

**Anwendung der Methode der
Parabolischen Gleichung in
Strahlenkoordinaten zur Analyse
dielektrischer Linsenantennen**

Von der Fakultät Informatik, Elektrotechnik und Informationstechnik
der Universität Stuttgart
zur Erlangung der Würde eines Doktors der
Ingenieurwissenschaften (Dr.-Ing.) genehmigte Abhandlung

Vorgelegt von

Marcus Maier

geboren in Heilbronn/Neckar

Hauptberichter: Prof. Dr.-Ing. habil. F. Landstorfer

Mitberichter: Prof. Dr.-Ing. T. Eibert

Prof. Dr. techn. W. M. Rucker

Tag der Einreichung: 13. April 2006

Tag der mündlichen Prüfung: 26. Juli 2006

Danksagung

Die vorliegende Arbeit entstand im Rahmen meiner Tätigkeit als Wissenschaftlicher Mitarbeiter und Wissenschaftlicher Assistent am Institut für Hochfrequenztechnik der Universität Stuttgart.

Herrn Prof. Dr.-Ing. habil. F. Landstorfer

möchte ich sehr herzlich für die Aufnahme an sein Institut, für die Überlassung des Dissertationsthemas und für die weitsichtige Betreuung der Arbeit danken. In den vielen Fachgesprächen — auch über das eigentliche Dissertationsthema hinaus — verhalf er mir zu einem vertieften Verständnis insbesondere in den Bereichen Wellenablösung, Wellenausbreitung und Antennentechnik. Eine weitere Förderung ließ er mir durch die Übertragung von Aufgaben im Bereich der Lehre zuteil werden. Seinem Nachfolger im Amt des Institutsleiters,

Herrn Prof. Dr.-Ing. T. Eibert,

sowie

Herrn Prof. Dr. techn. W. M. Rucker,

dem Leiter des Instituts für Theorie der Elektrotechnik der Universität Stuttgart, danke ich für ihr Interesse an meiner Arbeit, für das Verfassen der jeweiligen Mitberichte und für die überaus konstruktiven Anmerkungen.

Meinem Institutskollegen

Herrn PD Dr.-Ing. N. Zhu,

einem Experten auf dem Gebiet der Methode der Parabolischen Gleichung, danke ich für zahlreiche anregende fachliche Diskussionen und Vorschläge.

Allen Mitarbeitern des Instituts für Hochfrequenztechnik gebührt Dank für das ausgezeichnete Arbeitsklima und die konstruktive Zusammenarbeit.

Die vorliegende Arbeit wurde aus Mitteln der Deutschen Forschungsgemeinschaft gefördert, wofür ich Dank sagen möchte.

Nicht zuletzt gilt mein besonderer Dank meinen Eltern, die es mir durch ihre immerwährende Förderung ermöglicht haben, dieses Ziel zu erreichen, sowie allen Familienangehörigen, Freunden und Bekannten, die mich über die Dauer der Arbeit fortwährend unterstützt und motiviert und so zum Gelingen der Arbeit entscheidend beigetragen haben.

Inhaltsverzeichnis

Legende	xix
Zusammenfassung	xv
Summary	xix
1 Einleitung	1
2 Grundlagen	5
2.1 Die maxwellschen Gleichungen	5
2.2 Wellengleichungen für die Feldstärken \vec{E} und \vec{H}	6
2.3 Das Vektorpotential	8
2.3.1 Wellengleichung für das magnetische und elektrische Vektorpotential	8
2.3.2 Berechnung der Felder \vec{E} und \vec{H} aus den Vektorpotentialen	10
2.3.3 Berechnung der Vektorpotentiale aus den Feldern \vec{E} und \vec{H} bei einem in ϕ rotationssymmetrischen Feld	11
3 Strahlenkoordinaten	17
3.1 Zusammenhang mit kartesischen Koordinaten	18
3.2 Krümmungsradius	19
3.3 Vektoroperatoren in Strahlenkoordinaten	21
3.3.1 Gradient eines in ϕ rotationssymmetrischen Skalars	23
3.3.2 Divergenz eines in ϕ rotationssymmetrischen Vektorfeldes	24
3.3.3 Rotation eines in ϕ rotationssymmetrischen Vektorfeldes	24
3.4 Wellengleichung in Strahlenkoordinaten	25
3.5 Zusammenhang zwischen ψ , ψ_m und den Feldstärken \vec{E} , \vec{H}	26
4 Die Methode der Parabolischen Gleichung (PE)	29
4.1 Elliptische Wellengleichung als Ausgangspunkt	29
4.2 Herleitung der Standard-PE (SPE)	30
4.2.1 Abspaltung des Phasenterms $e^{-j\beta x}$	30
4.2.2 PE durch Vernachlässigung von $\partial^2\Psi/\partial x^2$	31
4.2.3 Alternative: Faktorisierung und Approximation des Wurzeloperators	31

4.2.4	Gültigkeit der Näherung	32
4.3	Weitwinkel-PE (WWPE)	34
4.4	Parabolische Gleichung in Strahlenkoordinaten	35
4.4.1	Standard-PE in Strahlenkoordinaten	35
4.4.2	Weitwinkel-PE in Strahlenkoordinaten	37
4.5	Lösung der PE mit Finiten Differenzen (FD)	38
4.5.1	FD-Algorithmus für kartesische Koordinaten	38
4.5.2	FD-Algorithmus für Strahlenkoordinaten	42
4.6	Randbedingungen	47
4.6.1	Magnetische Wand für Felder TE bzgl. ϕ , elektrische Wand für Fel- der TM bzgl. ϕ (Kurzschluss-Randbedingung)	47
4.6.2	Elektrische Wand für Felder TE bzgl. ϕ , magnetische Wand für Felder TM bzgl. ϕ (Leerlauf-Randbedingung)	48
4.6.3	Absorbierende Randbedingung	49
4.6.4	Bekanntes Potential als Randbedingung	51
4.7	Andere Lösungsverfahren und verwandte Methoden	52
4.7.1	Split-Step-Algorithmus	52
4.7.2	Gaußsche Strahlen	53
4.7.3	Methode der Summation gaußscher Strahlen	56
4.8	Grenzen der Anwendbarkeit von PE	61
4.8.1	Nahfeld	61
4.8.2	Sich kreuzende angenommene Ausbreitungswege	64
4.8.3	Keine vorherrschende Ausbreitungsrichtung, Reflexionen	66
5	Klassische Analyse dielektrischer Streukörper	69
5.1	Geometrische Optik	69
5.2	Äquivalente Quellen, Fresnel-Integral-Methode	72
5.3	Verwendung asymptotisch exakter Methoden	76
5.3.1	Finite Differenzen im Zeitbereich (FDTD)	77
5.3.2	Momentenmethode (MoM)	78
6	Linsenanalyse mittels PE	81
6.1	Grenzfläche zwischen Luft und Dielektrikum	81
6.2	Wahl der Ausbreitungswege anhand von GO-Strahlen	83
6.3	Möglichkeiten zur Überwindung eines GO-Brennpunkts	83
6.3.1	Parallele Ausbreitungswege im Brennpunktbereich oder der gesam- ten Linse	84
6.3.2	Verbinden der Punkte auf der Ein- und Austrittslinie	85
6.3.3	Lösung der PE in krummlinigen Koordinatensystemen	86
6.4	Energieströmungslinien als Ausbreitungswege	88
6.4.1	Bestimmung des Verlaufs von Energieströmungslinien	88

