Partitionierte Lösungsansätze in der Strukturdynamik und der Fluid-Struktur-Interaktion

von

Daniel Pinyen Mok

Bericht Nr. 36 (2001)
Institut für Baustatik der Universität Stuttgart
Professor Dr.-Ing. E. Ramm
Stuttgart 2001

© Daniel P. Mok

Berichte können bezogen werden über:
Institut für Baustatik
Universität Stuttgart
Pfaffenwaldring 7
D-70550 Stuttgart
Tel.: 07 11 / 6 85 61 23
Fax: 07 11 / 6 85 61 30
http://www.uni-stuttgart.de/ibs/

Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung in andere Sprachen, vorbehalten. Ohne Genehmigung des Autors ist es nicht gestattet, diesen Bericht ganz oder teilweise auf photomechanischem, elektronischem oder sonstigem Wege zu kommerziellen Zwecken zu vervielfältigen.

ISBN 3-00-007974-2

Partitionierte Lösungsansätze in der Strukturdynamik und der Fluid-Struktur-Interaktion

Von der Fakultät Bauingenieur- und Vermessungswesen
der Universität Stuttgart zur Erlangung der Würde eines Doktors der
Ingenieurwissenschaften (Dr.-Ing.) genehmigte Abhandlung

vorgelegt von

Daniel Pinyen Mok

aus Stuttgart

Hauptberichter:	Prof. Dr.-Ing. Ekkehard Ramm
Mitberichter:	o. Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr. Ulrich Langer
Tag der mündlichen Prüfung:	2. Juli 2001

Institut für Baustatik der Universität Stuttgart
2001

Zusammenfassung

Auf dem Gebiet der partitionierten Analysetechniken für die numerische Simulation gekoppelter Problemstellungen haben sich in den letzten Jahren in vielen Anwendungsbereichen immer intensivere Forschungsaktivitäten entwickelt. Diese Entwicklung ist begründet in den generellen Vorteilen gegenüber simultanen, monolithischen Berechnungsansätzen. Partitionierte Lösungsverfahren erlauben die unabhängige Modellierung, Diskretisierung und Lösung der einzelnen Teilfelder, eine modulare Software-Struktur, sowie eine Reduktion des Berechnungs- und Speicheraufwands und eine parallele Datenverarbeitung durch die Zerlegung des Gesamtsystems in einfacher zu behandelnde Teilsysteme.

In der vorliegenden Arbeit werden Ansätze zur partitionierten Lösung gekoppelter, dynamischer Systeme untersucht, und zwar vor allem im Hinblick auf die Eignung für die geometrisch nichtlineare Strukturdynamik und für die transiente Interaktion von instationären, inkompressiblen Strömungen mit flexiblen Strukturen bei großen Strukturdeformationen. Dazu werden zunächst die in unterschiedlichen Disziplinen entwickelten Formulierungen in einem terminologisch möglichst einheitlichen Rahmen zusammengestellt, und im Sinne einer klassifizierenden Übersicht gegliedert. Es wird hierbei nach der Art der räumlichen Partitionierung und der in den Teilfeldern eingesetzten Zeitintegrationsverfahren sowie nach der Kopplungsstrategie unterschieden, da diese Kriterien von fundamentaler Bedeutung für Konstruktion und numerische Eigenschaften der einzelnen partitionierten Lösungsmethoden sind.

Für die Klasse nichtüberlappend partitionierter Dirichlet-Neumann-Lösungsansätze, die zur Simulation der Zielanwendungen besonders geeignet erscheinen, werden des weiteren einfach und iterativ gestaffelte, d.h. algorithmisch schwach und stark koppelnde Strategien eingehend theoretisch und numerisch untersucht und verglichen. Es wird gezeigt, daß einfach gestaffelte Verfahren zwar vom Aufwand her günstig und bei entsprechender Formulierung auch hinreichend genau, aber dafür grundsätzlich schwach instabil sind. Als Ursache hierfür können eine inhärente Verletzung der zugrundeliegenden Bilanzgleichungen für Masse und Energie aufgrund mangelnder kinematischer Kontinuität am Kopplungsrand identifiziert werden, im Fall der Fluid-Struktur-Interaktion mit inkompressiblen Strömungen noch verstärkt durch den „Artificial Added Mass“-Effekt. Als zweckmäßigste Stabilisierungsmöglichkeit hat sich die Einführung von Iterationen über die Teilfelder in jedem Zeitschritt erwiesen, also der Einsatz von iterativ gestaffelten Verfahren. Diese werden auf klassische Gebietszerlegungsmethoden (iterative Substrukturmethoden) zurückgeführt, wodurch Konvergenzaussagen abgeleitet, sowie effiziente, robuste und anwenderfreundliche konvergenzbeschleunigende Ansätze entwickelt werden konnten. Insbesondere werden hierzu das Gradientenverfahren und die Aitken-Methode vorgeschlagen. Eine Reihe von numerischen Anwendungsbeispielen demonstriert schließlich die spezifische Anwendbarkeit und Leistungsfähigkeit der untersuchten partitionierten Lösungsmethoden.

Abstract

The area of partitioned analysis techniques for the numerical simulation of coupled systems has experienced increasingly intense research efforts in many areas of application over the last few years. This is due to a series of advantages over simultaneous, monolithic solution methods. Partitioned solution approaches allow the independent use of suitable modelling, discretization and solution methods for the individual subsystems, a modular and parallel software architecture, as well as the reduction of the numerical solution and memory efforts by decomposing the fully coupled system into subsystems which are easier to handle separately.

The present report studies methods for the partitioned solution of coupled dynamical systems, particularly with regard to geometrically nonlinear structural dynamics and the transient interaction of instationary, incompressible flows with flexible structures featuring large deformations. Formulations developed in different scientific disciplines are compiled within a unified framework and classifying survey. They are differentiated according to the type of spacial partitioning, the time integration methods used in the subsystems, and the coupling strategy, as these criteria are of fundamental relevance for construction and numerical properties of the specific partitioned schemes.

Within the class of non-overlapping Dirichlet-Neumann methods, which are especially suitable for the simulation of the problems in mind, simple staggered and iterative staggered coupling strategies, i.e. coupling strategies leading to algorithmically loose and strong coupling, respectively, are further investigated and compared theoretically and numerically. It is shown that simple staggered schemes are numerically cheap and – if formulated appropriately – sufficiently accurate, yet they are in principle weakly unstable. This weak instability is caused by their inherent violation of the basic balance equations for mass and energy due to a lack of kinematic continuity at the interface between adjacent subsystems, and amplified by the ”artificial added mass”-effect in the case of fluid structure interaction with incompressible flows. Iterations over the subsystems, i.e. iterative staggered schemes, have proven to be the most advisable stabilization technique. These techniques are traced back to classical domain decomposition methods (iterative substructuring methods). By this means it has become possible to derive convergence statements, and to develop efficient, robust and user-friendly convergence acceleration schemes. In particular, the application of the gradient method and Aitken’s method are proposed. Finally, a series of numerical examples demonstrates the specific applicability and effectiveness of the analyzed partitioned solution approaches.

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand in den Jahren 1997 bis 2001 während meiner Tätigkeit am Institut für Baustatik der Universität Stuttgart – als Stipendiat im Rahmen des Graduiertenkollegs „Modellierung und Diskretisierungsmethoden für Kontinua und Strömungen“, sowie als wissenschaftlicher Mitarbeiter und Mitglied des Sonderforschungsbereichs 404 „Mehrfeldprobleme in der Kontinuumsmechanik“ im Teilprojekt B4 „Flüssigkeits-Struktur-Interaktion von Schalen“.

Mein herzlicher Dank gilt dem Leiter des Instituts für Baustatik, Herrn Prof. Dr.-Ing. Ekkehard Ramm, für die Anregung zu dieser Arbeit, für die fachlichen und persönlichen Gespräche und für die Übernahme des Hauptberichts. Seine stets vertrauensvolle Förderung und Unterstützung ermöglichte mir zum einen die Forschung in diesem interessanten Forschungsprojekt und darüber hinaus die Teilnahme an einer Reihe von nationalen und internationalen, wissenschaftlichen und Wissen schaffenden Veranstaltungen. Die von ihm geprägte, vielseitig orientierte Atmosphäre am Institut habe ich als unschätzbare Basis für ein erfolgreiches, interdisziplinäres Lernen und Arbeiten empfunden.

Herrn Prof. Dr. Ulrich Langer vom Institut für Analysis und Numerik der Johannes-Kepler-Universität Linz danke ich für die freundliche Übernahme des Mitberichtes. Sein Interesse an meiner Arbeit hat mich sehr gefreut.

Einen großen Dank möchte ich auch den Kollegen aussprechen, die mich in meiner Zeit am Institut für Baustatik begleitet haben. Der fachliche Austausch wie auch die gemeinsamen geselligen Unternehmungen und der freundschaftliche Umgang haben mir viel Freude bereitet; sie werden mir stets in Erinnerung bleiben. Ganz besonders möchte ich in diesem Zusammenhang Wolfgang A. Wall erwähnen, der mich überhaupt erst an das wissenschaftliche Arbeiten und an die Thematik der gekoppelten Probleme herangeführt hat, und der mir trotz seiner extremen Arbeitsbelastung immer wieder eine beratende Anlaufstation war. Die intensiven Diskussionen und Gespräche mit ihm und die daraus hervorgegangenen Denkanstöße haben entscheidend zum Entstehen dieser Dissertation beigetragen.

Desweiteren bin ich Herrn Dr. Michael Jung für die konstruktiven Gespräche und Hinweise dankbar, die mir bei der Erschließung der Gebietszerlegungsmethoden und iterativen Lösungsverfahren sowie ihrer Übertragung auf das hier behandelte Problemfeld sehr hilfreich waren.

Nicht zuletzt möchte ich mich ganz herzlich bei meiner Familie, insbesondere bei meiner lieben Jeanette und bei meinen lieben Eltern bedanken. Sie haben mich in bewundernswerter Weise stets und bedingungslos unterstützt, mir und meiner Arbeit großes Verständnis entgegengebracht, und mir in so mancher schwierigen Phase der Promotionszeit den nötigen Rückhalt gegeben.

Schließlich danke ich der Deutschen Forschungsgemeinschaft für die finanzielle Unterstützung im Rahmen des Graduiertenkollegs und des Sonderforschungsbereichs 404.

Inhaltsverzeichnis

Zusammenfassung . . . . . **i**

Abstract . . . . . **ii**

Vorwort . . . . . **iii**

Inhaltsverzeichnis . . . . . **iv**

Bezeichnungen, Abkürzungen, Vereinbarungen . . . . . **vi**

1 Einleitung **1**
1.1 Motivation und Einführung 1
1.2 Zielsetzungen der Arbeit 4
1.3 Übersicht 4

2 Modellbildung und Diskretisierungsverfahren **6**
2.1 Strukturdynamik 6
2.1.1 Modellwahl 6
2.1.2 Kontinuumsmechanische Grundgleichungen der Elastodynamik 7
2.1.3 Raumdiskretisierung 12
2.1.4 Zeitdiskretisierung 14
2.2 Fluid- / Strömungsdynamik 22
2.2.1 Modellwahl 22
2.2.2 Kontinuumsmechanische Grundgleichungen der Fluiddynamik 22
2.2.3 Raumdiskretisierung 26
2.2.4 Zeitdiskretisierung und Lösung 29
2.3 Fluid-Netz 31

3 Grundkonzepte und Bezeichnungen für partitionierte Lösungsverfahren **33**
3.1 Partitionierungskonzepte 34
3.1.1 Klassifikation nach der Art der räumlichen Zerlegung 35
3.1.2 Klassifikation nach der Art der Zeitintegrationsverfahren 39
3.1.3 Klassifikation nach algebraischer und differentieller Partitionierung . . . 40
3.2 Kopplungsbedingungen und Kopplungsstrategien 41
3.2.1 Kopplungsbedingungen 41
3.2.2 Kopplungsstrategien 42
3.3 Historische Entwicklung 45
3.4 Anforderungen an partitionierte Lösungsverfahren und Beurteilungsansätze . . 52
3.4.1 Kontinuität der kinematischen und dynamischen Größen 53
3.4.2 Massen-, Impuls- und Energieerhaltung 57
3.4.3 „Artificial Added Mass“-Effekt 60

4 Gebietszerlegungsmethoden **62**
4.1 Nichtüberlappende Verfahren – Schurkomplement- oder Substrukturmethoden 62

4.1.1 Iterative Dirichlet-Neumann Substrukturmethode 64
4.1.2 Iterative Neumann-Neumann Substrukturmethode 68
4.1.3 Duale und gemischte Methoden – FETI und Mortar 69
4.2 Überlappende Verfahren – Schwarzsche Methoden 73
4.3 Anwendung auf die Lösung nichtlinearer, zeitabhängiger Probleme 76

5 Einfach gestaffelte Lösungsverfahren 80
5.1 Allgemeines 80
5.2 Sequentiell gestaffeltes Grundverfahren 81
5.3 Sequentiell gestaffeltes Verfahren mit Prädiktor 94
5.4 Asynchrones, sequentiell gestaffeltes Verfahren 103
5.5 Parallel gestaffelte Verfahren 108

6 Iterativ gestaffelte Lösungsverfahren 110
6.1 Allgemeines 110
6.2 Iterativ gestaffeltes Grundverfahren 111
6.3 Konvergenzbeschleunigung mit dem Gradientenverfahren 119
6.4 Konvergenzbeschleunigung mit der Aitken-Methode 129
6.5 Konvergenzbeschleunigung mit der Tschebyscheff-Methode 133
6.6 Numerischer Vergleich an FSI-Modellbeispiel 135

7 Numerische Untersuchung an Anwendungsbeispielen 140
7.1 Rahmenschwingung nach Sinuslastimpuls 140
7.2 Quadratplatte unter transversalem Lastimpuls 144
7.3 Flexible Klappe in Kanalströmung mit Einschnürung 147
7.4 3–D Simulation des oszillierend überströmten Hohlraums mit flexibler Bodenplatte 153

8 Schlußfolgerungen und Ausblick 157

A Anhang 161
A1 Integralsätze 161
A2 Programmtechnische und algorithmische Aspekte 161
A2.1 Generalized-α-Zeitintegrationsverfahren für die nichtlineare Strukturdynamik 161
A2.2 Beweis der Verschiebungskontinuität des asynchronen, sequentiell gestaffelten Verfahrens nach Lesoinne & Farhat (1998) 166
A3 Iterationsverfahren 167
A3.1 Begriffe, Definitionen 167
A3.2 Beschreibung einiger Iterationsverfahren 171
A3.3 Konvergenzbeschleunigende Methoden 176
A3.4 Numerisches Beispiel 179

Literatur 181

Bezeichnungen, Abkürzungen, Vereinbarungen

Zusätzlich zu den im Kontext der jeweiligen Kapitel eingeführten Größen und Begriffe wird in der vorliegenden Arbeit auf die hier angeführten Abkürzungen und Bezeichnungen mehrfach zurückgegriffen. Desweiteren gelten für die gesamte Arbeit auch folgende Vereinbarungen.

Vereinbarungen

- Es wird überwiegend die symbolische Schreibweise verwendet.
- Nach Möglichkeit werden deutsche Bezeichnungen verwendet. Bei der Einführung von Fachbegriffen, für die auch oder vorwiegend englische Bezeichnungen geläufig sind, werden diese zur Erläuterung mit angegeben, jedoch im weiteren Verlauf nur in solchen Ausnahmefällen weiterverwendet, in denen passende deutsche Übersetzungen nicht existieren.

Abkürzungen

ALE	Arbitrary Lagrangean Eulerian
ANS	Assumed Natural Strain
ASM	Additive Schwarzsche Methode
BE	Backward Euler = Euler-Rückwärts-Zeitintegrationsverfahren
CARAT	Computer Aided Research and Analysis Tool des Instituts für Baustatik
CFL	Courant-Friedrichs-Lewy-Bedingung
CN	Crank-Nicholson-Zeitintegrationsverfahren
DAE	Differential-algebraisches Gleichungssystem
DD	Domain Decomposition = Gebietszerlegung
D–N, N–N	Dirichlet–Neumann, Neumann–Neumann (Gebietszerlegung)
EAS	Enhanced Assumed Strain
E–E (E^m–E)	Explizit–explizites Verfahren (mit m–fachem Subcycling)
E–I (E^m–I)	Explizit–implizites Verfahren (mit m–fachem Subcycling)
FEM, FE	Methode der Finiten Elemente, Finite Elemente
FETI	Finite Element Tearing and Interconnecting
FSI	Fluid-Struktur-Interaktion
I–I (I^m–I)	Implizit–implizites Verfahren (mit m–fachem Subcycling)
ICL	Interaction Consistency Law
GCL	Geometric Conservation Law (geometrische Bilanzgleichungen)
GLS	Galerkin-Least-Square
MSM	Multiplikative Schwarzsche Methode
PCE	predictor corrector explicit time integration algorithm
PDE	Partielle Differentialgleichung
PK1, PK2	Erster und zweiter Piola-Kirchhoff-Spannungstensor
R.B.	Randbedingung

Symbole, Schreibweisen

a	Skalar
$\boldsymbol{a}$	Vektor
$\boldsymbol{A}$	Matrix oder Tensor
$(\cdot)_I$	vektorielle Größe bzgl. der Freiheitsgrade im Gebietsinnern
$(\cdot)_\Gamma$	vektorielle Größe bzgl. der Freiheitsgrade auf dem Interface
$(\cdot)_{II}$ $(\cdot)_{I\Gamma}$ $(\cdot)_{\Gamma\Gamma}$	Blockmatrizen bzgl. der entsprechenden Freiheitsgrade im Gebietsinnern bzw. auf dem Interface
$(\cdot)^{\Omega_j}$	Größe des Feldes Ω_j
$(\cdot)^S$	Größe des Strukturfeldes Ω_S
$(\cdot)^F$	Größe des Fluidfeldes Ω_F
$(\cdot)^M$	Größe des Fluidnetz-Feldes Ω_M
$\overline{(\cdot)}$	Größe bezogen auf das Raumgebiet (Strömung) bzw. auf die Momentankonfiguration (Elastodynamik)
$(\cdot)$	Größe bezogen auf das Materialgebiet (Strömung) bzw. auf die Referenzkonfiguration (Elastodynamik)
$(\cdot)^G$	Größe bezogen auf das Referenzgebiet (Strömung)
$(\cdot)^\tau$	Matrizen die ausschließlich aus Stabilisierungstermen gebildet werden
$(\cdot)_K$	Größen auf Elementebene
$(\cdot)^h$	diskrete Größe
$(\cdot)^n$, $(\cdot)^\alpha$	Größe zur Zeit t^n bzw. zur Zeit $t^{n+\alpha}$
$(\cdot)^*$	exakte Lösung
$(\cdot)_i$	Größe im i-ten Iterationsschritt
$(\cdot)_{,\boldsymbol{x}}$	partielle Ableitung einer Größe nach $\boldsymbol{x}$
$\left.\frac{\partial(\cdot)}{\partial t}\right\|_{\boldsymbol{x}}$	partielle Ableitung einer Größe nach der Zeit bei festgehaltenem $\boldsymbol{x}$
$\frac{D(\cdot)}{Dt}$	materielle Zeitableitung einer Größe
$\dot{\boldsymbol{a}}$, $\ddot{\boldsymbol{a}}$	erste und zweite (materielle) Ableitung eines Vektors $\boldsymbol{a}$ nach der Zeit
$\Delta(\cdot)$	inkrementeller Wert einer Größe
$\delta(\cdot)$	virtuelle Größe

Mathematische Notationen

$(\cdot,\cdot)$ *bzw.* $(\cdot,\cdot)_\Omega$	L^2–inneres Produkt über das zeitveränderliche Gebiet Ω
$\lvert\cdot\rvert$	Absolutbetrag einer skalaren Größe
$\lVert\cdot\rVert$ *bzw.* $\lVert\cdot\rVert_2$	Euklidische (= L2–) Norm einer vektoriellen Größe
$\lVert\cdot\rVert_{\boldsymbol{A}}$	Energienorm einer vektoriellen Größe bzgl. der Matrix $\boldsymbol{A}$
∇	Gradientenoperator
$\nabla\cdot$	Divergenzoperator
$\mathrm{tr}(\cdot)$	Spur einer Matrix

$\det(\cdot)$	Determinante einer Matrix
$\boldsymbol{C}^n(\Omega)$	Raum der n–fach stetig differenzierbaren Funktionen auf Ω
$\boldsymbol{H}^n(\Omega)$	Sobolev–Raum der Funktionen mit quadratintegrierbaren Werten und n–ten Ableitungen auf Ω
$\boldsymbol{L}^2(\Omega)$	Raum der quadratintegrierbaren Funktionen auf Ω
$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen
$\mathbb{R}$ *bzw.* $\mathbb{R}_0^+$	Menge der reellen Zahlen bzw. Menge der positiven r. Z. incl. der Null.
$\mathbb{R}^3$	3–dimensionaler Raum
$R^k(K)$	Satz von Polynomen mit Grad k auf Elementgebiet K

Bezeichnungen

Großbuchstaben:

$\boldsymbol{A}$	Operatormatrix einer Iteration Φ bzw. verallgemeinerte Koeffizientenmatrix eines zu lösenden Gleichungssystems
$\tilde{\boldsymbol{A}}$	vorkonditionierte Operatormatrix einer Iteration Φ
$\boldsymbol{C}$	Materialtensor
C_i	Konvergenzfaktor einer Iteration Φ
$\mathcal{C}_h$	Triangulierung
$\boldsymbol{D}^S$	Dämpfungsmatrix
$\boldsymbol{E}$	Green-Lagrange–Verzerrungstensor
E^S	Elastizitätsmodul
E_{int}, E_{kin}, E_{tot}	innere Energie, kinetische Energie bzw. totale Energie
ΔE_Γ, E_Γ	Interface-Energie pro Zeitschritt bzw. aufsummierte Interface-Energie
$\boldsymbol{F}$	materieller Deformationsgradient
$\boldsymbol{G}^F$, $\boldsymbol{G}^\tau$	Gradientenmatrix bzw. Gradientenmatrix nur aus Stabilisierungstermen
$\boldsymbol{G}^\Phi$	Iterationsmatrix ($\neq$ Operatormatrix einer Iteration Φ)
$\boldsymbol{I}$	Zweistufiger Einheitstensor, bzw. Einheitsmatrix
J^G	Jacobi- bzw. Funktionaldeterminante $\Omega^G \rightarrow \overline{\Omega}$
$\boldsymbol{K}^S$, $\boldsymbol{K}^M$, $\boldsymbol{K}^F$	Steifigkeitsmatrix (Struktur), Pseudo-Steifigkeitsmatrix (Fluid-Netz) bzw. Diffusionsmatrix (Fluid)
$\boldsymbol{M}$	Vorkonditionierungsmatrix
$\boldsymbol{M}^S$, $\boldsymbol{M}^F$, $\boldsymbol{M}^\tau$	Massenmatrix (Struktur bzw. Fluid bzw. nur aus Stabilisierungstermen)
$\boldsymbol{N}_i$ *bzw.* $\boldsymbol{N}_i^{FE}$	Finite-Elemente-Ansatzfunktionen des Knotens i
$\boldsymbol{N}^F$, $\boldsymbol{N}^\tau$	Konvektionsmatrix bzw. Konv.matrix nur aus Stabilisierungstermen
$\boldsymbol{P}$	1. Piola-Kirchhoff-Spannungstensor
$\mathcal{P}$, $\mathcal{P}^h$	kontinuierlicher bzw. diskreter Funktionenraum für Druck (Lösungs- und Testfunktionen)
$\boldsymbol{S}$	2. Piola-Kirchhoff-Spannungstensor
$\boldsymbol{S}^{\Omega_j}$	Schurkomplementmatrix des Teilgebiets Ω_j

$\mathcal{V}$, $\mathcal{V}^h$	kontinuierlicher bzw. diskreter Funktionenraum für Geschwindigkeits-Testfunktionen
$\mathcal{V}_g$, $\mathcal{V}_g^h$	kontinuierlicher bzw. diskreter Funktionenraum für Geschwindigkeits-Lösungsfunktionen
W_{ext}	Arbeit der äußeren Lasten
W_{int} , $\dot{W}_{int}$	Verzerrungs- oder Formänderungsarbeit bzw. innere Spannungsleistung
ΔW_Γ	Arbeit der Kopplungskräfte am Interface pro Zeitschritt

Kleinbuchstaben:

$\boldsymbol{b}$	Volumenkraftvektor
$\boldsymbol{c}$	ALE-konvektive Geschwindigkeit
$\boldsymbol{d}$, $\dot{\boldsymbol{d}}$, $\ddot{\boldsymbol{d}}$	Verschiebungs-, Geschwindigkeits-, Beschleunigungsvektor (Struktur)
$\boldsymbol{d}_\Gamma$, $\tilde{\boldsymbol{d}}_\Gamma$, $\hat{\boldsymbol{d}}_\Gamma$	Interfaceverschiebungen, unrelaxierte (noch nicht endgültige) Int.versch., Int.versch. eines Hilfsproblems
$\boldsymbol{e}_i$	Fehlervektor im i-ten Iterationsschritt
err^n	aufsummierter Verschiebungsfehler zur Zeit t^n
$\boldsymbol{f}_{ext}$	Vektor der äußeren Lasten
$\boldsymbol{f}_{int}$	Vektor der inneren Kräfte (Struktur)
$\boldsymbol{f}_\Gamma$, $\hat{\boldsymbol{f}}_\Gamma$	Kopplungskräfte, Kopplungskräfte eines Hilfsproblems
$\boldsymbol{g}_i$	Residuenvektor im i-ten Iterationsschritt
$\boldsymbol{h}$	Geschichtsterme bei der Zeitintegration (Struktur)
$i_{\max}$	Anzahl der erforderliche Iterationsschritte über die Felder pro Zeitschritt
$\Delta\boldsymbol{m}$, $\Delta\boldsymbol{m}_\Gamma$	Impulszuwachs im Zeitschritt bzw. Impulszuwachs im Zeitschritt durch die Interfacekräfte
$\boldsymbol{n}$	Einheitsnormalenvektor
n_{eq}	Anzahl der Unbekannten eines zu lösenden Gleichungssystems
$\tilde{p}_0$, $\tilde{p}$	hydrostatischer bzw. thermodynamischer („wahrer“) Druck
p , $\boldsymbol{p}$	kinematischer Druck (kontinuierlich bzw. diskreter Knotenvektor)
q , $\boldsymbol{q}$	Drucktestfunktionen (kontinuierlich bzw. diskreter Knotenvektor)
$\boldsymbol{r}$	Fluid-Netz-Verschiebungsvektor
$\boldsymbol{t}$	Oberflächenkraftvektor
t, t_0	Zeit bzw. Startzeit der Zeitintegration
Δt	Zeitschrittgröße
$\boldsymbol{u}$, $\dot{\boldsymbol{u}}$	Geschwindigkeits- bzw. Beschleunigungsvektor (Fluid)
$\boldsymbol{u}^G$	Vektor der Fluidnetz-Geschwindigkeit
$\boldsymbol{v}$	Geschwindigkeitstestfunktionen
$\boldsymbol{x}$	Ortsvektor eines Punktes

Griechische Buchstaben:

α_f, α_m	Shift-Parameter des Generalized-α-Zeitintegrationsverfahrens
β , γ	Konstanten des Newmark-Zeitintegrationsverfahrens

Γ	Interface oder Kopplungsrand zwischen zwei Gebieten
Γ_F, Γ_g, Γ_h	Oberfläche/Berandung, Dirichlet-Rand bzw. Neumann-Rand (Fluid)
Γ_M	Oberfläche/Berandung (Fluid-Netz)
Γ_S, Γ_d, Γ_σ	Oberfläche/Berandung, Dirichlet-Rand bzw. Neumann-Rand (Struktur)
ε	Genauigkeit (Toleranzgröße für das Abbruchkriterium einer Iteration)
$\boldsymbol{\varepsilon}$	Tensor der Deformationsgeschwindigkeit
$\boldsymbol{\Phi}$, $\boldsymbol{\Phi}_i$	Vergrößerungsmatrix eines Zeitintegrationsverfahrens, Invarianten der V.
Φ	Iterationsverfahren
$\kappa(\boldsymbol{A})$	spektrale Konditionszahl der Matrix $\boldsymbol{A}$
λ^S, μ^S	Lamé-Konstanten (Struktur)
$\lambda(\boldsymbol{A})$	Eigenwert der Matrix $\boldsymbol{A}$
$\boldsymbol{\lambda}$	Vektor von Lagrange-Multiplikatoren
μ^F, ν^F	dynamische bzw. kinematische Viskosität (Fluid)
θ	Shift-Parameter des Einschritt-θ-Zeitintegrationsverfahrens
ρ^S, ρ^F	Dichte (Struktur bzw. Fluid)
$\rho(\boldsymbol{A})$	Spektralradius einer Matrix $\boldsymbol{A}$
ρ_∞ *bzw.* $\rho_\infty(\boldsymbol{\Phi})$	Spektralradius der Vergrößerungsmatrix eines Zeitintegrationsverfahrens im Limit $\Delta t/T_p \to \infty$, Maß für die numerische Dissipation
ρ^Φ	Spektralradius der Iterationsmatrix bzw. asymptotische Konvergenzrate des Iterationsverfahrens Φ
$\boldsymbol{\sigma}$	Cauchy-Spannungstensor
τ_M, τ_C	Stabilisierungsparameter für die Impulsbilanz- bzw. Kontinuitätsgleichung
ω, ω_i	Relaxationsparameter/Schrittlänge (im i-ten Iterationsschritt)
Ω_F, $\partial\Omega_F$	Gebiet bzw. Oberfläche/Berandung (Fluid)
Ω_M, $\partial\Omega_M$	Gebiet bzw. Oberfläche/Berandung (Fluid-Netz)
Ω_S, $\partial\Omega_S$	Gebiet bzw. Oberfläche/Berandung (Struktur)

1 Einleitung

1.1 Motivation und Einführung

Mit zunehmender Leistungsfähigkeit moderner Computer und Berechnungsmethoden wird die numerische Simulation von immer größeren und immer komplexeren Systemen möglich. Wurden früher in der Regel nur kleinere Teilbereiche modelliert und jeweils separat berechnet, oder aber große Systeme solange vereinfacht (Linearisierung, Weglassen von Details, quasistatische Berechnungen dynamischer Vorgänge, usw.), bis sie mit einer einfachen Berechnungsmethode bei begrenzten Ressourcen analysiert werden konnten, so geht mittlerweile der Trend zur möglichst vollständigen Simulation komplexer Gesamtsysteme mit all ihren Nah- und Fernwirkungen. Diese Entwicklung stellt ganz neue Herausforderungen an Hard- und Software, Algorithmen und Analysemethoden.

Eine dieser Herausforderungen betrifft die Frage, auf welche Art und Weise Systeme, die aus einzelnen, aneinandergekoppelten Komponenten oder Teilfeldern mit u.U. stark unterschiedlichen Eigenschaften bestehen, sinnvoll und effizient modelliert und berechnet werden können. Zienkiewicz & Taylor (2000a) geben in ihrem Standardwerk zur Methode der Finiten Elemente für solche *gekoppelten Probleme* die folgende, recht allgemeingültige Definition an:

Coupled systems and formulations are those applicable to multiple domains and dependent variables which usually (but not always) describe different physical phenomena and in which

(a) neither domain can be solved while separated from the other;

(b) neither set of dependent variables can be explicitly eliminated at the differential equation level.

Unter diesen Oberbegriff lassen sich auch die im Rahmen der vorliegenden Arbeit behandelten oberflächengekoppelten Problemstellungen aus den Bereichen der Strukturdynamik und der Fluid-Struktur-Interaktion (FSI) einordnen. So interagieren in physikalischen *Mehrfeldsystemen*, wie der hier betrachteten transienten Wechselwirkung von strömenden Fluiden mit flexiblen Strukturen, Teilfelder mit unterschiedlichen physikalischen und dynamischen Eigenschaften, die völlig unterschiedliche Anforderungen an die numerischen Berechnungsmethoden stellen. Fragestellungen dieser Art sind in vielen technischen Disziplinen von Relevanz. Bauingenieurspezifische Beispiele sind die Belastung dünnwandiger Tankbehälter durch schwappende Flüssigkeiten unter dynamischer Erregung etwa aufgrund von Erdbeben, winderregte Schwingungen von Brücken oder Kühlturmschalen, Offshore-Bauwerke; aber auch die Aeroelastizität, d.h. die Wechselwirkung von Luftströmungen und Flugzeugen, oder biomechanische Aufgabenstellungen wie Blutströmungen in flexiblen Gefäßen sind klassische FSI-Probleme. Andererseits können auch in physikalischen *Einfeldproblemen* wie der reinen Strukturdynamik einzelne Teilbereiche aufgrund von Geometrie oder Material unterschiedliche dynamische Charakteristika aufweisen – man denke hier beispielsweise an das Eintreiben eines Nagels aus hochfestem Stahl in ein Aluminiumblech –, so daß die Unterteilung des Systems

in sogenannte algorithmische Teilfelder („computational fields“) sinnvoll sein kann, in denen dann jeweils optimal angepaßte Modellierungs- und Diskretisierungsmethoden eingesetzt werden können.

Zur Modellierung und Lösung solcher gekoppelter Problemstellungen gibt es nun prinzipiell drei mögliche Ansätze (Felippa et al. (1998)):

1. Die *simultane* Lösung, bei der das gekoppelte Gesamtsystem mit sämtlichen physikalischen und algorithmischen Feldern als rechnerische Einheit in einem monolithischen Modellierungsansatz formuliert und gelöst wird. In diesem Ansatz werden sämtliche Interaktionseffekte zwischen den abhängigen Gleichungen direkt berücksichtigt.
2. Die *partitionierte* Lösung, bei der die einzelnen Teilfelder getrennt voneinander jedes für sich modelliert und numerisch gelöst werden, während die Interaktionseffekte in Form von statischen und/oder kinematischen Größen, die als Kopplungsrandbedingungen am gemeinsamen Interface zwischen den einzelnen Komponenten fungieren, berücksichtigt werden. Für die notwendige Kommunikation zwischen den Teilfeldern werden Prädiktor-, Substituierungs- und Synchronisationstechniken eingesetzt.
3. Die *Feldelimination*, bei der auf Differentialgleichungsebene bereits die Feldgrößen eines Feldes eliminiert und in die Gleichungen des anderen Feldes eingesetzt werden, welches dann numerisch gelöst wird. Dieser Ansatz ist jedoch auf relativ einfache, lineare Problemstellungen beschränkt, die in obiger Definition nach Zienkiewicz & Taylor bereits ausgeschlossen sind. In einer frühen Arbeit über die Lösung komplexer, gekoppelter Probleme haben Park & Felippa (1983) die Feldelimination sogar als „a poor strategy that eventually leads to a computational horror show for more general problems“ beurteilt. Aus diesen Gründen wird die Feldelimination hier nicht weiter in Betracht gezogen.

Die grundsätzlichen, großen Vorteile partitionierter Lösungsansätze gegenüber der simultanen, monolithischen Lösung des gekoppelten Gesamtsystems sind leicht einzusehen. Die meisten Vorteile fallen umso stärker ins Gewicht, je komplexer die Problemstellungen sind.

- *Unabhängige Modellierung, Diskretisierung und Lösung:* Partitionierte Lösungsverfahren ermöglichen den unabhängigen Einsatz von Modellierungsansätzen, Diskretisierungstechniken in Raum und Zeit, sowie Lösungsverfahren, die auf die jeweiligen Anforderungen und speziellen Charakteristika der Teilfelder optimal angepaßt sind. Die Teilgebiete können sogar von unterschiedlichen Arbeitsgruppen und mit den jeweils gewohnten und ausgetesteten Verfahren („Customizing“) modelliert werden.
- *Software-Modularität:* Mit partitionierten Lösungsansätzen können die großen programmtechnischen Schwierigkeiten umgangen werden, die eine Vereinigung von Simulationswerkzeugen verschiedener physikalischer Disziplinen innerhalb eines geschlossenen, monolithischen Programmsystems mit sich bringt. Durch den inhärent modularen Aufbau einer partitionierten Programmstruktur können Software-Bausteine, die für die jeweiligen Teilfelder optimal geeignet sind und die möglicherweise von getrennten Expertenteams hergestellt werden, je nach Bedarf modular integriert werden. Da außer der normalerweise routinemäßig möglichen Vorgabe von Kraft- und Verschiebungswerten am Kopplungsrand prinzipiell

keine weiteren Modifikationen der Einzelfeld-Software erforderlich sind, ist sogar der Einsatz von (kommerziellen) Programmpaketen möglich, die nur einen limitierten oder gar keinen Eingriff in den Programmcode erlauben. Auch der Austausch einzelner Programmkomponenten bei Versions-Updates oder zum Einbau neuer Funktionalitäten für die Einzelfelder ist ohne großen Aufwand möglich.

- *Problemgröße:* Das Aufsplitten in Partitionen reduziert die Größe der zu lösenden Gleichungssysteme und birgt somit ein Potential für die Reduktion von numerischem Lösungs- und Speicheraufwand. Dieser Gedanke liegt auch den mittlerweile weit verbreiteten Gebietszerlegungsmethoden zugrunde.
- *Kondition der Koeffizientenmatrizen:* Die Koeffizienten der Systemgleichungen der einzelnen Felder können um Größenordnungen unterschiedlich sein, was bei einer simultanen Lösungsstrategie zu extrem schlecht konditionierten Gesamtgleichungssystemen führen kann. Bei partitionierten Strategien tritt diese Problematik nicht auf, wovon insbesondere iterative Gleichungslöser sehr stark profitieren.
- *Parallelisierung:* Die partitionierte Systemformulierung ist prinzipiell direkt geeignet zur parallelen Berechnung, da jede der Partitionen nach Austausch der entsprechenden Kopplungsrandbedingungen auf einem eigenen Prozessor gelöst werden kann („inter-field parallelism“, Piperno et al. (1995)). Zudem kann jede einzelne Partition für sich wiederum parallel gelöst werden („intra-field parallelism“), z.B. mit Gebietszerlegungsmethoden. Auch dies wird durch die modulare, partitionierte Fomulierung erleichtert, da für die einzelnen Teilfelder bestehende, parallele Software direkt eingesetzt werden kann.

Diesen positiven Eigenschaften partitionierter Lösungsansätze stehen jedoch auch Nachteile gegenüber. Das gravierendste Problem ist, daß diese Verfahren, abhängig von der jeweiligen Implementierung und Problemstellung, häufig Stabilitätsprobleme und Genauigkeitsreduktionen von teilweise katastrophalen Ausmaßen zeigen. Eine Vererbung der Stabilitäts- und Genauigkeitseigenschaften der in den einzelnen Teilfeldern verwendeten Diskretisierungsverfahren auf die partitionierte Lösung des gekoppelten Gesamtsystems ist nicht ohne weiteres gewährleistet. So sind bestimmte partitionierte Lösungsverfahren nur bedingt stabil oder sogar unbedingt schwach instabil und nur von erster Ordnung genau, obwohl die Zeitintegrationsverfahren in den Teilfeldern unbedingt stabil und von zweiter oder noch höherer Ordnung genau sind.

Daraus ist erkennbar, daß der Einsatz von partitionierten Methoden eine sorgfältige und problemklassenabhängige Formulierung und Implementierung erfordert. Erreicht man jedoch ausreichende Stabilitäts- und Genauigkeitseigenschaften, so stellen partitionierte Lösungsansätze ein äußerst flexibles und leistungsfähiges Werkzeug zur Simulation gekoppelter Problemstellungen dar. Die Untersuchung und Verbesserung solcher Ansätze im Hinblick auf ihre numerischen Eigenschaften und ihre Einsetzbarkeit ist daher ein Kernpunkt dieser Forschungsarbeit.

1.2 Zielsetzungen der Arbeit

Die vorliegende Dissertation stellt nach derjenigen von Wolfgang A. Wall (1999) die zweite Arbeit am Institut für Baustatik zur Lösung gekoppelter Problemstellungen dar. In jener Vorgängerarbeit lag der Schwerpunkt auf der Entwicklung einer stabilisierten Finite-Elemente-Formulierung zur Simulation von instationären, inkompressiblen Strömungen auf bewegten Gebieten, sowie ihrer Einbettung in *ein* partitioniertes Lösungskonzept für die Fluid-Struktur-Interaktion. Das Hauptaugenmerk dieser Arbeit liegt hingegen auf der Untersuchung von verschiedenen, aus der Literatur bekannten partitionierten Lösungsansätzen und der Entwicklung möglichst robuster, effizienter und zuverlässiger Kopplungsalgorithmen für die partitionierte Analyse der einleitend beschriebenen dynamischen Problemstellungen.

Es ist hierzu von besonderem Interesse, die in unterschiedlichsten Disziplinen entwickelten Formulierungen in einem terminologisch möglichst einheitlichen Rahmen zusammenzustellen, im Sinne einer klassifizierenden Übersicht zu gliedern, und Aussagen zu ihren numerischen Eigenschaften und ihrer Einsetzbarkeit für spezifische Problemklassen zu treffen. Dazu werden die Verfahren insbesondere hinsichtlich der Kriterien Stabilität, Genauigkeit, Robustheit und Aufwand untersucht werden, wobei teils analytische, teils numerische Untersuchungen zur Anwendung kommen. In diesem Zusammenhang wird der Frage der Eignung für die Zielanwendungen dieser Arbeit, nämlich der geometrisch nichtlinearen Strukturdynamik und der Interaktion von flexiblen Strukturen mit instationären, inkompressiblen Strömungen bei großen Strukturdeformationen, großes Gewicht beigemessen.

Basierend auf den dabei gewonnenen Erkenntnissen wird weiterhin ein robustes und effizientes iteratives Substrukturverfahren zur partitionierten Lösung solcher Problemstellungen vorgestellt und analysiert, das im Rahmen dieser Forschungsarbeit aus der Synthese von ingenieurwissenschaftlich geprägten, iterativ gestaffelten Partitionierungsansätzen mit klassischen Gebietszerlegungsmethoden und iterativen Lösungsverfahren entwickelt wurde.

Zur numerischen Untersuchung der verschiedenen partitionierten Lösungsansätze und zur Verifikation der getroffenen Aussagen über deren Eigenschaften und Einsetzbarkeit anhand von numerischen Beispielen wurden ausgewählte Verfahren in das Finite-Elemente-Programmsystem *CARAT* (*C*omputer *A*ided *R*esearch and *A*nalysis *T*ool) des Instituts für Baustatik implementiert. Dazu mußte die von W. A. Wall geschaffene Mehrfeldumgebung zur Analyse von Fluid-Struktur-Interaktionsproblemen konsequent erweitert, sowie die entsprechende Programmlogik auf die partitionierte Lösung rein strukturdynamischer Systeme übertragen werden. Insbesondere war die (Weiter-)Entwicklung von Routinen zur algorithmischen Steuerung der einfach gestaffelten und iterativen Verfahren, zur Organisation des Datenaustauschs zwischen den Teilfeldern sowie zur zeitlichen Synchronisation der Teilfeldlösungen erforderlich.

1.3 Übersicht

Im folgenden wird eine kapitelweise Übersicht über den Aufbau dieser Dissertationsschrift gegeben.

In *Kapitel 2* wird auf die Modelle und Diskretisierungsverfahren sowie deren kontinuumsmechanische Grundlagen eingegangen, die zur numerischen Simulation der hier behandelten Problemstellungen verwendet werden.

Kapitel 3 erläutert und klassifiziert grundsätzliche Konzepte und Strategien für die partitionierte Lösung gekoppelter Systeme und schildert deren historische Entwicklung. Desweiteren wird auf spezifische Anforderungen an partitionierte Lösungsverfahren eingegangen, mit deren Hilfe im weiteren Verlauf der Arbeit die verschiedenen Verfahren beurteilt werden.

Das folgende *Kapitel 4* gibt einen Überblick über Gebietszerlegungsmethoden in einer zur übrigen Arbeit konformen Nomenklatur, wobei insbesondere auf die Formulierung der in dieser Arbeit eingesetzten iterativen Substrukturverfahren sowie auf deren Anwendung auf die Lösung nichtlinearer, zeitabhängiger Problemstellungen eingegangen wird. Diese Ausführungen sollten vor dem Hintergrund verstanden werden, daß am Institut für Baustatik bis dato noch keine Erfahrungen zu Theorie und Numerik von Gebietszerlegungsverfahren existierten; sie sind daher von eher einführendem und überblicksartigem Charakter.

In den *Kapiteln 5* und *6* werden dann ausgewählte partitionierte Lösungsverfahren, die für die Lösung von strukturdynamischen und FSI-Problemen prinzipiell geeignet erscheinen, im Detail vorgestellt und theoretisch sowie anhand einfacher Modellbeispiele analysiert. Dabei handelt es sich sowohl um Verfahren, die aus der Literatur bereits bekannt sind, als auch um die im Rahmen dieser Arbeit weiterentwickelten Ansätze. Es werden algorithmische und die Implementierung betreffende Aspekte sowie numerische Eigenschaften diskutiert.

Die numerische Anwendung der erläuterten Verfahren auf komplexere Strukturdynamik- und Fluid-Struktur-Interaktionsbeispiele erfolgt anschließend in *Kapitel 7*. Damit sollen die Eigenschaften der vorgestellten partitionierten Verfahren demonstriert und die zuvor getroffenen Aussagen hinsichtlich Stabilität, Genauigkeit, Robustheit, Aufwand und Einsetzbarkeit numerisch verifiziert werden.

Die Arbeit schließt dann in *Kapitel 8* mit einigen zusammenfassenden Schlußfolgerungen und grundsätzlichen Bewertungen, sowie einem Ausblick auf zukünftige Forschungsmöglichkeiten auf dem behandelten Gebiet. Im *Anhang* finden sich letztendlich noch einige Ausführungen zu programmtechnischen und algorithmischen Aspekten, sowie zu Iterationsverfahren und ihren numerischen Eigenschaften, deren Kenntnis zum vertieften Verständnis der Arbeit notwendig sind.

2 Modellbildung und Diskretisierungsverfahren

Für die numerische Simulation physikalischer Problemstellungen müssen diese mit geeigneten mechanisch-mathematischen Modellen abgebildet werden. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit sind dies insbesondere die nichtlineare Strukturdynamik und die Dynamik inkompressibler, viskoser Strömungen. In diesem Kapitel sollen die eingesetzten Modelle anhand ihrer grundlegenden kontinuumsmechanischen Gleichungen sowie deren numerischer Behandlung erläutert werden. Da die Stabilitäts- und Konvergenzeigenschaften der partitionierten Lösungsverfahren, wie im Verlauf dieser Arbeit gezeigt werden wird, von den mathematisch-physikalischen Eigenschaften der modellierten (Teil-)Systeme und der zu ihrer Modellierung verwendeten Gleichungen nicht zu trennen sind, ist eine Kenntnis dieser Eigenschaften zur weiteren Beurteilung der Verfahren unverzichtbar. Dasselbe gilt auch für die verwendeten Diskretisierungsverfahren in der Zeit. Die Diskretisierung im Raum hat dagegen nur hinsichtlich der programmtechnischen Methodik, welche Kopplungsinformationen auf welche Art und Weise vom einen zum anderen Teilgebiet übertragen werden, einen Einfluß auf die Kopplungsalgorithmen.

Im folgenden werden in knapper Form nur die zum weiteren Verständnis erforderlichen Grundlagen in einer mit den folgenden Kapiteln konformen Nomenklatur bereitgestellt. Für ein tiefergreifendes Studium der kontinuumsmechanischen Hintergründe und Diskretisierungsmethoden wird einerseits auf die hier am Institut für Baustatik entstandenen Vorgängerarbeiten verwiesen, insbesondere auf die Dissertationen von Kuhl (1996) zur Strukturdynamik sowie von Wall (1999) zur Fluid-Struktur-Interaktion, andererseits auch auf die einschlägigen Fachbücher. Zu empfehlen sind u.a. zur Kontinuumsmechanik: Altenbach & Altenbach (1994), Holzapfel (2000), Marsden & Hughes (1983), Stein & Barthold (1996); zur Fluiddynamik und der numerischen Behandlung von Strömungen: Cuvelier et al. (1986), Ferziger & Peric (1997), Fletcher (1991), Gresho & Sani (1998), Gunzburger (1989), Warsi (1993); schließlich grundsätzlich zur Methode der Finiten Elemente und zu den Zeitintegrationsverfahren: Argyris & Mlejnek (1988a, b, c), Hughes (1987), Zienkiewicz & Taylor (2000a, b, c). Die folgenden Ausführungen basieren auf diesen Werken.

2.1 Strukturdynamik

2.1.1 Modellwahl

In den hier behandelten Problemstellungen muß das Strukturmodell prinzipiell in der Lage sein, große Deformationen abzubilden. Dabei wird von der Annahme ausgegangen, daß nur kleine, elastische Verzerrungen auftreten, da hauptsächlich dünnwandige Strukturen betrachtet werden. Weiterhin soll die Beschränkung auf ein homogenes, isotropes Kontinuum mit linear elastischem Saint Venant-Kirchhoff Materialmodell gelten. Somit wird als adäquates Strukturmodell die *geometrisch nichtlineare, materiell lineare Elastodynamik* gewählt.

Zur Beschreibung der Bewegung der Struktur im Raum wird im Rahmen dieser Arbeit eine *Lagrange*-Formulierung (bezeichnet nach Joseph Louis Lagrange (1736–1813)), auch *materi-*

elle oder *referenzbezogene Betrachtungsweise* genannt, verwendet. Der Beobachter bewegt sich dabei mit dem Materiepunkt mit und mißt zu jedem Zeitpunkt die Lage des Materiepunktes im Raum und dessen momentane Eigenschaften, d.h. die sogenannte Momentankonfiguration. Die deformierte Momentankonfiguration wird durch Bezug auf eine Referenzkonfiguration beschrieben. In der hier verwendeten *totalen* Lagrange-Formulierung wird als Referenzkonfiguration die undeformierte Ausgangslage zur Zeit $t = t_0$ gewählt. Diese Betrachtungsweise hat sich in der Festkörpermechanik allgemein durchgesetzt, u.a. wegen Vorteilen gegenüber der Eulerschen (räumlichen) Darstellungsweise bei der Beschreibung von Gebietsrändern.

2.1.2 Kontinuumsmechanische Grundgleichungen der Elastodynamik

Differentialgeometrie und Kinematik

Mit dem Begriff der Kinematik werden die Beziehungen zwischen den geometrischen Größen bezeichnet, mit denen ein Kontinuum beschrieben wird. In der Differentialgeometrie werden geometrische Eigenschaften von Punktmengen mit Hilfe der Differential- und Integralrechnung untersucht. Ein kontinuierlicher Körper $\mathfrak{B}$ im dreidimensionalen Euklidschen Vektorraum wird dazu als geschlossene Menge von materiellen Körperpunkten aufgefaßt. Diese Materiepunkte werden zu jeder Zeit $t \in \mathbb{R}_0^+$ mit Hilfe einer Abbildung χ_t

$$\chi_t : \mathfrak{B} \times \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}^3 \tag{2.1}$$

auf Raumpunkte im $\mathbb{R}^3$ abgebildet. Für seinen Ortsvektor $\boldsymbol{x}$ im raumfesten, von den orthonormierten Vektoren $\boldsymbol{e}_i$ aufgespannten, kartesischen Koordinatensystem gilt

$$\boldsymbol{x} = x^i \, \boldsymbol{e}_i \qquad\qquad i = 1,\ 2,\ 3 \tag{2.2}$$

mit den Lagrange-Koordinaten x^i. Im folgenden werden alle Größen, die sich auf die durch $\chi_t \left(t \in \mathbb{R}_0^+\right)$ gegebene Momentankonfiguration beziehen, mit einem Querbalken $\overline{(\cdot)}$ gekennzeichnet, im Gegensatz zu Größen in der durch χ_{t_0} $(t = t_0)$ gegebenen Referenzkonfiguration. Die Differenz zwischen den Ortsvektoren der Momentan- und Referenzkonfiguration wird als *Verschiebungsfeld* $\boldsymbol{d} = \overline{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x}$ bezeichnet *(Bild 2.1)*.

Der *materielle Deformationsgradient* $\boldsymbol{F}$ ist als lineare Abbildung eines vektoriellen Linienelementes der Referenzkonfiguration $d\boldsymbol{x}$ auf das entsprechende Linienelement der Momentankonfiguration $d\overline{\boldsymbol{x}}$ definiert.

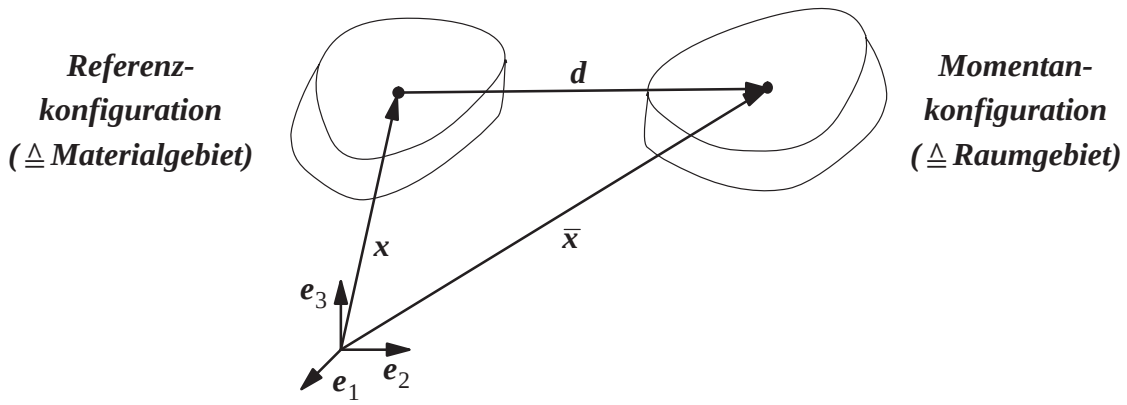


Bild 2.1: Konfigurationen und kontinuumsmechanische Gebiete für die Strukturmechanik

$$d\bar{\boldsymbol{x}} = \frac{\partial \bar{\boldsymbol{x}}}{\partial \boldsymbol{x}} \cdot d\boldsymbol{x} =: \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{x} \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{F} = \frac{\partial \bar{\boldsymbol{x}}}{\partial \boldsymbol{x}} = \nabla \bar{\boldsymbol{x}} = \nabla \boldsymbol{d} + \boldsymbol{I} \tag{2.3}$$

$\boldsymbol{I}$ bezeichnet den zweistufigen Einheitstensor. Als Verzerrungsmaß ist der auf den gesamten Bewegungsvorgang bezogene Deformationsgradient allerdings wegen seiner Unsymmetrie, Richtungsabhängigkeit und Starrkörperanteile ungeeignet. Daher wird hier der *Green-Lagrange-Verzerrungstensor* $\boldsymbol{E}$ als Verzerrungsmaß gewählt, der ein symmetrischer, richtungsunabhängiger und von Starrkörperanteilen befreiter Tensor 2. Stufe ist. Er definiert sich über die Differenz der Quadrate der Linienelemente $d\bar{s}$ und ds der Momentan- und Referenzkonfiguration:

$$\begin{aligned} d\bar{s}^2 - ds^2 &= d\bar{\boldsymbol{x}} \cdot d\bar{\boldsymbol{x}} - d\boldsymbol{x} \cdot d\boldsymbol{x} = d\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{F}^T \cdot \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{x} - d\boldsymbol{x} \cdot d\boldsymbol{x} = \\ &= d\boldsymbol{x} \cdot \left(\boldsymbol{F}^T \cdot \boldsymbol{F} - \boldsymbol{I}\right) \cdot d\boldsymbol{x} =: d\boldsymbol{x} \cdot 2\boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{x} \end{aligned} \tag{2.4}$$

Daraus folgt also für den Green-Lagrange-Verzerrungstensor

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{F}^T \cdot \boldsymbol{F} - \boldsymbol{I}\right) \tag{2.5}$$

Unter Verwendung der Definition des Deformationsgradienten (2.3) läßt er sich auch als nichtlineare Verzerrungs-Verschiebungsbeziehung schreiben.

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{2}\left(\nabla \boldsymbol{d} + (\nabla \boldsymbol{d})^T + (\nabla \boldsymbol{d})^T \cdot \nabla \boldsymbol{d}\right) \tag{2.6}$$

Der Green-Lagrange-Verzerrungstensor liefert eine vollständige Beschreibung des Deformationsvorganges und ist somit auch für große Verzerrungen geeignet. Mit ihm ist die kinematische Feldgleichung der Elastodynamik gegeben.

Impulsbilanz und Spannungsmaße

Die lokale Impulsbilanz ist die dynamische Feldgleichung der Elastodynamik, mit der die inneren, die äußeren und die Trägheitskräfte eines sich bewegenden Systems miteinander ins Gleichgewicht gebracht werden. Weitere Bilanzgleichungen, z.B. für Drall, Masse oder Energie, werden in dieser Arbeit für die Strukturdynamik nicht weiter herangezogen, ihre Herleitung wird daher hier nicht erläutert.

Mit dem verallgemeinerten 2. Newtonschen Grundgesetz wird zunächst die *globale Impulsbilanz* aufgestellt. Diese besagt, daß die zeitliche Änderung des Gesamtimpulses bei der Deformation eines Körpers gleich der Summe aller auf den Körper und dessen Oberfläche einwirkenden Kräfte ist.

$$\frac{D}{Dt} \int_{\Omega_S} \rho^S \, \dot{\boldsymbol{d}} \, d\Omega_S = \int_{\Gamma_S} \boldsymbol{t} \, d\Gamma_S + \int_{\Omega_S} \rho^S \, \boldsymbol{b} \, d\Omega_S \tag{2.7}$$

Hierin bezeichnen Ω_S und $\Gamma_S = \partial\Omega_S$ das Volumen und die Oberfläche des undeformierten Körpers, ρ^S die Dichte im undeformierten Ausgangszustand, $\boldsymbol{t}$ den auf das Oberflächenelement $d\Gamma_S$ bezogenen Kraft- bzw. Spannungsvektor und $\boldsymbol{b}$ den eingeprägten Volumenkraftvektor pro Masseneinheit, jeweils bezogen auf die Referenzkonfiguration. Mit der Notation Df/Dt

bzw. $\dot{f}$ wird die materielle Zeitableitung, d.h. die Differenziation einer (skalaren, physikalischen) Eigenschaft f eines Materieteilchens nach der Zeit bezeichnet. In der Lagrangeschen (= materiellen) Betrachtungsweise entspricht dies der partiellen Ableitung $\partial f / \partial t$. Der Index S wird hier und in der Folge verwendet, um strukturspezifische Größen zu bezeichnen, und somit Verwechslungen mit den später eingeführten fluidspezifischen Größen zu vermeiden.

Entsprechend dem Cauchy-Theorem $\bar{\boldsymbol{t}} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \bar{\boldsymbol{n}}$ kann der Spannungsvektor $\bar{\boldsymbol{t}}$ in die Spannungskomponenten in die Normalenrichtungen (mit Einheitsnormalenvektor $\bar{\boldsymbol{n}}$) aufgespalten werden. Der hierin auftretende symmetrische *Cauchy-Spannungstensor* $\boldsymbol{\sigma}$ ist vollständig (Kraft und Flächenelement) auf die Momentankonfiguration bezogen und stellt daher die physikalischen, „wahren“ Spannungen dar. Er hängt nach der Beziehung

$$\boldsymbol{P} := \det \boldsymbol{F} \; \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{F}^{-T} \tag{2.8}$$

mit dem *1. Piola-Kirchhoff-Spannungstensor* $\boldsymbol{P}$ *(PK1)* zusammen, der die momentane Kraft auf ein Flächenelement der Referenzkonfiguration bezieht. Dessen Unsymmetrie führt jedoch zu Nachteilen bei der Aufstellung von Materialgesetzen, daher wird er meist, so auch in dieser Arbeit, durch den symmetrischen *2. Piola-Kirchhoff-Spannungstensor* $\boldsymbol{S}$ *(PK2)* ersetzt. Dieser bezieht nun Kraft und Fläche auf die Referenzkonfiguration, ist das zum Green-Lagrange-Verzerrungstensor energetisch konjugierte Spannungsmaß und wird daher letztendlich für die Formulierung von Finiten Elementen verwendet.

$$\boldsymbol{S} := \boldsymbol{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{P} = \det \boldsymbol{F} \; \boldsymbol{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{F}^{-T} \tag{2.9}$$

Somit können PK2 und Cauchy-Spannungstensor über eine Rückwärtstransformation *(„pull back“*, Gl. (2.9)) bzw. Vorwärtstransformation *(„push forward“*, Gl. (2.10)) ineinander überführt werden.

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{\det \boldsymbol{F}} \; \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{F}^{T} \tag{2.10}$$

Der Integrand des Oberflächenintegrals in (2.7) wird nun mit (2.10) und dem Cauchy-Theorem, weiterhin mit der Nanson-Formel $\bar{\boldsymbol{n}} \; d\bar{\Gamma}_S = \det \boldsymbol{F} \; \boldsymbol{F}^{-T} \cdot \boldsymbol{n} \; d\Gamma_S$ sowie unter Berücksichtigung der Forderung, daß die resultierende Kraft auf ein Flächenelement unabhängig von der Bezugskonfiguration sein soll *(*$d\boldsymbol{f} = \boldsymbol{t} \; d\Gamma_S = \bar{\boldsymbol{t}} \; d\bar{\Gamma}_S$*)* umformuliert.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{t} \; d\Gamma_S &= \bar{\boldsymbol{t}} \; d\bar{\Gamma}_S = \boldsymbol{\sigma} \cdot \bar{\boldsymbol{n}} \; d\bar{\Gamma}_S = \det \boldsymbol{F} \; \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{F}^{-T} \cdot \boldsymbol{n} \; d\Gamma_S = \\ &= \frac{\det \boldsymbol{F}}{\det \boldsymbol{F}} \; \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{F}^{T} \cdot \boldsymbol{F}^{-T} \cdot \boldsymbol{n} \; d\Gamma_S = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{n} \; d\Gamma_S \end{aligned} \tag{2.11}$$

Durch Anwendung des Gaußschen Integralsatzes (Divergenztheorem, Gl. (A.1)) auf Gleichung (2.7) wird das Oberflächenintegral dann in ein Volumenintegral umgewandelt.

$$\frac{D}{Dt} \int_{\Omega_S} \rho^S \; \dot{\boldsymbol{d}} \; d\Omega_S = \int_{\Omega_S} \Big(\nabla \cdot (\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{S}) + \rho^S \; \boldsymbol{b} \Big) \; d\Omega_S \tag{2.12}$$

Da (2.12) für beliebige Gebiete Ω_S gelten muß, folgt daraus schließlich die *lokale Impulsbilanz*, auch *1. Cauchysche Bewegungsgleichung* genannt.

$$\rho^S \, \ddot{\boldsymbol{d}} = \nabla \cdot (\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{S}) + \rho^S \, \boldsymbol{b} \qquad \text{in } \Omega_S \times (0, T) \tag{2.13}$$

Konstitutive Beziehungen

Die konstitutiven Gleichungen setzen die geometrischen und die statischen bzw. dynamischen Feldgleichungen über das Materialgesetz miteinander in Beziehung. Im Rahmen dieser Arbeit sind dies der Green-Lagrange-Verzerrungstensor und der 2. Piola-Kirchhoff-Spannungstensor, die mit dem Saint Venant-Kirchhoff-Materialgesetz verknüpft werden.

Für die somit zu betrachtende Greensche Elastizität wird die Existenz einer spezifischen Verzerrungs- oder Formänderungsarbeit $W_{int}(\boldsymbol{E})$ postuliert, die bezüglich des PK2 eine Potentialfunktion darstellt. Durch den Vergleich ihrer Zeitableitung

$$\dot{W}_{int} = \frac{\partial W_{int}}{\partial \boldsymbol{E}} : \dot{\boldsymbol{E}} \tag{2.14}$$

mit der inneren Spannungsleistung $\dot{W}_{int} = \boldsymbol{S} : \dot{\boldsymbol{E}}$ erhält man die konstitutive Beziehung

$$\boldsymbol{S} = \frac{\partial W_{int}}{\partial \boldsymbol{E}} \tag{2.15}$$

in der allgemeinen Form. Die Linearisierung dieser Spannungs-Dehnungs-Beziehung und die Beschränkung auf homogene, isotrope, linear elastische Materialien führt weiter auf

$$\boldsymbol{S} = \lambda^S \, \mathrm{tr}\boldsymbol{E} \; \boldsymbol{I} + 2 \, \mu^S \; \boldsymbol{E} + o(\| \boldsymbol{E} \|) \tag{2.16}$$

mit den *Lamé-Konstanten* λ^S und μ^S. Unter Vernachlässigung der Terme höherer Ordnung folgt dann die konstitutive Gleichung des *Saint Venant-Kirchhoff-Materials*

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{C} : \boldsymbol{E} = \lambda^S \, \mathrm{tr}\boldsymbol{E} \; \boldsymbol{I} + 2 \, \mu^S \; \boldsymbol{E} \tag{2.17}$$

mit dem *vierstufigen Material-* bzw. *Elastizitätstensor* $\boldsymbol{C}$. Anstelle der Lamé-Konstanten sind in der Ingenieurliteratur die Elastizitätsmaße *Elastizitätsmodul* E^S und *Poisson-* bzw. *Querdehnzahl* ν^S gebräuchlicher. Lamé-Konstanten und Elastizitätsmaße können durch

$$\lambda^S = \frac{E^S \, \nu^S}{\left(1 + \nu^S\right) \left(1 - 2\nu^S\right)} \qquad \mu^S = \frac{E^S}{2 \, \left(1 + \nu^S\right)} \tag{2.18}$$

ineinander überführt werden. Das Saint Venant-Kirchhoff-Materialgesetz ist aufgrund der vollständigen, nichtlinearen Dehnungsbeschreibung mittels des Green-Lagrange-Verzerrungstensors für große Verschiebungen geeignet, aber wegen der obigen Linearisierung und Vernächlässigung von Termen höherer Ordnung nur für kleine Verzerrungen.

Anfangs-Randwertproblem der nichtlinearen Elastodynamik

Basierend auf den bisher hergeleiteten Beziehungen kann nun das in *Bild 2.2* zusammenfassend dargestellte Anfangs-Randwertproblem der nichtlinearen Elastodynamik in der lokalen, d.h. starken Form aufgestellt werden. Es wird gebildet durch die Kopplung der dynamischen (2.13), der kinematischen (2.5) bzw. (2.6) und der konstitutiven Feldgleichungen (2.17), und stellt

- Dynamik – 1. Cauchysche Bewegungsgleichung

$$\rho^S \, \ddot{\boldsymbol{d}} = \nabla \cdot (\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{S}) + \rho^S \, \boldsymbol{b} \qquad \text{in } \Omega_S \times (0, T) \tag{2.19}$$

- Kinematik – Green-Lagrange-Verzerrungen

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{F}^T \cdot \boldsymbol{F} - \boldsymbol{I}\right) = \frac{1}{2}\left(\nabla \boldsymbol{d} + (\nabla \boldsymbol{d})^T + (\nabla \boldsymbol{d})^T \cdot \nabla \boldsymbol{d}\right) \tag{2.20}$$

- Material – Konstitutive Gleichung (Saint Venant-Kirchhoff-Material)

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{C} : \boldsymbol{E} = \lambda^S \, \mathrm{tr}\boldsymbol{E} \; \boldsymbol{I} + 2 \, \mu^S \, \boldsymbol{E} \tag{2.21}$$

- Anfangsbedingungen

$$\boldsymbol{d} = \boldsymbol{d}_0 \; ; \quad \dot{\boldsymbol{d}} = \dot{\boldsymbol{d}}_0 \qquad \text{in } \Omega_S \text{ für } t = 0 \tag{2.22}$$

- Dirichlet-Randbedingungen

$$\boldsymbol{d} = \hat{\boldsymbol{d}} \qquad \text{auf } \Gamma_d \times (0, T) \tag{2.23}$$

- Neumann-Randbedingungen

$$\boldsymbol{t} = \hat{\boldsymbol{t}} \qquad \text{auf } \Gamma_\sigma \times (0, T) \tag{2.24}$$

Bild 2.2: Anfangs-Randwertproblem der nichtlinearen Elastodynamik – starke Form

ein nichtlineares System partieller, hyperbolischer Differentialgleichungen dar, das durch Anfangs- und Randbedingungen ergänzt wird.

Anfangsbedingungen sind das Verschiebungsfeld $\boldsymbol{d}_0$ sowie das Geschwindigkeitsfeld $\dot{\boldsymbol{d}}_0$ auf dem gesamten Strukturgebiet Ω_S zum Anfangszeitpunkt $t = 0$.

Die Berandung des Gebietes $\Gamma_S = \partial\Omega_S$ setzt sich zusammen aus den Dirichlet-Randbereichen Γ_d mit vorgeschriebenen Verschiebungen $\hat{\boldsymbol{d}}$ und aus den Neumann-Randbereichen Γ_σ mit vorgeschriebenen Spannungen $\hat{\boldsymbol{t}}$.

$$\Gamma_S = \Gamma_d \cup \Gamma_\sigma \qquad\qquad \Gamma_d \cap \Gamma_\sigma = 0 \tag{2.25}$$

Die auf dem Dirichlet-Rand vorgeschriebenen Randbedingungen werden als geometrische, wesentliche oder auch Dirichlet-Randbedingungen bezeichnet, diejenigen auf dem Neumann-Rand dagegen als statische, natürliche oder auch Neumann-Randbedingungen.

Schwache Form

Die Lösung dieses Anfangs-Randwertproblems mit Finiten Elementen erfordert dessen Formulierung in der *schwachen Form*. Dies bedeutet die Darstellung der Gleichungen in einer Integralform, wodurch bestimmte Gleichungen nicht mehr punktweise, sondern nur noch im Integral, also schwach erfüllt werden. Ein zweiter Grund für die Bezeichnung als schwache Form liegt in den in dieser Darstellung schwächeren Differenzierbarkeitsanforderungen an die Lösungsfunktionen. Die Herleitung der schwachen Form kann auf verschiedene Arten geschehen. Im folgenden wird sie in aller Kürze durch das mechanisch motivierte Prinzip der virtuellen Arbeit dargestellt. Zu dessen Hintergrund, sowie zu alternativen Methoden wie Energie- oder Variationsprinzipien wird auf die Literatur verwiesen (z.B. Argyris & Mlejnek (1988a, b, c), Hughes (1987), Zienkiewicz & Taylor (2000a, b, c)).

Das Prinzip der virtuellen Arbeit besagt, daß die Summe der bei einer virtuellen Verschiebung eines Systems von den äußeren und den inneren Kräften geleisteten Arbeit verschwindet. Die virtuellen Verschiebungen entsprechen den Variationen des Verschiebungsvektors $\delta\boldsymbol{d}$ und sind infinitesimal klein, kinematisch zulässig, aber ansonsten beliebig. Mit der aus ihnen abgeleiteten Variation des Green-Lagrange-Verzerrungstensors $\delta\boldsymbol{E}$ folgt die *schwache Form des Anfangs-Randwertproblems der geometrisch nichtlinearen Elastodynamik* aus der Integraldarstellung der Bewegungsgleichung und der Neumann-Randbedingungen.

$$\int_{\Omega_S} \rho^S \ddot{\boldsymbol{d}} \cdot \delta\boldsymbol{d} \; d\Omega_S + \int_{\Omega_S} \delta\boldsymbol{E} : \boldsymbol{S} \; d\Omega_S = \int_{\Gamma_S} \hat{\boldsymbol{t}} \cdot \delta\boldsymbol{d} \; d\Gamma_S + \int_{\Omega_S} \rho^S \boldsymbol{b} \cdot \delta\boldsymbol{d} \; d\Omega_S \tag{2.26}$$

Die übrigen Gleichungen des Anfangs-Randwertproblems – Kinematik- und Materialgleichung, sowie Anfangs- und Dirichlet-Randbedingungen (s. *Bild 2.2*) – bleiben weiterhin in der starken Form bestehen.

Bemerkung 2.1: Eine alternative Art der Herleitung einer schwachen Form ist die eher mathematisch orientierte Methode der gewichteten Residuen, die bei der in Abschnitt 2.2.3 dargestellten Diskretisierung der strömungsdynamischen Gleichungen eingesetzt wird. Die oben im Prinzip der virtuellen Arbeit als *virtuelle Verschiebungen* bezeichneten Größen $\delta\boldsymbol{d}$ entsprechen in diesem Zusammenhang den *Testfunktionen*, mit denen die Residuen der Bilanzgleichungen gewichtet werden.

2.1.3 Raumdiskretisierung

Die numerische Lösung des Anfangs-Randwertproblems der nichtlinearen Elastodynamik wird im Rahmen der vorliegenden Arbeit in einem sequentiellen Diskretisierungskonzept mittels der Methode der Finiten Elemente (FEM) im Raum und mit den im nächsten Abschnitt besprochenen Diskretisierungsverfahren in der Zeit vorgenommen. Dabei konnte bezüglich der Raum- (und Zeit-)diskretisierung auf eine Reihe von Vorarbeiten und auf ein bereits weit entwickeltes FEM-Programmpaket (CARAT) mit verschiedensten, modular einsetzbaren Elementformulierungen und Zeitintegrationsalgorithmen zurückgegriffen werden. Dieses mußte lediglich noch hinsichtlich der *partitionierten* Behandlung strukturdynamischer Probleme in einigen Punkten modifiziert und ergänzt werden. In diesem Abschnitt werden daher lediglich die Grundzüge der verwendeten Finiten Elemente skizziert und spezifische Literaturhinweise gegeben, ansonsten wird auf die einschlägigen Lehrbücher zur FEM verwiesen.

Die räumliche Diskretisierung der schwachen Form in Gleichung (2.26) mit der FEM ist durch die Approximation $(\cdot)^h$ der kontinuierlichen Funktionen für die Verschiebungen $\boldsymbol{d}$ und für die virtuellen Verschiebungen $\delta\boldsymbol{d}$ durch die diskreten Knotenverschiebungswerte $\boldsymbol{d}_i$ und auf Elementebene formulierte Ansatzfunktionen $\boldsymbol{N}_i$ (jeweils für den Knoten *i)* gegeben.

$$\boldsymbol{d} \approx \boldsymbol{d}^h = \boldsymbol{N}_i \boldsymbol{d}_i \quad ; \qquad \delta\boldsymbol{d} \approx \delta\boldsymbol{d}^h = \boldsymbol{N}_i \delta\boldsymbol{d}_i \quad ; \qquad \dot{\boldsymbol{d}} \approx \dot{\boldsymbol{d}}^h = \boldsymbol{N}_i \dot{\boldsymbol{d}}_i \quad ; \qquad \text{usw.} \tag{2.27}$$

Bemerkung 2.2: Zur Vereinfachung der Notation werden die Bezeichnungen $\boldsymbol{d}$, $\dot{\boldsymbol{d}}$ und $\ddot{\boldsymbol{d}}$ für die kontinuierlichen Verschiebungen, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen im folgenden auch für die entsprechenden diskreten Knotenwerte verwendet.

Um den in vielen Fällen auftretenden spezifischen Problemen solcher reiner Verschiebungsformulierungen zu begegnen, dies sind insbesondere künstliche Versteifungseffekte *(„Locking“)*, wurde im Laufe der Jahre eine Reihe von Konzepten entwickelt, wie etwa die reduzierte Integration, die hybride Spannungsmethode, die Methode der erweiterten Verzerrungen *(„Enhanced Assumed Strain“ – EAS)* oder die Methode der angenommenen Verzerrungen *(„Assumed Natural Strain“ – ANS)*. Die meisten dieser Verfahren gehen dabei nicht von der schwachen Form (2.26) aus, sondern basieren auf gemischten Funktionalen oder Mehrfeldfunktionalen. Die wichtigsten Vertreter solcher Funktionale sind das Prinzip von Hu-Washizu und das Prinzip von Hellinger-Reissner. Eine zusammenfassende Behandlung dieser Thematik für Scheiben-, Platten- und Schalenelemente findet sich in Haußer (1996); für den speziellen Fall von Schalenformulierungen wird auf Braun (1995) und Bischoff (1999) verwiesen.

In der vorliegenden Arbeit werden für die numerischen Beispiele sowohl Scheiben- als auch Schalenelemente eingesetzt. Es werden die folgenden Elemente empfohlen und verwendet: voll integrierte neunknotige Verschiebungselemente, reduziert integrierte achtknotige Verschiebungselemente und entsprechende gemischte bzw. hybrid-gemischte Elemente, wie EAS- oder ANS-Elemente. Als Schalenelemente kommen zwei unterschiedliche Formulierungen zum Einsatz: Ein degeneriertes Schalenmodell mit 5 Parametern nach Ramm (1976) und eine dreidimensionale Schalenformulierung mit 7 Parametern nach Büchter & Ramm (1992) bzw. Bischoff (1999).

