rX_m}{a} \right) \right] r dr \quad \text{(A.5)}$$

$$P_m^{\mathrm{TE}} = \varepsilon_p \frac{\pi}{2} \frac{Z_0}{R_m} B_{\mathrm{TE}}^2 N_m^2 |A_m|^2 \int_0^{r_0} \left[\frac{p^2}{r^2} J_p^2 \left(\frac{rX_m}{a} \right) + \frac{X_m^2}{a^2} J_p'^2 \left(\frac{rX_m}{a} \right) \right] r dr \quad \text{(A.6)}$$

Mit:

$$\varepsilon_p = \begin{cases} 2 & \text{für } p = 0 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{(A.7)}$$

Der Ausdruck für P_m^{TM} gilt wieder nur für $p > 0$, da die Felder der $\mathrm{TM}_{0\mathrm{m}}$-Moden gesondert behandelt werden. Die verbleibenden Integrale für TE und TM-Wellen werden nun identisch. Man kann also schreiben:

$$P_m^{\mathrm{TM}} = \frac{\pi}{2} N_m^2 |A_m|^2 S_m \quad \text{(A.8)}$$

$$P_m^{\mathrm{TE}} = \frac{\pi}{2}\frac{Z_0}{R_m}\varepsilon_p B_{\mathrm{TE}}^2 N_m^2 |A_m|^2 S_m \tag{A.9}$$

Mit:

$$S_m = \int_0^{r_0} \left[\frac{p^2}{r^2} J_p^2\left(\frac{rX_m}{a}\right) + \frac{X_m^2}{a^2} {J'_p}^2\left(\frac{rX_m}{a}\right)\right] rdr \tag{A.10}$$

Um das Integral zu lösen, werden nun folgende Beziehungen verwendet:

$$J'_p\left(\frac{rX_m}{a}\right) = J_{p-1}\left(\frac{rX_m}{a}\right) - \frac{ap}{rX_m} J_p\left(\frac{rX_m}{a}\right) \tag{A.11}$$

$$J'_p\left(\frac{rX_m}{a}\right) = \frac{ap}{rX_m} J_p\left(\frac{rX_m}{a}\right) - J_{p+1}\left(\frac{rX_m}{a}\right) \tag{A.12}$$

Setzt man sowohl (A.11) als auch (A.12) in (A.10) ein, so erhält man für das Integral nach einigen Umformungen:

$$S_m = \frac{1}{2}\frac{X_m^2}{a^2} \int_0^{r_0} \left[J_{p+1}^2\left(\frac{rX_m}{a}\right) + J_{p-1}^2\left(\frac{rX_m}{a}\right)\right] rdr \tag{A.13}$$

Dieses Integral kann nun geschlossen ausgewertet werden, wenn man folgende Beziehung verwendet:

$$\int rJ_p^2\left(\frac{rX_m}{a}\right) dr = \frac{r^2}{2}\left[J_p^2\left(\frac{rX_m}{a}\right) - J_{p-1}\left(\frac{rX_m}{a}\right) J_{p+1}\left(\frac{rX_m}{a}\right)\right] \tag{A.14}$$

Man erhält schließlich:

$$S_m = \frac{1}{4} X_m^2 \left[J_{p-1}^2(X_m) - J_{p+2}(X_m) J_p(X_m) + J_{p+1}^2(X_m) - J_{p-2}(X_m) J_p(X_m)\right] \tag{A.15}$$

Der Ausdruck wird so umgeformt, daß nur noch Besselfunktionen p'ter Ordnung vorkommen. Hierzu werden folgende Beziehungen verwendet:

$$J_{p+2}(X_m) = \frac{2(p+1)}{X_m} J_{p+1}(X_m) - J_p(X_m) \tag{A.16}$$

$$J_{p-2}(X_m) = \frac{2(p-1)}{X_m} J_{p-1}(X_m) - J_p(X_m) \tag{A.17}$$

und

$$J_{p-1}(X_m) = \frac{p}{X_m} J_p(X_m) + J'_p(X_m) \tag{A.18}$$

$$J_{p+1}(X_m) = \frac{p}{X_m} J_p(X_m) - J'_p(X_m) \tag{A.19}$$

Man erhält schließlich:

$$S_m = \frac{1}{2}X_m^2\left[J_p'^2(X_m) + J_p^2(X_m)\left(1-\frac{p^2}{X_m^2}\right) + \frac{2}{X_m}J_p(X_m)J_p'(X_m)\right] \tag{A.20}$$

Im glatten Hohlleiter gelten einfache Randbedingungen. Für TM-Wellen ist $J_p(X_m) = 0$. Somit gilt:

$$P_m^{\mathrm{TM}} = \frac{\pi}{4}N_m^2|A_m|^2X_m^2J_p'^2(X_m) \tag{A.21}$$

Bei TE-Wellen ist $J_p'(X_m) = 0$. Somit erhält man:

$$P_m^{\mathrm{TE}} = \frac{\pi}{4}\varepsilon_p\frac{Z_0}{R_m}B_{\mathrm{TE}}^2N_m^2|A_m|^2X_m^2J_p^2(X_m)\left(1-\frac{p^2}{X_m^2}\right) \tag{A.22}$$

Bei den $\mathrm{TM}_{0\mathrm{m}}$-Wellen wird die Leistung gesondert hergeleitet, da die Felder bei diesen Moden analog zu [5] kreuzpolarisiert definiert sind. Da $\mathrm{TM}_{0\mathrm{m}}$-Wellen keine e_ϕ-Komponente besitzen, gilt für die Leistung:

$$P_m^{\mathrm{TM}} = \frac{1}{2}\iint_A (e_r h_\phi)dA \tag{A.23}$$

Setzt man die Feldkomponenten ein, so erhält man:

$$P_m^{\mathrm{TM}} = \frac{1}{2}N_m^2|A_m|^2\int_0^{2\pi}\int_0^a \frac{X_m^2}{a^2}J'^2_0\left(\frac{rX_m}{a}\right)rdrd\phi, \tag{A.24}$$

oder einfacher:

$$P_m^{\mathrm{TM}} = \pi N_m^2|A_m|^2\int_0^a \frac{X_m^2}{a^2}J'^2_0\left(\frac{rX_m}{a}\right)rdr \tag{A.25}$$

Da $J'^2_0 = J_1^2$ ist, kann auch dieses Integral geschlossen ausgewertet werden. Man erhält:

$$P_m^{\mathrm{TM}} = \frac{\pi}{2}N_m^2|A_m|^2X_m^2\left[J_1^2(X_m) - J_0(X_m)J_2(X_m)\right] \tag{A.26}$$

Mit den oben angegebenen Beziehungen für Besselfunktionen kann auch dieser Ausdruck entsprechend umgeformt werden, daß er nur noch die Besselfunktion J_0 und ihre Ableitung J_0' enthält:

$$P_m^{\mathrm{TM}} = \frac{\pi}{2}N_m^2|A_m|^2X_m^2\left[J'^2_0(X_m) + \frac{2}{X_m}J_0(X_m)J'_0(X_m) + J_0^2(X_m)\right] \tag{A.27}$$

Im glatten Hohlleiter ist wieder $J_0(X_m) = 0$. In diesem Fall gilt:

$$P_m^{\mathrm{TM}} = \frac{\pi}{2}N_m^2|A_m|^2X_m^2J'^2_0(X_m) \tag{A.28}$$

Die Leistung der TM_{0m}-Moden ist doppelt so groß, als die Formel für $p \neq 0$ ergeben würde, wenn man hier $p = 0$ einsetzen würde.
Hybridmoden im korrugierten Hohlleiter werden analog zu [5] angesetzt:

$$\mathbf{e}_m^{\text{hybrid}} = \mathbf{e}_m^{\text{TM}} + d_m \mathbf{e}_m^{\text{TE}} \tag{A.29}$$

$$\mathbf{h}_m^{\text{hybrid}} = \mathbf{h}_m^{\text{TM}} + d_m \mathbf{h}_m^{\text{TE}} \tag{A.30}$$

Die Modenleistungen können berechnet werden, indem man die Feldkomponenten der Moden des zylindrischen Hohlleiters in Gleichung 2.26 einsetzt. Man erhält die Leistungen der reinen TE- und TM-Wellen und einen Mischterm. In diesem tauchen keine sin- und cos-Funktionen mehr auf, da diese beim Zusammenfassen der Einzelkomponenten $\sin^2(p\phi) + \cos^2(p\phi) = 1$ ergeben.

$$\begin{aligned} P_m^{\text{hybrid}} &= P_m^{\text{TM}} + (d_m^{\text{TE}})^2 P_m^{\text{TE}} \\ &\quad - |A_m|^2 N_m^2 \frac{1}{2} d_m \frac{X_m p}{a} \left(1 + R_m^2\right) \int_0^{2\pi} \int_0^a J_p\left(\frac{rX_m}{a}\right) J'_p\left(\frac{rX_m}{a}\right) dr d\phi \end{aligned} \tag{A.31}$$

Das Integral läßt sich einfach durch eine partielle Integration lösen. Man erhält:

$$P_m^{\text{hybrid}} = P_m^{\text{TM}} + (d_m^{\text{TE}})^2 P_m^{\text{TE}} - |A_m|^2 N_m^2 \frac{\pi}{2} d_m p J_p^2(X_m) \left(1 + R_m^2\right) \tag{A.32}$$

B Berechnung des Fernfeldes

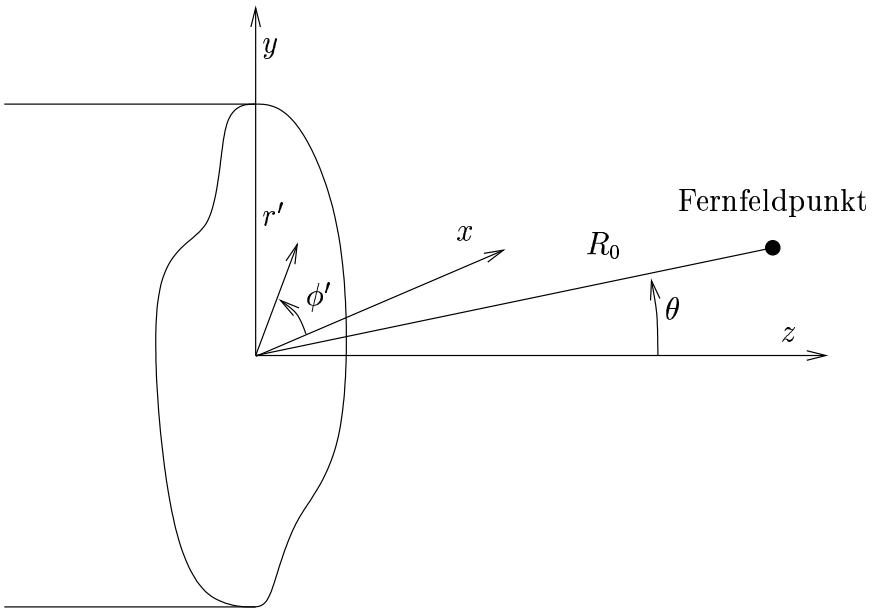


Abbildung 46: Koordinatensystem für die Fernfeldberechnung bei Hohlleitern beliebigen Querschnitts