6.4.2	Bestimmung des Poynting-Vektors aus dem Potential	88
6.4.3	Energieströmungslinien bei einer ellipsenförmigen Linse	89
6.5	Richtung aus Poynting-Vektor auf Anfangsfront	93
6.5.1	Numerische Bestimmung der Richtung des Poynting-Vektors aus der Phase von ψ	94
6.5.2	Adaptive Bestimmung der angenommenen Ausbreitungswege	96
6.6	Nicht senkrecht abgehende Ausbreitungswege	97
6.6.1	Problematik	97
6.6.2	Flanken: Einfacher Schnitt der neuen angenommenen Phasenfron- ten mit der PE-Anfangsfront	98
6.6.3	Becken: Zweifacher Schnitt der neuen angenommenen Phasenfron- ten mit der PE-Anfangsfront	100
6.6.4	Übergang zwischen zwei allgemeinen Strahlenkoordinatensystemen .	101
6.6.5	Beobachtete Instabilität bei der WWPE durch kleine Schrittweiten	101
6.7	Bestimmung des Fernfeldes der Linsenantenne	102
6.7.1	Aperturbelegung	102
6.7.2	Anwendung von PE ausgehend von der Apertur bis ins Fernfeld . .	103
7	Anwendungsbeispiele	105
7.1	PE-Rechnung im Freiraum	105
7.1.1	Betrachtetes Szenario	105
7.1.2	Verwendung zueinander paralleler Ausbreitungswege	106
7.1.3	PE-Rechnung mit einer beliebigen Anfangsfront	109
7.1.4	Adaptive Wahl der PE-Ausbreitungswege anhand von A-priori-Wissen	111
7.1.5	Unterschiedliche Gewichtungen des expliziten und impliziten Anteils	114
7.2	PE-Rechnung zur Analyse einer Linsenantenne	116
7.2.1	Modellierung für die Analyse mit dem 2D-PE-Algorithmus	116
7.2.2	Anfangsfeld auf der Linseneintrittsfläche	118
7.2.3	PE-Rechnung innerhalb der Linse bis zu deren Apertur	120
7.2.4	Fernfeld und Vergleich mit einer FDTD-Berechnung	123
8	Schlussfolgerungen und Ausblick	129
A	Kugelkoordinaten	133
A.1	Zusammenhang mit kartesischen Koordinaten	133
A.2	Divergenz und Rotation	133
B	Hermitesche Polynome	135
C	Rauhigkeit der Linsenoberfläche bei GO	137
D	Bündelung einer ebenen Welle in einer Ellipse	141

E	Der Poynting-Vektor im Zeit- und Frequenzbereich	143
F	Computerprogramm PESTRAHL	145
G	Wahl der Rotationssymmetrie in ϕ	147
H	Strahlung in Richtung der Rotationsachse	149
I	Strahlung eines Dipolrings auf einem Zylinder	151
J	Fresnelsche Beziehungen für das Magnetfeld	155
	Literaturverzeichnis	157

Legende

Verwendete Formelzeichen

a	große Halbachse einer Ellipse	m
A	Operator (Definition in Gleichung (4.47) auf Seite 37)	
\vec{A}	magnetisches Vektorpotential	A
b	kleine Halbachse einer Ellipse	m
α	Winkel	[rad]
\vec{b}	Momentanwert der magnetischen Flussdichte	Vs/m ²
\vec{B}	magnetische Flussdichte	Vs/m ²
β	Wellenzahl	1/m
β_0	Wellenzahl im Freiraum	1/m
c	Abstand zwischen dem Brenn- und Mittelpunkt einer Ellipse	m
c	Lichtgeschwindigkeit in einem Medium	m/s
c_0	Lichtgeschwindigkeit im Vakuum	$3 \cdot 10^8$ m/s
C_n	Gewichtungsfaktor für den Mode n	1
d	Abstand	m
\vec{d}	Momentanwert der elektrischen Verschiebungsstromdichte	As/m ²
D	Diffusionskonstante	
D	Kugeldurchmesser	m
\vec{D}	elektrische Verschiebungsstromdichte	As/m ²
δ	Winkel	[rad]
Δ	Abstand	m
Δ^*	finite Differenz zweier Größen *	
Δ	(skalärer) Laplace-Operator	
\diamond	Laplace-Operator für ein Vektorfeld	
e	Exzentrizität einer Ellipse	1
\vec{e}	Momentanwert der elektrischen Feldstärke	V/m
E	Betrag der elektrischen Feldstärke	V/m
\vec{E}	elektrische Feldstärke	V/m
ϵ_0	Dielektrizitätszahl des Vakuums	$8,854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}}$
ϵ_r	relative Dielektrizitätszahl	1

f	Brennweite einer Ellipse	m
f	Frequenz	Hz
\vec{F}	elektrisches Vektorpotential	V
$\vec{F}_{\text{smn}}^{(c)}$	sphärischer Mode	$\sqrt{\Omega}/\text{m}$
ϕ	Azimutwinkel bei Kugel-, Zylinder- und Strahlenkoordinaten	[rad]
Φ	Gewichtungsfunktion bei der Summation gaußscher Strahlen	
φ	skalares elektrisches Potential für die Lorentz-Eichung	V
φ_{m}	skalares magnetisches Potential für die Lorentz-Eichung	A
\vec{g}	Momentanwert der elektrischen Stromdichte	A/m ²
γ	Dämpfungsparameter bei absorbierender Randbedingung	1
γ	Hilfsgröße (Definition in Gleichung (4.83) auf Seite 44)	
γ	Winkel	[rad]
Γ	Hilfsgröße (Definition in Gleichung (4.84) auf Seite 44)	
h	halbe Länge einer Dipolantenne	m
\vec{h}	Momentanwert der magnetischen Feldstärke	A/m
H	Betrag der magnetischen Feldstärke	A/m
H_m	hermitesches Polynom m ter Ordnung	1
$H_m^{(n)}$	Hankelfunktion m ter Ordnung, n ter Art	1
\vec{H}	magnetische Feldstärke	A/m
η	Hilfsgröße (Definition in Gleichung (4.74) auf Seite 43)	
\vec{J}_*	elektrische Flächenstromdichte	A/m
κ	spezifische elektrische Leitfähigkeit	S/m = $\frac{\text{A}}{\text{Vm}}$
λ	Wellenlänge	m
λ_0	Wellenlänge im Freiraum	m
m	ganze Zahl (Position im PE-Gitter oder Moden-Index)	1
μ_0	Permeabilität des Vakuums	$4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}$
n	Brechzahl	1
n	ganze Zahl (Position im PE-Gitter oder Moden-Index)	1
\hat{n}	auf 1 normierter Normalenvektor	1
\mathcal{N}	Menge der natürlichen Zahlen	
O	(letztendlich vernachlässigbare) Hilfsgröße in Abschnitt 4.4.1	
O_{kart}	Ursprung eines kartesischen Koordinatensystems	
O_{str}	Ursprung eines Strahlenkoordinatensystems	
p	Halbparameter einer Ellipse	m
ψ	skalares Potential bei der PE-Methode und gaußschen Strahlen	
ψ	Komponente des elektrischen Vektorpotentials \vec{F}	V
ψ_{m}	Komponente des magnetischen Vektorpotentials \vec{A}	A
Ψ	skalares Potential mit abgespaltetem Phasenterm	
r	Kugelkoordinate, Abstand	m