Unabhängig von der Wahl einer der oben angesprochenen speziellen Diskretisierungsvarianten führt die Diskretisierung des Anfangs-Randwertproblems im Raum auf ein semidiskretes System nichtlinearer, algebraischer Gleichungen für die gesamte Struktur, das sich in der folgenden Matrixdarstellung schreiben läßt.

$$\boldsymbol{M}^S\ddot{\boldsymbol{d}} + \boldsymbol{f}_{int}(\boldsymbol{d}) = \boldsymbol{f}_{ext} \tag{2.28}$$

In dieser *semidiskreten Bewegungsgleichung* bezeichnet $\boldsymbol{M}^S$ die Massenmatrix, $\boldsymbol{f}_{int}(\boldsymbol{d})$ den verschiebungsabhängigen Vektor der inneren Kräfte und $\boldsymbol{f}_{ext}$ den externen Lastvektor. Häufig wird sie durch einen viskosen Dämpfungsterm $\boldsymbol{D}^S\dot{\boldsymbol{d}}$ auf der linken Gleichungsseite ergänzt, um eine Systemdämpfung zu beschreiben. Bei den numerischen Untersuchungen in dieser Arbeit wurde jedoch (bis auf einen ausnahmsweisen Testfall) stets ohne viskose Strukturdämpfung gerechnet, um zu verhindern, daß eventuell auftretende algorithmische Stabilitätsprobleme aus der Lösung herausgedämpft und somit möglicherweise gar nicht erkannt werden könnten. Daher wird der Dämpfungsterm in den folgenden Darstellungen in der Regel weggelassen. Für lineare Systeme kann man (2.28) auch schreiben als

$$\boldsymbol{M}^S\ddot{\boldsymbol{d}} + \boldsymbol{K}^S\boldsymbol{d} = \boldsymbol{f}_{ext} \tag{2.29}$$

mit der Steifigkeitsmatrix $\boldsymbol{K}^S := \partial\boldsymbol{f}_{int}/\partial\boldsymbol{d}$. Somit liegt ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit Anfangs- und Randbedingungen entsprechend den in *Bild 2.2* angegebenen Gleichungen vor.

2.1.4 Zeitdiskretisierung

Die numerische Integration der semidiskreten Bewegungsgleichung erfordert zunächst die Diskretisierung in der Zeit. Dazu wird die Integrationszeit $[t_0,\ T]$ in $n_T = (T - t^0)/\Delta t$ äquivalente Zeitintervalle $[t^n,\ t^{n+1}]$ bzw. Zeitschritte $\Delta t = t^{n+1} - t^n$ zerlegt, mit $t^n = t_0 + n\Delta t$ und $n \in [0,\ n_T]$. Desweiteren werden sogenannte Zeitintegrationsansätze formuliert, die dazu dienen, Zusammenhänge zwischen den kinematischen Größen herzustellen und so den Variablensatz aus Verschiebungen $\boldsymbol{d}$, Geschwindigkeiten $\dot{\boldsymbol{d}}$ und Beschleunigungen $\ddot{\boldsymbol{d}}$ auf nur eine dieser drei Größen zu reduzieren. Die wohl populärsten Zeitintegrationsansätze stammen von Newmark (1959), sie lauten für die Verschiebungen und Geschwindigkeiten zum Zeitpunkt t^{n+1} als Funktion der Beschleunigungen zur Zeit t^{n+1}

$$\begin{aligned} \boldsymbol{d}^{n+1} &= \boldsymbol{d}^n + \Delta t\ \dot{\boldsymbol{d}}^n + \frac{\Delta t^2}{2}\Big((1-2\beta)\ddot{\boldsymbol{d}}^n + 2\beta\ddot{\boldsymbol{d}}^{n+1}\Big) \\ \dot{\boldsymbol{d}}^{n+1} &= \dot{\boldsymbol{d}}^n + \Delta t\ \Big((1-\gamma)\ddot{\boldsymbol{d}}^n + \gamma\ddot{\boldsymbol{d}}^{n+1}\Big) \end{aligned} \tag{2.30}$$

bzw. so umgeformt, daß sich die Verschiebungen $\boldsymbol{d}^{n+1}$ als primäre Unbekannte ergeben:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{d}}^{n+1} &= \frac{\gamma}{\beta\Delta t}\Big(\boldsymbol{d}^{n+1} - \boldsymbol{d}^n\Big) - \frac{\gamma-\beta}{\beta}\dot{\boldsymbol{d}}^n - \frac{\gamma-2\beta}{2\beta}\Delta t\ \ddot{\boldsymbol{d}}^n \\ \ddot{\boldsymbol{d}}^{n+1} &= \frac{1}{\beta\Delta t^2}\Big(\boldsymbol{d}^{n+1} - \boldsymbol{d}^n\Big) - \frac{1}{\beta\Delta t}\dot{\boldsymbol{d}}^n - \frac{1-2\beta}{2\beta}\ddot{\boldsymbol{d}}^n \end{aligned} \tag{2.31}$$

Über die als Newmark-Parameter bezeichneten Konstanten β und γ aus $\mathbb{R}_0^+$ ist eine ganze Familie von Zeitintegrationsverfahren definiert, deren numerische Eigenschaften mit diesen Parametern gezielt gesteuert werden können.

Bevor im folgenden die in dieser Arbeit verwendeten Verfahren erläutert werden, wird zur Begriffsklärung ein kurzer Einschub über numerische Eigenschaften von Zeitintegrationsverfahren vorangestellt. Eine ausführliche Diskussion zu dieser Thematik findet sich in Kuhl (1996), desweiteren werden zum vertieften Studium die Bücher von Argyris & Mlejnek (1988c), Hughes (1987) sowie Deuflhard & Bornemann (1994) empfohlen.

Numerische Eigenschaften von Zeitintegrationsverfahren

- *Stabilitätsbegriffe*

Ein Zeitintegrationsverfahren wird als *stabil* bezeichnet, wenn die ermittelte Lösung der Bewegungsgleichung eines frei schwingenden, dynamischen Systems nicht mit fortschreitender Berechnungsdauer über alle Grenzen anwächst, oder mit anderen Worten: wenn eine endlich kleine Störung in der Lösung für alle Zeit endlich klein (beschränkt) bleibt. Gilt diese Beschränktheit der Lösung nur für einen Zeitschritt, der kleiner als ein kritischer Zeitschritt Δt_{cr} ist, so ist das Verfahren *bedingt stabil*, bei nicht limitierter Zeitschrittgröße ist es *unbedingt stabil*. Als mathematisches Kriterium zur Beurteilung der Stabilität wird für lineare Systeme meist die *spektrale Stabilität* verwendet. Diese basiert auf dem Spektralradius $\rho_t(\boldsymbol{\Phi})$ der Vergrößerungsmatrix $\boldsymbol{\Phi}$ *(„amplification matrix“)*, welcher als deren betragsmäßig größter Eigenwert $\lambda_j(\boldsymbol{\Phi})$ definiert ist.

$$\rho_t(\boldsymbol{\Phi}) \; := \max_{j=1...n} \left\{ \; \left| \; \lambda_j(\boldsymbol{\Phi}) \; \right| \; \right\} \tag{2.32}$$

Für $\boldsymbol{\Phi}$ gilt dabei: $\boldsymbol{d}^{n+1} = \boldsymbol{\Phi} \; \boldsymbol{d}^n$. Der Spektralradius darf für Stabilität nicht größer als eins sein. Damit ergeben sich folgende Stabilitätsaussagen:

$$\rho_t(\boldsymbol{\Phi}) \leq 1 \quad \forall \quad \Delta t \in \mathbb{R}^+ \qquad \rightarrow \quad \textit{unbedingt spektral stabil} \tag{2.33}$$

$$\rho_t(\boldsymbol{\Phi}) \leq 1 \quad \forall \quad \Delta t < \Delta t_{cr} \in \mathbb{R}^+ \qquad \rightarrow \quad \textit{bedingt spektral stabil} \tag{2.34}$$

$$\rho_t(\boldsymbol{\Phi}) < 1 \qquad \rightarrow \quad \textit{asymptotisch stabil (A–stabil)} \tag{2.35}$$

Für nichtlineare Systeme muß auf ein anderes Kriterium übergegangen werden, da die spektrale Stabilität auf einer modalen Analyse des dynamischen Systems und auf dem Superpositionsprinzip beruht, was im Nichtlinearen nicht mehr gültig ist. Ferner wird in zahlreichen Veröffentlichungen gezeigt, daß viele Zeitintegrationsalgorithmen, die in der linearen Dynamik unbedingt (spektral) stabil sind, diese unbedingte Stabilität im nichtlinearen Fall verlieren. Ein für die nichtlineare Dynamik geeignetes Stabilitätskriterium basiert auf einer *Energiebilanz*. Es besagt, daß ein Verfahren dann *energetisch stabil* ist, wenn die totale Energie innerhalb eines Zeitschritts um nicht mehr als die von externen Lasten und gegebenenfalls Dämpfungskräften geleistete Arbeit zunimmt (Belytschko & Schoeberle (1975)):

$$E_{tot}^{n+1} \leq \Delta W_{ext} + E_{tot}^{n} \quad \forall \quad \Delta t \in \mathbb{R}^+ \quad \rightarrow \quad \textit{energetisch stabil} \tag{2.36}$$

mit $E_{tot} = E_{kin} + E_{int}$ und

$$\Delta W_{ext} = \int_{t^n}^{t^{n+1}} \dot{\boldsymbol{d}}(\tau) \cdot \left(\boldsymbol{f}_{ext}(\tau) - \boldsymbol{D} \cdot \dot{\boldsymbol{d}}(\tau) \right) \, d\tau \tag{2.37}$$

Energetische Stabilität im nichtlinearen Fall wird häufig durch numerische Dissipation parasitärer (unphysikalischer) hochfrequenter Schwingungsmoden erreicht. Da diese jedoch insbesondere bei langzeitdynamischen Simulationen das Ergebnis verfälschen kann, wurde in den letzten Jahren intensiv an der Entwicklung energieerhaltender, dissipativer Algorithmen gearbeitet. Einen Überblick zu dieser Entwicklung geben Kuhl & Ramm (1999). Energieerhaltende Verfahren werden in dieser Arbeit allerdings nicht eingesetzt.

Weiterhin wird zwischen *strikter Stabilität* bzw. *Instabilität* und *schwacher Instabilität* unterschieden (vgl. Deuflhard & Bornemann (1994)). Diese Unterscheidung ist für die vorliegende Arbeit von essentieller Bedeutung. Ein *strikt stabiles* Zeitintegrationsverfahren erzeugt für alle Zeit eine stabile Lösung, während ein *strikt instabiles* Verfahren sofort, also bereits ab dem ersten Zeitschritt instabil ist. Ein *schwach instabiles* Zeitintegrationsverfahren hingegen zeigt innerhalb eines bestimmten anfänglichen Zeitbereiches eine stabile Lösung, später wird diese jedoch allmählich instabil. Der Zeitpunkt des Beginns dieser Instabilität hängt von der Zeitschrittgröße und von der Differentialgleichung ab. Insbesondere wird der Instabilitätsbeginn durch Verkleinerung des Zeitschrittes zeitlich nach hinten verschoben; eine vollständige Vermeidung der Instabilität ist so aber, im Gegensatz zu bedingt stabilen Verfahren, *nicht* mög-

lich. Mathematisch gesehen ist schwache Instabilität (im Linearen) dadurch gekennzeichnet, daß die Vergrößerungsmatrix $\boldsymbol{\Phi}$ mehr als einen Eigenwert $\lambda_j(\boldsymbol{\Phi})$ vom Betrag gleich eins aufweist. Die Instabilität in der numerischen Lösung äußert sich typischerweise in einem exponentiellen Anwachsen der Schwingungsamplituden.

Die verschiedenen (In-)Stabilitätseffekte sollen hier mit einem einfachen skalaren Beispiel verdeutlicht werden. Die Modellgleichung $\mathrm{d}d/\mathrm{d}t = -ad$ mit $d_0 = 1,0$ und $a > 0$ wird in *Bild 2.3* durch das bedingt stabile Vorwärts-Euler Zeitintegrationsverfahren für verschiedene Parameterkonfigurationen gelöst ($\frac{1}{\Delta t}\left(d^{n+1} - d^n\right) = -ad^n$). Für $\Delta t < \Delta t_{cr}$ ist das Verfahren strikt stabil, ansonsten ist es strikt instabil. In *Bild 2.4* hingegen wird die Modellgleichung mit der expliziten Mittelpunktsregel gelöst ($\frac{1}{2\Delta t}\left(d^{n+1} - d^{n-1}\right) = -ad^n$ mit $d^1 = d_0 - \Delta t\ ad_0$), die das typische schwache Instabilitätsverhalten aufweist.

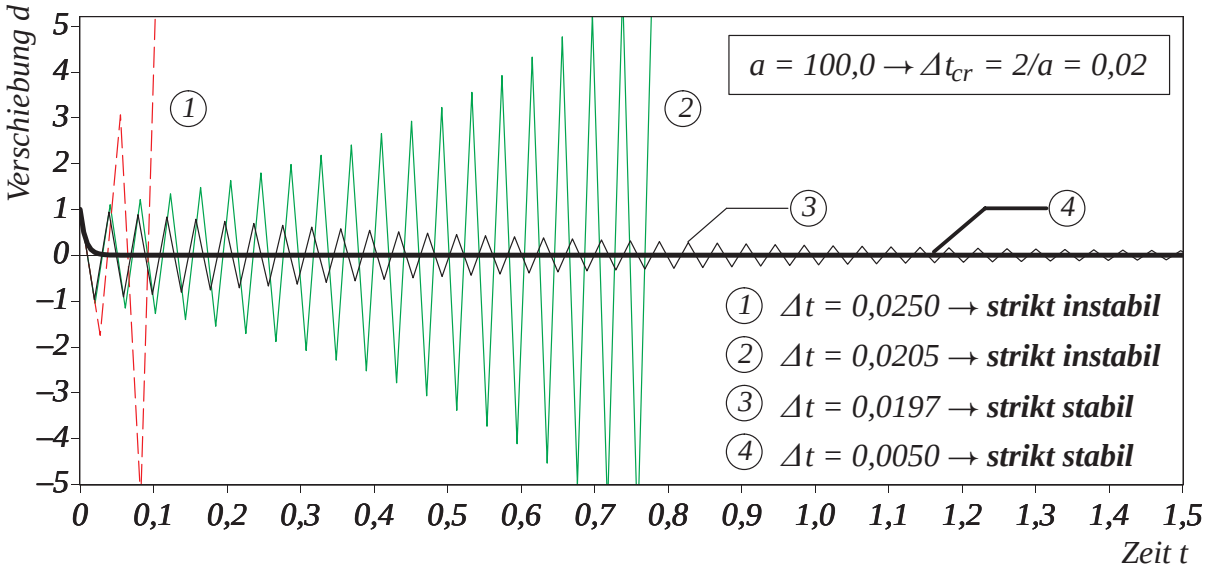


Bild 2.3: Vorwärts-Euler-Verfahren: Bedingte Stabilität: Strikt instabil für $\Delta t \geq \Delta t_{cr}$ und strikt stabil für $\Delta t < \Delta t_{cr}$

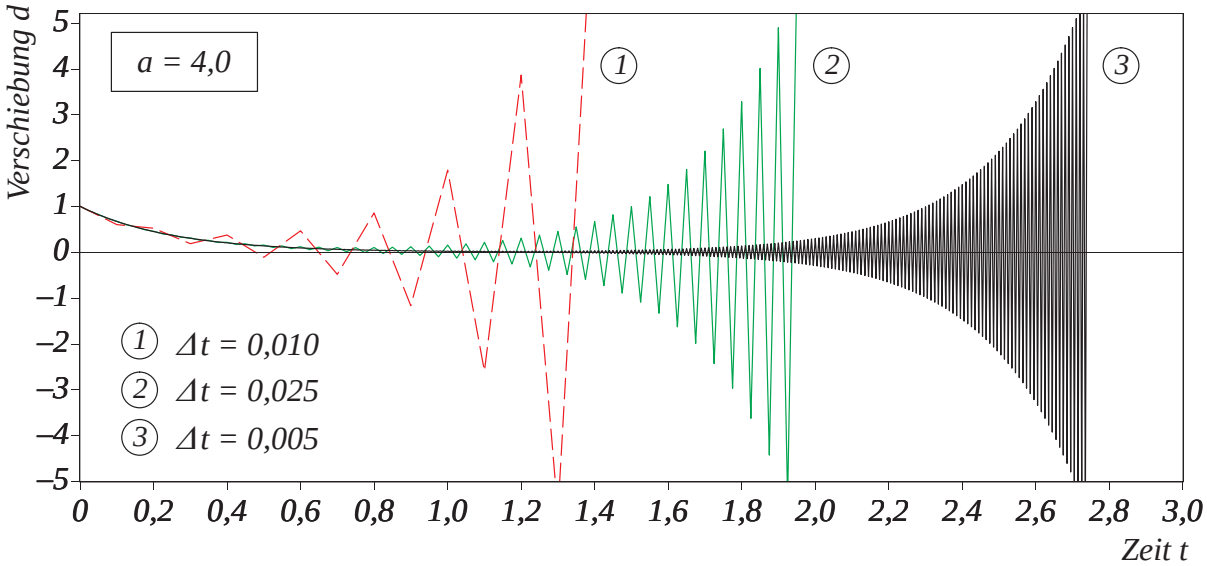


Bild 2.4: Explizite Mittelpunktsregel: Schwache Instabilität

- *Genauigkeitsordnung*

Die Genauigkeitsordnung eines Zeitintegrationsverfahrens ist, z.B. nach Hoff & Pahl (1988), mit dem Vektor der *lokalen Abbruchfehler*

$$\boldsymbol{e}_t = \frac{1}{\Delta t^2}\left(\boldsymbol{d}^{n+1} - 2\Phi_1\boldsymbol{d}^n + \Phi_2\boldsymbol{d}^{n-1} - \Phi_3\boldsymbol{d}^{n-2}\right) \tag{2.38}$$

gegeben, wobei die Konstanten Φ_i die Invarianten der Vergrößerungsmatrix $\boldsymbol{\Phi} = \left[\Phi_{ij}\right]$ sind:

$$\Phi_1 = \mathrm{tr}\boldsymbol{\Phi} = \Phi_{ii} \qquad \Phi_2 = \frac{1}{2}\left((\mathrm{tr}\boldsymbol{\Phi})^2 - \mathrm{tr}\boldsymbol{\Phi}^2\right) \qquad \Phi_3 = \det\boldsymbol{\Phi} \tag{2.39}$$

Ein Verfahren ist von *k-ter Genauigkeitsordnung,* wenn mit dem Grenzübergang $t \to \infty$ für den lokalen Abbruchfehler $\boldsymbol{e}_t = O\left(\Delta t^k\right)$ gilt.

- *Numerische Dissipation*

Die *numerische Dissipation* eines Zeitintegrationsverfahrens beschreibt den durch das Integrationsverfahren verursachten *Amplitudenfehler.* Ziel ist es, durch kontrollierten Einsatz von numerischer Dissipation hochfrequente Schwingungsanteile, die meist nichtphysikalischer und somit parasitärer Natur sind, aus der Lösung der Differentialgleichung herauszudämpfen. Ausführliche Erläuterungen hierzu findet man z.B. in Hilber et al. (1977), Hulbert (1992) und Hughes (1987).

Im hochfrequenten Lösungsbereich (kleine Periodenlängen T_p) wird sie durch den Spektralradius der Vergrößerungsmatrix im Grenzübergang $\Delta t/T_p \to \infty$ beurteilt:

$$\rho_\infty(\boldsymbol{\Phi}) := \lim_{\Delta t/T_p \to \infty} \rho_t(\boldsymbol{\Phi}) \qquad 0 \le \rho_\infty(\boldsymbol{\Phi}) \le 1 \tag{2.40}$$

Dabei bedeutet $\rho_\infty = 1$ keine numerische Dissipation, während mit kleiner werdendem ρ_∞ die numerische Dissipation zunimmt.

Zeitintegrationsalgorithmen

Im folgenden wird in aller Kürze auf die in dieser Arbeit für die Strukturdynamik verwendeten Zeitintegrationsalgorithmen eingegangen. Es kommen hier ausschließlich direkte Einschrittverfahren zum Einsatz. Für detailliertere Ausführungen und weitere, gebräuchliche Formulierungen wird auf die o.g. Literatur verwiesen.

- *Generalized-α-Verfahren, implizit*

Implizite Zeitintegrationsverfahren sind dadurch charakterisiert, daß aufgrund der verwendeten Zeitintegrationsansätze der durch die Bewegungsgleichung definierte Bewegungszustand am Ende t^{n+1} eines Zeitintervalles $[t^n,\ t^{n+1}]$ implizit von sich selbst abhängt, und daher zu seiner Berechnung in jedem Zeitschritt ein algebraisches Gleichungssystem gelöst werden muß, welches sich aus der diskretisierten Bewegungsgleichung ergibt.

Das Generalized-α-Verfahren von Chung & Hulbert (1993) vereinigt einige der wichtigsten impliziten Zeitintegrationsverfahren in einer verallgemeinerten Form. Es basiert auf den New-

mark-Ansätzen (2.30) bzw. (2.31) und der mit Hilfe zweier Shift-Parameter α_m und α_f modifizierten semidiskreten Bewegungsgleichung

$$\boldsymbol{M}^S\ddot{\boldsymbol{d}}^\alpha\Big(+ \boldsymbol{D}^S\dot{\boldsymbol{d}}^\alpha\Big) + \boldsymbol{f}_{int}(\boldsymbol{d}^\alpha) = \boldsymbol{f}_{ext}^\alpha \tag{2.41}$$

Darin bedeuten

$$\begin{aligned} \ddot{\boldsymbol{d}}^\alpha &= (1-\alpha_m)\ddot{\boldsymbol{d}}^{n+1} + \alpha_m\ddot{\boldsymbol{d}}^n \;; \qquad \dot{\boldsymbol{d}}^\alpha = (1-\alpha_f)\dot{\boldsymbol{d}}^{n+1} + \alpha_f\dot{\boldsymbol{d}}^n \;; \\ \boldsymbol{d}^\alpha &= (1-\alpha_f)\boldsymbol{d}^{n+1} + \alpha_f\boldsymbol{d}^n \;; \qquad \boldsymbol{f}_{ext}^\alpha = \boldsymbol{f}_{ext}\Big(t^{n+1-\alpha_f}\Big) \approx (1-\alpha_f)\boldsymbol{f}_{ext}^{n+1} + \alpha_f\boldsymbol{f}_{ext}^n \end{aligned} \tag{2.42}$$

Die Bestimmung der inneren Kräfte kann entweder im Sinne einer generalisierten Mittelpunktsregel direkt mit den generalisierten Mittelpunktsverschiebungen $\boldsymbol{d}^\alpha$ durchgeführt werden,

$$\boldsymbol{f}_{int}(\boldsymbol{d}^\alpha) = \boldsymbol{f}_{int}\Big((1-\alpha_f)\boldsymbol{d}^{n+1} + \alpha_f\boldsymbol{d}^n\Big) \tag{2.43}$$

oder sie kann alternativ – entsprechend den Ansätzen für die kinematischen Größen – im Sinne der generalisierten Trapezregel approximiert werden (im linearen Fall sind die Formulierungen äquivalent).

$$\boldsymbol{f}_{int}(\boldsymbol{d}^\alpha) \approx (1-\alpha_f)\boldsymbol{f}_{int}\Big(\boldsymbol{d}^{n+1}\Big) + \alpha_f\boldsymbol{f}_{int}(\boldsymbol{d}^n) \tag{2.44}$$

Dies hat sowohl Auswirkungen auf die algorithmische Umsetzung (Unterschiede bei der Linearisierung, vgl. Kuhl & Crisfield (1999)) als auch auf die numerischen Eigenschaften (unterschiedliche Fehlerkoeffizienten, vgl. Bonelli et al. (1999)). Allerdings zeigen die letztgenannten Autoren, daß die gewünschten numerischen Eigenschaften, die weiter unten beschrieben und vom linearen Fall her bekannt sind, prinzipiell mit beiden Varianten auch im nichtlinearen Fall erhalten bleiben. In der vorliegenden Arbeit wird, soweit nicht ausdrücklich anderweitig gesagt, die Formulierung im Sinne der generalisierten Trapezregel (2.44) verwendet.

Einsetzen der Zeitintegrations- und Shift-Ansätze in die Gleichung (2.41) führt letztendlich auf die *diskrete Bewegungsgleichung* (hier wieder ohne viskose Strukturdämpfung dargestellt)

$$\begin{aligned} &\frac{1-\alpha_m}{\beta\Delta t^2}\boldsymbol{M}^S\boldsymbol{d}^{n+1} + (1-\alpha_f)\boldsymbol{f}_{int}\Big(\boldsymbol{d}^{n+1}\Big) = \\ &\qquad = (1-\alpha_f)\boldsymbol{f}_{ext}^{n+1} + \alpha_f\boldsymbol{f}_{ext}^n + \boldsymbol{M}^S\boldsymbol{h}\Big(\boldsymbol{d}^n, \dot{\boldsymbol{d}}^n, \ddot{\boldsymbol{d}}^n\Big) - \alpha_f\boldsymbol{f}_{int}(\boldsymbol{d}^n) \end{aligned} \tag{2.45}$$

wobei die Notation $\boldsymbol{h}\Big(\boldsymbol{d}^n, \dot{\boldsymbol{d}}^n, \ddot{\boldsymbol{d}}^n\Big)$ für die Geschichtsterme wie folgt vereinbart werden soll.

$$\boldsymbol{h}\Big(\boldsymbol{d}^n, \dot{\boldsymbol{d}}^n, \ddot{\boldsymbol{d}}^n\Big) := \frac{1-\alpha_m}{\beta\Delta t^2}\boldsymbol{d}^n + \frac{1-\alpha_m}{\beta\Delta t}\dot{\boldsymbol{d}}^n + \left(\frac{1-\alpha_m}{2\beta} - 1\right)\ddot{\boldsymbol{d}}^n \tag{2.46}$$

Dieses nichtlineare, algebraische Gleichungssystem muß, wie bereits gesagt, in jedem Zeitintervall zur Bestimmung des neuen Bewegungszustandes zur Zeit t^{n+1} iterativ gelöst werden. In der hier verwendeten Software CARAT wurde dies mit Hilfe einer Prädiktor-Multikorrektor-Formulierung in Verbindung mit Newton-Raphson-Gleichgewichtsiterationen realisiert.

Bemerkung 2.3: Für eine Beschreibung der algorithmischen Implementierung mit und ohne Dirichlet-Randbedingungen in einem nichtlinearen strukturdynamischen Programmcode wird auf den Anhang (Abschnitt A2.1) verwiesen.

Mit den nach folgenden Formeln zu bestimmenden Shift-Parametern

$$\alpha_m = \frac{2\rho_\infty - 1}{\rho_\infty + 1} \; ; \qquad \alpha_f = \frac{\rho_\infty}{\rho_\infty + 1} \tag{2.47}$$

kann die erwünschte Stärke der numerischen Dissipation des Verfahrens über den vom Benutzer spezifizierten Spektralradius ρ_∞ (Gleichung (2.40)) direkt angesteuert werden. Um eine maximale Dissipation hochfrequenter Moden bei gleichzeitiger minimaler Dissipation niederfrequenter Moden und Genauigkeit von zweiter Ordnung zu erreichen, müssen die Shift- und Newmark-Parameter überdies den Bedingungen

$$0 \leq \alpha_m \leq \alpha_f \leq \frac{1}{2} \; ; \qquad \beta = \frac{1}{4}\left(1 - \alpha_m + \alpha_f\right)^2 \; ; \qquad \gamma = \frac{1}{2} - \alpha_m + \alpha_f \tag{2.48}$$

gehorchen. Die Kombination dieser in der nichtlinearen Strukturdynamik erforderlichen Eigenschaften ist mit dem Newmarkschen Basisverfahren allein nicht möglich. Im linearen Fall ist das Generalized-α-Verfahren mit Parametern gemäß (2.48) unbedingt spektral stabil.

Als Spezialfälle ergeben sich aus dem Generalized-α-Verfahren die folgenden bekannten Verfahren (vgl. Kuhl (1996)).

Hilber-α (Hilber et al. (1977)): $\alpha_m = 0 \; ; \qquad \alpha_f = \dfrac{1 - \rho_\infty}{\rho_\infty + 1}$ (2.49)

Bossak-α (Wood et al. (1981)): $\alpha_m = \dfrac{\rho_\infty - 1}{\rho_\infty + 1} \; ; \qquad \alpha_f = 0$ (2.50)

Newmark-Familie: $\alpha_m = 0 \; ; \qquad \alpha_f = 0$ (2.51)

Mittelpunktsregel: $\beta = \dfrac{1}{4} \; ; \; \gamma = \dfrac{1}{2}$ und $\alpha_m = \dfrac{1}{2} \; ; \qquad \alpha_f = \dfrac{1}{2}$ (2.52)

Ein nennenswerter Vertreter der Newmark-Familie ist die Trapezregel, die mit $\beta = 1/4$ und $\gamma = 1/2$ definiert ist. Sie ist im linearen Fall identisch mit der impliziten Mittelpunktsregel, im nichtlinearen Fall ergeben sich leichte Unterschiede aufgrund der unterschiedlichen Bestimmung der inneren Kräfte (Gleichungen (2.43) und (2.44)). Trapez- und Mittelpunktsregel sind im Linearen unbedingt spektral stabil, zweiter Ordnung genau und nicht dissipativ.

- *Zentrales Differenzenverfahren, explizit*

Explizite Verfahren sind dadurch charakterisiert, daß sie, von einem bekannten Bewegungszustand am Beginn t^n eines Zeitintervalles $[t^n, \; t^{n+1}]$ ausgehend, den Bewegungszustand an dessen Ende t^{n+1} extrapolieren. Dazu ist keine Lösung des sich aus der diskretisierten Bewegungsgleichung ergebenden algebraischen Gleichungssystems erforderlich, was den Hauptvorteil expliziter Verfahren ausmacht. Somit entfallen auch etwaige Newton-Raphson-Iterationen zur Lösung im nichtlinearen Fall und die damit zusammenhängenden System-Linearisierungen. Allerdings sind alle expliziten Verfahren nur bedingt stabil, und die kritische Zeitschrittgröße kann bei strukturdynamischen Systemen sehr klein sein, wodurch der Rechenaufwand insgesamt trotz nicht erforderlicher Gleichungslösung doch erheblich werden kann. Dies gilt insbesondere bei Systemen mit hoher Steifigkeit (vgl. Gl. (2.55) und (2.56)), sowie bei starker Nichtlinearität.

Einer der wichtigsten Vertreter ist das klassische zentrale Differenzenverfahren. Es ergibt sich als Spezialfall aus den Newmark-Ansätzen (2.30) mit $\beta = 0$ und $\gamma = 1/2$. Unter Hinzunahme der zur Zeit t^{n+1} formulierten semidiskreten Bewegungsgleichung (2.28) ergibt sich der folgende Satz von Bestimmungsgleichungen zur expliziten Ermittlung des Bewegungszustands am Ende eines Zeitschrittes t^{n+1}.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{d}^{n+1} &= \boldsymbol{d}^{n} + \Delta t \dot{\boldsymbol{d}}^{n} + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{\boldsymbol{d}}^{n} \\
\dot{\boldsymbol{d}}^{n+1} &= \dot{\boldsymbol{d}}^{n} + \frac{\Delta t}{2}\left(\ddot{\boldsymbol{d}}^{n} + \ddot{\boldsymbol{d}}^{n+1}\right) \\
\ddot{\boldsymbol{d}}^{n+1} &= \boldsymbol{M}^{S^{-1}}\left(\boldsymbol{f}_{ext}^{n+1} - \boldsymbol{f}_{int}\left(\boldsymbol{d}^{n+1}\right)\right)
\end{aligned} \tag{2.53}$$

Eine alternative Formulierung, bei der die Verschiebungen $\boldsymbol{d}^{n+1}$ aus der Bewegungsgleichung zur Zeit t^n gewonnen werden, verwendet die klassischen zentralen Differenzenquotienten zur Approximation der ersten und zweiten Ableitung, woraus der Name des Verfahrens herrührt:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{d}^{n+1} &= \Delta t^2 \boldsymbol{M}^{S^{-1}}\left(\boldsymbol{f}_{ext}^{n} - \boldsymbol{f}_{int}(\boldsymbol{d}^{n})\right) + 2\boldsymbol{d}^{n} - \boldsymbol{d}^{n-1} \\
\dot{\boldsymbol{d}}^{n} &= \frac{1}{2\Delta t}\left(\boldsymbol{d}^{n+1} - \boldsymbol{d}^{n-1}\right) \\
\ddot{\boldsymbol{d}}^{n} &= \frac{1}{\Delta t^2}\left(\boldsymbol{d}^{n+1} - 2\boldsymbol{d}^{n} + \boldsymbol{d}^{n-1}\right)
\end{aligned} \tag{2.54}$$

Allerdings erfordert diese Formulierung als Zweischritt-Verfahren die Verfügbarkeit der kinematischen Größen zur Zeit t^{n-1}, was zusätzlichen Speicheraufwand bedeutet. Ein weiterer Nachteil ist, daß auf diese Weise zwar die Verschiebungen zur Zeit t^{n+1}, die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen jedoch nur zur Zeit t^n ermittelt werden. Daher wird meist die Form (2.53) bevorzugt, so auch in dieser Arbeit.

Das zentrale Differenzenverfahren ist zweiter Ordnung genau, nicht numerisch dissipativ und bedingt stabil. Die kritische Zeitschrittgröße ist für lineare Systeme (ohne viskose Dämpfung)

$$\Delta t_{cr} = \frac{2}{\omega_{max}} \tag{2.55}$$

Für nichtlineare Systeme kann sie noch deutlich kleiner sein. Darin bezeichnet $\omega_{\max}$ die größte Eigenkreisfrequenz des Systems, welche durch das allgemeine Eigenwertproblem

$$\left(\boldsymbol{K}^S - \lambda_i \boldsymbol{M}^S\right) \boldsymbol{\phi}_i = \boldsymbol{0} \quad ; \qquad \lambda_{max} := \max_i \left\{ \lambda_i \right\} \quad ; \qquad \omega_{max} := \sqrt{\lambda_{max}} \tag{2.56}$$

definiert ist. ω_{max} kann mit der größten Eigenkreisfrequenz der verwendeten Finiten Elemente ω_{max}^e abgeschätzt werden: $\omega_{max}^e \geq \omega_{max}$ („element eigenvalue inequality theorem“ nach Irons (1970), s. auch Flanagan & Belytschko (1981)).

Bemerkung 2.4: Das zentrale Differenzenverfahren ist streng genommen nur dann explizit im Sinne der Bedingung, daß kein algebraisches Gleichungssystem gelöst werden muß, wenn diagonale Massenmatrizen (und Dämpfungsmatrizen) verwendet werden.

- *PCE-Hilber-α-Verfahren*[1]*, explizit*

Dieses von Miranda et al. (1989) vorgestellte explizite Zeitintegrationsverfahren *mit numerischer Dissipation* wurde mit Hilfe einer Prädiktor-Korrektor-Formulierung aus dem o.g. impliziten Hilber-α-Verfahren (Hilber et al. (1977)) entwickelt. Die Bestimmungsgleichungen[2] sind

$$\left.\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{d}}^{n+1} &= \boldsymbol{d}^n + \Delta t\ \dot{\boldsymbol{d}}^n + \frac{\Delta t^2}{2}(1-2\beta)\ddot{\boldsymbol{d}}^n \\ \tilde{\dot{\boldsymbol{d}}}^{n+1} &= \dot{\boldsymbol{d}}^n + \Delta t\ (1-\gamma)\ddot{\boldsymbol{d}}^n \\ \ddot{\boldsymbol{d}}^{n+1} &= \boldsymbol{M}^{S^{-1}}\left(\boldsymbol{f}_{ext}^{\alpha} - \boldsymbol{f}_{int}\left(\tilde{\boldsymbol{d}}^{\alpha}\right)\right) \end{aligned}\right\} \text{ Prädiktor-Phase} \tag{2.57}$$

mit $\tilde{\boldsymbol{d}}^{\alpha} = (1-\alpha_f)\tilde{\boldsymbol{d}}^{n+1} + \alpha_f \boldsymbol{d}^n$ und $\boldsymbol{f}_{ext}^{\alpha}$ gemäß Gleichung (2.42), sowie

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{d}^{n+1} &= \tilde{\boldsymbol{d}}^{n+1} + \Delta t^2 \beta \ddot{\boldsymbol{d}}^{n+1} \\ \dot{\boldsymbol{d}}^{n+1} &= \tilde{\dot{\boldsymbol{d}}}^{n+1} + \Delta t\ \gamma \ddot{\boldsymbol{d}}^{n+1} \end{aligned}\right\} \text{ Korrektor-Phase} \tag{2.58}$$

Als Bedingungen zur Wahl der Shift- und Newmark-Parameter werden von Miranda et al. empfohlen:

$$0 \le \alpha_f \le \frac{1}{3}\ ; \qquad \beta = \frac{1}{4}\left(1 + \alpha_f\right)^2\ ; \qquad \gamma = \frac{1}{2} + \alpha_f \tag{2.59}$$

Damit ergibt sich für $\alpha_f > 0$ eine Genauigkeit von zweiter Ordnung. Die numerische Dissipation wird mit wachsendem α_f stärker und für $\alpha_f = 1/3$ maximal. Für $\alpha_f = 0$ resultiert das nicht-dissipative, erster Ordnung genaue, explizite Prädiktor-Korrektor Newmark-Verfahren nach Hughes & Liu (1978a). Wie alle expliziten Verfahren ist das PCE-Hilber-α-Verfahren bedingt stabil, der kritische Zeitschritt (ohne viskose Dämpfung) berechnet sich zu

$$\Delta t_{cr} = \frac{\Omega_{cr}}{\omega_{max}} \qquad \text{mit} \qquad \Omega_{cr} = \frac{\sqrt{2\left(\gamma - 2\alpha_f(\gamma - \beta)\right)}}{\gamma - 2\alpha_f(\gamma - \beta)} \tag{2.60}$$

und erreicht, bei Wahl der Parameter gemäß (2.59), ein Minimum von $\Delta t_{cr,\,min} \approx \frac{1,8665}{\omega_{max}}$ für $\alpha_f = 1/3$, also nur geringfügig kleiner als derjenige des zentralen Differenzenverfahrens.

1. PCE = „*p*redictor *c*orrector *e*xplicit time integration algorithm“, Bezeichnung nach Hulbert & Chung (1996)
2. Aus formalen Gründen ist in der hier angegebenen Form das Vorzeichen des Shift-Parameters α_f im Gegensatz zu Miranda et al. (1989) umgedreht, die Bestimmungsgleichungen sind entsprechend angepaßt.

2.2 Fluid- / Strömungsdynamik

2.2.1 Modellwahl

In dieser Arbeit wird auf das in Wall (1999), Wall & Ramm (1998) sowie Wall et al. (2000a) ausführlich dokumentierte Fluidmodell zurückgegriffen. Es wurde im Rahmen der erstgenannten Arbeit am Institut für Baustatik entwickelt und in dem institutseigenen FEM-Programmpaket CARAT numerisch umgesetzt und verifiziert. Damit stand ein umfassendes Modell zur Simulation komplexer, laminarer, zwei- und dreidimensionaler, instationärer Strömungsvorgänge zur Verfügung. Es betrachtet als möglichst allgemeingültigen Fall Newtonsche, inkompressible Fluide, deren Verhalten vollständig durch die *inkompressiblen, instationären Navier-Stokes-Gleichungen* beschrieben wird (nach Claude Louis Marie Henri Navier (1785–1836) und George Gabriel Stokes (1819–1903)). Das Fluidmodell sowie die verwendeten Diskretisierungsverfahren werden im folgenden überblicksartig beschrieben; für Details sei auf die oben sowie zu Beginn des Kapitels 2 genannten Literaturstellen verwiesen.

Strömungen werden klassischerweise in einer *Eulerschen* oder *räumlichen Formulierung* betrachtet (benannt nach Leonhard Euler (1707–1783)). Dabei sitzt der Beobachter fest an einem Raumpunkt innerhalb eines fixen Kontrollvolumens, und mißt die Eigenschaften der materiellen Punkte, die beim Durchströmen des Kontrollvolumens im Laufe der Zeit diesen Punkt einnehmen. Im Kontext der Methode der Finiten Elemente bedeutet dies, daß ein raumfestes Netz verwendet wird, durch das das Fluid „hindurch-“strömt. Dagegen bewegt sich das Netz bei der für die Strukturdynamik verwendeten Lagrangeschen (materiellen) Formulierung vollständig mit der sich deformierenden Struktur mit. Bei der Kopplung zwischen Fluid und Struktur im Rahmen der Simulation von Fluid-Struktur-Interaktionsproblemen ergibt sich somit am Kopplungsrand eine Inkompatibilität der zwei FE-Netze. Aus diesem Grund wird in dieser wie auch in o.g. Arbeiten für das Fluid – zumindest im Nahbereich der Struktur – eine *Arbitrary Lagrangean Eulerian (ALE) Formulierung* (Donea (1983), Hughes et al. (1981)) verwendet, in der die Strömungsgleichungen in einem beliebig bewegten Referenzgebiet formuliert werden. Dieses in *Bild 2.5* mit zugehörigem Ortsvektor $\boldsymbol{x}^G$ schematisch dargestellte Referenzgebiet wird später mit einem sich im Laufe der Zeit deformierenden FE-Netz identifiziert werden, das auf der einen Seite an das materielle Strukturnetz und gegebenenfalls auf der anderen Seite an ein raumfestes Eulersches Fluidnetz gekoppelt wird.

2.2.2 Kontinuumsmechanische Grundgleichungen der Fluiddynamik

Kinematik und konstitutive Beziehungen

Fluide sind definiert als Substanzen, die in Ruhelage Scherkräften nicht widerstehen können. Das bedeutet, daß in Ruhelage ein rein hydrostatischer Spannungszustand $\boldsymbol{\sigma} = -\tilde{p}_0 \boldsymbol{I}$ herrscht, mit dem hydrostatischen Druck $\tilde{p}_0$. Sich deformierende, d.h. in Bewegung befindli-

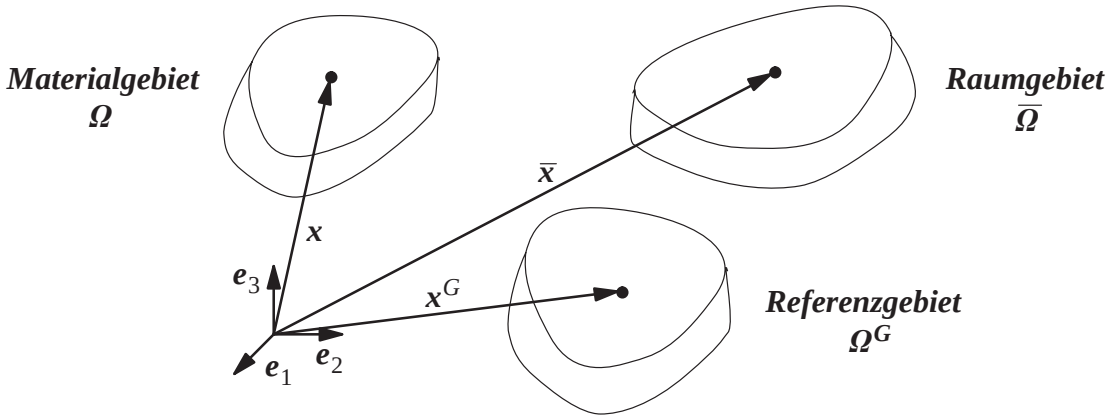


Bild 2.5: Kontinuumsmechanische Gebiete für die ALE-Formulierung

che, viskose Fluide erhalten einen weiteren viskosen Spannungsanteil $\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{\varepsilon})$, der, aufbauend auf den Arbeiten von Stokes, als Funktion des Tensors der *Deformationsgeschwindigkeit* $\boldsymbol{\varepsilon}$

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}\left(\overline{\nabla}\boldsymbol{u} + \left(\overline{\nabla}\boldsymbol{u}\right)^T\right) \tag{2.61}$$

angenommen wird, wobei $\boldsymbol{u}$ das *Geschwindigkeitsfeld* und $\overline{\nabla} := \partial/\partial\overline{\boldsymbol{x}}$ den räumlichen Gradientenoperator bezeichnet. Damit folgt, unter Verwendung des *thermodynamischen („wahren") Drucks* $\tilde{p}$, für den allgemeinen Spannungszustand $\boldsymbol{\sigma} = -\tilde{p}\,\boldsymbol{I} + \boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{\varepsilon})$. Ist die tensorwertige Funktion $\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{\varepsilon})$ linear, so wird das Fluid als *Newtonsches Fluid* bezeichnet. Unter Verwendung der Hypothese von Stokes (viskoser Kompressionskoeffizient gleich Null, d.h. keine Energiedissipation bei reiner Volumenausdehnung) läßt sich dann mit $\boldsymbol{\tau} = 2\,\mu^F\,\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u})$ die *konstitutive Gleichung für Newtonsche, inkompressible Fluide* angeben:

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\,\mu^F\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) - \tilde{p}\,\boldsymbol{I} \tag{2.62}$$

Die Konstante μ^F ist die *dynamische Viskosität*, wobei der Index F fluidspezifische Konstanten kennzeichnet, im Gegensatz zu den mit dem Index S gekennzeichneten strukturspezifischen Konstanten. Im weiteren Verlauf der Arbeit werden auch häufig die auf die Dichte ρ^F bezogenen Größen der *kinematischen Viskosität* ν^F und des *kinematischen Drucks* p verwendet.

$$\nu^F = \frac{\mu^F}{\rho^F} \qquad\qquad p = \frac{\tilde{p}}{\rho^F} \tag{2.63}$$

Massen- und Impulsbilanzgleichungen

Zur Formulierung der inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen werden neben den Konstitutivgleichungen noch die lokale Massen- und die lokale Impulsbilanzgleichung benötigt. Auf ihre ausführliche Herleitung wird an dieser Stelle verzichtet, sie verläuft prinzipiell analog zu den bei der Strukturdynamik für die Impulsbilanz angegebenen Ausführungen (Abschnitt 2.1.2) und ist u.a. in Wall (1999) detailliert nachzulesen.

Die *lokale Massenbilanz* in *räumlicher Darstellung* ist gegeben als

$$\frac{D\rho^F}{Dt} + \rho^F\,\overline{\nabla}\cdot\boldsymbol{u} = 0 \qquad \text{in } \overline{\Omega}_F \times (0,T) \tag{2.64}$$

mit der materiellen Zeitableitung der Dichte $D\rho^F/Dt = \dot{\rho}^F$. Für den hier betrachteten Sonderfall einer über die Zeit und im gesamten Strömungsfeld konstanten Dichte oder eines hohen Kompressionsmoduls bzw. einer hohen Schallgeschwindigkeit folgt daraus die bekannte Bedingung der Quellenfreiheit für inkompressible Strömungen, auch *Inkompressibilitätsbedingung* oder *Kontinuitätsgleichung* genannt.

$$\overline{\nabla} \cdot \boldsymbol{u} = 0 \qquad \text{in } \overline{\Omega}_F \times (0, T) \tag{2.65}$$

Die *lokale Impulsbilanz* inkompressibler Strömungen in *räumlicher Darstellung* lautet

$$\rho^F \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}\Big|_{\overline{\boldsymbol{x}}} + \rho^F \boldsymbol{u} \cdot \overline{\nabla}\boldsymbol{u} = \overline{\nabla} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho^F \boldsymbol{b} \qquad \text{in } \overline{\Omega}_F \times (0, T) \tag{2.66}$$

wobei die Notation $\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}\Big|_{\overline{\boldsymbol{x}}}$ die partielle Ableitung der Partikelgeschwindigkeit nach der Zeit an einer festen Raumkoordinate $\overline{\boldsymbol{x}}$ bezeichnet und $\overline{\nabla} = \partial/\partial\overline{\boldsymbol{x}}$ wieder für den räumlichen Gradientenoperator steht. Gleichung (2.66) unterscheidet sich von der materiellen Formulierung der lokalen Impulsbilanz (vgl. Gl. (2.13)) vor allem durch den konvektiven Term $\boldsymbol{u} \cdot \overline{\nabla}\boldsymbol{u}$, der aus der räumlichen Form der materiellen Zeitableitung der Geschwindigkeit resultiert:

$$\dot{\boldsymbol{u}} = \frac{D\boldsymbol{u}}{Dt} = \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}\Big|_{\boldsymbol{x}} = \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}\Big|_{\overline{\boldsymbol{x}}} + \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \overline{\boldsymbol{x}}} \cdot \frac{\partial \overline{\boldsymbol{x}}}{\partial t}\Big|_{\boldsymbol{x}} = \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}\Big|_{\overline{\boldsymbol{x}}} + \left(\overline{\nabla}\boldsymbol{u}\right) \cdot \boldsymbol{u} = \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}\Big|_{\overline{\boldsymbol{x}}} + \boldsymbol{u} \cdot \overline{\nabla}\boldsymbol{u} \tag{2.67}$$

Für die *ALE-Formulierung* müssen diese Gleichungen nun prinzipiell im Referenzgebiet Ω_F^G formuliert werden. Aufgrund von Vorteilen hinsichtlich der numerischen Umsetzung wird jedoch hier auf eine alternative Darstellungsweise übergegangen, in der alle räumlichen Ableitungen auch im räumlichen Gebiet $\overline{\Omega}_F$ durchgeführt werden, und nur die materielle Zeitableitung der Geschwindigkeit als einzige Größe in das Referenzsystem transformiert wird. Letztere lautet dann

$$\frac{D\boldsymbol{u}}{Dt} = \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}\Big|_{\boldsymbol{x}^G} + \boldsymbol{c} \cdot \overline{\nabla}\boldsymbol{u} \tag{2.68}$$

mit der als Differenz zwischen materieller *Partikelgeschwindigkeit* $\boldsymbol{u}$ und *Referenzgebiets-* bzw. *Netzgeschwindigkeit* $\boldsymbol{u}^G$ definierten *(ALE-)konvektiven Geschwindigkeit* $\boldsymbol{c}$

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}^G \tag{2.69}$$

Somit können sowohl die konstitutiven Gleichungen als auch die lokale Massenbilanz für die ALE-Formulierung unverändert in der räumlichen Darstellung angewendet werden, lediglich die Impulsbilanz wird zur *lokalen ALE Impulsbilanz* umformuliert:

$$\rho^F \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}\Big|_{\boldsymbol{x}^G} + \rho^F \boldsymbol{c} \cdot \overline{\nabla}\boldsymbol{u} = \overline{\nabla} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho^F \boldsymbol{b} \qquad \text{in } \overline{\Omega}_F \times (0, T) \tag{2.70}$$

Einsetzen der konstitutiven Gleichung (2.62) und Division durch die Dichte ρ^F liefert dann die Impulsbilanzgleichung in der Form, wie sie in den Navier-Stokes-Gleichungen üblicherweise dargestellt wird (s. *Bild 2.6*).

Geometrische Bilanzgleichungen (GCL)

Wegen ihrer Bedeutung für die algorithmische Umsetzung von Kopplungsbedingungen in Fluid-Struktur-Interaktionsproblemen soll hier noch ein für Strömungen auf zeitveränderlichen

Gebieten essentielles Detail angesprochen werden. Die *geometrischen Bilanzgleichungen* (GCL – „*g*eometric *c*onservation *l*aws“ (Farhat et al. (1995), Wall (1999)), auch „*space conservation laws*“ genannt (Demirdzic & Peric (1988)) sind Bedingungen an das Zusammenspiel aus Integration des Strömungsfeldes und Bestimmung der relevanten geometrischen Größen des zeitveränderlichen Strömungsgebietes, wie Netzposition $\boldsymbol{r}$ (siehe Abschnitt 2.3) und Netzgeschwindigkeit $\boldsymbol{u}^G$. Diese müssen eingehalten werden, um die folgende Mindestanforderung zu erfüllen: Das numerische Lösungsverfahren muß einen gleichförmigen Strömungszustand auch auf zeitveränderlichen Gebieten, d.h. auf bewegten Netzen, erhalten. Eine Verletzung der GCL kann bei der Simulation inkompressibler Strömungen zu einer künstlichen Massenproduktion und somit zu einem deutlichen Fehler der gesamten Simulation führen. Durch ihre Einhaltung wird andererseits die Zeitgenauigkeit des Verfahrens verbessert. Eine formelmäßige Darstellung der GCL für die Massenbilanzgleichung lautet:

$$\overline{\nabla} \cdot \boldsymbol{u}^G := \frac{1}{J^G}\frac{\partial J^G}{\partial t} \qquad \text{mit Funktionaldeterminante} \quad J^G := \det\left[\frac{\partial \overline{\boldsymbol{x}}}{\partial \boldsymbol{x}^G}\right] \tag{2.71}$$

Bemerkung 2.5: Im Kontext einer Finite-Volumen-Formulierung lassen sich die GCL sehr einfach als exakte Integration der im Laufe der Netzbewegung überstrichenen Fläche (bzw. des Volumens) einer Zelle beschreiben, d.h. die Flächen-(bzw. Volumen-)Änderung innerhalb eines Zeitschrittes muß gleich der in diesem Zeitraum überstrichenen Fläche (bzw. Volumen) der Zellränder sein.

Eine Verletzung der GCL führt zu parasitären Oszillationen in der numerischen Lösung, wie u.a. in Lesoinne & Farhat (1996) gezeigt. Daher sind in der hier verwendeten ALE-Implementierung die geometrischen Bilanzgleichungen stets befriedigt. Um dies zu erreichen, ohne die GCL als zusätzliche Erhaltungsgleichung lösen zu müssen, wird hier eine von Lesoinne & Farhat (1996) untersuchte Methodik für semidiskrete Formulierungen verwendet. Darin wird die Netzgeschwindigkeit $\boldsymbol{u}^G$, konsistent mit der Diskretisierung der anderen Erhaltungsgleichungen, so aus der Netzposition $\boldsymbol{r}$ bestimmt, daß die GCL exakt erfüllt werden:

$$\boldsymbol{u}^{G,\, n\to n+1} = \frac{\boldsymbol{r}^{n+1} - \boldsymbol{r}^n}{\Delta t} \tag{2.72}$$

d.h. $\boldsymbol{u}^G$ ist im Zeitschritt $t^n \to t^{n+1}$ konstant und wird über die Mittelpunktsregel berechnet.

Anfangs-Randwertproblem für inkompressible viskose Strömungen auf zeitveränderlichen Gebieten

Das Anfangs-Randwertproblem für inkompressible viskose Strömungen wird hier nur in der Formulierung auf zeitveränderlichen Gebieten angegeben, da es in dieser Form in den gekoppelten Fluid-Struktur-Interaktionsproblemen verwendet wird. Es ist in *Bild 2.6* zusammengestellt und wird beschrieben durch die *instationären, inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen in ALE-Formulierung*, die durch die lokale ALE-Impulsbilanz (2.70) bzw. (2.73) und die Kontinuitätsgleichung (2.65) bzw. (2.75) gegeben sind, ergänzt durch Anfangs- und Randbedingungen. Es stellt ein nichtlineares, gemischt hyperbolisch-parabolisches, gekoppeltes System partieller Differentialgleichungen dar. Die Eulersche Betrachtungsweise auf raumfesten Gebieten ergibt sich daraus als der Spezialfall mit Netzgeschwindigkeit $\boldsymbol{u}^G = \boldsymbol{0}$.

- Instationärer, inkompressibler Navier-Stokes – lokale ALE Impulsbilanzgleichung

$$\left.\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}\right|_{\boldsymbol{x}^G} + \boldsymbol{c} \cdot \overline{\nabla}\boldsymbol{u} - 2\,\nu^F\,\overline{\nabla} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) + \overline{\nabla}p = \boldsymbol{b} \quad \text{in } \overline{\Omega}_F \times (0,T) \tag{2.73}$$

mit ALE–konvektiver Geschwindigkeit $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}^G$ (2.74)

- Instat., inkompr. Navier-Stokes – Kontinuitätsgleichung (Inkompressibilitätsbed.)

$$\overline{\nabla} \cdot \boldsymbol{u} = 0 \qquad \text{in } \overline{\Omega}_F \times (0,T) \tag{2.75}$$

- Kinematik – Deformationsgeschwindigkeit

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}\left(\overline{\nabla}\boldsymbol{u} + \left(\overline{\nabla}\boldsymbol{u}\right)^T\right) \tag{2.76}$$

- Konstitutive Gleichung – Newtonsche, inkompressible Fluide

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\tau} - \tilde{p}\,\boldsymbol{I} = 2\,\mu^F\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) - \tilde{p}\,\boldsymbol{I} \tag{2.77}$$

- Anfangsbedingungen

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_0 \quad \text{mit} \quad \overline{\nabla} \cdot \boldsymbol{u}_0 = 0 \quad \text{in } \overline{\Omega}_F \text{ für } t = 0 \tag{2.78}$$

- Dirichlet-Randbedingungen

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{g} \qquad \text{auf } \overline{\Gamma}_g \times (0,T) \tag{2.79}$$

- Neumann-Randbedingungen

$$\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{h} \qquad \text{auf } \overline{\Gamma}_h \times (0,T) \tag{2.80}$$

Bild 2.6: Anfangs-Randwertproblem für inkompressible, viskose Strömungen auf zeitveränderlichen Gebieten – starke Form

Als Anfangsbedingung wird die Geschwindigkeit auf dem gesamten Strömungsgebiet zur Zeit $t_0 = 0$ vorgeschrieben, wobei auch hier die Inkompressibilitätsbedingung erfüllt sein muß. Für die Definition der klassischen Randbedingungen für die inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen wird der Rand $\overline{\Gamma}_F = \partial\overline{\Omega}_F$ des Fluidgebietes wieder in die zwei komplementären Untermengen Dirichlet-Rand $\overline{\Gamma}_g$ und Neumann-Rand $\overline{\Gamma}_h$ aufgeteilt,

$$\overline{\Gamma}_F = \overline{\Gamma}_g \cup \overline{\Gamma}_h \qquad\qquad \overline{\Gamma}_g \cap \overline{\Gamma}_h = 0 \tag{2.81}$$

auf denen die Geschwindigkeiten $\boldsymbol{g}$ bzw. die Randlasten $\boldsymbol{h}$ vorgeschrieben sind. Bezüglich der Erläuterung weiterer Randbedingungen, wie Haft- („no-slip“) und Gleit- („slip“) Randbedingungen, Ausfluß-, Symmetrie- und Druckrandbedingungen sowie Randbedingungen an freien Oberflächen wird wiederum auf Wall (1999) verwiesen. Die schwache Form des Anfangs-Randwertproblems wird der Einfachheit halber im folgenden Abschnitt 2.2.3 im Rahmen der FE-Formulierung dargestellt, und zwar in der bereits diskretisierten Form.

2.2.3 Raumdiskretisierung

Zur Diskretisierung der erläuterten Strömungsgleichungen in ALE-Formulierung wird im vorliegenden Fluidmodell eine voll stabilisierte Finite Elemente Methode eingesetzt, deren Grund-

züge im folgenden umrissen werden. Detaillierte Angaben hierzu findet man, wie einleitend bereits gesagt, in Wall (1999), Wall & Ramm (1998) sowie Wall et al. (2000a).

Das Anfangs-Randwertproblem wird zunächst in eine schwache, integrale Form überführt. Dies geschieht hier für die klassischerweise eher mathematisch orientierte Strömungsdynamik mit Hilfe der Methode der gewichteten Residuen, im Gegensatz zur Verwendung des mechanisch motivierten Prinzips der virtuellen Arbeit bei der Strukturdynamik. Es wird also gefordert, daß das mit Geschwindigkeitstestfunktionen $\boldsymbol{v}$ für die Impulsbilanz und Drucktestfunktionen q für die Massenbilanz gewichtete Residuum der Gleichungen im Integral verschwinden muß. Dazu wird hier die Notation $(\cdot,\cdot)$ für das L^2-innere Produkt über das zeitveränderliche, räumliche Gebiet $\overline{\Omega}_F(t)$ vereinbart, also z.B.

$$(\boldsymbol{b},\boldsymbol{v}) \;=\; (\boldsymbol{b},\boldsymbol{v})_{\overline{\Omega}_F} \;=\; \int\limits_{\overline{\Omega}_F} \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{v}\;d\overline{\Omega}_F \tag{2.82}$$

Entsprechend der standardmäßigen Galerkin-Finite-Element-Approximation werden sodann die kontinuierlichen Funktionenräume $\mathcal{V}_g$, $\mathcal{V}$ und $\mathcal{P}$ für Lösungs- und Testfunktionen $\boldsymbol{u}$ und $\boldsymbol{v}$ sowie p und q durch endlich-dimensionale (finite) Unterräume $\mathcal{V}_g^h$, $\mathcal{V}^h$ und $\mathcal{P}^h$ ersetzt. Da die Standard-Galerkin-FEM bei bestimmten Interpolationsordnungen und einem nicht vollständigen Auflösen aller Skalen bekanntermaßen numerische Probleme aufweist, wie Druck- und/oder Geschwindigkeitoszillationen, wird hier eine Galerkin-Least-Square-artige Stabilisierung (GLS) verwendet, welche zu weiteren Gleichungsanteilen führt (GLS-Konvektions-, GLS-Druck- und GLS-Divergenzterme; in den Gleichungen (2.84) und (2.85) sind dies jeweils die Anteile mit den Stabilisierungsparametern τ_M und τ_C im L^2-inneren Produkt).

Somit lautet die *schwache Form* des vollständig stabilisierten ALE-Finite-Elemente-Verfahrens als *diskrete Variationsformulierung* wie folgt:

Finde $\boldsymbol{u}^h \in \mathcal{V}_g^h$ und $p^h \in \mathcal{P}^h$ für die gilt

$$B\Big(\boldsymbol{u}^h,\;p^h;\;\boldsymbol{v}^h,\;q^h\Big) \;=\; F\Big(\boldsymbol{v}^h,\;q^h\Big) \qquad \forall \quad \Big(\boldsymbol{v}^h,\;q^h\Big) \in \mathcal{V}^h \times \mathcal{P}^h \tag{2.83}$$

mit

$$\begin{aligned}
&B\Big(\boldsymbol{u}^h,\;p^h;\;\boldsymbol{v}^h,\;q^h\Big) = \\
&\quad \left(\left.\frac{\partial \boldsymbol{u}^h}{\partial t}\right|_{\boldsymbol{x}^G} + \boldsymbol{c}^h\cdot\overline{\nabla}\boldsymbol{u}^h\,,\;\boldsymbol{v}^h\right) + \Big(2\nu^F\boldsymbol{\varepsilon}\big(\boldsymbol{u}^h\big)\;,\;\boldsymbol{\varepsilon}\big(\boldsymbol{v}^h\big)\Big) - \Big(p^h\,,\;\overline{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}^h\Big) - \Big(\overline{\nabla}\cdot\boldsymbol{u}^h\,,\;q^h\Big) + \\
&\quad + \sum_{K\in\mathcal{C}_h}\Bigg[\left(\left.\frac{\partial \boldsymbol{u}^h}{\partial t}\right|_{\boldsymbol{x}^G} + \boldsymbol{c}^h\cdot\overline{\nabla}\boldsymbol{u}^h - 2\nu^F\,\overline{\nabla}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}\big(\boldsymbol{u}^h\big) + \overline{\nabla}p^h\right)\,, \\
&\qquad\qquad \tau_M\Big(\boldsymbol{c}^h\cdot\overline{\nabla}\boldsymbol{v}^h - 2\nu^F\,\overline{\nabla}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}\big(\boldsymbol{v}^h\big) - \overline{\nabla}q^h\Big)\Bigg]_K + \\
&\quad + \Big(\overline{\nabla}\cdot\boldsymbol{u}^h\,,\;\tau_C\,\overline{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}^h\Big)_K
\end{aligned} \tag{2.84}$$

und

$$F\Big(\boldsymbol{v}^h,\ q^h\Big) = \Big(\boldsymbol{b}\ ,\ \boldsymbol{v}^h\Big) + \Big(\boldsymbol{h}\ ,\ \boldsymbol{v}^h\Big)_{\overline{\Gamma}_h} + \\ + \sum_{K\in\mathcal{C}_h}\Big[\boldsymbol{b}\ ,\ \tau_M\Big(\boldsymbol{c}^h\cdot\overline{\nabla}\boldsymbol{v}^h - 2\nu^F\,\overline{\nabla}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}\Big(\boldsymbol{v}^h\Big) - \overline{\nabla}q^h\Big)\Big]_K \tag{2.85}$$

wobei $K \in \mathcal{C}_h$ alle Elementgebiete K einer Triangulierung $\mathcal{C}_h$ bezeichnet. Für Angaben zur Wahl der Stabilisierungsparameter τ_M für die Impulsbilanz- und τ_C für die Kontinuitätsgleichung wird wieder auf die oben zitierte Literatur von Wall (et al.) verwiesen. Die Anfangs- und Randbedingungen sind bereits in *Bild 2.6* zusammengestellt worden. Die Funktionenräume für die diskreten Test- und Ansatzfunktionen lauten

$$\mathcal{V}^h = \Big\{\boldsymbol{v}^h \in \boldsymbol{H}_0^1(\overline{\Omega}_F)^N \mid \boldsymbol{v}^h|_K \in R_k(K)^N,\ K \in \mathcal{C}_h\Big\} \tag{2.86}$$

$$\mathcal{V}_g^h = \Big\{\boldsymbol{v}^h \in \boldsymbol{H}^1(\overline{\Omega}_F)^N \mid \boldsymbol{v}^h|_K \in R_k(K)^N,\ K \in \mathcal{C}_h\,,\ \boldsymbol{v}^h = \boldsymbol{g} \text{ auf } \overline{\Gamma}_g\Big\} \tag{2.87}$$

$$\mathcal{P}^h = \Big\{p^h \in \boldsymbol{C}^0(\overline{\Omega}_F) \cap \boldsymbol{L}_0^2(\overline{\Omega}_F) \mid p^h|_K \in R_k(K),\ K \in \mathcal{C}_h\Big\} \tag{2.88}$$

Darin bezeichnet $\boldsymbol{H}^1(\overline{\Omega}_F)$ den Sobolev-Raum von Funktionen mit quadratintegrierbaren Werten und ersten Ableitungen auf $\overline{\Omega}_F$, und $\boldsymbol{H}_0^1(\overline{\Omega}_F)$ bezeichnet den Unterraum an $\boldsymbol{H}^1$-Funktionen, die zusätzlich noch einen kompakten Träger aufweisen, d.h. deren Werte am Rand Null sind. $\boldsymbol{C}^0(\overline{\Omega}_F)$ steht für den Raum von 0–fach stetig differenzierbaren Funktionen auf $\overline{\Omega}_F$, $\boldsymbol{L}^2(\overline{\Omega}_F)$ bezeichnet den Raum von quadratintegrierbaren Funktionen auf $\overline{\Omega}_F$ und $\boldsymbol{L}_0^2(\overline{\Omega}_F)$ beinhaltet $\boldsymbol{L}^2$-Funktionen mit einem Null-Mittelwert. N steht für die Anzahl der Raumdimensionen, hier also 2 oder 3. $R_k(K)$ bezeichnet den Satz von Ansatzpolynomen des Grades $k \geq 1$ auf dem Elementgebiet K, und faßt somit der Einfachheit halber die üblichen Bezeichnungen $P_k(K)$ für Dreiecke bzw. Tetraeder und $Q_k(K)$ für Vierecke bzw. Hexaeder zusammen.

Matrixform

Zum Übergang auf eine Matrixdarstellung, die im weiteren Verlauf der Arbeit hauptsächlich benutzt werden wird, werden die diskreten Lösungs- und Testfunktionen $\boldsymbol{u}^h$, p^h, $\boldsymbol{v}^h$ und q^h durch Finite-Element-Ansatzfunktionen $\boldsymbol{N}_i$ des Knotens i und ihre jeweiligen Knotenwerte ausgedrückt, d.h. mit den Vektoren der Knotenfreiheitsgrade $\boldsymbol{u}_i$, $\boldsymbol{p}_i$, $\boldsymbol{v}_i$ und $\boldsymbol{q}_i$ gilt

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}^h(\overline{\boldsymbol{x}}) &= \boldsymbol{N}_i(\overline{\boldsymbol{x}})\ \boldsymbol{u}_i & \qquad p^h(\overline{\boldsymbol{x}}) &= \boldsymbol{N}_i(\overline{\boldsymbol{x}})\ \boldsymbol{p}_i \\ \boldsymbol{v}^h(\overline{\boldsymbol{x}}) &= \boldsymbol{N}_i(\overline{\boldsymbol{x}})\ \boldsymbol{v}_i & \qquad q^h(\overline{\boldsymbol{x}}) &= \boldsymbol{N}_i(\overline{\boldsymbol{x}})\ \boldsymbol{q}_i \end{aligned} \tag{2.89}$$

Dabei sind die FE-Ansatzfunktionen als Funktionen mit einem lokalen Träger (einem Element) aus den Räumen $\mathcal{V}_g^h$, $\mathcal{V}^h$ und $\mathcal{P}^h$ gemäß Gl. (2.86) bis (2.88) zu wählen.

Bemerkung 2.6: Eine Verwechslung der kontinuierlichen Funktionen mit den wiederum zur Vereinfachung der Notation gleichbezeichneten Vektoren der diskreten Knotenfreiheitsgrade wird durch entsprechende Einbettung in den jeweiligen Kontext vermieden.

In der hier verwendeten Formulierung werden weiterhin, ohne auf die Details einzugehen, alle Terme der Gleichung (2.84), die eine zeitliche Ableitung beinhalten (Galerkin- und Stabili-

sierungsanteile), zur Massenmatrix $\boldsymbol{M}^F(\boldsymbol{u})$ zusammengefaßt. Alle restlichen, nicht druckabhängigen Terme der linken Gleichungsseite werden aufgeteilt in konvektive und diffusive (viskose) Anteile und führen zur Konvektionsmatrix $\boldsymbol{N}^F(\boldsymbol{u})$ und Diffusionsmatrix $\boldsymbol{K}^F$. Die Druckterme, einschließlich des mit Drucktestfunktionen gewichteten Kontinuitätsterms, ergeben die Gradientenmatrix $\boldsymbol{G}^F(\boldsymbol{u})$. Die zusammengefaßten Terme der rechten Gleichungsseite (2.85) führen auf den Lastvektor $\boldsymbol{f}_{ext}(\boldsymbol{u})$, mit „echten“ Lastanteilen und wiederum Stabilisierungsanteilen.

Damit ergibt sich nun die folgende *Matrixdarstellung der stabilisierten ALE-Finite-Element-Formulierung inkompressibler, viskoser Strömungen*

$$\boldsymbol{M}^F(\boldsymbol{u})\dot{\boldsymbol{u}} + \left(\boldsymbol{N}^F(\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{K}^F\right)\boldsymbol{u} + \boldsymbol{G}^F(\boldsymbol{u})\boldsymbol{p} = \boldsymbol{f}_{ext}(\boldsymbol{u}) \tag{2.90}$$

Bemerkung 2.7: Während die Matrix $\boldsymbol{N}^F(\boldsymbol{u})$ bereits aufgrund des enthaltenen konvektiven Terms $\boldsymbol{c} \cdot \overline{\nabla}\boldsymbol{u}$ nichtlinear (geschwindigkeitsabhängig) ist, entspringt die Nichtlinearität von $\boldsymbol{M}^F(\boldsymbol{u})$, $\boldsymbol{G}^F(\boldsymbol{u})$ und $\boldsymbol{f}_{ext}(\boldsymbol{u})$ ausschließlich aus den Stabilisierungstermen. Werden die aus den Stabilisierungstermen resultierenden Matrixanteile $(\cdot)^\tau$ separiert und zudem Impuls- und Massenbilanzgleichung getrennt aufgeschrieben, so erhält man die folgende, alternative Darstellungsweise.

$$\begin{aligned} &\tilde{\boldsymbol{M}}^F\dot{\boldsymbol{u}} + \left(\tilde{\boldsymbol{N}}^F(\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{K}^F\right)\boldsymbol{u} + \tilde{\boldsymbol{G}}^F\boldsymbol{p} = \boldsymbol{f}_{ext} \\ &\boldsymbol{M}^\tau(\boldsymbol{u})\dot{\boldsymbol{u}} + \left(\boldsymbol{N}^\tau(\boldsymbol{u}) + \tilde{\boldsymbol{G}}^{F^T}\right)\boldsymbol{u} + \boldsymbol{G}^\tau(\boldsymbol{u})\boldsymbol{p} = \boldsymbol{f}^\tau(\boldsymbol{u}) \end{aligned} \tag{2.91}$$

In dieser Darstellungsweise wird erkennbar, daß die zugrundeliegenden Standard-Galerkin-Anteile ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung (erste Gleichungszeile) mit einer algebraischen Zwangsbedingung (dem Kontinuitätsterm $\left(\tilde{\boldsymbol{G}}^F\right)^T \boldsymbol{u} = 0$) darstellen, also ein *differential-algebraisches System (DAE)*. Dieses ist sehr steif (vgl. Wall (1999), Rannacher (1993)), eine Eigenschaft, die natürlich auch für das Gesamtsystem mit den Stabilisierungsanteilen gilt, und die insbesondere die Stabilität von Zeitintegrationsverfahren nachteilig beeinflußt (s.u.).

2.2.4 Zeitdiskretisierung und Lösung

Für die Zeitdiskretisierung des semidiskreten Strömungsproblems (2.90) kommen wegen der Steifigkeit des zugrundeliegenden differential-algebraischen Systems nur unbedingt strikt stabile Zeitintegrationsverfahren in Frage, und somit ist man in der Regel auf implizite Algorithmen beschränkt (Quarteroni et al. (2000)). Diese Beschränkung läßt sich auch physikalisch begründen: Die Zeitschrittbeschränkung expliziter und somit bedingt stabiler Zeitintegrationsverfahren im Sinne der bekannten *CFL-Bedingung* (nach Courant, Friedrichs und Lewy (1928)) besagt, daß ein Signal während eines Zeitschritts innerhalb eines Elementes bleiben muß, um Stabilität zu gewährleisten. Bei inkompressiblen Strömungen ist jedoch die Schallausbreitungsgeschwindigkeit unendlich groß, was unendlich kleine Zeitschritte erfordern würde.

In dieser Arbeit werden vor allem implizite Zeitintegrationsverfahren aus der Familie der *Einschritt-θ-Verfahren* eingesetzt, insbesondere in der Parametrisierung des *Euler-Rückwärts-* (BE

– Backward Euler) und des *Crank-Nicholson-Verfahrens* (CN), letzteres wird auch als *Trapezregel* bezeichnet. Exemplarisch angewandt auf das einfache Modellproblem $\dot{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}, t)$ läßt sich das Einschritt-θ-Verfahren wie folgt darstellen.

$$\frac{\boldsymbol{u}^{n+1} - \boldsymbol{u}^n}{\Delta t} = \theta\, \boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{u}^{n+1}, t^{n+1}\right) + (1-\theta)\, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}^n, t^n) \quad ; \quad 0 \leq \theta \leq 1 \tag{2.92}$$

Von manchen Autoren wird das Einschritt-θ-Verfahren auch *Generalized Trapezoidal Method* genannt (z.B. Hughes (1987)). Für $\theta = 0$ ergibt sich daraus ein explizites Verfahren, das *Euler-Vorwärts-Verfahren*, für $\theta > 0$ sind die resultierenden Verfahren implizit. Die beiden genannten Spezialfälle ergeben sich für $\theta = 1$ (BE) und $\theta = 1/2$ (CN). Desweiteren ist das Einschritt-θ-Verfahren im linearen Fall für $\theta \geq 1/2$ unbedingt stabil, ansonsten nur bedingt stabil.

Sowohl BE- als auch CN-Verfahren sind also unbedingt und auch strikt stabil. Das BE-Verfahren ist zudem numerisch dissipativ, allerdings nur von erster Genauigkeitsordnung. Wegen seiner guten Dämpfungseigenschaften und seiner daraus resultierenden Robustheit sowie seiner einfachen Formulierung und Implementierung wird es in der numerischen Strömungsdynamik trotzdem häufig verwendet. Das CN-Verfahren ist dagegen nicht dissipativ, dafür aber als einziger Vertreter der Einschritt-θ-Verfahren zweiter Ordnung genau. Allerdings zeigt es bei zu groß gewählten Zeitschritten (oder bei schlecht gestellten Problemen durch falsche Anfangsbedingungen) Oszillationen in der Lösung, wodurch die Robustheit des Verfahrens etwas beeinträchtigt wird. Heywood & Rannacher (1990) schlagen zur Vermeidung von Oszillationen bei immer noch relativ hoher Genauigkeit und unbedingter Stabilität gegebenenfalls eine leichte Erhöhung von θ vor.

Die Anwendung des Einschritt-θ-Verfahrens auf das vorliegende semidiskrete Strömungsproblem (2.90) führt dann in jedem Zeitintervall auf das folgende, nichtlineare, algebraische Gleichungssystem.