Für Plasmaheizungs- und Diagnostikanwendungen ist neben der Modenmischung im Hohlleiter vor allem das resultierende Fernfeld eines offenen Hohlleiterendes interessant. Um dieses zu berechnen, müssen zunächst die transversalen Komponenten e_x und e_y des elektrischen Feldes im Hohlleiter bekannt sein. Es wird ein Kugelkoordinatensystem angenommen, wobei das Hohlleiterende im Ursprung liegt. Die Welle wird in Richtung der positiven z-Achse abgestrahlt (siehe Abb. 46). Für das Fernfeld einer Hohlleiterapertur beliebigen Querschnitts gilt [16]:

$$e_{\theta,f} = \frac{j}{2\lambda_0}\frac{e^{-jkR_0}}{R_0}\iint_s \left[e_x\cos\phi + e_y\sin\phi - Z_0\cos\theta\left(h_x\sin\phi - h_y\cos\phi\right)\right] \times e^{jkr'\sin\theta\cos(\phi-\phi')}ds \quad \text{(B.1a)}$$

$$e_{\phi,f} = \frac{j}{2\lambda_0}\frac{e^{-jkR_0}}{R_0}\iint_s \left[\cos\theta\left(-e_x\sin\phi + e_y\cos\phi\right) - Z_0\left(h_x\cos\phi + h_y\sin\phi\right)\right] \times e^{jkr'\sin\theta\cos(\phi-\phi')}ds \quad \text{(B.1b)}$$

In diesen Gleichungen sind e_x, e_y, h_x und h_y die transversalen Feldkomponenten in der Apertur, R_0, θ und ϕ sind die Kugelkoordinaten des Fernfeldpunktes.
Am IPF wurde 1995 ein Programm entwickelt, mit dem ausgehend von einer Modenmischung im korrugierten Hohlleiter das resultierende Fernfeld berechnet werden kann [9].

Diese Programm integriert die Gleichungen B.1a und B.1b numerisch, und liefert zwei eindimensionale Feldverteilungen entlang der *x*- und *y*-Achse.
Für eine Untersuchung des Fernfeldes einer s-förmig deformierten HE_{11}-Hohlleiterantenne, wie sie für das Kernfusionsexperiment ITER geplant ist, war eine 2-dimensionale Berechnung eines solchen Fernfeldes nötig (siehe [17]). Da das bestehende Programm wegen der ohnehin recht langen Rechenzeit nicht auf die Ausgabe eines zweidimensionalen Fernfeldes erweitert werden konnte, wurde nach Möglichkeiten gesucht, die Berechnung zu beschleunigen. Die Resultate sind analytische Lösungen der Integrale in (B.1a) und (B.1b) für Rechteck- und Zylinderhohlleiter, die im folgenden vorgestellt werden sollen.

B.1 Rechteckhohlleiter

Für das Fernfeld eines Rechteckhohlleiters gilt:

$$e_{\theta,f} = \frac{j}{2\lambda_0}\frac{e^{-jkR_0}}{R_0}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\left[e_x\cos\phi + e_y\sin\phi - Z_0\cos\theta\left(h_x\sin\phi - h_y\cos\phi\right)\right] \times e^{jk(x'\sin\theta\cos\phi + y'\sin\theta\sin\phi)}dy'dx' \quad \text{(B.2a)}$$

$$e_{\phi,f} = \frac{j}{2\lambda_0}\frac{e^{-jkR_0}}{R_0}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\left[\cos\theta\left(-e_x\sin\phi + e_y\cos\phi\right) - Z_0\left(h_x\cos\phi + h_y\sin\phi\right)\right] \times e^{jk(x'\sin\theta\cos\phi + y'\sin\theta\sin\phi)}dy'dx' \quad \text{(B.2b)}$$

Die Komponenten der magnetischen Feldstärke können eliminiert werden, indem man folgende Gleichungen anwendet:

$$h_x^{\mathrm{TM}} = -e_y^{\mathrm{TM}}\frac{1}{R_m Z_0} \quad \text{(B.3a)}$$

$$h_y^{\mathrm{TM}} = e_y^{\mathrm{TM}}\frac{1}{R_m Z_0} \quad \text{(B.3b)}$$

$$h_x^{\mathrm{TE}} = -e_y^{\mathrm{TE}}\frac{R_m}{Z_0} \quad \text{(B.3c)}$$

$$h_y^{\mathrm{TE}} = e_x^{\mathrm{TE}}\frac{R_m}{Z_0} \quad \text{(B.3d)}$$

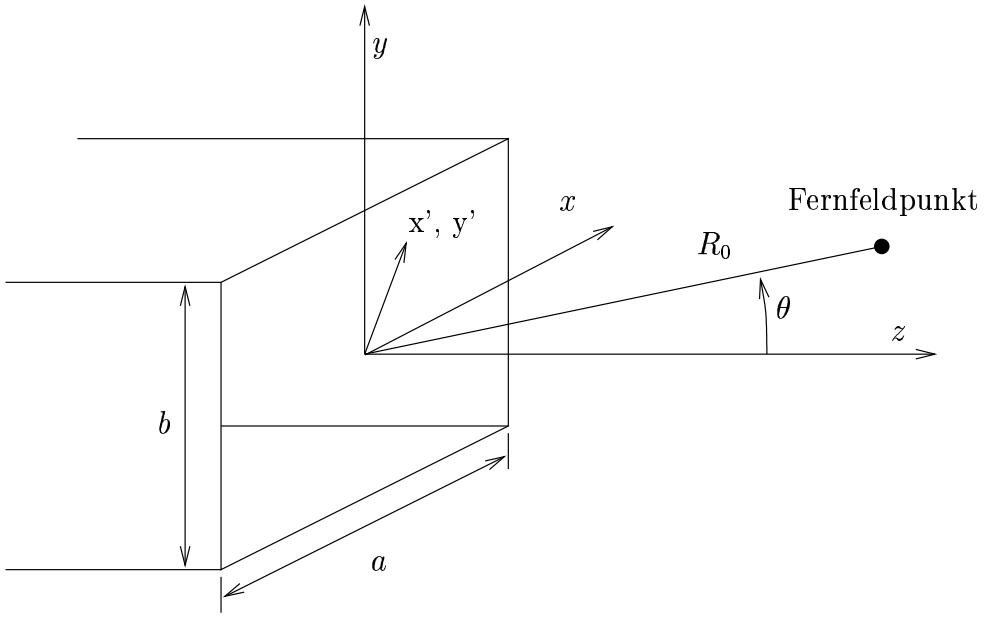


Abbildung 47: Koordinatensystem für die Fernfeldberechnung bei Rechteckhohlleitern

Die Fernfeldgleichungen können so vereinfacht werden:

$$e_{\theta,f} = \frac{j}{2\lambda_0}\frac{e^{-jkR_0}}{R_0}(1+d\cos\theta) \times \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} [e_x\cos\phi + e_y\sin\phi]\, e^{jkx'\sin\theta\cos\phi} e^{jky'\sin\theta\sin\phi} dy'dx' \quad \text{(B.4a)}$$

$$e_{\phi,f} = \frac{j}{2\lambda_0}\frac{e^{-jkR_0}}{R_0}(d+\cos\theta) \times \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} [-e_x\sin\phi + e_y\cos\phi]\, e^{jkx'\sin\theta\cos\phi} e^{jky'\sin\theta\sin\phi} dy'dx' \quad \text{(B.4b)}$$

Mit:

$$d = \begin{cases} \frac{1}{R_m} \text{ für TM-Wellen} \\ \\ R_m \text{ für TE-Wellen} \end{cases} \quad \text{(B.5)}$$

Um die Feldkomponenten einsetzten zu können, muß man beachten, daß in den Feldgleichungen für den Rechteckhohlleiter angenommen wird, daß sich der Hohlleiterquerschnitt in x-Richtung von 0 bis a, in y-Richtung von 0 bis b erstreckt. Für das Fernfeld wird jedoch angenommen, daß die z-Achse in der Mitte der Querschnittes liegt, das bedeutet,

daß der Querschnitt von $-\frac{a}{2}$ bis $\frac{a}{2}$, bzw. von $-\frac{b}{2}$ bis $\frac{b}{2}$ reicht. Für die Felder im Hohlleiter gilt dann:

$$e_x^{\mathrm{TM}} = -A_m N_m \sqrt{R_m Z} \frac{p\pi}{a} \cos\left(\frac{p\pi x}{a} + \frac{p\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b} + \frac{m\pi}{2}\right) \tag{B.6a}$$

$$e_y^{\mathrm{TM}} = -A_m N_m \sqrt{R_m Z} \frac{m\pi}{b} \sin\left(\frac{p\pi x}{a} + \frac{p\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{b} + \frac{m\pi}{2}\right) \tag{B.6b}$$

$$e_x^{\mathrm{TE}} = A_m N_m \sqrt{R_m Z} \frac{m\pi}{b} \cos\left(\frac{p\pi x}{a} + \frac{p\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b} + \frac{m\pi}{2}\right) \tag{B.6c}$$

$$e_y^{\mathrm{TE}} = -A_m N_m \sqrt{R_m Z} \frac{p\pi}{a} \sin\left(\frac{p\pi x}{a} + \frac{p\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{b} + \frac{m\pi}{2}\right) \tag{B.6d}$$