\vec{r}	Ortsvektor (in verschiedenen Koordinatensystemen)	m
R	Abstand (vgl. Abbildung 3.5 auf Seite 23)	m
\vec{R}	rechte Seite eines inhomogenen Gleichungssystems	
\mathcal{R}	Menge der reellen Zahlen	
ρ	Kreisradius, Krümmungsradius	m
s	Strahlenkoordinate	m
\hat{s}	Einheitsvektor in s-Richtung	1
\vec{s}	Momentanwert des Poynting-Vektors	VA/m ²
S	Operator (Definition in Gleichung (4.68) auf Seite 42)	
\vec{S}	Poynting-Vektor eines zeitharmonischen Feldes	VA/m ²
\hat{t}	auf 1 normierter Tangentenvektor	1
\vec{t}_*	(nicht normierter) Tangentenvektor in Richtung der Koordinate *	
θ	Kugelkoordinate	[rad]
θ'	Abweichung zwischen der tatsächlichen und angenommenen Ausbreitungsrichtung	[rad]
θ'	Winkel der Achse einer Quelle zum Beobachtungspunkt	[rad]
θ_1	Winkel des Einheitsvektors $\hat{\xi}$ zur z-Achse	[rad]
u	beliebige skalare Größe (mit oder ohne Einheit)	
u	Potential bei der Summation gaußscher Strahlen	
v	Parameter zur Gewichtung des expliziten und impliziten Anteils	1
\vec{v}	beliebige vektorielle Größe (mit oder ohne Einheit)	
x_0	Hilfsgröße, Position eines GO-Brennpunkts	m
x	allgemeine reelle Zahl	1
x	kartesische Koordinate	m
\hat{x}	Einheitsvektor in x-Richtung	1
X	Abkürzung (Definition in Gleichung (4.34) auf Seite 36)	
ξ	Strahlenkoordinate	m
$\hat{\xi}$	Einheitsvektor in ξ -Richtung	1
Ξ	Abkürzung (Definition in Gleichung (4.69) auf Seite 42)	
y	kartesische Koordinate	m
\hat{y}	Einheitsvektor in y-Richtung	1
Υ	Hilfsgröße (Definition in Gleichung (4.99) auf Seite 46)	
z	kartesische Koordinate	m
\hat{z}	Einheitsvektor in z-Richtung	1
Z_F	Feldwellenwiderstand	Ω
ζ	Hilfsgröße (Definition in Gleichung (4.75) auf Seite 43)	
\mathcal{Z}	Menge aller ganzen Zahlen	

Verwendete Abkürzungen

FD	finite Differenzen
FDTD	finite Differenzen im Zeitbereich (Finite Difference Time Domain)
FIT	finite Integrationstechnik
GO	Geometrische Optik
MoM	Momentenmethode (Method of Moments)
PE	Methode der Parabolischen Gleichung, Parabolische Gleichung
SPE	Standard-PE (vgl. Abschnitt 4.2 ab Seite 30)
STBC	Simple Transparent Boundary Condition nach Hadley [30]
TBC	Transparent Boundary Condition nach Hadley [29, 30]
TE	transversal elektrisch bzgl. einer bestimmten Komponente
TM	transversal magnetisch
WWPE	Weitwinkel-PE (vgl. Abschnitt 4.3 ab Seite 34)

Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit behandelt ein neuartiges Verfahren zur Analyse von Linsenantennen, d. h. zur Berechnung der Eigenschaften der Linse als dielektrischer Streukörper mit dem Ziel, die Richtcharakteristik der gesamten Antenne zu bestimmen. Für die Analyse von dielektrischen Linsen sind bisher zwei grundsätzlich verschiedene Verfahren gebräuchlich, die Geometrische Optik und asymptotisch exakte Methoden. Bei Linsen, die sehr groß gegenüber der Wellenlänge sind, kommt das strahlenbasierte Verfahren der Geometrischen Optik in Betracht. Dieses ist sehr schnell und stellt keine nennenswerten Ansprüche hinsichtlich der Rechenzeit und des Speicherplatzes, setzt aber voraus, dass ein einziger Strahl eine lokal ebene Welle repräsentiert und Strukturen, auf die ein Strahl trifft, groß gegenüber der Wellenlänge sind. Im Millimeterwellenbereich (z. B. bei einer Frequenz von 60 GHz) liegt der typische Linsendurchmesser bei einigen Zentimetern. Damit kann die Linse zwar hinsichtlich ihres Durchmessers als groß gegenüber der Wellenlänge bezeichnet werden, einzelne Strukturen der Linse jedoch i. Allg. nicht. Die Folge ist eine zunehmende Ungenauigkeit der Geometrischen Optik, je kleiner die Linse wird. Eine unabhängig von der Linsengröße genaue Möglichkeit zur Analyse von dielektrischen Linsen besteht in der Verwendung von so genannten asymptotisch exakten Verfahren wie der Momentenmethode (MoM) oder Finiten Differenzen im Zeitbereich (FDTD). Für deren effiziente Anwendung ist die Linse mit ihrem Durchmesser von mehreren Wellenlängen bis einigen zehn Wellenlängen jedoch i. Allg. zu groß, d. h. die Analyse erfordert eine beträchtliche Rechenzeit und hat einen erheblichen Bedarf an Speicherplatz.

Die Tatsache, dass die Linse für die Anwendung der Geometrischen Optik eher zu klein und für die Verwendung asymptotisch exakter Methoden eher zu groß ist, erfordert das Beschreiten eines Mittelwegs. Es wird ein Verfahren benötigt, das bei moderaten Linsengrößen deutlich genauer als die Geometrische Optik, aber hinsichtlich des Speicherplatz- und Rechenzeitbedarfs genügsamer als asymptotisch exakte Methoden ist. Ein solcher Mittelweg ist aus dem Gebiet der Wellenausbreitung bekannt. Dabei handelt es sich um die Methode der Parabolischen Gleichung. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wird diskutiert und anhand von Beispielen gezeigt, inwiefern diese Methode zur Analyse von dielektrischen Linsen, die eine nicht näher festgelegte Form aufweisen, verwendet werden kann. Dabei ist es erforderlich, die Parabolische Gleichung in orthogonalen Strahlenkoordinaten zu lösen. Da es sich um Grundsatzuntersuchungen handelt, erfolgt eine Beschränkung auf das Zweidimensionale.