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{\Delta t}\boldsymbol{M}^F + \theta\left(\boldsymbol{N}^F(\boldsymbol{u}^{n+1}) + \boldsymbol{K}^F\right)\right) \boldsymbol{u}^{n+1} + \theta \boldsymbol{G}^F \boldsymbol{p}^{n+1} = \\
&= \left(\frac{1}{\Delta t}\boldsymbol{M}^F - (1-\theta)\left(\boldsymbol{N}^F(\boldsymbol{u}^n) + \boldsymbol{K}^F\right)\right) \boldsymbol{u}^n - (1-\theta)\boldsymbol{G}^F \boldsymbol{p}^n + \theta \boldsymbol{f}_{ext}^{n+1} + (1-\theta)\boldsymbol{f}_{ext}^n
\end{aligned} \tag{2.93}$$

Hierin sind die durch Stabilisierungsterme verursachten Abhängigkeiten der Matrizen $\boldsymbol{M}^F$, $\boldsymbol{N}^F$, $\boldsymbol{G}^F$ und $\boldsymbol{f}_{ext}$ von den Geschwindigkeiten zur Vereinfachung nicht dargestellt. Entsprechend den Ausführungen in Wall (1999) werden sie im Rahmen der iterativen Lösung auch nicht mitlinearisiert, vielmehr werden zu ihrer Ermittlung einfach grundsätzlich die im algorithmischen Ablauf jeweils neuesten, verfügbaren Geschwindigkeiten herangezogen und so die jeweiligen Matrixeinträge bestimmt. Für die iterative Lösung dieses nichtlinearen, algebraischen Gleichungssystems innerhalb jedes Zeitschrittes kommt in der hier verwendeten Fluidformulierung weiterhin ein Newton-Verfahren mit unvollständiger Linearisierung zum Einsatz. Darin werden nur Teile der konsistent linearisierten nichtlinearen Terme (die konvektiven Anteile) auf der linken Gleichungsseite berücksichtigt, während die anderen nichtlinearen Terme (die reaktionären Anteile) über die rechte Seite eingehen. Diese Art des Iterationsverfahrens wurde von Cuvelier et al. (1986) als *fixpunktartiges* Verfahren bezeichnet; eine Bezeichnung, die in Wall (1999) und daher auch in der vorliegenden Arbeit übernommen wurde.

Ein solches Vorgehen hat sich für die beschriebene Problemstellung als numerisch günstig erwiesen, im Gegensatz etwa zu echten Newton-Raphson-Iterationsverfahren. Letztere zeigen erstens insbesondere bei hohen Reynolds-Zahlen häufig Konvergenzprobleme, und zweitens erfordern sie eine vollständige, konsistente Linearisierung, welche für das gegebene Problem nur sehr aufwendig zu realisieren ist (Linearisierung der Stabilisierungsterme, s.o.). Die im Gegensatz zum Newton-Raphson-Verfahren nur lineare Konvergenzordnung der fixpunktartigen Verfahren ist in der numerischen Strömungsdynamik (im Gegensatz zur Strukturdynamik) im Hinblick auf Konvergenzgeschwindigkeit und Genauigkeit vor allem im instationären Fall nur von untergeordneter Bedeutung. Aufgrund der zur Auflösung der strömungsdynamischen Phänomene häufig erforderlichen sehr kleinen Zeitschritte reicht es in praktischen Berechnungen nämlich meist aus, eine feste Anzahl von nur zwei bis drei Iterationsschritten je Zeitschritt zu verwenden, so daß das nichtlineare System gar nicht in jedem Zeitschritt voll ausiteriert wird. Die erst im Endstadium einer Iteration einsetzende quadratische Fehlerreduktion des Newton-Raphson-Verfahrens käme daher ohnehin in der Regel gar nicht zum Tragen.

Desweiteren wird zur Lösung des Gleichungssystems (2.93) eine voll gekoppelte Formulierung verwendet, d.h. die Gleichungen werden für die Primärvariablen $\boldsymbol{u}$ und $\boldsymbol{p}$ gleichzeitig gelöst. Diese Formulierung hat gegenüber den populäreren, entkoppelten Verfahren (Projektionsmethoden) zwar verschiedene Nachteile (größere und weniger gutartige Gleichungssysteme), ist aber für die Zielanwendung dieser Arbeit – die Fluid-Struktur-Interaktion – trotzdem besser geeignet. Grund hierfür ist, daß die entkoppelten Verfahren im Gegensatz zu den voll gekoppelten Verfahren essentielle Probleme bei der Randbeschreibung und -lösung aufweisen: Es können künstliche Randgrenzschichten entstehen und es ist unklar, welche Randbedingungen in den einzelnen Zwischenschritten aufgebracht werden müssen; letztere sind zudem oftmals physikalisch schwer begründbar und schwer konsistent ableitbar. Gerade bei Fluid-Struktur-Interaktionsproblemen kommt dem Rand des Fluidgebietes und den zugehörigen Randbedingungen jedoch eine besondere Bedeutung zu, da hier die Kopplung an die Struktur und der Informationsaustausch zwischen den einzelnen physikalischen Feldern stattfindet. Für eine ausführliche Darstellung und Diskussion der verwendeten Lösungsverfahren wird nochmals auf Wall (1999) verwiesen.

2.3 Fluid-Netz

Die ALE-Formulierung der Strömung erfordert nun noch eine Festlegung der Bewegung des Referenzgebietes, das im vorliegenden Finite-Element-Modell dem bewegten Fluid-Netz entspricht. Dieses wird bei der Modellierung von Fluid-Struktur-Interaktionsproblemen auf der einen Seite an das materielle Strukturnetz und gegebenenfalls auf der anderen Seite an ein raumfestes Eulersches Fluidnetz gekoppelt. Eine ausführliche Übersicht über Methoden zur Netzbewegung sowie eine ausführliche Beschreibung und Analyse des in dieser Arbeit verwendeten Modells wird wiederum in Wall (1999) gegeben.

Der hier verwendete Ansatz betrachtet das Finite-Elemente-Netz als eine kontinuierliche Pseudo-Struktur mit der Pseudo-Steifigkeitsmatrix $\boldsymbol{K}^M$. Die Steifigkeit des Netzes kann dabei lokal

veränderlich sein, um jeweils problemspezifisch die Netzqualität zu verbessern. Um numerische Schwierigkeiten, die aufgrund von künstlich oszillierenden Netzen entstehen könnten, zu vermeiden, wird lediglich ein elastostatisches System betrachtet, das der Einfachheit halber linear formuliert wird. Somit erfordert die Bestimmung der Netzbewegung in jedem Zeitschritt die Lösung eines zusätzlichen Randwertproblems der Form

$$\boldsymbol{K}^M \, \boldsymbol{r}^{n+1} = \boldsymbol{f}^{n+1} \quad \text{in } \Omega_M \tag{2.94}$$

mit den Dirichlet–Randbedingungen

$$\boldsymbol{r}^{n+1} = \boldsymbol{d}^{n+1} \qquad \text{auf} \quad \Gamma = \partial\Omega_M \cap \partial\Omega_S \tag{2.95}$$

und

$$\boldsymbol{r}^{n+1} = \boldsymbol{0} \qquad \text{auf} \quad \Gamma_M \setminus \Gamma \quad \text{mit} \quad \Gamma_M = \partial\Omega_M \tag{2.96}$$

Dabei resultiert der Lastvektor $\boldsymbol{f}^{n+1}$ lediglich aus der angegebenen Dirichlet-Randbedingung, d.h. aus der Vorgabe der Netzposition $\boldsymbol{r}^{n+1}$ am Kopplungs- bzw. Interfacerand Γ durch die Position des benetzten Strukturrandes $\boldsymbol{d}^{n+1}$. Da dieses elastostatische System in jedem Zeitschritt einmal gelöst wird, wird der beschriebene Ansatz auch als quasi-elastostatisch bezeichnet. Aufgrund der linearen Formulierung ist die Pseudo-Steifigkeitsmatrix im Verlauf der gesamten Berechnung unveränderlich, so daß $\boldsymbol{K}^M$ nur ein einziges Mal faktorisiert werden muß, und anschließend jede Lösung durch einfaches Rückwärtseinsetzen des jeweils neuen Lastvektors bestimmbar ist. Der Lösungsaufwand je Zeitschritt ist somit minimal.

Die zur Bestimmung der ALE-konvektiven Geschwindigkeit des Fluides nötige Netzgeschwindigkeit $\boldsymbol{u}^G$ wird dann aufgrund der Forderungen der geometrischen Bilanzgleichungen (GCL) in jedem Zeitschritt $t^n \rightarrow t^{n+1}$ als Differenzenquotient $\boldsymbol{u}^G = \left(\boldsymbol{r}^{n+1} - \boldsymbol{r}^n\right) / \Delta t$ der Netzpositionen zu Beginn und Ende des Zeitschrittes berechnet (Gleichung (2.72)) und als während des Zeitschrittes konstant angenommen.

Dieser Pseudo-Struktur-Ansatz ist bei moderaten Netzverformungen sehr flexibel und effizient und somit für die in dieser Arbeit berechneten Beispiele gut geeignet. Im allgemeinen Fall mit großen Fluid-Netzverformungen ist es jedoch nicht immer möglich, die erforderlichen Netzbewegungen mit einem einzigen quasi-elastostatischen Netzsystem zu beschreiben. In dem Fall müssen in Abhängigkeit der Netzqualität von Zeit zu Zeit Neuvernetzungen vorgenommen werden.

3 Grundkonzepte und Bezeichnungen für partitionierte Lösungsverfahren

Nachdem nun die numerischen Modelle für die Strömungs- und die Strukturdynamik vorgestellt wurden, befaßt sich dieses Kapitel allgemein mit Ansätzen zur partitionierten Lösung gekoppelter Probleme. Um dabei die Übersicht über die Vielzahl an in der Literatur existierenden Ansätzen nicht zu verlieren, wird zunächst in *Bild 3.1* eine Zusammenstellung der wichtigsten Verfahrensklassen in der hier verwendeten Terminologie vorangestellt.

Unterscheidungs-merkmal	***Bezeichnungen / Verfahrensklassen***		
räumliches Partitionierungs-konzept	*nichtüberlappend* *elementweise*	*überlappend* *knotenweise*	
Zeitintegration	*implizit–implizit:* *I–I* *mit Subcyling:* *(multi-timestep)* I^m–*I*	*explizit–implizit:* *(mixed time integration)* *E–I* *mit Subcyling:* *(multi-timestep)* E^m–*I*	*explizit–explizit:* *E–E* *mit Subcyling:* *(multi-timestep)* E^m–*E*
Kopplungs-strategie	*einfach gestaffelt* *schwach koppelnd* *explizit* ▼ *keine Iteration über die Teilgebiete* ▼ *Kopplungsbedingungen nur näherungsweise erfüllt*	*iterativ gestaffelt* *stark koppelnd* *implizit* ▼ *Iteration über die Teilgebiete (Gebietszerlegungsmethoden)* ▼ *Kopplungsbedingungen „exakt“ erfüllt*	

Bild 3.1: Übersicht über Ansätze zur partitionierten Lösung gekoppelter Probleme

Wie einleitend bereits geschrieben liegt den partitionierten Lösungsverfahren die Idee zugrunde, daß ein komplexes System erstens in kleinere, numerisch einfacher berechenbare Teilsysteme zerlegt wird, welche separat gelöst werden, und zweitens die gewünschte Lösung des Gesamtsystems dann durch Kopplung und Synchronisation der Teilsystemlösungen mit Hilfe einer bestimmten Kopplungsstrategie ermittelt wird. Im folgenden werden die prinzipiel-

len Unterschiede der verschiedenen Konzepte und Strategien erläutert, und im Hinblick auf ihre Eignung für die hier untersuchten oberflächengekoppelten Problemklassen – Strukturdynamik und Fluid-Struktur-Interaktion – diskutiert. Anschließend wird ein zusammenfassender Überblick über die historische Entwicklung partitionierter Lösungsverfahren gegeben. Den Abschluß dieses Kapitels bildet ein Abschnitt über spezifische Anforderungen und numerische Werkzeuge zur Beurteilung der einzelnen Lösungsverfahren. Damit sollen die Voraussetzungen für die in den folgenden Kapiteln 5 bis 7 durchgeführte detaillierte Beschreibung und Analyse ausgewählter Verfahren geschaffen werden.

Bei der Untersuchung partitionierter Lösungsansätze beschränkt sich diese Arbeit auf zwei räumliche Teilgebiete. Im Falle der Fluid-Struktur-Interaktion wird die natürliche Unterteilung in ein Teilgebiet Fluid und ein Teilgebiet Struktur vorgenommen. Im Falle der Strukturdynamik geht es hier hauptsächlich um die Unterteilung des Gesamtgebietes in Bereiche mit stark unterschiedlichen dynamischen Eigenschaften und/oder Diskretisierungen, wofür in technischen Anwendungen häufig zwei Teilgebiete ebenfalls ausreichen. Eine weitere Zerlegung der einzelnen Teilgebiete im Sinne der Gebietszerlegungsmethoden mit dem Zweck der effizienteren Gleichungslösung auf Parallelrechnern ist davon natürlich unberührt und kann zusätzlich erfolgen.

3.1 Partitionierungskonzepte

In diesem Abschnitt wird nun auf mögliche Arten der Systemzerlegung eingegangen und damit eine erste Basis für die Klassifikation der verschiedenen partitionierten Lösungsverfahren gelegt. Entsprechend der von Felippa et al. (1998) gegebenen Definition bezeichnet eine *Partitionierung* eine Zerlegung des räumlichen Rechengebietes Ω, also der räumlichen Diskretisierung, in einzelne, miteinander interagierende Teilgebiete oder Partitionen Ω_j. Die Partitionen werden numerisch vollständig getrennt behandelt, sozusagen als isolierte Recheneinheiten, während die Interaktionseffekte in der Regel in Form einer sogenannten *Lastvektorkopplung* (Lübbing (1997)) berücksichtigt werden, also mit Hilfe von wechselseitig übergebenen Lastgrößen.

Abhängig von der Frage, wie und wo nun die Trennung zwischen den einzelnen Teilgebieten durchgeführt wird, und wie die Teilgebiete jeweils numerisch gelöst werden, ergeben sich prinzipiell unterschiedliche Partitionierungskonzepte. Für diese existieren in der Literatur eine Vielzahl verschiedener Terminologien und Definitionen, von denen die wichtigsten hier angeführt und im folgenden erläutert werden sollen:

- *Nichtüberlappende* und *überlappende* Partitionierungen
- *Elementweise* und *knotenweise* Partitionierungen
- *Mixed time integration* und *Multi-timestep-* bzw. *Subcycling-Verfahren*
- *Algebraische* und *differentielle* Partitionierungen

Während die erstgenannten beiden Fälle ausschließlich die räumliche Zerlegung betreffen, differenziert der dritte Fall nach der Art der in den Teilgebieten verwendeten Zeitintegrations-

verfahren, und der vierte Fall unterscheidet nach der Reihenfolge von räumlicher Zerlegung und Zeitdiskretisierung.

3.1.1 Klassifikation nach der Art der räumlichen Zerlegung

Im Bereich der in Kapitel 4 näher beleuchteten *Gebietszerlegungsverfahren* erfolgt die erstgenannte Unterscheidung: Liegen zwischen zwei benachbarten Teilgebieten Ω_1 und Ω_2 überlappende, zu beiden Teilgebieten gehörende Bereiche $\Omega_{1\cap 2} = \Omega_1 \cap \Omega_2 \neq 0$, so spricht man von einer *überlappenden* Zerlegung. Sind dagegen die Teilgebiete scharf gegeneinander abgegrenzt, wird also der Überlappungsbereich auf einen gemeinsamen Rand $\Gamma = \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2 \neq 0$ reduziert ($\Omega_{1\cap 2} = 0$), so liegt eine *nichtüberlappende* Zerlegung vor.

Die Begriffe *elementweise* Partitionierung (*„element-by-element“* bzw. *„element partitioning“*, Hughes & Liu (1978a, b)) und *knotenweise* Partitionierung (*„node-by-node“* bzw. *„nodal partitioning“*, Belytschko & Mullen (1978a, b, c)) wurden Ende der siebziger Jahre von ingenieurwissenschaftlicher Seite aus im Rahmen von partitionierten Berechnungen strukturdynamischer Problemstellungen mit der Methode der Finiten Elemente geprägt. Beim elementweisen Partitionierungskonzept werden die Finiten Elemente zur Partitionierung verwendet und jeweils eindeutig einem Teilgebiet zugeordnet. Dadurch entsteht ein Satz von *Interface-* oder *Kopplungsknoten* auf dem sogenannten *Interface* oder *Kopplungsrand* Γ, die zu beiden Teilgebieten gehören. An diesen Knoten werden die Kopplungsgrößen übergeben. Beim knotenweisen Partitionierungskonzept werden dagegen die Knoten eines Finite-Elemente-Netzes zur Partitionierung herangezogen und jeweils eindeutig einem Teilgebiet zugeordnet. Dadurch entsteht nun zwischen zwei aneinandergrenzenden Teilgebieten eine Schicht von Elementen, die zu beiden Teilgebieten gehören, sie werden als *Interfaceelemente* bezeichnet.

Die Definitionen für nichtüberlappende bzw. überlappende und elementweise bzw. knotenweise Partitionierungskonzepte können im Prinzip alternativ verwendet werden. Elementweise und nichtüberlappende Partitionierung sind völlig äquivalent, während die knotenweise Partitionierung der überlappenden Gebietszerlegung mit einer Überlappungsbreite von einem Element (2-D: 1 Elementreihe, 3-D: 1 Elementschicht) entspricht. In dieser Arbeit werden daher beide Bezeichnungen verwendet, je nachdem, ob die gerade behandelte Thematik im Zusammenhang mit Gebietszerlegungs- oder mit sonstigen partitionierten Lösungsverfahren steht.

Elementweises/nichtüberlappendes und knotenweises/überlappendes Partitionierungskonzept sind in *Bild 3.2* an einem einfachen strukturmechanischen Modellproblem verdeutlicht. Dargestellt ist ein mit Finiten Elementen diskretisierter eindimensionaler Stab, der in zwei Partitionen zerlegt wird. Die bei der Partitionierung jeweils entstehenden Kopplungsrandbedingungen sind durch die graue Farbe markiert.

Links ist die *elementweise/nichtüberlappende Partitionierung* in einer *Dirichlet-Neumann-Kopplungsvariante* gezeigt. In dieser Formulierung wird für das Teilgebiet Ω_1 die freie Verschiebung des Interfaceknotens in Ω_2 als Dirichlet-Randbedingung d_Γ vorgeschrieben, während die zum Aufbringen dieser vorgeschriebenen Verschiebung erforderliche Kopplungskraft $\boldsymbol{f}_\Gamma$ als Neumann-Randbedingung auf den Interfaceknoten in Teilgebiet Ω_2 aufgebracht wird.

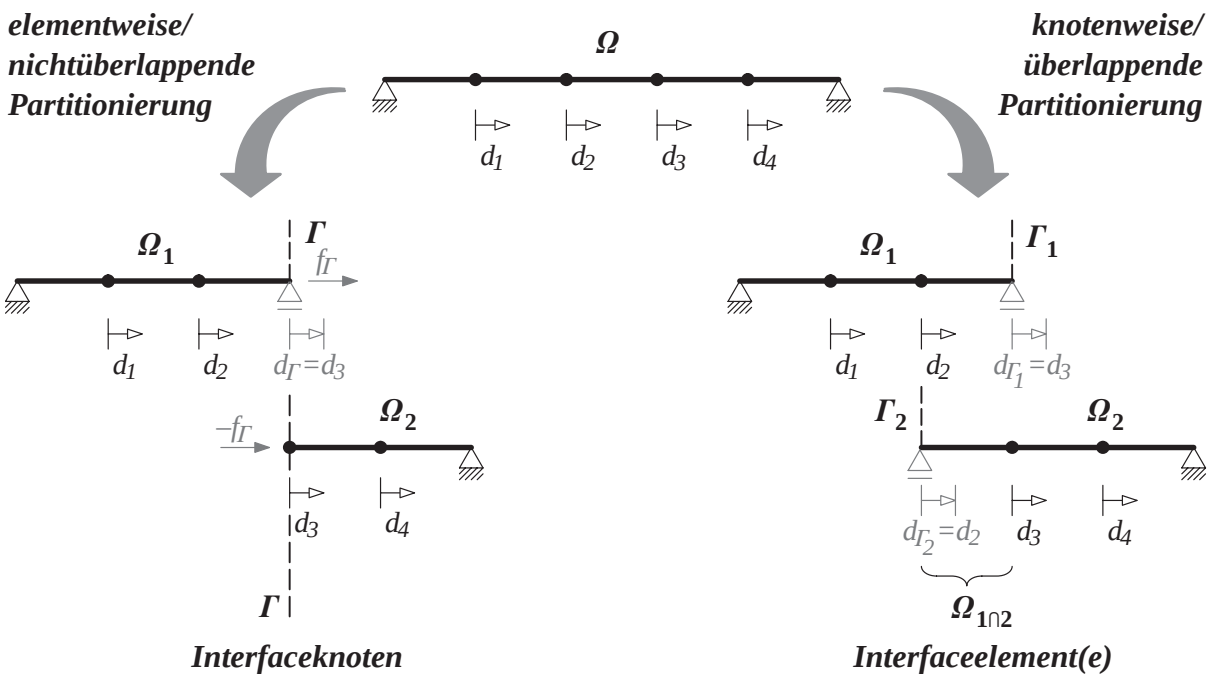


Bild 3.2: Räumliche Partitionierungskonzepte

Exemplarisch wird das nichtüberlappende Partitionierungskonzept nun auf ein verallgemeinertes algebraisches Gleichungssystem

$$\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{d} = \boldsymbol{f}_{ext} \tag{3.1}$$

angewendet, wie es etwa nach der Raum- und Zeitdiskretisierung der strukturdynamischen oder auch Fluid-Struktur-Interaktions-Gleichungen für das Gesamtgebiet Ω entsteht und in jedem Zeitschritt gelöst werden muß. Darin bezeichnet $\boldsymbol{A}$ die verallgemeinerte Koeffizientenmatrix, $\boldsymbol{d}$ den Vektor der Unbekannten und $\boldsymbol{f}_{ext}$ den Vektor der externen Lasten.

Bemerkung 3.1: Zur Vereinfachung der Darstellung wird hier ein lineares Gleichungssystem verwendet. Die Ausführungen sind jedoch keineswegs auf lineare Systeme beschränkt, die Koeffizientenmatrix kann nichtlinear von den Unbekannten abhängen: $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{d})$.

Die Aufteilung der Unbekannten in solche, die im Innern *(Index I)* der jeweiligen Partition $(\boldsymbol{d}_I^{\Omega_j})$ und in solche, die auf dem gemeinsamen Kopplungsrand *(Index Γ)* liegen $(\boldsymbol{d}_\Gamma)$, führt dann, für den dargestellten Fall der Zerlegung in zwei Teilgebiete, auf das folgende partitionierte algebraische Gleichungssystem in Block-Matrix-Darstellung.

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{II}^{\Omega_1} & \boldsymbol{A}_{I\Gamma}^{\Omega_1} & 0 \\ \boldsymbol{A}_{\Gamma I}^{\Omega_1} & \boldsymbol{A}_{\Gamma\Gamma}^{\Omega_1} + \boldsymbol{A}_{\Gamma\Gamma}^{\Omega_2} & \boldsymbol{A}_{\Gamma I}^{\Omega_2} \\ 0 & \boldsymbol{A}_{I\Gamma}^{\Omega_2} & \boldsymbol{A}_{II}^{\Omega_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{d}_I^{\Omega_1} \\ \boldsymbol{d}_\Gamma \\ \boldsymbol{d}_I^{\Omega_2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{f}_{I\,ext}^{\Omega_1} \\ \boldsymbol{f}_{\Gamma\,ext} \\ \boldsymbol{f}_{I\,ext}^{\Omega_2} \end{Bmatrix} \quad \begin{matrix} \Omega_1 \\ \\ \Omega_2 \end{matrix} \tag{3.2}$$

Darin ist die klare Trennung der Teilgebiete erkennbar: Die zum gemeinsamen Interface Γ gehörigen Matrixanteile sind strikt aufgeteilt in solche, die von Elementen in Ω_1 stammen, und solche, die von Elementen in Ω_2 stammen. Die Einflußbereiche der Teilgebiete sind mit den unterschiedlich gestrichelten Linien entsprechend markiert. Diese strikte Trennung wird

natürlich bei der partitionierten Berechnung beibehalten, die im Abschnitt 4.1 und in den Kapiteln 5 und 6 ausführlich beschrieben wird.

Bei der in *Bild 3.2* rechts dargestellten *knotenweisen/überlappenden Partitionierung* treten dagegen als Interface-Randbedingungen an beiden Kopplungsrändern Dirichlet-Randbedingungen d_{Γ_j} auf, in Form von durch das jeweils benachbarte Teilgebiet vorgeschriebenen Verschiebungen. Das Interfaceelement wird in beiden Partitionen verwendet. Wird die Überlappungsbreite größer gewählt, so kommen im Überlappungsbereich selbst auch noch innere Knoten zu liegen, die in beiden Partitionen verwendet werden. Die Anwendung dieses Partitionierungskonzepts auf das verallgemeinerte algebraische Gleichungssystem (3.1) führt auf das partitionierte System

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{II}^{\Omega_1} & \boldsymbol{A}_{I\Gamma_2}^{\Omega_1} & 0 & 0 & 0 \\ \boldsymbol{A}_{\Gamma_2 I}^{\Omega_1} & \boldsymbol{A}_{\Gamma_2\Gamma_2} & \boldsymbol{A}_{\Gamma_2 I}^{\Omega_{1\cap 2}} & 0 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{A}_{I\Gamma_2}^{\Omega_{1\cap 2}} & \boldsymbol{A}_{II}^{\Omega_{1\cap 2}} & \boldsymbol{A}_{I\Gamma_1}^{\Omega_{1\cap 2}} & 0 \\ 0 & 0 & \boldsymbol{A}_{\Gamma_1 I} & \boldsymbol{A}_{\Gamma_1\Gamma_1} & \boldsymbol{A}_{\Gamma_1 I}^{\Omega_2} \\ 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{A}_{I\Gamma_1}^{\Omega_2} & \boldsymbol{A}_{II}^{\Omega_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{d}_I^{\Omega_1} \\ \boldsymbol{d}_{\Gamma_2} \\ \boldsymbol{d}_I^{\Omega_{1\cap 2}} \\ \boldsymbol{d}_{\Gamma_1} \\ \boldsymbol{d}_I^{\Omega_2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{f}_{I\,ext}^{\Omega_1} \\ \boldsymbol{f}_{\Gamma_2\,ext} \\ \boldsymbol{f}_{I\,ext}^{\Omega_{1\cap 2}} \\ \boldsymbol{f}_{\Gamma_1\,ext} \\ \boldsymbol{f}_{I\,ext}^{\Omega_2} \end{Bmatrix} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right\} \Omega_1 \\ \left.\vphantom{a}\right\} \Omega_2 \end{matrix} \tag{3.3}$$

wobei $\boldsymbol{d}_I^{\Omega_{1\cap 2}}$ nun die Unbekannten im Innern des Überlappungsbereichs und $\boldsymbol{d}_{\Gamma_j}$ die auf einem der inneren Ränder Γ_j liegenden Unbekannten bezeichnet. Die in beiden Teilgebieten gemeinsam verwendeten Koeffizienten aus dem Überlappungsbereich sind klar zu erkennen. In dem in *Bild 3.2* dargestellten Spezialfall der knotenweisen Partitionierung fallen die Knoten im Inneren des Überlappungsbereichs und damit $\boldsymbol{d}_I^{\Omega_{1\cap 2}}$ weg, und das partitionierte Gleichungssystem reduziert sich auf

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{II}^{\Omega_1} & \boldsymbol{A}_{I\Gamma_2}^{\Omega_1} & 0 & 0 \\ \boldsymbol{A}_{\Gamma_2 I}^{\Omega_1} & \boldsymbol{A}_{\Gamma_2\Gamma_2} & \boldsymbol{A}_{\Gamma_2\Gamma_1} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{A}_{\Gamma_1\Gamma_2} & \boldsymbol{A}_{\Gamma_1\Gamma_1} & \boldsymbol{A}_{\Gamma_1 I}^{\Omega_2} \\ 0 & 0 & \boldsymbol{A}_{I\Gamma_1}^{\Omega_2} & \boldsymbol{A}_{II}^{\Omega_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{d}_I^{\Omega_1} \\ \boldsymbol{d}_{\Gamma_2} \\ \boldsymbol{d}_{\Gamma_1} \\ \boldsymbol{d}_I^{\Omega_2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{f}_{I\,ext}^{\Omega_1} \\ \boldsymbol{f}_{\Gamma_2\,ext} \\ \boldsymbol{f}_{\Gamma_1\,ext} \\ \boldsymbol{f}_{I\,ext}^{\Omega_2} \end{Bmatrix} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\end{matrix}}\right\} \Omega_1 \\ \left.\vphantom{a}\right\} \Omega_2 \end{matrix} \tag{3.4}$$

Hierbei ist insbesondere zu bemerken, daß sowohl die Teilsystemmatrizen *(*$\boldsymbol{A}_{\Gamma_2\Gamma_2}$ bzw. $\boldsymbol{A}_{\Gamma_1\Gamma_1}$*)* als auch die Kopplungsanteile *(*$\boldsymbol{A}_{\Gamma_2\Gamma_1}$ bzw. $\boldsymbol{A}_{\Gamma_1\Gamma_2}$*)* wiederum Koeffizienten, also Systeminformation, aus dem Interfaceelement und somit aus dem jeweils benachbarten Teilgebiet enthalten. Auf die Lösung dieses Gleichungssystems mit partitionierten Lösungsverfahren (Gebietszerlegungsverfahren) wird im Abschnitt 4.2 eingegangen.

Eignung von nichtüberlappenden bzw. überlappenden Partitionierungen für die untersuchten Problemstellungen

Eine allgemeine Bewertung der *Qualität* der unterschiedlichen Partitionierungskonzepte ist schwierig, wenn nicht gar unmöglich. Die Güte eines Verfahrens muß vielmehr stets im Zusammenhang mit der Frage nach der *Eignung für eine spezifische Problemstellung* beurteilt werden.

Der Hauptvorteil nichtüberlappender Partitionierungen ist die *Vermeidung von Interfaceelementen* und die *strikte räumliche Trennung der Teilgebiete*. Diese Eigenschaft ermöglicht erst den vollständig *modularen* Einsatz separater Softwarebausteine für die einzelnen Teile des gekoppelten Systems. Dies ist ein bedeutender Vorteil, wenn kommerzielle Programme eingesetzt werden, die in der Regel nur wenig programmiertechnische Eingriffsmöglichkeiten bieten, so daß die Verwaltung überlappender Systembereiche große Probleme bereiten kann (Elementverdopplungen, usw.), während die Vorgabe von reinen Dirichlet- und Neumann-Randbedingungen auf einem Kopplungsrand (erfordert lediglich den Austausch von Vektoren mit aktuellen Bewegungs- und Lastgrößen) eigentlich immer möglich ist. Auch bei der Kopplung von Feldern mit unterschiedlichen physikalischen Eigenschaften ermöglichen nichtüberlappende Partitionierungen den vollständig unabhängigen Einsatz optimaler Diskretisierungs- und Lösungsverfahren für die dem jeweiligen Feld zugrundeliegenden partiellen Differentialgleichungen, während auch hier die Behandlung eines Überlappungsbereichs schwierig sein kann.

Dagegen ist der Hauptvorteil überlappender Partitionierungen die größere Menge an Kopplungsinformation. Je größer die Überlappungsbreite, desto größer ist die Menge an Systeminformation, die jedem Teilgebiet über sein Nachbarteilgebiet vorliegt, und desto kleiner ist somit der durch die Partitionierung erzeugte Fehler. Dies ist leicht ersichtlich, wenn man einmal den Extremfall betrachtet, in dem der Überlappungsbereich das gesamte Nachbarteilgebiet umfaßt. Dann entspricht die Lösung des Teilgebiets der Lösung des Gesamtgebiets, d.h. die partitionierte Lösung entspricht der simultanen Lösung. Im anderen Extremfall des Verschwindens der Überlappung (nichtüberlappende Partitionierung) ist die Menge an Kopplungsinformation minimal, den Teilgebieten liegen keinerlei Informationen mehr über die Systemeigenschaften des jeweiligen Nachbarteilgebietes vor, sondern nur noch die Verschiebungs- bzw. Lastgrößen an den Interfaceknoten. Daraus resultieren eine maximale Abweichung der partitionierten Lösung von der simultanen Lösung des Gesamtgebietes. Insofern ist insbesondere bei nichtüberlappender Partitionierung die Kontrolle des erzeugten Fehlers eine der Hauptaufgaben der Kopplungsalgorithmen.

Diese Überlegungen legen somit die Schlußfolgerung nahe, daß für die partitionierte Lösung physikalischer *Einfeld*probleme überlappende Partitionierungen theoretisch besser sind. In dynamischen Analysen kommt hier verstärkend hinzu, daß auch der zeitliche Austausch von Kopplungsinformationen aufeinander abgestimmt werden muß, was mit überlappenden Partitionierungen ebenfalls einfacher zu bewerkstelligen ist. Allerdings setzen überlappende Partitionierungen die Möglichkeit voraus, die Überlappungsbereiche programmtechnisch zu handhaben, was eine gravierende Einschränkung bedeutet. Desweiteren sind auch für Anwendungen, in denen mehrere physikalisch gleichartige Körper aufeinandertreffen (Stoß- bzw. Kontaktprobleme), so daß die Teilgebiete von vornherein topologisch getrennt sind, nichtüberlappende Partitionierungen geeigneter und softwaretechnisch viel einfacher umzusetzen.

Für die partitionierte Lösung von *Mehrfeld*problemen sind nichtüberlappende Partitionierungen eindeutig vorzuziehen. So sind etwa in der Zielanwendung dieser Arbeit – der Fluid-Struktur-Interaktion – die Anforderungen der Teilgebiete an die in Kapitel 2 jeweils erläuterten Diskretisierungs- und Lösungsverfahren vollständig unterschiedlich, so daß das Miteinbezie-

hen von Interface-Elementen aus dem einen physikalischen Gebiet in die Lösungsverfahren des anderen Gebietes praktisch unmöglich oder zumindest sehr problematisch und der Erfolg eines solchen Ansatzes fragwürdig ist. Aus diesem Grund wird es eher der Regelfall sein, daß man zwei jeweils spezialisierte, separate Softwarepakete für Fluid und Struktur zusammenkoppeln wird, weshalb die angesprochene Software-Modularität der nichtüberlappenden Verfahren für eine partitionierte Lösungsmethodik unverzichtbar ist. Und nicht zuletzt entspricht die nichtüberlappende Variante auch der „natürlichen“ Trennung zwischen Fluid und Struktur am physikalischen Interface, nämlich der benetzten Strukturoberfläche.

Im weiteren Verlauf der Arbeit werden ausschließlich Verfahren mit nichtüberlappenden Partitionierungen behandelt werden (mit Ausnahme einiger historischer und vergleichender Ausführungen zu überlappenden Methoden in den Abschnitten 3.3 und 4.2).

Bemerkung 3.2: Es soll an dieser Stelle noch darauf hingewiesen werden, daß in dieser Arbeit auch ausschließlich *konforme Diskretisierungen* betrachtet werden, d.h. daß die am Kopplungsrand zusammenstoßenden Teilgebiete hinsichtlich Diskretisierungsverfahren (hier nur FEM), Elementansatzordnung und Netzfeinheit zueinander passen. Für den Fall nichtkonformer Diskretisierungen soll an dieser Stelle lediglich auf in der Literatur beschriebene Ansätze verwiesen werden, wie etwa die Methode des Last- und Bewegungstransfers über konsistente Interpolation, konservative Ansätze, oder auch die in Abschnitt 4.1.3 kurz erläuterten Mortar-Methoden. Arbeiten hierzu stammen u.a. von Bernardi et al. (1994), Cebral (1996) bzw. Cebral & Löhner (1997), Farhat et al. (1998b) sowie Rixen et al. (1998). Ein Überblick zur Thematik des Last- und Bewegungstransfers für konforme und nichtkonforme Diskretisierungen in der Fluid-Struktur-Interaktion mit weiteren Angaben zu der im vorliegenden Modell verwendeten Methodik findet sich in Wall (1999).

3.1.2 Klassifikation nach der Art der Zeitintegrationsverfahren

Neben diesen rein die räumliche Zerlegung betreffenden Unterscheidungen gibt es für dynamische Problemstellungen außerdem die Einteilung der partitionierten Verfahren nach der Art der in den Teilgebieten verwendeten Zeitintegrationsverfahren. Insbesondere geht es hierbei um die Unterscheidung nach impliziten und expliziten Zeitintegrationsverfahren, was auf sog. *implizit–implizite (I–I), implizit–explizite (I–E)* bzw. *explizit–implizite (E–I)* und *explizit–explizite (E–E)* Partitionierungskonzepte führt (z.B. Belytschko & Mullen (1978b, c), Belytschko et al. (1979), Hughes & Liu (1978a, b), Piperno et al. (1995)). Dabei wird für Verfahren, in denen in den einzelnen Partitionen unterschiedliche Zeitintegrationsalgorithmen eingesetzt werden, auch die englische Bezeichnung „*mixed time integration method*“ verwendet.

Zusätzlich dazu benutzen die unter dem Oberbegriff *Subcycling-* bzw. auch *Multi-timestep-Verfahren*[3] zusammengefaßten Methoden unterschiedlich große Zeitschritte in den einzelnen Partitionen. In diesem Zusammenhang sprechen Belytschko et al. (1979) auch von *m–explizit–expli-*

3. Mangels passender deutscher Übersetzungen für diese Bezeichnungen werden ausnahmsweise die englischen Fachbegriffe weiterverwendet.

ziten (E^m–E) bzw. *m–explizit–impliziten (E^m–I)* Partitionierungen, d.h. in der ersten Partition wird der Subcycling-Zeitschritt $\Delta t/m$ und in der zweiten Partition der m-fach größere globale Zeitschritt Δt für die Zeitintegration verwendet.

Da die Frage nach der Art der bei einer partitionierten Analysetechnik in den Teilgebieten jeweils verwendeten Zeitintegrationsverfahren völlig unabhängig von der Art der räumlichen Zerlegung ist, müssen die in diesem Abschnitt eingeführten Bezeichnungen prinzipiell als Zusatz zu der Angabe über die Art der räumlichen Partitionierung verstanden werden. Die Entscheidung für die Wahl eines expliziten oder impliziten Zeitintegrationsverfahrens hängt einerseits ab von den Anforderungen der in den Teilgebieten simulierten, physikalischen Problemstellungen an die jeweilige Zeitdiskretisierungsmethode, und andererseits von den Anforderungen der eingesetzten Kopplungsstrategie, wie später noch ausführlich erläutert werden wird. Auch die Verfügbarkeit von entsprechenden Software-Modulen für die einzelnen Felder sowie Aufwandsüberlegungen können Entscheidungskriterien sein.

3.1.3 Klassifikation nach algebraischer und differentieller Partitionierung

Dieses Klassifikationsmerkmal, das ebenfalls nur für dynamische Problemstellungen gilt, wurde in Park (1980) und Park & Felippa (1980) erstmals vorgestellt und später in den Übersichtsartikeln Felippa & Park (1980) und Park & Felippa (1983) aufgearbeitet. Es unterscheidet nach *algebraischer* und *differentieller* Partitionierung in Abhängigkeit von der Reihenfolge von räumlicher bzw. Koeffizientenmatrix-Zerlegung und Zeitdiskretisierung: Eine *algebraische* Partitionierung liegt demnach vor, wenn zuerst das gesamte Gebiet in Raum *und* Zeit diskretisiert wird, und erst danach die so entstandenen effektiven Koeffizientenmatrizen des Gesamtsystems nach algebraischen Gesichtspunkten unterteilt werden. Dagegen werden bei der *differentiellen* Partitionierung zuerst die Gebietsgleichungen räumlich aufgeteilt und die Teilgebiete räumlich diskretisiert, oder auch das Gesamtsystem räumlich diskretisiert und die Koeffizientenmatrizen partitioniert. Erst danach wird dann für jedes Teilgebiet eine separate Zeitdiskretisierung durchgeführt.

Prinzipiell kann jede durch differentielle Partitionierung erzeugte Aufteilung der Koeffizientenmatrizen ebenfalls über den Weg der algebraischen Partitionierung erzeugt werden, aber nicht immer umgekehrt. So werden in o.g. Literaturstellen die im vorigen Abschnitt angeführten Verfahren von Belytschko et al. und Hughes & Liu, die ursprünglich auf dem differentiellen Partitionierungskonzept basieren, in eine entsprechende algebraische Partitionierung übergeführt. Dagegen ist die in Park (1980) beschriebene „*DOF-by-DOF*“ (freiheitsgradweise) *I–E–* Partitionierung nur mit dem algebraischen Konzept erzeugbar. Die Zerlegung wird dort so durchgeführt, daß einzelne Freiheitsgrade entweder der mit einem impliziten oder der mit einem expliziten Zeitintegrationsverfahren integrierten Partition zugeordnet werden. Dies sei nach Meinung der Autoren beispielsweise bei der dynamischen Analyse von Balken oder Schalen mit Rotations- und Verschiebungsfreiheitsgraden vorteilhaft. Da die Rotationsfreiheitsgrade höherfrequente Antwortspektren aufweisen als die Verschiebungsfreiheitsgrade, sei es von Vorteil, die ersteren implizit in der Zeit zu integrieren und die letzteren explizit. Es ist jedoch

anzumerken, daß eine solche getrennte Behandlung einzelner Freiheitsgrade eines Knotens dem modularen Lösungsprinzip, wie etwa der Kopplung von einem Fluid-Modul an ein Strukturdynamik-Modul, jeweils mit beliebiger Wahl von Raum- und Zeitdiskretisierungsverfahren, zuwiderläuft. Außerdem erfordert dies genaue Kenntnis und Informationen über die Art und die dynamischen Eigenschaften einzelner Freiheitsgrade, was den generellen Einsatz erschwert und zudem auch programmtechnisch nur mit erhöhtem Aufwand zu realisieren ist. Daher wird dieser Ansatz in der vorliegenden Arbeit nicht weiter verfolgt.

Weitere Anwendungen des algebraischen Partitionierungskonzepts auf gekoppelte strukturdynamische Problemstellungen finden sich in den Arbeiten Park & Felippa (1984) und Felippa & Geers (1988); in jüngster Zeit wurde zudem von Park et al. (1997) und Justino et al. (1997) eine entsprechende, algebraisch partitionierte Modifikation der ursprünglich differentiell partitionierten FETI-Methode veröffentlicht.

Die Unterscheidung nach algebraischer und differentieller Partitionierung hat sich allerdings außerhalb der Arbeitsgruppe um Felippa und Park bisher nicht durchgesetzt. Mit Ausnahme des oben beschriebenen „*DOF-by-DOF*“ *I–E*–Partitionierungsverfahrens basieren alle in dieser Arbeit beschriebenen Verfahren auf dem differentiellen Partitionierungskonzept. Daher wird im folgenden auch auf die weitere Verwendung dieser Bezeichnungen verzichtet.

3.2 Kopplungsbedingungen und Kopplungsstrategien

Eine weitere klassifizierende Unterscheidung partitionierter Lösungsansätze nach der Art der eingesetzten Kopplungsstrategie ist verknüpft mit dem Aspekt der algorithmischen Erfüllung der Kopplungsbedingungen am Interface zwischen den einzelnen Partitionen.

3.2.1 Kopplungsbedingungen

Unabhängig von der Art des Partitionierungskonzepts soll die Berechnung eines Systems mit einem partitionierten Lösungsverfahren natürlich letztendlich zur selben Lösung führen, wie die simultane Berechnung des monolithischen, unpartitionierten Gesamtsystems. Um dies zu gewährleisten, müssen die grundlegenden kinetischen Erhaltungsgleichungen für Masse, Impuls und Energie auch am Kopplungsrand bzw. über diesen hinweg erfüllt sein. Wie in Abschnitt 3.4.2 noch hergeleitet werden wird, führt diese Forderung auf zwei grundsätzliche *Kopplungsbedingungen* (im Englischen als „*transmission conditions*“, „*coupling conditions*“ oder auch „*interface continuity conditions*“ bezeichnet). Dies sind die Forderungen nach *kinematischer* und *dynamischer Kontinuität* zwischen den Teilgebieten.

Die *kinematische Kontinuitätsbedingung* fordert, daß die kinematischen Größen – Verschiebungen, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen – beider Partitionen am Interface zu jeder Zeit gleich groß sein müssen.

$$\boldsymbol{d}_{\Gamma}^{\Omega_1}(t) = \boldsymbol{d}_{\Gamma}^{\Omega_2}(t) \qquad \text{und} \qquad \dot{\boldsymbol{d}}_{\Gamma}^{\Omega_1}(t) = \dot{\boldsymbol{d}}_{\Gamma}^{\Omega_2}(t) \qquad \text{und} \qquad \ddot{\boldsymbol{d}}_{\Gamma}^{\Omega_1}(t) = \ddot{\boldsymbol{d}}_{\Gamma}^{\Omega_2}(t) \tag{3.5}$$

Die *dynamische Kontinuitätsbedingung* fordert die Erhaltung des dynamischen Gleichgewichts aller Kräfte am Interface (externe Lasten, innere bzw. Druck- und viskose Kräfte, Trägheitskräfte). Die zu betrachtenden Größen sind somit die Spannungen am Interface, die aus der Erfüllung des Anfangsrandwertproblems des jeweiligen Teilgebietes resultieren. Diese resultierenden Spannungen der Teilgebiete müssen am Kopplungsrand entgegengesetzt gleich sein (Prinzip von *actio = reactio)*. Im Kontext der Methode der Finiten Elemente mit konformen Netzen geht diese Forderung auf die konsistenten Knotenkräfte am Interface $\boldsymbol{f}_{\Gamma}^{\Omega_j}$ über, die aus der Aufintegration der inneren Spannungen über den Kopplungsrand resultieren.

$$\boldsymbol{f}_{\Gamma}^{\Omega_1}(t) \;=\; -\,\boldsymbol{f}_{\Gamma}^{\Omega_2}(t) \tag{3.6}$$

Bemerkung 3.3: Für weitergehende Angaben zur *räumlich konsistenten* Ermittlung der Interfacekräfte und zur Formulierung des Last- und Bewegungstransfers im Rahmen der hier verwendeten Fluid-Struktur-Interaktions-Software wird auf Wall (1999) verwiesen. Ein nennenwertes Detail ist noch das folgende: Die Interfacekräfte, die an der benetzten Strukturoberfläche Γ vom Fluid auf die Struktur wirken, resultieren aus dem Cauchyschen Spannungstensor für Newtonsche Fluide, der sich nach Gleichung (2.62) aus einem viskosen und einem Druckanteil zusammensetzt: $\boldsymbol{\sigma} \;=\; 2\;\mu^F \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) \;-\; \tilde{p}\,\boldsymbol{I}$. Da die viskosen Spannungen im Vergleich zu den Drücken am Interface jedoch normalerweise sehr klein sind, ist es allgemein üblich, diese bei der Ermittlung der Interfacelasten zu vernachlässigen. Daher resultieren also die Interfacelasten auch in der hier verwendeten Formulierung nur aus den Fluiddrücken auf Γ.

3.2.2 Kopplungsstrategien

Ziel und Aufgabe eines partitionierten Lösungsalgorithmus ist also die Erfüllung der oben beschriebenen Kopplungsbedingungen. Die dazu eingesetzte *Kopplungsstrategie* führt zu der Einteilung der Verfahren in zwei weitere, grundlegende Verfahrensklassen

- *einfach gestaffelte, schwach koppelnde, explizite Verfahren*
- *iterativ gestaffelte, stark koppelnde, implizite Verfahren*

basierend auf der Frage, ob die Lösung zwischen den Teilgebieten in jedem Zeitschritt ausiteriert wird oder nicht. *Bild 3.3* zeigt schematisch die prinzipiellen Berechnungsabläufe der entsprechenden Grundverfahren in der von Felippa et al. (1998) eingeführten Darstellungsweise. Dargestellt ist der Informationsfluß zwischen den Teilgebieten Ω_1 und Ω_2 und die Reihenfolge der algorithmischen Schritte bei der partitionierten Zeitintegration innerhalb eines Zeitschrittes $t^n \rightarrow t^{n+1}$.

Einfach gestaffelte Verfahren – schwach koppelnd, explizit

Kopplungsalgorithmen ohne Iteration über die Teilgebiete heißen *einfach gestaffelte Verfahren* (im Englischen „*staggered schemes*“ bzw. nach Lübbing (1997) auch „*one-way staggered schemes*“). Sie sind dadurch charakterisiert, daß in jedem Zeitschritt die Bewegungsgleichung der

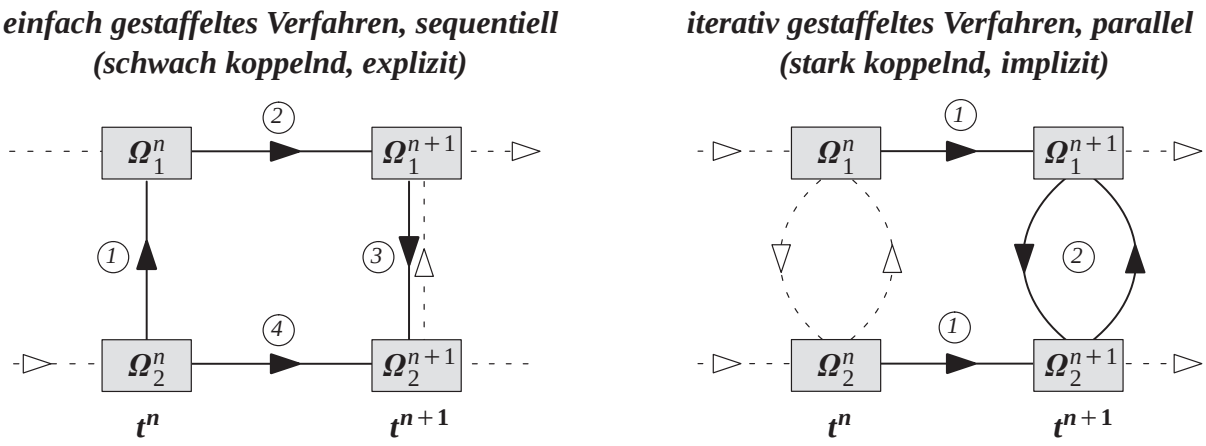


Bild 3.3: Kopplungsstrategien – Grundverfahren (synchron)

Teilgebiete nur genau einmal gelöst wird, ebenso werden auch die Kopplungsinformationen zwischen den Teilgebieten je Zeitschritt nur genau einmal ausgetauscht. Die Lösung der Teilgebiete im Zeitschritt kann *sequentiell* nacheinander *(sequentielle, einfach gestaffelte Verfahren* bzw. kurz *sequentiell gestaffelte Verfahren;* im Englischen als *„sequential staggered schemes“* oder auch *„serial staggered schemes“* bezeichnet) oder *parallel* zueinander erfolgen *(parallele, einfach gestaffelte Verfahren* bzw. kurz *parallel gestaffelte Verfahren;* im Englischen: *„parallel staggered schemes“)*.

Wird dabei in beiden Teilgebieten das identische Zeitintervall für die Zeitintegration verwendet (beide beginnend am Zeitpunkt t^n), wie in *Bild 3.3* schematisch dargestellt, wird das Vorgehen als *synchrones* Verfahren bezeichnet. Ist die Zeitintegration dagegen versetzt, wie etwa bei der in Abschnitt 5.4 näher erläuterten Methode von Lesoinne & Farhat (1998), bei der in der Struktur das Zeitintervall $\left[t^n,\ t^{n+1}\right]$ und im Fluid das um $\Delta t/2$ zeitversetzte Intervall $\left[t^{n-1/2},\ t^{n+1/2}\right]$ verwendet wird, spricht man von einem *asynchronen* Verfahren.

Bei synchronen, einfach gestaffelten Verfahren steht in mindestens einem Teilgebiet nur die entsprechende Kopplungsinformation zu Beginn des Zeitschritts für die Zeitintegration von t^n nach t^{n+1} zur Verfügung. Somit haben diese Kopplungsverfahren einen inhärent expliziten Charakter. Da die jeweils für die Zeit t^{n+1} zu berechnende Lösung der Teilfelder jedoch stets von der Lösung des benachbarten Teilfeldes zur selben Zeit t^{n+1} implizit abhängt[4] (Gleichungen (3.5) und (3.6)), ist mit dieser Kopplungsstrategie eine exakte Erfüllung der Kontinuitätsbedingungen prinzipiell nicht möglich, so daß nur eine schwache algorithmische Kopplung zwischen den Teilgebieten erreicht werden kann. Aus diesen Gründen finden sich für einfach gestaffelte Kopplungsverfahren auch die Bezeichnungen *schwach koppelnde* oder *explizite* Verfahren *(„loose coupling schemes“* oder *„explicit coupling schemes“)*. Manche Autoren sprechen auch von einer *expliziten Behandlung der Kopplungsterme*.

4. Im Bereich der Mehrkörpersystem-Dynamik wird diese implizite Abhängigkeit der gekoppelten Teilsysteme voneinander mit dem Begriff der *algebraischen Schleifen* verbunden. Nach Rumold (1999) bzw. Kübler & Schiehlen (1998) können solche algebraischen Schleifen zur Instabilität einfach gestaffelter, partitionierter Lösungsverfahren führen.

Iterativ gestaffelte Verfahren – stark koppelnd, implizit

Im Gegensatz dazu werden Kopplungsalgorithmen mit Iterationen über die Teilgebiete als *iterativ gestaffelte Verfahren („iterative staggered schemes“)* bezeichnet. Sie können, wie später noch im Detail gezeigt werden wird, auch als Gebietszerlegungsmethoden interpretiert werden, und zwar im Falle von überlappenden Partitionen als *Schwarzsche Methoden*, und im Falle von nichtüberlappenden Partitionen als *iterative Substruktur-* oder *Schurkomplementverfahren* (Bezeichnungsschema nach Smith et al. (1996)). Sofern die iterative Lösung konvergiert, so konvergiert sie gegen die simultane Lösung (z.B. Le Tallec (1994) S. 205), so daß die Kopplungsbedingungen zu jedem diskreten Zeitpunkt t^{n+1} voll erfüllt werden, und somit eine starke algorithmische Kopplung zwischen den Teilfeldern erreicht wird. Daher werden Kopplungsverfahren dieser Art auch *stark koppelnde* oder *implizite* Verfahren genannt *(„strong coupling schemes“* oder *„implicit coupling schemes“)*, bzw. man spricht von einer *impliziten Behandlung der Kopplungsterme.*

Wie bei den schwach koppelnden Verfahren kann die Lösung der Teilgebiete sequentiell nacheinander oder parallel zueinander erfolgen, wiederum mit der jeweils neuesten Kopplungsinformation. *Bild 3.3* rechts zeigt schematisch den Informationsfluß und die Reihenfolge der algorithmischen Schritte für ein solches paralleles, iterativ gestaffeltes Verfahren.

Bemerkung 3.4: Die erläuterten Bezeichnungen werden nicht generell auf die hier beschriebene Art und Weise definiert. Der Begriff *schwache Kopplung* etwa wird in der mathematischen Literatur häufig für Verfahren wie die in Abschnitt 4.1.3 beschriebenen Mortar-Methoden verwendet, bei denen die Kopplung nicht lokal sondern mit Hilfe von Lagrange-Multiplikatoren im integralen und somit schwachen Sinne bewerkstelligt wird. Auf wieder eine andere Art werden die Begriffe *starke* und *schwache Kopplung* in Cebral (1996) interpretiert. Und zwar werden dort nur solche Methoden als *„strong coupling approach“* eingestuft, die das Gesamtsystem simultan, also nicht in Teilgebiete partitioniert, lösen. Alle anderen, also alle hier als partitionierte Verfahren klassifizierten Ansätze, fallen dort unter den Begriff *„loose coupling approach“*, wobei für diese dann weiter die auch hier verwendete Unterscheidung nach expliziten und impliziten Kopplungsverfahren getroffen wird.

Generelle Aussagen zu numerischen Eigenschaften

Einfach gestaffelte, partitionierte Lösungsverfahren führen in der Regel aufgrund der nicht exakt erfüllten Kontinuitätsbedingungen zu einer Reduktion der Genauigkeit und zu einer Verschlechterung der Stabilitätseigenschaften des Gesamtverfahrens im Vergleich mit den in den Teilfeldern eingesetzten Zeitintegrationsverfahren. D.h. auch wenn die Teilgebiete mit unbedingt strikt stabilen, zweiter Ordnung genauen Zeitintegrationsverfahren arbeiten, sind schwach koppelnde Lösungsverfahren für das gekoppelte Gesamtsystem in der Regel schwach instabil, und die Genauigkeit der gekoppelten Lösung ist meist reduziert, z.T. sogar nur noch von erster Ordnung. Beim Einsatz iterativer Kopplungsverfahren hingegen vererben sich die Stabilitäts- und Genauigkeitseigenschaften einer entsprechenden simultanen Berechnung auf den partitionierten Lösungsalgorithmus. Dafür erhöht sich natürlich durch die Iteration über

die Teilgebiete der numerische Aufwand, und es müssen robuste Maßnahmen zur Sicherung und effizienten Beschleunigung der Konvergenz dieser Iteration getroffen werden.

3.3 Historische Entwicklung

Nachdem nun die grundlegenden Konzepte und Strategien partitionierter Lösungsansätze erläutert wurden, soll in diesem Abschnitt deren historische Entwicklung beschrieben und die wichtigsten Publikationen zusammengestellt werden. Aufgrund der großen Vielzahl an Arbeiten zu dieser Thematik sind diese Ausführungen notwendigerweise unvollständig und auf die Entwicklung der maßgeblichen Ideen beschränkt.

Gebietszerlegungsverfahren

Die als erstes entstandene Klasse von partitionierten Lösungsansätzen sind die *Gebietszerlegungsverfahren (DD-Verfahren (D*omain *D*ecomposition*)).* Ihre Entwicklung kann bis auf den Mathematiker Hermann A. Schwarz zurückverfolgt werden, der bereits 1870 ein erstes Gebietszerlegungsverfahren vorstellte. Obwohl diese Methode ursprünglich gar nicht als numerisches Lösungsverfahren gedacht war, bauen im Grunde alle bis heute entwickelten DD-Methoden mit überlappenden Teilgebieten auf jenem Basisverfahren auf. Sie tragen daher allgemein den Namen *Schwarzsche Methoden;* auf sie wird in Kapitel 4.2 noch näher eingegangen. Unabhängig davon wurde im Jahre 1963 von Janusz S. Przemieniecki die sogenannte *Substrukturtechnik* eingeführt, um trotz der Speicher- und Rechenkapazitätsbeschränkungen damaliger Computer und Programme auch große Tragstrukturen (damals v.a. im Bereich des Flugzeugbaus) einer numerischen Berechnung mit Matrixmethoden zugänglich zu machen. Diese Technik beruht auf der Systemzerlegung in *nicht*überlappende Partitionen (Substrukturen) und fand insbesondere im Bereich der Strukturmechanik und im Zusammenhang mit der Finite Elemente Methode weitverbreitete Anwendung. In Verbindung mit iterativen Lösungsmethoden wurde dann aus dieser Idee im Laufe der letzten 20 Jahre eine zweite Klasse von Gebietszerlegungsverfahren entwickelt: die in Kapitel 4.1 beschriebenen *iterativen Schurkomplement-* oder *Substrukturmethoden*, mit ihren gemischten (z.B. Mortarmethoden, Bernardi et al. (1994)) und dualen Varianten (z.B. FETI-Methode, Farhat & Roux (1991)).

Während bis etwa 1980 nur einzelne wenige Arbeiten über DD-Methoden entstanden, erfuhren diese danach im Zuge der Entwicklung moderner Parallelrechner und immer effizienterer iterativer Lösungsverfahren einen stürmischen Aufschwung. Dies schlug sich in einer Vielzahl von Veröffentlichungen sowie in einer seit 1987 jährlich veranstalteten Reihe von internationalen DD-Konferenzen[5] nieder. Die meisten Arbeiten beschränken sich auf die Lösung linearer Gleichungssysteme. Erst in jüngster Zeit finden sich auch Publikationen, die die Anwendung von Gebietszerlegungsverfahren auf nichtlineare Problemstellungen betrachten, siehe Kapitel 4.3. Eine von Cai et al. (1994) vorgeschlagene Vorgehensweise kombiniert inexakte Newton-Verfahren mit DD-Methoden zur jeweiligen iterativen Lösung der linearisierten Systeme.

5. „Offizielle“ Internet-Homepage: http://www.ddm.org

Prevost (1997) wendet ein solches Newton-Krylov-Verfahren (von ihm als „iterative partitioned conjugate gradient procedure“ bezeichnet) am Beispiel eines relativ einfachen, nichtlinearen Konsolidationsproblems auf volumengekoppelte Probleme an. Eine alternative Vorgehensweise verwendet iterative Substrukturmethoden mit nichtlinearen Teilgebieten (Dryja & Hackbusch (1997), Quarteroni & Valli (1999)). Von Le Tallec & Mouro (1998, 2001) ist ein solcher Ansatz erstmalig auf Fluid-Struktur-Interaktionsprobleme in der hier behandelten Art und Komplexität angewandt worden (s. Abschnitt 6.2).

Da die Iterationsschemata der DD-Methoden im Grunde Block-Versionen von iterativen Gleichungslösungsverfahren sind, waren die Entwicklungen von DD- und iterativen Lösungsverfahren stets sehr eng verzahnt. Dies führte u.a. dazu, daß der weitaus überwiegende Teil der Forschungstätigkeit auf dem Gebiet der DD-Methoden im Bereich der numerischen Mathematik angesiedelt ist, und daß die oben im Zusammenhang mit iterativen Kopplungsstrategien angesprochene Problematik der Konvergenzsicherung und -beschleunigung im Rahmen der Gebietszerlegungsmethoden algorithmisch ausgereift und auch von theoretischer Seite her fundiert analysiert und dokumentiert ist.

Einfach gestaffelte Lösungsverfahren

Parallel zu dieser Schiene, aber hauptsächlich von ingenieurwissenschaftlicher und stärker anwendungsorientierter Seite aus, wurden seit Mitte der 1970er Jahre die hier als *einfach gestaffelt* bezeichneten partitionierten Methoden zur Lösung dynamischer Problemstellungen entwickelt, und zwar ursprünglich ausgehend von drei Arbeitsgruppen, die zumindest anfänglich unabhängig voneinander arbeiteten (vgl. Felippa et al. (1998)): Carlos A. Felippa und K. C. Park (Lockheed Palo Alto Research Laboratories (LPARL), später University of Colorado at Boulder zusammen mit Charbel Farhat), Ted Belytschko (Northwestern University, Illinois) sowie Thomas J. R. Hughes (California Institute of Technology (Caltech), später Stanford University, California).

Der Begriff *gestaffelte Verfahren* bzw. *staggered schemes* geht zurück auf die originäre Arbeit von Felippa, Park & DeRuntz (1977) zur numerischen Lösung des elasto-akustisch gekoppelten Problems eines durch Unterwasser-Schockwellen belasteten U-Bootes unter modularer Verwendung zweier separater Programme für Fluid und Struktur. Der Ansatz wurde dann in Felippa & Park (1980) von der reinen FSI-Anwendung auf generelle gekoppelte Problemstellungen erweitert. Später folgten von diesen Autoren eine Reihe von Übersichtsartikeln zu partitionierten Methoden allgemein (u.a. Park (1980), Park & Felippa (1980, 1983, 1984), Felippa & Geers (1988), sowie Felippa, Park & Farhat (1998)). Nach 1987 wurden die weiteren Entwicklungen aus dieser Arbeitsgruppe maßgeblich durch die Forschungen in der Arbeitsgruppe um C. Farhat auf dem Gebiet der Aeroelastik geprägt. In Farhat et al. (1995) und Piperno et al. (1995) stellten sie eine Reihe von synchronen, sequentiell gestaffelten I–I– und I–E–Verfahren vor und untersuchten diese hinsichtlich Stabilität, Genauigkeit und Parallelisierbarkeit. Ein weiter verbesserter Lösungsansatz mit annähernd exakter Massen-, Energie- und Impulserhaltung (vgl. Abschnitte 3.4.2 und 5.3) durch Einsatz eines Strukturprädiktors wurde später von Piperno (1997) vorgeschlagen. Basierend auf Untersuchungen zur geometrischen

Konservativität bei gestaffelten Lösungsverfahren für aeroelastische Systeme (Farhat et al. (1995) und Lesoinne & Farhat (1996)) propagierten diese Autoren desweiteren in Lesoinne & Farhat (1996, 1998a, b) und Farhat & Lesoinne (2000) einen asynchronen, sequentiell gestaffelten Algorithmus, mit dem sowohl Geschwindigkeiten als auch Verschiebungen auf dem Interface kontinuierlich bleiben und gleichzeitig die geometrischen Bilanzgleichungen (GCL) erfüllt werden (vgl. Abschnitte 3.4.1 und 5.4). Neueste Arbeiten von Piperno & Farhat (1997, 2000) befassen sich mit der Entwicklung eines Energiekriteriums zur Beurteilung gestaffelter Lösungsansätze für aeroelastische Probleme, das auf der Schätzung der Energie beruht, die vom Kopplungsalgorithmus am Interface künstlich erzeugt wird (s. auch Abschnitt 3.4.2). Die Thematik der Energieerhaltung am Interface bei partitionierten Lösungsverfahren wird auch in Blom (1998) bzw. Blom & Leyland (1998) anhand eines einfachen FSI-Modellproblems diskutiert, wobei das gestaffelte Verfahren mit Strukturprädiktor von Piperno mit iterativ gestaffelten sowie simultanen Lösungen verglichen wird. Ein interessanter Ansatz zur Stabilisierung des parallelen, einfach gestaffelten Verfahrens mit Hilfe von Filtertechniken, die im Bereich der dynamischen Mehrkörpersysteme entwickelt wurden, wird von Rumold (1999) bei der Simulation von Starrkörper-Fluid-Systemen eingesetzt. Allerdings ist die Wahl eines passenden Filters sehr problemabhängig, und zudem wird die Dynamik des Originalsystems durch einen Filter mehr oder weniger stark verändert (Kübler & Schiehlen (1998)), weshalb dieser Ansatz nicht allgemein anwendbar zu sein scheint.

Bemerkung 3.5: Der gestaffelte Ansatz von Felippa & Park (1980) wurde später auch auf volumengekoppelte Problemstellungen übertragen und entsprechend angepaßt bzw. stabilisiert. Hier sind insbesondere die Arbeiten von O. C. Zienkiewicz zur numerischen Lösung von Konsolidationsproblemen zu nennen (Zienkiewicz (1984), Zienkiewicz et al. (1988), Huang & Zienkiewicz (1998)). Darauf aufbauend wurden von Turska & Schrefler (1993) bzw. Turska et al. (1994) iterativ gestaffelte Lösungsverfahren entwickelt und analysiert, und zwar zunächst ebenfalls für Konsolidationsprobleme, später auch für nichtlineare, thermo-hydromechanisch gekoppelte Probleme (Schrefler et al. (1997)). Weitere wichtige Arbeiten im Zusammenhang mit der sequentiell gestaffelten Lösung volumengekoppelter Probleme sind: Armero & Simo (1992) zur Thermomechanik, Simo & Miehe (1992) zur Thermoplastizität, sowie Lübbing (1997) allgemein zur Stabilität gestaffelter Finite-Elemente-Berechnungen volumengekoppelter Probleme.

Eine zweite Gruppe partitionierter Ansätze für die Strukturdynamik wurde im wesentlichen von den Arbeitsgruppen um T. Belytschko (und in der Folge später P. Smolinski) sowie T. J. R. Hughes vorangetrieben. Sie gingen insbesondere die Problematik an, daß bei Verwendung expliziter Zeitintegrationsverfahren gegebenenfalls vorhandene lokale Bereiche mit sehr feinen Netzdiskretisierungen oder extrem hohen Steifigkeiten aufgrund der bedingten Stabilität extrem kleine Zeitschrittgrößen erfordern, welche in einem simultanen Lösungsverfahren dann unsinnigerweise der Berechnung des gesamten Systems aufgezwungen würden. Um diesem Zwang zu entgehen wurden von Belytschko & Mullen (1978a) die *expliziten Multi-timestep-Verfahren* (E^m–E) vorgeschlagen. Später wurden diese ersten Ansätze dann seitens der Arbeitsgruppe um T. Belytschko in einer Vielzahl von teilweise sehr ähnlichen Veröffentlichungen

immer wieder modifiziert und hinsichtlich Funktionalität, Genauigkeit und v.a. Stabilität verbessert bzw. analysiert. Die Hauptproblematik dieser auf einer knotenweisen Partitionierung basierenden Verfahren besteht in der während der Subcycling-Zeitschritte $\Delta t/m$ jeweils vorzugebenden Dirichlet-Kopplungsrandbedingung für die mit dem kleineren Zeitschritt integrierte Partition Ω_1. Da diese Zwischenwerte in der mit dem globalen Δt integrierten Partition Ω_2 nicht berechnet werden, muß hier für die Ω_2 an Ω_1 übergebene Bewegungsvariable auf dem Kopplungsrand Γ_1 eine Annahme getroffen werden (die übrigen zwei Bewegungsvariablen werden daraus mit Hilfe der Zeitintegrationsansätze bestimmt). Je nach Wahl dieser Annahme ergeben sich unterschiedliche algorithmische Varianten mit unterschiedlichen numerischen Eigenschaften. Die wichtigsten Arbeiten aus der Arbeitsgruppe Belytschko/Smolinski werden im folgenden stichwortartig angeführt. Belytschko & Mullen (1978a): Annahme einer über alle Subcyclingschritte konstanten Geschwindigkeit $\dot{\boldsymbol{d}}^n_{\Gamma_1}$ und $m \in \mathbb{N}$. Neal & Belytschko (1989): Erweiterung auf beliebige Zeitschrittgrößenverhältnisse ($m \in \mathbb{R}^+$). Smolinski (1992a) und Smolinski & Sleith (1992): Annahme einer betragsmäßig konstanten Beschleunigung mit von Schritt zu Schritt wechselnden Vorzeichen $\pm\ddot{\boldsymbol{d}}^n_{\Gamma_1}$ (führt auf näherungsweise konstante Geschwindigkeit $\dot{\boldsymbol{d}}^n_{\Gamma_1}$). Smolinski (1992b): Spektrale Stabilitätsanalyse dieses Verfahrens (lineare Systeme), und Smolinski et al. (1996): Energetische Stabilitätsanalyse (nichtlineare Strukturdynamik). Belytschko & Lu (1992, 1993): Annahme einer konstanten Beschleunigung $\ddot{\boldsymbol{d}}^n_{\Gamma_1}$ (höhere Genauigkeit als konstante Geschwindigkeit) und $m \in \mathbb{R}^+$. Wu & Smolinski (2000): Vermeidung der künstlich oszillierenden Beschleunigungen im Algorithmus von Smolinski (1992a) durch Verwendung eines alternativen Zeitintegrationsverfahrens.

Allerdings wird in einer bemerkenswerten Arbeit von Gupta & Ramirez (1996) gezeigt, daß in Langzeitberechnungen keine der bis dahin von Belytschko et al. vorgestellten expliziten Multi-timestep-Methoden auf Dauer stabil ist, sondern der Fehler in der numerischen Lösung generell ab einem bestimmten Zeitpunkt – je nach Algorithmus früher oder später, und mehr oder weniger schlagartig – exponentiell anwächst, auch wenn die in den einzelnen Partitionen verwendete Zeitschrittgröße kleiner als der kritische Zeitschritt des eingesetzten expliziten Zeitintegrationsverfahrens ist. Diese schwache Instabilität wurde in den numerischen Beispielrechnungen der ursprünglichen Arbeiten nur aufgrund von zu kurzen Berechnungsintervallen in den numerischen Beispielen nicht sichtbar. Daher schlugen Gupta & Ramirez eine Stabilisierung durch den Einsatz von expliziten Zeitintegrationsverfahren mit numerischer Dissipation vor, wodurch sie tatsächlich strikte Stabilität des resultierenden E^m–E–Verfahrens erreichen konnten.

Aussagen über Stabilitätsprobleme der genannten expliziten Multi-timestep-Methoden – mit Ausnahme des Verfahrens nach Smolinski (1992a) bzw. Smolinski & Sleith (1992), welches in der Arbeit von Gupta & Ramirez nicht untersucht wurde – finden sich desweiteren auch in Arbeiten von Daniel (u.a. unter Hinweis auf „private communications“ mit T. Belytschko in Daniel (1997a)). Dieser führte Stabilitätsanalysen durch unter Verwendung eines schwächeren Stabilitätsbegriffs, der *statistischen Stabilität*, und zwar in Daniel (1997a) für Algorithmen mit konstanter Beschleunigung (Ansatz nach Belytschko & Lu (1992, 1993), sowie für eine Modifikation, in der zur weiteren Genauigkeitssteigerung eine zwischen Anfangs- und End-

punkt des globalen Zeitschritts gemittelte Beschleunigung $\frac{1}{2}(\ddot{\boldsymbol{d}}_{\Gamma_1}^{n+1} + \ddot{\boldsymbol{d}}_{\Gamma_1}^{n+1})$ eingesetzt wird), und in Daniel (1998a) für Verfahren mit konstanter Geschwindigkeit (Ansätze nach Belytschko et al. und Smolinski et al. (s.o.) sowie eine Modifikation ohne künstlich oszillierende Beschleunigungen). In den letzten Jahren entstanden weiterhin auch *implizite Multi-timestep-Methoden* (I^m–I): Daniel (1997b, 1998b) und Smolinski & Wu (1998), jeweils mit knotenweiser Partitionierung. In allen drei genannten Veröffentlichungen werden jedoch wiederum Probleme mit der Genauigkeit und/oder der Stabilität der gestaffelten Verfahren eingeräumt.

Eine alternative Strategie zur Lösung der o.g. Problematik, daß in einem simultanen Lösungsverfahren mit expliziter Zeitintegration lokale, extrem steife bzw. fein diskretisierte Bereiche der Berechnung eines gesamten Systems unsinnig kleine Zeitschritte aufzwingen, sind die sogenannten „*mixed time integration methods*“, d.h. die Verwendung unterschiedlicher Zeitintegrationsverfahren in den einzelnen Partitionen (I–E). Sie wurden zeitgleich von Hughes & Liu (1978a, b) basierend auf einer elementweisen Partitionierung, sowie von Belytschko & Mullen (1978b, c) basierend auf einer knotenweisen Partitionierung vorgeschlagen. Zielanwendungen waren neben der Strukturdynamik auch FSI-Probleme. Der elementweise partitionierte Algorithmus von Hughes & Liu wurde dann im Laufe der folgenden 10 Jahre mehrfach erweitert. In Hughes, Pister & Taylor (1979) erfolgte eine Erweiterung für die nichtlineare Dynamik (Stabilitätsanalyse hierzu in Hughes & Stephenson (1981)), in Liu & Belytschko (1982) wurde Subcycling integriert (I–E^m), und Miranda, Ferencz & Hughes (1989) stellten eine I–E–Variante mit verbesserten Stabilitätseigenschaften vor, basierend auf dem numerisch dissipativen Hilber-α Zeitintegrationsverfahren. Diese frühen Methoden erlaubten allerdings keine vollständig unabhängige, modulare Behandlung der Teilfelder, was weitere Forschungen in dieser Richtung im Rahmen der vorliegenden Arbeit motivierte: Ein echt modulares, implizit-explizites, sequentiell gestaffeltes Subcycling-Verfahren mit elementweiser Partitionierung für rein strukturdynamische Probleme wird in Abschnitt 5.2 vorgestellt. Schließlich wurde erst kürzlich von Gravouil & Combescure (2001) eine explizit-implizite Multi-timestep-Methode mit elementweiser Partitionierung vorgestellt, die entgegen allen bisher bekannten einfach gestaffelten Verfahren eine duale Formulierung mit Lagrange-Multiplikatoren (vgl. Abschnitt 4.1.3, aber ohne Iterationen) verwendet, welche die kinematische Kontinuität in den Geschwindigkeiten am Interface ermöglicht und aufgrund dessen in allen dokumentierten, linearen und nichtlinearen Berechnungen energetisch stabil ist. Aufgrund der Neuheit dieses Ansatzes konnten die Stabilitätseigenschaften allerdings im Rahmen der vorliegenden Arbeit noch nicht nachvollzogen und verifiziert werden.

Iterativ gestaffelte Lösungsverfahren

Wie bereits angesprochen, kann die Hauptproblematik einfach gestaffelter Lösungsverfahren, nämlich die z.T. gravierende Verschlechterung der Stabilitäts- und Genauigkeitseigenschaften, prinzipiell durch Iterationen über die Teilfelder gelöst werden. In der Arbeitsgruppe um Felippa, Park und Farhat wird ein solches Vorgehen allerdings im Vergleich zu einer Zeitschrittverkleinerung oder anderen stabilisierenden Techniken generell als numerisch zu aufwendig eingestuft (Felippa & Park (1983), Felippa et al. (1998), Piperno & Farhat (2000)), da die von ihnen betrachteten, einfachen iterativ gestaffelten Verfahren im allgemeinen sehr schlechte

Konvergenzraten und zudem häufig Konvergenzprobleme aufweisen. Andere Autoren hingegen nehmen den höheren Aufwand in Kauf, um ohne aufwendige oder die Physik des Systems verändernde Stabilisierungsmethoden stabile und somit zuverlässige Berechnungsergebnisse zu erhalten. So wird von Kalro & Tezduyar (2000) bzw. Benney, Stein & Tezduyar (2000) jetzt zur Simulation umströmter Fallschirme auf Supercomputern ein einfaches iterativ gestaffeltes Verfahren (vgl. Kapitel 6.2, Grundverfahren mit $\omega = 1$) eingesetzt, da der früher verwendete sequentiell gestaffelte Ansatz nur durch künstliche, starke, viskose Dämpfung oder durch künstliches zu Nullsetzen der Geschwindigkeit der Kopplungsknoten – beides eindeutig systemverändernde Maßnahmen – stabilisiert werden konnte (Stein et al. (1998, 2000)). Auch eine Arbeitsgruppe um G. P. Guruswamy verwendete ursprünglich zur Berechnung umströmter elastischer Tragflügel (Guruswamy & Yang (1981)) das sequentiell gestaffelte Grundverfahren, und propagiert mittlerweile aufgrund der höheren Genauigkeit denselben einfachen iterativ gestaffelten Ansatz (Bhardwaj et al. (1997); ebenso Strganac & Mook (1990)). Schulte (1998, S. 123f) nennt desweiteren noch eine Reihe von entsprechenden Literaturstellen aus den Jahren 1972 bis 1995 im Bereich gekoppelter, maschinenbautechnischer Anwendungen (Elektromagnetik und -statik, elastohydromechanische Schmiertheorie, FSI, usw.), wobei häufig von Konvergenzproblemen und mangelnder Robustheit berichtet wird. Diese Schwierigkeiten sind auf die eingesetzten, für diese Art von Problemstellungen zu simplen Iterationsverfahren zurückführbar (iterativ gestaffeltes Grundverfahren basierend auf der Richardson-Iteration mit intuitiv oder experimentell bestimmten Relaxationsparametern, vgl. Kapitel 6.2 und Anhang A3.2). Riemslagh et al. (2000), die für Blutströmungen in Arterien die transiente Interaktion von inkompressiblen Strömungen mit flexiblen Strukturen ebenfalls mit dem unrelaxierten, iterativ gestaffelten Grundverfahren simulieren, begegnen den Konvergenzproblemen auf eine alternative Art und Weise, nämlich indem sie die inkompressible Kontinuitätsgleichung in der Fluidformulierung um einen künstlichen Kompressibilitätsterm erweitern. Allerdings verändert diese Idee wiederum die Physik des modellierten Systems, so daß die numerischen Ergebnisse nur mit Vorsicht zu interpretieren sind.