Man erhält dann folgende Fernfeldgleichungen:

$$e_{\theta,f}^{\mathrm{TM}} = \frac{j}{2\lambda_0} \frac{e^{-jkR_0}}{R_0} (1 + \frac{\cos\theta}{R_m}) A_m N_m \sqrt{R_m Z}\pi$$

$$\times \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left[-\frac{p}{a} \cos\left(\frac{p\pi x'}{a} + \frac{p\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{m\pi y'}{b} + \frac{m\pi}{2}\right) \cos\phi - \right.$$

$$\left. \frac{m}{b} \sin\left(\frac{p\pi x'}{a} + \frac{p\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{m\pi y'}{b} + \frac{m\pi}{2}\right) \sin\phi \right] e^{jkx' \sin\theta\cos\phi} e^{jky' \sin\theta\sin\phi} dy' dx' \tag{B.7a}$$

$$e_{\phi,f}^{\mathrm{TM}} = \frac{j}{2\lambda_0} \frac{e^{-jkR_0}}{R_0} (\frac{1}{R_m} + \cos\theta) A_m N_m \sqrt{R_m Z}\pi$$

$$\times \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left[\frac{p}{a} \cos\left(\frac{p\pi x'}{a} + \frac{p\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{m\pi y'}{b} + \frac{m\pi}{2}\right) \sin\phi - \right.$$

$$\left. \frac{m}{b} \sin\left(\frac{p\pi x'}{a} + \frac{p\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{m\pi y'}{b} + \frac{m\pi}{2}\right) \cos\phi \right] e^{jkx' \sin\theta\cos\phi} e^{jky' \sin\theta\sin\phi} dy' dx' \tag{B.7b}$$

$$e^{\mathrm{TE}}_{\theta,f} = \frac{j}{2\lambda_0}\frac{e^{-jkR_0}}{R_0}(1+R_m\cos\theta)A_m N_m\sqrt{R_m Z}\pi$$

$$\times \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\left[\frac{m}{b}\cos\left(\frac{p\pi x'}{a}+\frac{p\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{m\pi y'}{b}+\frac{m\pi}{2}\right)\cos\phi -\right.$$

$$\left.\frac{p}{a}\sin\left(\frac{p\pi x'}{a}+\frac{p\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{m\pi y'}{b}+\frac{m\pi}{2}\right)\sin\phi\right]e^{jkx'\sin\theta\cos\phi}e^{jky'\sin\theta\sin\phi}dy'dx' \quad \text{(B.7c)}$$

$$e^{\mathrm{TE}}_{\phi,f} = \frac{j}{2\lambda_0}\frac{e^{-jkR_0}}{R_0}(R_m+\cos\theta)A_m N_m\sqrt{R_m Z}\pi$$

$$\times \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\left[-\frac{m}{b}\cos\left(\frac{p\pi x'}{a}+\frac{p\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{m\pi y'}{b}+\frac{m\pi}{2}\right)\sin\phi -\right.$$

$$\left.\frac{p}{a}\sin\left(\frac{p\pi x'}{a}+\frac{p\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{m\pi y'}{b}+\frac{m\pi}{2}\right)\cos\phi\right]e^{jkx'\sin\theta\cos\phi}e^{jky'\sin\theta\sin\phi}dy'dx' \quad \text{(B.7d)}$$

Um die Integrale auszuwerten, werden folgende Beziehungen verwendet:

$$\int e^{j\alpha x}\sin(\beta x+\gamma)dx = \frac{1}{\beta^2-\alpha^2}\left[j\alpha\sin(\beta x+\gamma)-\beta\cos(\beta x+\gamma)\right]e^{j\alpha x} \quad \text{(B.8a)}$$

$$\int e^{j\alpha x}\cos(\beta x+\gamma)dx = \frac{1}{\beta^2-\alpha^2}\left[j\alpha\cos(\beta x+\gamma)+\beta\sin(\beta x+\gamma)\right]e^{j\alpha x} \quad \text{(B.8b)}$$

Bevor diese Gleichungen angewendet werden, kann man zeigen, daß für ganzzahlige p und m gilt:

$$\sin\left(\frac{p\pi x'}{a}+\frac{p\pi}{2}\right) = 0 \text{ für } x' = \pm\frac{a}{2}$$

$$\sin\left(\frac{m\pi y'}{b}+\frac{m\pi}{2}\right) = 0 \text{ für } y' = \pm\frac{b}{2}$$

Es kommen also nur noch cos-Terme in der Lösung vor. Setzt man die Integrationsgrenzen in die cos-Terme ein, so erhält man:

$$\cos\left(\frac{p\pi x'}{a}+\frac{p\pi}{2}\right) = \begin{cases} 1 & \text{für } x' = -\frac{a}{2} \\ (-1)^p & \text{für } x' = \frac{a}{2} \end{cases}$$

$$\cos\left(\frac{m\pi y'}{b}+\frac{m\pi}{2}\right)=\begin{cases}1 & \text{für } y'=-\frac{b}{2}\\ (-1)^m & \text{für } y'=\frac{b}{2}\end{cases}$$

Für die Fernfelder erhält man dann folgende Gleichungen:

$$e_{\theta,f}^{\mathrm{TM}}=\frac{j}{2\lambda_0}\frac{e^{-jkR_0}}{R_0}(1+\frac{\cos\theta}{R_m})A_mN_m\sqrt{R_mZ}\pi\left(-\frac{p}{a}\cos\phi\ C_pS_m-\frac{m}{b}\sin\phi\ S_pC_m\right) \quad \text{(B.9a)}$$

$$e_{\phi,f}^{\mathrm{TM}}=\frac{j}{2\lambda_0}\frac{e^{-jkR_0}}{R_0}(\frac{1}{R_m}+\cos\theta)A_mN_m\sqrt{R_mZ}\pi\left(\frac{p}{a}\sin\phi\ C_pS_m-\frac{m}{b}\cos\phi\ S_pC_m\right) \quad \text{(B.9b)}$$

$$e_{\theta,f}^{\mathrm{TE}}=\frac{j}{2\lambda_0}\frac{e^{-jkR_0}}{R_0}(1+R_m\cos\theta)A_mN_m\sqrt{R_mZ}\pi\left(\frac{m}{b}\cos\phi\ C_pS_m-\frac{p}{a}\sin\phi\ S_pC_m\right) \quad \text{(B.9c)}$$

$$e_{\phi,f}^{\mathrm{TE}}=\frac{j}{2\lambda_0}\frac{e^{-jkR_0}}{R_0}(R_m+\cos\theta)A_mN_m\sqrt{R_mZ}\pi\left(-\frac{m}{b}\sin\phi\ C_pS_m-\frac{p}{a}\cos\phi\ S_pC_m\right) \quad \text{(B.9d)}$$

Für die Teilintegrale C_p, C_m, S_p und S_m gilt:

$$C_p=\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\cos\left(\frac{p\pi x'}{a}+\frac{p\pi}{2}\right)e^{jkx'\sin\theta\cos\phi}dx'$$

$$=\frac{jk\sin\theta\cos\phi\left[(-1)^pe^{jk\sin\theta\cos\phi\frac{a}{2}}-e^{-jk\sin\theta\cos\phi\frac{a}{2}}\right]}{\left(\frac{p\pi}{a}\right)^2-(k\sin\theta\cos\phi)^2} \quad \text{(B.10a)}$$

$$C_m=\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\cos\left(\frac{m\pi y'}{b}+\frac{m\pi}{2}\right)e^{jky'\sin\theta\sin\phi}dy'$$

$$=\frac{jk\sin\theta\sin\phi\left[(-1)^me^{jk\sin\theta\sin\phi\frac{b}{2}}-e^{-jk\sin\theta\sin\phi\frac{b}{2}}\right]}{\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2-(k\sin\theta\sin\phi)^2} \quad \text{(B.10b)}$$

$$S_p=\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\sin\left(\frac{p\pi x'}{a}+\frac{p\pi}{2}\right)e^{jkx'\sin\theta\cos\phi}dx'$$

$$=\frac{-\frac{p\pi}{a}\left[(-1)^pe^{jk\sin\theta\cos\phi\frac{a}{2}}-e^{-jk\sin\theta\cos\phi\frac{a}{2}}\right]}{\left(\frac{p\pi}{a}\right)^2-(k\sin\theta\cos\phi)^2} \quad \text{(B.10c)}$$

$$S_m = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \sin\left(\frac{m\pi y'}{b} + \frac{m\pi}{2}\right) e^{jky' \sin\theta \sin\phi} dy'$$

$$= \frac{-\frac{m\pi}{b}\left[(-1)^m e^{jk\sin\theta\sin\phi\frac{b}{2}} - e^{-jk\sin\theta\sin\phi\frac{b}{2}}\right]}{\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 - (k\sin\theta\sin\phi)^2} \quad \text{(B.10d)}$$

Man beachte, daß sich die komplexen Exponentialfunktionen folgendermaßen ausdrücken lassen:

$$(-1)^n e^{jx} - e^{-jx} = \begin{cases} -2\cos x & \text{für } n \text{ ungerade} \\ 2j\sin x & \text{für } n \text{ gerade} \end{cases} \quad \text{(B.11)}$$

Ist p oder m Null, so kann in den Brüchen der Nenner Null werden. Hier seien deshalb noch die Werte für C_p, C_m, S_p und S_m für diese Fälle angegeben:

$$C_p\big|_{p=0} = 2\frac{\sin(k\sin\theta\cos\phi\frac{a}{2})}{k\sin\theta\cos\phi\frac{a}{2}} = 2\mathrm{si}(k\sin\theta\cos\phi\frac{a}{2}) \quad \text{(B.12a)}$$

$$C_m\big|_{m=0} = 2\frac{\sin(k\sin\theta\sin\phi\frac{b}{2})}{k\sin\theta\sin\phi\frac{b}{2}} = 2\mathrm{si}(k\sin\theta\sin\phi\frac{b}{2}) \quad \text{(B.12b)}$$

$$S_p\big|_{p=0} = 0 \quad \text{(B.12c)}$$

$$S_m\big|_{m=0} = 0 \quad \text{(B.12d)}$$

B.2 Zylindrische Hohlleiter

Für das Fernfeld gilt bei einem zylindrischen Hohlleiter:

$$e_{\theta,f} = \frac{j}{2\lambda_0}\frac{e^{-jkR_0}}{R_0}\int_0^{2\pi}\int_0^{a}\left[e_x\cos\phi + e_y\sin\phi - Z_0\cos\theta\left(h_x\sin\phi - h_y\cos\phi\right)\right]$$

$$\times e^{jkr'\sin\theta\cos(\phi-\phi')} r'dr'd\phi' \quad \text{(B.13a)}$$

$$e_{\phi,f} = \frac{j}{2\lambda_0}\frac{e^{-jkR_0}}{R_0}\int_0^{2\pi}\int_0^{a}\left[\cos\theta\left(-e_x\sin\phi + e_y\cos\phi\right) - Z_0\left(h_x\cos\phi + h_y\sin\phi\right)\right]$$

$$\times e^{jkr'\sin\theta\cos(\phi-\phi')} r'dr'd\phi' \quad \text{(B.13b)}$$

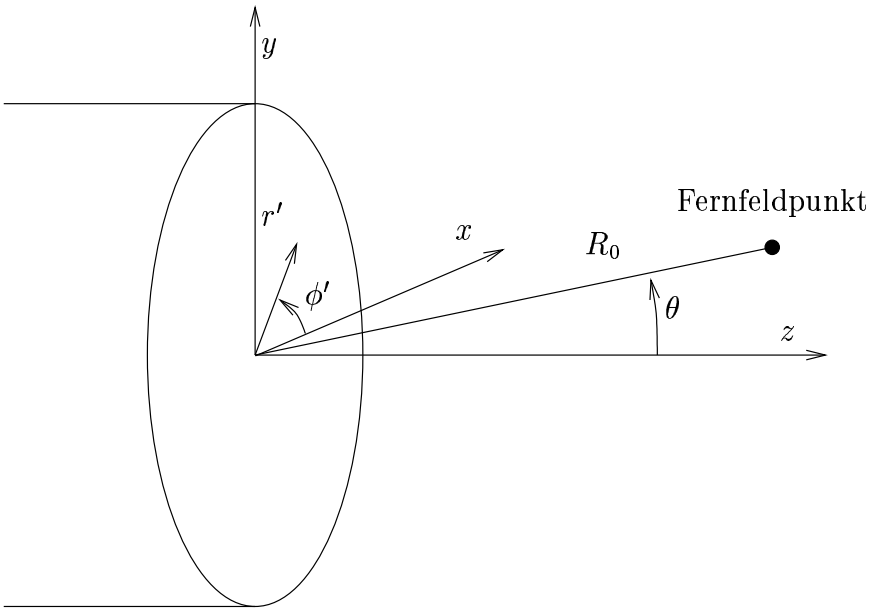


Abbildung 48: Koordinatensystem für die Fernfeldberechnung bei Rundhohlleitern

Hier sind r' und ϕ' Zylinderkoordinaten auf der Apertur. Die Komponenten der magnetischen Feldstärke werden wieder eliminiert, indem man sie folgendermaßen ausdrückt:

$$h_x^{\mathrm{TM}} = -e_y^{\mathrm{TM}} \frac{1}{R_m Z_0} \tag{B.14a}$$

$$\begin{aligned} h_y^{\mathrm{TM}} &= e_x^{\mathrm{TM}} \frac{1}{R_m Z_0} \\ h_x^{\mathrm{TE}} &= -e_y^{\mathrm{TE}} \frac{R_m}{Z_0} \end{aligned} \tag{B.14b}$$

$$h_y^{\mathrm{TE}} = e_x^{\mathrm{TE}} \frac{R_m}{Z_0} \tag{B.14c}$$

Die Fernfeldgleichungen können so vereinfacht werden:

$$\begin{aligned} e_{\theta,f} = \frac{j}{2\lambda_0} \frac{e^{-jkR_0}}{R_0} (1 + d\cos\theta) \\ \times \int_0^{2\pi} \int_0^{a} \left[e_x \cos\phi + e_y \sin\phi \right] e^{jkr' \sin\theta \cos(\phi - \phi')} r' dr' d\phi' \end{aligned} \tag{B.15a}$$

$$e_{\phi,f} = \frac{j}{2\lambda_0}\frac{e^{-jkR_0}}{R_0}(d+\cos\theta) \times \int_0^{2\pi}\int_0^{a}[-e_x\sin\phi + e_y\cos\phi]\, e^{jkr'\sin\theta\cos(\phi-\phi')} r'dr'd\phi' \quad \text{(B.15b)}$$

Mit:

$$d = \begin{cases} \frac{1}{R_m} \text{ für TM-Wellen} \\ \\ R_m \text{ für TE-Wellen} \end{cases} \quad \text{(B.16)}$$

Die transversalen elektrischen Feldkomponenten in kartesischen Koordinaten ergeben sich zu:

$$e_x = e_r\cos(\phi) - e_\phi\sin(\phi) \quad \text{(B.17a)}$$

$$e_y = e_r\sin(\phi) + e_\phi\cos(\phi) \quad \text{(B.17b)}$$

Nimmt man in den Feldgleichungen (2.76a) bis (2.77e) noch einen beliebigen Polarisationswinkel α an, so erhält man für die Feldkomponenten:

$$e_x^{\mathrm{TM}} = A_m N_m\sqrt{R_m Z}\left[\frac{X_m}{a}J_p'\left(\frac{rX_m}{a}\right)\sin[p(\phi+\alpha)]\cos(\phi) - \frac{p}{r}J_p\left(\frac{rX_m}{a}\right)\cos[p(\phi+\alpha)]\sin(\phi)\right] \quad \text{(B.18a)}$$

$$e_y^{\mathrm{TM}} = A_m N_m\sqrt{R_m Z}\left[\frac{X_m}{a}J_p'\left(\frac{rX_m}{a}\right)\sin[p(\phi+\alpha)]\sin(\phi) + \frac{p}{r}J_p\left(\frac{rX_m}{a}\right)\cos[p(\phi+\alpha)]\cos(\phi)\right] \quad \text{(B.18b)}$$

$$e_x^{\mathrm{TE}} = -A_m N_m\sqrt{R_m Z}\left[\frac{p}{r}J_p\left(\frac{rX_m}{a}\right)\sin[p(\phi+\alpha)]\cos(\phi) - \frac{X_m}{a}J_p'\left(\frac{rX_m}{a}\right)\cos[p(\phi+\alpha)]\sin(\phi)\right] \quad \text{(B.18c)}$$

$$e_y^{\mathrm{TE}} = -A_m N_m\sqrt{R_m Z}\left[\frac{p}{r}J_p\left(\frac{rX_m}{a}\right)\sin[p(\phi+\alpha)]\sin(\phi) + \frac{X_m}{a}J_p'\left(\frac{rX_m}{a}\right)\cos[p(\phi+\alpha)]\cos(\phi)\right] \quad \text{(B.18d)}$$

Nun werden folgende Beziehungen verwendet:

$$\sin(p\phi+p\alpha)\sin(\phi)=\frac{1}{2}[\cos(p\alpha)(\cos(p-1)\phi-\cos(p+1)\phi) + \sin(p\alpha)(\sin(p+1)\phi-\sin(p-1)\phi)] \quad \text{(B.19a)}$$

$$\cos(p\phi+p\alpha)\cos(\phi)=\frac{1}{2}[\cos(p\alpha)(\cos(p-1)\phi+\cos(p+1)\phi) - \sin(p\alpha)(\sin(p-1)\phi+\sin(p+1)\phi)] \quad \text{(B.19b)}$$

$$\cos(p\phi+p\alpha)\sin(\phi)=\frac{1}{2}[\cos(p\alpha)(\sin(p+1)\phi-\sin(p-1)\phi) - \sin(p\alpha)(\cos(p-1)\phi-\cos(p+1)\phi)] \quad \text{(B.19c)}$$

$$\sin(p\phi+p\alpha)\cos(\phi)=\frac{1}{2}[\cos(p\alpha)(\sin(p-1)\phi+\sin(p+1)\phi) + \sin(p\alpha)(\cos(p-1)\phi+\cos(p+1)\phi)] \quad \text{(B.19d)}$$

Ferner werden als Abkürzungen eingeführt:

$$A=\frac{p}{r}J_p\left(\frac{rX_m}{a}\right) \quad \text{(B.20)}$$

$$B=\frac{X_m}{a}J'_p\left(\frac{rX_m}{a}\right) \quad \text{(B.21)}$$

Die Feldkomponenten werden nun zu:

$$e_x^{\mathrm{TM}}=A_mN_m\sqrt{R_mZ}\frac{1}{2}\{\cos p\alpha\,[(B+A)\sin(p-1)\phi+(B-A)\sin(p+1)\phi] + \sin p\alpha\,[(B+A)\cos(p-1)\phi+(B-A)\cos(p+1)\phi]\} \quad \text{(B.22a)}$$

$$e_y^{\mathrm{TM}}=A_mN_m\sqrt{R_mZ}\frac{1}{2}\{\cos p\alpha\,[(B+A)\cos(p-1)\phi+(-B+A)\cos(p+1)\phi] + \sin p\alpha\,[(-B-A)\sin(p-1)\phi+(B-A)\sin(p+1)\phi]\} \quad \text{(B.22b)}$$

$$e_x^{\mathrm{TE}}=A_mN_m\sqrt{R_mZ}\frac{1}{2}\{\cos p\alpha\,[(-A-B)\sin(p-1)\phi+(-A+B)\sin(p+1)\phi] + \sin p\alpha\,[(-A-B)\cos(p-1)\phi+(-A+B)\cos(p+1)\phi]\} \quad \text{(B.22c)}$$

$$e_y^{\mathrm{TE}}=A_mN_m\sqrt{R_mZ}\frac{1}{2}\{\cos p\alpha\,[(-A-B)\cos(p-1)\phi+(A-B)\cos(p+1)\phi] + \sin p\alpha\,[(A+B)\sin(p-1)\phi+(-A+B)\sin(p+1)\phi]\} \quad \text{(B.22d)}$$

Die Terme $(A-B)$ und $(A+B)$ können wie folgt angegeben werden:

$$A-B=\frac{X_m}{a}J_{p+1}\left(\frac{rX_m}{a}\right) \tag{B.23}$$

$$A+B=\frac{X_m}{a}J_{p-1}\left(\frac{rX_m}{a}\right) \tag{B.24}$$

Um nun aus diesen Beziehungen das Fernfeld zu ermitteln, werden folgende Integralbeziehungen verwendet:

$$\int_0^{2\pi} e^{ju\cos(\phi-\phi')}\cos(n\phi')d\phi'=2\pi j^n\cos(n\phi)J_n(u) \tag{B.25a}$$

$$\int_0^{2\pi} e^{ju\cos(\phi-\phi')}\sin(n\phi')d\phi'=2\pi j^n\sin(n\phi)J_n(u), \tag{B.25b}$$

wobei in diesem Fall gilt:

$$u=kr'\sin\theta$$

Somit ergeben sich folgende Fernfelder:

$$e^{\mathrm{TM}}_{\theta,f}=\frac{j}{2\lambda_0}\frac{e^{-jkR_0}}{R_0}(1+\frac{1}{R_m}\cos\theta)\int_0^a\left[U_{\mathrm{TM},x}\cos\phi+U_{\mathrm{TM},y}\sin\phi\right]r'dr' \tag{B.26a}$$

$$e^{\mathrm{TM}}_{\phi,f}=\frac{j}{2\lambda_0}\frac{e^{-jkR_0}}{R_0}(\frac{1}{R_m}+\cos\theta)\int_0^a\left[-U_{\mathrm{TM},x}\sin\phi+U_{\mathrm{TM},y}\cos\phi\right]r'dr' \tag{B.26b}$$

Mit:

$$U_{\mathrm{TM},x}=A_mN_m\sqrt{R_mZ}\frac{X_m}{a}\pi\left\{j^{p-1}J_{p-1}(kr'\sin\theta)J_{p-1}\left(\frac{r'X_m}{a}\right)\sin[(p-1)\phi+p\alpha]\right.$$
$$\left.-j^{p+1}J_{p+1}(kr'\sin\theta)J_{p+1}\left(\frac{r'X_m}{a}\right)\sin[(p+1)\phi+p\alpha]\right\} \tag{B.27}$$

$$U_{\mathrm{TM},y}=A_mN_m\sqrt{R_mZ}\frac{X_m}{a}\pi\left\{j^{p-1}J_{p-1}(kr'\sin\theta)J_{p-1}\left(\frac{r'X_m}{a}\right)\cos[(p-1)\phi+p\alpha]\right.$$
$$\left.+j^{p+1}J_{p+1}(kr'\sin\theta)J_{p+1}\left(\frac{r'X_m}{a}\right)\cos[(p+1)\phi+p\alpha]\right\} \tag{B.28}$$