Der Ausgangspunkt für das Aufstellen der Parabolischen Gleichung liegt in der elliptischen Wellengleichung für ein Skalar, der Helmholtzgleichung. Die Beschreibung eines vollständigen elektromagnetischen Feldes mittels eines Skalars erfordert die Verwendung von Potentialen. Nach einer Einleitung in Kapitel 1 wird in Kapitel 2 der Übergang von den maxwellschen Gleichungen zu Wellengleichungen für das elektrische und magnetische Feld behandelt. Es werden elektrische und magnetische Vektorpotentiale eingeführt, deren Wellengleichungen angegeben, und es wird aufgezeigt, wie Potentiale und Feldstärken ineinander umgerechnet werden können.

Orthogonale Strahlenkoordinaten weisen Koordinatenlinien auf, die i. Allg. weder — wie bei kartesischen Koordinaten — parallel zueinander verlaufen noch sich — wie bei Polarkoordinaten — rückwärtig in einem einzigen Punkt schneiden. Kapitel 3 zeigt den Zusammenhang zwischen Strahlenkoordinaten und kartesischen Koordinaten. Es erfolgt eine Herleitung der Vektoroperatoren, die erforderlich sind, um die skalare Wellengleichung in Strahlenkoordinaten zu formulieren.

Kapitel 4 behandelt die Herleitung der Parabolischen Gleichung aus der Helmholtzgleichung. Dabei wird sowohl die Standard- als auch die Weitwinkel-Variante der Parabolischen Gleichung betrachtet. Es wird gezeigt, wie die Parabolische Gleichung mittels finiter Differenzen gelöst werden kann und wie Randbedingungen berücksichtigt werden können. Gaußsche Strahlen sowie die Methode der Summation gaußscher Strahlen werden kurz gestreift, da gaußsche Strahlen eine Lösung der Parabolischen Gleichung darstellen und die Summation gaußscher Strahlen mit der bei der Linsenanalyse häufig anzutreffenden Überlagerung von Elementarquellen verwandt ist.

Die gebräuchlichen Methoden zur Analyse dielektrischer Streukörper werden in Kapitel 5 genannt. Neben der Geometrischen Optik und der Verwendung asymptotisch exakter Methoden wird auf die Verwendung äquivalenter Quellen eingegangen. Es wird gezeigt, wie äquivalente Quellen aus demselben Potential abgeleitet werden können, das auch bei der Methode der Parabolischen Gleichung verwendet wird, und wie sich direkt wieder das Potential in einem Beobachtungspunkt aus der Überlagerung der Wirkung der äquivalenten Quellen gewinnen lässt. Dadurch steht eine Möglichkeit zur Verfügung, die Algorithmen zur Lösung der Parabolischen Gleichung ohne das Hinzuziehen von speziellen Feldberechnungsprogrammen zu validieren.

Kapitel 6 widmet sich den Besonderheiten bei der Anwendung der Methode der Parabolischen Gleichung auf die Analyse von Linsenantennen. Der Schwerpunkt liegt in einer Erörterung, auf welche Art und Weise der Verlauf der Ausbreitungswege festzulegen ist, entlang derer die Parabolische Gleichung schrittweise gelöst wird. Sofern geometrisch-optische Strahlen als Ausbreitungswege verwendet werden sollen, ist die Frage zu klären, wie sich schneidende Ausbreitungswege vermieden werden können. Im Schnittpunkt zweier Ausbreitungswege tritt bei der Parabolischen Gleichung eine Singularität auf. Gewöhnlich stehen die Ausbreitungswege bei der Anwendung der Methode der Parabolischen Gleichung senkrecht auf derjenigen Front, auf der die Anfangswerte gegeben sind. Bei

der Analyse von Linsenantennen ist es zweckmäßig, die Parabolische Gleichung ausgehend von der Linseneintrittsfläche zu lösen. Eine Forderung nach Ausbreitungswegen, die senkrecht auf der Linseneintrittsfläche stehen, würde eine Einschränkung in der Wahl der Richtung der Ausbreitungswege darstellen und möglicherweise insbesondere bei einer Sammellinsenform zu sich schneidenden Ausbreitungswegen führen. Es wird ein Verfahren aufgezeigt, wie die Parabolische Gleichung in Bereichen gelöst werden kann, in denen die Ausbreitungswege nicht im rechten Winkel zur Anfangsfront stehen. Dadurch ist es möglich, im Verlauf einer Rechnung zwischen zwei Koordinatensystemen „umzuschalten“, z. B. um sich schneidende Strahlen zu vermeiden oder die Richtung der Ausbreitungswege an die tatsächliche Ausbreitungsrichtung der elektromagnetischen Welle anzupassen.

Anwendungsbeispiele sind in Kapitel 7 zu finden. Zunächst wird anhand eines einfachen Szenarios gezeigt, wie sich schräg von einer Anfangsfront abgehende Ausbreitungswege in der Praxis bewähren und wie das Ergebnis durch eine während der Berechnung zweifach erfolgte Anpassung des Verlaufs der Ausbreitungswege an die zu erwartende Ausbreitungsrichtung der elektromagnetischen Welle verbessert werden kann. Anschließend wird eine aus der Literatur bekannte Linsenantenne analysiert und das Ergebnis mit der Berechnung nach einer asymptotisch exakten Methode verglichen. Dadurch kann gezeigt werden, dass die Methode der Parabolischen Gleichung die Probleme der Geometrischen Optik bei kleinen Streukörpern zu überwinden hilft, ohne dass ein Rechenzeit- und Speicherplatzaufwand entsteht, wie er bei den asymptotisch exakten Methoden anzutreffen ist.

Kapitel 8 enthält abschließende Betrachtungen und einen Ausblick über den möglichen Fortgang der Arbeiten.

Summary

The topic of this thesis is a new method for analysing lens antennas. Analysis means the calculation of the properties of the lens as a dielectric scattering body in order to determine the radiation pattern of the lens antenna as a whole. Today, for the analysis of the radiation pattern typically two different methods are used: Geometrical Optics and asymptotically accurate methods. If the lens is very large compared to the wavelength, Geometrical Optics may be applied. This ray-based method is very fast and undemanding with respect to computation time and memory consumption. However, Geometrical Optics presuppose that a single ray represents a locally plane wave and that a structure being hit by a ray is large compared to the wavelength. In the millimetre wave range (e. g. at a frequency of 60 GHz), the typical diameter of a lens is in the order of some centimetres. Thus, according to the diameter, the lens can be declared to be large compared to the wavelength, but single structures of the lens in general are not. As a consequence, Geometrical Optics is increasingly inaccurate with the lens becoming smaller. For an analysis which is precise independent of the size of the lens, so-called “asymptotically accurate methods” like the Method of Moments (MoM) or Finite Differences in Time Domain (FDTD) can be used. In order to keep the application of asymptotically accurate methods efficient, the lens diameter should not exceed a certain number of wavelengths. Typical lenses as used with lens antennas lead to an enormous amount of calculation time and a huge consumption of memory when being analysed by means of asymptotically accurate methods.