Stabilität, Zuverlässigkeit und Genauigkeit des partitionierten Berechnungsansatzes sind insbesondere auch in kommerziellen Programmen *die* Motivation für den Einsatz iterativ gestaffelter Lösungsverfahren. Ein Beispiel hierfür ist das FEM-Programmpaket ADINA, welches für FSI-Simulationen einen einfachen iterativ gestaffelten Ansatz verwendet (Bathe et al. (1995, 1997, 1999)), obwohl dieser hohe Iterationszahlen erfordern und somit mit großem numerischem Aufwand verbunden sein kann[6].

6. Aufgrund der schlechten Konvergenzeigenschaften des in ADINA verwendeten, einfachen iterativ gestaffelten Ansatzes wird in der erst letztlich erschienenen Publikation von Rugonyi & Bathe (2000) ein simultaner Lösungsansatz des gekoppelten FSI-Systems propagiert, trotz der einleitend angeführten Nachteile eines solchen Vorgehens. Dieser wurde mittlerweile ebenfalls in ADINA implementiert und kann alternativ zur iterativ gestaffelten Lösung verwendet werden (Rugonyi (2001)). Dies unterstreicht nicht zuletzt die große Bedeutung der Entwicklung und Verbreitung von effizienteren iterativ gestaffelten Verfahren, wie sie etwa in der vorliegenden Forschungsarbeit vorgestellt werden.

Im Laufe der letzten Jahre wurden jedoch schließlich auch deutlich effizientere und robustere iterativ gestaffelte Lösungsansätze entwickelt. Die notwendige Voraussetzung hierfür war, daß die Grundidee der iterativ gestaffelten Methoden, in jedem Zeitschritt die Kontinuität in den Kopplungsgrößen durch Subiterationen über die Teilfelder sicherzustellen, zunächst im Hinblick auf die zugrundeliegenden iterativen Lösungsverfahren analysiert wurden, und so auch die Analogie zu Gebietszerlegungsmethoden, insbesondere zu iterativen Substrukturmethoden, erkannt wurde. Dadurch konnten dann die v.a. aus der mathematischen Forschung stammenden Kenntnisse über Konvergenzeigenschaften und deren Verbesserung ausgenutzt und die bis dahin bereits hochentwickelten iterativen Lösungsalgorithmen und Gebietszerlegungsverfahren (s.o.) konsequent auf die iterativ gestaffelte Lösung gekoppelter Probleme übertragen werden.

So werden in der Arbeit von Cervera et al. (1994) die partitionierte Lösung von FSI- sowie thermomechanisch gekoppelten Strömungen auf (noch relativ einfache) Block-Jacobi- und Block-Gauß-Seidel-Iterationsverfahren zurückgeführt und deren Konvergenzeigenschaften diskutiert und numerisch verifiziert. Dabei stießen die Autoren jedoch, nach Angaben von Codina (2000), immer dann auf Konvergenzprobleme in der Iteration über die Teilfelder, wenn auf dasselbe System angewandte einfach gestaffelte Lösungsverfahren zu Stabilitätsproblemen führten, d.h. das iterative Verfahren war noch nicht ausreichend robust. Etwas später entwickelt und diskutiert Schulte (1998) iterative Multilevel-Substrukturverfahren mit hierarchischen Basen für die Simulation von allgemeinen gekoppelten Systemen, wobei die gezeigten numerischen Beispiele jedoch eher Modellcharakter haben. Die Arbeit geht dabei ausführlich auf theoretische, numerische und algorithmische Aspekte sowie auf spezifische Eigenarten verschiedener Anwendungsgebiete ein. Für komplexere Mikro-Elektromechanische Systeme (Bungartz & Schulte (1995)) und Fluid-Struktur-Interaktionsprobleme (Bungartz et al. (1998)) werden von derselben Arbeitsgruppe ebenfalls Block-Jacobi- und Block-Gauß-Seidel- sowie Block-SOR-Iterationsverfahren mit experimentell bestimmten Relaxationsparametern eingesetzt. Von Rifai et al. (1999) wird für die Lösung von FSI-Problemen ferner eine gemischte iterative Substrukturformulierung *(„Augmented Lagrangian Approach“*, vgl. Abschnitt 4.1.3) mit einem Uzawa-Iterationsverfahren vorgeschlagen.

Eine weitere Gruppe von iterativ gestaffelten Ansätzen verwendet für die Iteration über die Teilgebiete Newton-artige Iterationsverfahren, wie etwa Morton et al. (1998) für die Aeroelastik, basierend auf einer Methode von Rizzetta & Visbal (1993). Ein ähnliches Block-Newton-Verfahren mit näherungsweiser Berechnung der Ableitungen mit Hilfe von Finiten Differenzen (Methodik nach Artlich & Mackens (1995)) wird von Matthies & Steindorf (2000) ebenfalls auf aeroelastische Problemstellungen angewandt. Weitere solche Lösungsansätze finden sich auch im Maschinenbau, z.B. in Kübler & Schiehlen (1998): Verwendung von Quasi-Newton-Verfahren für die iterativ gestaffelte Simulation von gekoppelten dynamischen Mehrkörpersystemen, oder in Aluru & White (1997): Multilevel-Newton-Methoden für Mikro-Elektromechanische Systeme (MEMS). In dem oben bereits angesprochenen Artikel von Bhardwaj et al. (1997) werden auf dem Newton-Verfahren basierende iterative gestaffelte Ansätze allerdings als numerisch zu aufwendig eingestuft.

In den schon mehrfach zitierten Arbeiten von Le Tallec & Mouro (1998, 2001, s. Abschnitt 6.2) wird schließlich das von Quarteroni (1990) vorgeschlagene iterative Dirichlet-Neumann-Substrukturverfahren zur Lösung von Problemen, in denen unterschiedliche partielle Differentialgleichungen über ein Interface gekoppelt sind, auf Fluid-Struktur-Interaktionsprobleme in der hier behandelten Art und Komplexität angewandt und hinsichtlich Konvergenz, Stabilität, Genauigkeit und Energieerhaltung untersucht. Es beruht auf einer stationären Richardson-Iteration, wobei die für einen Zeitschritt jeweils konstant gehaltenen Relaxationsparameter auf eine nicht näher spezifizierte Art und Weise aus dem Iterationsverhalten im vorausgegangenen Zeitschritt extrapoliert werden. Weiterhin wird von Le Tallec & Mouro die Verwendung des Gradientenverfahrens zur Bestimmung optimaler, iterationsabhängiger Relaxationsparameter angeregt, ohne daß dies jedoch weiter ausgeführt wird. Hiervon inspiriert wurde dieser Ansatz letztendlich zur Basis für die in Kapitel 6 dieser Arbeit vorgestellten, eigenen Weiterentwicklungen auf dem Gebiet der iterativ gestaffelten Lösungsverfahren.

3.4 Anforderungen an partitionierte Lösungsverfahren und Beurteilungsansätze

Im letzten Abschnitt dieses Kapitels werden letztendlich noch spezifische Anforderungen an partitionierte Lösungsverfahren diskutiert, mit deren Hilfe im weiteren Verlauf der Arbeit die verschiedenen Ansätze beurteilt werden. Es gibt eine Reihe von qualitativen Kriterien, die partitionierte Lösungsverfahren möglichst erfüllen sollten. Dazu gehören insbesondere:

- *Stabilität* der numerischen Lösung als wichtigste Anforderung, und zwar für beliebige – auch nichtlineare – Problemstellungen,
- *Genauigkeit* der numerischen Lösung,
- möglichst *geringer Aufwand*,
- *Robustheit* im Sinne von anwenderunabhängigen Stabilitäts- und Konvergenzeigenschaften,
- *Modularität*,
- gegebenenfalls *Parallelisierbarkeit*.

Während die letzteren Aspekte keiner weiteren Klärung bedürfen, sondern direkt im Kontext mit der Diskussion der einzelnen Verfahren in den folgenden Kapiteln erörtert werden können, sollen hier im Vorfeld einige Faktoren detailliert erläutert werden, die – neben den Zeitintegrationsverfahren der Teilsysteme – die Stabilität und die Genauigkeit der numerischen Lösung maßgeblich beeinflussen. Sie betreffen im Kern die Erfüllung der im vorigen Abschnitt bereits angesprochenen *Kopplungsbedingungen*, nämlich die kinematische und die dynamische Kontinuität zwischen den Teilgebieten.

Diese Kontinuitätsforderungen an partitionierte Lösungsverfahren werden in der Literatur meist postulierend aufgestellt und gefordert. Es lassen sich jedoch nur in ganz wenigen Fällen erklärende Aussagen finden, woher diese Forderungen tatsächlich stammen, d.h. mit welchen mechanischen Grundprinzipien sie zusammenhängen, und welche der Kopplungsgleichungen

unter welchen Voraussetzungen letztendlich erfüllt werden können. Auch die Interpretation der entstehenden numerischen Fehler ist häufig sehr vage.

Vor diesem Hintergrund werden die Kopplungsbedingungen im folgenden eingehend untersucht und auf die grundlegenden kinetischen Erhaltungsgleichungen für Masse, Impuls und Energie zurückgeführt, da letztendlich eine Verletzung dieser Erhaltungsgleichungen für die in numerischen Berechnungen beobachtbaren Stabilitäts- und Genauigkeitsprobleme vieler partitionierter Lösungsverfahren ursächlich ist.

3.4.1 Kontinuität der kinematischen und dynamischen Größen

Die Kontinuität der kinematischen und der dynamischen Größen über den Kopplungsrand hinweg (Gleichungen (3.5) und (3.6)) wird bei der partitionierten Lösung im wesentlichen von drei Faktoren beeinflußt. Den maßgeblichsten Einfluß hat der Kopplungsalgorithmus selbst. Zwei weitere Aspekte betreffen die in den Teilfeldern eingesetzten Zeitintegrationsansätze, sowie die geometrischen Bilanzgleichungen im Fall von Fluid-Struktur-Interaktionen.

Einfluß des Kopplungsalgorithmus

Der Kopplungsalgorithmus eines partitionierten Lösungsverfahrens organisiert die Abfolge von der Übergabe der Kopplungsrandbedingungen zwischen den Teilfeldern und der Zeitintegration in den Teilfeldern. Diese Thematik wird in den Kapiteln 5 und 6 im Rahmen der dort beschriebenen Kopplungsverfahren noch im Einzelnen diskutiert. Generell soll hier bereits festgestellt werden, daß einfach gestaffelte Verfahren, wie in Abschnitt 3.2.2 bereits angesprochen, stets (mindestens) eine der Kopplungsrandbedingungen am *Beginn* eines Zeitschritts t^n von einem Teilfeld Ω_2 an das benachbarte Ω_1 übertragen. In dem anschließend von t^n nach t^{n+1} integrierten Teilfeld Ω_1 muß die Zeitintegration also ohne Kenntnis der entsprechenden Kopplungsgröße am *Ende* des Zeitschritts erfolgen, von der die Lösung in Ω_1 z.Zt. t^{n+1} jedoch eigentlich implizit abhängt. Also wird diese Kopplungsgröße dazu auf eine verfahrensspezifische Art und Weise extrapoliert oder geschätzt, und folglich kann sie niemals exakt dem Wert entsprechen, der danach dann im Teilfeld Ω_2 durch Lösung der dortigen Bewegungsgleichung tatsächlich berechnet wird. D.h. einfach gestaffelte Verfahren verletzen prinzipiell mindestens eine der Kopplungsbedingungen. Wie groß der dadurch erzeugte Fehler ist, und wie stark die Stabilitätseigenschaften des partitionierten Verfahrens dadurch beeinträchtigt werden, ist schließlich abhängig von der jeweils spezifischen Formulierung des Kopplungsalgorithmusses. Die iterativ gestaffelten, impliziten Kopplungsalgorithmen hingegen erreichen die Erfüllung der Kontinuitätsbedingungen auf iterativem Wege durch sukzessives Wiedereinsetzen der neu berechneten Kopplungsrandbedingung und Wiederholen der Zeitintegration in den Teilfeldern für den selben Zeitschritt bis zur Konvergenz.

In diesem Zusammenhang ist auch die von Blom (1998) im Rahmen seiner Untersuchungen zur Fluid-Struktur-Interaktion als „*Interaction Consistency Law*“ *(ICL)* bezeichnete Forderung an partitionierte Lösungsverfahren zu nennen, also die Forderung nach Konsistenz in den Zeitabhängigkeiten zwischen den Kopplungsrandbedingungen und den diskreten Zeitintegrations-

verfahren in den beiden Teilfeldern[7]. Insofern muß die Frage, ob ein Kopplungsalgorithmus die Kontinuitätsbedingungen erfüllt, und wie groß der resultierende Fehler ist, stets in Verbindung mit den in den Teilgebieten eingesetzten Zeitintegrationsverfahren analysiert werden. So stehen also bei synchronen, einfach gestaffelten Kopplungsverfahren in mindestens einem Teilgebiet nur die Kopplungsinformation zu Beginn des Zeitschritts t^n zur Verfügung, bei asynchronen, einfach gestaffelten Verfahren zu einem bestimmten Zeitpunkt innerhalb des Zeitschrittes, und nur bei impliziten Kopplungsverfahren auch am Ende des Zeitschrittes t^{n+1}. Andererseits benötigen diskrete Zeitintegrationsverfahren diese Randbedingungen auch zu je nach Verfahren unterschiedlichen Zeitpunkten. Dies ist bei expliziten Zeitintegrationsalgorithmen der Zeitschrittbeginn t^n und bei impliziten Verfahren in der Regel das Zeitschrittende t^{n+1} oder auch ein geshifteter Zeitpunkt $t^{n+\alpha}$. Passen diese Zeitpunkte nicht zueinander, wird das ICL und damit stets auch die entsprechende kinematische oder dynamische Kontinuitätsbedingung verletzt. Der Umkehrschluß ist jedoch nicht unbedingt gültig, es ist durchaus möglich, daß das ICL erfüllt ist, die Kontinuität hingegen nicht; ein Beispiel hierfür ist die in Abschnitt 5.2 beschriebene explizit–implizite Formulierung des sequentiell gestaffelten Grundverfahrens. Insofern sind die Kontinuitätsforderungen die stärkeren und damit die eigentlich wesentlichen Bedingungen.

Einfluß der Zeitintegrationsansätze

Wie bereits erklärt, bedeutet die *kinematische Kontinuitätsbedingung* die Forderung, daß zu jeder Zeit die kinematischen Größen – Verschiebungen, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen – beider Partitionen am Interface gleich groß sind (Gleichungen (3.5)).

In einer partitionierten, numerischen Lösung ist es jedoch prinzipiell nur in dem Ausnahmefall identischer Zeitintegrationsverfahren und Zeitschrittgrößen in beiden Partitionen möglich, daß alle drei kinematischen Größen *gleichzeitig* kontinuierlich sein können. Der Grund hierfür ist, daß bei einem Lösungsansatz mit sequentieller Diskretisierung in Raum und Zeit nur *eine* der kinematischen Variablen als *Primärvariable* – in der Strukturdynamik meist die Verschiebungen, in der Strömungsdynamik die Geschwindigkeiten – direkt berechnet wird, während die anderen mit Hilfe der *Zeitintegrationsansätze* daraus abgeleitet werden. Daher wird in der Regel nur die Kontinuität von *einer* kinematischen Variablen angestrebt; welche man dafür wählt ist aufgrund ihrer eindeutigen Abhängigkeit voneinander nicht weiter relevant.

Durch die partitionierte Simulation entsteht also notwendigerweise ein Fehler. Da es sich bei diesem Fehler jedoch im Prinzip um einen Diskretisierungsfehler handelt, dessen Größenordnung mit demjenigen der eingesetzten Zeitintegrationsverfahren vergleichbar ist, ist sein Einfluß auf die Stabilitäts- und Genauigkeitseigenschaften partitionierter Lösungsverfahren vernachlässigbar. Dies zeigen auch die in den Kapiteln 6 und 7 dokumentierten numerischen Untersuchungen, in denen die Kontinuität für wenigstens *eine* der Variablen mit Hilfe iterativ

7. „The time dependence of the boundary conditions for fluid and structure solvers has to be consistent with the discrete time integration of the structure and fluid solvers, respectively“ (aus Blom (1998)).

gestaffelter, stark koppelnder Lösungsverfahren erzwungen wird, und in denen im Vergleich mit simultanen Referenzlösungen kein Genauigkeits- oder Stabilitätsverlust beobachtbar ist.

Desweiteren kann mit entsprechend formulierten, partitionierten Verfahren bei unterschiedlichen Zeitintegrationsansätzen oder Zeitschrittgrößen in den Teilgebieten auch nur die Kontinuität an den diskreten Zeitintervall*grenzen* t^n, t^{n+1}, ... gewährleistet werden, z.B.

$$\boldsymbol{d}_{\Gamma}^{\Omega_1,\,n+1} = \boldsymbol{d}_{\Gamma}^{\Omega_2,\,n+1} \tag{3.7}$$

aber *innerhalb* der Zeitintervalle gilt dies dann nicht exakt. Dieselbe Argumentation gilt auch bezüglich der dynamischen Kontinuität. Auch hier kann algorithmisch nur die Kontinuität an den diskreten Zeitintervall*grenzen* t^n, t^{n+1}, ... gewährleistet werden, z.B.

$$\boldsymbol{f}_{\Gamma}^{\Omega_1,\,n+1} = -\,\boldsymbol{f}_{\Gamma}^{\Omega_2,\,n+1} \tag{3.8}$$

aber im Falle unterschiedlicher Zeitintegrationsansätze oder Zeitschrittgrößen nicht *innerhalb* der Zeitintervalle.

Einfluß der geometrischen Bilanzgleichungen (GCL)

Im Fall von Mehrfeldproblemen, hier insbesondere Fluid-Struktur-Interaktionsprobleme, ergibt sich eine zusätzliche Problematik im Zusammenhang mit der *Erfüllung der diskreten geometrischen Bilanzgleichungen* (Abschnitt 2.2.2). Im hier betrachteten Fall impliziter Zeitintegrationsverfahren in beiden Feldern führt die Forderung nach (diskreter) Kontinuität in den Verschiebungen zunächst zwangsweise zu einer Kopplung der Fluidnetz- und der Strukturverschiebung am Ende des Zeitschritts.

$$\boldsymbol{r}_{\Gamma}^{n+1} = \boldsymbol{d}_{\Gamma}^{n+1} \tag{3.9}$$

Die Kontinuität der restlichen beiden kinematischen Größen Geschwindigkeit und Beschleunigung müßte dagegen eigentlich zu einer direkten Kopplung zwischen Struktur und Fluid führen. Im Fall von viskosen Strömungen gilt die Annahme des Haftens der Fluid-Partikel an der Struktur. Damit ergäben sich als Kopplungsbedingungen zu jedem Zeitpunkt:

$$\boldsymbol{u}_{\Gamma}^{n+1} = \dot{\boldsymbol{d}}_{\Gamma}^{n+1} \quad \text{und} \quad \dot{\boldsymbol{u}}_{\Gamma}^{n+1} = \ddot{\boldsymbol{d}}_{\Gamma}^{n+1} \tag{3.10}$$

(Im Fall von inviskosen Strömungen geht man dabei auf ein Gleiten der Fluid-Partikel an der Struktur über, weshalb dann nur noch die Normalkomponenten dieser Größen

$$\boldsymbol{u}_{\Gamma}^{n+1} \cdot \boldsymbol{n}^{n+1} = \dot{\boldsymbol{d}}_{\Gamma}^{n+1} \cdot \boldsymbol{n}^{n+1} \quad \text{und} \quad \dot{\boldsymbol{u}}_{\Gamma}^{n+1} \cdot \boldsymbol{n}^{n+1} = \ddot{\boldsymbol{d}}_{\Gamma}^{n+1} \cdot \boldsymbol{n}^{n+1} \tag{3.11}$$

zu koppeln sind, mit dem zum Fluid hin gerichteten Normalenvektor auf dem Strukturrand $\boldsymbol{n}^{n+1} := \boldsymbol{n}_S^{n+1}$; im folgenden wird nur noch der viskose Fall dargestellt). Allerdings muß für viskose Strömungen in ALE-Formulierung auf bewegten Netzen gleichzeitig als Randbedingung auf dem Interface gelten:

$$\boldsymbol{u}_{\Gamma}^{n} = \boldsymbol{u}_{\Gamma}^{n+1} = \boldsymbol{u}_{\Gamma}^{G,\,n\to n+1} \quad \text{und} \quad \dot{\boldsymbol{u}}_{\Gamma}^{n\to n+1} = \dot{\boldsymbol{u}}_{\Gamma}^{G,\,n\to n+1} = \boldsymbol{0} \tag{3.12}$$

mit der im Zeitschritt konstanten ALE-Netzgeschwindigkeit $\boldsymbol{u}^G$. Diese muß nun zur Erfüllung der diskreten GCL gemäß Gl. (2.72) aus den Netzpositionen bestimmt und als im Zeitschritt $t^n \to t^{n+1}$ konstant betrachtet werden. Das führt auf die folgende Kopplungsrandbedingung:

$$\boldsymbol{u}_\Gamma^{n\to n+1} = \boldsymbol{u}_\Gamma^{G,\,n\to n+1} = \frac{\boldsymbol{r}_\Gamma^{n+1} - \boldsymbol{r}_\Gamma^{n}}{\Delta t} = \frac{\boldsymbol{d}_\Gamma^{n+1} - \boldsymbol{d}_\Gamma^{n}}{\Delta t} \qquad \left(\text{i. d. R.} \neq \dot{\boldsymbol{d}}_\Gamma^{n+\frac{1}{2}}\ \mathbf{!} \right) \tag{3.13}$$

Hinsichtlich der Kontinuitätsbedingungen ist daraus nun erkennbar, daß bei Erfüllung der GCL zwar die Kontinuität der Verschiebungen am Interface erreicht werden kann, die gleichzeitige Kontinuität der Geschwindigkeiten aber nur in einem ganz bestimmten Fall gewährleistet werden kann: Und zwar wenn in der Struktur die Mittelpunktsregel zur Zeitintegration verwendet wird. Durch Kombination des Zeitintegrationsansatzes Gl. (2.31) mit der Shift-Gleichung (2.42), jeweils mit den für die Mittelpunktsregel geltenden Parameterwerten $\beta = 1/4$, $\gamma = 1/2$ und $\alpha_f = 1/2$ ergibt sich dann nämlich

$$\dot{\boldsymbol{d}}_\Gamma^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Delta t}\left(\boldsymbol{d}_\Gamma^{n+1} - \boldsymbol{d}_\Gamma^{n}\right) \qquad \left(\equiv \boldsymbol{u}_\Gamma^{n\to n+1}\right) \tag{3.14}$$

in Übereinstimmung mit Gleichung (3.13).

In Verbindung mit sequentiell gestaffelten Lösungsansätzen ist diese Idee in Farhat et al. (1995) in einer synchronen, explizit–impliziten Formulierung, und später in Lesoinne & Farhat (1996, 1998a, b) sowie Farhat & Lesoinne (2000) wiederholt in einer asynchronen, implizit–impliziten Formulierung untersucht worden. Die Folge einer Verletzung der Geschwindigkeitskontinuität durch Verwendung anderer Zeitintegrationsverfahren ist nach Aussage dieser Autoren eine Störung des Energieaustauschs zwischen Fluid und Struktur, ohne daß dies jedoch genauer hergeleitet, erläutert oder numerisch verifiziert wird. Es finden sich auch keine Aussagen über Auswirkungen auf die Stabilitätseigenschaften des gestaffelten Verfahrens. Desweiteren ist die Kontinuität in den Beschleunigungen bei Erfüllung der GCL ohnehin generell nicht möglich. Im Fluid sind diese aufgrund der im Zeitschritt jeweils konstanten Geschwindigkeit am Interface während des Zeitschritts gleich Null (Gl. (3.12)), und an den diskreten Zeitschrittgrenzen gar nicht definiert. In der Struktur dagegen ist die Beschleunigung auch am Interface im allgemeinen ungleich Null, also gilt: $\dot{\boldsymbol{u}}_I(t) \neq \ddot{\boldsymbol{d}}_I(t)$. Diese Fragestellung wird in den genannten Arbeiten überhaupt nicht angesprochen.

Es kann jedoch festgestellt werden, daß die geschilderte Problematik mit der aus unterschiedlichen Zeitintegrationsansätzen resultierenden Problematik vergleichbar ist: In beiden Fällen ist bei Verwendung unangepaßter Zeitintegrationsverfahren die gleichzeitige Kontinuität von allen drei kinematischen Größen unmöglich. Der resultierende Fehler ist dabei im Prinzip ein Diskretisierungsfehler, dessen Größenordnung demjenigen der eingesetzten Zeitintegrationsverfahren entspricht. Somit gilt auch hier, daß der Einfluß einer Verletzung der Geschwindigkeits- und/oder Beschleunigungskontinuität auf die Stabilitäts- und Genauigkeitseigenschaften partitionierter Lösungsverfahren gemäß obiger Argumentation vernachlässigbar ist. Dies ist ebenfalls verifizierbar anhand der numerischen Beispiele, in denen mit Hilfe iterativ gestaffelter, stark koppelnder Lösungsverfahren die Kontinuität nur für die Kopplungsverschiebungen erzwungen wird, und in denen trotzdem kein Genauigkeits- oder Stabilitätsverlust im Vergleich zur simultanen Lösung beobachtbar ist.

3.4.2 Massen-, Impuls- und Energieerhaltung

Als nächstes werden nun die Zusammenhänge zwischen den kinematischen und dynamischen Kontinuitätsbedingungen und den grundlegenden kinetischen Erhaltungsgleichungen für Masse, Impuls und Energie diskutiert. Dabei soll betont werden, daß die Voraussetzung für die Stabilität der numerischen Lösung letztendlich die Erfüllung dieser Erhaltungsgleichungen ist. Daraus *resultieren* dann die oben beschriebenen Kopplungsbedingungen, also die Forderungen nach kinematischer und dynamischer Kontinuität, wie im folgenden gezeigt wird.

Das prinzipielle Vorgehen ist dabei, zu untersuchen, welchen künstlichen Effekt die partitionierte Lösung auf die Bilanz der jeweiligen Größe im gekoppelten Gesamtsystem hat, und dann zu fordern, daß dieser Effekt gleich Null ist. Der Begriff der Erhaltung ist somit in diesem Zusammenhang so zu verstehen, daß die Größe im unpartitionierten System gleich groß sein muß, wie die über die Teilgebiete aufsummierte Größe im partitionierten System unter Berücksichtigung der Effekte am freigeschnittenen Kopplungsrand.

Massenerhaltung

Für nichtüberlappende Partitionierungen bedeutet die Massenerhaltung am Interface ganz einfach und anschaulich, daß keine Durchdringung bzw. kein Auseinanderdriften der Teilgebiete auftreten darf. Aus dieser Bedingung folgt unmittelbar die Forderung nach Kontinuität der Verschiebungen über den Kopplungsrand hinweg gemäß Gleichung (3.7) bzw. (3.9).

Impulserhaltung

Im Zusammenhang mit partitionierten Lösungsverfahren bedeutet die Forderung nach Impulserhaltung, daß das gekoppelte Gesamtsystem durch die partitionierte Lösung in der Summe keinen zusätzlichen, künstlichen Impuls erhält. Der Impulszuwachs $\Delta \boldsymbol{m}$ des Teilsystems Ω_j im Zeitintervall $[t^n,\ t^{n+1}]$ berechnet sich als

$$\Delta \boldsymbol{m}^{\Omega_j,\, n \to n+1} = \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left(\boldsymbol{f}_{\Gamma}^{\Omega_j}(t) + \boldsymbol{f}_{ext}^{\Omega_j}(t) \right) dt \tag{3.15}$$

Darin stammt der aus der partitionierten Lösung resultierende Anteil ausschließlich von den Interfacekräften $\boldsymbol{f}_{\Gamma}^{\Omega_j}(t)$:

$$\Delta \boldsymbol{m}_{\Gamma}^{\Omega_j,\, n \to n+1} = \int_{t^n}^{t^{n+1}} \boldsymbol{f}_{\Gamma}^{\Omega_j}(t)\ dt \tag{3.16}$$

Für die Impulserhaltung muß somit hier gefordert werden

$$\Delta \boldsymbol{m}_{\Gamma}^{n \to n+1} = \Delta \boldsymbol{m}_{\Gamma}^{\Omega_1,\, n \to n+1} + \Delta \boldsymbol{m}_{\Gamma}^{\Omega_2,\, n \to n+1} = \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left(\boldsymbol{f}_{\Gamma}^{\Omega_1}(t) + \boldsymbol{f}_{\Gamma}^{\Omega_2}(t) \right) dt = \boldsymbol{0} \tag{3.17}$$

woraus die Forderung nach dynamischer Kontinuität, d.h. nach der Kontinuität der Interfacekräfte entsprechend Gleichung (3.6) ($\boldsymbol{f}_{\Gamma}^{\Omega_1}(t) = -\boldsymbol{f}_{\Gamma}^{\Omega_2}(t)$) folgt. Vorgreifend soll hier bereits angemerkt werden, daß diese diskrete dynamische Kontinuität und damit die Impulserhaltung bei allen im Rahmen dieser Arbeit näher untersuchten, auf einer Dirichlet-Neumann-Partitionierung basierenden Lösungsverfahren gegeben ist, wie in den Kapiteln 5 und 6 noch im Detail gezeigt werden wird.

Energieerhaltung

Eine analoge Argumentation bietet sich auch für die Energieerhaltung an. Es wird also gefordert, daß das gekoppelte Gesamtsystem durch die partitionierte Lösung in der Summe keinen künstlichen Energiezuwachs erhält, d.h. daß die Arbeit der Interfacekräfte der beiden Teilsysteme am Kopplungsrand je Zeitschritt

$$\Delta W_{\Gamma}^{\Omega_j,\, n\to n+1} = \int_{t^n}^{t^{n+1}} \boldsymbol{f}_{\Gamma}^{\Omega_j}(t)\ \dot{\boldsymbol{d}}_{\Gamma}^{\Omega_j}(t)\ dt \tag{3.18}$$

in der Summe gleich Null ist.

$$\begin{aligned} \Delta E_{\Gamma}^{n\to n+1} &= \Delta W_{\Gamma}^{\Omega_1,\, n\to n+1} + \Delta W_{\Gamma}^{\Omega_2,\, n\to n+1} = \\ &= \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left(\boldsymbol{f}_{\Gamma}^{\Omega_1}(t)\ \dot{\boldsymbol{d}}_{\Gamma}^{\Omega_1}(t) + \boldsymbol{f}_{\Gamma}^{\Omega_2}(t)\ \dot{\boldsymbol{d}}_{\Gamma}^{\Omega_2}(t) \right) dt = 0 \end{aligned} \tag{3.19}$$

Sind sowohl die kinematische (Gleichung (3.5) für die Geschwindigkeit: $\dot{\boldsymbol{d}}_{\Gamma}^{\Omega_1}(t) = \dot{\boldsymbol{d}}_{\Gamma}^{\Omega_2}(t)$) als auch die dynamische Kontinuitätsbedingung (Gleichung (3.6): $\boldsymbol{f}_{\Gamma}^{\Omega_1}(t) = -\boldsymbol{f}_{\Gamma}^{\Omega_2}(t)$) erfüllt, so ergibt sich auch die Erhaltung der Energie: Einsetzen von (3.6) in (3.19) führt zunächst auf

$$\Delta E_{\Gamma}^{n\to n+1} = \int_{t^n}^{t^{n+1}} \boldsymbol{f}_{\Gamma}^{\Omega_1}(t) \left(\dot{\boldsymbol{d}}_{\Gamma}^{\Omega_1}(t) - \dot{\boldsymbol{d}}_{\Gamma}^{\Omega_2}(t) \right) dt \tag{3.20}$$

und durch weiteres Einsetzen der Geschwindigkeitskontinuitätsgleichung (3.5) wird der künstliche Energiezuwachs am Interface je Zeitschritt zu Null: $\Delta E_{\Gamma}^{n\to n+1} = 0$.

Da die Energieerhaltung also sowohl die kinematische als auch die dynamische Kontinuität voraussetzt, wodurch bei Erhaltung der Energie auch die Massen- und die Impulserhaltung gewährleistet sind, ist hiermit auch ein geeignetes Werkzeug zur Beurteilung partitionierter Lösungsverfahren gegeben: Zum einen lassen sich damit gemäß den obigen Herleitungen analytische Aussagen zur energetischen Genauigkeit treffen; ein solches Vorgehen wird u.a. in Piperno (1997) bzw. Piperno & Farhat (1997, 2000), Le Tallec & Mouro (1998, 2001), Blom (1998) bzw. Blom & Leyland (1998) sowie Gravouil & Combescure (2001) verfolgt, und als Designkriterium für partitionierte Lösungsverfahren verwendet.

Und außerdem läßt sich damit auch ein numerisch beobachtbares Kriterium definieren, das zur Beurteilung der Genauigkeit und der numerischen Stabilität eines partitionierten Lösungs-

verfahrens herangezogen werden kann (Piperno & Farhat (2000)). In der hier verwendeten Fluid-Struktur-Interaktions-Formulierung mit den oben genannten Zeitintegrationsverfahren werden dazu in jedem Zeitschritt die folgenden diskreten Energiemaße ermittelt. Die Energie, die das Strukturfeld aufgrund der Belastung durch das Fluid am Interface innerhalb eines Zeitschritts erhält, beträgt

$$\Delta E_{\Gamma}^{S,\, n\to n+1} = \left((1-\alpha_f)\ \boldsymbol{f}_{\Gamma}^{n+1} + \alpha_f\, \boldsymbol{f}_{\Gamma}^{n}\right)\cdot\left(\boldsymbol{d}_{\Gamma}^{n+1} - \boldsymbol{d}_{\Gamma}^{n}\right) \tag{3.21}$$

wobei die Kopplungslast $\boldsymbol{f}_{\Gamma}$ aus dem Fluiddruck $\boldsymbol{p}_{\Gamma}$ und den viskosen Spannungen $\boldsymbol{\tau}_{\Gamma}$ am Interface resultiert: $\boldsymbol{f}_{\Gamma}^{n+1} = \boldsymbol{f}_{\Gamma}\left(\boldsymbol{p}_{\Gamma}^{n+1},\ \boldsymbol{\tau}_{\Gamma}^{n+1}\right)$. Von der Fluidseite aus gesehen wird im selben Zeitintervall hingegen die folgende Energie übertragen:

$$\Delta E_{\Gamma}^{F,\, n\to n+1} = -\left(\theta\ \boldsymbol{f}_{\Gamma}^{n+1} + (1-\theta)\ \boldsymbol{f}_{\Gamma}^{n}\right)\cdot\left(\boldsymbol{r}_{\Gamma}^{n+1} - \boldsymbol{r}_{\Gamma}^{n}\right) \tag{3.22}$$

Somit ergibt sich in der Summe ein künstlicher Energiezuwachs aufgrund der partitionierten Lösung (nachfolgend als *Interface-Energie* bezeichnet) von

$$\begin{aligned}\Delta E_{\Gamma}^{n\to n+1} &= \Delta E_{\Gamma}^{S,\, n\to n+1} + \Delta E_{\Gamma}^{F,\, n\to n+1} = \\ &= \left((1-\alpha_f)\ \boldsymbol{f}_{\Gamma}^{n+1} + \alpha_f\, \boldsymbol{f}_{\Gamma}^{n}\right)\cdot\left(\boldsymbol{d}_{\Gamma}^{n+1} - \boldsymbol{d}_{\Gamma}^{n}\right) - \left(\theta\ \boldsymbol{f}_{\Gamma}^{n+1} + (1-\theta)\ \boldsymbol{f}_{\Gamma}^{n}\right)\cdot\left(\boldsymbol{r}_{\Gamma}^{n+1} - \boldsymbol{r}_{\Gamma}^{n}\right)\end{aligned} \tag{3.23}$$

woraus im vereinfachten Sonderfall des Bossak-α-Verfahrens bzw. der Trapezregel im Strukturfeld ($\alpha_f = 0$) und des Rückwärts-Euler-Verfahrens im Fluid ($\theta = 1$) folgt:

$$\begin{aligned}\Delta E_{\Gamma}^{n\to n+1} &= \left(\boldsymbol{d}_{\Gamma}^{n+1} - \boldsymbol{d}_{\Gamma}^{n}\right)\ \boldsymbol{f}_{\Gamma}^{n+1} - \left(\boldsymbol{r}_{\Gamma}^{n+1} - \boldsymbol{r}_{\Gamma}^{n}\right)\ \boldsymbol{f}_{\Gamma}^{n+1} = \\ &= \left(\left(\boldsymbol{d}_{\Gamma}^{n+1} - \boldsymbol{r}_{\Gamma}^{n+1}\right) - \left(\boldsymbol{d}_{\Gamma}^{n} - \boldsymbol{r}_{\Gamma}^{n}\right)\right)\ \boldsymbol{f}_{\Gamma}^{n+1}\end{aligned} \tag{3.24}$$

Aus Gleichung (3.24) kann man unmittelbar ablesen, daß die Energie nur erhalten wird, wenn auch die kinematische Kontinuität in den Verschiebungen $\boldsymbol{r}_{\Gamma}^{n+1} = \boldsymbol{d}_{\Gamma}^{n+1}$ gilt. Wird diese hingegen verletzt, wie etwa bei dem in Abschnitt 5.2 beschriebenen, sequentiell gestaffelten Grundverfahren, bei dem $\boldsymbol{r}_{\Gamma}^{n+1} = \boldsymbol{d}_{\Gamma}^{n}$ gesetzt wird, so entsteht am Interface durch die partitionierte Lösung in jedem Zeitschritt eine bestimmte Menge an Energie.

Durch Beobachten dieses Energiemaßes sowie von dessen Summe über alle Zeitschritte (nachfolgend als *aufsummierte Interface-Energie* bezeichnet)

$$E_{\Gamma}^{n+1} = \sum_{i=0}^{n} \Delta E_{\Gamma}^{i\to i+1} \tag{3.25}$$

können folglich Rückschlüsse auf die Genauigkeit des partitionierten Lösungsverfahrens gezogen werden. Piperno & Farhat (2000) berechnen die Interface-Energie auch analytisch, für ein Modellbeispiel und für eine Reihe von unterschiedlichen gestaffelten Lösungsansätzen, und erhalten dadurch ein Maß für deren jeweilige Genauigkeit, für das sie den Begriff der „energy-accuracy“ prägen. Je weniger Energie so produziert wird, desto genauer ist das Verfahren. Außerdem steht mit der Interface-Energie ein Kriterium zur Verfügung, das beim Auftreten einer instabilen numerischen Lösung bei der Berechnung eines gekoppelten Systems die Beur-

teilung ermöglicht, ob die Instabilität nun aus der partitionierten Lösungsstrategie resultiert – dann müßte auch die Interface-Energie sprunghaft ansteigen –, oder ob sie etwa physikalisch bedingt ist (Flattern) bzw. durch die Verwendung eines nicht stabilen Zeitintegrationsverfahrens an sich entsteht – in dem Fall müßte die Interface-Energie klein bleiben, trotz einer über alle Grenzen wachsenden numerischen Lösung. Und schließlich ist noch der Fall möglich, daß die Interface-Energie negativ ist. Dies entspricht dann numerischer Dämpfung am Interface, welche einen stabilisierenden Einfluß auf die partitionierte Lösung hat.

Die Anwendung dieses Energiekriteriums wird in den Kapiteln 5 und 7 an ausgewählten Fluid-Struktur-Interaktionsbeispielen demonstriert.

3.4.3 „Artificial Added Mass“-Effekt

In diesem Abschnitt wird schließlich noch auf den sogenannten *„Artificial Added Mass“-Effekt* eingegangen, der auch in Le Tallec & Mouro (2001) und Wall (1999) diskutiert wird. Diese Problematik führt dazu, daß speziell bei der partitionierten Lösung von Fluid-Struktur-Interaktionsproblemen mit *in*kompressiblen Fluiden bereits geringfügige Verletzungen der Kontinuitätsbedingungen in einer signifikanten Verschlechterung der Stabilitätseigenschaften der partitionierten Lösungsverfahren resultieren. Dies äußert sich in einem verhältnismäßig frühen Auftreten der schwachen Instabilität in der mit einfach gestaffelten Verfahren ermittelten numerischen Lösung. Fatalerweise wird der destabilisierende „Artificial Added Mass“-Effekt zudem immer stärker je kleiner der Zeitschritt gewählt wird, so daß es bei FSI-Problemen im Gegensatz zu strukturdynamischen Problemen in der Regel nicht möglich ist, das Auftreten der schwachen Instabilität durch Verkleinerung des Zeitschrittes zeitlich nach hinten zu schieben, und so zumindest für eine begrenzte Zeit mit einfach gestaffelten Kopplungsalgorithmen stabile Lösungen zu erzielen.

Zur Erläuterung wird zunächst die Interaktion einer flexiblen Struktur mit einer inkompressiblen Strömung betrachtet. Unter der vereinfachenden Annahme eines inviskosen, gewichtslosen Fluides und vernachlässigbarer konvektiver Anteile folgt aus der lokalen Impulsbilanzgleichung (Gl. (2.73))

$$\left.\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}\right|_{\boldsymbol{x}^G} + \overline{\nabla} p = \boldsymbol{0} \qquad \text{in } \overline{\Omega}_F \times (0, T) \tag{3.26}$$

bzw. nach sequentieller Diskretisierung in Raum (Galerkin-FEM) und Zeit (BE)

$$\frac{1}{\Delta t}\boldsymbol{M}^F \boldsymbol{u}^{n+1} + \boldsymbol{G}^F \boldsymbol{p}^{n+1} = \frac{1}{\Delta t}\boldsymbol{M}^F \boldsymbol{u}^n \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{p}^{n+1} = -\boldsymbol{G}^{F\,-1}\left(\boldsymbol{M}^F \frac{\boldsymbol{u}^{n+1} - \boldsymbol{u}^n}{\Delta t}\right) \tag{3.27}$$

Daraus wird ersichtlich, daß der Fluiddruck $\boldsymbol{p}$ im Wesentlichen (im hier dargestellten vereinfachten Fall sogar ausschließlich) aus der Trägheit des Fluides resultiert, welches der Bewegung der Struktur am Interface folgen muß. Die aus dem Fluiddruck ermittelten Kopplungslasten $\boldsymbol{f}_I(\boldsymbol{p})$ belasten dann wiederum die Struktur

$$\boldsymbol{M}^S \ddot{\boldsymbol{d}}^{n+1} + \boldsymbol{f}_{int}\left(\boldsymbol{d}^{n+1}\right) = \boldsymbol{f}_I\left(\boldsymbol{p}^{n+1}\right) \tag{3.28}$$

wo sie wie eine zusätzliche Fluidmasse („added mass“) auf das Beschleunigungsfeld der Struktur wirken. Aufgrund der Inkompressibilität resultiert nun jeder Fehler in der Beschreibung der Interfacebewegung, etwa aufgrund nicht erfüllter kinematischer Kontinuität, *sofort* in einer Druckreaktion, die – *ohne Zeitverzögerung und/oder Abschwächung* durch Kompression des Fluides – auf die Struktur zurückschlägt. Dieser fehlerhafte, durch das partitionierte Lösungsverfahren künstlich erzeugte Anteil an der „added mass“ wird in dieser Arbeit folglich als „artificial added mass“ bezeichnet. Bei Verwendung eines einfach gestaffelten, d.h. expliziten, schwach koppelnden Lösungsverfahrens führt dies dann zu einem raschen Aufschaukeln und in der Folge zur Instabilität der numerischen Lösung. Dies ist einer der wichtigsten Gründe – wenn nicht sogar der einzige Grund – dafür, daß sequentiell gestaffelte Lösungsverfahren, die bei der Kopplung kompressibler Strömungen mit flexiblen Strukturen stabile Ergebnisse liefern, in der hier behandelten Problemstellung der Interaktion *in*kompressibler Strömungen mit dünnwandigen Tragwerken ausnahmslos schwach instabil sind (Kapitel 5 und 7).

In Abschnitt 5.3 wird der geschilderte Sachverhalt anhand einer Analyse der zeitlichen Fortpflanzung des kinematischen Fehlers, der aus der Verletzung der kinematischen Kontinuität aufgrund des expliziten Prädiktors resultiert, am Beispiel eines einfach sequentiell gestaffelten Lösungsverfahrens ausführlich dokumentiert. Die einzige Lösung für dieses Problem ist die Gewährleistung der kinematischen Kontinuität, etwa durch die Verwendung impliziter, iterativ gestaffelter Lösungsverfahren, so daß gar nicht erst fehlerhafte Druckreaktionen auftreten.

4 Gebietszerlegungsmethoden

Um eine Einordnung der iterativ gestaffelten Kopplungsverfahren in die übergeordnete Klasse der Gebietszerlegungsmethoden zu ermöglichen, wird in diesem Kapitel – ohne Anspruch auf Vollständigkeit – ein Überblick über die verschiedenen Typen von Gebietszerlegungsmethoden gegeben. Einzelne Punkte, die für die in den weiteren Kapiteln behandelte *iterative Substrukturtechnik* von Bedeutung sind, werden detaillierter herausgearbeitet. Dabei wird ein Hauptaugenmerk auf die Darstellung der algorithmischen Umsetzung der einzelnen Verfahren, sowie auf die Herleitung der jeweils zugrundeliegenden Iterationsverfahren gelegt werden, mit Hilfe derer Konvergenzaussagen getroffen und konvergenzbeschleunigende Methoden vorgeschlagen werden können. Als weiterführende Literatur empfehlen sich die Fachbücher von Smith et al. (1996) und Quarteroni & Valli (1999), der Übersichtsartikel von Le Tallec (1994) sowie die Arbeiten von Langer (1992, 1997), auf denen die Ausführungen in diesem Kapitel unter anderem basieren.

In Anlehnung an die von Smith et al. verwendete Einteilung wird im folgenden wiederum zwischen zwei Verfahrenstypen unterschieden, basierend auf der in Abschnitt 3.1 (Prinzipskizzen in *Bild 3.2*) beschriebenen Art der räumlichen Partitionierung: Die Verfahren mit nichtüberlappenden Gebietszerlegungen werden darin als *Substruktur*- oder *Schurkomplement-Methoden* bezeichnet, diejenigen mit überlappenden Gebietszerlegungen als *Schwarzsche Methoden.* Wie im letzten Kapitel bereits vermerkt, beschränkt sich die folgende Darstellung hauptsächlich auf zwei Teilgebiete, obwohl die geschilderten Ideen prinzipiell auf mehrere Teilgebiete erweiterbar sind.

Bemerkung 4.1: Auch hier sollte angemerkt werden, daß die Bezeichnungskonzepte in der Literatur nicht einheitlich sind. So wird insbesondere für die Verfahren mit nichtüberlappenden Gebietszerlegungen auch die Bezeichnung *nichtüberlappende Schwarzsche Methoden* verwendet (z.B. Le Tallec (1994) und Langer (1992, 1997)).

4.1 Nichtüberlappende Verfahren – Schurkomplement- oder Substrukturmethoden

Die nichtüberlappenden Gebietszerlegungsverfahren wurden im Bereich der Strukturmechanik bereits in den 60er-Jahren unter der Bezeichnung *Substrukturmethode* entwickelt (Przemieniecki (1968)), um trotz der Speicher- und Rechenkapazitätsbeschränkungen damaliger Computer und Programme große Tragstrukturen (v.a. im Bereich des Flugzeugbaus) mit Matrixmethoden berechnen zu können. Die Grundidee dieses Verfahrens wird im folgenden anhand des verallgemeinerten, linearen, algebraischen Gleichungssystems dargestellt, welches in der partitionierten Block-Matrix-Form in Gleichung (3.2) definiert wurde (hier wiederholt):

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{II}^{\Omega_1} & \boldsymbol{A}_{I\Gamma}^{\Omega_1} & 0 \\ \boldsymbol{A}_{\Gamma I}^{\Omega_1} & \boldsymbol{A}_{\Gamma\Gamma}^{\Omega_1} + \boldsymbol{A}_{\Gamma\Gamma}^{\Omega_2} & \boldsymbol{A}_{\Gamma I}^{\Omega_2} \\ 0 & \boldsymbol{A}_{I\Gamma}^{\Omega_2} & \boldsymbol{A}_{II}^{\Omega_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{d}_I^{\Omega_1} \\ \boldsymbol{d}_\Gamma \\ \boldsymbol{d}_I^{\Omega_2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{f}_{I\,ext}^{\Omega_1} \\ \boldsymbol{f}_{\Gamma\,ext} \\ \boldsymbol{f}_{I\,ext}^{\Omega_2} \end{Bmatrix} \qquad \begin{matrix} \Omega_1 \\ \\ \Omega_2 \end{matrix}$$

Bei der Substrukturmethode werden zunächst die im Inneren der Teilgebiete liegenden Freiheitsgrade explizit statisch kondensiert, so daß nur noch ein wesentlich kleineres, aus den Freiheitsgraden auf den Interfacerändern bestehendes sogenanntes *Interface-System* übrig bleibt:

$$\left(\boldsymbol{S}^{\Omega_1} + \boldsymbol{S}^{\Omega_2}\right) \boldsymbol{d}_\Gamma = \boldsymbol{f}^{mod}_{\Gamma\,ext} \tag{4.1}$$

Dieses setzt sich aus den Schurkomplementmatrizen $\boldsymbol{S}^{\Omega_j}$ (auf die Interface–Freiheitsgrade reduzierte Steifigkeitsmatrizen) der Teilgebiete

$$\boldsymbol{S}^{\Omega_j} = \boldsymbol{A}^{\Omega_j}_{\Gamma\Gamma} - \boldsymbol{A}^{\Omega_j}_{\Gamma I}\, \boldsymbol{A}^{\Omega_j\,-1}_{II}\, \boldsymbol{A}^{\Omega_j}_{I\Gamma} \qquad j = 1, 2 \tag{4.2}$$

und den zusammengefaßten externen Lasttermen

$$\boldsymbol{f}^{mod}_{\Gamma\,ext} := \boldsymbol{f}_{\Gamma\,ext} - \sum_{j=1}^{2} \boldsymbol{A}^{\Omega_j}_{\Gamma I}\, \boldsymbol{A}^{\Omega_j\,-1}_{II}\, \boldsymbol{f}^{\Omega_j}_{I\,ext} \tag{4.3}$$

zusammen. Es kann dann mit direkten Gleichungslösungsverfahren (Gaußsche Elimination) gelöst werden. Im dritten Schritt werden die so berechneten Werte der Interface-Freiheitsgrade $\boldsymbol{d}_\Gamma$ wiederum als Dirichlet-Randbedingung für die Teilgebiete verwendet, mit denen sich die endgültige Lösung der Unbekannten in deren Inneren $\boldsymbol{d}^{\Omega_j}_I$ rückrechnen läßt.

$$\boldsymbol{d}^{\Omega_j}_I = \boldsymbol{A}^{\Omega_j\,-1}_{II} \left(\boldsymbol{f}^{\Omega_j}_{I\,ext} - \boldsymbol{A}^{\Omega_j}_{I\Gamma}\, \boldsymbol{d}_\Gamma\right) \qquad j = 1, 2 \tag{4.4}$$

Bemerkung 4.2: Der Schurkomplement-Operator wird in der Mathematik auch als Steklov-Poincaré-Operator bezeichnet. Er setzt die Reaktionskräfte eines Systems, die aus einer auf einen Dirichlet-Rand Γ aufgebrachten Verschiebung resultieren, mit dieser Verschiebung in Zusammenhang, wie die Gleichungen (4.5) und (4.6) zeigen. Die Schurkomplementmatrix $\boldsymbol{S}$ (= diskretisierter Steklov-Poincaré-Operator) entsteht aus der Koeffizienten- bzw. Steifigkeitsmatrix des Systems durch statische Kondensation der inneren Freiheitsgrade bezüglich der Freiheitsgrade auf Γ.

Motiviert durch diesen Ansatz ergab sich im Laufe der letzten 20 Jahre sowohl im Ingenieurwesen wie auch im Bereich der Mathematik eine rege Forschungstätigkeit mit dem Ziel, effiziente und robuste iterative Lösungsalternativen zu entwickeln. Die daraus resultierenden Methoden werden in Smith et al. (1996) als *iterative Substruktur-* oder auch *Schurkomplementmethoden* bezeichnet, während die Bezeichnung des ursprünglichen Ansatzes zur Abgrenzung davon um den Zusatz *direkt* erweitert wird *(direkte Substrukturmethode).* Die Schurkomplementmethoden lösen das Interface-System (4.1) iterativ, wobei in der Regel vorkonditionierte Krylov-Unterraum-Verfahren zur Konvergenzbeschleunigung eingesetzt werden, für die mit Hilfe des entsprechenden Gebietszerlegungsansatzes der jeweilige Vorkonditionierer konstruiert wird.

Einer der wichtigsten Gründe für den Einsatz iterativer Verfahren liegt in der günstigeren numerischen Behandlung der Schurkomplemente. Erstens ist deren explizite Berechnung, die bei direkten Verfahren erforderlich ist, aufwendig. Und zweitens sind die Schurkomplementmatrizen viel dichter besetzt als die ursprünglichen, bandstrukturierten Steifigkeits- bzw. Koeffizien-

tenmatrizen, was insbesondere bei langen Kopplungsrändern trotz der im Vergleich zum Gesamtsystem geringeren Dimension doch zu einem stark erhöhten Speicheraufwand führen kann. Aufgrund der Dichtbesetztheit ist weiterhin auch die direkte Lösung des Interface-Systems (4.1) verhältnismäßig teuer. Die modernen iterativen Substrukturverfahren vermeiden diese Problematiken, indem sie die Schurkomplemente gar nicht erst explizit aufstellen, aufsummieren und invertieren, sondern stets nur die Anwendung eines Schurkomplement-Operators auf einen Vektor berechnen – das Ergebnis ist wiederum ein Vektor. Dies läßt sich durch einfache Lösung eines Teilgebiet-Problems mit entsprechenden Randbedingungen bewerkstelligen. So ergibt sich die Anwendung des Schurkomplementes eines Teilsystems auf einen auf dem Rand Γ definierten Vektor $(\boldsymbol{S} \cdot \hat{\boldsymbol{d}}_\Gamma)$, indem man dieses Teilsystem mit $\hat{\boldsymbol{d}}_\Gamma$ als vorgeschriebener Dirichlet-Randbedingung nach den inneren Freiheitsgraden auflöst (erste Gleichungszeile),

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{II} & \boldsymbol{A}_{I\Gamma} \\ \boldsymbol{A}_{\Gamma I} & \boldsymbol{A}_{\Gamma\Gamma} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{d}_I \\ \hat{\boldsymbol{d}}_\Gamma \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{f}_\Gamma \end{Bmatrix} \qquad \rightarrow \quad \boldsymbol{d}_I = -\boldsymbol{A}_{II}^{-1} \boldsymbol{A}_{I\Gamma}\, \hat{\boldsymbol{d}}_\Gamma \tag{4.5}$$

und damit die am Rand Γ auftretenden Kräfte $\boldsymbol{f}_\Gamma$ berechnet (zweite Gleichungszeile).

$$\boldsymbol{f}_\Gamma = \left(\boldsymbol{A}_{\Gamma\Gamma} - \boldsymbol{A}_{\Gamma I}\, \boldsymbol{A}_{II}^{-1} \boldsymbol{A}_{I\Gamma}\right) \hat{\boldsymbol{d}}_\Gamma \qquad \rightarrow \quad \boldsymbol{f}_\Gamma = \boldsymbol{S}\, \hat{\boldsymbol{d}}_\Gamma \tag{4.6}$$

Entsprechend ergibt sich die Anwendung des invertierten Schurkomplementes (entspricht einer auf die Randfreiheitsgrade reduzierten Flexibilitätsmatrix) eines Teilsystems auf einen Vektor $(\boldsymbol{S}^{-1} \cdot \hat{\boldsymbol{f}}_\Gamma)$, indem man dieses Teilsystem mit $\hat{\boldsymbol{f}}_\Gamma$ als vorgeschriebener Neumann-Randbedingung ($\triangleq$ Knoten-Lastvektor)

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{II} & \boldsymbol{A}_{I\Gamma} \\ \boldsymbol{A}_{\Gamma I} & \boldsymbol{A}_{\Gamma\Gamma} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{d}_I \\ \boldsymbol{d}_\Gamma \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \hat{\boldsymbol{f}}_\Gamma \end{Bmatrix} \tag{4.7}$$

nach den Freiheitsgraden $\boldsymbol{d}_\Gamma$ auf dem Rand Γ auflöst.

$$\boldsymbol{d}_\Gamma = \left(\boldsymbol{A}_{\Gamma\Gamma} - \boldsymbol{A}_{\Gamma I}\, \boldsymbol{A}_{II}^{-1} \boldsymbol{A}_{I\Gamma}\right)^{-1} \hat{\boldsymbol{f}}_\Gamma \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{d}_\Gamma = \boldsymbol{S}^{-1}\, \hat{\boldsymbol{f}}_\Gamma \tag{4.8}$$

Somit können die bandstrukturierten Steifigkeitsmatrizen der Teilgebiete unverändert verwendet werden, und die Kosten für die Berechnung der Schurkomplement-Vektor-Produkte hängen hauptsächlich von der Effizienz der in den Teilsystemen eingesetzten Gleichungslöser ab.

4.1.1 Iterative Dirichlet-Neumann Substrukturmethode

Die auf Bjørstad & Widlund (1984, 1986) zurückgehenden *Dirichlet-Neumann-Methoden* (D-N) verwenden die nichtüberlappende Partitionierung, die in *Bild 3.2* links mit den spezifischen Kopplungsrandbedingungen dargestellt ist. In jeder Iteration lösen sie, ihrem Namen entsprechend, zuerst ein Dirichlet-Problem in Ω_1 gefolgt von einem Neumann-Problem in Ω_2. Der grundlegende Lösungsablauf ist als *Algorithmus 4.1* dargestellt.

Der im vorigen Abschnitt erläuterten Grundidee der Substrukturmethoden folgend, ist bei den nichtüberlappenden Verfahren das Iterationsschema auf die Interface-Freiheitsgrade reduziert,

0. Initialisierung: Setze $i = 0$. Startlösung $\boldsymbol{d}_{\Gamma,0}$ sei gegeben.

Iterationsschleife

1. Löse Dirichlet-Problem in Ω_1:

$$\boldsymbol{A}_{II}^{\Omega_1}\,\boldsymbol{d}_{I,i+1}^{\Omega_1} = \boldsymbol{f}_{I\,ext}^{\Omega_1} - \boldsymbol{A}_{I\Gamma}^{\Omega_1}\,\boldsymbol{d}_{\Gamma,i} \qquad \text{mit } \boldsymbol{d}_{\Gamma,i} \text{ aus } \Omega_2 \tag{4.9}$$

2. Berechne Kopplungskräfte in Ω_1:

$$\boldsymbol{f}_{\Gamma,i+1} = \boldsymbol{A}_{\Gamma I}^{\Omega_1}\,\boldsymbol{d}_{I,i+1}^{\Omega_1} + \boldsymbol{A}_{\Gamma\Gamma}^{\Omega_1}\,\boldsymbol{d}_{\Gamma,i} \tag{4.10}$$

3. Löse Neumann-Problem in Ω_2:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{\Gamma\Gamma}^{\Omega_2} & \boldsymbol{A}_{\Gamma I}^{\Omega_2} \\ \boldsymbol{A}_{I\Gamma}^{\Omega_2} & \boldsymbol{A}_{II}^{\Omega_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{\boldsymbol{d}}_{\Gamma,i+1} \\ \boldsymbol{d}_{I,i+1}^{\Omega_2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{f}_{\Gamma\,ext} - \boldsymbol{f}_{\Gamma,i+1} \\ \boldsymbol{f}_{I\,ext}^{\Omega_2} \end{Bmatrix} \qquad \text{mit } \boldsymbol{f}_{\Gamma,i+1} \text{ aus } \Omega_1 \tag{4.11}$$

4. Relaxation der Interface-Lösung:

$$\boldsymbol{d}_{\Gamma,i+1} = \omega_i\,\tilde{\boldsymbol{d}}_{\Gamma,i+1} + (1-\omega_i)\,\boldsymbol{d}_{\Gamma,i} \quad ; \qquad \omega_i \in \mathbb{R}^+ \tag{4.12}$$

5. Konvergenztest

$i \leftarrow i+1$ *bis zur Konvergenz*

Algorithmus 4.1: Iterative Dirichlet-Neumann-Substrukturmethode – Basisalgorithmus

und es wird das in Gleichung (4.1) angegebene Interface-System in der durch *Algorithmus 4.1* beschriebenen, schurkomplementfreien Formulierung gelöst. Letzteres läßt sich zeigen, indem die zugrundeliegende Iterationsvorschrift hergeleitet wird. Dazu wird zunächst Gleichung (4.9) in (4.10) eingesetzt,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f}_{\Gamma,i+1} &= \boldsymbol{A}_{\Gamma I}^{\Omega_1}\,\boldsymbol{A}_{II}^{\Omega_1\,-1}\boldsymbol{f}_{I\,ext}^{\Omega_1} + \left(\boldsymbol{A}_{\Gamma\Gamma}^{\Omega_1} - \boldsymbol{A}_{\Gamma I}^{\Omega_1}\,\boldsymbol{A}_{II}^{\Omega_1\,-1}\boldsymbol{A}_{I\Gamma}^{\Omega_1}\right)\boldsymbol{d}_{\Gamma,i} = \\ &\overset{(4.2)}{=} \boldsymbol{A}_{\Gamma I}^{\Omega_1}\,\boldsymbol{A}_{II}^{\Omega_1\,-1}\boldsymbol{f}_{I\,ext}^{\Omega_1} + \boldsymbol{S}^{\Omega_1}\,\boldsymbol{d}_{\Gamma,i} \end{aligned} \tag{4.13}$$

sowie Gleichung (4.11) nach der iterativ verbesserten Interface-Lösung $\tilde{\boldsymbol{d}}_{\Gamma,i+1}$ aufgelöst:

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{d}}_{\Gamma,i+1} &= \left(\boldsymbol{A}_{\Gamma\Gamma}^{\Omega_2} - \boldsymbol{A}_{\Gamma I}^{\Omega_2}\,\boldsymbol{A}_{II}^{\Omega_2\,-1}\boldsymbol{A}_{I\Gamma}^{\Omega_2}\right)^{-1}\left(\boldsymbol{f}_{\Gamma\,ext} - \boldsymbol{f}_{\Gamma,i+1} - \boldsymbol{A}_{\Gamma I}^{\Omega_2}\,\boldsymbol{A}_{II}^{\Omega_2\,-1}\boldsymbol{f}_{I\,ext}^{\Omega_2}\right) = \\ &\overset{(4.2)}{=} \boldsymbol{S}^{\Omega_2\,-1}\left(\boldsymbol{f}_{\Gamma\,ext} - \boldsymbol{f}_{\Gamma,i+1} - \boldsymbol{A}_{\Gamma I}^{\Omega_2}\,\boldsymbol{A}_{II}^{\Omega_2\,-1}\boldsymbol{f}_{I\,ext}^{\Omega_2}\right) \end{aligned} \tag{4.14}$$

Einsetzen von Gleichung (4.13) in (4.14) liefert dann

$$\tilde{\boldsymbol{d}}_{\Gamma,\,i+1} = \boldsymbol{S}^{\Omega_2{}^{-1}} \left[\boldsymbol{f}_{\Gamma\,ext} - \sum_{j=1}^{2} \boldsymbol{A}_{\Gamma I}^{\Omega_j} \boldsymbol{A}_{I I}^{\Omega_j{}^{-1}} \boldsymbol{f}_{I\,ext}^{\Omega_j} - \boldsymbol{S}^{\Omega_1} \boldsymbol{d}_{\Gamma,\,i} \right] =$$
$$\overset{(4.3)}{=} \boldsymbol{S}^{\Omega_2{}^{-1}} \left(\boldsymbol{f}_{\Gamma\,ext}^{mod} - \boldsymbol{S}^{\Omega_1} \boldsymbol{d}_{\Gamma,\,i} \right) \tag{4.15}$$

und durch weiteres Einsetzen dieser Beziehung in die Relaxationsgleichung (4.12) und Umstellen der Terme folgt schließlich die Iterationsvorschrift:

$$\boldsymbol{d}_{\Gamma,\,i+1} = \boldsymbol{d}_{\Gamma,\,i} + \omega_i \, \boldsymbol{S}^{\Omega_2{}^{-1}} \left(\boldsymbol{f}_{\Gamma\,ext}^{mod} - \left(\boldsymbol{S}^{\Omega_1} + \boldsymbol{S}^{\Omega_2} \right) \boldsymbol{d}_{\Gamma,\,i} \right) \tag{4.16}$$

Somit stellt dieser Basisalgorithmus eine nichtstationäre Richardson-Iteration in den Interface-Freiheitsgraden dar (vgl. Anhang A3, Gl. (A.42)), mit der Operatormatrix $\boldsymbol{A} := \boldsymbol{S}^{\Omega_1} + \boldsymbol{S}^{\Omega_2}$, der für Dirichlet-Neumann-Methoden charakteristischen Links-Vorkonditionierungsmatrix $\boldsymbol{M} := \boldsymbol{S}^{\Omega_2}$, und mit Relaxationsparametern $\omega_i > 0$. Die Suchrichtung ist mit dem Residuum $\boldsymbol{g}_i$ des vorkonditionierten Operators gegeben:

$$\boldsymbol{g}_i = \boldsymbol{S}^{\Omega_2{}^{-1}} \left(\boldsymbol{f}_{\Gamma\,ext}^{mod} - \left(\boldsymbol{S}^{\Omega_1} + \boldsymbol{S}^{\Omega_2} \right) \boldsymbol{d}_{\Gamma,\,i} \right) \tag{4.17}$$

Durch Kombination dieser Gleichung mit (4.15) wird außerdem ersichtlich, daß der aktuelle Residuenvektor $\boldsymbol{g}_i$ gerade gleich der iterativen Verbesserung des Interface-Vektors ist,

$$\boldsymbol{g}_i = \tilde{\boldsymbol{d}}_{\Gamma,\,i+1} - \boldsymbol{d}_{\Gamma,\,i} \tag{4.18}$$

womit er algorithmisch sehr einfach berechenbar ist. Um weiter zu zeigen, daß das Iterationsverfahren tatsächlich das in Gleichung (4.1) angegebene Interface-System löst, betrachtet man nun den auskonvergierten Fall, d.h. man setzt die Beziehung $\boldsymbol{d}_{\Gamma,\,i+1} = \boldsymbol{d}_{\Gamma,\,i} = \boldsymbol{d}_{\Gamma}$ in die Iterationsvorschrift (4.16) ein

$$\boldsymbol{d}_{\Gamma} = \boldsymbol{d}_{\Gamma} + \omega_i \, \boldsymbol{S}^{\Omega_2{}^{-1}} \left(\boldsymbol{f}_{\Gamma\,ext}^{mod} - \left(\boldsymbol{S}^{\Omega_1} + \boldsymbol{S}^{\Omega_2} \right) \boldsymbol{d}_{\Gamma} \right) \tag{4.19}$$

woraus sofort folgt, daß der Klammerausdruck gleich Null ist,

$$\boldsymbol{f}_{\Gamma\,ext}^{mod} - \left(\boldsymbol{S}^{\Omega_1} + \boldsymbol{S}^{\Omega_2} \right) \boldsymbol{d}_{\Gamma} = \boldsymbol{0} \quad \rightarrow \quad \left(\boldsymbol{S}^{\Omega_1} + \boldsymbol{S}^{\Omega_2} \right) \boldsymbol{d}_{\Gamma} = \boldsymbol{f}_{\Gamma\,ext}^{mod} \tag{4.20}$$

und somit die konvergierte Lösung gerade die Gleichung (4.1) erfüllt, was zu zeigen war.

Konvergenzeigenschaften

Die Konvergenzeigenschaften des iterativen D-N-Substrukturverfahrens hängen maßgeblich von der Wahl geeigneter Relaxationsparameter ab, sowie von der Eignung der Matrix $\boldsymbol{S}^{\Omega_2}$ als Vorkonditionierer. Letzteres ist abhängig von der Art der zu lösenden, partiellen Differentialgleichung (PDE) und in geringem Maß auch von der Größe der Teilgebiete, aber unabhängig von der Diskretisierungsfeinheit. Grundsätzlich gesehen ist die Schurkomplement-Vorkonditionierung aber verhältnismäßig gut bis optimal (Smith et al. (1996)). Dies gilt erfahrungsgemäß auch im Fall unterschiedlicher PDEs in den Teilgebieten, etwa bei der Fluid-Struktur-Interaktion, wie die insgesamt relativ kleinen Iterationszahlen bei den in dieser Arbeit durchgeführten Berechnungen zeigen.

Bezüglich der Wahl von Relaxationsparametern, die hinsichtlich Sicherstellung und Beschleunigung der Konvergenz geeignet sind, kommen prinzipiell alle der im Anhang A3.2 beschriebenen Methoden in Betracht (Richardson-Iteration, Gradientenverfahren, konjugiertes Gradientenverfahren, Konvergenzbeschleuniger wie die Tschebyscheff- oder Aitken-Methode, s. auch Kap. 6). In der Gebietszerlegungs-Literatur gängig sind allerdings vor allem die Methode der konjugierten Gradienten (wie u.a. ursprünglich von Bjørstad & Widlund (1984, 1986) vorgeschlagen), sowie die Richardson-Iteration mit möglichst guten Relaxationsparametern.

Ein auf der Richardson-Iteration basierendes D-N-Substrukturverfahren, das im Laufe der Iteration eine Sequenz von Relaxationsparametern $\{\omega_i\}$ generiert, die gegen den optimalen Wert ω_{opt} (A.41) konvergiert, wurde von Funaro et al. (1988) entwickelt, und Marini & Quarteroni (1989) führten die Konvergenzanalysis durch. Die iterative Bestimmung von ω_{opt} basiert auf einer Richardson-Extrapolationsformel und kommt ohne Kenntnis der extremalen Eigenwerte aus, wodurch der Hauptnachteil der Richardson-Iteration umgangen wird. Allerdings beruht das Verfahren auf der Superposition mehrerer Teillösungen und ist somit, wie die konjugierten Gradienten auch, nur für lineare bzw. linearisierte Systeme einsetzbar.

In technischen Anwendungen werden letztlich für die Relaxationsparameter auch häufig empirisch/experimentell ermittelte Werte bzw. Erfahrungswerte eingesetzt (s. Abschnitt 6.2). Dies ist jedoch generell ein eher unbefriedigender, da sehr problemabhängiger und somit nicht robuster Ansatz.

Bemerkung 4.3: Bezüglich der Konvergenzeigenschaften ist außerdem zu sagen, daß die Konvergenzgeschwindigkeit der bisher beschriebenen sogenannten Einlevel-Substrukturverfahren bei Zunahme der Anzahl der Teilgebiete rapide abnimmt, da sich dann Schwierigkeiten bei der Reduktion von glatten Fehlerverläufen über die Teilgebiete hinweg einstellen. Dies ist für die hier behandelten Problemstellungen zwar nicht relevant, da ausschließlich die Zerlegung in zwei Teilgebiete betrachtet wird, trotzdem soll angemerkt werden, daß für die geschilderte Problematik eine Reihe von Lösungsansätzen existieren. Dazu zählen insbesondere die *Zwei- und Multilevel-Methoden*, die die Einlevel-Gebietszerlegungsverfahren mit Mehrgitterideen kombinieren. Das jeweilige Substrukturverfahren wird dann als Glätter für die hochfrequenten Fehleranteile eingesetzt und mit Grobgitter-Korrekturen für die glatten Fehleranteile verknüpft. Ein Beispiel für eine Zweilevelmethode ist der *Balancing Neumann-Neumann-Algorithmus* von Mandel (1993) bzw. Mandel & Brezina (1996). *Multilevel-Ansätze mit hierarchischen Basen* wurden etwa zeitgleich von Haase et al. (1990) und Smith & Widlund (1990) entwickelt, weitere Arbeiten auf diesem Gebiet stammen u.a. von Langer (1992), Haase et al. (1994), Bungartz et al. (1997) und Schulte (1998).

Bemerkung 4.4: Genau genommen haben Bjørstad & Widlund (1984, 1986) eine Neumann-Dirichlet-Methode vorgestellt. Diese verwendet jedoch dasselbe algorithmische Prinzip wie die Dirichlet-Neumann-Methode. Der Unterschied ist, daß zuerst ein Neumann-Problem in Ω_1 und danach ein Dirichlet-Problem in Ω_2 gelöst wird (gerade umgekehrt wie bei der hier dargestellten korrespondierenden Dirichlet-Neumann-Methode). Dies führt auf die iterative Lösung des von rechts mit $\left(\boldsymbol{S}^{\Omega_1}\right)^{-1}$ vorkonditionierten Interface-Systems.

Für die Iteration setzt das von Bjørstad & Widlund vorgeschlagene Verfahren die Methode der konjugierten Gradienten ein.

4.1.2 Iterative Neumann-Neumann Substrukturmethode

Die *Neumann-Neumann-Methoden* (N-N) wurden von Agoshkov (1988) und Bourgat et al. (1989) eingeführt und später u.a. von Le Tallec et al. (1991) ausführlich analysiert und modifiziert. Sie basieren im Gegensatz zur D-N-Methode auf der Verwendung der Schurkomplemente *beider* Teilsysteme als Vorkonditionierer für die iterative Lösung des Interface-Systems (4.1). Dazu werden in jedem Iterationsschritt für beide Teilgebiete nacheinander je ein Dirichlet- und dann ein Neumann-Problem gelöst, jeweils mit Kopplungsrandbedingungen aus der benachbarten Partition; der prinzipielle Lösungsablauf ist als *Algorithmus 4.2* dargestellt.

0. Initialisierung: Setze $i = 0$. *Startlösung* $\boldsymbol{d}_{\Gamma,0}$ *sei gegeben.*

Iterationsschleife

1. Löse je ein Dirichlet-Problem in Ω_1 *und* Ω_2 *:*

$$\boldsymbol{A}_{II}^{\Omega_j}\,\boldsymbol{d}_{I,i+1}^{\Omega_j} = \boldsymbol{f}_{I\,ext}^{\Omega_j} - \boldsymbol{A}_{I\Gamma}^{\Omega_j}\,\boldsymbol{d}_{\Gamma,i} \quad ; \quad j = 1,2 \qquad (4.21)$$

2. Berechne jeweils die Kopplungskräfte in Ω_1 *und* Ω_2 *:*

$$\boldsymbol{f}_{\Gamma,i+1}^{\Omega_j} = \boldsymbol{A}_{\Gamma I}^{\Omega_j}\,\boldsymbol{d}_{I,i+1}^{\Omega_j} + \boldsymbol{A}_{\Gamma\Gamma}^{\Omega_j}\,\boldsymbol{d}_{\Gamma,i} \quad ; \quad j = 1,2 \qquad (4.22)$$

3. Löse je ein Neumann-Problem in Ω_1 *und* Ω_2 *:*

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{\Gamma\Gamma}^{\Omega_j} & \boldsymbol{A}_{\Gamma I}^{\Omega_j} \\ \boldsymbol{A}_{I\Gamma}^{\Omega_j} & \boldsymbol{A}_{II}^{\Omega_j} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{\boldsymbol{d}}_{\Gamma,i+1}^{\Omega_j} \\ \tilde{\boldsymbol{d}}_{I,i+1}^{\Omega_j} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} sign\,(\,\boldsymbol{f}_{\Gamma\,ext} - \sum_{j=1}^{2} \boldsymbol{f}_{\Gamma,i+1}^{\Omega_j}\,) \\ \boldsymbol{0} \end{Bmatrix} \quad ; \quad j = 1,2 \qquad (4.23)$$

mit sign = "–" für j = 1 und sign = "+" für j = 2

4. Interpolation der neuen Interface-Lösung:

$$\boldsymbol{d}_{\Gamma,i+1} = \boldsymbol{d}_{\Gamma,i} - \omega_i \left(\tilde{\boldsymbol{d}}_{\Gamma,i+1}^{\Omega_1} - \tilde{\boldsymbol{d}}_{\Gamma,i+1}^{\Omega_2} \right) \quad ; \quad \omega_i \in \mathbb{R}^+ \qquad (4.24)$$

5. Konvergenztest

$i \leftarrow i + 1$ *bis zur Konvergenz*

Algorithmus 4.2: Iterative Neumann-Neumann-Substrukturmethode – Basisalgorithmus

Die Iterationsvorschrift folgt in zur D-N-Methode analoger Weise aus den in *Algorithmus 4.2* gegebenen Gleichungen durch Auflösen nach $\boldsymbol{d}_{\Gamma,\, i+1}$:

$$\boldsymbol{d}_{\Gamma,\, i+1} = \boldsymbol{d}_{\Gamma,\, i} + \omega_i \left(\boldsymbol{S}^{\Omega_1 -1} + \boldsymbol{S}^{\Omega_2 -1} \right) \left(\boldsymbol{f}_{\Gamma\, ext}^{mod} - \left(\boldsymbol{S}^{\Omega_1} + \boldsymbol{S}^{\Omega_2} \right) \boldsymbol{d}_{\Gamma,\, i} \right) \tag{4.25}$$

Auch der Basisalgorithmus der N-N-Methode ist somit eine nichtstationäre Richardson-Iteration in den Interface-Freiheitsgraden, diesmal mit der Links-Vorkonditionierungsmatrix $\boldsymbol{M}$ mit $\boldsymbol{M}^{-1} := \boldsymbol{S}^{\Omega_1 -1} + \boldsymbol{S}^{\Omega_2 -1}$, und es gelten dieselben Aussagen zu Konvergenz und Konvergenzbeschleunigung wie für die Dirichlet-Neumann-Methode.