Für TE-Moden gilt:

$$e_{\theta,f}^{\mathrm{TE}} = \frac{j}{2\lambda_0}\frac{e^{-jkR_0}}{R_0}(1+R_m\cos\theta)\int_0^a \left[U_{\mathrm{TE},x}\cos\phi + U_{\mathrm{TE},y}\sin\phi\right] r'dr' \tag{B.29a}$$

$$e_{\phi,f}^{\mathrm{TE}} = \frac{j}{2\lambda_0}\frac{e^{-jkR_0}}{R_0}(R_m+\cos\theta)\int_0^a \left[-U_{\mathrm{TE},x}\sin\phi + U_{\mathrm{TE},y}\cos\phi\right] r'dr' \tag{B.29b}$$

Mit:

$$U_{\mathrm{TE},x} = A_m N_m \sqrt{R_m Z}\frac{X_m}{a}\pi\left\{-j^{p-1}J_{p-1}(kr'\sin\theta)J_{p-1}\left(\frac{r'X_m}{a}\right)\sin[(p-1)\phi+p\alpha]\right.$$
$$\left. -j^{p+1}J_{p+1}(kr'\sin\theta)J_{p+1}\left(\frac{r'X_m}{a}\right)\sin[(p+1)\phi+p\alpha]\right\} \tag{B.30}$$

$$U_{\mathrm{TE},y} = A_m N_m \sqrt{R_m Z}\frac{X_m}{a}\pi\left\{-j^{p-1}J_{p-1}(kr'\sin\theta)J_{p-1}\left(\frac{r'X_m}{a}\right)\cos[(p-1)\phi+p\alpha]\right.$$
$$\left. +j^{p+1}J_{p+1}(kr'\sin\theta)J_{p+1}\left(\frac{r'X_m}{a}\right)\cos[(p+1)\phi+p\alpha]\right\} \tag{B.31}$$

Die verbleibenden Integrale können nun geschlossen ausgewertet werden, wenn man folgende Beziehung verwendet:

$$\int J_n(ax)J_n(bx)xdx = \frac{x}{a^2-b^2}(bJ_n(ax)J_n'(bx) - aJ_n(bx)J_n'(ax)) \tag{B.32}$$

Somit erhält man schließlich die Fernfelder der Moden als geschlossene Terme:

$$e_{\theta,f}^{\mathrm{TM}} = A_m N_m \sqrt{R_m Z}X_m\pi\frac{j}{2\lambda_0}\frac{e^{-jkR_0}}{R_0}(1+\frac{1}{R_m}\cos\theta)$$
$$\times\left\{\left[Q_{p-1}\sin[(p-1)\phi+p\alpha] - Q_{p+1}\sin[(p+1)\phi+p\alpha]\right]\cos\phi + \right.$$
$$\left.\left[Q_{p-1}\cos[(p-1)\phi+p\alpha] + Q_{p+1}\cos[(p+1)\phi+p\alpha]\right]\sin\phi\right\} \tag{B.33a}$$

$$e_{\phi,f}^{\mathrm{TM}} = A_m N_m \sqrt{R_m Z}X_m\pi\frac{j}{2\lambda_0}\frac{e^{-jkR_0}}{R_0}(\frac{1}{R_m}+\cos\theta)$$
$$\times\left\{\left[-Q_{p-1}\sin[(p-1)\phi+p\alpha] + Q_{p+1}\sin[(p+1)\phi+p\alpha]\right]\sin\phi + \right.$$
$$\left.\left[Q_{p-1}\cos[(p-1)\phi+p\alpha] + Q_{p+1}\cos[(p+1)\phi+p\alpha]\right]\cos\phi\right\} \tag{B.33b}$$

$$e_{\theta,f}^{\mathrm{TE}} = A_m N_m \sqrt{R_m Z} X_m \pi \frac{j}{2\lambda_0} \frac{e^{-jkR_0}}{R_0} (1 + R_m \cos\theta)$$
$$\times \left\{ \left[-Q_{p-1} \sin[(p-1)\phi + p\alpha] - Q_{p+1} \sin[(p+1)\phi + p\alpha] \right] \cos\phi + \right.$$
$$\left. \left[-Q_{p-1} \cos[(p-1)\phi + p\alpha] + Q_{p+1} \cos[(p+1)\phi + p\alpha] \right] \sin\phi \right\} \quad \text{(B.33c)}$$

$$e_{\phi,f}^{\mathrm{TE}} = A_m N_m \sqrt{R_m Z} X_m \pi \frac{j}{2\lambda_0} \frac{e^{-jkR_0}}{R_0} (R_m + \cos\theta)$$
$$\times \left\{ \left[+Q_{p-1} \sin[(p-1)\phi + p\alpha] + Q_{p+1} \sin[(p+1)\phi + p\alpha] \right] \sin\phi + \right.$$
$$\left. \left[-Q_{p-1} \cos[(p-1)\phi + p\alpha] + Q_{p+1} \cos[(p+1)\phi + p\alpha] \right] \cos\phi \right\}, \quad \text{(B.33d)}$$

wobei gilt:

$$Q_n = j^n \frac{1}{a} \int_0^a J_n(kr' \sin\theta) J_n\left(\frac{r' X_m}{a}\right) r' dr =$$
$$\frac{j^n}{\left(\frac{X_m}{a}\right)^2 - (k \sin\theta)^2} \left[k \sin\theta J_n(X_m) J_n'(ka \sin\theta) - \frac{X_m}{a} J_n'(X_m) J_n(ka \sin\theta) \right] \quad \text{(B.34)}$$

Der Fall $p = 0$ wird gesondert betrachtet. Diese Moden sind rotationssymmetrisch, d.h. der Polarisationswinkel α taucht hier nicht auf. Die Feldkomponenten der $\mathrm{TM}_{0\mathrm{m}}$-Wellen lauten:

$$e_x^{\mathrm{TM}} = A_m N_m \sqrt{R_m Z} \frac{X_m}{a} J_0'\left(\frac{r X_m}{a}\right) \cos\phi \quad \text{(B.35a)}$$

$$e_y^{\mathrm{TM}} = A_m N_m \sqrt{R_m Z} \frac{X_m}{a} J_0'\left(\frac{r X_m}{a}\right) \sin\phi \quad \text{(B.35b)}$$

Für $\mathrm{TE}_{0\mathrm{m}}$-Wellen gilt:

$$e_x^{\mathrm{TE}} = A_m N_m \sqrt{R_m Z} \frac{X_m}{a} J_0'\left(\frac{r X_m}{a}\right) \sin\phi \quad \text{(B.36a)}$$

$$e_y^{\mathrm{TE}} = -A_m N_m \sqrt{R_m Z} \frac{X_m}{a} J_0'\left(\frac{r X_m}{a}\right) \cos\phi \quad \text{(B.36b)}$$

Die Fernfelder ergeben sich dann zu:

$$e_{\theta,f}^{\mathrm{TM}} = \frac{j}{2\lambda_0} \frac{e^{-jkR_0}}{R_0} (1 + \frac{1}{R_m} \cos\theta) A_m N_m \sqrt{R_m Z} \frac{X_m}{a}$$

$$\times \int_0^{2\pi} \int_0^a J_0'\left(\frac{r' X_m}{a}\right) \left[\cos\phi' \cos\phi + \sin\phi' \sin\phi \right] e^{jkr' \sin\theta \cos(\phi - \phi')} r' dr' d\phi' \quad \text{(B.37a)}$$

$$e_{\phi,f}^{\mathrm{TM}} = \frac{j}{2\lambda_0}\frac{e^{-jkR_0}}{R_0}\left(\frac{1}{R_m}+\cos\theta\right)A_m N_m \sqrt{R_m Z}\frac{X_m}{a}$$

$$\times \int_0^{2\pi}\int_0^{a} J_0'\left(\frac{r' X_m}{a}\right)\left[-\cos\phi'\sin\phi+\sin\phi'\cos\phi\right] e^{jkr'\sin\theta\cos(\phi-\phi')} r'\,dr'\,d\phi' \quad \text{(B.37b)}$$

$$e_{\theta,f}^{\mathrm{TE}} = \frac{j}{2\lambda_0}\frac{e^{-jkR_0}}{R_0}\left(1+R_m\cos\theta\right)A_m N_m \sqrt{R_m Z}\frac{X_m}{a}$$

$$\times \int_0^{2\pi}\int_0^{a} J_0'\left(\frac{r' X_m}{a}\right)\left[\sin\phi'\cos\phi-\cos\phi'\sin\phi\right] e^{jkr'\sin\theta\cos(\phi-\phi')} r'\,dr'\,d\phi' \quad \text{(B.37c)}$$

$$e_{\phi,f}^{\mathrm{TE}} = \frac{j}{2\lambda_0}\frac{e^{-jkR_0}}{R_0}\left(R_m+\cos\theta\right)A_m N_m \sqrt{R_m Z}\frac{X_m}{a}$$

$$\times \int_0^{2\pi}\int_0^{a} J_0'\left(\frac{r' X_m}{a}\right)\left[-\sin\phi'\sin\phi-\cos\phi'\cos\phi\right] e^{jkr'\sin\theta\cos(\phi-\phi')} r'\,dr'\,d\phi' \quad \text{(B.37d)}$$

Löst man die Integrale in ϕ-Richtung wie im Fall $p \neq 0$, so erhält man:

$$e_{\theta,f}^{\mathrm{TM}} = \frac{j}{2\lambda_0}\frac{e^{-jkR_0}}{R_0}2\pi j\left(1+\frac{1}{R_m}\cos\theta\right)A_m N_m \sqrt{R_m Z}\frac{X_m}{a}$$

$$\times \int_0^{a} J_1(kr'\sin\theta) J_1\left(\frac{r' X_m}{a}\right) r'\,dr' \quad \text{(B.38a)}$$

$$e_{\phi,f}^{\mathrm{TM}} = 0 \quad \text{(B.38b)}$$

$$e_{\theta,f}^{\mathrm{TE}} = 0 \quad \text{(B.38c)}$$

$$e_{\phi,f}^{\mathrm{TE}} = -\frac{j}{2\lambda_0}\frac{e^{-jkR_0}}{R_0}2\pi j\left(R_m+\cos\theta\right)A_m N_m \sqrt{R_m Z}\frac{X_m}{a}$$

$$\times \int_0^{a} J_1(kr'\sin\theta) J_1\left(\frac{r' X_m}{a}\right) r'\,dr' \quad \text{(B.38d)}$$

Nach Auswertung der Integrale in r-Richtung erhält man für die e_θ-Komponente des Fernfeldes der $\mathrm{TM}_{0\mathrm{m}}$-Wellen:

$$e_{\theta,f}^{\mathrm{TM}} = \frac{j}{\lambda_0}\frac{e^{-jkR_0}}{R_0}\pi(1+\frac{1}{R_m}\cos\theta)A_m N_m\sqrt{R_m Z}X_m Q_1 \tag{B.39a}$$