Hence, one can state that dielectric lenses which are used in common lens antennas are in general too small to be analysed precisely by means of Geometrical Optics, but too large for an efficient application of asymptotically accurate methods. There is a demand to find a new way which is more accurate than Geometrical Optics but less memory- and time-consuming compared to asymptotically accurate methods. Such an approach is known with wave propagation, viz the Parabolic Equation Method (PE). Within this thesis it is discussed and shown by examples, how PE may be applied to the analysis of lens antennas, i. e. to the wave propagation inside a dielectric lens, for which owing to the basic character of this investigation two-dimensionality is assumed. To this end, the Parabolic Equation is solved in two-dimensional orthogonal ray co-ordinates.

After a short introduction in chapter 1, the starting point to set up the Parabolic Equation is the elliptic wave equation for a scalar, which is known as Helmholtz’s equation. In order to represent a full electromagnetic field by a scalar, potentials are required. Chapter 2

shows the transition from Maxwell's equations to wave equations for the electric and magnetic field. Electric and magnetic vector potentials are introduced, the wave equations for the vector potentials are given and it is shown, in which way field strength and potential values can be converted mutually.

Orthogonal ray co-ordinates show co-ordinate lines that are in general neither parallel among each other as e. g. with Cartesian co-ordinates, nor do they intersect backwards in a single point like polar co-ordinates. Chapter 3 gives the interrelation between ray co-ordinates and Cartesian co-ordinates. Vector operators, which are necessary to formulate the scalar wave equation in ray co-ordinates, are derived.

In chapter 4, the deduction of the Parabolic Equation from the Helmholtz equation is treated. Both the standard PE and the wide angle PE are dealt with. It is shown, in which way the Parabolic Equation can be solved by means of finite differences and how boundary conditions are taken into account. A glance at Gaussian beams and the Gaussian Beam Summation Method follows, as a single Gaussian beam is a solution of the standard Parabolic Equation and the Gaussian Beam Summation Method is related to the superposition of elementary sources, which are often used for lens analysis.

Chapter 5 introduces the methods of common use for lens analysis. Besides Geometrical Optics and the use of asymptotically accurate methods, the Fresnel Integral Method, which is related to Physical Optics, is considered in detail. It is shown, in which way equivalent sources can be deduced from the same potential that is used within the Parabolic Equation Method and how one can obtain the potential as a superposition of the impact of the sources at a certain observation point. I. e., by means of the Fresnel Integral Method, one can directly determine the potential at an observation point from the potential distribution along some kind of an aperture. Thereby, the PE solving algorithms can be validated without a need for special field computation programmes.

Particularities of the Parabolic Equation Method that occur especially when it is applied to the analysis of dielectric lenses are dealt with in chapter 6. The focus is on the question, in which way the direction of the propagation paths, along which the PE is solved, shall be determined. If Geometrical Optics rays are to be used as propagation paths one has to take care to avoid intersecting rays. At an intersection point, the Parabolic Equation becomes singular. In common applications of the Parabolic Equation Method the propagation paths are orthogonal to the line along which the initial values of the potential are given. When analysing a dielectric lens, it is appropriate to solve the Parabolic Equation from that part of the lens surface, at which the radiation of the primary antenna enters the lens. Demanding propagation paths to be orthogonal to the lens surface would be a significant constraint on the choice of their direction and might lead to intersecting paths, especially if the lens contour contained focussing parts. Thus, a method is derived, by which the Parabolic Equation can be solved, if propagation paths are not orthogonal to the line containing the initial values. With this method it is possible to switch between different co-ordinate systems during one PE calculation, e. g. to avoid intersecting propagation paths

or to adapt them to the actual direction of wave propagation.

Application examples can be found in chapter 7. First, for a simple scenario it is shown that propagation paths, which are not orthogonal to the line of the initial values, can be used in practice and that the result of the PE calculation can be improved by means of a twofold adaption of the propagation paths to the actual direction of wave propagation. Then, a lens antenna known from literature is analysed. The result of the PE calculation is compared with the result of an asymptotically accurate method. It is apparent that the Parabolic Equation Method helps to overcome the limitations of Geometrical Optics with respect to dielectric scattering bodies being small compared to the wavelength without leading to a computation time and memory consumption comparable to asymptotically accurate methods.

Chapter 8 contains final considerations and gives an outlook on possible future work on this topic.

Kapitel 1

Einleitung

Dielektrische Linsen werden eingesetzt, um die Richtcharakteristik einer Primärantenne zu verändern. Im einfachsten Fall handelt es sich dabei um eine zusätzliche Bündelung der Strahlung und damit eine Vergrößerung des Richtfaktors. Beispiele hierfür sind Hornantennen mit nachgeschalteter Sammellinse, aber auch Luneburg-Linsen, mit denen aus verschiedenen Richtungen einfallende Wellen gebündelt werden können. Die Bündelung wird dabei durch ein Geraderichten der von der Primärantenne ausgehenden — mehr oder weniger stark gekrümmten — Phasenfronten erreicht. Dies geschieht durch eine gegenüber Luft verringerte Ausbreitungsgeschwindigkeit der elektromagnetischen Welle im Linsendielektrikum im Zusammenwirken mit den Randbedingungen für das elektrische und magnetische Feld an der Grenzfläche zwischen Luft und Linse.

Eine Gemeinsamkeit von Linsen- und Reflektorantennen besteht in der Charakterisierbarkeit der Strahlungseigenschaften über die Aperturbelegung, d. h. die Feldverteilung auf der Oberfläche des Reflektors bzw. auf der Linsenaustrittsfläche. Es ist die Aufgabe der dielektrischen Linse bzw. des Reflektors, die Strahlung der Speiseantenne in diejenige Aperturbelegung zu überführen, die zur gewünschten Fernfeld-Richtcharakteristik der gesamten Antenne führt. Bei Linsenantennen befindet sich der Primärstrahler im Gegensatz zu häufig anzutreffenden Ausführungen von Reflektorantennen nicht im Strahlengang. Dies ermöglicht den Entwurf kompakter Antennen mit hohem Gewinn und niedrigem Nebenkeulenniveau. Während der Reflektor über seine Oberfläche wirkt, durchläuft die Welle bei dielektrischen Linsen deren Volumen. Dies führt bei tieferen Frequenzen zu einem erheblichen Materialbedarf und nicht zuletzt zu einer großen Masse der Linsen. Daher werden Linsen in der Regel erst im Millimeterwellenbereich, also oberhalb von 30 GHz, eingesetzt.