Eignung für die untersuchten Problemstellungen

Für die in dieser Arbeit untersuchten Problemstellungen sind die Neumann-Neumann-Methoden weniger geeignet als die Dirichlet-Neumann-Methoden. Ein erster Grund hierfür liegt im höheren Aufwand: Während der D-N-Algorithmus je Iterationsschritt nur ein Dirichlet-Problem in Ω_1 und ein Neumann-Problem in Ω_2 lösen muß, erfordert das N-N-Verfahren die Lösung von *jeweils* einem Dirichlet- und einem Neumann-Problem in Ω_1 und in Ω_2. Da die Konvergenzgeschwindigkeit beider Methoden im allgemeinen in etwa gleich hoch ist, ist die D-N-Methode somit insgesamt nur etwa halb so aufwendig. Die Vorteile der N-N-Verfahren liegen insbesondere in der besseren Implementierbarkeit im Falle vieler Teilgebiete und der einfacheren Behandlung von Ecken und Kanten, die zu mehr als zwei Teilgebieten gehören (Le Tallec (1994) S. 208–209). Da in dieser Arbeit aber nur Problemstellungen mit zwei Partitionen behandelt werden, fällt dieser Vorteil nicht ins Gewicht. Außerdem sind die bei der D-N-Methode verwendeten Kopplungsrandbedingungen natürlich anwendbar auf Fluid-Struktur-Interaktionsprobleme: Die Dirichlet-Randbedingung für das Fluid ist als Geometrieänderung des Fluid-Gebietes entsprechend der Verformung der benetzten Strukturoberfläche in der ALE-Formulierung problemlos realisierbar. Ebenso problemlos können aus dem Druck und den viskosen Spannungen im Fluid am Interface Kopplungskräfte abgeleitet werden, die als Neumann-Randbedingungen auf die Struktur aufgebracht werden. Dagegen wäre die Ableitung einer Verschiebungsvorgabe für die Struktur durch das Fluid, die bei der N-N-Methode benötigt würde, nicht ohne weiteres bestimmbar.

Aus den vorgenannten Überlegungen heraus wurde die Neumann-Neumann-Substrukturvariante im Rahmen dieser Arbeit nicht weiter verfolgt.

4.1.3 Duale und gemischte Methoden – FETI und Mortar

Die bisher beschriebenen Gebietszerlegungsmethoden verwenden die Verschiebungen $\boldsymbol{d}$ als primäre Variablen. Dabei werden bei den nichtüberlappenden Verfahren die Verschiebungen des Kopplungsrandes $\boldsymbol{d}_\Gamma$ so berechnet, daß der Sprung in den Kräften am Interface von Ω_1 nach Ω_2 minimiert wird. Die dualen Methoden gehen den gegenteiligen Weg: Sie berechnen Kopplungskräfte in Form von *Lagrange-Multiplikatoren* $\boldsymbol{\lambda}$ so, daß der Sprung in den Verschiebungen am Interface minimiert wird. Das zu lösende System wird dazu vollständig in den

dualen Variablen $\boldsymbol{\lambda}$ formuliert. Gemischte Methoden verwenden letztlich sowohl Interface-Verschiebungen als auch Kopplungskräfte. Details zu dieser Einteilung und zur variationellen Herleitung dieser Verfahren findet man u.a. in Le Tallec (1994) S. 189 ff.

Grundsätzlich wird dazu bei dualen und gemischten Methoden die kinematische Kontinuitätsbedingung (3.5) ($\boldsymbol{d}_{\Gamma}^{\Omega_1} = \boldsymbol{d}_{\Gamma}^{\Omega_2}$) mit virtuellen Kräften $\delta\boldsymbol{\lambda}$ gewichtet, und als zusätzliche Gleichung in die Variationsformulierung des globalen Systems eingebracht,

$$\int_{\Gamma} \delta\boldsymbol{\lambda} \left(\boldsymbol{d}_{\Gamma}^{\Omega_2} - \boldsymbol{d}_{\Gamma}^{\Omega_1} \right) d\Gamma = 0 \tag{4.26}$$

und die schwache Form der Impulsbilanz (Strukturdynamik: Gleichung (2.26)) durch den Term

$$\int_{\Gamma} \delta\boldsymbol{d} \; \boldsymbol{\lambda} \; d\Gamma \tag{4.27}$$

auf der linken Gleichungsseite ergänzt. Die kinematische Kontinuitätsbedingung wird also nur noch schwach erfüllt. Nach Diskretisierung und statischer Kondensation der Freiheitsgrade im Inneren der Teilgebiete ergibt sich dann anstelle des ursprünglichen Interface–Systems (4.1) ein um die daraus resultierenden Gleichungsanteile *erweitertes Interface-System*

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{S}^{\Omega_1} & \boldsymbol{0} & -\boldsymbol{C}^T \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{S}^{\Omega_2} & \boldsymbol{C}^T \\ -\boldsymbol{C} & \boldsymbol{C} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{d}_{\Gamma}^{\Omega_1} \\ \boldsymbol{d}_{\Gamma}^{\Omega_2} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{f}_{\Gamma\,ext}^{\Omega_1\,mod} \\ \boldsymbol{f}_{\Gamma\,ext}^{\Omega_2\,mod} \\ \boldsymbol{0} \end{Bmatrix} \tag{4.28}$$

mit dem Feld von Lagrange-Multiplikatoren $\boldsymbol{\lambda}$ als zusätzlichen Knoten-Freiheitsgraden, entsprechenden Koeffizientenmatrizen $\boldsymbol{C}$ für die zusätzlichen Anteile (s.u.), und den jeweils zusammengefaßten externen Lasttermen

$$\boldsymbol{f}_{\Gamma\,ext}^{\Omega_j\,mod} := \boldsymbol{f}_{\Gamma\,ext}^{\Omega_j} - \boldsymbol{A}_{\Gamma I}^{\Omega_j} \, \boldsymbol{A}_{II}^{\Omega_j\,-1} \, \boldsymbol{f}_{I\,ext}^{\Omega_j} \qquad ; \quad j = 1,2 \tag{4.29}$$

Dieses erweiterte Interface-Problem muß nun iterativ gelöst werden. Es stellt ein Sattelpunkt-Problem dar und erfordert somit entsprechende iterative Lösungsverfahren. Basierend auf dieser Grundidee wurden in den letzten etwa zehn Jahren eine Reihe von Verfahrensvarianten entwickelt, die sich insbesondere in zwei Punkten unterscheiden: Erstens in der Art der algorithmischen Lösung des erweiterten Interface-Systems, und zweitens in der Art der Definition der Lagrange-Multiplikatoren, diskret oder als kontinuierliche Größen, die dann im Sinne der Finite–Element–Methode mit bestimmten Ansatzfunktionsräumen diskretisiert werden. Entsprechend ergeben sich unterschiedliche Koeffizientenmatrizen $\boldsymbol{C}$. Einige dieser Verfahren werden im folgenden beschrieben.

Bemerkung 4.5: Es soll hier noch auf die variationelle Verwandtschaft dieser Methoden mit nicht konformen Finiten Elementen bzw. der Methode der inkompatiblen Moden hingewiesen werden, bei denen die Verschiebungskontinuität (Kompatibilität) ebenfalls nur schwach erfüllt wird.

Gemischte Methoden

Die gemischten Methoden lösen Gl. (4.28) in der dargestellten Form mit beiden Variablen, primären und dualen. Einer der wichtigsten Vertreter dieser Verfahren ist die auf Bernardi et al. (1994) zurückgehende „*Mortar-Methode*“ (s. auch Farhat et al. (1998b), Wohlmuth (1999)). Diese definiert die Lagrange-Multiplikatoren als längs des Kopplungsrandes kontinuierliche Größe, und diskretisiert sie mit einem separaten Satz von Ansatzfunktionen. Mit diesem Vorgehen können auch Problemstellungen behandelt werden, bei denen die am Interface aneinandergrenzenden *Diskretisierungen nicht konform* sind (verschobene Netze, unterschiedliche Netzfeinheiten oder auch unterschiedliche Diskretisierungsverfahren in den Teilgebieten). Solche Problemstellungen sind daher auch das Haupteinsatzgebiet der Mortar-Methode.

Als Raum der Ansatzfunktionen für $\boldsymbol{\lambda}$ kommt bei der Mortar-Methode im Rahmen der FEM die Spur auf dem Interface der Ansatzfunktionenräume für $\boldsymbol{d}$ in den angrenzenden Finiten Elementen zum Einsatz, wobei am jeweils ersten und letzten Element des Interfaces die Ansatzpolynomordnung um 1 verringert wird. Das Teilgebiet an dem die Lagrange-Multiplikatoren so definiert werden, wird als „*Master*“ bezeichnet, das auf der anderen Seite des Interface liegende als „*Slave*“. Eine solche Wahl ist mathematisch optimal, d.h. der durch die Lagrange-Multiplikatoren verursachte lokale Diskretisierungsfehler am Interface ist (asymptotisch gesehen) nicht größer als die lokalen Diskretisierungsfehler der beiden angrenzenden Teilgebiete (s. o.g. Literatur). Abweichend hiervon werden in der Arbeit von Rixen et al. (1998) auch andere Ansatzpolynome untersucht, mit dem eher praktisch begründeten Zweck, die Anzahl der Lagrange-Multiplikatoren und somit den Rechenaufwand zu reduzieren und von der angrenzenden Finite-Elemente-Diskretisierung unabhängig zu machen. Dabei wird von den Autoren jedoch eingeräumt, daß eine solche relativ freie Wahl der Ansatzpolynome nicht einfach zu bewerkstelligen sei, und deren Güte stark von der Glattheit der Lösung und somit vom jeweiligen Problem abhänge. Aufgrund der Unabhängigkeit von den angrenzenden Diskretisierungen können diese Methoden auch nicht als Mortar-Methoden im engeren Sinne bezeichnet werden.

Als Lösungsalgorithmus für Gleichung (4.28) kann prinzipiell jedes beliebige iterative Substrukturverfahren eingesetzt werden, wobei das zugrunde liegende Iterationsverfahren für die Lösung von Sattelpunkt-Problemen geeignet sein muß; entsprechend existiert hierzu eine Vielzahl von Arbeiten. So beschreiben Quarteroni & Valli (1999) (S. 60 ff.) eine Implementierung der Mortar-Methode in Verbindung mit einer iterativen Neumann-Dirichlet Substrukturmethode, wogegen Le Tallec & Sassi (1995) ein iteratives Neumann-Neumann Substrukturverfahren einsetzen. Eine Reihe weiterer iterativer Substrukturverfahren für die Mortar-Methode wird in Achdou et al. (1999) diskutiert. Braess & Dahmen (1998) und Braess et al. (1999) entwickelten und analysierten einen Mehrgitter-Lösungsalgorithmus für die Mortar-Methode unter besonderer Beachtung von Parallelisierungsaspekten. Ein Multilevel-Substrukturverfahren mit hierarchischen Basen des Ansatzraums der Lagrange-Multiplikatoren wird letztendlich in Lacour (1998) vorgestellt.

Neben der Mortar-Methode ist mit dem „*Augmented Lagrangean Verfahren*“ von Glowinski & Le Tallec (1989, 1990) ein alternativer gemischter Ansatz vorgeschlagen worden. Dieses

fügt dem oben beschriebenen gemischten Funktional noch einen auf die kinematische Kontinuitätsbedingung bezogenen Strafterm im Sinne einer Penalty-Methode hinzu. Für detaillierte Angaben zu diesem Verfahren wird auf die angegebene Literatur verwiesen (eine übersichtliche Darstellung hierzu ist beispielsweise in Le Tallec (1994) S. 196 ff. zu finden).

Duale Methoden

Die dualen Methoden unterscheiden sich von den gemischten Methoden, wie bereits angesprochen, dadurch, daß sie die Verschiebungsfreiheitsgrade $\boldsymbol{d}_\Gamma$ in dem erweiterten Interface-System (4.28) eliminieren (statische Kondensation), und das somit auf die dualen Variablen – die Lagrange-Multiplikatoren $\boldsymbol{\lambda}$ – reduzierte *duale Interface-System* iterativ lösen:

$$\left(\boldsymbol{C}\ \boldsymbol{S}^{\Omega_1{}^{-1}}\boldsymbol{C}^T + \boldsymbol{C}\ \boldsymbol{S}^{\Omega_2{}^{-1}}\boldsymbol{C}^T\right)\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{C}\ \boldsymbol{S}^{\Omega_2{}^{-1}}\boldsymbol{f}_{\Gamma\,ext}^{\Omega_2\,mod} - \boldsymbol{C}\ \boldsymbol{S}^{\Omega_1{}^{-1}}\boldsymbol{f}_{\Gamma\,ext}^{\Omega_1\,mod} \tag{4.30}$$

Die mittlerweile wohl bekannteste duale Methode ist die „*FETI*“-*Methode* („*F*inite *E*lement *T*earing and *I*nterconnecting“), die von Farhat & Roux (1991) eingeführt, in Farhat et al. (1994a) für den strukturdynamischen Fall erweitert und in den folgenden Jahren noch vielfach modifiziert, verbessert und kommentiert wurde (Justino et al. (1997), Park et al. (1997), Papadrakakis (1997), Farhat et al. (1994b, 1998a), Farhat & Mandel (1998), u.a.). Sie verwendet diskrete Lagrange-Multiplikatoren, und ist somit auf den Fall konformer Vernetzungen in den beiden Teilgebieten beschränkt. Die diskreten Lagrange-Multiplikatoren führen weiterhin dazu, daß $\boldsymbol{C}$ zur Einheitsmatrix $\boldsymbol{I}$ reduziert wird, so daß sich für die FETI-Methode das noch weiter reduzierte duale Interface-System

$$\left(\boldsymbol{S}^{\Omega_1{}^{-1}} + \boldsymbol{S}^{\Omega_2{}^{-1}}\right)\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{S}^{\Omega_2{}^{-1}}\boldsymbol{f}_{\Gamma\,ext}^{\Omega_2\,mod} - \boldsymbol{S}^{\Omega_1{}^{-1}}\boldsymbol{f}_{\Gamma\,ext}^{\Omega_1\,mod} \tag{4.31}$$

ergibt. Eine mechanische Interpretation dieser Gleichung besagt, daß der Klammerausdruck auf der linken Seite die Summe der auf den Kopplungsrand bezogenen Flexibilitäten der Teilgebiete darstellt, während die rechte Seite der Differenz (d.h. dem Sprung) zwischen den Interface-Verschiebungen, die sich im ungekoppelten Zustand ergeben würden, entspricht. Vergleicht man dies mit dem Interface-System (4.1) der standardmäßigen iterativen Substrukturverfahren, so wird die in Farhat & Roux (1991) gemachte, interessante Aussage verständlich, daß der prinzipielle Unterschied der Methoden darin liegt, daß die Standard-Substrukturmethoden *Steifigkeits*methoden sind, während die dualen Verfahren *Flexibilitäts*methoden darstellen.

Der iterative Lösungsalgorithmus für das reduzierte, duale Interface-System (4.31) folgt schließlich im Prinzip der im vorigen Abschnitt beschriebenen Neumann-Neumann-Kopplungsvariante, hier nun in den dualen Variablen, wobei zur Konvergenzbeschleunigung die Methode der projizierten konjugierten Gradienten eingesetzt wird (s. z.B. Papadrakakis (1997) S. 116 ff.).

Bemerkung 4.6: In der Literatur zur FETI-Methode wird das Interface-System i. allg. nicht in der obigen Form mit den Schurkomplementmatrizen $\boldsymbol{S}^{\Omega_j}$ dargestellt, sondern unter Verwendung der unpartitionierten Steifigkeitsmatrizen $\boldsymbol{K}_j$ der Teilsysteme j, die mit einer

Booleschen „*Connectivity*“-Matrix $\boldsymbol{B}_j$ verknüpft wird. Deren Einträge sind gleich ± 1, falls die entsprechenden Freiheitsgrade auf dem Kopplungsrand liegen, und ansonsten gleich 0, so daß für den Fall von zwei Teilgebieten gilt (Farhat & Roux (1991)): $\boldsymbol{B}_j = [\boldsymbol{0}\ \boldsymbol{C}]$ mit $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{I}$, sowie $\boldsymbol{S}^{\Omega_j{}^{-1}} = \boldsymbol{B}_j\ \boldsymbol{K}_j^{-1}\boldsymbol{B}_j^T$.

Eignung für die untersuchten Problemstellungen

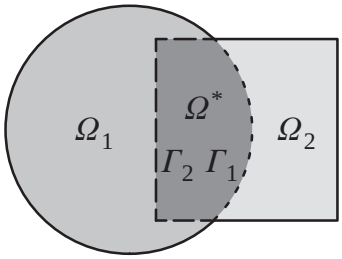
Abschließend wird wiederum auf die Eignung der gemischten und der dualen Methoden für die in dieser Arbeit untersuchten Problemstellungen eingegangen. Da die hier berechneten Beispiele alle von konformen Diskretisierungen ausgehen, bestand bisher noch kein Bedarf dafür, die implementierten Verfahren um Mortar-Ansätze zu erweitern. Dies ist jedoch prinzipiell möglich und für komplexere Probleme auch unumgänglich, daher werden in der Zukunft mit Sicherheit gemischte Verfahren in irgendeiner Form in die geschaffene Software-Umgebung integriert werden. Die dualen Methoden hingegen sind aufgrund der bereits beschriebenen Schwierigkeiten der Anwendung von Neumann-Neumann-Methoden auf Fluid-Struktur-Interaktionsprobleme für die Behandlung der Kopplungsproblematik ungeeignet. Dies schließt jedoch eine Anwendung der FETI-Methode auf die Lösung von rein strukturdynamischen Problemen ebenso wenig aus, wie ihren Einsatz als Lösungsverfahren für die Struktur-Partition bei gekoppelten Systemen. Insbesondere im Hinblick auf die sehr guten Parallelisierungseigenschaften der FETI-Methode ist eine solche Verwendung in zukünftigen Weiterentwicklungen ebenfalls denkbar.

4.2 Überlappende Verfahren – Schwarzsche Methoden

Obwohl im Rahmen dieser Arbeit ausschließlich Verfahren mit nichtüberlappenden Gebietszerlegungen softwaretechnisch umgesetzt und numerisch untersucht wurden, soll zur Vervollständigung des hier gegebenen Überblicks in der Folge auch ein kurzer Abriß zu überlappenden Verfahren gegeben werden.

Die *Schwarzschen Methoden* gehen zurück auf den Mathematiker Hermann A. Schwarz (Schwarz (1870)), der schon vor über 100 Jahren mit der *alternierenden Schwarzschen Methode* ein erstes Gebietszerlegungsverfahren vorstellte. Dazu verwendete er eine Gebietszerlegung in überlappende Teilgebiete mit nicht-konformen Diskretisierungen. Zur Illustration seines Verfahrens verwendete Schwarz die in *Bild 4.1* dargestellte Skizze. Obwohl diese Methode ursprünglich interessanterweise gar nicht als numerisches Lösungsverfahren gedacht war[8], läßt sie sich zur iterativen Lösung elliptischer Randwertprobleme einsetzen: Ein Randwertproblem auf einem beliebigen Gebiet Ω wird dazu durch alternierende Lösung der entsprechenden Randwertprobleme in den Teilgebieten Ω_1 und Ω_2 gelöst, wobei die Randbedingungen auf den inneren Rändern Γ_1 und Γ_2 jeweils von der vorhergehenden Iterierenden abgenommen werden.

8. Schwarz benutzte seine alternierende Methode zum konstruktiven Beweis der Existenz harmonischer Funktionen in kompliziert berandeten Gebieten Ω, die sich als Vereinigung zweier einfacherer, sich überlappender Gebiete Ω_1 und Ω_2, für die die Existenz bekannt ist, darstellen lassen.



$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$$
$$\Omega^* = \Omega_1 \cap \Omega_2 \neq 0$$

Bild 4.1: Skizze zur Schwarzschen Methode nach H. A. Schwarz (1870)

Die aus diesem Basisansatz im Zuge der Entwicklung numerischer Verfahren in den letzten zwei Jahrzehnten hervorgegangenen moderneren Schwarzschen Methoden wurden dann insbesondere in der Mathematik sehr populär, und es entstanden zahlreiche Arbeiten und Weiterentwicklungen, von denen hier nur einige der wichtigsten genannt werden sollen.

Umfangreiche Untersuchungen der alternierenden Schwarzschen Methode findet man z.B. in den Arbeiten von Lions (1988, 1989, 1990). Bei Beschränkung auf konforme Diskretisierungen im Überlappungsbereich ergibt sich aus ihr die Familie der *multiplikativen Schwarzschen Methoden (MSM).* Der Operator des diesen Methoden zugrundeliegenden Iterationsschemas enthält additive und multiplikative Anteile der Orthoprojektoren der Teilgebiete, welche den Lösungsraum des Gesamtsystems auf den des jeweiligen Teilgebietes abbilden. Mit Hilfe dieser Orthoprojektoren kann man das Iterationsschema so umformen, daß sich der Iterationsoperator als Produkt der zugehörigen Co-Projektoren darstellen läßt; dies war der Grund für die Einführung der heute gebräuchlichen Bezeichnung *multiplikative* Schwarzsche Methoden. Eine von Dryja & Widlund (1987) vorgeschlagene Verfahrensvariante ignoriert die multiplikativen, schlecht parallelisierbaren Anteile im Operator, so daß dieser nur noch die Summe der Orthoprojektoren der Teilgebiete enthält. Entsprechend wurden die so entstandenen Verfahren *additive Schwarzsche Methoden (ASM)* genannt. Für weitere Details zu obigen Ausführungen wird auf den Artikel von Langer (1992) verwiesen.

Der prinzipielle Lösungsablauf von MSM und ASM ist in *Algorithmus 4.3* für das in Gleichung (3.4) angegebene partitionierte algebraische Gleichungssystem dargestellt. Zur Vereinfachung der Schreibweise sind die jeweils freien Unbekannten eines Teilgebiets sowie die dazugehörigen Matrizen wie folgt zusammengefaßt.

$$\boldsymbol{d} := \begin{Bmatrix} \boldsymbol{d}^{\Omega_1} \\ \boldsymbol{d}^{\Omega_2} \end{Bmatrix} \quad ; \quad \boldsymbol{d}^{\Omega_1} := \begin{Bmatrix} \boldsymbol{d}_I^{\Omega_1} \\ \boldsymbol{d}_{\Gamma_2} \end{Bmatrix} \quad ; \quad \boldsymbol{d}^{\Omega_2} := \begin{Bmatrix} \boldsymbol{d}_{\Gamma_1} \\ \boldsymbol{d}_I^{\Omega_2} \end{Bmatrix} \tag{4.32}$$

$$\boldsymbol{A} := \left[\begin{array}{c:c} \boldsymbol{A}^{\Omega_{11}} & \boldsymbol{A}^{\Omega_{12}} \\ \hdashline \boldsymbol{A}^{\Omega_{21}} & \boldsymbol{A}^{\Omega_{22}} \end{array}\right] := \left[\begin{array}{cc:cc} \boldsymbol{A}_{II}^{\Omega_1} & \boldsymbol{A}_{I\Gamma_2}^{\Omega_1} & 0 & 0 \\ \boldsymbol{A}_{\Gamma_2 I}^{\Omega_1} & \boldsymbol{A}_{\Gamma_2\Gamma_2} & \boldsymbol{A}_{\Gamma_2\Gamma_1} & 0 \\ \hdashline 0 & \boldsymbol{A}_{\Gamma_1\Gamma_2} & \boldsymbol{A}_{\Gamma_1\Gamma_1} & \boldsymbol{A}_{\Gamma_1 I}^{\Omega_2} \\ 0 & 0 & \boldsymbol{A}_{I\Gamma_1}^{\Omega_2} & \boldsymbol{A}_{II}^{\Omega_2} \end{array}\right] \tag{4.33}$$

Die Schwarzschen Methoden können als Block-Iterationsverfahren interpretiert werden (Iterationsverfahren siehe Anhang A3.2). So entspricht die MSM dem *Block-Gauß-Seidel-Verfahren*

0. Initialisierung: Setze $i = 0$. *Startlösung* $\boldsymbol{d}_0^{\Omega_2}$ *sei gegeben.*

Iterationsschleife

1. Löse Dirichlet-Problem in Ω_1*:*

$$\boldsymbol{A}^{\Omega_{11}}\, \boldsymbol{d}_{i+1}^{\Omega_1} = \boldsymbol{f}_{ext}^{\Omega_1} - \boldsymbol{A}^{\Omega_{12}}\, \boldsymbol{d}_i^{\Omega_2} \tag{4.34}$$

2. Löse Dirichlet-Problem in Ω_2*:*

$$\boldsymbol{A}^{\Omega_{22}}\, \boldsymbol{d}_{i+1}^{\Omega_2} = \boldsymbol{f}_{ext}^{\Omega_2} - \boldsymbol{A}^{\Omega_{21}}\, \tilde{\boldsymbol{d}}^{\Omega_1} \qquad \textit{mit} \quad \tilde{\boldsymbol{d}}^{\Omega_1} = \begin{cases} \boldsymbol{d}_{i+1}^{\Omega_1} & \rightarrow \text{MSM} \\ \boldsymbol{d}_i^{\Omega_1} & \rightarrow \text{ASM} \end{cases} \tag{4.35}$$

3. Konvergenztest

$i \leftarrow i + 1$ *bis zur Konvergenz*

Algorithmus 4.3: Schwarzsche Methoden – Basisalgorithmus

(Gl. (A.34)), dessen Iterationsvorschrift – mit der typischen aus der Block-Diagonal- und der strikt unteren Block-Dreiecksmatrix zusammengesetzten Vorkonditionierungsmatrix – sich direkt aus den in *Algorithmus 4.3* angegebenen Gleichungen nach einigen algebraischen Umformungen ergibt:

$$\boldsymbol{d}_{i+1} = \boldsymbol{d}_i + \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}^{\Omega_{11}{}^{-1}} & \boldsymbol{0} \\ -\boldsymbol{A}^{\Omega_{22}{}^{-1}} \boldsymbol{A}^{\Omega_{21}}\, \boldsymbol{A}^{\Omega_{11}{}^{-1}} & \boldsymbol{A}^{\Omega_{22}{}^{-1}} \end{bmatrix} \left(\boldsymbol{f}_{ext} - \boldsymbol{A}\, \boldsymbol{d}_i \right) \tag{4.36}$$

Die ASM, die für beide Teilgebiete stets die Kopplungsinformation vom Beginn des Iterationsschrittes verwendet (im Gegensatz zur MSM, die für das Teilgebiet Ω_2 bereits die korrigierten Größen übernimmt, s. *Algorithmus 4.3*) entspricht dagegen einer *Block-Jacobi-Iteration* (vgl. (A.32)). Die Iterationsvorschrift – mit der aus der Block-Diagonalmatrix von $\boldsymbol{A}$ gebildeten Vorkonditionierungsmatrix – folgt ebenfalls aus den in *Algorithmus 4.3* angegebenen Gleichnungen:

$$\boldsymbol{d}_{i+1} = \boldsymbol{d}_i + \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}^{\Omega_{11}{}^{-1}} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}^{\Omega_{22}{}^{-1}} \end{bmatrix} \left(\boldsymbol{f}_{ext} - \boldsymbol{A}\, \boldsymbol{d}_i \right) \tag{4.37}$$

Bemerkung 4.7: Man beachte, daß bei den überlappenden Gebietszerlegungsverfahren im Gegensatz zu den nichtüberlappenden Verfahren das Iterationsschema nicht auf die Interface-Freiheitsgrade reduziert ist.

Bezüglich der wichtigsten numerischen Eigenschaften ist zunächst zu sagen, daß alle Schwarzschen Methoden die grundsätzliche Eigenschaft haben, daß die Konvergenzrate bei sehr kleiner Überlappungsbreite relativ schlecht ist, diese mit zunehmender Überlappungsbreite jedoch sehr schnell besser wird. Des weiteren gelten die von der (Block-)Gauß-Seidel- und der (Block-)Jacobi-Iteration her bekannten Konvergenzaussagen (vgl. Anhang A3.2). So ist die Konvergenz

der ASM nicht generell gesichert, weshalb die ASM – wie auch die MSM – in praktischen Anwendungen stets mit Krylov-Iterationsverfahren zur Konvergenzbeschleunigung kombiniert wird. Dabei übernimmt die jeweilige Gebietszerlegungsmethode die Funktion des Vorkonditionierers. Ein weiterer Nachteil der ASM ist, daß die Konvergenzgeschwindigkeit im Vergleich zur MSM aufgrund der Vernachlässigung der multiplikativen Anteile im Iterationsoperator nur etwa halb so groß ist. Dem steht gegenüber, daß diese Produkte von aus mehreren Teilgebieten stammenden Operatoranteilen die Parallelisierbarkeit der MSM stark einschränken, was allgemein als Hauptvorteil der ASM gewertet wird.

Die bisher genannten Verfahren sind für Zerlegungen in nur wenige Teilgebiete sehr effektiv, bei vielen Teilgebieten hingegen können sich Schwierigkeiten bei der Reduktion von glatten Fehlerverläufen ergeben, die zu einer erheblichen Verlangsamung der Konvergenz führen. Wie bei den Substrukturverfahren gibt es auch bei den überlappenden Gebietszerlegungsverfahren zur Lösung dieser Problematik *Zwei-* und *Multilevel Schwarz-Methoden* (u.a. Bramble et al. (1990, 1991), Dryja & Widlund (1991)), die durch Addition von Grobgitter-Korrekturen auch bei vielen Teilgebieten eine schnelle Reduktion von sowohl hochfrequenten als auch glatten Fehleranteilen und somit entsprechend gute Konvergenzeigenschaften erreichen.

4.3 Anwendung auf die Lösung nichtlinearer, zeitabhängiger Probleme

Die bisherige Darstellung der Gebietszerlegungsverfahren bezog sich auf aus der Diskretisierung linearer, elliptischer Randwertprobleme resultierende, lineare algebraische Gleichungssysteme. Dieser Abschnitt behandelt nun die Anwendung von Gebietszerlegungsmethoden auf nichtlineare, zeitabhängige Probleme, d.h. auf nichtlineare Anfangs-Randwertprobleme wie die geometrisch nichtlineare Strukturdynamik bzw. die Fluiddynamik in der in Kapitel 2 jeweils eingeführten Form, oder auch die Fluid-Struktur-Interaktion in der hier betrachteten Komplexität.

Jedes nichtlineare Anfangs-Randwertproblem läßt sich zunächst durch implizite Zeitdiskretisierung zu einer Folge von n_T nichtlinearen Randwertproblemen umformen, die einmal in jedem Zeitschritt $t^n \rightarrow t^{n+1}$ gelöst werden müssen. Diese können in der zu (3.1) äquivalenten, algebraischen Form wie folgt geschrieben werden:

$$\boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{d}^{n+1}\right)\, \boldsymbol{d}^{n+1} = \boldsymbol{f}_{ext}^{n+1} \tag{4.38}$$

Zu deren Lösung mit (nichtüberlappenden) Gebietszerlegungsmethoden existieren prinzipiell die zwei in *Bild 4.2* dargestellten Strategien (vgl. Quarteroni & Valli (1999) S. 272 ff.):

- Inexakte Newton-Verfahren in Kombination mit Gebietszerlegungsmethoden
- Iterative Substrukturverfahren mit nichtlinearen Teilsystemen

Strategie 1

Die *inexakten Newton-Verfahren* (vgl. auch Anhang A3.2) lösen in jedem Zeitschritt das gesamte System Ω mit Hilfe eines Newton-Raphson-Verfahrens als *äußere* Iteration. Die dabei

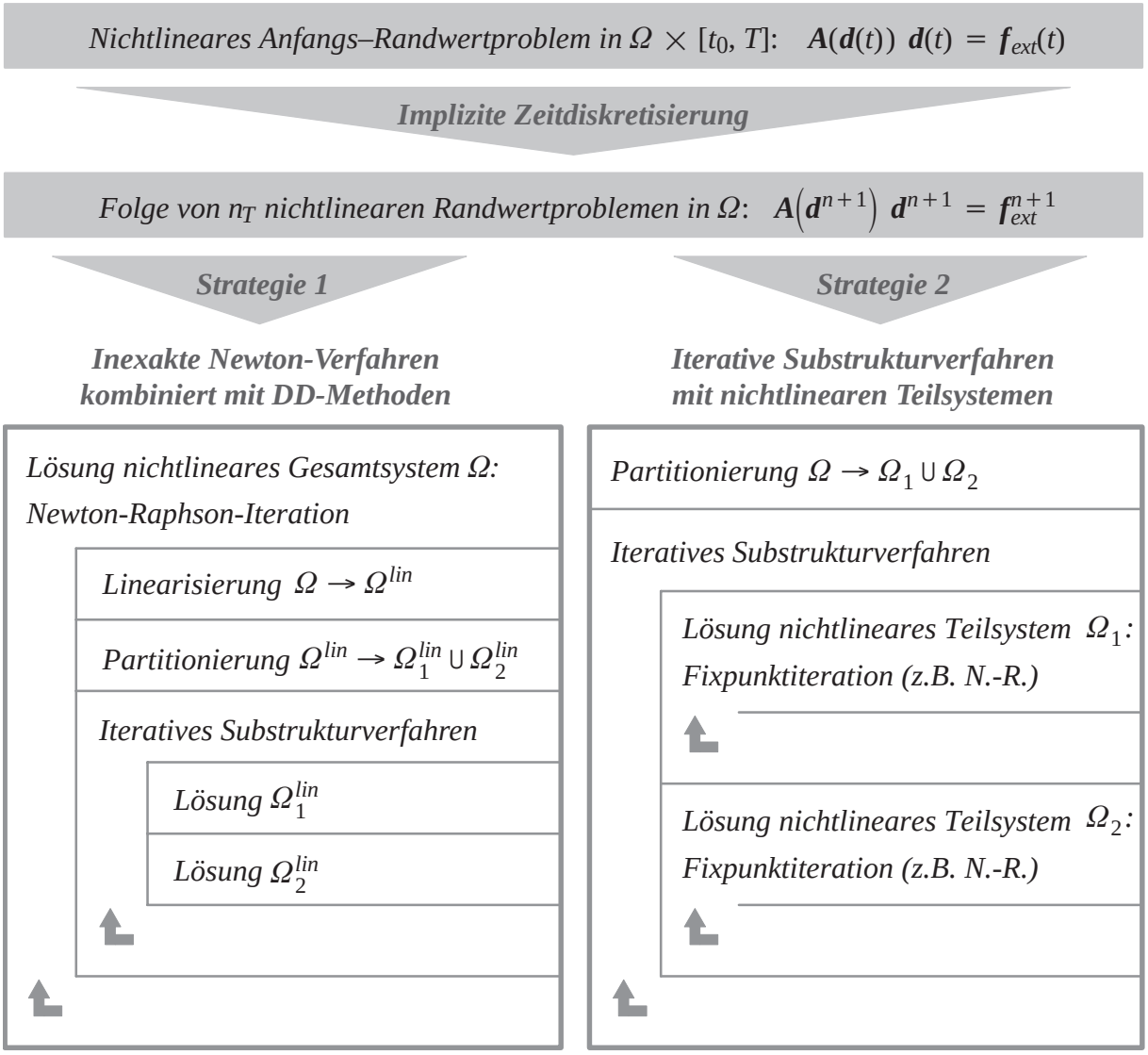


Bild 4.2: Strategien zur Lösung von nichtlinearen, zeitabhängigen Systemen mit Gebietszerlegungsmethoden (DD) (dargestellt für 2 Teilgebiete)

in jedem Newton-Iterationsschritt entstehenden linearisierten Probleme werden dann mit einem beliebigen iterativen Verfahren gelöst. Kommen für diese *innere* Iteration Krylov-Verfahren zum Einsatz, so bezeichnet man den Gesamtalgorithmus als *Newton-Krylov-Verfahren.* Werden weiterhin die Abbruchkriterien der beiden ineinander geschachtelten Iterationen aufeinander abgestimmt, um die Gesamtanzahl der Lösungen und somit den numerischen Aufwand zu reduzieren, spricht man von einem *hybriden* Verfahren. Der Grundgedanke dieser Methoden taucht in der mathematischen Literatur erstmals in Dembo et al. (1982, 1983) auf und wird u.a. von Brown & Saad (1990, 1994) algorithmisch erweitert und durch Konvergenzanalysen ergänzt. Im ingenieurwissenschaftlichen Bereich wurden diese Ideen z.B. von Nour-Omid et al. (1983), Papadrakakis & Gantes (1988) oder Bulenda (1993) aufgegriffen und auf die nichtlineare Finite-Element-Lösung statischer Problemstellungen angewendet. Die Möglichkeit der Kombination von Newton-Krylov-Verfahren mit Gebietszerlegungsmethoden wird u.a. in Cai et al. (1994a, b), Tidriri (1998) und Quarteroni & Valli (1999) angesprochen. Dazu werden die im Rahmen der Newton-Raphson-Iteration linearisierten Probleme für die weitere Lösung

in Teilgebiete Ω_j partitioniert, und dann mit einem iterativen Substrukturverfahren basierend auf einer (Krylov-)Iteration auf den Interface-Variablen gelöst, wie in den vorangegangenen Abschnitten beschrieben und in *Bild 4.2* links dargestellt.

Bemerkung 4.8: Die inexakten Newton-Verfahren sind nicht zu verwechseln mit den *Gebietszerlegungsmethoden mit inexakten Teilgebietslösungen* (Haase et al. (1991a, b, c), Bramble et al. (1998)). Letztere bedienen sich zwar ebenfalls der Idee, daß zwei Iterationen ineinander verschachtelt werden, und die Abbruchkriterien zum Zweck der Reduktion des numerischen Aufwandes aufeinander abgestimmt werden, aber es handelt sich um zwei andere Iterationen, nämlich die iterative Gebietszerlegungsmethode und die Lösung der einzelnen Teilgebiete Ω_j mit iterativen Gleichungslösern. Insofern befinden sich diese Methoden noch eine Stufe weiter innen. Sie können prinzipiell zusätzlich zu den inexakten Newton-Verfahren eingesetzt werden, so daß dann drei Iterationen ineinander verschachtelt werden. Einen solchen Ansatz verfolgt beispielsweise Heise (1995) zur Simulation elektromagnetischer Felder. Er setzt eine Newton-Raphson-Iteration als äußerste Iteration ein, darin für die linearisierten Probleme die bereits angesprochene, nichtüberlappende, iterative Gebietszerlegungsmethode nach Haase et al. (1991b, c) mit wiederum iterativer Lösung der linearen Teilgebiete mittels Mehrgitter-Verfahren.

Strategie 2

Die zweite Strategie zur Lösung nichtlinearer Randwertprobleme mit nichtüberlappenden Gebietszerlegungsverfahren sind *iterative Substrukturverfahren mit nichtlinearen Teilgebieten,* wie in *Bild 4.2* rechts dargestellt. Diese Strategie partitioniert von vornherein das Gesamtsystem Ω in Teilgebiete Ω_j und verwendet als *äußere* Iteration ein iteratives Substrukturverfahren, mit dem das nichtlineare System Ω in jedem Zeitschritt einmal gelöst wird. Die im Rahmen des Substrukturverfahrens benötigten Lösungen der nichtlinearen Teilgebiete Ω_j werden für jedes Ω_j separat ermittelt, wiederum mit Hilfe von Newton-Raphson- oder anderen Fixpunkt- bzw. fixpunktartigen Iterationsverfahren. Ein solcher Ansatz wird in dem in der vorliegenden Arbeit eingesetzten und weiterentwickelten Konzept nach Le Tallec & Mouro (1998, 2001) zur Lösung von Fluid-Struktur-Interaktionsproblemen verwendet. Dieses Konzept basiert auf einer iterativen Dirichlet-Neumann-Substrukturtechnik mit den nichtlinearen Teilgebieten Fluid (inkompressibler Navier-Stokes) und Struktur (geometrisch nichtlineare Strukturdynamik). Es ist in Kapitel 6 detailliert beschrieben und analysiert. Alternative Vorgehensweisen werden beispielsweise von Dryja & Hackbusch (1997) vorgeschlagen, deren Gebietszerlegungsmethode auf einem nichtlinearen Mehrgitterverfahren (d.h. mit nichtlinearen Teilgebietsproblemen) basiert.

Vergleich und Eignung für die untersuchten Problemstellungen

Der große Vorteil der zweiten Strategie ist die uneingeschränkte Software-Modularität, was im Vergleich zu den mit Gebietszerlegungsmethoden kombinierten inexakten Newton-Verfahren zu einer geringeren Programm-Komplexität und größerer Flexibität führt. So können für jedes Teilgebiet völlig unabhängig voneinander separate Programmbausteine weitestgehend

unmodifiziert eingesetzt werden, mit beliebigen für das jeweilige Teilsystem optimierten Lösungsverfahren. Für die Zielanwendung dieser Arbeit – die Fluid-Struktur-Interaktion – ist diese Eigenschaft sogar essentiell, da der verwendete voll gekoppelte Fluid-Löser gar nicht auf einem Newton-Verfahren basiert, sondern auf fixpunktartigen Verfahren, die nur Teile der Navier-Stokes-Gleichungen linearisieren, während für die Strukturdynamik ein Newton-Raphson-Lösungsverfahren in einer Prädiktor-Multikorrektor-Formulierung Standard ist (s. Kapitel 2).

Ein häufig kritisierter Nachteil der zweiten Strategie gegenüber den inexakten Newton-Verfahren ist dagegen, daß man bei der Wahl der dem Substrukturverfahren zugrundeliegenden Iterationsverfahren durch die Nichtlinearität der Iterationsmatrix eingeschränkt ist. Die ansonsten standardmäßig verwendeten orthogonalen Krylov-Iterationsverfahren, wie etwa die Methode der konjugierten Gradienten, sind nicht einsetzbar, da durch den im Verlauf der Iteration veränderlichen Operator die Bedingung der Orthogonalität der aktuellen Suchrichtung auf allen vorherigen nicht erfüllt werden kann. Dies ist wohl auch der Grund, warum in der Literatur zu den iterativen Substrukturverfahren mit nichtlinearen Teilgebieten bisher nur wenige Arbeiten zu finden sind (s.o.). Allerdings zeigen die in den Kapiteln 6 und 7 dokumentierten Untersuchungen, daß sich trotzdem lokal optimale Iterationsverfahren finden lassen, die – zumindest bei den hier untersuchten Problemstellungen – akzeptable bis sogar sehr gute Konvergenzgeschwindigkeiten aufweisen.

Basierend auf diesen Überlegungen wurde in der vorliegenden Arbeit der zweiten Strategie der Vorzug gegeben: Alle in Kapitel 6 untersuchten iterativ gestaffelten, partitionierten Lösungsverfahren sind als iterative Substrukturverfahren mit nichtlinearen Teilgebieten formuliert.

5 Einfach gestaffelte Lösungsverfahren

Nachdem nun die Grundlagen für die Lösung gekoppelter Probleme ausführlich dargelegt wurden, geht dieses Kapitel im Detail auf eine Auswahl von einfach gestaffelten, partitionierten Lösungsverfahren ein, die für die Simulation von oberflächengekoppelten strukturdynamischen und FSI-Problemen prinzipiell geeignet erscheinen, und die daher im Rahmen dieser Forschungsarbeit auch in das Finite-Element-Programmsystem CARAT implementiert wurden. Dabei handelt es sich sowohl um Verfahren, die aus der Literatur bereits bekannt sind, als auch um eigene (Weiter-)Entwicklungen. Algorithmisch-implementatorische Aspekte und numerische Eigenschaften werden diskutiert.

5.1 Allgemeines

Wie schon in Kapitel 3 angesprochen sind einfach gestaffelte Verfahren dadurch charakterisiert, daß in jedem Zeitschritt die Bewegungsgleichung der Teilgebiete nur genau einmal gelöst wird, und ebenso auch die Kopplungsinformationen zwischen den Teilgebieten je Zeitschritt nur genau einmal ausgetauscht werden. Danach wird unmittelbar zum nächsten Zeitschritt übergegangen. Die Lösung der Teilgebiete im Zeitschritt kann sequentiell nacheinander oder parallel zueinander erfolgen. Wird dabei in beiden Teilgebieten das identische Zeitintervall für die Zeitintegration verwendet (beide beginnend am Zeitpunkt t^n), wird das Vorgehen als synchrones Verfahren bezeichnet. Ist die Zeitintegration dagegen versetzt, so spricht man von einem asynchronen Verfahren. Alle hier untersuchten Methoden basieren auf dem in Abschnitt 3.1.1 eingeführten und in *Bild 5.1* nochmals dargestellten elementweisen bzw. nichtüberlappenden Dirichlet-Neumann-Partitionierungskonzept. Da in dieser Formulierung für das Teilgebiet Ω_1

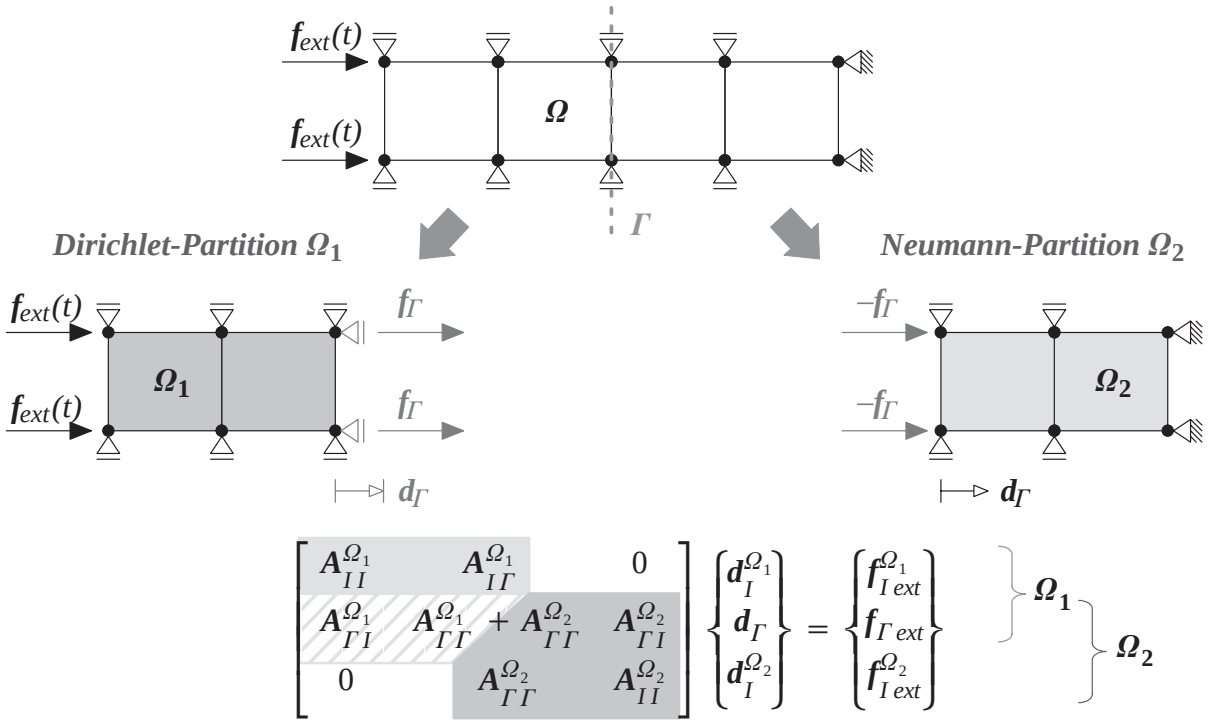


Bild 5.1: Elementweise/nichtüberlappende Dirichlet-Neumann-Partitionierung

die freien Verschiebungen der Interfaceknoten in Ω_2 als Dirichlet-Randbedingung $\boldsymbol{d}_\Gamma$ vorgeschrieben werden, wird Ω_1 hier als *Dirichlet-Partition* bezeichnet. Entsprechend wird für Ω_2 der Begriff *Neumann-Partition* verwendet, da die zum Aufbringen der vorgeschriebenen Verschiebungen $\boldsymbol{d}_\Gamma$ nötigen Kopplungskräfte $\boldsymbol{f}_\Gamma$ wiederum auf Ω_2 als Neumann-Randbedingung wirken. Desweiteren ist in *Bild 5.1* das zugehörige partitionierte, algebraische Gleichungssystem (3.2) in der bereits eingeführten, verallgemeinerten Darstellungsweise zur Wiederholung nochmals angegeben. Die zur Lösung von Ω_1 benötigten Koeffizientenanteile sind hellgrau, die Anteile für die Berechnung der Kopplungskräfte hellgrau schraffiert und diejenigen für die Lösung von Ω_2 dunkelgrau hinterlegt.

5.2 Sequentiell gestaffeltes Grundverfahren

Die simpelste Form eines synchronen, sequentiell gestaffelten Lösungsverfahrens reiht einfach die Berechnung der beiden Teilgebiete sequentiell hintereinander, und tauscht die jeweils aktuell direkt verfügbare Kopplungsinformation aus. In *Bild 5.2* ist der Informationsfluß zwi-

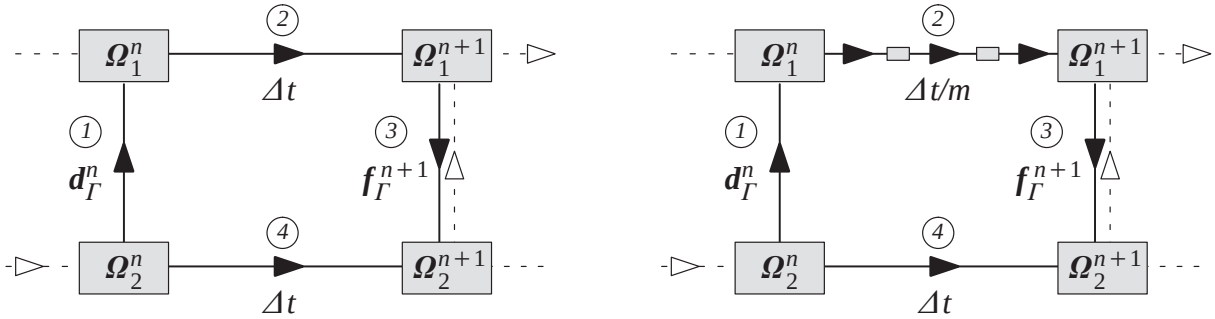


Bild 5.2: Synchrones, sequentiell gestaffeltes Grundverfahren: Ablaufdiagramme ohne Subcycling (links) und mit Subcycling (rechts)

schen den Teilgebieten und die Reihenfolge der algorithmischen Schritte bei der partitionierten Lösung innerhalb eines Zeitschrittes $t^n \rightarrow t^{n+1}$ schematisch abgebildet. Unter Verwendung der verallgemeinerten Darstellungsweise des partitionierten, algebraischen Gleichungssystems (3.2) ergibt sich der *Algorithmus 5.1*.

Dieses Grundverfahren ist von vielen Autoren in hinsichtlich der Implementierung unterschiedlichen Varianten (Zeitintegrationsverfahren, Anwendungsgebiete, Subcycling) eingesetzt worden, erstmalig jedoch von Felippa, Park & DeRuntz (1977) für Fluid-Struktur-Interaktion bzw. Park & Felippa (1980) für allgemeine gekoppelte Probleme. Im folgenden werden zunächst drei mögliche Anwendungsvarianten im Detail beschrieben, so wie sie in das FEM-Programmsystem CARAT implementiert und für die numerischen Untersuchungen verwendet wurden. Anschließend folgt eine Diskussion über spezifische Eigenschaften dieses Ansatzes.

E^m–I–Formulierung für die nichtlineare Strukturdynamik

In Mok et al. (1999c) wurde die hier als *Algorithmus 5.2* dargestellte explizit–implizite Formulierung des sequentiell gestaffelten Grundverfahrens mit Subcycling der expliziten Partition

0. Initialisierung: Setze $n = 0$. *Startlösungen* $\boldsymbol{d}^{\Omega_j,0}$ *seien gegeben.*

Schleife über alle n_T *Zeitschritte*

1. Übergebe Variablen auf dem Kopplungsrand $\boldsymbol{d}_\Gamma^n$ *von* Ω_2 *an* Ω_1

2. Integriere Dirichlet-Partition Ω_1 *von* t^n *nach* t^{n+1} *mit Dirichlet-R.B.* $\boldsymbol{d}_\Gamma^n$

$$\boldsymbol{A}_{II}^{\Omega_1}\,\boldsymbol{d}_I^{\Omega_1,n+1} = \boldsymbol{f}_{I\,ext}^{\Omega_1,n+1} - \boldsymbol{A}_{I\Gamma}^{\Omega_1}\,\boldsymbol{d}_\Gamma^n \tag{5.1}$$

3. Berechne Kopplungskräfte $\boldsymbol{f}_\Gamma^{n+1}$ *in* Ω_1 *und übergebe sie an* Ω_2

$$\boldsymbol{f}_\Gamma^{n+1} = \boldsymbol{A}_{\Gamma I}^{\Omega_1}\,\boldsymbol{d}_I^{\Omega_1,n+1} + \boldsymbol{A}_{\Gamma\Gamma}^{\Omega_1}\,\boldsymbol{d}_\Gamma^n \tag{5.2}$$

4. Integriere Neumann-Partition Ω_2 *von* t^n *nach* t^{n+1} *mit Neumann-R.B.* $\boldsymbol{f}_\Gamma^{n+1}$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{\Gamma\Gamma}^{\Omega_2} & \boldsymbol{A}_{\Gamma I}^{\Omega_2} \\ \boldsymbol{A}_{I\Gamma}^{\Omega_2} & \boldsymbol{A}_{II}^{\Omega_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{d}_\Gamma^{n+1} \\ \boldsymbol{d}_I^{\Omega_2,n+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{f}_{\Gamma\,ext}^{n+1} - \boldsymbol{f}_\Gamma^{n+1} \\ \boldsymbol{f}_{I\,ext}^{\Omega_2,n+1} \end{Bmatrix} \tag{5.3}$$

$n \leftarrow n + 1 \quad bis\ n + 1 = n_T$

Algorithmus 5.1: Synchrones, sequentiell gestaffeltes Grundverfahren

für die nichtlineare Strukturdynamik vorgeschlagen. In der expliziten Dirichlet-Partition Ω_1 wird das zentrale Differenzenverfahren (CD) und in der impliziten Neumann-Partition Ω_2 das Generalized-α-Verfahren eingesetzt. Der subcycling-freie Fall (*E–I*) ergibt sich aus der dargestellten E^m–*I*–Formulierung durch Setzen von $m = 1$. Eine Variante, in der die Dirichlet-Partition Ω_1 mit dem expliziten PCE-Hilber-α-Verfahren nach Miranda et al. (1989) integriert wird, ermöglicht den Einsatz von kontrollierter numerischer Dissipation in beiden Teilgebieten.

Die Schlüsselidee des hier vorgeschlagenen explizit–impliziten Verfahrens mit Subcycling ist, daß die Kopplungsverschiebung $\boldsymbol{d}_\Gamma^{n+(k+1)/m}$ ($k+1 = 0,\ldots,m$), die als Dirichlet-Kopplungsrandbedingung für die Zeitintegration in der zuerst integrierten Dirichlet-Partition Ω_1 am Ende jedes (Subcycling-)Zeitschritts benötigt wird, mit dem selben Zeitintegrationsansatz aus der nur am Beginn des (Subcycling-)Zeitschritts verfügbaren Kopplungsbeschleunigung $\ddot{\boldsymbol{d}}_\Gamma^{n+k/m}$ ermittelt wird, der auch für die Zeitintegration in Ω_1 verwendet wird, also mit dem zentralen Differenzenverfahren (CD) bzw. dem PCE-Hilber-α-Verfahren. Dadurch ist die kinematische Kopplungsrandbedingung konsistent mit dem verwendeten Zeitintegrationsverfahren. Die Kopplungsbeschleunigung wird zur Zeit t^n von Ω_2 an Ω_1 übergeben und danach über alle Subcyclingschritte hinweg konstant gehalten (Gl. (5.4)), woraus durch Kombination mit den CD-Ansätzen (2.53) die Interfaceverschiebung (5.5) und -geschwindigkeit (5.6) folgen. Das Konstanthalten der Kopplungsbeschleunigung ist dabei notwendig, um ein Abfallen der Genauigkeit durch das Subcycling zu verhindern; die Gründe hierfür werden weiter unten (siehe „Besonderheiten beim Subcycling-Verfahren“) im Detail erörtert.

0. Initialisierung: Setze $n = 0$. Startlösungen $\boldsymbol{d}^{\Omega_j,0}$, $\dot{\boldsymbol{d}}^{\Omega_j,0}$, $\ddot{\boldsymbol{d}}^{\Omega_j,0}$ seien gegeben.

Schleife über alle n_T Zeitschritte

1. Übergebe Interface-Beschleunigung $\ddot{\boldsymbol{d}}_\Gamma^n$ von Ω_2 an Ω_1

Schleife über alle m Subcycling-Schritte (Start: k = 0)

2a. Extrapoliere Interface-Verschiebung und -Geschwindigkeit in Ω_1 (CD)

Setze: $$\ddot{\boldsymbol{d}}_\Gamma^{n+\frac{k+1}{m}} = \ddot{\boldsymbol{d}}_\Gamma^n = \text{konst.} \;\forall\; k = 0,\ldots,m-1 \tag{5.4}$$

$$\boldsymbol{d}_\Gamma^{n+\frac{k+1}{m}} = \boldsymbol{d}_\Gamma^{n+\frac{k}{m}} + \frac{\Delta t}{m}\dot{\boldsymbol{d}}_\Gamma^{n+\frac{k}{m}} + \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta t}{m}\right)^2 \ddot{\boldsymbol{d}}_\Gamma^n \tag{5.5}$$

$$\dot{\boldsymbol{d}}_\Gamma^{n+\frac{k+1}{m}} = \dot{\boldsymbol{d}}_\Gamma^{n+\frac{k}{m}} + \frac{\Delta t}{m}\ddot{\boldsymbol{d}}_\Gamma^n \tag{5.6}$$

2b. Integriere Partition Ω_1 (CD) mit Dirichlet-R.B. $\boldsymbol{d}_\Gamma^{n+\frac{k+1}{m}}$ von Schritt 2a

$$\boldsymbol{d}_I^{\Omega_1,n+\frac{k+1}{m}} = \boldsymbol{d}_I^{\Omega_1,n+\frac{k}{m}} + \frac{\Delta t}{m}\dot{\boldsymbol{d}}_I^{\Omega_1,n+\frac{k}{m}} + \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta t}{m}\right)^2 \ddot{\boldsymbol{d}}_I^{\Omega_1,n+\frac{k}{m}} \tag{5.7}$$

$$\ddot{\boldsymbol{d}}_I^{\Omega_1,n+\frac{k+1}{m}} = \boldsymbol{M}_{II}^{\Omega_1\,-1}\left(\boldsymbol{f}_{I\,ext}^{\Omega_1,n+\frac{k+1}{m}} - \boldsymbol{f}_{I\,int}^{\Omega_1}\left(\boldsymbol{d}^{\Omega_1,n+\frac{k+1}{m}}\right)\right) \tag{5.8}$$

$$\dot{\boldsymbol{d}}_I^{\Omega_1,n+\frac{k+1}{m}} = \dot{\boldsymbol{d}}_I^{\Omega_1,n+\frac{k}{m}} + \frac{\Delta t}{2m}\left(\ddot{\boldsymbol{d}}_I^{\Omega_1,n+\frac{k}{m}} + \ddot{\boldsymbol{d}}_I^{\Omega_1,n+\frac{k+1}{m}}\right) \tag{5.9}$$

$k \leftarrow k+1 \quad bis\; k+1 = m$

3. Berechne Kopplungskräfte $\boldsymbol{f}_\Gamma^{n+1}$ in Ω_1 und übergebe sie an Ω_2

$$\boldsymbol{f}_\Gamma^{n+1} = \boldsymbol{f}_{I\,int}^{\Omega_1}\left(\boldsymbol{d}^{\Omega_1,n+1}\right) + \boldsymbol{M}_{\Gamma\Gamma}^{\Omega_1}\,\ddot{\boldsymbol{d}}_\Gamma^{n+1} \quad \text{mit } \ddot{\boldsymbol{d}}_\Gamma^{n+1} = \ddot{\boldsymbol{d}}_\Gamma^n \text{ (gemäß (5.4))} \tag{5.10}$$

4. Integriere Partition Ω_2 mit Neumann-R.B. $\boldsymbol{f}_\Gamma^{n+1}$
(Prädiktor-Multikorrektor-Generalized-α, s. Anhang A2.1, Algorithmus A.1)

$$\frac{1-\alpha_m}{\beta\Delta t^2}\boldsymbol{M}^{\Omega_2}\boldsymbol{d}^{\Omega_2,n+1} + (1-\alpha_f)\,\boldsymbol{f}_{int}^{\Omega_2}\left(\boldsymbol{d}^{\Omega_2,n+1}\right) = -\alpha_f\,\boldsymbol{f}_{int}^{\Omega_2}\left(\boldsymbol{d}^{\Omega_2,n}\right) +$$
$$+\,\boldsymbol{M}^{\Omega_2}\boldsymbol{h}\left(\boldsymbol{d}^{\Omega_2,n},\dot{\boldsymbol{d}}^{\Omega_2,n},\ddot{\boldsymbol{d}}^{\Omega_2,n}\right) + (1-\alpha_f)\begin{Bmatrix}\boldsymbol{f}_{\Gamma\,ext}^{n+1} - \boldsymbol{f}_\Gamma^{n+1}\\ \boldsymbol{f}_{I\,ext}^{\Omega_2,n+1}\end{Bmatrix} + \alpha_f\begin{Bmatrix}\boldsymbol{f}_{\Gamma\,ext}^{n}\\ \boldsymbol{f}_{I\,ext}^{\Omega_2,n}\end{Bmatrix} \tag{5.11}$$

mit $\boldsymbol{h}$ *nach* (2.46); $\boldsymbol{M}^{\Omega_2} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{M}_{\Gamma\Gamma}^{\Omega_2} & \boldsymbol{M}_{\Gamma I}^{\Omega_2}\\ \boldsymbol{M}_{I\Gamma}^{\Omega_2} & \boldsymbol{M}_{II}^{\Omega_2}\end{bmatrix}$; $\boldsymbol{d}^{\Omega_2} = \begin{Bmatrix}\boldsymbol{d}_\Gamma\\ \boldsymbol{d}_I^{\Omega_2}\end{Bmatrix}$; $\boldsymbol{f}_{int}^{\Omega_2} = \begin{Bmatrix}\boldsymbol{f}_{\Gamma\,int}\\ \boldsymbol{f}_{I\,int}^{\Omega_2}\end{Bmatrix}$

$n \leftarrow n+1 \quad bis\; n+1 = n_T$

Algorithmus 5.2: Synchrones, sequent. gestaffeltes E^m–I–Grundverf. für die Strukturdynamik

I–I–Formulierung für die nichtlineare Strukturdynamik

Wird in beiden Partitionen, Ω_1 und Ω_2, das implizite Generalized-α-Verfahren eingesetzt, so ergibt sich die in *Algorithmus 5.3* für die nichtlineare Strukturdynamik beschriebene I–I–Formulierung. Da die implizite Zeitintegration mittels des Generalized-α-Verfahren keiner Zeitschrittgrößenbeschränkung unterliegt, ist die Verwendung unterschiedlich großer Zeitschritte in den beiden Teilbereichen im allgemeinen nicht erforderlich.

I–I–Formulierung für die Fluid-Struktur-Interaktion

Die entsprechende I–I–Formulierung angewendet auf Fluid-Struktur-Interaktionsprobleme ist letztlich in *Algorithmus 5.4* dargestellt. Hier entspricht die Dirichlet-Partition Ω_1 dem Fluid zusammen mit dem bewegten Fluid-Netz, während die Neumann-Partition Ω_2 der Struktur zugeordnet ist (*Bild 5.3*). Die Zeitintegration des Fluides erfolgt in dieser Formulierung mit dem Einschritt-θ-Verfahren, das für $\theta > 0$ implizit ist (Abschnitt 2.2.4). Für das Fluid-Netz wird der in Abschnitt 2.3 beschriebene Pseudo-Struktur-Ansatz verwendet, und die Struktur wird wiederum mit dem impliziten Generalized-α-Verfahren zeitintegriert.

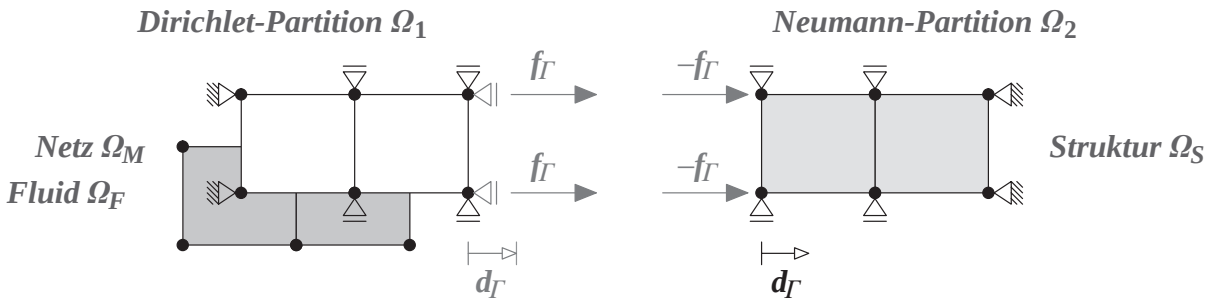


Bild 5.3: Dirichlet-Neumann-Partitionierung für die Fluid-Struktur-Interaktion

Diskussion der numerischen Eigenschaften

Im Fall der hier untersuchten nichtüberlappenden Partitionen verletzt dieses einfache partitionierte Lösungsverfahren generell die kinematische Kontinuitätsbedingung. Die dynamische Kontinuität ist hingegen gewährleistet. Somit erhält das sequentiell gestaffelte Grundverfahren weder Masse noch Energie am Interface, ist aber impulserhaltend (vgl. Abschnitt 3.4.2). Im Detail ist dies wie folgt begründet.

- *Kinematische Kontinuität*

Die diskrete kinematische Kontinuität erfordert, daß zu jedem diskreten Zeitpunkt die kinematischen Größen in beiden Partitionen identisch sind, wobei die Forderung im Falle unterschiedlicher Zeitintegrationsverfahren in den Teilgebieten auf eine der drei kinematischen Variablen beschränkt wird (vgl. die Ausführungen in Abschnitt 3.4.1 zur Kontinuität). In diesem Grundverfahren steht für die zuerst integrierte Dirichlet-Partition Ω_1 (Schritt 1 der dargestellten Algorithmen) mit $\boldsymbol{d}_\Gamma^n$ bzw. $\ddot{\boldsymbol{d}}_\Gamma^n$ nur die Kopplungsrandbedingung am Beginn des Zeitschrittes zur Verfügung. Wird Ω_1 nun *implizit* zeitintegriert, so bedeutet dies, daß die Interface-Verschiebung am Zeitschritt-Ende t^{n+1} durch diesen veralteten Wert $\boldsymbol{d}_\Gamma^n$ approximiert wird (Gleichun-

0. Initialisierung: *Setze* $n = 0$. *Startlösungen* $\boldsymbol{d}^{\Omega_j,0}$, $\dot{\boldsymbol{d}}^{\Omega_j,0}$, $\ddot{\boldsymbol{d}}^{\Omega_j,0}$ *seien gegeben.*

Schleife über alle n_T *Zeitschritte*

1. Übergebe Interface-Verschiebung $\boldsymbol{d}_\Gamma^n$ *von* Ω_2 *an* Ω_1

2. Integriere Partition Ω_1 *mit Dirichlet-R.B.* $\boldsymbol{d}_\Gamma^n$
(Prädiktor-Multikorrektor-Generalized-α*, s. Anhang A2.1, Algorithmus A.2)*

$$\frac{1-\alpha_m}{\beta\Delta t^2}\boldsymbol{M}_{II}^{\Omega_1}\boldsymbol{d}_I^{\Omega_1,n+1} + (1-\alpha_f)\,\boldsymbol{f}_{I\,int}^{\Omega_1}\left(\boldsymbol{d}^{\Omega_1,n+1}\right) = -\alpha_f\,\boldsymbol{f}_{I\,int}^{\Omega_1}\left(\boldsymbol{d}^{\Omega_1,n}\right) +$$

$$+\,\boldsymbol{M}_{II}^{\Omega_1}\boldsymbol{h}\left(\boldsymbol{d}_I^{\Omega_1,n},\dot{\boldsymbol{d}}_I^{\Omega_1,n},\ddot{\boldsymbol{d}}_I^{\Omega_1,n}\right) + (1-\alpha_f)\boldsymbol{f}_{I\,ext}^{\Omega_1,n+1} + \alpha_f\,\boldsymbol{f}_{I\,ext}^{\Omega_1,n} \quad (5.12)$$

mit $\boldsymbol{h}$ *nach* (2.46); $\boldsymbol{d}^{\Omega_1,n+1} = \begin{Bmatrix}\boldsymbol{d}_{I,\,i+1}^{\Omega_1,n+1}\\ \boldsymbol{d}_{\Gamma,\,i}^n\end{Bmatrix}$; $\boldsymbol{d}^{\Omega_1,n} = \begin{Bmatrix}\boldsymbol{d}_I^{\Omega_1,n}\\ \boldsymbol{d}_\Gamma^n\end{Bmatrix}$

3. Berechne Kopplungskräfte $\boldsymbol{f}_\Gamma^{n+1}$ *in* Ω_1 *und übergebe sie an* Ω_2

$$\boldsymbol{f}_\Gamma^{n+1} = \frac{1}{1-\alpha_f}\Big(-\alpha_f\,\boldsymbol{f}_\Gamma^n + (1-\alpha_f)\,\boldsymbol{f}_{\Gamma\,int}\left(\boldsymbol{d}^{\Omega_1,n+1}\right) + \alpha_f\,\boldsymbol{f}_{\Gamma\,int}\left(\boldsymbol{d}^{\Omega_1,n}\right) -$$

$$-\left[\boldsymbol{M}_{\Gamma I}^{\Omega_1}\;\boldsymbol{M}_{\Gamma\Gamma}^{\Omega_1}\right]\boldsymbol{h}\left(\boldsymbol{d}^{\Omega_1,n}-\boldsymbol{d}^{\Omega_1,n+1},\dot{\boldsymbol{d}}^{\Omega_1,n},\ddot{\boldsymbol{d}}^{\Omega_1,n}\right)\Big) \quad (5.13)$$

mit $\boldsymbol{h}$, $\boldsymbol{d}^{\Omega_1,n+1}$ *und* $\boldsymbol{d}^{\Omega_1,n}$ *wie in Schritt 2.*

4. Integriere Partition Ω_2 *mit Neumann-R.B.* $\boldsymbol{f}_\Gamma^{n+1}$
(Prädiktor-Multikorrektor-Generalized-α*, s. Anhang A2.1, Algorithmus A.1)*

$$\frac{1-\alpha_m}{\beta\Delta t^2}\boldsymbol{M}^{\Omega_2}\boldsymbol{d}^{\Omega_2,n+1} + (1-\alpha_f)\,\boldsymbol{f}_{int}^{\Omega_2}\left(\boldsymbol{d}^{\Omega_2,n+1}\right) = -\alpha_f\,\boldsymbol{f}_{int}^{\Omega_2}\left(\boldsymbol{d}^{\Omega_2,n}\right) +$$

$$+\,\boldsymbol{M}^{\Omega_2}\boldsymbol{h}\left(\boldsymbol{d}^{\Omega_2,n},\dot{\boldsymbol{d}}^{\Omega_2,n},\ddot{\boldsymbol{d}}^{\Omega_2,n}\right) + (1-\alpha_f)\begin{Bmatrix}\boldsymbol{f}_{\Gamma\,ext}^{n+1}-\boldsymbol{f}_\Gamma^{n+1}\\ \boldsymbol{f}_{I\,ext}^{\Omega_2,n+1}\end{Bmatrix} + \alpha_f\begin{Bmatrix}\boldsymbol{f}_{\Gamma\,ext}^{n}\\ \boldsymbol{f}_{I\,ext}^{\Omega_2,n}\end{Bmatrix} \quad (5.14)$$

mit $\boldsymbol{h}$ *nach* (2.46); $\boldsymbol{M}^{\Omega_2} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{M}_{\Gamma\Gamma}^{\Omega_2} & \boldsymbol{M}_{\Gamma I}^{\Omega_2}\\ \boldsymbol{M}_{I\Gamma}^{\Omega_2} & \boldsymbol{M}_{II}^{\Omega_2}\end{bmatrix}$; $\boldsymbol{d}^{\Omega_2} = \begin{Bmatrix}\boldsymbol{d}_\Gamma\\ \boldsymbol{d}_I^{\Omega_2}\end{Bmatrix}$; $\boldsymbol{f}_{int}^{\Omega_2} = \begin{Bmatrix}\boldsymbol{f}_{\Gamma\,int}\\ \boldsymbol{f}_{I\,int}^{\Omega_2}\end{Bmatrix}$

$n \leftarrow n+1$ *bis* $n+1 = n_T$

Algorithmus 5.3: Synchrones, sequentiell gestaffeltes I–I–Grundverfahren für die Strukturdynamik

0. Initialisierung: Startlösungen für Fluid Ω_F, Fluid-Netz Ω_M und Struktur Ω_S; $n = 0$.

Schleife über alle n_T Zeitschritte

1. Übergebe Interface-Verschiebung $\boldsymbol{d}_\Gamma^n$ von Ω_S an Ω_M

2a. Löse Fluid-Netz $\boldsymbol{\Omega_M}$ mit Dirichlet-R.B. $\boldsymbol{r}_\Gamma^{n+1} = \boldsymbol{d}_\Gamma^n$

$$\boldsymbol{K}_{II}^M \, \boldsymbol{r}_I^{n+1} = -\boldsymbol{K}_{I\Gamma}^M \, \boldsymbol{r}_\Gamma^{n+1} \tag{5.15}$$

2b. Berechne neue Netzgeschwindigkeit unter Einhaltung der GCL

$$\boldsymbol{u}^{G,\, n\to n+1} = \frac{\boldsymbol{r}^{n+1} - \boldsymbol{r}^n}{\Delta t} \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{u}^G = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{u}_I^G \\ \boldsymbol{u}_\Gamma^G \end{Bmatrix} ; \; \boldsymbol{r} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{r}_I \\ \boldsymbol{r}_\Gamma \end{Bmatrix} \tag{5.16}$$

2c. Übergebe Netzdeformation $\boldsymbol{r}^{n+1}$ und -geschwindigkeit $\boldsymbol{u}^{G,\, n\to n+1}$ von Ω_M an Ω_F

2d. Integriere Fluid Ω_F auf neuem Netz: $\boldsymbol{r}^{n+1}$, $\boldsymbol{u}^{G,\, n\to n+1}$

$$\left(\frac{1}{\Delta t}\boldsymbol{M}^F + \theta\left(\boldsymbol{N}^F(\boldsymbol{c}^{n+1}) + \boldsymbol{K}^F\right)\right) \boldsymbol{u}^{n+1} + \theta\, \boldsymbol{G}^F \boldsymbol{p}^{n+1} =$$

$$= \left(\frac{1}{\Delta t}\boldsymbol{M}^F - (1-\theta)\left(\boldsymbol{N}^F(\boldsymbol{c}^n) + \boldsymbol{K}^F\right)\right) \boldsymbol{u}^n - (1-\theta)\, \boldsymbol{G}^F \boldsymbol{p}^n + \theta\, \boldsymbol{f}_{ext}^{n+1} + (1-\theta)\, \boldsymbol{f}_{ext}^n \tag{5.17}$$

$$\text{mit} \quad \boldsymbol{c}^{n+1} = \boldsymbol{u}^{n+1} - \boldsymbol{u}^{G,\, n\to n+1} \; ; \; \boldsymbol{c}^n = \boldsymbol{u}^n - \boldsymbol{u}^{G,\, n\to n+1}$$

3. Übergebe Interface-Druck $\boldsymbol{p}_\Gamma^{n+1}$ (und viskose Spannungen $\boldsymbol{\tau}_\Gamma^{n+1}$) von Ω_F an Ω_S

4a. Berechne daraus konsistenten Knotenlastvektor $\boldsymbol{f}_\Gamma^{n+1}\left(\boldsymbol{p}_\Gamma^{n+1}, \; \boldsymbol{\tau}_\Gamma^{n+1}\right)$ in Ω_S

4b. Integriere Struktur Ω_S mit Neumann-R.B. $\boldsymbol{f}_\Gamma^{n+1}$
(Prädiktor-Multikorrektor-Generalized-α, s. Anhang A2.1, Algorithmus A.1)

$$\frac{1-\alpha_m}{\beta \Delta t^2} \boldsymbol{M}^S \boldsymbol{d}^{n+1} + (1-\alpha_f)\, \boldsymbol{f}_{int}\left(\boldsymbol{d}^{n+1}\right) = -\alpha_f\, \boldsymbol{f}_{int}(\boldsymbol{d}^n) +$$

$$+ \boldsymbol{M}^S \boldsymbol{h}\left(\boldsymbol{d}^n, \dot{\boldsymbol{d}}^n, \ddot{\boldsymbol{d}}^n\right) + (1-\alpha_f) \begin{Bmatrix} \boldsymbol{f}_{\Gamma\, ext}^{n+1} - \boldsymbol{f}_\Gamma^{n+1} \\ \boldsymbol{f}_{I\, ext}^{n+1} \end{Bmatrix} + \alpha_f \begin{Bmatrix} \boldsymbol{f}_{\Gamma\, ext}^n \\ \boldsymbol{f}_{I\, ext}^n \end{Bmatrix} \tag{5.18}$$

$$\text{mit } \boldsymbol{h} \text{ nach (2.46)} ; \; \boldsymbol{M}^S = \begin{bmatrix} \boldsymbol{M}_{\Gamma\Gamma}^S & \boldsymbol{M}_{\Gamma I}^S \\ \boldsymbol{M}_{I\Gamma}^S & \boldsymbol{M}_{II}^S \end{bmatrix} ; \; \boldsymbol{d} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{d}_\Gamma \\ \boldsymbol{d}_I \end{Bmatrix} ; \; \boldsymbol{f}_{int} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{f}_{\Gamma\, int} \\ \boldsymbol{f}_{I\, int} \end{Bmatrix}$$

$n \leftarrow n + 1 \quad \text{bis } n + 1 = n_T$

Algorithmus 5.4: Synchrones, sequentiell gestaffeltes I–I–Grundverfahren für die Fluid-Struktur-Interaktion

gen (5.1), (5.12) bzw. (5.15)), während nach anschließender Integration der Partition Ω_2 dort am Ende des Zeitschrittes die neu berechnete Interface-Verschiebung $\boldsymbol{d}_\Gamma^{n+1}$ existiert. Somit ist die kinematische Kontinuität nicht gegeben ($\boldsymbol{d}_\Gamma^{\Omega_1,\,n+1} = \boldsymbol{d}_\Gamma^{n} \neq \boldsymbol{d}_\Gamma^{\Omega_2,\,n+1} = \boldsymbol{d}_\Gamma^{n+1}$), sondern die Lösung in Ω_1 „hinkt“ um einen Zeitschritt hinterher. Man begeht folglich einen Fehler der Größenordnung $O(\Delta t)$. Außerdem wird in einer I–I–Formulierung auch das ICL verletzt, da implizite Zeitintegrationsverfahren die Kopplungsrandbedingung am Ende oder innerhalb des Zeitschrittes $t^{n+\alpha}$ $(0 < \alpha \leq 1)$ benötigen.