Die e_ϕ-Komponente des Fernfeldes der $\mathrm{TE}_{0\mathrm{m}}$-Moden ergibt sich zu:

$$e_{\phi,f}^{\mathrm{TE}} = -\frac{j}{\lambda_0}\frac{e^{-jkR_0}}{R_0}\pi(R_m+\cos\theta)A_m N_m\sqrt{R_m Z}X_m Q_1, \tag{B.39b}$$

wobei Q_1 nach Gleichung (B.34) berechnet wird. Die Komponenten des Fernfeldes in kartesischen Koordinaten ergeben sich zu:

$$e_{x,f} = e_{\theta,f}\cos\theta\cos\phi - e_{\phi,f}\sin\phi \tag{B.40a}$$

$$e_{y,f} = e_{\theta,f}\cos\theta\sin\phi + e_{\phi,f}\cos\phi \tag{B.40b}$$

Die Besselfunktionen $J_{p-1}(X_m)$, $J_{p+1}(X_m)$ und deren Ableitungen sind von der Position des gewünschten Fernfeldpunktes unabhängig. Sie müssen nur einmal berechnet werden. Es müssen für jeden Punkt die Funktionen $J_{p-1}(ka\sin\theta)$ und $J_{p+1}(ka\sin\theta)$ sowie deren Ableitungen berechnet werden. Es wird eine Routine aus [20] verwendet, die die Besselfunktionen und deren Ableitungen in einem Funktionsaufruf berechnet. Diese Routine funktioniert jedoch nur für Argumente, die größer als Null sind. Liegt der Feldpunkt auf der z-Achse, ist $\sin\theta = 0$. Dieser Fall muß gesondert behandelt werden. Es gilt:

$$Q_n(\theta=0) = \begin{cases} -\frac{a}{X_m}J_0'(X_m) & \text{für } n=0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{B.41}$$

Das Feld bei $\theta = 0$ verschwindet also aus Symmetriegründen für alle Moden mit $p \neq 1$.

C Summary

This work deals with the optimization of oversized waveguide components. Oversized waveguides are used in high power microwave systems (e.g. electron cyclotron resonance heating systems in nuclear fusion experiments) where the field strengths could lead to arcing if monomode waveguides are used. But also in low-power applications, like plasma diagnostics or radio astronomy, oversized waveguides are used because of their better broadband characteristics and low damping.

In an oversized waveguide, where more than one mode can propagate, geometry perturbations like diameter variation or curvature lead to mode conversion. In ordinary transmissionline components like waveguide bends, mode conversion should be as small as possible, because spurious modes disturb the desired field pattern. Higher-order spurious modes also have higher local field strengths which increase the risk of arcing and higher ohmic losses. On the other hand, in mode converters, geometry perturbations are used to convert the incoming mode to the desired output mode.

In chapter 2 (Page 10), the field components of waveguide modes are derived from Maxwells equations. Though this derivation can be found in literature, it is presented here, because some details, which are necessary for the formulation of hybrid modes in corrugated waveguides and for the calculation of the mode conversion in curved waveguides, differ from the conventions used in common books. The formulas are first derived in general coordinates. In the following sections, the fields are given for rectangular and cylindrical waveguides. Cylindrical waveguides can also have an azimuthal corrugation. The rectangular corrugation slots are taken into account as shorted transmission lines. The result is an anisotropic wall impedance, for which the fields of the modes have special boundary conditions. In such corrugated waveguides, the TE_{0m}-Modes are the same as in smooth wall waveguides. TM_{0m}-modes in corrugated waveguides have eigenvalues and field distributions which differ from the smooth wall waveguide. Modes with an azimuthal index of greater than zero exist only as so-called hybrid modes which consist of a TM- and a TE-component.

In chapter 3 (Page 34), formulas for the mode conversion due to curvature are derived. To calculate the fields in a curved waveguide, the total traversal fields are expanded into a series of modes of the straight waveguide. These fields are inserted into Maxwells equations, which are written in the coordinate system of the curved waveguide. The result of this derivation is a system of coupled ordinary differential equations which describe the amplitudes of the modes along the curved waveguide section (Equations 3.22a and 3.22b, Page 38). The field distributions of the various individual modes in the curved waveguide are only present in the coupling coefficients, which can be calculated using analytical formulas for every waveguide mode.

If reflected modes are neglected, i.e. if all present modes are propagating in the same direction, the system of coupled mode equations is an initial value problem. Ohmic losses can be taken into account by using complex propagation constants for the modes (Equation 3.39, Page 46).

The errors due to the omission of reflected modes are negligible, as the power of the reflected modes is small, if the curvature radius is much larger than the waveguide dimension in the curvature plane.

Another problem are the ohmic losses, which are calculated for each mode separately using the corresponding wall-currents. This is correct only if there in one mode propagating in the waveguide. For more modes, the wall currents of all modes superpose resulting in a total power loss, which in general differs from the sum of the power losses of the single modes. If no degenerate modes are existing and if the bend is longer than the largest beat wavelength, this error can be negligible. For the degenerate TE_{1m}/TM_{1m}-mode pairs in rectangular waveguides however, which can be treated as one single mode, it is not possible to calculate an exact value for the attenuation constant.

In highly oversized waveguides, where several thousand modes can exist, only few modes are taken into account, since the total calculation time is approximately proportional to the number of modes squared. To reduce the errors due to the limited number of modes, some test calculations can be done by first choosing a large number of modes and do the optimization only with the modes, which had a non-negligible amplitude in the test calculation.

If only 2 coupled modes are propagating inside a waveguide, and the ohmic losses are negligible, analytical solutions of the coupled mode equations can be found for some cases. From the amplitudes of 2 coupled modes in a bend with a constant curvature, which are known analytically, the maximum spurious mode content inside a bend with a given size can be estimated, if one dominant spurious mode exists.

In the general case, the initial value problem is solved numerically with an adaptive-stepsize Runge-Kutta-Method. Starting with a mode mixture coming from the straight waveguide, the mode amplitudes at arbitrary points inside the bent waveguide can be obtained. This method has been used for calculating the mode spectrum in bent waveguides [24].

From the amplitudes of the modes inside a waveguide bend and the corresponding electric and magnetic fields, the total Poynting vector inside the bend can be calculated. In a waveguide bend with a large spurious mode content, the Poynting vector describes a wave which is reflected several times at the waveguide walls (see Figure 13, Page 55, left).

In an optimized bend, the incoming field pattern is deformed by converting a small fraction of the power into some low order spurious modes. In some cases, this deformed field is an eigenmode mixture of the curved waveguide, which does not change along the bend. At the bend output, this eigenmode is almost completely converted back into the main mode of the following straight waveguide (see Figure 13, Page 55, right).

Chapter 4 (Page 56) describes, how the optimization of waveguide bends can be realized in general. Almost every optimization problem can be described by finding the global minimum of an objective function. The arguments of the function are the free parameters which can be changed by the optimizer. The objective function returns a real value which indicates the quality.

To define the arguments for the objective function, the curvature function of the bend is expanded into a Fourier-series or a series of Chebycheff polynomials. In all examples, only even coefficients were allowed for the optimization. This always leads to symmetrical bend geometries and reduces the number of optimization parameters.

The coefficients of the curvature are then changed to obtain the best results, i.e. the global Minimum of the objective function. If the waveguide is corrugated, the corrugation depth can be an additional argument for the objective function.

A bend has some geometric boundary conditions like the total angle and the size, i.e. the coordinates of the start- and endpoint. Because these conditions must be fulfilled by every bend which is suggested by the optimizer, a special scaling method was developed which transforms an arbitrary set of optimization coefficients into curvature coefficients which always fit into the given geometry. This method has the additional advantage, that the number of optimization coefficients is one less than the number of series coefficients of the curvature function, because the zero-order coefficient can always be obtained from the total angle and the higher order coefficients. This reduces the number of optimization parameters and therefore increases the optimization speed.

To calculate the objective function, the optimization coefficients are first transformed into series-coefficients for the curvature function. For the resulting waveguide bend, the mode conversion is calculated by integrating the system of coupled mode equations. The return value of the objective function is a weighted average of the output power of spurious modes, the maximum power of spurious modes inside the bend and the total ohmic losses. The output power of spurious modes describes the perturbation of the field pattern in the following straight waveguide. The maximum power of spurious modes inside the bend describes the maximum field deformation which can lead to arcing due to high local field strengths. The total ohmic losses indicate the power loss and the heating of the bend. The weight factors for these 3 values can be chosen arbitrarily according to the actual problem. If broadband bends are optimized, the objective function is calculated for several frequencies and the return value is the average value of the results for the different frequencies.

Chapter 5 (Page 66) deals with the two optimization methods which were implemented. The first method is a *Genetic Algorithm*. Genetic Algorithms have become popular in many technical optimization tasks during the last years [27], [22].

In Genetic Algorithms, *chromosomes* are described in a way, that each chromosome completely describes an individual. The first Genetic algorithms were binary coded i.e. the smallest information units (the *genes*) were single bits. The manipulation of the genes was done using boolean operations. In optimization problems with real optimization parameters, the newer real coded Genetic Algorithms are used. In real coded Genetic Algorithms the genes are real numbers, the chromosomes are vectors containing all genes necessary to describe an individual. In this implementation, a chromosome is simply an array which contains the coefficients for the curvature and, for corrugated waveguides, the corrugation depth.

Starting with one or more first guesses, a *population* of many Individuals is created by adding small random numbers to the coefficients of the first guesses. In each generation, pairs are chosen for mating. From the chromosomes of one pair, offspring is created. In the present implementation, each pair produces 3 children. The chromosomes of the children are derived as a weighted average of the coefficients of the parents with different weight factors for each offspring individual.