Die Wirkungsweise der Linsen über deren Volumen führt zu einer Schwierigkeit bei der numerischen Berechnung der Linseneigenschaften. Asymptotisch exakte Methoden wie die Momentenmethode (MoM) oder die Finiten Differenzen im Zeitbereich (FDTD) haben — auch im Vergleich zum Aufwand bei der Analyse ähnlich großer Reflektorantennen — durch das dielektrische Volumen einen besonders hohen Rechenzeit- und Speicherplatzbe-

darf. Wird die Linse mit der auf der Momentenmethode basierenden Flächenstrommethode [36] modelliert, ist allein die (den Rechenaufwand bestimmende) Oberfläche wegen der getrennten Ein- und Austrittsfläche in etwa doppelt so groß wie bei einer entsprechenden Reflektorantenne. Zur Nachbildung eines dielektrischen Oberflächenelements wird wegen der zusätzlichen Annahme magnetischer Flächenströme die doppelte Zahl an Unbekannten benötigt wie zur Nachbildung eines gleich großen metallischen Elements. Hinzu kommt, dass die Diskretisierung der Oberfläche wegen der im Linsendielektrikum im Vergleich zu Luft kleineren Wellenlänge feiner erfolgen muss. Dies betrifft auch die Diskretisierung des Raumes am Ort der Linse bei FDTD. Für die Analyse dielektrischer Linsen ist somit ein beschleunigtes Rechenverfahren, das mit wenig Speicherplatz auskommt, anzustreben. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wird gezeigt, inwiefern die Methode der Parabolischen Gleichung (PE) hierfür geeignet ist.

Für den Einsatz bei Mobilkommunikationssystemen kann mit Hilfe dielektrischer Linsen auf einfache Art und Weise die Strahlung einer schwach bündelnden Primärantenne (z. B. einer kurzen Helixantenne [62] oder eines offenen Hohlleiters [23]) in eine zur gleichmäßigen Ausleuchtung einer Funkzelle vorteilhafte Kosekans-Richtcharakteristik überführt werden. Die Formung der Linse kann in einem ersten Schritt nach geometrisch-optischen Verfahren erfolgen [23]. Eine Voraussetzung für die Anwendung der Geometrischen Optik besteht jedoch darin, dass die Linse als Streukörper in *allen* Strukturen wesentlich größer als die Wellenlänge ist. Dies ist bei Linsenantennen im Millimeterwellenbereich nicht grundsätzlich der Fall, so dass die Richtcharakteristik einer nach geometrisch-optischen Grundsätzen entworfenen Linsenantenne mehr oder weniger von der Idealform abweichen kann [23, 62]. Im Rahmen des Entwicklungsprozesses und der Optimierung einer derartigen Linsenantenne muss die sich tatsächlich ergebende Richtcharakteristik ständig kontrolliert und in die weiteren Überlegungen mit einbezogen werden. Dafür ist ein Analyseverfahren erforderlich, das eine höhere Genauigkeit als die Geometrische Optik aufweist. Asymptotisch exakte Methoden wie MoM und FDTD kommen aufgrund des hohen Speicherplatz- und Rechenzeitbedarfs für Optimierungsprozesse nicht oder nur bedingt in Frage. Das Ziel besteht daher in der Bereitstellung einer Methode, welche die Genauigkeit der asymptotisch exakten Berechnungsverfahren mit der Schnelligkeit der Geometrischen Optik verknüpft. Aus dem Bereich der Wellenausbreitung ist diesbezüglich die Methode der Parabolischen Gleichung bekannt. Traditionell wird sie vor allem in der Unterwasser-Akustik und der Geologie angewandt, in jüngerer Zeit verstärkt auch zur Feldstärkeprognose für verschiedene Funkdienste, z. B. zur Berechnung der Wellenausbreitung in Tunneln [57, 71].

Bei der Methode der Parabolischen Gleichung sind grundsätzlich Pfade oder Strahlen anzusetzen, entlang derer in etwa die Wellenausbreitung erfolgt. Die angenommene Strahlrichtung muss — je nach verwendeter Form der PE — bis auf ca. 15° bzw. 45° mit der tatsächlichen Ausbreitungsrichtung übereinstimmen [47]. Im klassischen Anwendungsbereich der PE-Methode, der Wellenausbreitung, werden oft horizontale Ausbreitungswege angenommen, womit in vielen Fällen die Forderung hinsichtlich der o. a. maximalen

Abweichung erfüllt ist. Bei dielektrischen Linsen kann die Ausbreitung der elektromagnetischen Welle ungleich komplizierter erfolgen, was sich z. B. durch sich schneidende geometrisch-optische Strahlen äußert. Insofern existiert in vielen Fällen keine einfache, „standardisierte“ Anordnung von Ausbreitungswegen, um die tatsächliche Ausbreitungsrichtung hinreichend genau nachzubilden. Für die Anwendung der PE-Methode zur Analyse dielektrischer Linsen sind somit Verfahren zu entwerfen, bei denen die Strahlwege vor Beginn (und möglicherweise auch während) der Berechnung an die tatsächliche oder an die a priori zu erwartende Ausbreitungsrichtung angepasst werden. Hierfür können zwar in einem ersten Ansatz die geometrisch-optischen Strahlen verwendet werden. Sofern sich jedoch GO-Strahlen schneiden, führt dies beim Unterschreiten einer minimalen Distanz zum Schnittpunkt zum Versagen der PE-Methode. Zur Überwindung dieses Problems wird daher der Ansatz verfolgt, von GO-Strahlen zu Energieströmungslinien [53] überzugehen, die sich grundsätzlich nicht schneiden.

Bei der konventionellen Anwendung von PE startet die Berechnung üblicherweise von einer angenommenen Phasenfront, d. h. die angenommenen Ausbreitungswege stehen senkrecht auf der Front, ab der die Berechnung erfolgt. Dies vereinfacht die Berechnung und stellt im Bereich der terrestrischen oder Unterwasser-Wellenausbreitung keine wesentliche Einschränkung dar. Die Grenzfläche zwischen Luft und Dielektrikum bei einer Linsenantenne ist jedoch einerseits i. Allg. nicht mit einer Phasenfront identisch. Andererseits ist die Überwindung dieser Grenzfläche innerhalb einer laufenden PE-Rechnung nicht möglich, da sich bei PE der Brechungsindex und damit die Dielektrizitätszahl nicht abrupt in einem für dielektrische Linsenantennen typischen Maße verändern darf. Es ist daher unabdingbar, für die Linsenanalyse eine Möglichkeit zu finden, PE ausgehend von einer Front anzuwenden, die keine Phasenfront darstellt. Werden die ursprünglich angenommenen Ausbreitungswege im Verlauf der PE-Rechnung geändert, z. B. um der Krümmung der Energieströmungslinien Rechnung zu tragen, ergibt sich dasselbe Problem: Die alte (angenommene) Phasenfront steht nicht senkrecht auf den neuen Strahlwegen. Zu dessen Lösung bietet es sich an, bekannte Potentialwerte im Finite-Differenzen-Schema als Randbedingung zu verwenden.