Wird hingegen ein *explizites* Zeitintegrationsverfahren in Ω_1 verwendet, so kann aus den gegebenen Bewegungs- und Kopplungsgrößen zur Zeit t^n der Verschiebungszustand zur Zeit t^{n+1} für die Freiheitsgrade im Innern und auch auf dem Interface konsistent ermittelt werden (Gleichungen (5.5) und (5.7) mit $k = 0$, $m = 1$). Somit ist das ICL hinsichtlich der kinematischen Kopplungsgröße erfüllt. Allerdings ergibt sich nach anschließender, impliziter Integration der Partition Ω_2 dort am Ende des Zeitschrittes trotzdem wieder eine andere Interface-Verschiebung als die in Ω_1 extrapolierte, weshalb die kinematische Kontinuität gleichwohl nicht exakt erfüllt ist. Der Fehler ist jedoch sehr viel kleiner als in der I–I–Formulierung, da die Extrapolation mittels des Zentralen Differenzenverfahrens bzw. des PCE-Hilber-α-Verfahrens von zweiter Ordnung genau ist.

Ein zweites Problem stellt die *Berechnung der Kopplungslasten* $\boldsymbol{f}_\Gamma^{n+1}$ in Ω_1 dar. Da dieser Partition nur die veraltete kinematische Kopplungsrandbedingung zur Verfügung steht, ist die Berechnung von $\boldsymbol{f}_\Gamma^{n+1}$ in jedem Fall, also sowohl bei expliziter als auch bei impliziter Zeitintegration, inkonsistent (für Konsistenz müßte Gleichung (5.2) eigentlich lauten: $\boldsymbol{f}_\Gamma^{n+1} = \boldsymbol{A}_{\Gamma I}^{\Omega_1}\, \boldsymbol{d}_I^{\Omega_1,\,n+1} + \boldsymbol{A}_{\Gamma\Gamma}^{\Omega_1}\, \boldsymbol{d}_\Gamma^{n+1}$; analoges gilt für die Gleichungen (5.10) bzw. (5.13), sowie für Schritt 3 in *Algorithmus 5.4*, wo die Fluidlasten auf das Interface mit der veralteten Interfaceposition berechnet werden). Hier wird also wiederum ein Fehler der Größe $O(\Delta t)$ begangen.

- *Dynamische Kontinuität*

Trotzdem ist die diskrete dynamische Kontinuität am Interface ($\boldsymbol{f}_\Gamma^{\Omega_2,\,n+1} = -\boldsymbol{f}_\Gamma^{\Omega_1,\,n+1}$) gewährleistet, da die zur Zeit t^{n+1} auf das Interface in Ω_1 wirkende Kraft – also die Kraft, die zur Zeit t^{n+1} das dynamische Gleichgewicht in Ω_1 in der durch die kinematische Kopplungsrandbedingung vorgegebenen Konfiguration erfüllt – als Kopplungslast auf Ω_2 aufgebracht wird, wo anschließend ein dazu passender Bewegungszustand zur Zeit t^{n+1} so ermittelt wird, daß dieses Teilsystem wiederum im Gleichgewicht ist. Also ist auch das dynamische Gleichgewicht zwischen den Teilgebieten zur Zeit t^{n+1} erfüllt und somit gemäß Gleichung (3.17) die Impulserhaltung am Interface gewährleistet. Diese Argumentation trifft auf alle partitionierten Lösungsalgorithmen zu, bei denen in einer sequentiellen Abfolge nach der Zeitintegration des ersten Teilfeldes die Kopplungslasten an einem bestimmten Zeitpunkt $t^{n+\alpha}$ innerhalb des Zeitschrittes ermittelt werden, an dem diese danach bei der Zeitintegration des anderen Teilfeldes auch als zu erfüllende Neumann-Randbedingung berücksichtigt werden. Insbesondere gilt dies, wie in Abschnitt 3.4.2 bereits angemerkt, für alle in dieser Arbeit beschriebenen, auf der Dirichlet-Neumann-Partitionierung basierenden Verfahren.

- *Genauigkeit*

Zusammenfassend kann folglich bezüglich der Genauigkeit des sequentiell gestaffelten Grundverfahrens festgestellt werden: Aufgrund des Fehlers der Größenordnung $O(\Delta t)$ in der Ermittlung der Kopplungslasten $\boldsymbol{f}_\Gamma^{n+1}$ ist das sequentiell gestaffelte Grundverfahren nur von erster Ordnung genau, auch wenn die Zeitintegrationsverfahren in den Teilfeldern von zweiter Ordnung genau sind. Bei impliziter Zeitintegration der Dirichlet-Partition Ω_1 mit der Dirichlet-Randbedingung $\boldsymbol{d}_\Gamma^n$ kommt ein weiterer Fehler derselben Größenordnung $O(\Delta t)$ hinzu, bei expliziter Zeitintegration hingegen ergibt sich nur ein wesentlich kleinerer zusätzlicher Fehler (Größenordnung $O(\Delta t^2)$). Das bedeutet, daß das I–I–Verfahren nur etwa halb so genau wie das E–I–Verfahren ist.

- *Stabilität*

Eine weitere Folge der Verletzung der kinematischen Kontinuitätsbedingung ist die Verschlechterung der Stabilitätseigenschaften. Dies äußert sich in einer schwachen Instabilität des partitionierten Gesamtlösungsverfahrens, welche je nach Zeitschrittgröße und Formulierung des Kopplungsalgorithmus früher oder später auftritt, wie in den numerischen Beispielen dokumentiert. Dabei muß betont werden, daß die Beeinträchtigung der numerischen Stabilität das eigentliche Problem aller einfach gestaffelten Verfahren ist, denn die genaueste Formulierung eines Kopplungsalgorithmus ist nutzlos, wenn die numerische Lösung instabil ist.

Desweiteren sollte angemerkt werden, daß in vielen Veröffentlichungen diese schwache Instabilität fälschlicherweise mit bedingter Stabilität verwechselt wird. Wie in Abschnitt 2.1.4 erläutert wurde, besteht hier aber ein wesentlicher Unterschied: Während bei bedingter Stabilität durch Verkleinerung des Zeitschrittes auf einen Wert unterhalb einer kritischen Grenze strikte Stabilität (zumindest im Linearen) erreicht werden kann, und somit also numerische Lösungen berechenbar sind, die für einen beliebig langen Berechnungszeitraum stabil bleiben, so ist dies im Fall schwacher Instabilität nicht möglich. In diesem Fall kann durch eine Verkleinerung des Zeitschritts lediglich das Eintreten der Instabilität zeitlich nach hinten geschoben werden – wobei der absolute Zeitpunkt stark vom jeweiligen Problem und vom jeweiligen Kopplungsverfahren abhängt; tatsächlich verhindert werden kann die Instabilität durch diese Maßnahme jedoch nicht. Andererseits bringt die schwache Instabilität im Vergleich zur bedingten Stabilität auch einen Vorteil mit sich: Während bei bedingt stabilen Verfahren die numerische Lösung für zu große Zeitschritte von Anfang an strikt instabil und somit überhaupt nicht verwendbar ist, so ist im Fall schwach instabiler Verfahren wenigstens der jeweilige Anfangsbereich stabil. Bei vorwiegendem Interesse an einer Kurzzeit-Dynamik können deshalb sequentiell gestaffelte Verfahren durchaus sinnvolle Lösungsansätze sein. Allerdings ist es unbedingt empfehlenswert, die Entwicklung der Instabilität bei der Berechnung im Auge zu behalten, etwa durch Beobachtung des in Abschnitt 3.4.2 beschriebenen Energiekriteriums (s. auch das Modellbeispiel B2 in Abschnitt 5.3).

Bemerkung 5.1: Die Signifikanz der Beeinträchtigung der numerischen Stabilität durch das sequentiell gestaffelte Verfahren insbesondere bei komplexen, nichtlinearen Systemen wird von vielen Autoren bestätigt (z.B. Felippa et al. (1998), Niho et al. (1999), u. v. a.), und

als noch nicht endgültig gelöstes Problem identifiziert. Vorgeschlagene Stabilisierungsansätze sind beispielsweise das Einbringen von künstlicher viskoser Dämpfung oder künstliches zu Null setzen der Geschwindigkeit der Kopplungsknoten (Stein et al. (1998, 2000) in der Aeroelastik), aus dem Bereich der dynamischen Mehrkörpersysteme stammende Filtertechniken (Kübler & Schiehlen (1998) für Mehrkörpersystem-Dynamik, Rumold (1999) für die Simulation von Starrkörper-Fluid-Systemen). Alle diese Ansätze haben jedoch den Nachteil, daß sie die Physik des modellierten Systems verändern und zudem meist stark problemabhängig sind, weshalb sie nicht allgemein anwendbar und die numerischen Ergebnisse nur mit Vorsicht zu interpretieren sind. Für die partitionierte Integration von Langzeitdynamiken scheint der in dieser Arbeit propagierte implizite Ansatz mit Iterationen über die Teilfelder (Kapitel 6) der einzig sinnvolle, wenn auch aufwendige Weg zu sein.

- *Besonderheiten beim Subcycling-Verfahren (E^m–I)*

Bei der Verwendung von unterschiedlich großen Zeitschritten in den beiden Teilbereichen (d.h. $m > 1$) ist es unbedingt wünschenswert, daß dadurch im Vergleich zum Grundverfahren ohne Subcycling ($m = 1$) kein zusätzlicher Fehler und somit destabilisierender Einfluß in die numerische Lösung gelangt. In der Vielzahl von Arbeiten zu Multi-timestep-Verfahren (meist mit überlappenden Partitionen) ist dies *die* zentrale Zielvorstellung, die jedoch meist nicht vollständig erreicht wird (vgl. die Ausführungen zur historischen Entwicklung der einfach gestaffelten Lösungsverfahren in Abschnitt 3.3). Die hier als *Algorithmus 5.2* vorgestellte Methode hingegen erfüllt diese Forderung exakt. Die Voraussetzung hierfür ist, daß der über die Folge der Subcycling-Schritte ermittelte Bewegungszustand der Dirichlet-Partition Ω_1 am Ende des Zeitschritts identisch sein muß mit demjenigen, der von dem subcycling-freien Verfahren ermittelt wird, so daß die schließlich an Ω_2 übergebene Kopplungskraft, die aus diesem Bewegungszustand gemäß Gl. (5.10) errechnet wird, gleich ist. Dies bedingt folglich weiter, daß die in (5.10) verwendete Interface-Verschiebung $\boldsymbol{d}_\Gamma^{n+1}$ und -Beschleunigung $\ddot{\boldsymbol{d}}_\Gamma^{n+1}$ bei der Ermittlung mit und ohne Subcycling jeweils identisch sein müssen. Daß diese beiden Bedingungen mit dem vorgestellten Verfahren eingehalten werden, wird im folgenden gezeigt.

Zunächst wird dazu eine Berechnung ohne Subcycling betrachtet. Diese ermittelt die Dirichlet-Kopplungsrandbedingung $\boldsymbol{d}_\Gamma^{n+1}$ zur Zeit t^{n+1} mittels des Zeitintegrationsansatzes des zentralen Differenzenverfahrens (Gl. (5.5) mit $k+1 = m$) aus der Kopplungsbeschleunigung $\ddot{\boldsymbol{d}}_\Gamma^n$, die zur Zeit t^n von Ω_2 an Ω_1 übergeben wird, und den vom vorherigen Zeitschritt übernommenen $\dot{\boldsymbol{d}}_\Gamma^n$ und $\boldsymbol{d}_\Gamma^n$:

$$\boldsymbol{d}_\Gamma^{n+1} = \boldsymbol{d}_\Gamma^n + \Delta t\ \dot{\boldsymbol{d}}_\Gamma^n + \frac{\Delta t^2}{2}\ddot{\boldsymbol{d}}_\Gamma^n \tag{5.19}$$

Eine Berechnung mit Subcycling berechnet zunächst gemäß den Gleichungen (5.5) und (5.6) die Subcycling-Zwischenschritte, hier ohne Beschränkung der Allgemeinheit für den Fall $m = 2$ dargestellt:

$$\boldsymbol{d}_\Gamma^{n+\frac{1}{2}} = \boldsymbol{d}_\Gamma^n + \frac{\Delta t}{2}\dot{\boldsymbol{d}}_\Gamma^n + \frac{\Delta t^2}{8}\ddot{\boldsymbol{d}}_\Gamma^n \tag{5.20}$$

$$\dot{\boldsymbol{d}}_\Gamma^{n+\frac{1}{2}} = \dot{\boldsymbol{d}}_\Gamma^n + \frac{\Delta t}{2}\ddot{\boldsymbol{d}}_\Gamma^n \tag{5.21}$$

Im letzten (d.h. hier zweiten) Subcycling-Schritt wird dann die Interface-Verschiebung

$$\boldsymbol{d}_\Gamma^{n+\frac{2}{2}} = \boldsymbol{d}_\Gamma^{n+\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{2}\dot{\boldsymbol{d}}_\Gamma^{n+\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t^2}{8}\ddot{\boldsymbol{d}}_\Gamma^{n+\frac{1}{2}} \tag{5.22}$$

ermittelt. Einsetzen von Gl. (5.20) und (5.21) führt weiter auf

$$\begin{aligned}\boldsymbol{d}_\Gamma^{n+\frac{2}{2}} &= \boldsymbol{d}_\Gamma^n + \Delta t\dot{\boldsymbol{d}}_\Gamma^n + \frac{3\Delta t^2}{8}\ddot{\boldsymbol{d}}_\Gamma^n + \frac{\Delta t^2}{8}\ddot{\boldsymbol{d}}_\Gamma^{n+\frac{1}{2}} \\ &= \boldsymbol{d}_\Gamma^n + \Delta t\dot{\boldsymbol{d}}_\Gamma^n + \frac{\Delta t^2}{2}\ddot{\boldsymbol{d}}_\Gamma^n + \frac{\Delta t^2}{8}\left(-\ddot{\boldsymbol{d}}_\Gamma^n + \ddot{\boldsymbol{d}}_\Gamma^{n+\frac{1}{2}}\right)\end{aligned} \tag{5.23}$$

und einfaches Vergleichen mit der ohne Subcycling ermittelten Gleichung (5.19) läßt daraus folgern, daß der Klammerausdruck gleich Null sein muß. D.h. die Interfacebeschleunigung muß über alle Subcycling-Schritte hinweg konstant gehalten werden ($\ddot{\boldsymbol{d}}_\Gamma^{n+1/2} = \ddot{\boldsymbol{d}}_\Gamma^n$), um die Gleichheit der beiden Ausdrücke zu gewährleisten. Dies ist gerade die bei der Beschreibung des *Algorithmus 5.2* als notwendig bezeichnete Bedingungsgleichung (5.4). Bei der Berechnung der Kopplungskraft wird schließlich als Interfacebeschleunigung mit und ohne Subcyling jeweils der alte Wert verwendet: $\ddot{\boldsymbol{d}}_\Gamma^{n+1} = \ddot{\boldsymbol{d}}_\Gamma^n$ (s. Schritt 3 in *Algorithmus 5.2*), d.h. die Kopplungsbeschleunigung ist auch hierfür als über den Zeitschritt konstant anzusetzen.

Damit ist gezeigt, daß das hier vorgeschlagene E^m–I–Verfahren tatsächlich in der explizit integrierten Partition Ω_1 kleinere Zeitschritte als in der implizit integrierten Partition Ω_2 verwenden kann, ohne dadurch von der Lösung des Grundverfahrens ohne Subcycling abzuweichen. Die numerischen Ergebnisse des im folgenden dokumentierten Modellbeispiels B1 bestätigen diese Aussage, die jeweiligen Lösungen mit und ohne Subcycling sind praktisch identisch.

- *Einfluß der numerischen Dissipation*

Die numerischen Untersuchungen mit diesem partitionierten Lösungsansatz haben schließlich noch einen auf den ersten Blick überraschenden Effekt aufgezeigt, den die Verwendung von *numerisch dissipativen Zeitintegrationsverfahren* auf die Stabilität gestaffelter Berechnungen von strukturdynamischen Systemen hat. In der nichtlinearen Dynamik sollen solche Algorithmen die numerische Lösung stabilisieren, indem parasitäre, hochfrequente Schwingungsanteile herausgedämpft werden. Wird hingegen in einer partitionierten Lösung in nur einer Partition ein numerisch dissipatives Zeitintegrationsverfahren eingesetzt (z.B. implizite Partition mit Generalized-α und $\rho_\infty < 1$, explizite Partition mit zentralen Differenzen) so erreicht man gerade die gegenteilige Wirkung: Die partitionierte Gesamtlösung zeigt bereits sehr viel früher und schneller anwachsende hochfrequente, destabilisierende Schwingungsanteile als ganz ohne numerische Dissipation. Derselbe Effekt läßt sich auch beobachten, wenn in beiden Partitionen numerisch dissipative Zeitintegrationsverfahren mit jeweils unterschiedlichen Dämpfungseigenschaften (z.B. implizite Partition mit Generalized-α und $\rho_\infty < 1$, explizite Partition mit PCE-Hilber-α und $\alpha_f > 0$) verwendet werden. Haben indessen die Zeitintegrationsverfahren

in den beiden Partitionen identische Dämpfungseigenschaften, so tritt keine zusätzliche Destabilisierung ein (eine Stabilisierung der schwach instabilen, gestaffelten Lösung an sich konnte in den hier untersuchten Beispielen jedoch auf diese Weise auch nicht erreicht werden, im Gegensatz zu den Beobachtungen anderer Autoren, wie z.B. Gupta & Ramirez (1997), welche jedoch überlappend partitionierte Formulierungen untersuchen).

Die Ursache dieses Effektes ist nach eigener Einschätzung die folgende: Durch numerische Dissipation werden in einer Partition bestimmte hochfrequente Schwingungsanteile aus der Lösung herausgedämpft. Da im benachbarten Teilfeld dieselben hochfrequenten Schwingungsanteile jedoch nicht bzw. nicht gleich stark gedämpft werden, bedeutet dies beim Aneinanderkoppeln eine Inkompatibilität des Schwingungsverhaltens am Interface in diesen hohen Moden, und damit ergibt sich von dort ausgehend eine zusätzliche hochfrequente, destabilisierende Störung der gekoppelten Gesamtlösung. In dem numerischen Anwendungsbeispiel in Abschnitt 7.1 wird dieser nachteilige Einfluß der numerischen Dissipation an einem komplexeren System dokumentiert.

Modellbeispiel B1: 1-D Stabproblem, linear

Die obigen Aussagen zu Stabilität und Genauigkeit werden nun an einem einfachen numerischen Modellbeispiel dokumentiert, welches in der Literatur vielfach für die Untersuchung von Multi-timestep-Verfahren verwendet wurde (z.B. Smolinski (1992)). Es handelt sich um den in *Bild 5.4* abgebildeten, eindimensional und geometrisch linear modellierten, linear elastischen Stab. Eine ab $t_0 = 0$ aufgebrachte Stufenlast erzeugt darin eine periodisch vor- und zurücklaufende Kompressionswelle. Die Materialeigenschaften sind mit $E^S = 1,0\ N/m^2$, $\rho^S = 1,0\ kg/m^3$ und $\nu^S = 0$ derart gewählt, daß sich eine Wellengeschwindigkeit von $c = \sqrt{E^S/\rho^S} = 1,0\ m/s$ ergibt. Der Stab ist mit bilinearen Scheibenelementen unterschiedlicher Länge h diskretisiert: Für $x \leq 10\ m$ ist $h = 1,0\ m$ und für $10\ m \leq x \leq 11\ m$ ist $h = 0,1\ m$ ($A = 0,3m^2$, alle Knoten in y-Richtung gelagert). Es wurde eine konzentrierte (diagonale) Massenmatrix verwendet.

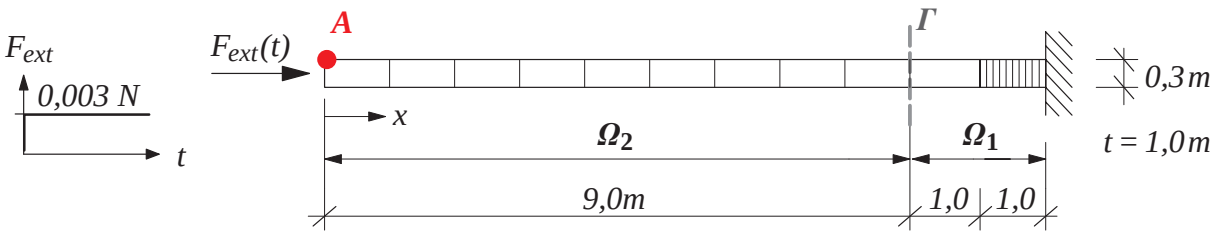
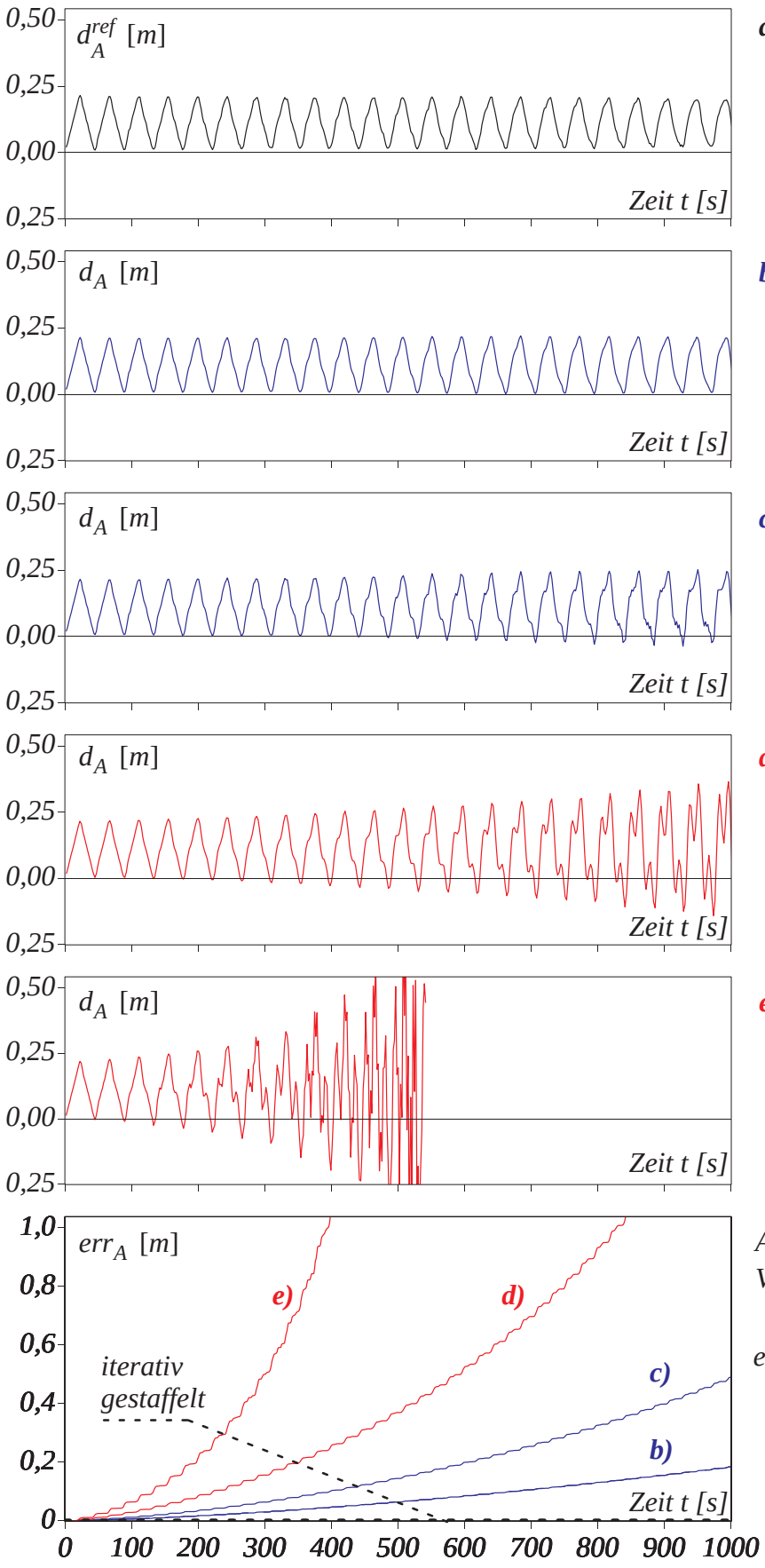


Bild 5.4: 1-D Stabproblem (B1): Systemskizze

In *Bild 5.5* (Diagramme a – e) sind für unterschiedliche Berechnungsverfahren und Zeitschrittgrößen exemplarisch die Schwingungsverläufe des Knotens ***A*** dargestellt. Die Referenzlösung (a) wurde durch eine simultane Berechnung des unpartitionierten Gesamtsystems bei Zeitintegration mit der impliziten, zweiter Ordnung genauen Trapezregel ermittelt. Die mit dem sequentiell gestaffelten Grundverfahren berechneten Verläufe (b – e) verwendeten im Fall der I–I–Verfahren in beiden Partitionen ebenfalls die Trapezregel, im Fall der E–I–Verfahren wurde die Partition Ω_1 mit dem expliziten, zweiter Ordnung genauen zentralen Differenzenverfahren



a) *Referenzlösung: Simultane Berechnung, Δt = 0,075 s bzw. Δt = 0,375 s*

b) *E–I: Δt = 0,075 s*
E^5–I: Δt = 0,075 s
(Lösungen praktisch identisch)

c) *I–I: Δt = 0,075 s*

d) *E^5–I: Δt = 0,375 s*

e) *I–I: Δt = 0,375 s*

Aufsummierter Verschiebungsfehler:

$$err_A^n = \left[\sum_{j=1}^{n} \left(d_A^j - d_A^{ref,j} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

Bild 5.5: 1-D-Stabproblem (B1): Schwingungsverläufe Knoten A (Verschiebung – Zeit) und aufsummierter Fehler in der Verschiebung am Knoten A

zeitintegriert (E^m–I–Verfahren mit m-fachem Subcycling in Ω_1). Das unterste Diagramm zeigt die zeitliche Entwicklung des *aufsummierten Fehlers* („*cumulative error*“) in der Verschiebung des Knotens ***A***, der aufgrund der partitionierten Lösung auftritt. Dieser ist, wie von Gupta & Ramirez (1997) vorgeschlagen, als L^2–Norm des über alle Zeitschritte aufsummierten Absolutwerts des momentanen Fehlers $d_A^n - d_A^{ref,\,n}$ (Abweichung der partitionierten Lösung von der simultan berechneten Referenzlösung zur Zeit t^n) definiert:

$$err_A^n = \left[\sum_{j=1}^{n} \left(d_A^j - d_A^{ref,\,j} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \tag{5.24}$$

Der aufsummierte Verschiebungsfehler am diskreten Zeitpunkt $t = 75,0\ s$ für Berechnungen mit den drei untersuchten Formulierungen ist zudem in *Tabelle 5.1* zahlenmäßig angegeben, und zwar für Berechnungen mit unterschiedlichen Zeitschrittgrößen. Neben den Zahlenwerten ist jeweils der entsprechende Vergrößerungsfaktor von Zeile zu Zeile eingetragen (also z.B. 0,0375 x 2,00 = 0,0750 oder 0,001984 x 1,99 = 0,003944). Ein Strich (–) in der Tabelle bedeutet, daß die entsprechende Lösung mit dieser Zeitschrittgröße nicht stabil berechnet werden konnte.

Δt		**E–I**		**E^5–I**		**I–I**	
0,0375		0,001984		0,001984		0,003914	
0,0750	x 2,00	0,003944	x 1,99	0,003940	x 1,99	0,007884	x 2,01
0,3750	x 5,00	–	–	0,019317	x 4,90	0,041995	x 5,33

Tabelle 5.1 *1-D-Stabproblem (B1): Aufsummierter Verschiebungsfehler err_A (Knoten A) z.Zt. t = 75 s für verschiedene Zeitschrittgrößen und partitionierte Berechnungsverfahren*

Folgende Beobachtungen hinsichtlich Stabilität und Genauigkeit sind aus den dargestellten Ergebnissen ablesbar und bestätigen die oben theoretisch abgeleiteten Aussagen:

1. Alle sequentiell gestaffelt berechneten Lösungen zeigen die typische schwache Instabilität, welche je nach Verfahren und Zeitschrittgröße früher oder später auftritt. Bei Integration mit einem Zeitschritt, der kleiner ist als der kritische Zeitschritt Δt_{cr} des zentralen Differenzenverfahrens (hier nach der bekannten CFL-Bedingung (Courant-Friedrichs-Lewy (1928)) $\Delta t_{cr} = h_{\min}/c = 0,1\ s$) bleibt vor allem das E–I–Verfahren sehr lange stabil, weist aber dann ab ca. t = 1500 s ebenfalls deutliche Instabilitätseffekte auf (hier nicht mehr dargestellt). Diese sind gekennzeichnet durch parasitäre, hochfrequente Schwingungsanteile, deren Amplituden im Laufe der Zeit überlinear anwachsen, die stabile Lösung überlagern und so zur Instabilität führen. Auch am Verlauf des aufsummierten Fehlers kann dies entsprechend abgelesen werden: Im stabilen Anfangsbereich ist die Fehlerzunahme annähernd linear, später nimmt der Fehler dann aber überlinear zu, wenn der Anteil an hochfrequenten Störungen dominant wird. Gupta & Ramirez (1997) haben diesbezüglich analoge Beobachtungen gemacht.

2. Aufgrund von Subcycling der Dirichlet-Partition ergibt sich in dieser Formulierung kein zusätzlicher Fehler: die E–I– und E^5–I–Lösungen sind praktisch identisch (die zwei Graphen in Diagramm b sind vollständig deckungsgleich), ebenso wie der aufsummierte Verschiebungsfehler (s. *Tabelle 5.1*).
3. Das E–I–Verfahren ist bei gleicher Zeitschrittgröße doppelt so genau wie das I–I–Verfahren (Vergleich der Fehlerkurven von b) mit c) und von d) mit e) im stabilen Anfangsbereich, sowie der entsprechenden Zahlenwerte in *Tabelle 5.1*).
4. E–I–, E^m–I– und I–I–Verfahren sind erster Ordnung genau (Verkleinerung des Zeitschritts um den Faktor 2 bzw. 5 bewirkt Reduktion des Fehlers der partitionierten Lösung im Vergleich zur simultanen Lösung (im stabilen Bereich) um denselben Faktor, s. *Tabelle 5.1*).
5. Der aufsummierte Verschiebungsfehler einer auskonvergierten, iterativ gestaffelten Lösung ist über die gesamte Berechnungsdauer hinweg gleich Null (bzw. $< 10^{-12}$, also im Bereich der Maschinenpräzision). Dies zeigt, daß die iterativ gestaffelte Lösung tatsächlich gegen die simultane Referenzlösung konvergiert.

5.3 Sequentiell gestaffeltes Verfahren mit Prädiktor

Die Hauptproblematik des synchronen, sequentiell gestaffelten Grundverfahrens ist also die veraltete Kopplungsinformation $\boldsymbol{d}_\Gamma^n$ in der Dirichlet-Partition Ω_1, wegen der die kinematische Kontinuität verletzt wird, was zu der beschriebenen Genauigkeits- und Stabilitätsverschlechterung führt. Ein zunächst unmittelbar einleuchtender Lösungsansatz hierfür ist die Verwendung eines von höherer Ordnung genauen, linearen Prädiktors $\boldsymbol{d}_{\Gamma,P}^{n+1}$, mit dem diese Dirichlet-Kopplungsrandbedingung an das Zeitschrittende extrapoliert wird (*Bild 5.6)*, mit dem Ziel, die zeitliche Konsistenz der Kopplungsrandbedingungen zu erhalten, ohne den numerischen Aufwand wesentlich zu erhöhen. Da die algorithmische Beschreibung des resultierenden Verfahrens (*Algorithmus 5.5*) folglich aus dem im vorigen Abschnitt ausführlich dargestellten sequentiell gestaffelten Grundverfahren lediglich durch Modifikation des 1. Schrittes hervorgeht, muß hier nicht mehr auf die detaillierten Gleichungen für die Strukturdynamik und die Fluid-Struktur-Interaktion eingegangen werden, sondern es genügt eine Verwendung der verallgemeinerten Darstellungsweise des partitionierten, algebraischen Gleichungssystems (3.2).

Die unterschiedlich genauen Prädiktoren gemäß den Gleichungen (5.25) bis (5.27) resultieren dabei aus der Annahme eines quadratischen, eines linearen bzw. eines konstanten Verschie-

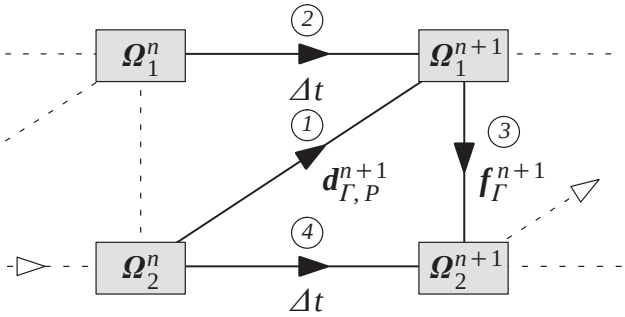


Bild 5.6: Synchrones, sequentiell gestaffeltes Verfahren mit Prädiktor (Piperno (1997)): Ablaufdiagramm

0. Initialisierung: Setze $n = 0$. Startlösungen $\boldsymbol{d}^{\Omega_j,0}$ seien gegeben.

Schleife über alle n_T Zeitschritte

1a. Berechne Prädiktor der Variablen auf dem Kopplungsrand in Ω_2

$$\boldsymbol{d}_{\Gamma,P}^{n+1} = \begin{cases} \boldsymbol{d}_\Gamma^n + \Delta t \left(\frac{3}{2}\, \dot{\boldsymbol{d}}_\Gamma^n - \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{d}}_\Gamma^{n-1} \right) & \rightarrow O(\Delta t^2)\text{-genau} \quad (5.25) \\ \boldsymbol{d}_\Gamma^n + \Delta t\, \dot{\boldsymbol{d}}_\Gamma^n & \rightarrow O(\Delta t^1)\text{-genau} \quad (5.26) \\ \boldsymbol{d}_\Gamma^n \qquad (\triangleq \text{ Grundverfahren}) & \rightarrow O(\Delta t^0)\text{-genau} \quad (5.27) \end{cases}$$

1b. Übergebe $\boldsymbol{d}_{\Gamma,P}^{n+1}$ von Ω_2 an Ω_1

2. Integriere Dirichlet-Partition Ω_1 von t^n nach t^{n+1} mit Dirichlet-R.B. $\boldsymbol{d}_{\Gamma,P}^{n+1}$

$$\boldsymbol{A}_{II}^{\Omega_1}\, \boldsymbol{d}_I^{\Omega_1,n+1} = \boldsymbol{f}_{I\,ext}^{\Omega_1,n+1} - \boldsymbol{A}_{I\Gamma}^{\Omega_1}\, \boldsymbol{d}_{\Gamma,P}^{n+1} \qquad (5.28)$$

3. Berechne Kopplungskräfte $\boldsymbol{f}_\Gamma^{n+1}$ in Ω_1 und übergebe sie an Ω_2

$$\boldsymbol{f}_\Gamma^{n+1} = \boldsymbol{A}_{\Gamma I}^{\Omega_1}\, \boldsymbol{d}_I^{\Omega_1,n+1} + \boldsymbol{A}_{\Gamma\Gamma}^{\Omega_1}\, \boldsymbol{d}_{\Gamma,P}^{n+1} \qquad (5.29)$$

4. Integriere Neumann-Partition Ω_2 von t^n nach t^{n+1} mit Neumann-R.B. $\boldsymbol{f}_\Gamma^{n+1}$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{\Gamma\Gamma}^{\Omega_2} & \boldsymbol{A}_{\Gamma I}^{\Omega_2} \\ \boldsymbol{A}_{I\Gamma}^{\Omega_2} & \boldsymbol{A}_{II}^{\Omega_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{d}_\Gamma^{n+1} \\ \boldsymbol{d}_I^{\Omega_2,n+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{f}_{\Gamma\,ext}^{n+1} - \boldsymbol{f}_\Gamma^{n+1} \\ \boldsymbol{f}_{I\,ext}^{\Omega_2,n+1} \end{Bmatrix} \qquad (5.30)$$

$n \leftarrow n + 1 \quad bis\ n + 1 = n_T$

Algorithmus 5.5: Synchrones, sequent. gestaffeltes Verfahren mit Prädiktor (Piperno (1997))

bungsverlaufs innerhalb des Zeitschritts. Das sequentiell gestaffelte Grundverfahren geht aus diesem Lösungsansatz als der Sonderfall mit nullter Ordnung genauem Prädiktor gemäß Gleichung (5.27) wieder hervor.

Dieser Ansatz wurde von Piperno (1997) für die Interaktion von kompressiblen, viskosen Strömungen und elastischen Strukturen mit impliziten Zeitintegrationsverfahren in beiden Teilgebieten vorgeschlagen, läßt sich aber algorithmisch ohne weiteres auf die hier untersuchte Art der Fluid-Struktur-Interaktion mit inkompressiblen Strömungen sowie auf die partitionierte Lösung von rein strukturdynamischen Problemen übertragen.

Diskussion der numerischen Eigenschaften

- *Kontinuität und Genauigkeit*

Unter der hypothetischen Annahme eines perfekten Prädiktors – d.h. daß der in Ω_1 verwendete Prädiktor $\boldsymbol{d}_{\Gamma,P}^{n+1}$ genau gleich der danach in Ω_2 berechneten neuen Interfaceverschiebung $\boldsymbol{d}_\Gamma^{n+1}$ ist – würde dieses Verfahren entsprechend der beim Grundverfahren geschilderten Zusammen-

hänge sowohl die diskrete kinematische und dynamische Kontinuitätsbedingung als auch das ICL exakt erfüllen und somit keinen numerischen Fehler in der partitionierten Lösung erzeugen. Da ein Prädiktor jedoch notwendigerweise fehlerbehaftet ist, wird die kinematische Kontinuität am Interface tatsächlich nur näherungsweise erfüllt. Damit ist das sequentiell gestaffelte Verfahren mit Prädiktor auch nur näherungsweise masse- und energieerhaltend (Gleichung (3.20)). Allerdings kann der durch die sequentiell gestaffelte Lösung erzeugte Fehler mit entsprechend genauen Prädiktoren im Vergleich zum Grundverfahren deutlich verringert werden. Bereits mit der erster Ordnung genauen Extrapolationsformel (5.26) erreicht das Kopplungsverfahren eine Genauigkeit zweiter Ordnung, und mit dem zweiter Ordnung genauen Prädiktor (5.25) erhöht diese sich um einen weiteren Faktor. Folglich kann auch die Größe des Fehlers im Masse- und Energieaustausch am Interface durch die Genauigkeit des Prädiktors gesteuert werden (vgl. Piperno (1997)). Desweiteren ist die dynamische Kontinuität genau wie beim sequentiell gestaffelten Grundverfahren gewährleistet, d.h. die Impulserhaltung bei diesem Verfahren ist wiederum gemäß Gleichung (3.17) exakt gegeben.

- *Stabilität*

Leider stellt man jedoch bei Anwendung dieses Kopplungsverfahrens auf die hier behandelten Problemstellungen der Fluid-Struktur-Interaktion mit *in*kompressiblen Strömungen sowie der Strukturdynamik fest, daß sich die Stabilitätseigenschaften der Genauigkeit des Verfahrens gegenüber tendentiell gegenläufig verhalten. So haben die numerischen Untersuchungen im Rahmen dieser Arbeit gezeigt, daß die Lösung mit steigender Genauigkeit des Prädiktors immer früher instabil wird – ganz im Gegenteil zu den Ergebnissen von Piperno (1997), der allerdings die Interaktion von *kompressiblen* Strömungen und elastischen Strukturen untersucht hat. Die Verschlechterung des Stabilitätsverhaltens bei Erhöhung der Prädiktorgenauigkeit und damit der Genauigkeit des Kopplungsverfahren scheint insofern ein spezifisches Problem der Anwendung einfach gestaffelter Verfahren auf die Interaktion flexibler Strukturen mit *in*kompressiblen Strömungen sowie auf rein strukturdynamische Probleme zu sein. Eine sichere, analytische Erklärung für dieses hier nur beobachtete Verhalten herzuleiten, ist im Rahmen dieser Arbeit leider noch nicht gelungen. Hier ist ein Ansatzpunkt für weitere Forschungstätigkeiten gegeben.

Bemerkung 5.2: In diesem Zusammenhang sei noch darauf hingewiesen, daß in der Arbeit von Gupta & Ramirez (1996) ein genau vergleichbares Phänomen bei dem Vergleich von zwei einfach gestaffelten, expliziten Multi-timestep-Verfahren mit überlappenden Partitionen beobachtet wurde. Sie zeigten, daß die untersuchten Verfahren ebenfalls beide schwach instabil sind, wobei der Zeitpunkt des Auftretens der Instabilität bei dem Kopplungsalgorithmus mit der wesentlich höheren Genauigkeit („*constant acceleration method*“, Genauigkeit zweiter Ordnung) deutlich früher ist, als bei dem nur erster Ordnung genauen Verfahren („*constant velocity method*“). Auch Gupta & Ramirez konnten jedoch keine rigorose, analytische Erklärung für diesen Sachverhalt finden.

- *„Artificial Added Mass“-Effekt*

Wie das folgende numerische Beispiel zeigen wird, kann das Auftreten der schwachen Instabilität auch durch Verkleinerung des Zeitschrittes nicht verhindert werden. Ganz im Gegenteil

tauchen die instabilen, hochfrequenten Oszillationen sogar mit kleiner werdendem Zeitschritt immer früher auf. Ursache hierfür ist der in Abschnitt 3.4.3 angesprochene „Artificial Added Mass“-Effekt, der insbesondere bei den hier behandelten FSI-Problemen mit *in*kompressiblen Strömungen und *dünnwandigen* Strukturen maßgebend ist. Nachfolgend wird dies anhand einer Analyse der zeitlichen Fortpflanzung des kinematischen Fehlers, der aus der Verletzung der kinematischen Kontinuität aufgrund des expliziten Prädiktors resultiert, detailliert erläutert.

Die Fehleranalyse untersucht die Fortpflanzung der in den einzelnen algorithmischen Schritten auftretenden lokalen Abbruchfehler von Zeitschritt zu Zeitschritt, wobei das Fluid wie in Abschnitt 3.4.3 vereinfachend als inviskos und gewichtslos, und die konvektiven Strömungsanteile als vernachlässigbar klein betrachtet werden. Man beginnt mit der Annahme, daß exakte Startwerte $\boldsymbol{d}_\Gamma^n$, $\dot{\boldsymbol{d}}_\Gamma^n$, $\dot{\boldsymbol{d}}_\Gamma^{n-1}$ und $\boldsymbol{u}_\Gamma^n$ bekannt sind. In Schritt 1 des sequentiell gestaffelten Verfahrens wird daraus ein expliziter Prädiktor der neuen Strukturverschiebung am Interface ermittelt,

$$\boldsymbol{d}_{\Gamma,P}^{n+1} = \boldsymbol{d}_\Gamma^n + \Delta t \left(\tfrac{3}{2}\, \dot{\boldsymbol{d}}_\Gamma^n - \tfrac{1}{2} \dot{\boldsymbol{d}}_\Gamma^{n-1} \right) + O(\Delta t^2) \tag{5.31}$$

der hier von zweiter Ordnung genau ist, d.h. sein lokaler Abbruchfehler ist

$$\boldsymbol{e}\left(\boldsymbol{d}_{\Gamma,P}^{n+1} \right) = O(\Delta t^2) \tag{5.32}$$

Unter Berücksichtigung der Zwangsbedingung der geometrischen Bilanzgleichungen (GCL, Gl. (2.72)) folgt daraus die Fluid-Geschwindigkeit auf Γ zu

$$\boldsymbol{u}_\Gamma^{n+1} = \frac{1}{\Delta t}\left(\boldsymbol{d}_{\Gamma,P}^{n+1} - \boldsymbol{d}_\Gamma^n \right) = \tfrac{3}{2} \dot{\boldsymbol{d}}_\Gamma^n - \tfrac{1}{2} \dot{\boldsymbol{d}}_\Gamma^{n-1} + O(\Delta t^1) \tag{5.33}$$

und bei Zeitdiskretisierung mit dem BE-Verfahren gemäß Gleichung (3.27) der Fluiddruck

$$\begin{aligned} \boldsymbol{p}_\Gamma^{n+1} &= -\boldsymbol{G}^{F^{-1}} \boldsymbol{M}^F \frac{\boldsymbol{u}_\Gamma^{n+1} - \boldsymbol{u}_\Gamma^n}{\Delta t} = \\ &= -\boldsymbol{G}^{F^{-1}} \boldsymbol{M}^F \frac{1}{\Delta t} \left(\tfrac{3}{2} \dot{\boldsymbol{d}}_\Gamma^n - \tfrac{1}{2} \dot{\boldsymbol{d}}_\Gamma^{n-1} - \boldsymbol{u}_\Gamma^n \right) + O(\Delta t^0) \end{aligned} \tag{5.34}$$

Der lokale Abbruchfehler-Term des Prädiktors ist hierin durch die zweimalige Division durch Δt nunmehr in der Größenordnung $O(\Delta t^0)$. Hinzu kommt ein lokaler Abbruchfehler aufgrund des verwendeten Zeitintegrationsverfahrens, der aber um mindestens eine Ordnung kleiner (BE-Verfahren: $O(\Delta t^1)$) und somit nicht maßgeblich ist. Anschließend erfolgt in Schritt 3 die räumliche Integration über den benetzten Strukturrand, bei der die Fehlerordnung unverändert bleibt,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f}_\Gamma^{n+1} &= \int_\Gamma \boldsymbol{p}_\Gamma^{n+1}\, \boldsymbol{n}\, d\Gamma = -\int_\Gamma \left(\boldsymbol{G}^{F^{-1}} \boldsymbol{M}^F \frac{1}{\Delta t} \left(\tfrac{3}{2} \dot{\boldsymbol{d}}_\Gamma^n - \tfrac{1}{2} \dot{\boldsymbol{d}}_\Gamma^{n-1} - \boldsymbol{u}_\Gamma^n \right) + O(\Delta t^0) \right) \boldsymbol{n}\, d\Gamma = \\ &=: -\hat{\boldsymbol{f}}_\Gamma^{n+1} + O(\Delta t^0) \end{aligned} \tag{5.35}$$

und schließlich in Schritt 4 die Zeitintegration der Struktur zur Ermittlung der neuen Verschiebungsgrößen (Gl. (5.18), hier als Newmark-Verfahren dargestellt, d.h. mit $\alpha_f = \alpha_m = 0$, und mit $f_{\Gamma\,ext}^{n+1} = \mathbf{0}$):

$$\boldsymbol{d}_\Gamma^{n+1} = \left(\frac{1}{\beta \Delta t^2}\boldsymbol{M}^S + \boldsymbol{K}^S\right)^{-1}\left(-\boldsymbol{f}_\Gamma^{n+1} + \boldsymbol{M}^S\boldsymbol{h}\left(\boldsymbol{d}^n, \dot{\boldsymbol{d}}^n, \ddot{\boldsymbol{d}}^n\right)\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{\beta \Delta t^2}\boldsymbol{M}^S + \boldsymbol{K}^S\right)^{-1}\left(\hat{\boldsymbol{f}}_\Gamma^{n+1} + O(\Delta t^0) + \boldsymbol{M}^S\boldsymbol{h}\right) \tag{5.36}$$

Zur weiteren Analyse ist nun eine Fallunterscheidung in Abhängigkeit von dem Verhältnis zwischen Strukturmasse und -steifigkeit erforderlich.

Der *erste Grenzfall* ist typisch für die im Rahmen dieser Arbeit hauptsächlich behandelten dünnwandigen Strukturen. Hier ist die Strukturmasse extrem klein: $\boldsymbol{M}^S / \boldsymbol{K}^S \ll 1$, sodaß der Term $\frac{1}{\beta \Delta t^2}\boldsymbol{M}^S$ in obiger Gleichung (5.36) vernachlässigt werden kann, woraus unmittelbar folgt

$$\boldsymbol{d}_\Gamma^{n+1} = \boldsymbol{K}^{S^{-1}}\left(\hat{\boldsymbol{f}}_\Gamma^{n+1} + \boldsymbol{M}^S\boldsymbol{h}\right) + O(\Delta t^0) \tag{5.37}$$

d.h. der lokale Abbruchfehler in der neu berechneten Strukturverschiebung am Interface am Ende des ersten Zeitschrittes ist dann

$$\boldsymbol{e}\left(\boldsymbol{d}_\Gamma^{n+1}\right) = O(\Delta t^0) \tag{5.38}$$

Für den nächsten Zeitschritt werden daraus über den Zeitintegrationsansatz des in der Struktur verwendeten Zeitschrittverfahrens die Geschwindigkeiten $\dot{\boldsymbol{d}}_\Gamma^{n+1}$ mit einer Genauigkeit von zweiter Ordnung abgeleitet, und damit dann der nächste Prädiktor:

$$\boldsymbol{d}_{\Gamma,P}^{n+2} = \underset{\substack{\uparrow \\ O(\Delta t^0)}}{\boldsymbol{d}_\Gamma^{n+1}} + \underbrace{\Delta t\left(\tfrac{3}{2}\,\dot{\boldsymbol{d}}_\Gamma^{n+1}\right.}_{\substack{\uparrow \\ O(\Delta t^3)}} \left. - \tfrac{1}{2}\dot{\boldsymbol{d}}_\Gamma^{n}\right) + O(\Delta t^2) \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{e}\left(\boldsymbol{d}_{\Gamma,P}^{n+2}\right) = O(\Delta t^0) \tag{5.39}$$

Da in $\boldsymbol{d}_\Gamma^{n+1}$ aber der aus dem vorausgegangenen Prädiktor resultierende lokale Abbruchfehler der Größenordnung $O(\Delta t^0)$ wieder eingeht, ist dieser Prädiktor insgesamt – unabhängig von der Genauigkeit des verwendeten Zeitintegrationsverfahrens – nun nur noch nullter Ordnung genau, und nach einem weiteren Durchlauf obiger Schritte folgt dann ein Fehler in den folgenden Strukturverschiebungen am Interface von

$$\boldsymbol{e}\left(\boldsymbol{d}_\Gamma^{n+2}\right) = O(\Delta t^{-2}) \;, \quad \boldsymbol{e}\left(\boldsymbol{d}_\Gamma^{n+3}\right) = O(\Delta t^{-4}) \;, \quad \text{usw...} \tag{5.40}$$

Bei Zeitschrittgrößen von $\Delta t \leq 1$ ergibt sich also für den Fall dünnwandiger Strukturen und inkompressibler Strömungen ein Aufschaukeln des durch den expliziten Prädiktor erzeugten Fehlers und in der Folge zur Instabilität der numerischen Lösung. Je kleiner dabei der Zeitschritt ist, umso schneller ist gemäß Gl. (5.40) das Anwachsen des Fehlers.

Im *zweiten* zu betrachtenden *Grenzfall* mit $\boldsymbol{M}^S / \boldsymbol{K}^S \gg 1$ ist dies hingegen nicht so. Dann kann in Gl. (5.36) der Term $\boldsymbol{K}^S$ vernachlässigt werden, sodaß für die errechnete Strukturverschiebung am Interface am Ende des ersten Zeitschrittes gilt

$$\boldsymbol{d}_{\Gamma}^{n+1} = \beta \Delta t^2 \boldsymbol{M}^{S^{-1}} \left(\left(\hat{\boldsymbol{f}}_{\Gamma}^{n+1} + \boldsymbol{M}^S \boldsymbol{h} \right) + O(\Delta t^0) \right) =$$

$$= \beta \Delta t^2 \boldsymbol{M}^{S^{-1}} \left(\hat{\boldsymbol{f}}_{\Gamma}^{n+1} + \boldsymbol{M}^S \boldsymbol{h} \right) + O(\Delta t^2) \tag{5.41}$$

d.h. der zugehörige lokale Abbruchfehler ist von zweiter Ordnung:

$$\boldsymbol{e}\left(\boldsymbol{d}_{\Gamma}^{n+1} \right) = O(\Delta t^2) \tag{5.42}$$

Damit ist auch der folgende (und somit jeder folgende) Prädiktor wiederum von zweiter Genauigkeitsordnung

$$\boldsymbol{d}_{\Gamma,P}^{n+2} = \underset{\substack{\uparrow \\ O(\Delta t^2)}}{\boldsymbol{d}_{\Gamma}^{n+1}} + \underbrace{\Delta t \left(\tfrac{3}{2} \dot{\boldsymbol{d}}_{\Gamma}^{n+1} - \tfrac{1}{2} \dot{\boldsymbol{d}}_{\Gamma}^{n} \right)}_{\substack{\uparrow \\ O(\Delta t^3)}} + O(\Delta t^2) \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{e}\left(\boldsymbol{d}_{\Gamma,P}^{n+2} \right) = O(\Delta t^2) \tag{5.43}$$

sodaß es im Gegensatz zu obigem Grenzfall hier – im Fall massiger Strukturen – nicht zu einem instabilen Aufschaukeln des Fehlers kommt,

$$\boldsymbol{e}\left(\boldsymbol{d}_{\Gamma}^{n+2} \right) = O(\Delta t^2) \ , \quad \boldsymbol{e}\left(\boldsymbol{d}_{\Gamma}^{n+3} \right) = O(\Delta t^2) \ , \quad \text{usw...} \tag{5.44}$$

sondern dieser in der Größenordnung des Zeitintegrationsverfahrens bleibt und bei Verkleinerung des Zeitschrittes auch insgesamt verringert wird.

Modellbeispiel B2: Oszillierend überströmter Hohlraum mit flexiblem Boden

Da die Berechnung des o.g. strukturdynamischen Modellbeispiels mit von höherer Ordnung genauen Prädiktoren zu schnell instabil wird, werden die Genauigkeits- und Stabilitätsaussagen hier anhand eines verhältnismäßig einfachen FSI-Modellbeispiels verifiziert und dokumentiert. Dieses von Wall (1999) vorgestellte Beispiel ist eine Modifikation des klassischen überströmten Hohlraums („driven cavity“), bei dem der Boden als flexible Struktur ausgebildet ist, und die Überströmung nicht konstant sondern harmonisch oszillierend erfolgt. Dieses Modellproblem ist sehr gut zum Studium von Stabilität und Genauigkeit der partitionierten Lösungsansätze geeignet, da sich nach einer kurzen Einschwingphase durch die harmonische Anregung eine gleichmäßige Oszillation bzw. Schwingung der Lösung ausbildet. In *Bild 5.7* sind die Problemstellung und Momentaufnahmen des berechneten Strömungsfeldes in Form der Stromlinien und des Druckes zu diskreten Zeitpunkten dargestellt.

Das Strömungsgebiet ist mit 32×32 Q1Q1-Elementen und der Strukturteil mit 16 neunknotigen, vollintegrierten Verschiebungs-Scheibenelementen diskretisiert. Aufgrund der großen Strukturdeformationen wurde dabei geometrische Nichtlinearität berücksichtigt. Als Zeitintegrationsverfahren wurden hier für das Fluid das Euler-Rückwärts-Verfahren und für die Struktur die Trapezregel mit konsistenter Massenmatrix eingesetzt. Die Materialparameter sind für das Fluid: Dichte $\rho^F = 1,0\, kg/m^3$ und kinematische Viskosität $\nu^F = 0,01\, m^2/s$; und für die Struktur: Dichte $\rho^S = 500,0\, kg/m^3$, Elastizitätsmodul $E^S = 250,0\, N/m^2$ und Poissonzahl $\nu^S = 0,0$.

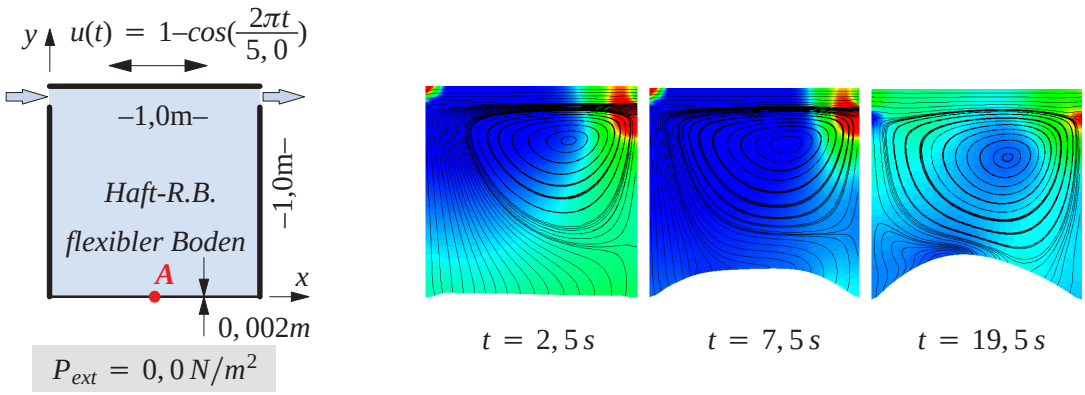


Bild 5.7: Oszillierend überströmter Hohlraum mit flexiblem Boden (B2): Problemstellung und Momentaufnahmen des Strömungsfeldes (Stromlinien auf Druck)

Wie für FSI-Simulationen typisch, treten die Instabilitätseffekte in diesem Beispiel zuerst im Fluiddruck und den Strukturbeschleunigungen auf, und in der Folge, aber erst etwas später, auch in den Geschwindigkeiten und Strukturverschiebungen. Daher sind in *Bild 5.8* (Diagramme a – d) für unterschiedliche Berechnungsverfahren bzw. Prädiktorformulierungen die Zeitverläufe der aus dem Fluiddruck am Interface aufintegrierten Kopplungslasten am Knoten ***A*** (Vertikalkomponente) dargestellt. Da im Fall von FSI-Problemen mit der vorhandenen, modularen Software keine simultane, monolithische Lösung des unpartitionierten Gesamtsystems berechnet werden kann, wurde die Referenzlösung (a) hier mit einer auskonvergierten, iterativ gestaffelten Berechnung ermittelt, die über den gesamten Berechnungszeitraum hinweg keinerlei Stabilitätsprobleme zeigt. Sie ist, wie im vorigen Beispiel (Abschnitt 5.2, Modellbeispiel B1) numerisch gezeigt wurde und in Kapitel 6 noch theoretisch untermauert werden wird, mit einer simultan berechneten Lösung praktisch identisch und kann daher als Referenzlösung bei der Ermittlung des Fehlers der sequentiell gestaffelten Verfahren verwendet werden. Die Ergebnisse zeigen folgendes:

1. Bei gleicher Zeitschrittgröße wird die numerische Lösung der sequentiell gestaffelten Verfahren mit steigender Genauigkeit des Prädiktors immer früher instabil.

2. Das Auftreten der schwachen Instabilität innerhalb des Berechnungszeitraums $t \in [0s\,;\ 100s]$ kann auch durch mehrfache Verkleinerung des Zeitschrittes nicht verhindert werden. Ganz im Gegenteil tauchen die instabilen, hochfrequenten Oszillationen sogar mit kleiner werdendem Zeitschritt immer früher auf: Für die Rechnungen mit dem zweiter Ordnung genauen Prädiktor und $\Delta t = 0,1s$ etwa ab Zeitschritt Nr. 36, bei $\Delta t = 0,01s$ bereits ab Zeitschritt Nr. 20 und bei $\Delta t = 0,001s$ sogar sofort im ersten Zeitschritt. Die Ursache dieses Phänomens ist der oben und in Abschnitt 3.4.3 erläuterte „Artificial Added Mass“-Effekt.

3. Der im fünften Diagramm von *Bild 5.8* vergrößert dargestellte, stabile Anfangsbereich sowie die ganz unten abgebildeten Kurven des aufsummierten Fehlers in der Vertikalverschiebung des Knotens A (Gl. (5.24)) zeigen, daß das relativ lang stabile Verfahren mit nullter Ordnung genauem Prädiktor wesentlich ungenauer ist (Abweichung von der Referenzlösung in Größenordnung des verwendeten Zeitschrittes, d.h. „Hinterherhinken“ der Lösung

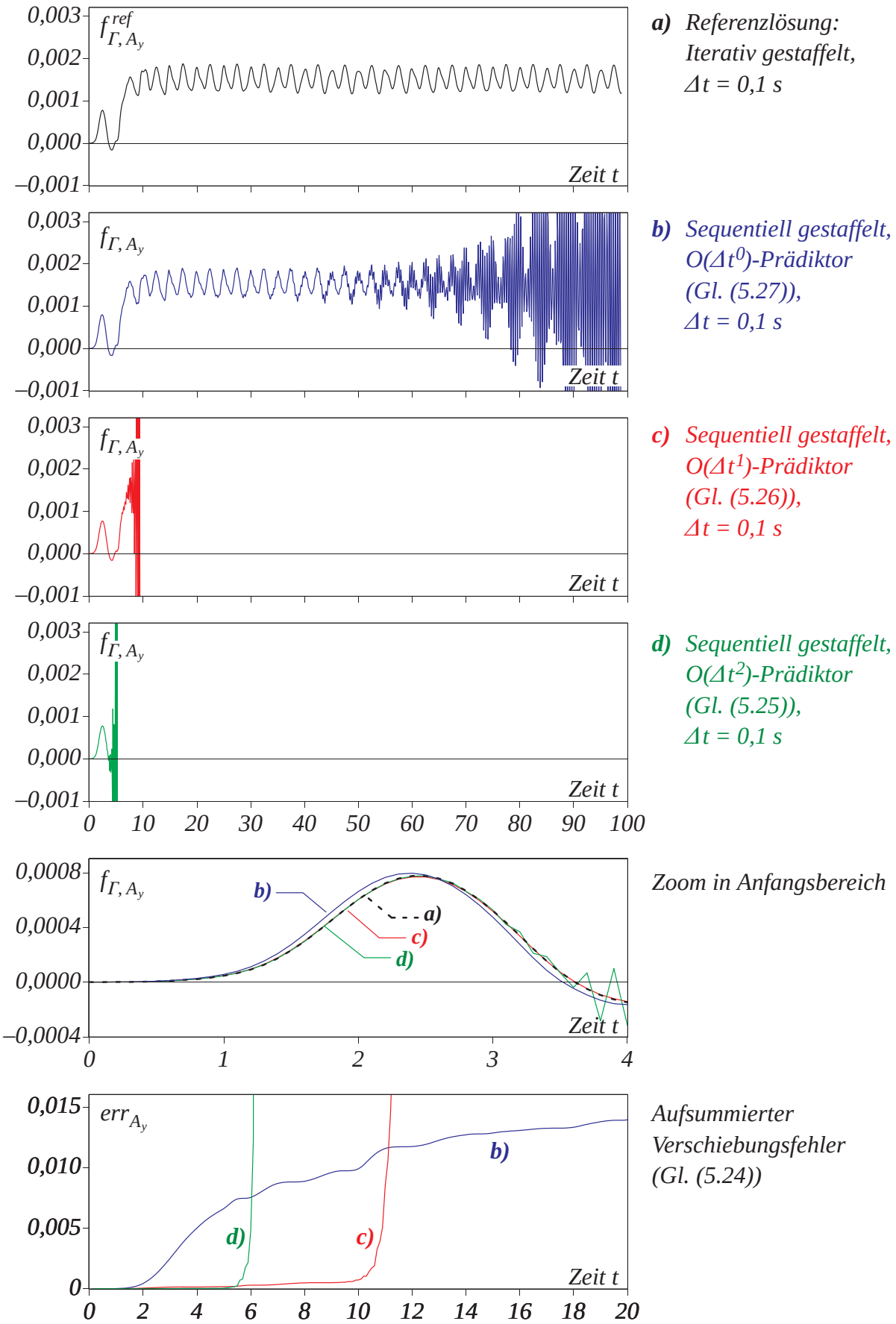


Bild 5.8: Oszillierend überströmter Hohlraum (B2): Kopplungskraft–Zeitverläufe am Knoten A und aufsummierter Fehler in der Vertikalverschiebung am Knoten A

um einen Zeitschritt), als die Verfahren mit erster und zweiter Ordnung genauem Prädiktor: Im stabilen Anfangsbereich sind die Verschiebungskurven c) und d) nahezu deckungsgleich mit der Referenzlösung a), und der aufsummierte Verschiebungsfehler liegt unter einem Tausendstel, während derjenige des Grundverfahrens b) im Prozentbereich liegt. Dies wird mit den in *Tabelle 5.2* zusammengestellten Zahlenwerten quantifiziert: Der durch die sequentiell gestaffelten Lösung im Vergleich zur iterativ gestaffelten (bzw. simultanen) Referenzlösung erzeugte Fehler ist bei dem Verfahren mit nullter Ordnung genauem Prädiktor, also dem sequentiell gestaffelte Grundverfahren, auch in diesem Beispiel von erster Ordnung (Halbierung des Zeitschritts führt etwa zur Halbierung des Fehlers). Dagegen bewirkt bereits der erster Ordnung genaue Prädiktor eine Verbesserung der Genauigkeit um eine Ordnung (Halbierung des Zeitschritts führt zur Reduktion des Fehlers auf ein Viertel, d.h. $O(\Delta t^2)$-genau), und der Prädiktor zweiter Ordnung führt erwartungsgemäß zu einer weiteren, deutlichen Genauigkeitssteigerung (Fehlerreduktion auf ein Achtel bei Halbierung des Zeitschritts). Dadurch sind auch die Absolutwerte der aufsummierten Fehler zwischen den einzelnen Ansätzen um jeweils eine Zehnerpotenz unterschiedlich.

Δt		**$O(\Delta t^0)$-Prädiktor**		**$O(\Delta t^1)$-Prädiktor**		**$O(\Delta t^2)$-Prädiktor**	
0,05		0,19E–3		0,12E–4		0,12E–5	
0,10	x 2,00	0,44E–3	x 2,32	0,50E–4	x 4,17	0,96E–5	x 8,00
0,20	x 2,00	1,12E–3	x 2,55	2,25E–4	x 4,50	7,66E–5	x 7,98

Tabelle 5.2 Oszillierend überströmter Hohlraum (B2): Aufsummierter Verschiebungsfehler err_{Ay} im Knoten A z.Zt. t = 2,0 s für verschiedene Zeitschrittgrößen u. Prädiktoren

4. Nach dem Auftreten der instabilen Oszillationen nimmt der aufsummierte Verschiebungsfehler ebenso wie die numerische Lösung (betragsmäßig) schlagartig und überlinear zu.

5. Schließlich wird an diesem Beispiel noch die Anwendung des in Abschnitt 3.4.2 beschriebenen Energiekriteriums demonstriert. In *Bild 5.9* ist für die iterativ gestaffelte Referenzlösung a) und für die sequentiell gestaffelten Lösungen b) bis d) die aufsummierte Interface-Energie aufgetragen, also die aufgrund der partitionierten Lösung künstlich am Interface produzierte Energie. Es ist klar erkennbar, daß gleichzeitig mit dem Einsetzen der Instabilität in der jeweiligen numerischen Lösung auch die entsprechende Interface-Energiesumme plötzlich exponentiell und über alle Grenzen anwächst. Im stabilen Anfangsbereich hingegen zeigt sich ein zwar u.U. oszillierender, aber im Mittel trotzdem nur linear und schwach ansteigender Verlauf, und die durch das partitionierte Lösungsverfahren künstlich produzierte Energie ist hier für die Lösungen mit erster und zweiter Ordnung genauen Prädiktoren (Kurven c) und d)) weitaus geringer, als für die des sequentiell gestaffelten Grundverfahrens (Prädiktor nullter Ordnung, Kurve b)). Die Verfahren mit Prädiktor haben also eine höhere „energetische Genauigkeit“ (Piperno & Farhat (2000)). Das iterativ gestaffelte Verfahren schließlich erzeugt eine Interface-Energie, deren Summe über den gesamten Berechnungszeitraum kleiner als 10^{-7}, also vernachlässigbar klein bleibt (in der Größenordnung der für die Iteration über die Felder verwendeten Toleranz von $\varepsilon = 10^{-6}$).

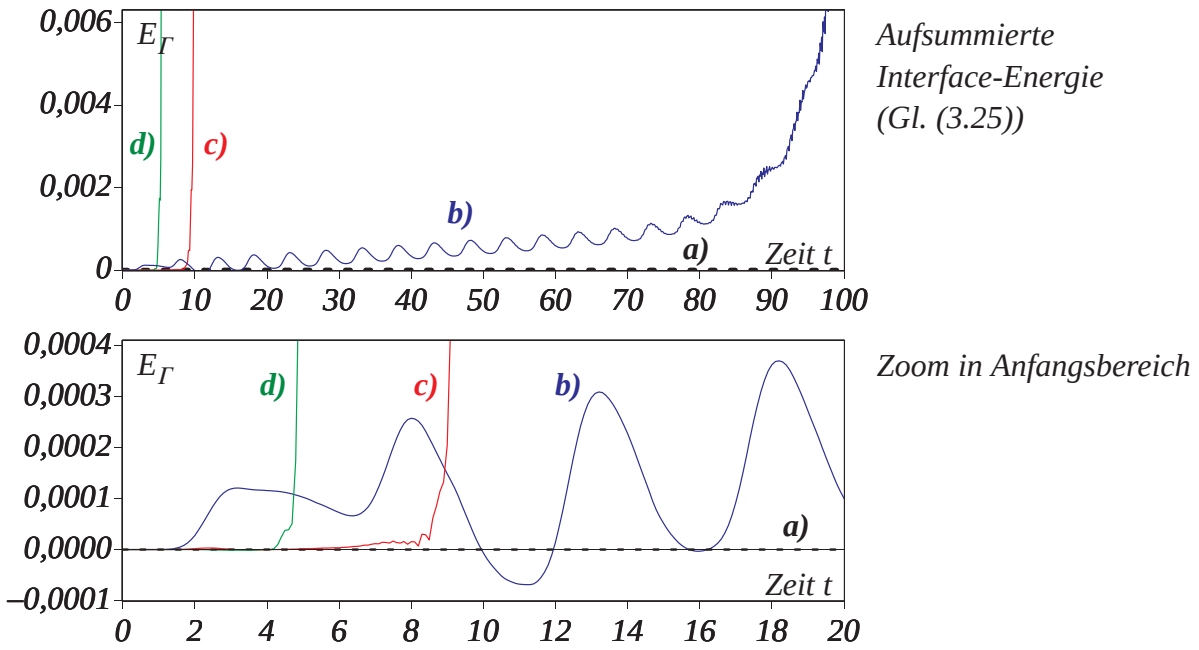


Bild 5.9: Oszillierend überströmter Hohlraum (B2): Aufsummierte Interface-Energie

5.4 Asynchrones, sequentiell gestaffeltes Verfahren

Das einzige sequentiell gestaffelte Verfahren für die partitionierte Lösung von Fluid-Struktur-Interaktionsproblemen mit impliziten Zeitintegrationsverfahren in beiden Partitionen, welches bei Beachtung der geometrischen Bilanzgleichungen (GCL) die kinematische Kontinuität sowohl in den Verschiebungen als auch in den Geschwindigkeiten erfüllt, ist das asynchrone Verfahren von Lesoinne & Farhat (1996, 1998a, b). Es ist in *Bild 5.10* schematisch abgebildet (in einer von der Originalarbeit abweichenden Darstellungsart, die die zeitliche Abhängigkeit der Kopplungsinformationen klarer zeigt) und als *Algorithmus 5.6* im Detail beschrieben.

Die Grundidee basiert darauf, daß für die Zeitintegration des Strukturfeldes die implizite Mittelpunktsregel verwendet wird, und die diskreten Integrationszeitpunkte zwischen den Teilgebieten um einen halben Zeitschritt versetzt werden.