The offspring is then mutated by adding random numbers to single coefficients of their chromosomes. This mutation is very important, because it prevents single coefficients from becoming equal in the whole population which would make a further optimization impossible. If bigger random numbers are used, the mutation also offers a chance for single individuals to leave the area of one local minimum of the objective function and

move towards a better minimum.
There exist several parameters for the mutation. The mutation probability p_m is the probability for each gene to be mutated at all. The mutation intensity σ_m is a factor by which the random number is multiplied before the mutation. Normally, the mutation should change the genes only slightly. This offers a possibility for the whole population to converge towards the next local minimum.
Every few (typical 5) generations, other mutation parameters are used, with a bigger intensity σ_m and optionally another probability p_m. This offers a chance for single individuals to leave the area of the local minimum and to move into a better minimum. For the random numbers, the user can chose between Gaussian numbers and Cauchy numbers. Gaussian numbers have the advantage, that their values are mostly within known limits. Cauchy numbers can also have very big values even if the mutation intensity σ_m is small.
These mutation parameters must be selected carefully according to the actual problem because they have a great influence on the efficiency of the algorithm. Another improvement can be done by selecting a weaker mutation after a certain value for the objective function is reached. This value can only be found experimentally and should be the highest point of the global minimum which lower than every other local minimum. If this point is found, one can see, that all individuals which have lower values for the objective function, already have similar curvatures. The mutation should then become weaker because the global search with a strong mutation is no longer needed.
After calculating the objective functions of the offspring individuals, the population size is reduced to the number of parents, which can produce offspring in the next generation. To achieve this, the individuals are sorted according to their objective functions and the best individuals survive for the next generation. Is has been observed, that sometimes the best individual already found the global minimum, while the rest of the population remains in another minimum. This situation can last for many generations because for a population generated in the global minimum, at least 2 individuals are needed there. The code has another enhancement, which clones the best individual in each generation. The cloned offspring individual is then mutated like the rest of the offspring. This enhancement can quickly produce a whole population in the better minimum after one single individual was located there.
In the examples, the population size was 50 parents. As each pair produces 3 children, 76 new individuals are created in each generation if the best individual is cloned. This also means, that the objective function has to be evaluated 76 times in each generation.
Unlike in real live, individuals can survive for many generations until they are replaced by better children. This method guarantees, that the result of the optimization can never be worse than the first guess.
The second method which was implemented, is a combination of a *Downhill Simplex* method and a *Simulated Annealing* method. The Downhill Simplex method is a local optimization method, which can be used for optimization problems, when the derivative of the objective function is unknown, or if it's too time consuming to calculate it. A simplex in an N-dimensional space consists of $N+1$ points which enclose a nonzero volume. In the Downhill Simplex method, the simplex consists of points in the parameter space, i.e. each point describes a single waveguide bend. In each step, the downhill simplex method tries to improve the worst point by doing a series of transformations like reflection of the worst

point at the plane of the other points. Figure 18 (Page 75) shows the possible operations. The advantage of the downhill simplex method is, that finding a *local* minimum requires in general only few evaluations of the objective function. The downhill simplex method however does not do a global search in the parameter space. If all points of the simplex are close together in the area of one local minimum, the simplex contracts until all points become equal due to the finite machine precision.

To prevent this behavior, the Downhill Simplex method was combined with a Simulated Annealing algorithm. The idea of the Simulated Annealing Algorithms is, that liquids which freeze and crystallize or metals which anneal *slowly* find a crystal configuration with the lowest possible energy content. This is achieved because the energy of the atoms or ions, which describes their mobility, is decreased as the temperature decreases. Therefore, changes in the crystal lattice, which lead to an increased energy of the whole system, become less likely when the temperature decreases.

In Simulated Annealing Algorithms, the optimization parameters are, mostly randomly, changed and the objective function of the new parameter set is calculated. If the new set is better than the original set, it is accepted for the next step. If the new result is worse, it is accepted with a probability which is calculated from the difference of the 2 objective functions and the *temperature*. Simulated Annealing methods are global optimization techniques, because the new parameter set can be located everywhere in the parameter space depending on the random numbers used for creating the new set. One disadvantage of Simulated Annealing methods is that they do not take the gradient of the objective function into account.

One iteration step of the implemented hybrid method is basically a Downhill Simplex step. The Downhill Simplex method is combined with the Simulated Annealing method by adding exponentially distributed random numbers to the objective functions whenever their values are compared. This means, that the point of the simplex, which is to be *improved* is not always the worst point. The new points, which are obtained by the operations described in Figure 18, can also be accepted if they are worse than before, depending on the random numbers which were added to their objective function values. If the temperature becomes zero, all random numbers are zero and optimization is done only by the Downhill Simplex Method. The temperature is decreased by 20 % each 10 iterations. Even though other annealing schemes have been developed (see [20]), this method has been found very effective for all the examples presented in this work. The only parameter, which has to be adjusted roughly to the actual problem is the starting temperature. If the first guess already has a very low objective function, the starting temperature must be lower than for first guesses with higher (i.e. worse) objective functions.

Unlike Genetic Algorithms, Simulated Annealing methods can theoretically produce results which are worse than the first guess. In this implementation, the best result which was ever found, is saved. Each 200 Iterations, the simplex is reinitialized from the best result. In addition, the temperature is set to the starting value each 1000 steps. With these enhancements, the Simulated Annealing Method can run for an infinite time and, like the Genetic Algorithm, never produces results which are worse than the first guess.

As both implemented optimization methods work with random numbers, which are different in each program run, the results of multiple optimizations can differ. Very large differences have also been found in the numbers of iterations which are needed to obtain

a certain value for the objective functions. It is therefore necessary to run the optimization several times. If the results differ only slightly in each optimization, it increases the sureness, that a global minimum of the objective function was found.
As a test for the methods, a bend with only 2 propagating modes was optimized. The size of the bend was chosen in a way, that the spurious mode in a bend with a constant curvature is completely converted back to the main mode. For the objective function, only the output power of spurious modes was used. This means, that the problem has a known solution with a theoretical value of zero for the objective function.
A numerical calculation of such a bend with a constant curvature results in a spurious mode content of $5.37 \cdot 10^{-11}$ % due to roundoff errors. This value was chosen as the stopping condition for the following optimizations. Starting with a $\sin^2$-curvature and using fixed start- and endpoints, the algorithms always reached a spurious mode content of $5.37 \cdot 10^{-11}$ %. The curvature functions of the resulting bends are sometimes similar to the constant curvature. But especially the Simulated Annealing Method found curvatures, which are completely different (see Fig. 19, page 79). The reason for these different curvatures may be the simplicity of the problem, because if there are only 2 modes propagating in a waveguide, and the peak power of the spurious mode has no effect on the objective function, there are many possibilities where the spurious mode is completely reconverted to the main mode at the bend output. Table 4 shows the number N_i of iterations which were needed for the optimization and the corresponding number N_f of the evaluations of the objective function. Since the evaluation of the objective function is the most time consuming part of the program, the number N_f is also an indicator for the whole optimization time. One can see, that the Genetic Algorithm needed to calculate between 582 and 10234 objective functions for the optimization. The Simulated Annealing method needed between 1345 and 8857 evaluations. This results show that, especially for the Genetic Algorithm, the optimization time can vary dramatically between different program runs with the same parameters.
To reduce the degrees of freedom in finding a curvature with no spurious modes at the output, another optimization was done using a fixed length of the bend. Using this condition, the ratio of the bend length and the beat wavelength of the 2 modes is constant for all bends. The results, which are shown in Fig. 24 (page 83), are more similar to the constant curvature and have the same high mode purity at the output.
The next example in Chapter 6 is a 28 GHz TE_{01}-bend which was designed for the *Département de Recherche Fondamentale sur la Matière Condensée* of the *Commissariat à l'Energie Atomique* in Grenoble/France. The bend was designed for a 10 kW transmission line which connects a gyrotron with an ion source.
The waveguide system is build with cylindrical smooth wall waveguides. In the bend however, a corrugated waveguide is used because the TE_{10}-Mode and the TM_{11}-Mode are degenerate in the smooth wall waveguide and curvature coupling can lead to a complete conversion of the TE_{01}-Mode into the TM_{11}-Mode.
Since the TE_{01}-mode is not affected by the corrugation, the corrugation depth was taken into account for the optimization.
The optimization was started with a constant curvature and a corrugation depth of $0.4\ \frac{\lambda}{4}$. It was done with the Genetic Algorithm because the Simulated Annealing method was not implemented at that time. The objective function took the output power of spurious

modes and the maximum power of spurious modes into account.
After the 400 generations, the algorithm found a curvature function, which has 2 maxima (see Fig. 26, Page 85) and is therefore significantly different from the curvatures which were previously used for the design of waveguide bends. The output power of spurious modes was reduced by the optimization from about 20 % to 0.016 %. The peak power of spurious modes dropped from about 25 % to 11.9 %.
Experiments also were made with different first guesses. The constant curvature however gives the best results and the shortest optimization time, because many of the other curvature functions (like sine or $\sin^2$) represent local minima of the objective function, which have to be left before the actual optimization starts.
A comparison with bends with a sin and a $\sin^2$ curvature shows, that the optimized bend has the best characteristics with respect to the output power of spurious modes and the peak power of spurious modes inside the bend (see Fig 31, page 89).
The bend was manufactured and the output power of spurious modes was measured using a wavenumber spectrometer and a network analyzer. The measured mode spectrum showed a spurious mode content of 1.33 %, which is higher than the computed value of 0.016 %. The measurements of the mode spectrum of the experimental setup, which was done without the bend (see Figures 34 and 36), show, that some spurious modes, especially the TE_{02}- and the TM_{11}-mode are existent without the bend. The TE_{02}-Mode, which was not taken into account for the optimization, can be generated directly from the TE_{01}-mode in the diameter tapers, which were necessary in the experimental setup (see Figure 32). The TM_{11}-Mode, which is degenerate with the TE_{01}-mode, can be exited by minimal geometry disturbances anywhere in the waveguide.
Another reason for the higher measured spurious mode content can be the errors which are made by using a sinusoidal corrugation profile. This corrugation profile can easier be manufactured and has, unlike the rectangular corrugation, no sharp edges where arcing can occur.
The model describing the anisotropic wall impedance only works for rectangular corrugation profiles. Although there are factors which transform a corrugation depth of with a rectangular profile into an equivalent depth with another profile, this transformation can only be exact for one mode. For the manufacturing of the bend, the equivalent corrugation depth was calculated for the HE_{11}-mode, which is the main spurious mode in the TE_{01}-bend, using a scattering matrix program. The eigenvalues of the higher order spurious modes are therefore slightly different from the calculated modes. There are also small errors during the manufacturing process due to the limited machine precision. The resulting error in the mode spectrum is however hard to estimate because the effects of a variation of the actual bend shape on the curvature function are unknown. The measured mode spectrum is however much better than the spurious mode content of the bend with constant curvature, which was used as the initial bend for the optimization.
Chapter 7 (Page 94) describes a comparison of the 2 implemented optimization methods. As a first example, the 28 GHz of the preceding chapter was optimized 10 times with the Genetic Algorithm and the Simulated Annealing method. The resulting curvatures are always similar to the bend which was manufactured and tested (see Fig. 37, Page 96). This indicates, that the algorithms did find a global minimum of the objective function with high probability in this case. The Simulated Annealing Method however needed