Kapitel 2

Grundlagen

2.1 Die maxwellschen Gleichungen

Der Ausgangspunkt für die Herleitung der elliptischen Wellengleichung sind die maxwellschen Gleichungen in ihrer differentiellen Form [45]:

$$\operatorname{rot} \vec{h} = \vec{g} + \frac{\partial \vec{d}}{\partial t} \quad (2.1)$$

$$\operatorname{rot} \vec{e} = -\frac{\partial \vec{b}}{\partial t} \quad (2.2)$$

$$\operatorname{div} \vec{b} = 0 \quad (2.3)$$

$$\operatorname{div} \vec{d} = \rho \quad (2.4)$$

Die Medien, innerhalb derer die Wellenausbreitung betrachtet werden soll, sind isotrop, homogen und linear, d. h. es liegt weder eine Richtungs- noch eine Orts- und Feldstärkeabhängigkeit der Dielektrizitätszahl und der Permeabilität vor. In diesem Fall herrscht ein skalarer Zusammenhang zwischen \vec{d} und \vec{e} sowie \vec{b} und \vec{h} , und die Materialgleichungen lauten:

$$\vec{d} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{e} \quad (2.5)$$

$$\vec{b} = \mu_0 \mu_r \vec{h} \quad (2.6)$$

$$\vec{g} = \kappa \vec{e} \quad (2.7)$$

Eine weitere Vereinfachung besteht darin, Ladungs- und Verlustfreiheit im Medium, in dem sich die Welle ausbreitet, vorauszusetzen¹, d. h. $\rho = 0$ und $\kappa = 0$ anzunehmen. Unter Berücksichtigung der bis jetzt getroffenen Annahmen ergibt sich aus den maxwellschen Gleichungen (2.1)–(2.4):

¹Randbedingungen können dennoch Verluste beinhalten, vgl. sog. Impedanz-Randbedingungen zur Berücksichtigung der Verluste im Erdboden bei der Berechnung der terrestrischen Wellenausbreitung mit PE.

$$\operatorname{rot} \vec{h} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{\partial \vec{e}}{\partial t} \quad (2.8)$$

$$\operatorname{rot} \vec{e} = -\mu_0 \mu_r \frac{\partial \vec{h}}{\partial t} \quad (2.9)$$

$$\operatorname{div} \vec{h} = 0 \quad (2.10)$$

$$\operatorname{div} \vec{e} = 0 \quad (2.11)$$

Die Wellenausbreitung soll nur bei einer einzigen Frequenz im eingeschwungenen Zustand betrachtet werden. Alle zeitabhängigen Größen stellen in diesem Fall eine harmonische Schwingung dar und können als Realteil des Produkts einer (nur vom Ort abhängigen) komplexen Amplitude und eines zeitabhängigen Phasenterms geschrieben werden. Am Beispiel des elektrischen Feldes ergibt sich so:

$$\vec{e}(\vec{r}, t) = \operatorname{Re} \left\{ \vec{E}(\vec{r}) \cdot e^{j\omega t} \right\} \quad (2.12)$$

Ableitungen nach der Zeit ergeben einen unveränderten Ausdruck mit einem zusätzlichen Faktor $j\omega$:

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{e}(\vec{r}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{Re} \left\{ \vec{E}(\vec{r}) \cdot e^{j\omega t} \right\} = \operatorname{Re} \left\{ j\omega \cdot \vec{E}(\vec{r}) \cdot e^{j\omega t} \right\} \quad (2.13)$$

Für zeitharmonische Schwingungen mit der Kreisfrequenz ω lassen sich die maxwellschen Gleichungen für homogene, isotrope, lineare, ladungsfreie und verlustlose Medien (2.8)–(2.11) somit folgendermaßen schreiben²:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = j\omega \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} \quad (2.14)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -j\omega \mu_0 \mu_r \vec{H} \quad (2.15)$$

$$\operatorname{div} \vec{H} = 0 \quad (2.16)$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0 \quad (2.17)$$

2.2 Wellengleichungen für die Feldstärken \vec{E} und \vec{H}

Zur Ableitung der Wellengleichung für die elektrische oder magnetische Feldstärke wird die Rotation von Gl. (2.14) oder (2.15) gebildet und die jeweils andere Gleichung eingesetzt [45]. Für das elektrische Feld ergibt sich somit:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = \omega^2 \mu_0 \mu_r \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} \quad (2.18)$$

Der Ausdruck

$$\omega \sqrt{\mu_0 \mu_r \varepsilon_0 \varepsilon_r} = \frac{\omega}{c} = \beta \quad (2.19)$$

stellt die Wellenzahl dar. Es gilt allgemein [7, 45]

$$\diamond \vec{E} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{E} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} \quad (2.20)$$

²Die Gln. (2.16) und (2.17) sind dabei stets implizit erfüllt, da für beliebige Vektorfelder \vec{v} allgemein $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{v} = 0$ gilt. (Einsetzen von Gl. (2.15) in Gl. (2.16) bzw. von Gl. (2.14) in Gl. (2.17).)

und für den hier betrachteten Sonderfall der Ladungsfreiheit (Gl. (2.17))

$$\diamond \vec{E} = -\text{rot rot } \vec{E}. \quad (2.21)$$

Dabei stellt \diamond den Laplaceoperator eines Vektorfeldes dar. Dieser hat nur in kartesischen Koordinaten eine einfache Form (vgl. den nachfolgenden Abschnitt). Damit ergibt sich aus Gl. (2.18) die als Helmholtz-Gleichung bekannte Wellengleichung für das elektrische Feld:

$$\diamond \vec{E} = -\beta^2 \vec{E} \quad (2.22)$$

Auf dieselbe Weise (Einsetzen von Gl. (2.15) in die Rotation von (2.14)) erhält man die Wellengleichung für das magnetische Feld:

$$\diamond \vec{H} = -\beta^2 \vec{H} \quad (2.23)$$

Sonderfall: kartesische Koordinaten

In kartesischen Koordinaten hat der vektorielle Laplace-Operator \diamond eine einfache Form [7]:

$$\diamond \vec{E} = \begin{pmatrix} \Delta E_x \\ \Delta E_y \\ \Delta E_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) E_x \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) E_y \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) E_z \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

Der vektorielle Laplace-Operator \diamond beinhaltet (in kartesischen Koordinaten) also die komponentenweise Anwendung des skalaren Laplace-Operators

$$\Delta u = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) u. \quad (2.25)$$

Damit kann Gl. (2.22) folgendermaßen geschrieben werden:

$$\begin{pmatrix} \Delta E_x \\ \Delta E_y \\ \Delta E_z \end{pmatrix} = -\beta^2 \cdot \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

Somit existieren drei getrennte (nicht verkoppelte) Differentialgleichungen elliptischen Typs für die drei Komponenten des elektrischen Feldes. Für das magnetische Feld ergibt sich ein vergleichbarer Ausdruck; in Gl. (2.26) kann E jeweils durch H ersetzt werden.

In kartesischen Koordinaten erfüllt jede Komponente sowohl des elektrischen als auch des magnetischen Feldes die als skalare Helmholtz-Gleichung bekannte Wellengleichung:

$$\Delta \psi = -\beta^2 \cdot \psi \quad (2.27)$$

ψ ist dabei zunächst eine beliebige komplexe (i. Allg. ortsabhängige) Amplitude einer harmonischen Schwingung mit der Kreisfrequenz $\omega = \beta c$.