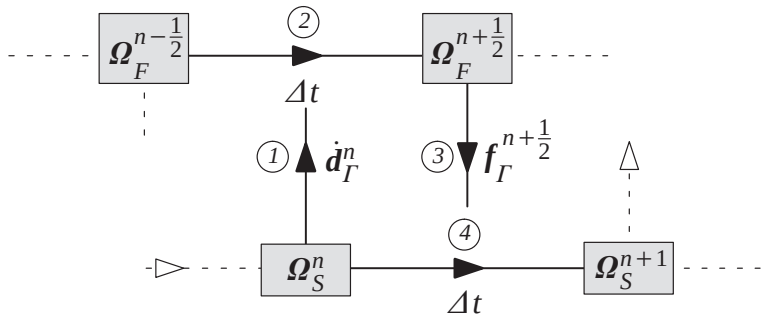


Bild 5.10: Asynchrones, sequentiell gestaffeltes I–I–Verfahren nach Lesoinne & Farhat (1996, 1998a, b): Ablaufdiagramm

0. Initialisierung: n=0. Startlösung Struktur Ω_S z.Zt. t^0 und Fluid Ω_F z.Zt. $t^{-1/2}$ gegeben;

Startlösung Fluid-Netz Ω_M auf Γ: $\boldsymbol{r}_\Gamma^{-1/2} = \boldsymbol{d}_\Gamma^0 - \frac{\Delta t}{2}\dot{\boldsymbol{d}}_\Gamma^0$ (5.45)

Schleife über alle n_T Zeitschritte

1. Übergebe Interface-Geschwindigkeit $\dot{\boldsymbol{d}}_\Gamma^n$ von Ω_S an Ω_M

2a. Setze neue Fluid-Netzgeschwindigkeit auf Interface $\boldsymbol{u}_\Gamma^{G,\,n-\frac{1}{2}\to n+\frac{1}{2}} = \dot{\boldsymbol{d}}_\Gamma^n$ (5.46)

2b. Löse Fluid-Netz Ω_M mit Dirichlet-R.B. $\boldsymbol{r}_\Gamma^{n+\frac{1}{2}} = \boldsymbol{r}_\Gamma^{n-\frac{1}{2}} + \Delta t\,\boldsymbol{u}_\Gamma^{G,\,n-\frac{1}{2}\to n+\frac{1}{2}}$ (5.47)

$$\boldsymbol{K}_{II}^M\,\boldsymbol{r}_I^{n+\frac{1}{2}} = -\boldsymbol{K}_{I\Gamma}^M\,\boldsymbol{r}_\Gamma^{n+\frac{1}{2}} \tag{5.48}$$

2c. Berechne neue Netzgeschw. im Innern von Ω_M unter Berücksichtigung der GCL

$$\boldsymbol{u}_I^{G,\,neu} := \boldsymbol{u}_I^{G,\,n-\frac{1}{2}\to n+\frac{1}{2}} = \frac{\boldsymbol{r}_I^{n+\frac{1}{2}} - \boldsymbol{r}_I^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} \tag{5.49}$$

2d. Übergebe Netzdeformation $\boldsymbol{r}^{n+\frac{1}{2}}$ und -geschwindigkeit $\boldsymbol{u}^{G,\,neu}$ von Ω_M an Ω_F

2d. Integriere Fluid Ω_F auf neuem Netz $\boldsymbol{r}^{n+\frac{1}{2}}$, $\boldsymbol{u}^{G,\,neu}$ mit beliebigem Zeitint.verf.

$$\left(\frac{1}{\Delta t}\boldsymbol{M}^F + \theta\left(\boldsymbol{N}^F(\boldsymbol{c}^{n+\frac{1}{2}}) + \boldsymbol{K}^F\right)\right)\boldsymbol{u}^{n+\frac{1}{2}} + \theta\,\boldsymbol{G}^F\,\boldsymbol{p}^{n+\frac{1}{2}} = \theta\,\boldsymbol{f}_{ext}^{n+\frac{1}{2}} + (1-\theta)\,\boldsymbol{f}_{ext}^{n-\frac{1}{2}} +$$
$$+\left(\frac{1}{\Delta t}\boldsymbol{M}^F - (1-\theta)\left(\boldsymbol{N}^F(\boldsymbol{c}^{n-\frac{1}{2}}) + \boldsymbol{K}^F\right)\right)\boldsymbol{u}^{n-\frac{1}{2}} - (1-\theta)\,\boldsymbol{G}^F\,\boldsymbol{p}^{n-\frac{1}{2}} \tag{5.50}$$

$$\text{mit}\quad \boldsymbol{c}^{n+\frac{1}{2}} = \boldsymbol{u}^{n+\frac{1}{2}} - \boldsymbol{u}^{G,\,neu}\ ;\ \boldsymbol{c}^{n-\frac{1}{2}} = \boldsymbol{u}^{n-\frac{1}{2}} - \boldsymbol{u}^{G,\,neu}$$

3. Übergebe Interface-Druck $\boldsymbol{p}_\Gamma^{n+\frac{1}{2}}$ (und viskose Spannungen $\boldsymbol{\tau}_\Gamma^{n+\frac{1}{2}}$) von Ω_F an Ω_S

4a. Berechne daraus konsistenten Knotenlastvektor $\boldsymbol{f}_\Gamma^{n+\frac{1}{2}}(\boldsymbol{p}_\Gamma^{n+\frac{1}{2}},\ \boldsymbol{\tau}_\Gamma^{n+\frac{1}{2}})$ in Ω_S

4b. Integriere Struktur Ω_S mit Neumann-R.B. $\boldsymbol{f}_\Gamma^{n+\frac{1}{2}}$ mit Mittelpunktsregel

$$\frac{4}{\Delta t^2}\boldsymbol{M}^S\boldsymbol{d}^{n+1} + \frac{1}{2}\boldsymbol{f}_{int}\left(\boldsymbol{d}^{n+1}\right) = \frac{1}{2}\boldsymbol{f}_{int}(\boldsymbol{d}^n) +$$
$$+\ \boldsymbol{M}^S\boldsymbol{h}\left(\boldsymbol{d}^n, \dot{\boldsymbol{d}}^n, \ddot{\boldsymbol{d}}^n\right) + \frac{1}{2}\begin{Bmatrix}\boldsymbol{f}_{\Gamma\,ext}^{n+1} + \boldsymbol{f}_{\Gamma\,ext}^{n}\\ \boldsymbol{f}_{I\,ext}^{n+1} + \boldsymbol{f}_{I\,ext}^{n}\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}\boldsymbol{f}_\Gamma^{n+\frac{1}{2}}\\ \boldsymbol{0}\end{Bmatrix} \tag{5.51}$$

mit $\boldsymbol{h}$ *nach* (2.46) *und* $\beta = \frac{1}{4},\ \gamma = \alpha_m = \alpha_f = \frac{1}{2};\ \boldsymbol{M}^S,\ \boldsymbol{d},\ \boldsymbol{f}_{int}$ *wie in Gl.* (5.18).

Geschwindigkeitsupdate: $\dot{\boldsymbol{d}}^{n+1} = \frac{2}{\Delta t}\left(\boldsymbol{d}^{n+1} - \boldsymbol{d}^n\right) - \dot{\boldsymbol{d}}^n$ (5.52)

$n \leftarrow n + 1 \quad bis\ n + 1 = n_T$

Algorithmus 5.6: Asynchrones, sequent. gestaff. Verfahren für FSI (Lesoinne & Farhat (1998))

Diskussion der numerischen Eigenschaften

- *Dynamische und kinematische Kontinuität*

Da die Mittelpunktsregel die Bewegungsgleichung des Strukturfeldes in Zeitschrittmitte erfüllt,

$$\boldsymbol{M}^S\ddot{\boldsymbol{d}}^{n+\frac{1}{2}}\left(+\boldsymbol{D}^S\dot{\boldsymbol{d}}^{n+\frac{1}{2}}\right)+\boldsymbol{f}_{int}\left(\boldsymbol{d}^{n+\frac{1}{2}}\right)=\boldsymbol{f}_{ext}^{n+\frac{1}{2}}-\boldsymbol{f}_{\Gamma}^{n+\frac{1}{2}} \tag{5.53}$$

und die implizit z.Zt. $t^{n+\frac{1}{2}}$ berechneten Fluidlasten $\boldsymbol{f}_{\Gamma}^{n+\frac{1}{2}}$ durch den Zeitversatz um $\Delta t/2$ auch gerade dort zur Verfügung stehen, wird mit diesem Verfahren das dynamische Gleichgewicht am Interface am Zeitpunkt $t^{n+\frac{1}{2}}$ erfüllt, und die Übergabe der dynamischen Kopplungsgröße ist konsistent zum eingesetzten diskreten Zeitintegrationsverfahren.

Die kinematische Kontinuität in den Geschwindigkeiten wird direkt über das algorithmische Gleichsetzen der Netzgeschwindigkeit am Interface (und damit auch der Fluidgeschwindigkeit aufgrund der Dirichlet-R.B. für das Fluid auf Γ gemäß Gl. (3.12)) mit der Strukturgeschwindigkeit zur Zeit t^n sichergestellt: Schritt 2a, Gleichung (5.46). Es läßt sich weiterhin zeigen, daß auch die kinematische Kontinuität in den Verschiebungen zwischen Fluidgebiet, d.h. Fluid-Netz, und Struktur zur Zeit t^n gilt[9]:

$$\boldsymbol{r}_{\Gamma}^{n}=\boldsymbol{d}_{\Gamma}^{n} \tag{5.54}$$

Allerdings bedingt der zeitliche Versatz der Fluid- und Strukturlösungen ein gravierendes Problem: Die kinematische und die dynamische Kontinuität sind nie zur selben Zeit erfüllt. Die dynamische Kontinuität gilt gemäß obiger Herleitung stets nur in der Mitte des Struktur-Zeitschrittes, d.h. zum Zeitpunkt $t^{n+\frac{1}{2}}$. Die Erfüllung der kinematischen Kontinuitätsbedingungen in den Verschiebungen und Geschwindigkeiten am Interface wurde hingegen oben bzw. in den Arbeiten von Lesoinne & Farhat nur für die diskreten Grenzen des Struktur-Zeitintervalles, d.h. für die Zeiten t^n, t^{n+1}, ... Es ist nun einfach zu beweisen, daß die kinematische Kontinuität für die *Mitte* des Struktur-Zeitschrittes $t^{n+\frac{1}{2}}$ *nicht* gelten kann: Erstens gilt für die Fluid-Netz-*Verschiebung* zur Zeit $t^{+\frac{1}{2}}$ gemäß den Gleichungen (5.45) und (5.47)

$$\boldsymbol{r}_{\Gamma}^{+\frac{1}{2}}=\boldsymbol{d}_{\Gamma}^{0}+\frac{\Delta t}{2}\dot{\boldsymbol{d}}_{\Gamma}^{0} \tag{5.55}$$

während für die Strukturverschiebung

$$\boldsymbol{d}_{\Gamma}^{+\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{d}_{\Gamma}^{0}+\boldsymbol{d}_{\Gamma}^{1}\right) \tag{5.56}$$

gilt (Gl. (2.42) mit $\alpha_f = 1/2$). Wären diese beiden Ausdrücke gleich, würde daraus direkt folgen, daß die Strukturverschiebung am Ende des Struktur-Zeitschrittes explizit mittels

$$\boldsymbol{d}_{\Gamma}^{1}=\boldsymbol{d}_{\Gamma}^{0}+\Delta t\,\dot{\boldsymbol{d}}_{\Gamma}^{0} \tag{5.57}$$

aus den Bewegungsgrößen an dessen Beginn extrapoliert werden könnte. Tatsächlich wird sie aber durch implizite Lösung der Bewegungsgleichung des Strukturfeldes (5.53) errechnet,

9. Der von Lesoinne & Farhat in den zitierten Arbeiten erbrachte Beweis dieser Beziehung ist der Vollständigkeit halber im Anhang A2.2 in der hier verwendeten Notation wiedergegeben.

was im allgemeinen natürlich nicht identisch sein kann. Die kinematische Kontinuität in den Verschiebungen am Interface gilt also zur Zeit $t^{+\frac{1}{2}}$ nicht ($\boldsymbol{r}_{\Gamma}^{+\frac{1}{2}} \neq \boldsymbol{d}_{\Gamma}^{+\frac{1}{2}}$), folglich gilt sie auch nicht zu allen folgenden Zeiten $t^{n+\frac{1}{2}}$, da $\boldsymbol{r}_{\Gamma}^{n+\frac{1}{2}}$ sukzessiv vom vorangegangenen Wert aus extrapoliert wird. Zweitens springt die innerhalb des Fluid-Zeitschrittes konstante Fluid-(Netz-)*Geschwindigkeit* am Zeitpunkt $t^{n+\frac{1}{2}}$ von

$$\boldsymbol{u}_{\Gamma}^{G,\, n-\frac{1}{2} \to n+\frac{1}{2}} = \dot{\boldsymbol{d}}_{\Gamma}^{n} \tag{5.58}$$

nach

$$\boldsymbol{u}_{\Gamma}^{G,\, n+\frac{1}{2} \to n+\frac{3}{2}} = \dot{\boldsymbol{d}}_{\Gamma}^{n+1} \tag{5.59}$$

während die Strukturgeschwindigkeit an diesem Zeitpunkt eindeutig den Mittelwert dieser zwei Größen hat:

$$\boldsymbol{d}_{\Gamma}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left(\dot{\boldsymbol{d}}_{\Gamma}^{n} + \dot{\boldsymbol{d}}_{\Gamma}^{n+1}\right) \tag{5.60}$$

Somit gilt auch die Geschwindigkeitskontinuität eben nur zur Zeit t^n, aber nicht für $t^{n+\frac{1}{2}}$.

- *Genauigkeit*

Die Kontinuität in den kinematischen und dynamischen Größen resultiert – trotz des zeitlichen Versatzes – in einer sehr hohen Genauigkeit dieses asynchronen Verfahrens (Genauigkeit zweiter Ordnung), bei gleich niedrigem numerischem Aufwand wie derjenige des synchronen, sequentiell gestaffelten Grundverfahrens.

- *Stabilität*

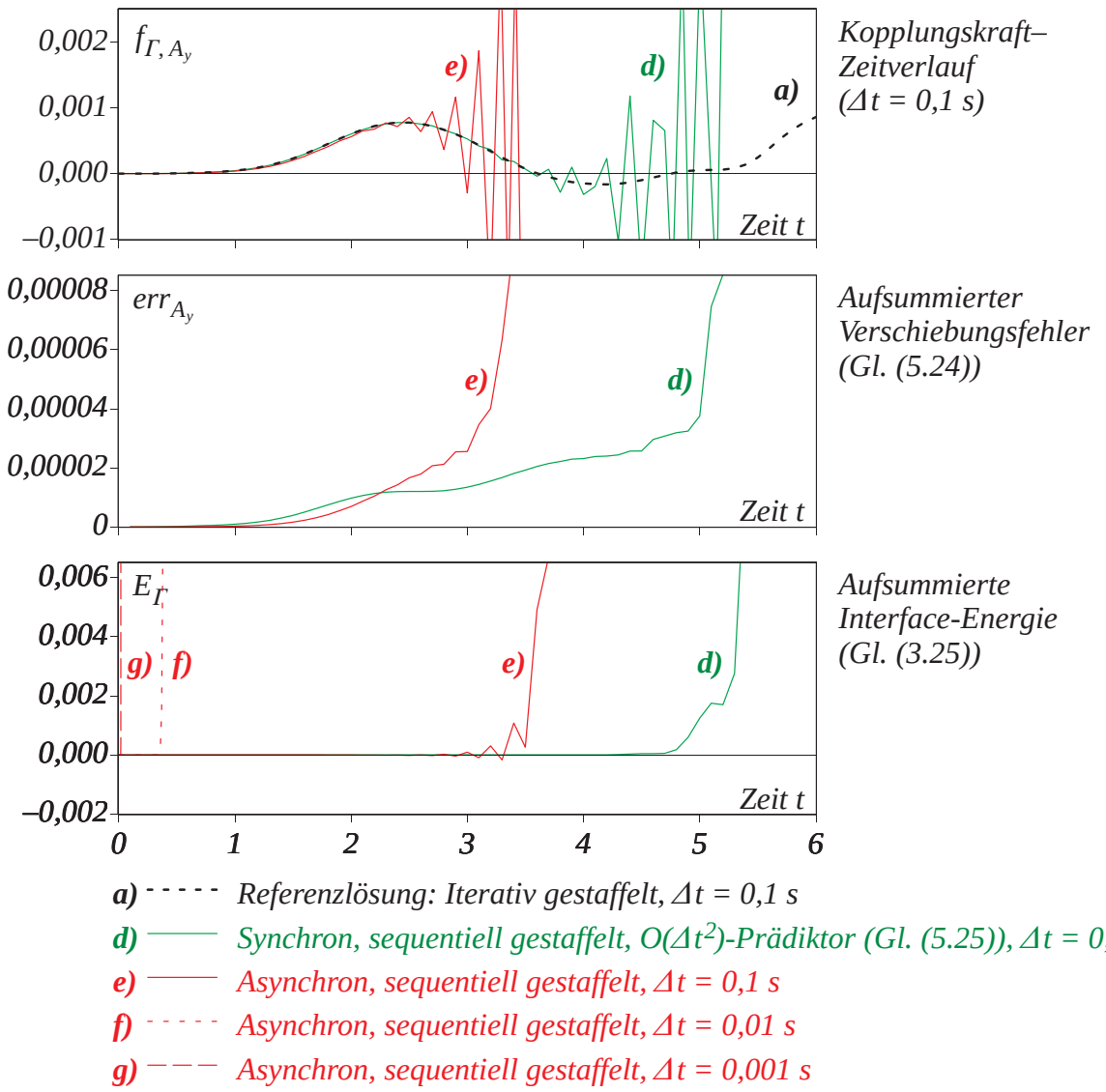
Auf das Stabilitätsverhalten des Kopplungsalgorithmus hat die nicht gleichzeitige Erfüllung der beiden Kontinuitätsbedingungen jedoch einen fatalen Einfluß. Bei Anwendung auf die hier untersuchte Simulation von Fluid-Struktur-Interaktionsproblemen mit *in*kompressiblen Strömungen tritt die schwache Instabilität in der numerischen Lösung extrem früh auf, in allen berechneten Beispielen sogar noch früher als bei dem synchronen Verfahren mit zweiter Ordnung genauem Prädiktor. Dieses frühe Auftreten der Instabilität scheint wieder ein spezifisches Problem der Fluid-Struktur-Interaktion mit *in*kompressiblen Strömungen zu sein, da Lesoinne & Farhat bei ihren aeroelastischen Simulationen mit *kompressiblen* Strömungen mit diesem Kopplungsverfahren eine große Verbesserung im Stabilitätsverhalten gegenüber dem synchronen, sequentiell gestaffelten Grundverfahren beobachtet haben.

Ein weiterer klarer Nachteil des asynchronen Verfahrens ist, daß man bei diesem Kopplungsalgorithmus in der Wahl der Zeitintegrationsverfahren nicht frei, sondern im strukturdynamischen Teil auf die Mittelpunktsregel festgelegt ist. Diese hat bekanntlich im Nichtlinearen selbst wieder numerische Stabilitätsprobleme, unabhängig von einer partitionierten Lösungsstrategie. Die FSI–Untersuchungen von Lesoinne & Farhat sind entsprechend auf geometrisch und materiell lineare Strukturen beschränkt.

Modellbeispiel B2: Oszillierend überströmter Hohlraum mit flexiblem Boden

Mit dem im vorigen Abschnitt dokumentierten FSI-Modellbeispiel B2 wird nun noch das numerische Verhalten des asynchronen, sequentiell gestaffelten Verfahren gezeigt, und damit die obigen Aussagen zu dessen Eigenschaften verdeutlicht bzw. verifiziert. *Bild 5.11* und *Tabelle 5.3* stellen die ermittelten Ergebnisse im Vergleich zur Referenzlösung und zur synchronen, sequentiell gestaffelten Lösung mit zweiter Ordnung genauem Prädiktor dar. Es zeigt sich folgendes Verhalten:

1. Das asynchrone Verfahren wird sogar noch schneller instabil als das synchrone Verfahren mit $O(\Delta t^2)$-Prädiktor.
2. Die Genauigkeit ist im stabilen Anfangsbereich von zweiter Ordnung (*Tabelle 5.3*) und sogar noch höher als die des synchronen Verfahrens mit $O(\Delta t^2)$-Prädiktor.



a) - - - - - *Referenzlösung: Iterativ gestaffelt, Δt = 0,1 s*

d) ——— *Synchron, sequentiell gestaffelt, $O(\Delta t^2)$-Prädiktor (Gl. (5.25)), Δt = 0,1 s*

e) ——— *Asynchron, sequentiell gestaffelt, Δt = 0,1 s*

f) - - - - - *Asynchron, sequentiell gestaffelt, Δt = 0,01 s*

g) — — — *Asynchron, sequentiell gestaffelt, Δt = 0,001 s*

Bild 5.11: Oszillierend überströmter Hohlraum (B2): Kopplungskraft–Zeitverläufe am Knoten A, aufsummierter Fehler in der Vertikalverschiebung am Knoten A, und aufsummierte Interface-Energie

Δt		Asynchron		Synchron, O(Δt²)-Präd.	
0,05		0,17E–5		0,12E–5	
0,10	x 2,00	0,69E–5	x 4,13	0,96E–5	x 8,00
0,20	x 2,00	3,24E–5	x 4,72	7,66E–5	x 7,98

Tabelle 5.3 Oszillierend überströmter Hohlraum (B2): Aufsummierter Verschiebungsfehler err_{Ay} im Knoten A z.Zt. t = 2,0 s für asynchrones und synchrones Verfahren

3. Nach dem Auftreten der instabilen Oszillationen nimmt der Fehler wiederum schlagartig und weit überlinear zu.
4. Auch bei dem asynchronen, sequentiell gestaffelten Verfahren für FSI–Probleme kann das Auftreten der schwachen Instabilität innerhalb des Berechnungszeitraums $t \in [0\,;\,100]$ aufgrund des „Artificial Added Mass“-Effektes nicht durch Verkleinerung des Zeitschrittes verhindert werden, sondern die instabilen, hochfrequenten Oszillationen beginnen – einhergehend mit dem in Bild 5.11 unten gezeigten, explosiven Anwachsen der Interface-Energie – mit kleiner werdendem Zeitschritt immer früher: Bei $\Delta t = 0,1$ etwa ab Zeitschritt Nr. 28 ($t = 2,80$), bei $\Delta t = 0,01$ ab Zeitschritt Nr. 26 ($t = 0,26$), bei $\Delta t = 0,001$ bereits ab Zeitschritt Nr. 17 ($t = 0,017$).

5.5 Parallel gestaffelte Verfahren

Zu den bisher beschriebenen sequentiell gestaffelten Lösungsverfahren wurden auch parallele Varianten entwickelt. Da im Rahmen dieser Forschungsarbeit der Aspekt der Parallelisierung noch ausgespart wurde, soll in den folgenden Ausführungen lediglich der Vollständigkeit halber eine kurze Vorstellung von zwei aus der Literatur bekannten Ansätzen erfolgen, ohne daß diese weiter theoretisch oder numerisch analysiert werden.

Das in *Bild 5.12* dargestellte parallel gestaffelte Grundverfahren wurde erstmals von Farhat et al. (1995) und Piperno et al. (1995) vorgestellt und analysiert. Der Grundgedanke ist der, daß beide Partitionen parallel zueinander jeweils auf einem separaten Prozessor berechnet werden, und am Beginn jedes Zeitschrittes einmalig die jeweiligen Kopplungsinformationen ausgetauscht werden. Wie in den zitierten Arbeiten gezeigt wird, ist dieses Verfahren erster Ordnung genau, und der durch die partitionierte Lösung erzeugte Fehler ist doppelt so groß wie beim sequentiell gestaffelten Grundverfahren.

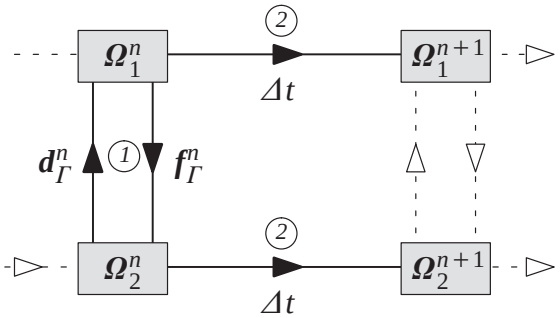


Bild 5.12: Parallel gestaffeltes Grundverfahren (Piperno et al. (1995), Farhat et al. (1995)): Ablaufdiagramm

Eine in den gleichen Arbeiten vorgeschlagene, verbesserte Verfahrensvariante ist in *Bild 5.13* abgebildet. Die ersten zwei Schritte dieses Ansatzes sind mit dem Grundverfahren identisch, nur daß die Fluid-Partition Ω_1 nur bis zur Zeit $t^{n+\frac{1}{2}}$ integriert wird. Dann werden die jeweils aktuellen Kopplungsverschiebungen und -lasten ausgetauscht, und anschließend folgt in Ω_1 die Integration der zweiten Zeitschritthälfte, während gleichzeitig die Integration der Struktur-Partition Ω_2 wiederholt wird, jeweils mit den neuen Kopplungsinformationen. Die erste Strukturintegration (Schritt 2) kann somit als Prädiktorschritt interpretiert werden.

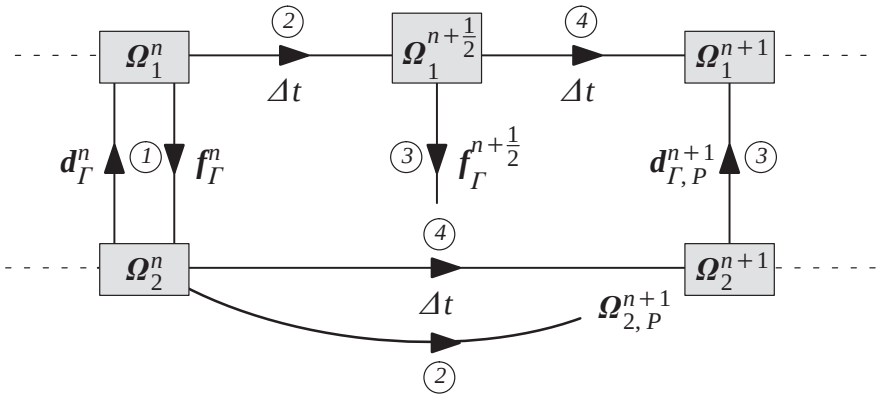


Bild 5.13: Verbessertes parallel gestaffeltes Verfahren (Piperno et al. (1995), Farhat et al. (1995)): Ablaufdiagramm

Das verbesserte Verfahren ist zwar pro Zeitschritt doppelt so aufwendig wie das Grundverfahren, aber dafür konnten mit diesem Ansatz in den dort gerechneten numerischen Beispielen weit über doppelt so große Zeitschritte verwendet werden, so daß sich insgesamt eine Einsparung an Rechenzeit ergab. Zudem wird die Genauigkeit der verbesserten Methode gegenüber dem Grundverfahren wieder um den Faktor 2 erhöht; sie bleibt jedoch erster Ordnung genau.

6 Iterativ gestaffelte Lösungsverfahren

Die Untersuchungen zu einfach gestaffelten, schwach koppelnden Lösungsansätzen im vorangegangenen Kapitel haben gezeigt, daß diese Verfahren insbesondere bei Verwendung für die Zielanwendungen dieser Arbeit – die geometrisch nichtlineare Strukturdynamik und die Interaktion von flexiblen Strukturen mit instationären, inkompressiblen Strömungen bei großen Strukturdeformationen – Probleme hinsichtlich der numerischen Stabilität aufweisen. Ein sicherer Weg, diese Probleme zu umgehen, ist der Einsatz von iterativ gestaffelten, stark koppelnden, impliziten Lösungsverfahren.

6.1 Allgemeines

Der Grundgedanke iterativ gestaffelter Verfahren zur partitionierten Berechnung der Lösung eines gekoppelten Systems ist der Folgende (*Bild 6.1*): In jedem Zeitschritt $t^n \rightarrow t^{n+1}$ wird zunächst mit einem beliebigen, einfach gestaffelten Verfahren eine erste, näherungsweise Lösung der Teilgebiete an dessen Ende t^{n+1} ermittelt. Mit den dann verfügbaren, neuen Kopplungsrandbedingungen wird anschließend die Lösung der Teilgebiete im selben Zeitschritt erneut berechnet. Dieser Vorgang wird mit jeweils neuen, iterativ verbesserten Kopplungsinformationen bis zur Konvergenz dieser sogenannten *äußeren Iteration* (hier auch als *Iteration über die Teilfelder* bezeichnet) wiederholt, d.h. solange, bis die iterative Änderung der Verschiebung des Kopplungsrandes, der respektiven Kopplungskräfte und/oder der zugehörigen Residuen unterhalb einer bestimmten Toleranzgrenze liegt. Erst dann wird zum nächsten Zeitschritt übergegangen.

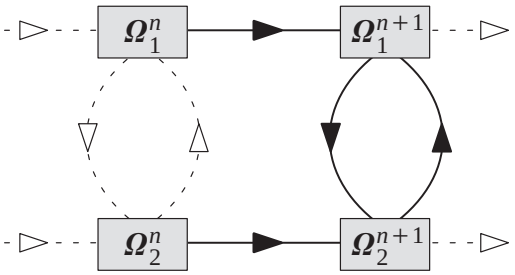


Bild 6.1: Iterativ gestaffelte Lösungsverfahren: Prinzipielles Ablaufdiagramm

Die Kopplungsbedingungen, also die kinematische und die dynamische Kontinuität am Interface, werden dadurch zu jedem diskreten Zeitpunkt t^{n+1} exakt erfüllt (im Rahmen der iterativ erreichten Genauigkeit), d.h. es wird eine starke algorithmische Kopplung erreicht. Die iterative Lösung konvergiert somit – sofern Konvergenz sichergestellt werden kann – gegen die simultane Lösung des unpartitionierten, gekoppelten Gesamtsystems, und die Bilanzgrößen Impuls, Masse sowie Energie am Interface bleiben erhalten. Zudem kann mit iterativ gestaffelten Verfahren auch das Interaction Consistency Law (ICL) erfüllt werden, da nach der Konvergenz der Iteration über die Teilfelder in beiden Partitionen alle Bewegungsgrößen sowohl am Anfang als auch am Ende eines Zeitschrittes bekannt sind, und folglich die Kopplungsrandbe-

dingungen stets zeitlich konsistent mit den jeweils eingesetzten diskreten Zeitintegrationsverfahren in den beiden Teilfeldern übergeben werden können. Dies gilt sowohl für die hier verwendeten, impliziten Zeitintegrationsansätze als auch für den Fall mit expliziten Zeitintegrationsverfahren.

Da insofern bei hinreichend stringenten Konvergenzkriterien durch den partitionierten Lösungsansatz (nahezu) kein zusätzlicher Fehler in die numerische Lösung des gekoppelten Problems kommt, werden im Prinzip auch die Genauigkeits- und Stabilitätseigenschaften von den in den Teilfeldern verwendeten Diskretisierungsverfahren geerbt. Dies gilt jedoch streng genommen nur dann mit Sicherheit, wenn in beiden Teilfeldern dieselben Diskretisierungsverfahren verwendet werden. Ist dies nicht der Fall, so kann lediglich die Vererbung der Genauigkeits- und Stabilitätseigenschaften einer entsprechenden simultanen Lösung garantiert werden. Wie diese Eigenschaften jedoch bei unterschiedlichen Zeit- oder sogar Zeit- und Raumdiskretisierungsverfahren in einzelnen Teilbereichen aussehen, ist im allgemeinen nicht bekannt. Sie wurden im Rahmen der vorliegenden Arbeit auch nicht untersucht. Allerdings kann festgestellt werden, daß zumindest in keinem der mit ausreichend auskonvergierten, iterativ gestaffelten Lösungsverfahren berechneten numerischen Beispiele Instabilitäten irgendwelcher Art oder nicht plausible Lösungen, die auf mangelnde Genauigkeit des numerischen Verfahrens schließen lassen könnten, beobachtet wurden.

Der Preis für diese vorteilhaften numerischen Eigenschaften ist ein u.U. stark erhöhter numerischer Aufwand. Vor allem einfache Algorithmen führen häufig zu sehr hohen Iterationszahlen, zu problemabhängigen Konvergenzeigenschaften oder sogar zur Divergenz der Iteration über die Teilfelder. Es ist daher Ziel dieses Kapitels, ein in der ingenieurwissenschaftlichen Literatur weitverbreitetes, maßgebliches Grundverfahren auf seine Vorteile und Defizite hin zu diskutieren, und es dann durch Rückführung auf klassische Gebietszerlegungsmethoden und iterative Lösungsverfahren in Richtung Robustheit und Effizienz weiterzuentwickeln. Die diskutierten Methoden basieren alle auf dem elementweisen, nichtüberlappenden Dirichlet-Neumann-Partitionierungskonzept (Abschnitt 3.1.1 und *Bild 5.1*). Sie wurden im Rahmen dieser Forschungsarbeit in das Finite-Element-Programmsystem CARAT implementiert, und ihr numerisches Verhalten wurde an einer Reihe von oberflächengekoppelten strukturdynamischen und Fluid-Struktur-Interaktionsbeispielen getestet, von denen hier und im Folgekapitel eine Auswahl dokumentiert ist.

6.2 Iterativ gestaffeltes Grundverfahren

Der in dieser Arbeit als Grundverfahren bezeichnete Ansatz wurde von Le Tallec & Mouro (1998, 2001) für Fluid-Struktur-Interaktionsprobleme mit inkompressiblen Strömungen und großen Strukturdeformationen in der hier betrachteten Komplexität formuliert. Er beginnt mit dem synchronen, sequentiell gestaffelten Verfahren mit $O(\Delta t^2)$-Prädiktor (Piperno (1997), s. Abschnitt 5.3) und führt anschließend die Iteration über die Teilgebiete mit einer relaxierten Interface-Verschiebung durch. Die Relaxation dient dabei zur Sicherstellung und Beschleunigung der Konvergenz der Iteration über die Felder (s.u.). Der algorithmische Ablauf ist als

Algorithmus 6.1 unter Verwendung der verallgemeinerten Darstellungsweise des partitionierten, algebraischen Gleichungssystems gemäß Gleichung (3.2) beschrieben. Seine Implementierung für die Strukturdynamik bzw. für die Fluid-Struktur-Interaktion verläuft dann analog zu *Algorithmus 6.3* bzw. *Algorithmus 6.4*, die im nächsten Abschnitt beschrieben sind.

0. Initialisierung: Setze $n = 0$. *Startlösungen* $\boldsymbol{d}^{\Omega_j, 0}$ *seien gegeben.*

Schleife über alle n_T *Zeitschritte*

1a. Berechne Prädiktor der Variablen auf dem Kopplungsrand in Ω_2

$$\boldsymbol{d}^{n+1}_{\Gamma,0} = \boldsymbol{d}^{n+1}_{\Gamma,P} = \boldsymbol{d}^{n}_{\Gamma} + \Delta t \left(\tfrac{3}{2}\, \dot{\boldsymbol{d}}^{n}_{\Gamma} - \tfrac{1}{2} \dot{\boldsymbol{d}}^{n-1}_{\Gamma} \right) \tag{6.1}$$

Iterationsschleife der Iteration über die Teilfelder (Start: $i = 0$*)*

1b. Übergebe $\boldsymbol{d}^{n+1}_{\Gamma,i}$ *von* Ω_2 *an* Ω_1

2. Integriere Dirichlet-Partition Ω_1 *von* $t^n \rightarrow t^{n+1}$ *mit Dirichlet-R.B.* $\boldsymbol{d}^{n+1}_{\Gamma,i}$

$$\boldsymbol{A}^{\Omega_1}_{II}\, \boldsymbol{d}^{\Omega_1, n+1}_{I,i+1} = \boldsymbol{f}^{\Omega_1, n+1}_{I\,ext} - \boldsymbol{A}^{\Omega_1}_{I\Gamma}\, \boldsymbol{d}^{n+1}_{\Gamma,i} \tag{6.2}$$

3. Berechne Kopplungskräfte $\boldsymbol{f}^{n+1}_{\Gamma,i+1}$ *in* Ω_1 *und übergebe sie an* Ω_2

$$\boldsymbol{f}^{n+1}_{\Gamma,i+1} = \boldsymbol{A}^{\Omega_1}_{\Gamma I}\, \boldsymbol{d}^{\Omega_1, n+1}_{I,i+1} + \boldsymbol{A}^{\Omega_1}_{\Gamma\Gamma}\, \boldsymbol{d}^{n+1}_{\Gamma,i} \tag{6.3}$$

4. Integriere Neumann-Partition Ω_2 *von* $t^n \rightarrow t^{n+1}$ *mit Neumann-R.B.* $\boldsymbol{f}^{n+1}_{\Gamma,i+1}$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}^{\Omega_2}_{\Gamma\Gamma} & \boldsymbol{A}^{\Omega_2}_{\Gamma I} \\ \boldsymbol{A}^{\Omega_2}_{I\Gamma} & \boldsymbol{A}^{\Omega_2}_{II} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{\boldsymbol{d}}^{n+1}_{\Gamma,i+1} \\ \boldsymbol{d}^{\Omega_2, n+1}_{I,i+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{f}^{n+1}_{\Gamma\,ext} - \boldsymbol{f}^{n+1}_{\Gamma} \\ \boldsymbol{f}^{\Omega_2, n+1}_{I\,ext} \end{Bmatrix} \tag{6.4}$$

5. Wähle geeigneten Relaxationsparameter $\omega \in \mathbb{R}^+$ *bzw.* $\omega_i \in \mathbb{R}^+$

6. Relaxation der Interface-Verschiebung

$$\boldsymbol{d}^{n+1}_{\Gamma,i+1} = \omega_i\, \tilde{\boldsymbol{d}}^{n+1}_{\Gamma,i+1} + (1-\omega_i)\, \boldsymbol{d}^{n+1}_{\Gamma,i} \tag{6.5}$$

7. Konvergenztest

$i \leftarrow i + 1$ *bis zur Konvergenz*

$n \leftarrow n + 1$ *bis* $n + 1 = n_T$

Algorithmus 6.1: Iterativ gestaffeltes Grundverfahren (Le Tallec & Mouro (1998, 2001))

Vergleicht man nun die Iterationsschleife der Iteration über die Teilfelder dieses Verfahrens mit der als *Algorithmus 4.1* in Abschnitt 4.1.1 beschriebenen iterativen Dirichlet-Neumann-Substrukturmethode, so stellt man eine exakte Analogie fest. Damit ist gezeigt, daß die hier untersuchten iterativ gestaffelten Lösungsverfahren tatsächlich auf Gebietszerlegungsmethoden zurückführbar sind. Entsprechend der in Abschnitt 4.3 (*Bild 4.2*) als Strategie 2 bezeichneten Vorgehensweise ermitteln sie die Lösung von nichtlinearen, gekoppelten, dynamischen Systemen, indem sie die entsprechenden nichtlinearen Anfangs-Randwertprobleme durch implizite Zeitdiskretisierung in eine Folge von n_T nichtlinearen Randwertproblemen umformen, und diese dann in jedem der n_T Zeitschritte durch iterative Dirichlet-Neumann-Substrukturverfahren mit nichtlinearen Teilsystemen lösen.

Konvergenzeigenschaften der Iteration über die Teilfelder

Die Hauptproblematik iterativ gestaffelter Lösungsverfahren besteht in der Sicherstellung bzw. der effektiven und robusten Beschleunigung der Konvergenz der äußeren Iteration. Daher ist eine Untersuchung der Konvergenzeigenschaften des iterativ gestaffelten Grundverfahrens erforderlich, wobei die Analogie zur iterativen Dirichlet-Neumann-Substrukturmethode ausgenutzt wird, für die ausführliche Konvergenzanalysen in der Literatur zu finden sind.

Wie in Abschnitt 4.1.1 im Detail erläutert, liegt der *iterativen Dirichlet-Neumann-Substrukturmethode* das *Richardson-Iterationsverfahren* (Anhang A3.2, Gl. (A.42)) zugrunde, und ihre auf die Interface-Freiheitsgrade reduzierte Iterationsvorschrift kann aus *Algorithmus 6.1* durch Einsetzen der Gleichungen (6.2) bis (6.4) in die Relaxationsgleichung (6.5) hergeleitet werden:

$$\boldsymbol{d}_{\Gamma,\,i+1}^{n+1} = \boldsymbol{d}_{\Gamma,\,i}^{n+1} + \omega_i \, \boldsymbol{S}^{\Omega_2{}^{-1}} \left(\boldsymbol{f}_{\Gamma\,ext}^{mod,\,n+1} - \left(\boldsymbol{S}^{\Omega_1} + \boldsymbol{S}^{\Omega_2} \right) \boldsymbol{d}_{\Gamma,\,i}^{n+1} \right) \tag{6.6}$$

mit dem Schurkomplement $\boldsymbol{S}^{\Omega_j} = \boldsymbol{A}_{\Gamma\Gamma}^{\Omega_j} - \boldsymbol{A}_{\Gamma I}^{\Omega_j} \boldsymbol{A}_{II}^{\Omega_j{}^{-1}} \boldsymbol{A}_{I\Gamma}^{\Omega_j}$ der Partition Ω_j. Die Konvergenzeigenschaften dieser Iteration hängen maßgeblich von zwei Faktoren ab: Erstens von den Relaxationsparametern $\omega_i \in \mathbb{R}^+$, und zweitens von den spektralen Eigenschaften der vorkonditionierten Operatormatrix $\tilde{\boldsymbol{A}} := \boldsymbol{S}^{\Omega_2{}^{-1}} \left(\boldsymbol{S}^{\Omega_1} + \boldsymbol{S}^{\Omega_2} \right)$, welche wiederum insbesondere durch die Vorkonditionierungsmatrix $\boldsymbol{M} := \boldsymbol{S}^{\Omega_2}$ gesteuert werden. Zu letzterem Punkt kann grundsätzlich gesagt werden, daß die Schurkomplement-Vorkonditionierung verhältnismäßig gut bis optimal ist (Smith et al. (1996)). Dies gilt zunächst für den rein strukturdynamischen Fall, in dem beide Teilgebiete ähnlich sind, aber erfahrungsgemäß auch für den bei der Fluid-Struktur-Interaktion auftretenden Fall mit unterschiedlichen partiellen Differentialgleichungen in den Teilgebieten, wie die insgesamt relativ kleinen Iterationszahlen bei den in dieser Arbeit durchgeführten Berechnungen zeigen.

Die zentrale und vieldiskutierte Frage der Methodik zur Wahl geeigneter Relaxationsparameter ω_i (Schritt 5 in *Algorithmus 6.1*) führt auf die Formulierung von unterschiedlichen Varianten der Richardson-Iteration. Effiziente Ansätze hierfür werden in den folgenden Abschnitten 6.3 bis 6.5 vorgestellt. Der für das Grundverfahren betrachtete einfachste Fall verwendet einen während der gesamten Iteration innerhalb eines Zeitschrittes (und in der Regel auch für alle Zeitschritte) unveränderlich gehaltenen Relaxationsparameter: $\omega_i = \omega =$ konstant. Dies ent-

spricht dem *stationären Richardson-Iterationsverfahren*, für das die folgenden Aussagen zu den numerischen Eigenschaften gelten (vgl. Anhang A3.2):

Im linearen Fall ($\tilde{\boldsymbol{A}}$ linear und symmetrisch positiv definit) ist für

$$0 < \omega < \frac{2}{\lambda_{max}\left(\tilde{\boldsymbol{A}}\right)} \tag{6.7}$$

lineare Konvergenz gegen den Fixpunkt der Iteration gewährleistet, welcher aufgrund der Konsistenzeigenschaft der Richardson-Iteration gleich der Lösung des nichtpartitioniert (simultan) berechneten Gesamtsystems ist. $\lambda_{max}\left(\tilde{\boldsymbol{A}}\right)$ bezeichnet hier den größten Eigenwert der vorkonditionierten Operatormatrix $\tilde{\boldsymbol{A}}$.

Bemerkung 6.1: Da das Basisiterationsverfahren *ohne* Relaxation dem Sonderfall mit $\omega = 1,0$ entspricht, konvergiert dieses folglich nur unter der Voraussetzung, daß der größte Eigenwert der vorkonditionierten Operatormatrix $\lambda_{max}\left(\tilde{\boldsymbol{A}}\right) < 2$ ist. Die Konvergenzanalyse in Le Tallec & Mouro (2001) im Rahmen von FSI-Problemen mit inkompressiblen Strömungen zeigt, daß diese Bedingung verletzt wird, wenn entweder die Struktursteifigkeit sehr gering ist, oder die Zeitschrittgröße sehr klein ist, oder die vom Fluid auf die Struktur wirkende zusätzliche Masse (im Sinne des in Abschnitt 3.4.3 besprochenen „Artificial Added Mass“-Effektes) groß ist im Vergleich zur Strukturmasse. Die Folge ist dann Divergenz des unrelaxierten Iterationsverfahrens.

Der optimale Relaxationsparameter der stationären Richardson-Iteration ist des weiteren durch

$$\omega_{opt} = \frac{2}{\lambda_{max}\left(\tilde{\boldsymbol{A}}\right) + \lambda_{min}\left(\tilde{\boldsymbol{A}}\right)} \tag{6.8}$$

gegeben und führt auf eine maximale asymptotische Konvergenzrate von

$$\rho_{opt} = \frac{\kappa\left(\tilde{\boldsymbol{A}}\right) - 1}{\kappa\left(\tilde{\boldsymbol{A}}\right) + 1} \tag{6.9}$$

mit der spektralen Konditionszahl $\kappa\left(\tilde{\boldsymbol{A}}\right) := \lambda_{max}\left(\tilde{\boldsymbol{A}}\right)/\lambda_{min}\left(\tilde{\boldsymbol{A}}\right)$. Nun ist zur direkten Berechnung des optimalen Relaxationsparameters die Kenntnis der extremalen Eigenwerte des gekoppelten Gesamtproblems $\tilde{\boldsymbol{A}}$ erforderlich. Diese sind jedoch in der Regel nicht bekannt, und eine exakte oder auch näherungsweise Eigenwertanalyse für das gekoppelte System ist zum einen numerisch sehr teuer und zum anderen in einer partitionierten, modularen Programmstruktur nur schwierig realisierbar (zur näherungsweisen Eigenwertanalyse s. Abschnitt 6.5). Weiter erschwerend kommt hier noch hinzu, daß im nichtlinearen Fall die Spektren der im Zeitschritt bzw. Inkrement jeweils linearisierten Systeme sich im Laufe der Berechnung verändern, so daß wiederholte Eigenwertanalysen zur ständigen Anpassung des Relaxationsparameters an das nichtlineare Systemverhalten erforderlich wären. Ein solches Vorgehen muß daher als zu aufwendig und somit weder zweckmäßig noch praktisch durchführbar beurteilt werden.

In technischen Anwendungen werden für die Relaxationsparameter häufig experimentell oder mittels empirisch aufgestellten Berechnungsformeln ermittelte Werte oder einfach intuitive

Erfahrungswerte eingesetzt, oder es wird sogar ganz auf die Relaxation der Interface-Verschiebung verzichtet (entspricht $\omega = 1$). Dies führt jedoch je nach Problem auf einen mehr oder weniger deutlichen Mehraufwand im Sinne einer steigenden Zahl an Iterationen, oder sogar auf Konvergenzprobleme, wenn die o.g. hinreichende Bedingung für Konvergenz (6.7) nicht erfüllt ist. Zudem kann die Anzahl der erforderlichen Iterationen bei manchen Systemen extrem sensibel bereits auf kleine Abweichungen vom optimalen Relaxationsparameter reagieren, weshalb die Wahl eines Parameters durch einfaches Ausprobieren („*trial-and-error-Methode*“) mit großer Sorgfalt durchgeführt werden muß und sehr zeitaufwendig ist. Des weiteren verändert sich im Nichtlinearen, wie oben beschrieben, das Spektrum des jeweils linearisierten Systems, so daß auch ein anfangs optimaler Parameter im Laufe des Berechnungszeitraums seine Optimalität verlieren kann, was dann in einem Anstieg der Iterationszahlen und somit einem erhöhten Berechnungsaufwand resultiert. Daher ist auch diese Methodik – obgleich vielfach eingesetzt – generell ein eher unbefriedigender Ansatz. Er erfordert vom Programmanwender eine sorgfältige, problemabhängige Parameterwahl, ist somit also nicht robust, und kann bei ausgeprägter System-Nichtlinearität im Laufe der Berechnung zu verstärkten Konvergenzschwierigkeiten führen. Mit dem weiter unten folgenden numerischen Modellbeispiel werden diese Problempunkte eindeutig demonstriert.

Bemerkung 6.2: Die obigen Konvergenzaussagen setzen voraus, daß die vorkonditionierte Operatormatrix $\tilde{\boldsymbol{A}}$ symmetrisch positiv definit ist. Die Symmetriebedingung ist im vorliegenden Fall, in dem gilt $\tilde{\boldsymbol{A}} := \boldsymbol{S}^{\Omega_2}{}^{-1} \left(\boldsymbol{S}^{\Omega_1} + \boldsymbol{S}^{\Omega_2}\right)$, so zunächst nicht erfüllt. Allerdings kann das Iterationsverfahren formal derart umformuliert werden, daß es schließlich mit der äquivalenten, symmetrischen Operatormatrix $\tilde{\boldsymbol{A}} := \boldsymbol{S}^{\Omega_2}{}^{-1/2} \left(\boldsymbol{S}^{\Omega_1} + \boldsymbol{S}^{\Omega_2}\right) (\boldsymbol{S}^{\Omega_2}{}^{-1/2})^T$ arbeitet, indem die Iterierten $\boldsymbol{d}_{\Gamma,i}$ durch $\hat{\boldsymbol{d}}_{\Gamma,i} := \boldsymbol{S}^{\Omega_2}{}^{-1/2} \boldsymbol{d}_{\Gamma,i}$ ersetzt werden (Details hierzu vgl. Kelley (1995) S. 23). Damit sind die Konvergenzaussagen wieder anwendbar.

Bemerkung 6.3: Im Fall der Fluid-Struktur-Interaktion ergibt sich die weitere Problematik, daß das Schurkomplement des diskretisierten Strömungsproblems $\boldsymbol{S}^{\Omega_F}$ aufgrund des konvektiven Terms in den Navier-Stokes-Gleichungen nicht symmetrisch ist, und damit ist auch $\tilde{\boldsymbol{A}}$ nicht symmetrisch – unabhängig von der Art der Vorkonditionierung. Daher ist die Anwendung der obigen Konvergenzaussagen wiederum in Frage gestellt. Die im Rahmen dieser Arbeit numerisch untersuchten FSI-Probleme beschränken sich jedoch auf laminare Strömungen mit relativ geringer Reynolds-Zahl und somit auch relativ geringer Konvektion, um zu vermeiden, daß aus einem übermäßig komplexen, turbulenten Strömungsphänomen zusätzliche Instabilitätseffekte entstehen könnten, die die Untersuchung der Stabilitätseigenschaften der partitionierten Lösungsverfahren weiter erschweren würden. Somit ist das Strömungsproblem hier maßgeblich von den symmetrischen, elliptischen Anteilen geprägt, und die Unsymmetrie in $\boldsymbol{S}^{\Omega_F}$ ist also nur sehr schwach.

Bei einer Anwendung der beschriebenen iterativ gestaffelten Verfahren auf Probleme mit stärkerer Konvektion sollten aber hinsichtlich der Konvergenz weitere, detailliertere Untersuchungen durchgeführt werden.

Literaturübersicht

Nachstehend werden, ergänzend zu den historischen Ausführungen in Abschnitt 3.3, einige Arbeiten aufgelistet, in denen das iterativ gestaffelte Grundverfahren mit einem solchen einfachen Ansatz verwendet wird. Dabei wird insbesondere die Art der Wahl der Relaxationsparameter und eventuelle Aussagen zum Konvergenzverhalten hervorgehoben. Le Tallec & Mouro (1998, 2001) wenden das Verfahren, wie eingangs bereits besprochen, auf FSI-Probleme in der hier behandelten Art und Komplexität an, wobei die innerhalb eines Zeitschrittes jeweils konstant gehaltenen Relaxationsparameter auf eine nicht näher spezifizierte Art und Weise aus dem Iterationsverhalten im vorausgegangenen Zeitschritt extrapoliert werden. Ein ähnliches Vorgehen wird von Itoh et al. (1993) zur Simulation der Fluid-Struktur-Wechselwirkung zwischen Tonband und Lesekopf verwendet (Elastohydrodynamik). Sie geben eine empirische und an dieses spezielle Problem angepaßte Formel zur Bestimmung der Relaxationsparameter an, welche auf der Auswertung der Ergebnisse zweier aufeinanderfolgender Iterationsschritte beruht.

Ebenfalls im Bereich der Elastohydromechanik wird von Taylor & O'Callaghan (1972) oder auch von Kohno et al. (1994) das iterativ gestaffelte Grundverfahren mit über die Berechnungsdauer unveränderlich gehaltenen Werten für ω verwendet, wobei beide über Konvergenzprobleme berichten, die eine „... *sehr sorgfältige* ...“ Wahl der Relaxationsparameter erfordern. Von Bungartz & Schulte (1995) bzw. Bungartz et al. (1998) werden hingegen bei der Simulation von komplexen Mikro-Elektromechanischen Systemen bzw. FSI-Problemen experimentell bestimmte Relaxationsparameter eingesetzt, und auch der bei der Simulation der Fluid-Struktur-Kopplung in kollabierenden Kanälen (Kanalströmung mit flexiblem, sich sehr stark deformierendem Wandstück) in Müller & Jacob (1994) verwendete Relaxationsparameter von $\omega = 0,25$ ist vermutlich experimentell bestimmt. Preis et al. (1994) untersuchen Kopplungsprobleme zwischen Elektromagnetik und Wärmeleitung mit dem iterativ gestaffelten Grundverfahren und einem Relaxationsparameter, der „... *bei solch extremen Nichtlinearitäten erfahrungsgemäß bei etwa 0,05 und 0,2* ...“ liegt, da die Iteration ohne Relaxation „... *üblicherweise* ...“ nicht konvergiert.

Ganz auf die Relaxation verzichtet wird hingegen in den Arbeiten von Lowe & Pedley (1994) und Luo & Pedley (1995), wieder über die Fluid-Struktur-Kopplung in kollabierenden Kanälen; nicht verwunderlicherweise berichten diese Autoren dabei von auftretenden Konvergenzproblemen. Auch Kalro & Tezduyar (2000) bzw. Benney, Stein & Tezduyar (2000) (Simulation umströmter Fallschirme auf Supercomputern) sowie Bhardwaj et al. (1997) und Strganac & Mook (1990) (Berechnung umströmter elastischer Tragflügel) verwenden dieses einfachste Verfahren, ohne aber auf das Iterationsverhalten einzugehen.

In einer Arbeit auf dem Gebiet der Mehrkörpersystem-Dynamik von Kübler & Schiehlen (1998) wird das auf der Richardson-Iteration basierende iterativ gestaffelte Verfahren schließlich wegen der bis dato unbeantworteten Frage nach effizienten Algorithmen zur automatischen Bestimmung geeigneter Relaxationsparameter ω als gänzlich wertlos eingestuft: „... *there is no general algorithm for selection of* ω*, what makes the method worthless for simulator coupling* ...“. Mit den in den folgenden Abschnitten 6.3 bis 6.5 beschriebenen Methoden werden

hingegen gerade solche robusten und allgemein einsetzbaren Algorithmen zur Bestimmung geeigneter Relaxationsparameter vorgeschlagen, womit dieses Argument entkräftet wird.

Modellbeispiel B3: 1-D Stabproblem, geometrisch nichtlinear

Die oben angesprochenen numerischen Eigenschaften des iterativ gestaffelten Grundverfahrens mit während der gesamten Berechnung unveränderlich gehaltenem Relaxationsparameter werden nun wiederum an einem einfachen numerischen Modellbeispiel dokumentiert. Es handelt sich um eine Modifikation des Modellbeispiels B1 aus Abschnitt 5.2, in der wieder ein linear elastischer Stab durch eine ab $t_0 = 0$ aufgebrachte Stufenlast belastet wird, die darin eine periodisch vor- und zurücklaufende Kompressionswelle erzeugt. Allerdings werden hier geometrische Nichtlinearitäten berücksichtigt, und die zur Diskretisierung des Stabes verwendeten bilinearen Scheibenelemente haben in der linken Partition Ω_1 die Länge $h = 1,0\ m$ und in der rechten Partition Ω_2 die Länge $h = 0,5\ m$ ($A = 0,3m^2$, in y-Richtung gelagert), wie in *Bild 6.2* abgebildet. Die Materialeigenschaften sind wieder so gewählt, daß die Wellengeschwindigkeit $c = \sqrt{E^S/\rho^S} = 1,0\ m/s$ beträgt ($E^S = 1,0\ N/m^2$, $\rho^S = 1,0\ kg/m^3$, $\nu^S = 0$). In beiden Partitionen wird die Zeitintegration mit der impliziten Trapezregel und einem Zeitschritt von $\Delta t = 0,375\ s$ durchgeführt. Zudem wird hier nur in Ω_1 eine konzentrierte, in Ω_2 hingegen eine konsistente Massenmatrix verwendet, um auch hochfrequente Schwingungsmoden anzuregen. Die resultierenden hochfrequenten Fehleranteile führen zu einer erschwerten Konvergenz der iterativ gestaffelten Verfahren, so daß dieses Modellproblem sich besonders gut als Testbeispiel für die Untersuchung konvergenzbeschleunigender Methoden eignet.

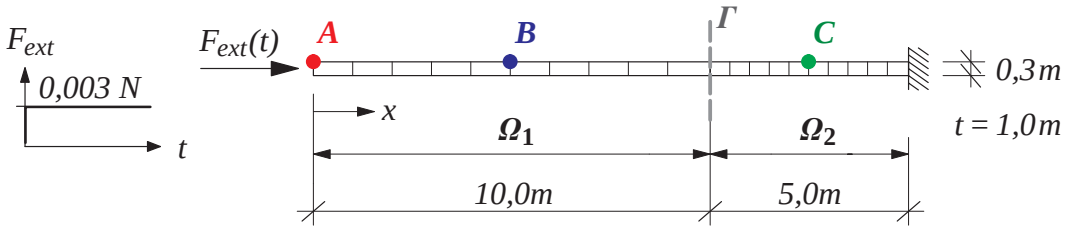


Bild 6.2: 1-D Stabproblem (B3): Systemskizze

Als erstes soll mit diesem Beispiel demonstriert werden, wie sensibel das Iterationsverhalten auf Veränderung des Relaxationsparameters reagieren kann. *Tabelle 6.1* listet die Anzahl i_{max} an Iterationsschritten auf, die innerhalb eines Zeitschrittes (hier der erste Zeitschritt, Nullvektor als Startlösung der Iteration) bei einer Toleranz von $\varepsilon = 10^{-6}$ zur Konvergenz benötigt wurden, in Abhängigkeit vom verwendeten Relaxationsparameter. Es wird deutlich, daß bereits kleine Abweichungen vom optimalen Wert $\omega_{opt} = 0,3070524...$ zu einem extrem starken Anstieg der Iterationszahlen führen. Das unrelaxierte Verfahren ($\omega = 1$) divergiert in diesem Beispiel.

ω	0,00	0,10	0,25	0,30	**0,3070524**	0,31	0,35	0,50	≥0,52
Iterationen	div.	37	10	5	**2**	4	9	31	div.

Tabelle 6.1 1-D Stabproblem (B3): Iterationszahlen i_{max} im ersten Zeitschritt für verschiedene Relaxationsparameter ω (Toleranzgrenze: $\varepsilon = 10^{-6}$)

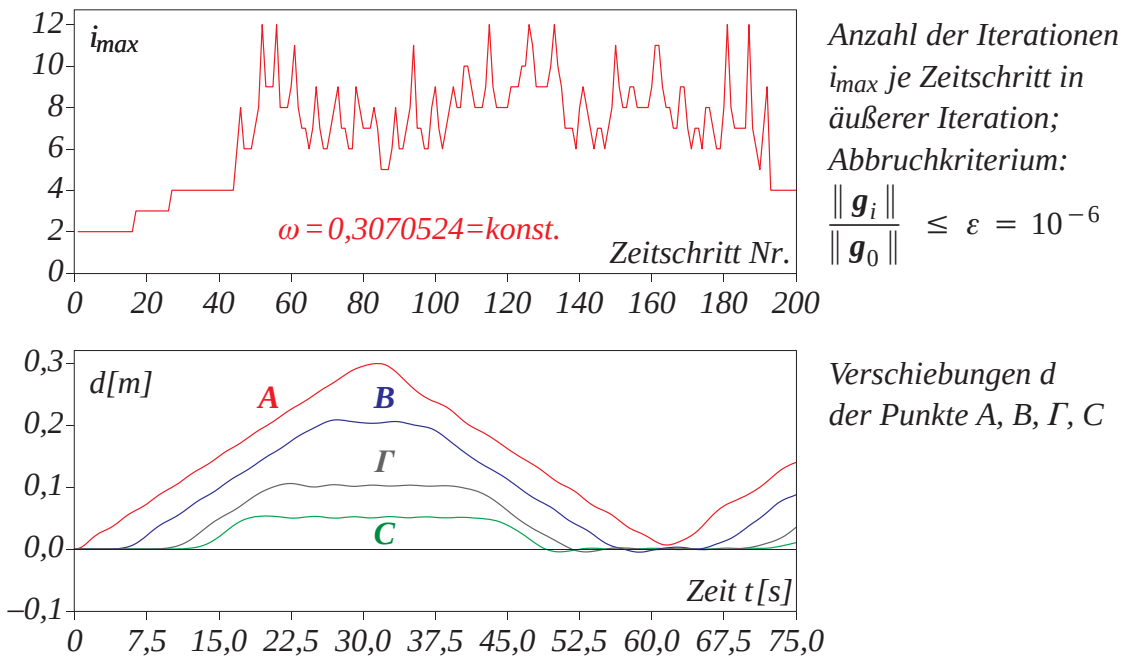


Bild 6.3: 1-D Stabproblem (B3): Konvergenzstudie und Verschiebungs–Zeitverläufe

Weiterhin verdeutlicht *Bild 6.3*, daß der anfangs optimale Relaxationsparameter $\omega_{opt} = 0,3070524...$ im Laufe des Berechnungszeitraums seine günstigen Eigenschaften aufgrund der Systemnichtlinearität verliert – obwohl diese hier sogar verhältnismäßig gering ist –, was in einem drastischen Anstieg der Anzahl an je Zeitschritt zur Konvergenz der Iteration über die Teilfelder erforderlichen Iterationsschritten im Laufe der Zeit resultiert (oberes Diagramm). Zur Information über das Systemverhalten im selben Zeitraum (erste Schwingungsperiode) sind im unteren Diagramm die Verschiebungs–Zeitverläufe von vier über die Stablänge verteilten Knotenpunkten aufgetragen. Es sollte hierzu angemerkt werden, daß ein so drastischer Anstieg der Iterationszahlen nicht bei allen im Rahmen dieser Arbeit mit einem festen Relaxationsparameter berechneten Beispielen beobachtet wurde.

Das Beispiel verdeutlicht also die großen, prinzipiellen Schwierigkeiten, die bei der Wahl geeigneter Relaxationsparameter auftreten. Es zeigt so die Notwendigkeit auf, Methoden zu finden, mit denen im Laufe der Berechnung zumindest in jedem Zeitschritt, besser sogar in jedem Iterationsschritt optimal an das aktuelle System angepaßte Relaxationsparameter bestimmt werden können. Dies sollte zudem automatisch, d.h. algorithmisch und ohne Eingriff des Programmanwenders möglich sein.

Abbruchkriterium für die Iteration über die Felder

Im folgenden sollen noch einige Anmerkungen zu Abbruchkriterien für die Iteration über die Felder gemacht werden, die u.a. auf entsprechenden Ausführungen von Kelley (1995) basieren. In obigem Modellbeispiel wurde als Abbruchkriterium eine Bedingung verwendet, die zur Beurteilung des Iterations*verlaufs* gut geeignet erscheint: Das Verhältnis der Euklidischen Norm des aktuellen Residuenvektors $\boldsymbol{g}_i$ und derjenigen des Residuenvektors der Startnäherung $\boldsymbol{g}_0$ muß kleiner als eine bestimmte Toleranzgrenze ε sein.

$$\frac{\| \boldsymbol{g}_i \|}{\| \boldsymbol{g}_0 \|} \leq \varepsilon \tag{6.10}$$

Dabei kann der Residuenvektor gemäß Gleichung (4.18) ($\boldsymbol{g}_i = \tilde{\boldsymbol{d}}_{\Gamma,\, i+1} - \boldsymbol{d}_{\Gamma,\, i}$) einfach als iterative Verbesserung der Interface-Verschiebungen bestimmt werden. Dieses Kriterium kann über die Konditionszahl $\kappa\left(\tilde{\boldsymbol{A}}\right)$ mit dem Fehler $\boldsymbol{e}_i := \boldsymbol{d}_{\Gamma,\, i} - \boldsymbol{d}^*_\Gamma$ (welcher nicht direkt berechenbar ist, da die exakte Lösung $\boldsymbol{d}^*_\Gamma$ i. allg. nicht bekannt ist) in Bezug gesetzt werden,

$$\| \boldsymbol{e}_i \| \leq \kappa\left(\tilde{\boldsymbol{A}}\right) \| \boldsymbol{e}_0 \| \frac{\| \boldsymbol{g}_i \|}{\| \boldsymbol{g}_0 \|} = c \, \| \boldsymbol{g}_i \| \quad \text{mit} \quad c = \text{konst.} \tag{6.11}$$

d.h. die Norm des Residuenvektors ist eine obere Schranke für die Fehlernorm, zu dieser direkt proportional und somit ein geeignetes, numerisch beobachtbares Maß für den iterativen Fehler.

Bemerkung 6.4: $\| \boldsymbol{g}_i \|$ ist gemäß Gleichung (A.27) auch eine geeignete Näherung für die Energienorm $\| \boldsymbol{e}_i \|_{\tilde{\boldsymbol{A}}}$ des Verschiebungsfehlers.

Das Abbruchkriterium (6.10) hängt allerdings von der Startnäherung $\boldsymbol{d}_{\Gamma,\, 0}$ ab und kann daher zu unnötig vielen Iterationen führen, wenn die Startnäherung gut ist, sowie zu einem schlechten Ergebnis, wenn die Startnäherung weit von der Lösung entfernt ist. Im Laufe dieser Arbeit wird daher vor allem bei den Anwendungsbeispielen ein anderes Kriterium verwendet. Dieses prüft einfach die mit der Anzahl der System-Freiheitsgrade n_{eq} (zur Elimination des Systemgrößen-Einflusses) gewichtete Euklidische Norm des aktuellen Residuenvektors ab:

$$\frac{\| \boldsymbol{g}_i \|}{\sqrt{n_{eq}}} \leq \varepsilon \tag{6.12}$$

6.3 Konvergenzbeschleunigung mit dem Gradientenverfahren

Basierend auf der oben dargestellten Analogie des iterativ gestaffelten Grundverfahrens mit dem nichtstationären Richardson-Iterationsverfahren auf den Interface-Variablen kann zur optimalen Konvergenzbeschleunigung das ebenfalls im Anhang A3.2 beschriebene Gradientenverfahren (auch als Methode des steilsten Abstiegs bekannt, im Englischen „*steepest descent method*“) eingesetzt werden, das einen Sonderfall der nichtstationären Richardson-Iteration darstellt. Es liefert eine Methodik zur Bestimmung von Relaxationsparametern ω_i in jedem Iterationsschritt. Eine im Rahmen der vorliegenden Forschungsarbeit entwickelte Formulierung für die hier verwendete, partitionierte Lösungsumgebung wurde in Wall et al. (1999, 2000b) vorgestellt, und wird im folgenden dokumentiert.

Die durch den aktuellen Residuenvektor $\boldsymbol{g}_i$ gegebene negative Gradientenrichtung ist die hinsichtlich der Iterierten $\boldsymbol{d}_{\Gamma,\, i}$ optimale Suchrichtung (lokale Optimalität). Das Gradientenverfahren ermittelt nun in jedem Iterationsschritt durch Minimierung der quadratischen Form (=Energie- bzw. Potentialfunktion) des zu lösenden Systems die zu dieser Suchrichtung wiederum optimale Schrittlänge bzw. den optimalen Relaxationsparameter ω_i gemäß Gleichung (A.47). Diese Berechnungsvorschrift wird hier noch einmal wiederholt und für den vorkonditionierten

Iterationsoperator des gekoppelten Systems $\tilde{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{S}^{\Omega_2{}^{-1}}\left(\boldsymbol{S}^{\Omega_1} + \boldsymbol{S}^{\Omega_2}\right) = \boldsymbol{S}^{\Omega_2{}^{-1}}\boldsymbol{S}^{\Omega_1} + \boldsymbol{I}$ ausgeschrieben:

$$\omega_i = \frac{\boldsymbol{g}_i^T\,\boldsymbol{g}_i}{\boldsymbol{g}_i^T\,\tilde{\boldsymbol{A}}\,\boldsymbol{g}_i} = \frac{\boldsymbol{g}_i^T\,\boldsymbol{g}_i}{\boldsymbol{g}_i^T\left(\boldsymbol{S}^{\Omega_2{}^{-1}}\boldsymbol{S}^{\Omega_1} + \boldsymbol{I}\right)\boldsymbol{g}_i} = \frac{\boldsymbol{g}_i^T\,\boldsymbol{g}_i}{\boldsymbol{g}_i^T\left(\boldsymbol{S}^{\Omega_2{}^{-1}}\boldsymbol{S}^{\Omega_1}\,\boldsymbol{g}_i + \boldsymbol{g}_i\right)} \tag{6.13}$$

Die algorithmische Bestimmung dieses Ausdrucks in einer partitionierten, modularen Softwareumgebung wird als nächstes beschrieben. Hierbei ist es wichtig, daß die explizite Aufstellung, Invertierung und Speicherung der Schurkomplemente $\boldsymbol{S}^{\Omega_j}$ vermieden wird, da dies mit einem sehr hohen numerischen Rechen- sowie Speicheraufwand verbunden wäre (vgl. Abschnitt 4.1). Im Prinzip wird dazu dieselbe Logik verwendet, die auch von den iterativen Substrukturverfahren bei der iterativen Lösung des Interface-Systems verfolgt wird.

Wie in Abschnitt 4.1.1 hergeleitet, entspricht zunächst der Residuenvektor $\boldsymbol{g}_i$ gerade der iterativen Verbesserung der Interface-Verschiebungen und kann somit einfach als Differenz zwischen alter und neuer (noch unrelaxierter) Interface-Verschiebung berechnet werden (Gleichung (4.18), hier wiederholt).

$$\boldsymbol{g}_i = \tilde{\boldsymbol{d}}_{\Gamma,\,i+1} - \boldsymbol{d}_{\Gamma,\,i} \tag{6.14}$$

Die schurkomplementfreie Ermittlung des Terms $\boldsymbol{S}^{\Omega_2{}^{-1}}\boldsymbol{S}^{\Omega_1}\,\boldsymbol{g}_i$ erfordert dann eine erneute Lösung der beiden Teilgebiete, wobei der Residuenvektor als *einzige* „systembelastende“ Randbedingung fungiert: In Abschnitt 4.1, Gleichungen (4.5) – (4.6) wurde dargestellt, daß die Anwendung des Schurkomplements eines Teilsystems auf einen Vektor gleich den „Lagerkräften“ ist, die sich bei Lösung des Teilsystems mit diesem Vektor als Dirichlet-Randbedingung ergeben; entsprechend wurde dort gezeigt (Gleichungen (4.7) – (4.8)), daß die Anwendung des *invertierten* Schurkomplements eines Teilsystems auf einen Vektor gleich den „Verschiebungen“ ist, die sich bei Lösung des Teilsystems mit diesem Vektor als Neumann-Randbedingung ergeben. Folglich wird zur schurkomplementfreien Berechnung von $\boldsymbol{S}^{\Omega_2{}^{-1}}\boldsymbol{S}^{\Omega_1}\,\boldsymbol{g}_i$ zunächst das Teilsystem Ω_1 in seiner jeweils *aktuellen Konfiguration ohne externe Lasten*, aber mit $\boldsymbol{g}_i$ als Dirichlet-Randbedingung nach den inneren Freiheitsgraden gelöst.

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{II}^{\Omega_1} & \boldsymbol{A}_{I\Gamma}^{\Omega_1} \\ \boldsymbol{A}_{\Gamma I}^{\Omega_1} & \boldsymbol{A}_{\Gamma\Gamma}^{\Omega_1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{\boldsymbol{d}}_I^{\Omega_1} \\ \boldsymbol{g}_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \hat{\boldsymbol{f}}_\Gamma \end{Bmatrix} \qquad \rightarrow \quad \hat{\boldsymbol{d}}_I^{\Omega_1} = -\,\boldsymbol{A}_{II}^{\Omega_1{}^{-1}}\boldsymbol{A}_{I\Gamma}^{\Omega_1}\,\boldsymbol{g}_i \tag{6.15}$$

Bemerkung 6.5: Bei dynamischen Problemstellungen ist darauf zu achten, daß auch die aus der Zeitdiskretisierung resultierenden Lastvektor-Anteile (also die *Geschichtsterme* $\boldsymbol{M}^S\boldsymbol{h}\left(\boldsymbol{d}^n, \dot{\boldsymbol{d}}^n, \ddot{\boldsymbol{d}}^n\right)$ und $\alpha_f \boldsymbol{f}_{int}(\boldsymbol{d}^n)$ in Gleichung (2.45), bzw. $(1-\theta)\boldsymbol{G}^F\boldsymbol{p}^n$ und $\left(\frac{1}{\Delta t}\boldsymbol{M}^F - (1-\theta)\left(\boldsymbol{N}^F(\boldsymbol{u}^n) + \boldsymbol{K}^F\right)\right)\boldsymbol{u}^n$ in Gleichung (2.93)) bei dieser Lösung nicht mitgeführt werden dürfen, da kein transienter Verlauf verfolgt wird, sondern lediglich die Auswirkung des Residuenvektors $\boldsymbol{g}_i$ auf das aktuelle System berechnet werden soll. Man geht sozusagen vom ungestörten, unbewegten Anfangszustand aus, wobei alle nichtlinearen Terme mit den aktuellen Systemverschiebungen bzw. -geschwindigkeiten bestimmt werden.

Anschließend werden die entsprechenden „Kopplungskräfte“ $\hat{\boldsymbol{f}}_\Gamma$ berechnet.

$$\hat{\boldsymbol{f}}_\Gamma = \boldsymbol{A}_{\Gamma I}^{\Omega_1}\, \hat{\boldsymbol{d}}_I^{\Omega_1} + \boldsymbol{A}_{\Gamma\Gamma}^{\Omega_1}\, \boldsymbol{g}_i \quad \left(\overset{(6.15)}{=} \left(\boldsymbol{A}_{\Gamma\Gamma}^{\Omega_1} - \boldsymbol{A}_{\Gamma I}^{\Omega_1}\, \boldsymbol{A}_{II}^{\Omega_1 -1} \boldsymbol{A}_{I\Gamma}^{\Omega_1} \right) \boldsymbol{g}_i = \boldsymbol{S}^{\Omega_1}\, \boldsymbol{g}_i \right) \tag{6.16}$$

Diese werden als Neumann-Randbedingung (d.h. als Last auf dem Kopplungsrand), an das Teilsystem Ω_2 in seiner jeweils aktuellen Konfiguration und ohne sonstige externe Lasten (und im dynamischen Fall wiederum ohne aus der Zeitdiskretisierung resultierende Lastvektor-Anteile, s.o.) übertragen,

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{\Gamma\Gamma}^{\Omega_2} & \boldsymbol{A}_{\Gamma I}^{\Omega_2} \\ \boldsymbol{A}_{I\Gamma}^{\Omega_2} & \boldsymbol{A}_{II}^{\Omega_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{\boldsymbol{d}}_\Gamma \\ \hat{\boldsymbol{d}}_I^{\Omega_2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\hat{\boldsymbol{f}}_\Gamma \\ \boldsymbol{0} \end{Bmatrix} \tag{6.17}$$

und dieses Teilsystem Ω_2 wird sodann nach $\hat{\boldsymbol{d}}_\Gamma$ und $\hat{\boldsymbol{d}}_I^{\Omega_2}$ gelöst. Die auf diese Art und Weise ermittelten „Verschiebungen“ der Interfaceknoten entsprechen dann dem gesuchten Term:

$$\hat{\boldsymbol{d}}_\Gamma = \left(\boldsymbol{A}_{\Gamma\Gamma}^{\Omega_2} - \boldsymbol{A}_{\Gamma I}^{\Omega_2}\, \boldsymbol{A}_{II}^{\Omega_2 -1} \boldsymbol{A}_{I\Gamma}^{\Omega_2} \right)^{-1} \left(-\hat{\boldsymbol{f}}_\Gamma \right) = -\boldsymbol{S}^{\Omega_2 -1}\, \hat{\boldsymbol{f}}_\Gamma = -\boldsymbol{S}^{\Omega_2 -1}\, \boldsymbol{S}^{\Omega_1}\, \boldsymbol{g}_i \tag{6.18}$$

Schließlich kann nun der Relaxationsparameter durch einfache Vektoraddition und Skalarprodukte von Vektoren berechnet werden: Einsetzen von Gl. (6.18) in (6.13) führt auf

$$\omega_i = \frac{\boldsymbol{g}_i^T\, \boldsymbol{g}_i}{\boldsymbol{g}_i^T \left(-\hat{\boldsymbol{d}}_\Gamma + \boldsymbol{g}_i \right)} \tag{6.19}$$

Die hier erläuterten algorithmischen Schritte zur Berechnung des Relaxationsparameters ω_i (Gleichungen (6.14) bis (6.19)) müssen in jedem Iterationsschritt einmal durchgeführt werden, bevor die eigentliche Relaxation der Interface-Verschiebungen vorgenommen werden kann. Der resultierende Gesamtablauf ist als *Algorithmus 6.2* in der verallgemeinerten Darstellung zusammengestellt (aufbauend auf dem iterativ gestaffelten Grundverfahren gemäß *Algorithmus 6.1*). Die Ermittlung der ω_i erfolgt darin in den Schritten 5a bis 5e.

Angewendet auf die iterativ gestaffelte Lösung rein strukturdynamischer Problemstellungen ergibt sich daraus dann der *Algorithmus 6.3*, und für die Gleichungen der Fluid-Struktur-Interaktion ist der methodische Ablauf als *Algorithmus 6.4* beschrieben.