much less time for the optimization than the Genetic Algorithm.
The second example is a corrugated 70 GHz TE_{01}-HE_{11} mode converter. Mode converters can be optimized by defining the incoming mode as a spurious mode. Since all possible mode converters have a spurious mode content of 100 % at the input, the peak power to spurious modes cannot be optimized and should have no influence on the objective function. The objective function should take the output power of spurious modes and ohmic losses into account. A minimal power of spurious modes at the end of the converter means, that only the wanted output mode exists there. The ohmic losses should be taken into account, because many possible mode conversions also include higher order modes which have higher losses. By optimizing the total power loss, the algorithm is forced to choose a conversion scheme with a minimal amount of lossy modes inside the converter.
The optimization was started with a straight waveguide, which is, in fact, the worst possible mode converter. Since this is a difficult optimization task, both algorithms where run 10 times with a limited number of 10000 evaluations of the objective function. The best results all have similar curvature functions (see Fig. 39, Page 100) Both algorithms however sometimes stopped with much worse results and different curvatures (see Fig. 38, Page 99). In these cases, the algorithms remained in a higher local minimum of the objective function. This happened only once for Simulated Annealing but 4 times for the Genetic Algorithm.
The last example is the optimization of a broadband rectangular waveguide bend. The frequency range is 50 – 80 GHz. At 50 GHz, there exist 3 coupled modes inside the waveguide. At about 56 GHz, the TE_{40}-Mode also can propagate. In broadband optimizations, the code can take modes into account, whose cutoff frequency is inside the interesting frequency range. If the mode spectrum is calculated for a certain frequency, the amplitudes of all modes with a higher cutoff frequency are automatically set to zero.
The optimization was again done 10 times with both the Simulated Annealing Method and the Genetic Algorithm. In this example, all optimizations produced very similar curvatures (see Fig. 43, Page 104). The Simulated Annealing Algorithm needed fewer evaluations of the objective function than the Genetic Algorithm.
The optimized bend has a spurious mode content at the output of less than 0.12 % for all frequencies (see Fig. 44, right). Figure 45 shows the power sum of spurious modes along the bend for 50, 60, 70 and 80 GHz. The peak power of spurious modes inside the bend is about 3 % for 50 GHz and rises up to 23 % for 80 GHz.
The comparison of the 2 methods shows, that the optimization with the Genetic Algorithm is in general more time-consuming. The results of the methods are basically the same and they are reproduceable in different program runs. This means that both methods are in principal able to find the global minimum of the objective function. In any case however, multiple optimizations are necessary to ensure, that the algorithm was not stopped at a higher local minimum of the objective function.
The Simulated Annealing has the advantage, that a set of annealing parameters could be found which works well for all examples. Only the start-temperature had to be adjusted according to the objective function of the first guess.
Genetic Algorithms however are very sensitive with respect to the parameters used for the mutation. The optimal mutation parameters are different in each problem and can only be found experimentally. This requires several program runs before the actual optimization

starts.
To further enhance these programs, a loop could be written, which does a number of optimizations with the same parameters and the same starting values automatically.
Another approach could be the use of a different method for calculating the fields inside the bent waveguide. The parabolic equation method, which is normally used for terrestrial wave propagation, can also be implemented for oversized waveguides [19]. This method has the advantage, that the total field inside the waveguide is taken into account. No errors are made by calculating the losses for each mode separately or by choosing only a limited number of modes. Using the total fields, the maximum electrical field strength inside the bend, which can be critical in high power applications, can easily be found and taken into account for the optimization. The Parabolic equation method however would be much more time consuming because the problem, which has to be solved, is a partial differential equation in 2 or 3 dimensions. For each step, a system of many linear equations has to be solved. The coupled mode equation has the advantage, that only scalar mode amplitudes must be calculated.
The fields of the modes in corrugated waveguides are calculated using the impedance model, which is only valid for rectangular corrugation profiles. A more general approach consists in calculating the eigenvalues for the modes for arbitrary corrugation profiles using the scattering matrix method [26]. These eigenvalues could be calculated at the beginning of the optimization for different corrugation depths. The actual calculation of the mode conversion would still be done by the very fast integrating the coupled mode equation. By using these enhancements, waveguide components could be optimized for arbitrary corrugation profiles.
Another limitation of the present programs is that curvature is the only waveguide deformation, for which the mode conversion can be calculated. Many mode converters however, do the conversion via other geometry perturbations. With a varying diameter in a cylindrical waveguide for example, TE_{0m}-modes can be converted into TE_{0n}-modes. With an implementation of the coupled mode equation for other types of geometry perturbations, such mode converters could also be optimized.

Literatur

[1] ABRAMOWITZ, M., AND STEGUN, I. A., Eds. *Pocketbook Of Mathematical Functions*. Verlag Harri Deutsch - Thun - Frankfurt/Main, 1984.

[2] BARLOW, R. *Statistics A Guide to the Use of Statistical Methods in the Physical Sciences*. John Wiley & Sons Ltd., 1989.

[3] BRONSTEIN, I., AND SEMENDJAJEW, K. *Taschenbuch der Mathematik*. Verlag Harri Deutsch - Thun - Frankfurt/Main, 1985.

[4] CLARRICOATS, P. J. B., AND OLVER, A. *Corrugated horns for microwave Antennas*. Peter Peregrinus Ltd., 1984.

[5] DOANE, J. L. Propagation and Mode Coupling in Corrugated and Smooth-Wall Circular Waveguides. *International Journal of Infrared and Millimeter Waves 13* (1985), 123–170.

[6] DOANE, J. L. Oversized Rectangular Waveguides with Mode-Free Bends and Twists for Broadband Applications. *Microwave Journal* (1989).

[7] F. SPORLEDER, AND H.-G. UNGER. *Waveguide tapers transitions and couplers*. Peter Peregrinus Ltd., London, New York, 1979.

[8] GRADSTEIN, I., AND RYSHIK, Eds. *Summen- Prokukt- und Integraltafeln*. Verlag Harri Deutsch - Thun - Frankfurt/Main, 1981.

[9] GRAUBNER, T. Felduntersuchungen für Moden des kreiszylindrischen Hohlleiters. Universität Stuttgart, Institut für Plasmaforschung, 1995.

[10] HENLE, W. Numerische Optimierung eines überdimensionierten Rillenhohlleiterkrümmers für den TE01 Wellentyp bei 8 GHz. 2. Semesterarbeit, Universität Stuttgart, Institut für Plasmaforschung, Juni 1987.

[11] KASPAREK, W., EMPACHER, L., ERCKMANN, V., GANTENBEIN, G., HOLLMANN, F., LAQUA, H., WEISSGERBER, M., AND ZOHM, H. Developments for the 140 ghz ecrh transmission system on the stellerator w7-x. In *JAERI-memo 12-041* (2000), pp. 630 – 635.

[12] KASPAREK, W., AND MÜLLER, G. The wavenumber spectrometer - an alternative to the directional coupler for multimode analysis in oversized waveguides. *Int. J. of Electronics 64* (1988), 5–20.

[13] KATENELENBAUM, B. Z., MERCADOR DEL RIO, L., PEREYASLAVETS, M., AYZA, M. S., AND THUMM, M. *Therory of Nonuniform Waveguides the cross-section method*. The Insitution of Electrical Engineers, 1998.

[14] KUMRIC, H. *Entwicklung überdimensionierter Hohlleiterkomponenten zur Übertragung von Mikrowellen hoher Leistung*. Doktorarbeit, Institut für Plasmaforschung, Universität Stuttgart, 1992.

[15] LI, H., AND THUMM, M. Mode conversion due to curvature in corrugated waveguides. *Int. J. Electronics* (1991), 333–347.

[16] MACLEAN, T. *Principles of antennas: wire and aperture*. Cambridge University Press, 1986.

[17] PLAUM, B., GANTENBEIN, G., KASPAREK, W., THUMM, M., AND WAGNER, D. Far Field Calculations and Measurements of an S-Bend Deformed Oversized HE_{11}-Waveguide Antenna. *International Journal of Infrared and Millimeter Waves 20*, 6 (June 1999), 1009 – 1017.

[18] PLAUM, B., WAGNER, D., KASPAREK, W., AND THUMM, M. Optimization of oversized waveguide components using a genetic algorithm. In *JAERI-memo 12-041* (2000), pp. 575 – 579.

[19] POPOV, A. V., AND ZHU, N. Y. Low-order modes in smoothly curved, oversized and lossy waveguides of arbitrary cross section: Parabolic equation approach. *AEÜ International Journal of Electronics and Communications 54*, 3 (2000), 175 – 182.

[20] PRESS, W. H., TEUKOLSKY, S. A., VETTERLING, W. T., AND FLANNERY, B. P. *Numerical Recipes in C*, 2 ed. Cambridge University Press, 1992.

[21] QUINE, J. P. E- and H-Plane Bends for High Power Oversized Rectangular Waveguide. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques* (January 1965), 54–63.

[22] RAHMAT-SAMII, Y., AND MICHIELSSEN, E. *Electromagnetic Optimization by Genetic Algorithms*. Wiley Interscience, 1999.

[23] SIMONYI, K. *Theroretische Elektrotechnik*. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1966.

[24] THUMM, M., AND KUMRIC, H. Optimized overmoded TE_{01}-to-TM_{11} mode converters for high power millimeter wave applications at 70 and 140 GHz. *Int. J. of Infrared and Millimeter Waves 7* (1986), 1439–1463.

[25] WAGNER, D. *Entwurf und Analyse von korrugierten Hohlleiterstrukturen für Hochleistungsmillimeterwellensysteme*. Doktorarbeit, Institut für Plasmaforschung, Universität Stuttgart, 1996.

[26] WAGNER, D., PRETTEREBNER, J., AND THUMM, M. Eigenmode mixtures in circumferentially corrugated waveguides. In *Proceedings of eighth Joint Workshop on Electron Cyclotron Emission and Electron Cyclotron Resonance Heating* (March 1993), vol. 2, Max Planck Institut für Plasmaphysik, pp. 575 – 585.

[27] YAN, K. K., AND LU, Y. Sidelobe reduction in Array-Pattern Synthesis Using Genetic Algorithm. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* (July 1997), 1117 – 1122.

Lebenslauf

Burkhard Mirko Plaum geboren am 10. März 1971 in Göttingen als Sohn von Ernst Plaum und Gisela Plaum geb. Arnke.

1978 – 1981	Grund- und Hauptschule Allensbach
1981 – Dez. 1984	Gymnasium Radolfzell
Jan. 1985 – Jun. 1990	Willibald Gymnasium Eichstätt Abschluß: Abitur (Juni 1990)
Jul. 1990 – Jun. 1991	Wehrdienst
Okt. 1991 – Okt. 1997	Studium der Elektrotechnik an der Universität Stuttgart Abschluß: Diplom (10.10.1997)
Sept. 1997 – Aug. 2000	Promotionsstipendium vom Max Planck Institut für Plasmaphysik in Garching
Derzeitige Tätigkeit:	Wissenschaftlicher Angestellter am Institut für Plasmaforschung der Universität Stuttgart

Danksagung

An dieser Stelle danke ich

- Prof. Dr. Hartmut Zohm, für die Aufnahme in der ECRH-Abteilung des IPF und die Betreuung meiner Arbeit, die er auch nach seinem Weggang aus Stuttgart fortgesetzt hat.
- Prof. Dr. F. Landstorfer für die Übernahme des Mitberichts.
- Dr. Walter Kasparek für die Betreuung vor Ort und viele nützliche Diskussionen.
- Frank Hollmann, der mich bei den tagelangen Messungen tatkräftig unterstützt hat.
- Allen anderen Kollegen der ECRH-Abteilung und des gesamten Instituts für die ständige Motivation zur Promotion und die entspannte Arbeitsatmosphäre.
- Manuela Gsell für das zeitraubende Korrekturlesen.
- Den zahllosen Programmierern freier Software, die es mir ermöglichten, ohne Lizenzprobleme eine leistungsstarke Entwicklungsumgebung zu verwenden und optimal an meine Anforderungen anzupassen.