0. Initialisierung wie in Algorithmus 6.1

Schleife über alle n_T Zeitschritte

1a. wie in Algorithmus 6.1

Iterationsschleife der Iteration über die Teilfelder (Start: $i = 0$)

1b.–4. wie in Algorithmus 6.1

5a. Berechne Residuum und übergebe es von Ω_2 an Ω_1

$$\boldsymbol{g}_i = \tilde{\boldsymbol{d}}^{n+1}_{\Gamma,\, i+1} - \boldsymbol{d}^{n+1}_{\Gamma,\, i} \tag{6.20}$$

5b. Löse Dirichlet-Partition Ω_1 mit Dirichlet-R.B. $\boldsymbol{g}_i$ (ohne externe Lasten)

$$\boldsymbol{A}^{\Omega_1}_{II}\, \hat{\boldsymbol{d}}^{\Omega_1}_{I} = -\boldsymbol{A}^{\Omega_1}_{I\Gamma}\, \boldsymbol{g}_i \tag{6.21}$$

5c. Berechne damit Kopplungskräfte $\hat{\boldsymbol{f}}_\Gamma$ in Ω_1 und übergebe sie an Ω_2

$$\hat{\boldsymbol{f}}_\Gamma = \boldsymbol{A}^{\Omega_1}_{\Gamma I}\, \hat{\boldsymbol{d}}^{\Omega_1}_{I} + \boldsymbol{A}^{\Omega_1}_{\Gamma\Gamma}\, \boldsymbol{g}_i \tag{6.22}$$

5d. Löse Neumann-Partition Ω_2 mit Neumann-R.B. $\hat{\boldsymbol{f}}_\Gamma$ (ohne externe Lasten)

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}^{\Omega_2}_{\Gamma\Gamma} & \boldsymbol{A}^{\Omega_2}_{\Gamma I} \\ \boldsymbol{A}^{\Omega_2}_{I\Gamma} & \boldsymbol{A}^{\Omega_2}_{II} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{\boldsymbol{d}}_\Gamma \\ \hat{\boldsymbol{d}}^{\Omega_2}_{I} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\hat{\boldsymbol{f}}_\Gamma \\ \boldsymbol{0} \end{Bmatrix} \tag{6.23}$$

5e. Berechne Relaxationsparameter

$$\omega_i = \left(\boldsymbol{g}_i^T \cdot \boldsymbol{g}_i\right) \Big/ \left(\boldsymbol{g}_i^T \cdot \left(-\hat{\boldsymbol{d}}_\Gamma + \boldsymbol{g}_i\right)\right) \tag{6.24}$$

6.–7. wie in Algorithmus 6.1

$i \leftarrow i + 1$ *bis zur Konvergenz (Iterationsschleife)*

$n \leftarrow n + 1$ *bis* $n + 1 = n_T$ *(Zeitschleife)*

Algorithmus 6.2: Iterativ gestaffeltes Verfahren mit Konvergenzbeschleunigung mittels Gradientenverfahren

0. Initialisierung: Setze $n = 0$. *Startlösungen* $\boldsymbol{d}^{\Omega_j,0}$, $\dot{\boldsymbol{d}}^{\Omega_j,0}$, $\ddot{\boldsymbol{d}}^{\Omega_j,0}$ *seien gegeben.*

Schleife über alle n_T *Zeitschritte*

1a. Berechne Prädiktor der Interfaceverschiebung in Ω_2

$$\boldsymbol{d}^{n+1}_{\Gamma,0} = \boldsymbol{d}^{n+1}_{\Gamma,P} = \boldsymbol{d}^{n}_{\Gamma} + \Delta t\left(\tfrac{3}{2}\,\dot{\boldsymbol{d}}^{n}_{\Gamma} - \tfrac{1}{2}\dot{\boldsymbol{d}}^{n-1}_{\Gamma}\right) \tag{6.25}$$

Iterationsschleife der Iteration über die Teilfelder (Start: $i = 0$*)*

1b. Übergebe $\boldsymbol{d}^{n+1}_{\Gamma,i}$ *von* Ω_2 *an* Ω_1

2. Integriere Partition Ω_1 *mit Dirichlet-R.B.* $\boldsymbol{d}^{n+1}_{\Gamma,i}$
(Prädiktor-Multikorrektor-Generalized-α*, s. Anh. A2.1, Algorithmus A.2)*

$$\frac{1-\alpha_m}{\beta\Delta t^2}\boldsymbol{M}^{\Omega_1}_{II}\,\boldsymbol{d}^{\Omega_1,n+1}_{I,i+1} + (1-\alpha_f)\,\boldsymbol{f}^{\Omega_1}_{I\,int}\left(\boldsymbol{d}^{\Omega_1,n+1}\right) = -\alpha_f\,\boldsymbol{f}^{\Omega_1}_{I\,int}\left(\boldsymbol{d}^{\Omega_1,n}\right) +$$

$$+\,\boldsymbol{M}^{\Omega_1}_{II}\,\boldsymbol{h}\left(\boldsymbol{d}^{\Omega_1,n}_{I},\dot{\boldsymbol{d}}^{\Omega_1,n}_{I},\ddot{\boldsymbol{d}}^{\Omega_1,n}_{I}\right) + (1-\alpha_f)\boldsymbol{f}^{\Omega_1,n+1}_{I\,ext} + \alpha_f\,\boldsymbol{f}^{\Omega_1,n}_{I\,ext} \tag{6.26}$$

mit $\boldsymbol{h}$ *nach* (2.46); $\boldsymbol{d}^{\Omega_1,n+1} = \begin{Bmatrix}\boldsymbol{d}^{\Omega_1,n+1}_{I,i+1}\\ \boldsymbol{d}^{n}_{\Gamma,i}\end{Bmatrix}$; $\boldsymbol{d}^{\Omega_1,n} = \begin{Bmatrix}\boldsymbol{d}^{\Omega_1,n}_{I}\\ \boldsymbol{d}^{n}_{\Gamma}\end{Bmatrix}$

3. Berechne Kopplungskräfte $\boldsymbol{f}^{n+1}_{\Gamma,i+1}$ *in* Ω_1 *und übergebe sie an* Ω_2

$$\boldsymbol{f}^{n+1}_{\Gamma,i+1} = \frac{1}{1-\alpha_f}\Big(-\alpha_f\,\boldsymbol{f}^{n}_{\Gamma} + (1-\alpha_f)\,\boldsymbol{f}_{\Gamma\,int}\left(\boldsymbol{d}^{\Omega_1,n+1}\right) + \alpha_f\,\boldsymbol{f}_{\Gamma\,int}\left(\boldsymbol{d}^{\Omega_1,n}\right) -$$

$$-\left[\boldsymbol{M}^{\Omega_1}_{\Gamma I}\;\boldsymbol{M}^{\Omega_1}_{\Gamma\Gamma}\right]\boldsymbol{h}\left(\boldsymbol{d}^{\Omega_1,n}-\boldsymbol{d}^{\Omega_1,n+1},\dot{\boldsymbol{d}}^{\Omega_1,n},\ddot{\boldsymbol{d}}^{\Omega_1,n}\right)\Big) \tag{6.27}$$

mit $\boldsymbol{h}$, $\boldsymbol{d}^{\Omega_1,n+1}$ *und* $\boldsymbol{d}^{\Omega_1,n}$ *wie in Schritt 2.*

4. Integriere Partition Ω_2 *mit Neumann-R.B.* $\boldsymbol{f}^{n+1}_{\Gamma,i+1}$
(Prädiktor-Multikorrektor-Generalized-α*, s. Anh. A2.1, Algorithmus A.1)*

$$\frac{1-\alpha_m}{\beta\Delta t^2}\boldsymbol{M}^{\Omega_2}\boldsymbol{d}^{\Omega_2,n+1} + (1-\alpha_f)\,\boldsymbol{f}^{\Omega_2}_{int}\left(\boldsymbol{d}^{\Omega_2,n+1}\right) = -\alpha_f\,\boldsymbol{f}^{\Omega_2}_{int}\left(\boldsymbol{d}^{\Omega_2,n}\right) +$$

$$+\boldsymbol{M}^{\Omega_2}\boldsymbol{h}\left(\boldsymbol{d}^{\Omega_2,n},\dot{\boldsymbol{d}}^{\Omega_2,n},\ddot{\boldsymbol{d}}^{\Omega_2,n}\right)+(1-\alpha_f)\begin{Bmatrix}\boldsymbol{f}^{n+1}_{\Gamma\,ext}-\boldsymbol{f}^{n+1}_{\Gamma,i+1}\\ \boldsymbol{f}^{\Omega_2,n+1}_{I\,ext}\end{Bmatrix}+\alpha_f\begin{Bmatrix}\boldsymbol{f}^{n}_{\Gamma\,ext}\\ \boldsymbol{f}^{\Omega_2,n}_{I\,ext}\end{Bmatrix} \tag{6.28}$$

mit $\boldsymbol{M}^{\Omega_2} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{M}^{\Omega_2}_{\Gamma\Gamma} & \boldsymbol{M}^{\Omega_2}_{\Gamma I}\\ \boldsymbol{M}^{\Omega_2}_{I\Gamma} & \boldsymbol{M}^{\Omega_2}_{II}\end{bmatrix}$; $\boldsymbol{d}^{\Omega_2,n+1} = \begin{Bmatrix}\tilde{\boldsymbol{d}}^{n+1}_{\Gamma,i+1}\\ \boldsymbol{d}^{\Omega_2,n+1}_{I,i+1}\end{Bmatrix}$; $\boldsymbol{f}^{\Omega_2}_{int} = \begin{Bmatrix}\boldsymbol{f}_{\Gamma\,int}\\ \boldsymbol{f}^{\Omega_2}_{I\,int}\end{Bmatrix}$

sowie $\boldsymbol{h}$ *und* $\boldsymbol{d}^{\Omega_2,n}$ *analog zu Schritt 2.*

...

...

5a. Berechne Residuum und übergebe es von Ω_2 an Ω_1

$$\boldsymbol{g}_i = \tilde{\boldsymbol{d}}^{n+1}_{\Gamma,\, i+1} - \boldsymbol{d}^{n+1}_{\Gamma,\, i} \tag{6.29}$$

5b. Löse Partition Ω_1 mit Dirichlet-R.B. $\boldsymbol{g}_i$ (ohne externe Lasten und Geschichtsterme)

$$\boldsymbol{K}^{\Omega_1}_{I\,I\,eff}\, \hat{\boldsymbol{d}}^{\Omega_1}_{I} = -\boldsymbol{K}^{\Omega_1}_{I\,\Gamma\,eff}\, \boldsymbol{g}_i \tag{6.30}$$

mit $\boldsymbol{K}^{\Omega_1}_{eff} = \dfrac{1-\alpha_m}{\beta \Delta t^2} \boldsymbol{M}^{\Omega_1} + (1-\alpha_f)\, \boldsymbol{K}^{\Omega_1}_{T}\left(\boldsymbol{d}^{\Omega_1,\, n+1}\right)$ *aus Schritt 2 (letzte N.-R.-Iteration)*

5c. Berechne damit Kopplungskräfte $\hat{\boldsymbol{f}}_\Gamma$ in Ω_1 und übergebe sie an Ω_2

$$\hat{\boldsymbol{f}}_\Gamma = \boldsymbol{K}^{\Omega_1}_{\Gamma\,I\,eff}\, \hat{\boldsymbol{d}}^{\Omega_1}_{I} + \boldsymbol{K}^{\Omega_1}_{\Gamma\,\Gamma\,eff}\, \boldsymbol{g}_i \tag{6.31}$$

5d. Löse Partition Ω_2 mit Neumann-R.B. $\hat{\boldsymbol{f}}_\Gamma$ (ohne externe Lasten und Geschichtsterme)

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{K}^{\Omega_2}_{I\,I\,eff} & \boldsymbol{K}^{\Omega_2}_{I\,\Gamma\,eff} \\ \boldsymbol{K}^{\Omega_2}_{\Gamma\,I\,eff} & \boldsymbol{K}^{\Omega_2}_{\Gamma\,\Gamma\,eff} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{\boldsymbol{d}}_\Gamma \\ \hat{\boldsymbol{d}}^{\Omega_2}_{I} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\hat{\boldsymbol{f}}_\Gamma \\ \boldsymbol{0} \end{Bmatrix} \tag{6.32}$$

mit $\boldsymbol{K}^{\Omega_2}_{eff} = \dfrac{1-\alpha_m}{\beta \Delta t^2} \boldsymbol{M}^{\Omega_2} + (1-\alpha_f)\, \boldsymbol{K}^{\Omega_2}_{T}\left(\boldsymbol{d}^{\Omega_2,\, n+1}\right)$ *aus Schritt 4 (letzte N.-R.-Iteration)*

5e. Berechne Relaxationsparameter

$$\omega_i = \left(\boldsymbol{g}_i^T \cdot \boldsymbol{g}_i\right) \Big/ \left(\boldsymbol{g}_i^T \cdot \left(-\hat{\boldsymbol{d}}_\Gamma + \boldsymbol{g}_i\right)\right) \tag{6.33}$$

6. Relaxation der Interface-Verschiebung

$$\boldsymbol{d}^{n+1}_{\Gamma,\, i+1} = \omega_i\, \tilde{\boldsymbol{d}}^{n+1}_{\Gamma,\, i+1} + (1-\omega_i)\, \boldsymbol{d}^{n+1}_{\Gamma,\, i} \tag{6.34}$$

7. Konvergenztest

$i \leftarrow i + 1$ *bis zur Konvergenz (Iterationsschleife)*

$n \leftarrow n + 1$ *bis* $n + 1 = n_T$ *(Zeitschleife)*

Algorithmus 6.3: Iterativ gestaffeltes Verfahren für die nichtlineare Strukturdynamik mit Konvergenzbeschleunigung mittels Gradientenverfahren

0. Initialisierung: Startlösungen für Fluid Ω_F, Fluid-Netz Ω_M und Struktur Ω_S; $n = 0$.

Schleife über alle n_T Zeitschritte

1a. Berechne Prädiktor der Interfaceverschiebung in Ω_S

$$\boldsymbol{d}_{\Gamma,0}^{n+1} = \boldsymbol{d}_{\Gamma,P}^{n+1} = \boldsymbol{d}_{\Gamma}^{n} + \Delta t \left(\tfrac{3}{2}\, \dot{\boldsymbol{d}}_{\Gamma}^{n} - \tfrac{1}{2} \dot{\boldsymbol{d}}_{\Gamma}^{n-1} \right) \tag{6.35}$$

Iterationsschleife der Iteration über die Teilfelder (Start: $i = 0$)

1b. Übergebe $\boldsymbol{d}_{\Gamma,i}^{n+1}$ von Ω_S an Ω_M

2a. Löse Fluid-Netz Ω_M mit Dirichlet-R.B. $\boldsymbol{r}_{\Gamma,i+1}^{n+1} = \boldsymbol{d}_{\Gamma,i}^{n+1}$

$$\boldsymbol{K}_{II}^{M}\, \boldsymbol{r}_{I,i+1}^{n+1} = -\boldsymbol{K}_{I\Gamma}^{M}\, \boldsymbol{r}_{\Gamma,i+1}^{n+1} \tag{6.36}$$

2b. Berechne neue Netzgeschwindigkeit unter Einhaltung der GCL

$$\boldsymbol{u}_{i+1}^{G,\, n\to n+1} = \frac{\boldsymbol{r}_{i+1}^{n+1} - \boldsymbol{r}^{n}}{\Delta t} \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{u}^{G} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{u}_{I}^{G} \\ \boldsymbol{u}_{\Gamma}^{G} \end{Bmatrix} \; ; \; \boldsymbol{r} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{r}_{I} \\ \boldsymbol{r}_{\Gamma} \end{Bmatrix} \tag{6.37}$$

2c. Übergebe Netzdeformation $\boldsymbol{r}^{n+1}$ und -geschw. $\boldsymbol{u}^{G,\, n\to n+1}$ von Ω_M an Ω_F

2d. Integriere Fluid Ω_F auf neuem Netz: $\boldsymbol{r}_{i+1}^{n+1}$, $\boldsymbol{u}_{i+1}^{G,\, n\to n+1}$

$$\begin{aligned} &\left(\frac{1}{\Delta t} \boldsymbol{M}^{F} + \theta \left(\boldsymbol{N}^{F}(\boldsymbol{c}_{i+1}^{n+1}) + \boldsymbol{K}^{F} \right) \right) \boldsymbol{u}_{i+1}^{n+1} + \theta\, \boldsymbol{G}^{F}\, \boldsymbol{p}_{i+1}^{n+1} = \theta\, \boldsymbol{f}_{ext}^{n+1} + \\ &\quad + (1-\theta)\, \boldsymbol{f}_{ext}^{n} + \left(\frac{1}{\Delta t} \boldsymbol{M}^{F} - (1-\theta) \left(\boldsymbol{N}^{F}(\boldsymbol{c}^{n}) + \boldsymbol{K}^{F} \right) \right) \boldsymbol{u}^{n} - (1-\theta)\, \boldsymbol{G}^{F}\, \boldsymbol{p}^{n} \\ &\qquad \text{mit} \quad \boldsymbol{c}_{i+1}^{n+1} = \boldsymbol{u}_{i+1}^{n+1} - \boldsymbol{u}^{G,\, n\to n+1} \; ; \; \boldsymbol{c}^{n} = \boldsymbol{u}^{n} - \boldsymbol{u}^{G,\, n\to n+1} \end{aligned} \tag{6.38}$$

3. Übergebe Interface-Druck $\boldsymbol{p}_{\Gamma,i+1}^{n+1}$ (u. visk. Spgen. $\boldsymbol{\tau}_{\Gamma,i+1}^{n+1}$) von Ω_F an Ω_S

4a. Berechne daraus konsist. Knotenlastvektor $\boldsymbol{f}_{\Gamma,i+1}^{n+1}\left(\boldsymbol{p}_{\Gamma,i+1}^{n+1},\ \boldsymbol{\tau}_{\Gamma,i+1}^{n+1} \right)$ in Ω_S

4b. Integriere Struktur Ω_S mit Neumann-R.B. $\boldsymbol{f}_{\Gamma,i+1}^{n+1}$
(Prädiktor-Multikorrektor-Generalized-α, s. Anh. A2.1, Algorithmus A.1)

$$\begin{aligned} &\frac{1-\alpha_m}{\beta \Delta t^2} \boldsymbol{M}^{S} \boldsymbol{d}^{n+1} + (1-\alpha_f)\, \boldsymbol{f}_{int}\left(\boldsymbol{d}^{n+1} \right) = -\alpha_f\, \boldsymbol{f}_{int}(\boldsymbol{d}^{n}) + \\ &\quad + \boldsymbol{M}^{S} \boldsymbol{h}\left(\boldsymbol{d}^{n}, \dot{\boldsymbol{d}}^{n}, \ddot{\boldsymbol{d}}^{n} \right) + (1-\alpha_f) \begin{Bmatrix} \boldsymbol{f}_{\Gamma\, ext}^{n+1} - \boldsymbol{f}_{\Gamma,i+1}^{n+1} \\ \boldsymbol{f}_{I\, ext}^{n+1} \end{Bmatrix} + \alpha_f \begin{Bmatrix} \boldsymbol{f}_{\Gamma\, ext}^{n} \\ \boldsymbol{f}_{I\, ext}^{n} \end{Bmatrix} \\ &\text{mit} \quad \boldsymbol{M}^{S} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{M}_{\Gamma\Gamma}^{S} & \boldsymbol{M}_{\Gamma I}^{S} \\ \boldsymbol{M}_{I\Gamma}^{S} & \boldsymbol{M}_{II}^{S} \end{bmatrix}; \; \boldsymbol{d}^{n+1} = \begin{Bmatrix} \tilde{\boldsymbol{d}}_{\Gamma,i+1}^{n+1} \\ \boldsymbol{d}_{I,i+1}^{n+1} \end{Bmatrix}; \; \boldsymbol{d}^{n} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{d}_{\Gamma}^{n} \\ \boldsymbol{d}_{I}^{n} \end{Bmatrix}; \; \boldsymbol{f}_{int} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{f}_{\Gamma\, int} \\ \boldsymbol{f}_{I\, int} \end{Bmatrix} \end{aligned} \tag{6.39}$$

sowie $\boldsymbol{h}$ nach (2.46) .

. . .

...

5a. Berechne Residuum und übergebe es von Ω_S an Ω_M

$$\boldsymbol{g}_i = \tilde{\boldsymbol{d}}^{n+1}_{\Gamma,\,i+1} - \boldsymbol{d}^{n+1}_{\Gamma,\,i} \tag{6.40}$$

5b. Löse Fluid-Netz Ω_M mit Dirichlet-R.B. $\hat{\boldsymbol{r}}_\Gamma = \boldsymbol{g}_i$

$$\boldsymbol{K}^M_{II}\,\hat{\boldsymbol{r}}_I = -\boldsymbol{K}^M_{I\Gamma}\,\hat{\boldsymbol{r}}_\Gamma \tag{6.41}$$

5c. Berechne Netzgeschwindigkeit unter Einhaltung der GCL

$$\hat{\boldsymbol{u}}^G = \frac{1}{\Delta t}\left(\hat{\boldsymbol{r}} - \boldsymbol{r}^0\right) \tag{6.42}$$

5d. Übergebe Netzdeformation $\hat{\boldsymbol{r}}$ und -geschw. $\hat{\boldsymbol{u}}^G$ von Ω_M an Ω_F

5e. Löse Fluid Ω_F mit $\hat{\boldsymbol{r}}$, $\hat{\boldsymbol{u}}^G$ (ohne externe Lasten u. Geschichtsterme)

$$\left(\frac{1}{\Delta t}\boldsymbol{M}^F + \theta\left(\boldsymbol{N}^F(\hat{\boldsymbol{c}}) + \boldsymbol{K}^F\right)\right)\hat{\boldsymbol{u}} + \theta\,\boldsymbol{G}^F\,\hat{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{0} \quad \textit{mit} \quad \hat{\boldsymbol{c}} = \boldsymbol{u}^{n+1}_{i+1} - \hat{\boldsymbol{u}}^G \tag{6.43}$$

5f. Übergebe Interface-Druck $\hat{\boldsymbol{p}}_\Gamma$ (u. visk. Spgen. $\hat{\boldsymbol{\tau}}_\Gamma$) von Ω_F an Ω_S

5g. Berechne daraus konsist. Knotenlastvektor $\hat{\boldsymbol{f}}_\Gamma\left(\hat{\boldsymbol{p}}_\Gamma,\ \hat{\boldsymbol{\tau}}_\Gamma\right)$ in Ω_S

5h. Löse Struktur Ω_S mit Neumann-R.B. $\hat{\boldsymbol{f}}_\Gamma$ (ohne externe Lasten und Geschichtsterme)

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{K}^S_{II\,eff} & \boldsymbol{K}^S_{I\Gamma\,eff} \\ \boldsymbol{K}^S_{\Gamma I\,eff} & \boldsymbol{K}^S_{\Gamma\Gamma\,eff} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{\boldsymbol{d}}_\Gamma \\ \hat{\boldsymbol{d}}_I \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\hat{\boldsymbol{f}}_\Gamma \\ \boldsymbol{0} \end{Bmatrix} \tag{6.44}$$

$$\textit{mit} \quad \boldsymbol{K}^S_{eff} = \frac{1-\alpha_m}{\beta\Delta t^2}\boldsymbol{M}^S + (1-\alpha_f)\,\boldsymbol{K}^S_T\left(\boldsymbol{d}^{n+1}_{i+1}\right) \quad \textit{aus Schritt 4b (letzte N.-R.-Iteration)}$$

5i. Berechne Relaxationsparameter

$$\omega_i = \left(\boldsymbol{g}_i^T \cdot \boldsymbol{g}_i\right) \Big/ \left(\boldsymbol{g}_i^T \cdot \left(-\hat{\boldsymbol{d}}_\Gamma + \boldsymbol{g}_i\right)\right) \tag{6.45}$$

6. Relaxation der Interface-Verschiebung

$$\boldsymbol{d}^{n+1}_{\Gamma,\,i+1} = \omega_i\,\tilde{\boldsymbol{d}}^{n+1}_{\Gamma,\,i+1} + (1-\omega_i)\,\boldsymbol{d}^{n+1}_{\Gamma,\,i} \tag{6.46}$$

7. Konvergenztest

$i \leftarrow i + 1$ *bis zur Konvergenz (Iterationsschleife)*

$n \leftarrow n + 1$ *bis* $n + 1 = n_T$ *(Zeitschleife)*

Algorithmus 6.4: Iterativ gestaffeltes Verfahren für die Fluid-Struktur-Interaktion mit Konvergenzbeschleunigung mittels Gradientenverfahren

Konvergenzeigenschaften der Iteration über die Teilfelder

Wie im Anhang A3.2 dargestellt, zeigt das Gradientenverfahren im linearen Fall eine mindestens so schnelle Konvergenz wie das stationäre Richardson-Verfahren mit optimalem Relaxationsparameter, ohne jedoch die Kenntnis der extremalen Eigenwerte des vorkonditionierten Operators $\lambda_{max\,/\,min}\left(\tilde{\boldsymbol{A}}\right)$ vorauszusetzen. Die asymptotische Konvergenzrate ρ_{opt}^{Rich} des optimal relaxierten, stationären Richardson-Verfahrens ist eine obere Schranke für diejenige des Gradientenverfahrens ρ^{Grad},

$$\rho^{Grad} \leq \frac{\kappa\left(\tilde{\boldsymbol{A}}\right) - 1}{\kappa\left(\tilde{\boldsymbol{A}}\right) + 1} = \frac{\lambda_{max}\left(\tilde{\boldsymbol{A}}\right) - \lambda_{min}\left(\tilde{\boldsymbol{A}}\right)}{\lambda_{max}\left(\tilde{\boldsymbol{A}}\right) + \lambda_{min}\left(\tilde{\boldsymbol{A}}\right)} = \rho_{opt}^{Rich} \tag{6.47}$$

da es nicht nur die extremalen Eigenwerte, sondern das gesamte Spektrum des gekoppelten Systems bei der Ermittlung der optimalen Relaxationsparameter mittels der oben bereits angesprochenen und im Anhang A3.2 genauer erläuterten Minimierungsstrategie berücksichtigt.

Bemerkung 6.6: Die in *Bemerkung 6.2* und *Bemerkung 6.3* gegebenen Hinweise zur Frage der Symmetrie des vorkonditionierten Operators $\tilde{\boldsymbol{A}}$ gelten genauso für die Anwendung des Gradientenverfahrens.

Im Vergleich zu den im Linearen meist standardmäßig verwendeten *orthogonalen* Krylov-Iterationsverfahren, insbesondere der Methode der konjugierten Gradienten, ist die Konvergenzgeschwindigkeit des reinen Gradientenverfahrens natürlich deutlich langsamer (lineare Konvergenz beim reinen im Gegensatz zu superlinearer Konvergenz beim konjugierten Gradientenverfahren, vgl. Gleichung (A.55)). Jedoch sind die orthogonalen Krylov-Verfahren für die im Rahmen dieser Arbeit betrachteten nichtlinearen Anwendungen nicht einsetzbar, da durch den im Verlauf der Iteration veränderlichen Operator die bei der Ermittlung der Schrittweiten/Relaxationsparameter maßgebliche Bedingung der Orthogonalität der aktuellen Suchrichtung auf allen vorherigen nicht erfüllt werden kann. Insofern ist mit dem Gradientenverfahren, das wenigstens bezüglich der aktuellen Suchrichtung optimale Relaxationsparameter ermittelt (*lokale* Optimalitätseigenschaft), die bestmögliche Konvergenzbeschleunigung gegeben.

Die Idee zur Anwendung des Gradientenverfahrens auf die partitionierte Lösung gekoppelter Probleme wurde ursprünglich von Le Tallec & Mouro (1998, 2001) in den oben bereits zitierten Arbeiten zur Fluid-Struktur-Interaktion angeregt. Dabei sprechen diese Autoren allerdings lediglich im Rahmen ihrer Konvergenzanalyse des iterativ gestaffelten Grundverfahrens die Möglichkeit an, optimale Relaxationsparameter mithilfe des Gradientenverfahrens zu ermitteln, ohne jedoch dessen algorithmische Anwendung und Implementierung tatsächlich zu zeigen oder diese Methode in ihren Beispielen zu verwenden. Ihre Argumentation für die Optimalität der Konvergenzbeschleunigung des iterativ gestaffelten Verfahrens durch das Gradientenverfahren basiert darauf, daß sie die Beschränktheit der Konditionszahl $\kappa\left(\tilde{\boldsymbol{A}}\right)$ des Iterationsoperators des gekoppelten Problems zeigen (Zitat): „*... the condition number of the preconditioned operator (...) is uniformly bounded, which guarantees the optimal efficiency of the steepest descent algorithm applied to the solution of our coupled problem.*“

Anmerkungen zum Berechnungsaufwand

1. Hinsichtlich des numerischen Aufwandes ist es wichtig zu sehen, daß in den zur Bestimmung von ω_i erforderlichen Lösungen der Teilgebiete keine teuren, nichtlinearen Gleichgewichtsiterationen anfallen, weil das Residuum $\boldsymbol{g}_i$, für welches der entsprechende optimale Relaxationsparameter bestimmt wird, sich auf die aktuelle Systemkonfiguration bezieht, d.h. alle nichtlinearen Terme sind mit den aktuellen Verschiebungen/Geschwindigkeiten auszuwerten. Somit ist lediglich eine einmalige Lösung jedes Teilsystems erforderlich. Wird des weiteren im [bzw. in den] Struktur-Teilfeld[ern] ein direktes Gleichungslösungsverfahren verwendet, läßt sich der zusätzliche numerische Aufwand noch weiter reduzieren, da dann die effektiven Koeffizientenmatrizen, die im letzten Newton-Raphson-Iterationsschritt im Schritt 4 [und 2] der gezeigten Algorithmen bereits ermittelt und faktorisiert wurden, wiederverwendet werden können. Dadurch entfällt erstens das nochmalige Aufstellen der Systemmatrizen, und vor allem fällt dann anstelle der vollständigen Gleichungslösung nur mehr ein Vor- und Rückwärtseinsetzen mit neuer rechter Seite an. In Bezug auf iterative Gleichungslöser wurden in jüngster Zeit einige Ansätze publiziert, die bei mehreren rechten Seiten zu ähnlichen Aufwandsreduktionen führen sollen (z.B. Farhat et al. (1994b) oder Simoncini & Gallopoulos (1995)). Bei Verfügbarkeit geeigneter Löser erscheint dies vor allem für die Fluid-Partition zweckmäßig, die – insbesondere in 3-D – zu extrem großen Gleichungssystemen führt. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wurden solche Ansätze aber noch nicht getestet.

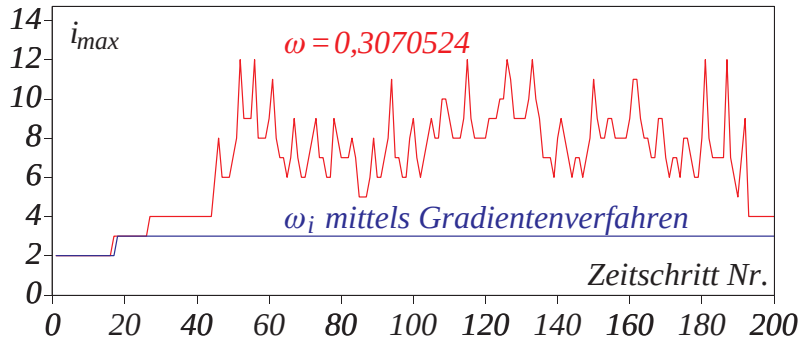
2. Außerdem konnte bei den berechneten Beispielen festgestellt werden, daß sich die Sequenzen von Relaxationsparametern, die innerhalb eines Zeitschritts nacheinander bestimmt werden, von Zeitschritt zu Zeitschritt nicht sehr stark verändern. Daher kann man einmal berechnete Sequenzen $\{\omega_i\}$ abspeichern und für mehrere nachfolgende Zeitschritte wiederverwenden, wodurch ebenfalls Rechenzeit eingespart werden kann.

3. Eine weitere Möglichkeit zur Reduktion des Berechnungsaufwandes ist es, die Abbruchkriterien der beiden ineinander geschachtelten Iterationsvorgänge, also der äußeren Iteration über die Teilfelder und der nichtlinearen (Newton-Raphson-)Gleichgewichtsiteration in den einzelnen Teilfeldern (=innere Iterationen), aufeinander abzustimmen, analog zu den hybriden Newton-Krylov-Verfahren, die in Abschnitt 4.3 im Zusammenhang mit der Anwendung von Gebietszerlegungsmethoden auf nichtlineare Probleme angesprochen wurden (Literaturhinweise s. dort). Das heißt also, daß sich die für die inneren Iterationen verwendete Toleranzschranke an der in der äußeren Iteration momentan erreichten Genauigkeit orientiert, oder auch, daß stets nur einige wenige oder sogar gar keine inneren Gleichgewichtsiterationen durchgeführt werden und die Nichtlinearitäten vollständig über die äußere Iteration berücksichtigt werden. Die numerischen Untersuchungen für diese Arbeit haben gezeigt, daß durch solche Maßnahmen die Anzahl der äußeren Iterationen nicht signifikant ansteigt, solange die Nichtlinearität des Systems nicht zu stark ist.

Modellbeispiel B3: 1-D Stabproblem, geometrisch nichtlinear

Mit diesem numerischen Beispiel wurde im vorigen Abschnitt 6.2 (*Bild 6.2*) gezeigt, daß die Wahl fester, d.h. über den gesamten Berechnungszeitraum hinweg unveränderlicher Relaxationsparameter ω aufgrund der z.T. sehr starken Sensibilität des Iterationsverhaltens auf Abweichungen vom optimalen Wert ω_{opt} sehr problematisch und zeitintensiv sein kann, und daß des weiteren auch ein anfangs optimaler Relaxationsparameter im Laufe des Berechnungszeitraums seine günstigen Eigenschaften aufgrund der Systemnichtlinearitäten verlieren kann. Mit dem Gradientenverfahren als Konvergenzbeschleuniger steht nun eine Methode zur Verfügung, die algorithmisch – also automatisch, ohne Eingriff des Programmanwenders – in jedem Zeit- und Iterationsschritt optimal an das aktuelle System angepaßte Relaxationsparameter bestimmt. Es ist also ein robustes und auch für nichtlineare Systeme geeignetes Verfahren.

In *Bild 6.4* (analog zu *Bild 6.3*) sind für dieses Modellbeispiel die Anzahl i_{max} der Iterationen je Zeitschritt in der Iteration über die Felder für das iterativ gestaffelte Grundverfahren mit dem anfangs optimalen, festen Relaxationsparameter $\omega_{opt} = 0,3070524...$ und für die mittels Gradientenverfahren beschleunigte Methode aufgetragen. Als Abbruchkriterium wurde wiederum Gleichung (6.10) mit einer Toleranz von $\varepsilon = 10^{-6}$ verwendet. Das mittels Gradientenverfahren beschleunigte Verfahren zeigt über den gesamten Berechnungszeitraum hinweg eine gleichbleibend schnelle Konvergenz, im Gegensatz zum Grundverfahren mit festem Relaxationsparameter.



Anzahl der Iterationen i_{max} je Zeitschritt in äußerer Iteration; Abbruchkriterium:

$$\frac{\| \boldsymbol{g}_i \|}{\| \boldsymbol{g}_0 \|} \leq 10^{-6}$$

Bild 6.4: 1-D Stabproblem (B3): Konvergenzstudie – Verfahrensvergleich

Weitere numerische Untersuchungen zur Konvergenzbeschleunigung mittels des Gradientenverfahrens sind in Abschnitt 6.6 sowie im folgenden Kapitel 7 zu finden.

6.4 Konvergenzbeschleunigung mit der Aitken-Methode

Eine zweite konvergenzbeschleunigende Methode für iterativ gestaffelte Lösungsverfahren, die sich als ebenfalls sehr effizient und robust erwiesen hat, und die dabei vom numerischen Aufwand her sogar extrem günstig ist, ist die *Aitken-Methode für vektorielle Gleichungen* (vgl. auch Anhang A3.3). Dieses Extrapolationsverfahren ist im Kontext mit der Methode der Finiten Elemente als Beschleunigungsmethode bei der Lösung nichtlinearer Gleichungen mit der langsam konvergierenden modifizierten Newton-Raphson-Iteration bekannt und mit den Quasi-

Newton-Verfahren (Sekantenverfahren) verwandt (Bathe & Cimento (1980), Bathe (1986)). Das meist als *Aitken's* Δ^2*-Methode* bezeichnete Grundverfahren wurde von Aitken (1937) für die iterative Eigenwertbestimmung vorgeschlagen, mit dem Zweck, eine beliebige, konvergente, skalare Folge $\{\bar{x}_i\}$ in eine schneller konvergierende Folge $\{x_i\}$ zu konvertieren. Dieses Grundverfahren wurde später von einer Reihe von Autoren verbessert und für die iterative Lösung nichtlinearer und vektorieller Gleichungen erweitert. In einer vergleichenden Übersichtsarbeit von MacLeod (1986) wird dabei die Variante nach Anderson (1965) bzw. Irons & Tuck (1969) als die effizienteste Methode identifiziert. Sie ist für vektorielle Gleichungen, d.h. zur iterativen Lösung von Gleichungs*systemen* geeignet, und konvergiert auch wenn das Basisiterationsverfahren selbst nicht konvergent ist. In der vorliegenden Arbeit wurde die direkt implementierbare Formulierung von Irons & Tuck umgesetzt. Im Rahmen des hier betrachteten iterativ gestaffelten Lösungsansatzes für gekoppelte Probleme (*Algorithmus 6.1*) läßt sich diese Variante folgendermaßen beschreiben.

Ausgehend von den jeweils vorangegangenen Iterierten $\boldsymbol{d}_{\Gamma,\,i-1}$ und $\boldsymbol{d}_{\Gamma,\,i}$, und den jeweils neuen, noch nicht relaxierten Interface-Lösungen $\tilde{\boldsymbol{d}}_{\Gamma,\,i}$ und $\tilde{\boldsymbol{d}}_{\Gamma,\,i+1}$ wird (für $i \geq 1$) ein *Aitken-Faktor* μ_i^{n+1} extrapoliert:

$$\mu_i^{n+1} = \mu_{i-1}^{n+1} + \left(\mu_{i-1}^{n+1} - 1\right) \frac{\left(\Delta\boldsymbol{d}_{\Gamma,\,i}^{n+1} - \Delta\boldsymbol{d}_{\Gamma,\,i+1}^{n+1}\right)^T \cdot \Delta\boldsymbol{d}_{\Gamma,\,i+1}^{n+1}}{\left(\Delta\boldsymbol{d}_{\Gamma,\,i}^{n+1} - \Delta\boldsymbol{d}_{\Gamma,\,i+1}^{n+1}\right)^2} \tag{6.48}$$

mit

$$\Delta\boldsymbol{d}_{\Gamma,\,i}^{n+1} := \boldsymbol{d}_{\Gamma,\,i-1}^{n+1} - \tilde{\boldsymbol{d}}_{\Gamma,\,i}^{n+1} \tag{6.49}$$

Der nullte Faktor μ_0^{n+1} in jedem Zeitschritt wird zweckmäßigerweise gleich dem letzten Faktor des vorherigen Zeitschrittes gewählt

$$\mu_0^{n+1} = \mu_{i_{max}}^{n} \tag{6.50}$$

bzw. im ersten Zeitschritt zu $\mu_0^1 = 0$ (eine solche Wahl wurde von Irons & Tuck für nichtlineare, inkrementelle Berechnungen empfohlen und hat sich auch in den hier durchgeführten, dynamischen Berechnungen als geeignet herausgestellt). Daraus wird schließlich der aktuelle Relaxationsparameter ω_i als

$$\omega_i = 1 - \mu_i^{n+1} \tag{6.51}$$

bestimmt und zur Relaxation der Interface-Verschiebung eingesetzt. Somit ergibt sich der als *Algorithmus 6.5* in der verallgemeinerten Darstellungsweise angegebene Gesamtablauf des *iterativ gestaffelten Lösungsverfahrens mit Konvergenzbeschleunigung mittels der Aitken-Methode.* Die Anwendung auf Strukturdynamik- oder Fluid-Struktur-Interaktionsprobleme verläuft dann völlig analog zu den im vorigen Abschnitt dargestellten Algorithmen, nur daß anstelle der dort angegebenen Schritte 5a bis 5*x* der in *Algorithmus 6.5* beschriebene Schritt 5 eingesetzt wird. Man sieht sofort, daß der im Vergleich zum iterativ gestaffelten Grundverfahren zusätzliche Berechnungsaufwand marginal ist, da je Iterationsschritt lediglich die Glei-

0. Initialisierung wie in Algorithmus 6.1

Schleife über alle n_T Zeitschritte

1a. wie in Algorithmus 6.1

Iterationsschleife der Iteration über die Teilfelder (Start: $i = 0$)

1b.–4. wie in Algorithmus 6.1

5. Berechne Aitken-Faktor (für $i \geq 1$ und mit $\mu_0^{n+1} = \mu_{i_{max}}^n$ bzw. $\mu_0^1 = 0$)

$$\mu_i^{n+1} = \mu_{i-1}^{n+1} + \left(\mu_{i-1}^{n+1} - 1\right) \frac{\left(\boldsymbol{\Delta d}_{\Gamma,i}^{n+1} - \boldsymbol{\Delta d}_{\Gamma,i+1}^{n+1}\right)^T \cdot \boldsymbol{\Delta d}_{\Gamma,i+1}^{n+1}}{\left(\boldsymbol{\Delta d}_{\Gamma,i}^{n+1} - \boldsymbol{\Delta d}_{\Gamma,i+1}^{n+1}\right)^2} \tag{6.52}$$

$$\text{mit} \quad \boldsymbol{\Delta d}_{\Gamma,i}^{n+1} := \boldsymbol{d}_{\Gamma,i-1}^{n+1} - \tilde{\boldsymbol{d}}_{\Gamma,i}^{n+1} \tag{6.53}$$

$$\text{und damit den Relaxationsparameter}: \quad \omega_i = 1 - \mu_i^{n+1} \tag{6.54}$$

6.–7. wie in Algorithmus 6.1

$i \leftarrow i + 1$ *bis zur Konvergenz*

$n \leftarrow n + 1$ *bis* $n + 1 = n_T$

Algorithmus 6.5: Iterativ gestaffeltes Verfahren mit Konvergenzbeschleunigung mittels Aitken-Methode für vektorielle Gleichungen nach Irons & Tuck (1969)

chung (6.52) ausgewertet werden muß, in der nur Differenzen und Skalarprodukte von Vektoren vorkommen. Auch der zusätzliche Speicheraufwand (ein Vektor, nämlich die Differenz $\boldsymbol{\Delta d}_{\Gamma,i}^{n+1}$, Gl. (6.53) bzw. (6.49)) ist vernachlässigbar klein.

Bemerkung 6.7: Eine weitere Familie von insbesondere im ingenieurwissenschaftlichen Bereich recht populären Extrapolationsmethoden zur effizienten Konvergenzbeschleunigung iterativer Lösungsverfahren sind die sogenannten *Line-Search-Techniken*, die beispielsweise vielfach zur Beschleunigung von Quasi-Newton bzw. modifizierten Newton-Verfahren (Crisfield (1983), Zienkiewicz & Taylor (2000b)) oder auch in der Optimierung eingesetzt werden (Bletzinger (1990), Reitinger (1994)). Zienkiewicz & Taylor vertreten sogar die Ansicht, daß die Line-Search-Techniken noch effizienter seien als die Aitken-Beschleunigung. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wurden diese Methoden jedoch u.a. aus folgenden Überlegungen nicht eingesetzt: Die Line-Search-Techniken basieren darauf, daß durch lineare Interpolation bzw. Extrapolation zwischen zwei verschiedenen Residuenvektoren ein bezüglich der aktuellen Suchrichtung möglichst guter Relaxationsparameter ermittelt wird. Dazu müssen die inneren Kräfte aus zwei unterschiedlich relaxierten Lösungsvektoren ermittelt werden. Da in der hier betrachteten, substrukturierten und

schurkomplementfreien Formulierung der in der Iteration über die Teilfelder verwendete Lösungsvektor aber, wie beschrieben, auf die Interface-Freiheitsgrade beschränkt ist, erfordert dies für jeden dieser zwei Lösungsvektoren eine sukzessive Lösung beider Teilgebiete mit diesen Vektoren als jeweilige Dirichlet-Randbedingung für das erste Teilfeld. Der Vorgang ist vergleichbar zum Vorgehen bei der Bestimmung des Relaxationsparameters mit dem Gradientenverfahren, muß hier jedoch zweimal durchgeführt werden, d.h. der numerische Aufwand ist im Vergleich zum Gradientenverfahren doppelt so groß, und im Vergleich zu der Aitken-Beschleunigung sogar um ein Vielfaches höher. Es ist außerdem zu vermuten, daß so ermittelte Relaxationsparameter auch nicht so gut sein können wie die mittels des Gradientenverfahrens bestimmten Werte, da dessen Relaxationsparameter jeweils bezüglich der aktuellen Suchrichtungsvektoren (=Residuenvektoren) optimal sind.

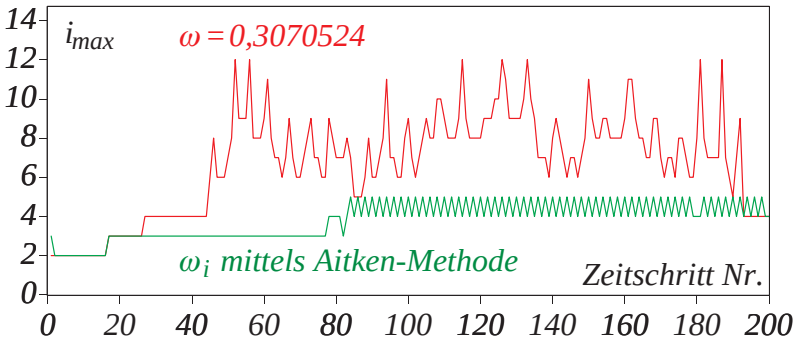
Konvergenzeigenschaften der Iteration über die Teilfelder

Der einzige Nachteil der Konvergenzbeschleunigung mittels der Aitken-Methode für vektorielle Gleichungen ist, daß für die hier verwendete modifizierte Form keine gesicherten Konvergenzaussagen oder -analysen existieren. Wie im Anhang A3.3 dargestellt, gibt es solche Aussagen nur für die ursprüngliche Aitken'sche Δ^2-Methode, d.h. nur für den skalaren Fall. Die im Rahmen dieser Arbeit angestellten numerischen Untersuchungen zeigen jedoch, daß die Konvergenz des iterativ gestaffelten Grundverfahrens durch die hier beschriebene Methodik zumindest stark beschleunigt wird (Erhöhung der Konvergenz*rate*), und eine Verbesserung der Konvergenz*ordnung* von linear auf superlinear wenigstens nicht völlig auszuschließen ist. Die Anzahl der pro Zeitschritt erforderlichen Iterationen ist in etwa gleich klein wie bei der Beschleunigung mittels des Gradientenverfahrens. Außerdem stellt eine Beschleunigung mittels der modifizierten Aitken-Methode – wie das Gradientenverfahren – die Konvergenz des resultierenden Verfahrens sicher, auch wenn das Basisiterationsverfahren selbst (hier das iterativ gestaffelten Grundverfahren mit $\omega = 1$, also die unrelaxierte, stationäre Richardson–Iteration) für das zu lösende System nicht konvergent ist.

Im übrigen ist es in diesem Zusammenhang noch bemerkenswert, daß die beschriebene Aitken-Methode nur dann eine Verbesserung der Konvergenzgeschwindigkeit bringt, wenn das Basisiterationsverfahren nicht optimal ist, wie die numerischen Untersuchungen in dieser Arbeit gezeigt haben. Die im Anhang A3.3 aufgezeigte Möglichkeit der Kombination mit dem optimal relaxierten, stationären Richardsonverfahren im linearen Fall, bzw. im allgemeinen mit dem Gradientenverfahren ist daher nicht sinnvoll (bei manchen Beispielen verschlechterten sich dadurch sogar die Konvergenzeigenschaften geringfügig). Dies erscheint insofern verständlich, als dann gemäß Gleichung (A.70) die Gesamtiteration mit dem Produkt aus dem optimalen (ω_{opt} bzw. $\omega_i^{Grad.verf.}$) und dem mittels der Aitken-Methode (Gl. (6.51)) ermittelten Relaxationsparameter beschleunigt wird, wodurch die Optimalität des Basisverfahrens wieder verloren gehen muß. Überdies wird durch eine Kombination mit dem Gradientenverfahren auch der große Vorteil der Aitken-Beschleunigung – die numerisch extrem billige Ermittlung der ω_i – wieder zunichte gemacht.

Modellbeispiel B3: 1-D Stabproblem, geometrisch nichtlinear

Für das in Abschnitt 6.2 (*Bild 6.2)* dargestellte Modellbeispiel B3 sind in *Bild 6.5* wieder die Anzahlen i_{max} der Iterationsschritte je Zeitschritt in der Iteration über die Felder aufgetragen, hier für das iterativ gestaffelte Grundverfahren mit dem anfangs optimalen, festen Relaxationsparameter $\omega_{opt} = 0,3070524...$ und für das mittels der Aitken-Methode beschleunigte Verfahren. Als Abbruchkriterium wurde wiederum Gleichung (6.10) mit einer Toleranz von $\varepsilon = 10^{-6}$ verwendet. Das Basis-Iterationsverfahren (unrelaxierte Richardson-Iteration, s. *Tabelle 6.1*) konvergiert bei diesem Beispiel nicht. Das mittels der Aitken-Methode beschleunigte Verfahren hingegen konvergiert zuverlässig, und zeigt über den gesamten Berechnungszeitraum hinweg eine Konvergenzgeschwindigkeit, die deutlich höher ist als diejenige des Grundverfahrens mit festem ω. Im Vergleich zum Gradientenverfahren als Konvergenzbeschleuniger (*Bild 6.4*) ergeben sich in diesem Beispiel zwar geringfügig höhere Iterationszahlen, dafür ist der Aufwand zur Berechnung der Relaxationsparameter, wie oben beschrieben, wesentlich geringer.



Anzahl der Iterationen i_{max} je Zeitschritt in äußerer Iteration; Abbruchkriterium: $\frac{\| \boldsymbol{g}_i \|}{\| \boldsymbol{g}_0 \|} \leq 10^{-6}$

Bild 6.5: 1-D Stabproblem (B3): Konvergenzstudie – Verfahrensvergleich

Auch hier wird für weitere numerische Untersuchungen auf Abschnitt 6.6 sowie Kapitel 7 verwiesen.

6.5 Konvergenzbeschleunigung mit der Tschebyscheff-Methode

Im Laufe der Untersuchungen zu konvergenzbeschleunigenden Methoden wurde auf Anregung von und in Zusammenarbeit mit Dr. Michael Jung[10] auch die Tschebyscheff-Methode als Konvergenzbeschleuniger für die äußere Iteration über die Felder des iterativ gestaffelten Lösungsverfahrens formuliert, in das FEM-Programmsystem CARAT implementiert und getestet. Die Methode und ihre numerischen Eigenschaften sind im Anhang A3.3 beschrieben. Sie verwendet ebenso wie die Aitken-Methode das Richardson-Verfahren als lineares Basisiterationsverfahren, und hat die vorteilhafte Eigenschaft, daß sie bei Anwendung auf lineare Systeme eine im Vergleich zum Gradientenverfahren deutlich höhere Konvergenzgeschwindigkeit aufweist (die Abschätzung des Iterationsfehlers gemäß Gl. (A.64) und (A.65) ist gleich der des konjugierten Gradientenverfahrens). Zudem existieren im Gegensatz zu der Aitken-Methode auch

10. Während der Kooperation: TU Chemnitz, Fakultät für Mathematik; z.Zt.: TU Dresden, Fakultät für Mathematik und Naturwissenschaften, Institut für Wissenschaftliches Rechnen.

für den vektoriellen Fall eindeutige Konvergenzaussagen in der mathematischen Fachliteratur (z.B. Samarskii & Nikolaev (1989)).

Allerdings hat sich herausgestellt, daß die Tschebyscheff-Methode leider einige Eigenschaften besitzt, die ihre Eignung für die hier verwendete iterative Substrukturformulierung mit nichtlinearen Teilgebieten für geometrisch nichtlineare, strukturdynamische bzw. nichtlineare, instationäre Fluid-Struktur-Interaktionssysteme dennoch stark einschränkt.

1. Die Ermittlung der Relaxationsparameter gemäß Gl. (A.61) erfordert die Kenntnis der extremalen Eigenwerte $\lambda_{max/min}\left(\tilde{\boldsymbol{A}}\right)$ der Iterationsmatrix des linearisierten, gekoppelten Systems. Dies war aber gerade der Grund, weshalb in Abschnitt 6.2 auch bereits die Verwendung der stationären Richardson-Iteration mit festen Parametern ω als problematisch eingestuft wurde, und der zur Heranziehung des Gradientenverfahrens und der Aitken-Methode geführt hat, die ohne diese Eigenwerte auskommen.

2. Auch wenn die extremalen Eigenwerte zu Beginn jedes Zeitschrittes mithilfe eines Näherungsverfahrens bestimmt werden können (s.u., *Bemerkung 6.8*), so ändern sich doch die spektralen Eigenschaften der jeweiligen linearisierten Iterationsmatrix im Laufe der Iteration über die Teilfelder aufgrund der Nichtlinearität des Systems. Dies führt dazu, daß die mit den obendrein noch genäherten $\lambda_{max/min}\left(\tilde{\boldsymbol{A}}\right)$ berechneten Relaxationsparameter ω_i ($i = 1, ..., m$) nicht ganz optimal an das veränderliche System angepaßt sind, so daß die Iteration v.a. bei starker Nichtlinearität in der Regel mehr als die vom Tschebyscheff-Verfahren gemäß Gl. (A.63) vorhergesagten m Iterationsschritte benötigt, um mit der geforderten Genauigkeit zu konvergieren. Es stehen jedoch prinzipiell nur diese m Relaxationsparameter zur Verfügung, eine Fortsetzung der Folge $\{\omega_i\}$ ist mit dieser Methode nicht möglich. Die einzig verbleibende Möglichkeit für die Iterationsschritte $i > m$ ist dann der Übergang auf beispielsweise das Gradientenverfahren oder die Aitken-Methode, wodurch allerdings die günstigen Konvergenzeigenschaften der Tschebyscheff-Methode natürlich wieder verloren gehen. Ein solcher Weg wird bei dem im nächsten Abschnitt untersuchten Modellbeispiel verfolgt, es ist jedoch ein inkonsistentes und somit eher unbefriedigendes Vorgehen, das zudem aufgrund der näherungsweisen Eigenwertbestimmung in jedem Zeitschritt auch noch numerisch mindestens so aufwendig ist wie das Gradientenverfahren, und deutlich aufwendiger als die Aitken-Methode.

3. Schließlich setzen sowohl die Fehlerabschätzungen als auch die Ermittlung der erforderlichen Iterationszahl m und der darauf aufbauenden Folge von m Relaxationsparametern $\{\omega_i\}$ die Verwendung des Abbruchkriteriums $\| \boldsymbol{e}_m \|_{\tilde{\boldsymbol{A}}} \leq \varepsilon \| \boldsymbol{e}_0 \|_{\tilde{\boldsymbol{A}}}$ mit $\boldsymbol{e}_i := \boldsymbol{d}_{\Gamma,i} - \boldsymbol{d}_{\Gamma}^{*}$ (vgl. Anhang A3.1) voraus. Da die exakte Lösung $\boldsymbol{d}_{\Gamma}^{*}$ jedoch i. allg. unbekannt ist, müssen beispielsweise residuenbasierte Kriterien, wie die in Abschnitt 6.2 genannten (Gl. (6.10) oder (6.12)), eingesetzt werden, die die obige Beziehung aber nur annähern, und mit denen daher die besagten Fehlerabschätzungen nicht mehr garantiert werden können.

In den numerischen Untersuchungen konnte entsprechend beobachtet werden, daß v.a. bei starker Nichtlinearität die Konvergenzgeschwindigkeit bei Beschleunigung des iterativ gestaffelten Verfahrens mittels der Tschebyscheff-Methode kaum schneller, in manchen Fällen sogar etwas

langsamer war als bei Beschleunigung mittels des Gradientenverfahrens oder der Aitken-Methode. Aus diesen Gründen wird die Tschebyscheff-Beschleunigung im Rahmen dieser Arbeit nun nicht mehr weiter verfolgt werden. Lediglich in dem FSI-Modellbeispiel in Abschnitt 6.6 werden die aus seiner Anwendung resultierenden Iterationszahlen einmal exemplarisch dokumentiert.

Bemerkung 6.8: Die hier verwendete näherungsweise Bestimmung der extremalen Eigenwerte $\lambda_{max/min}(\tilde{\boldsymbol{A}})$ der Iterationsmatrix im Rahmen der substrukturierten Formulierung basiert auf einer in Samarskii & Nikolaev (1989) (S. 153–156) beschriebenen Vorgehensweise, deren algorithmische Umsetzung an dieser Stelle nur skizziert werden soll. Sie verwendet die Eigenschaft des Gradientenverfahrens, daß dessen Konvergenzfaktoren C_i (vgl. Gl. (A.22)) gegen die asymptotische Konvergenzrate ρ^{Grad} (Gl. (6.47)) streben. Diese C_i und damit näherungsweise auch ρ^{Grad} lassen sich durch iterative Lösung des homogenen Interface-Systems für das aktuelle System $\tilde{\boldsymbol{A}}$ mit dem Gradientenverfahren bestimmen (homogenes Interface-System, d.h. $\boldsymbol{f}_{ext} = 0 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{d}_{\Gamma}^{*} = \boldsymbol{0} \;\Rightarrow\; C_i = \| \boldsymbol{d}_{\Gamma,\,i+1} \|_{\tilde{\boldsymbol{A}}} \,/\, \| \boldsymbol{d}_{\Gamma,\,i} \|_{\tilde{\boldsymbol{A}}}$ mit Berechnung der Energienorm $\| \boldsymbol{d}_{\Gamma,\,i} \|_{\tilde{\boldsymbol{A}}}$ analog zu den Ausführungen in Abschnitt 6.3, Gl. (6.13)–(6.19)). Anschließend können die genäherten Eigenwerte $\lambda_{max/min}(\tilde{\boldsymbol{A}})$ als Lösungen $\lambda_{1/2}$ des quadratischen Polynoms $\left(1-\omega_{i_{max}}\lambda\right)\left(1-\omega_{i_{max}-1}\lambda\right) = \left(\rho^{Grad}\right)^2$ berechnet werden, welches durch Entwicklung der Iterierten $\boldsymbol{d}_{\Gamma,\,i}$ nach den Eigenfunktionen herleitbar ist.

6.6 Numerischer Vergleich an FSI-Modellbeispiel

Modellbeispiel B2: Oszillierend überströmter Hohlraum mit flexiblem Boden

Das in Abschnitt 5.3 als Modellbeispiel B2 bereits vorgestellte Problem ist eine Modifikation des klassischen überströmten Hohlraums („driven cavity“), bei dem der Boden als flexible Struktur ausgebildet ist, und die Überströmung nicht konstant sondern harmonisch oszillierend erfolgt. Die Problemstellung ist in *Bild 6.6* nochmals angegeben, zusammen mit einem Verschiebungs–Zeitverlauf der resultierenden Schwingungsbewegung des flexiblen Bodens im Berechnungszeitraum $t \in [0{,}0\text{s}; 70{,}0\text{s}]$. Das Strömungsgebiet ist mit 32×32 Q1Q1-Elementen und der Strukturteil mit 16 neunknotigen Verschiebungselementen diskretisiert (geometrisch nichtlinear). Als Zeitintegrationsverfahren wurden hier für das Fluid das Euler-

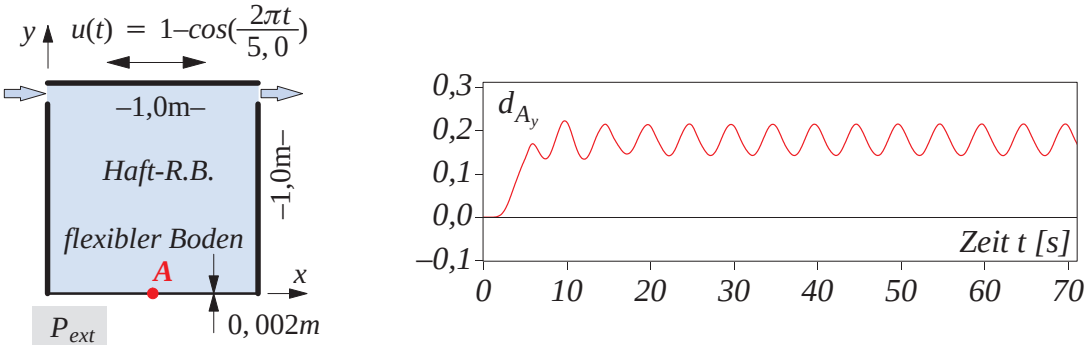
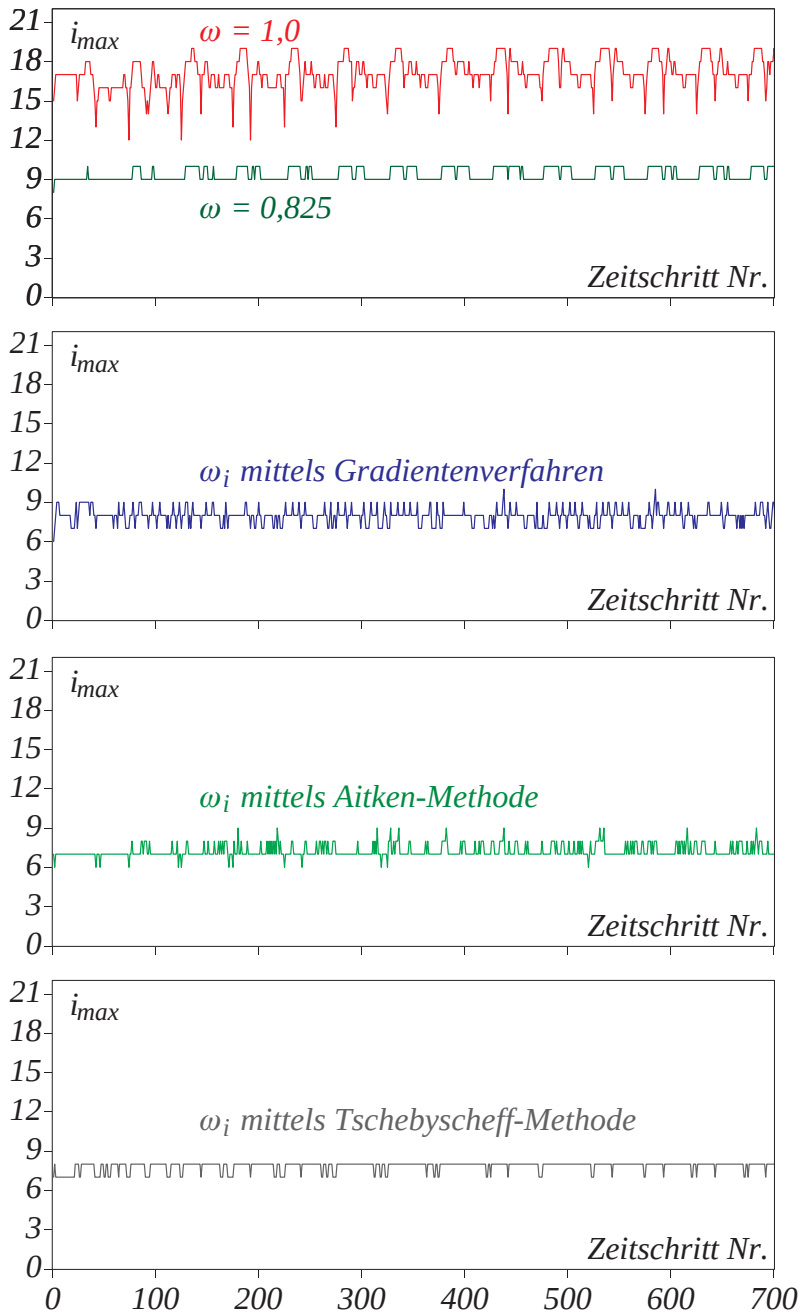


Bild 6.6: Oszillierend überströmter Hohlraum mit flexiblem Boden (B2): Problemstellung und Vertikalverschiebungs–Zeitverlauf am Punkt A

Rückwärts-Verfahren und für die Struktur die Trapezregel mit konsistenter Massenmatrix eingesetzt, bei einer Zeitschrittgröße von $\Delta t = 0,1s$ in beiden Teilfeldern.

Die in *Bild 6.7* dargestellten Iterationszahlen je Zeitschritt für denselben Berechnungszeitraum zeigen wiederum die deutliche, und in etwa gleich große Beschleunigung der Iteration über die Felder mittels des Gradientenverfahrens und der Aitken-Methode im Vergleich zum unrelaxierten Basisverfahren ($\omega = 1,0$), welches bei diesem speziellen, verhältnismäßig gutmütigen Beispiel konvergiert (relativ geringe „added mass“ aufgrund der im Verhältnis zur Strukturdichte ρ^S sehr kleinen Fluiddichte ρ^F, vgl. *Bemerkung 6.1* in Abschnitt 6.2). Ein durch mühsames, sorgfältiges Probieren gefundener, „bester“ Wert $\omega = 0,825$ eines festen Relaxationsparameters bewirkt ebenfalls zwar eine deutliche Konvergenzbeschleunigung, die



Anzahl der Iterationen i_{max} je Zeitschritt in äußerer Iteration; Abbruchkriterium: $\frac{\|\boldsymbol{g}_i\|}{\|\boldsymbol{g}_0\|} \leq 10^{-6}$

Bild 6.7: Oszillierend überströmter Hohlraum (B2): Konvergenzstudie – Verfahrensvergleich

Iterationsanzahlen liegen aber trotzdem im Schnitt um 1–2 Iterationsschritte über den anderen beiden Beschleunigungsmethoden, welche zudem ohne jegliches Zutun durch den Programmanwender arbeiten. Die im untersten Diagramm aufgetragenen Ergebnisse bei Ermittlung der Relaxationsparameter mittels der Tschebyscheff-Methode zeigen, daß die so erreichte Konvergenzbeschleunigung für dieses nichtlineare Problem nicht schlechter, aber auch nicht besser, als mit dem Gradientenverfahren oder der Aitken-Methode ist. Dabei muß festgehalten werden, daß in diesem Beispiel stets die letzten 2–3 Relaxationsparameter über das Gradientenverfahren bestimmt wurden, da das Tschebyscheff-Verfahren, wie in Abschnitt 6.5 erläutert, auf Basis der näherungsweise und nur einmal zu Beginn jedes Zeitschrittes berechneten extremalen Eigenwerte des linearisierten, gekoppelten Systems eine zu geringe Anzahl an erforderlichen Iterationsschritten vorhersagt, und folglich zu wenig Relaxationsparameter ermittelt.

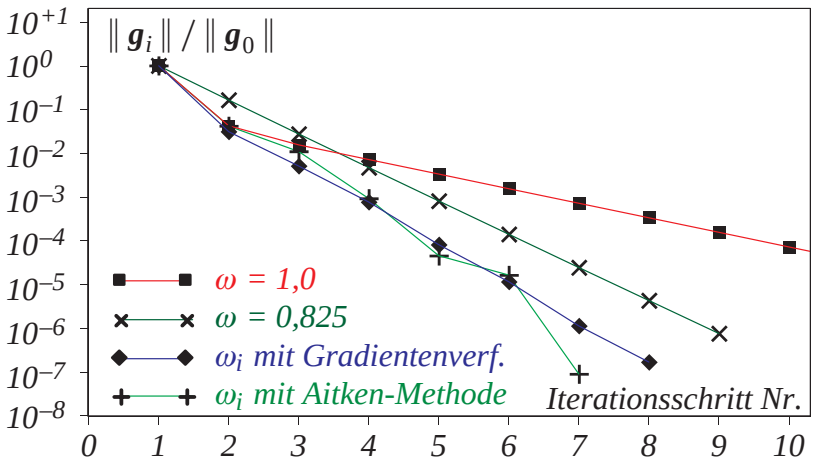
Ferner verdeutlicht *Tabelle 6.2*, daß auch für dieses FSI-Beispiel die Anzahl der erforderlichen Iterationsschritte bei Variierung des (festen) Relaxationsparameters eine mit dem strukturdynamischen Modellbeispiel B3 vergleichbare Charakteristik aufweisen: Es existiert ein optimaler Wert ω_{opt}, der zu einer maximalen Konvergenzgeschwindigkeit führt. Beim Abweichen von diesem optimalen Wert nach oben oder nach unten steigen die Iterationszahlen an (wenn auch in diesem Beispiel nicht so drastisch wie bei dem Stabproblem), und ab einem bestimmten Wert stellt sich Divergenz der Iteration über die Felder ein.

ω	0,00	0,25	0,50	0,70	**0,825**	0,90	1,00	1,20	≥1,42
Iterationen	div.	45	19	11	**8**	11	15	34	div.

Tabelle 6.2 Oszillierend überströmter Hohlraum (B2): Iterationszahlen i_{max} im ersten Zeitschritt für verschiedene Relaxationsparameter ω (Toleranzgrenze: $\varepsilon = 10^{-6}$)

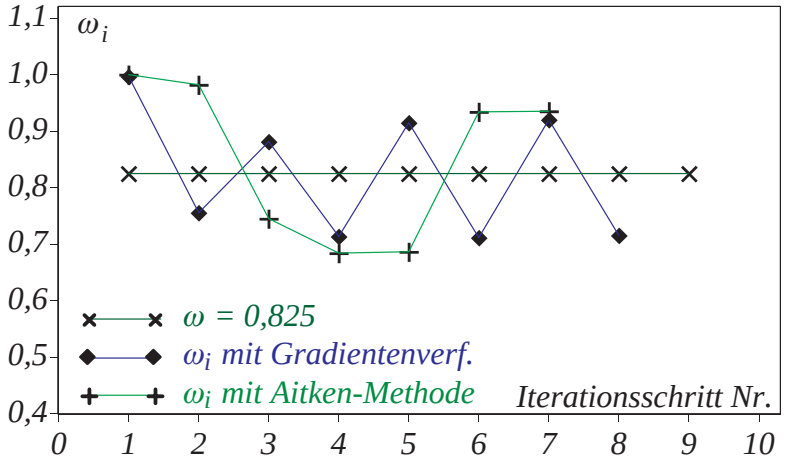
Des weiteren zeigt eine Untersuchung der Entwicklung des für das Abbruchkriterium abgeprüften Fehlermaßes $\| \boldsymbol{g}_i \| / \| \boldsymbol{g}_0 \|$ im Laufe der Iteration über die Teilfelder innerhalb eines Zeitschrittes, wie zumindest für das Grundverfahren und das mittels Gradientenverfahren beschleunigte Verfahren erwartet, eine lineare Konvergenzordnung für alle untersuchten Methoden, bei entsprechend unterschiedlich großen Konvergenzraten. Dies läßt sich aus *Bild 6.8* ablesen, in dem jeweils das Fehlermaß im semi-logarithmischen Maßstab über der Iterationsschrittnummer aufgetragen ist, exemplarisch hier für den Zeitschritt Nr. 100. Wie im Anhang A3.1 (Gl. (A.25) und (A.26)) erläutert, entspricht dann eine Gerade als Fehlerkurve einer linearen Konvergenzordnung, und die Steigung m ist ein näherungsweises Maß für die Konvergenzrate ($\rho \approx 10^m$). Bei genauerem Hinsehen kann man außerdem erkennen, daß die Fehlerreduktion durch die Aitken-Methode (d.h. ihre Konvergenzfaktoren C_i) einen verhältnismäßig unregelmäßigen Verlauf hat, und möglicherweise gegen Schluß überlinear zunimmt. Dieses Verhalten ist typisch für die Aitken-Beschleunigung (vgl. Musterbeispiel im Anhang A3.4 und Kapitel 7).

Ein weiterer, interessanter Aspekt ist die Beobachtung der Entwicklung des Relaxationsparameters im Laufe der Iteration innerhalb eines Zeitschrittes, siehe *Bild 6.9* (wiederum exemplarisch für den Zeitschritt Nr. 100). Die mittels des Gradientenverfahrens und der Aitken-Methode berechneten ω_i bewegen sich im Laufe der Iteration so in einem bestimmten Bereich



Iterationsfehler in äußerer Iteration (in Zeitschritt Nr. 100)

Bild 6.8: Oszillierend überströmter Hohlraum (B2): Entwicklung des Fehlers der Iteration über die Teilfelder innerhalb eines Zeitschritts

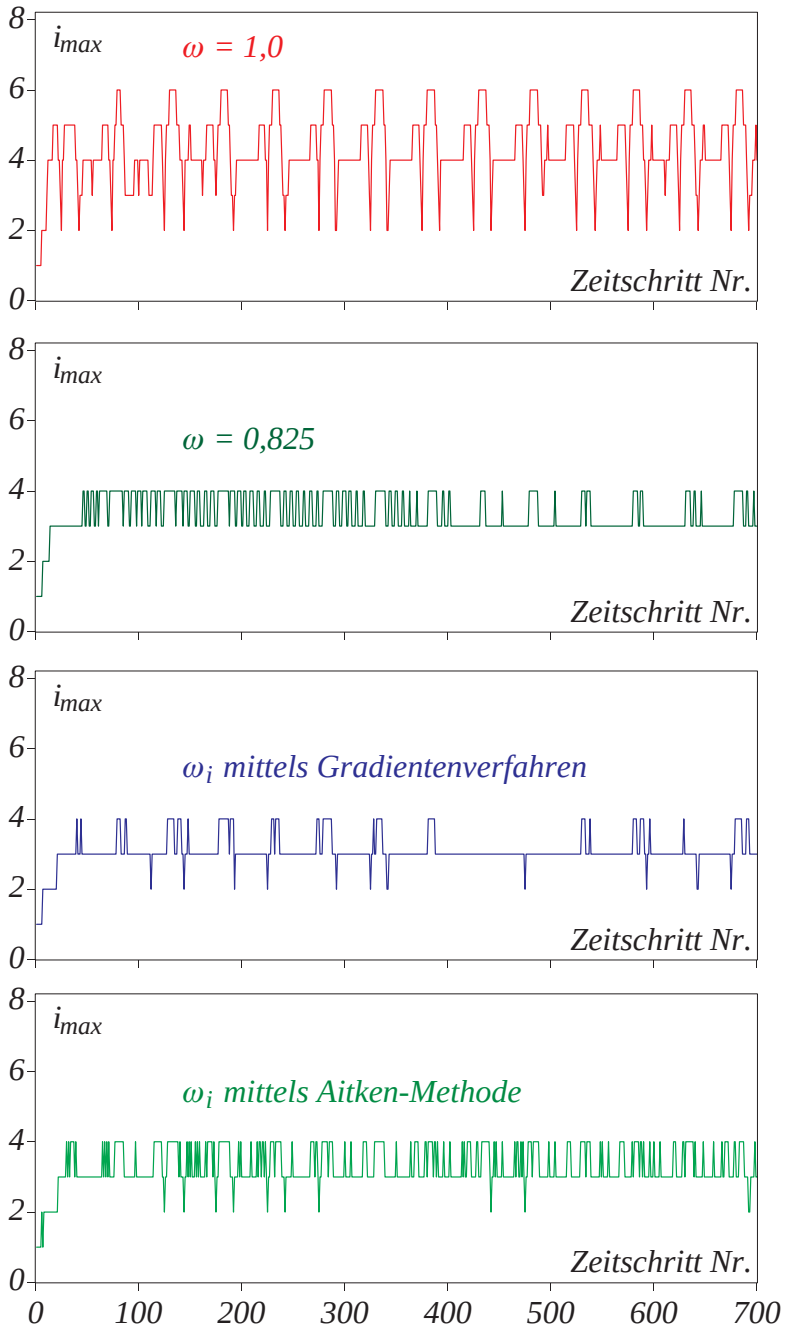


Relaxationsparameter (in Zeitschritt Nr. 100)

Bild 6.9: Oszillierend überströmter Hohlraum (B2): Entwicklung des Relaxationsparameters innerhalb eines Zeitschritts

um den „besten“ festen Wert $\omega = 0,825$, daß ihr jeweiliger Mittelwert in etwa gleich diesem Wert ist. Dieses Verhalten hat sich im Rahmen dieser Arbeit ebenfalls als typisch erwiesen.

Wie in Abschnitt 6.2 erläutert, ist das hier verwendete Abbruchkriterium (6.10) zwar zur Untersuchung des Iterationsverhaltens geeignet, führt aber aufgrund der Abhängigkeit von der Startnäherung u.U. zu unnötig vielen Iterationen. Bei Abprüfung der gewichteten Norm des Residuums gemäß Gleichung (6.12) lassen sich in diesem Beispiel mit den beschleunigten Verfahren bereits nach 2–4 Iterationen auskonvergierte Ergebnisse erzielen (*Bild 6.10*). Wie bereits angemerkt, ist dieses Beispiel verhältnismäßig gutmütig, so daß die Beschleunigung im Vergleich zum unrelaxierten Basisverfahren ($\omega = 1,0$) nicht besonders groß ist. Dessen Konvergenzgeschwindigkeit ist jedoch über den Berechnungszeitraum hinweg wesentlich ungleichmäßiger (Schwankungen zwischen 2 und 6 Iterationen) als bei den beschleunigten Verfahren.



Anzahl der Iterationen i_{max} je Zeitschritt in äußerer Iteration; Abbruchkriterium:

$$\frac{\| \boldsymbol{g}_i \|}{\sqrt{n_{eq}}} \leq 10^{-6}$$

Bild 6.10: Oszillierend überströmter Hohlraum (B2): Konvergenzstudie mit Abbruchkriterium nach Gl. (6.12)