Die Tatsache, dass die kartesischen Komponenten von \vec{E} und \vec{H} jede für sich die Wellengleichung (2.27) erfüllen, bedeutet aber i. Allg. nicht, dass diese getrennt für alle elektrischen und magnetischen Feldkomponenten gelöst werden darf. Über die maxwellschen Gleichungen (2.14) und (2.15) sind die Feldgrößen miteinander verkoppelt. Die entkoppelten Differentialgleichungen (2.26) können zwar verwendet werden, um zu zeigen, dass ein angenommenes elektromagnetisches Feld die Wellengleichung erfüllt, aber i. Allg. nicht, um z. B. ausgehend von Anfangswerten eine Feldverteilung zu berechnen. Diese Problematik legt den Übergang zu Potentialen und deren Wellengleichungen nahe.

2.3 Das Vektorpotential zur Beschreibung eines elektromagnetischen Feldes

In Abschnitt 2.2 wurde gezeigt, wie sich für das elektrische und magnetische Feld eine zunächst vektorielle Wellengleichung aufstellen lässt. In kartesischen Koordinaten erfüllt jede Komponente des elektrischen und magnetischen Feldes die skalare Wellengleichung. Wegen der Verkopplung des elektrischen und magnetischen Feldes über die maxwellschen Gleichungen ist es jedoch nicht möglich, die Wellengleichungen für die einzelnen Feldkomponenten getrennt zu lösen. Ziel ist es daher, die Feldverteilung im Raum durch eine einzige oder mehrere voneinander unabhängige — möglichst skalare — Größen, für die eine Wellengleichung existiert, zu beschreiben. Dies ist mit Potentialen möglich; in einem quellenfreien Gebiet genügen zwei unterschiedliche, voneinander unabhängige Vektorpotentiale, um eine beliebige Feldverteilung zu beschreiben, vgl. die gängige Unterscheidung zwischen einem TE- und TM-Fall. Beispielsweise könnten von gegebenen Anfangswerten (z. B. \vec{E} und \vec{H} in einer Apertur) die Potentiale ermittelt, die Wellenausbreitung berechnet und das Ergebnis zurück in \vec{E} und \vec{H} gewandelt werden.

2.3.1 Wellengleichung für das magnetische und elektrische Vektorpotential

Betrachtet werden homogene, isotrope, ladungsfreie und verlustlose Medien. Allgemein gilt für ein beliebiges Vektorfeld \vec{v} [7]

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{v} = 0. \quad (2.28)$$

Andererseits ist auch die Divergenz des elektrischen und magnetischen Feldes Null. Die Gleichsetzung von (2.28) mit der maxwellschen Gleichung (2.16) ergibt

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{v} = 0 = \operatorname{div} \vec{H}. \quad (2.29)$$

Ein Vergleich der Operanden in Gl. (2.29) zeigt, dass das Magnetfeld als Rotation eines noch näher zu charakterisierenden Vektorfeldes \vec{v} aufgefasst werden kann. In Anlehnung an [33] wird dieses Vektorfeld als das magnetische Vektorpotential \vec{A} bezeichnet³:

$$\text{rot } \vec{A} = \vec{H}. \quad (2.30)$$

Gl. (2.30) kann nun in die maxwellsche Gleichung (2.15) eingesetzt werden:

$$\text{rot } \vec{E} = -j\omega\mu_0\mu_r\vec{H} = -j\omega\mu_0\mu_r \cdot \text{rot } \vec{A} \quad (2.31)$$

$$\text{rot } \vec{E} + j\omega\mu_0\mu_r \cdot \text{rot } \vec{A} = 0 \quad (2.32)$$

Aus [7]

$$\text{rot}(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = \text{rot } \vec{v}_1 + \text{rot } \vec{v}_2 \quad (2.33)$$

folgt

$$\text{rot}(\vec{E} + j\omega\mu_0\mu_r\vec{A}) = 0. \quad (2.34)$$

Allgemein gilt [7]

$$\text{rot grad } u = 0. \quad (2.35)$$

Der Vergleich von (2.34) und (2.35) zeigt, dass der Operand der Rotation in Gl. (2.34) als Gradient eines noch näher zu charakterisierenden Skalars u aufgefasst werden kann. Es handelt sich dabei um das skalare elektrische Potential φ [33, 45]:

$$-\text{grad } \varphi = \vec{E} + j\omega\mu_0\mu_r\vec{A} \quad (2.36)$$

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi - j\omega\mu_0\mu_r\vec{A} \quad (2.37)$$

Das negative Vorzeichen vor dem Gradienten wird in Einklang mit der Elektrostatik so gewählt. Um die Wellengleichung für \vec{A} zu bekommen, wird (2.37) und (2.30) in die maxwellsche Gleichung (2.14) eingesetzt:

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{H} &= j\omega\varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E} \\ \text{rot rot } \vec{A} &= j\omega\varepsilon_0\varepsilon_r(-\text{grad } \varphi - j\omega\mu_0\mu_r\vec{A}) \\ &= -j\omega\varepsilon_0\varepsilon_r \text{grad } \varphi + \beta^2\vec{A} \end{aligned} \quad (2.38)$$

Unter Verwendung der Definition in Gl. (2.20) für den vektoriellen Laplace-Operator \diamond ergibt sich:

$$\diamond\vec{A} - \text{grad div } \vec{A} = j\omega\varepsilon_0\varepsilon_r \text{grad } \varphi - \beta^2\vec{A} \quad (2.39)$$

Gl. (2.39) enthält sowohl das skalare Potential φ als auch das Vektorpotential \vec{A} . Mittels der sog. Lorentz-Eichung kann φ eliminiert werden [45]. Hierzu wird

$$-\text{grad div } \vec{A} = j\omega\varepsilon_0\varepsilon_r \text{grad } \varphi \quad (2.40)$$

³In der Literatur wird öfters auch $\text{rot } \vec{A} = \vec{B}$ gesetzt, vgl. z. B. [45]. Dadurch lassen sich auch nicht-homogene Medien behandeln.

gesetzt. Dies ist zulässig, da φ ein beliebiger Skalar sein darf und für \vec{A} lediglich die Forderung besteht, dass dessen *Rotation* gleich der Magnetfeldstärke ist. Aus Gl. (2.40) folgt der Zusammenhang

$$\operatorname{div} \vec{A} = -j\omega\varepsilon_0\varepsilon_r(\varphi + \varphi_0). \quad (2.41)$$

Bei φ_0 handelt es sich dabei um ein konstantes Referenzpotential. Von besonderer Bedeutung ist jedoch, dass sich Gl. (2.39) mittels (2.40) zur Wellengleichung für das magnetische Vektorpotential vereinfachen lässt:

$$\diamond \vec{A} = -\beta^2 \vec{A} \quad (2.42)$$

Für diese Wellengleichung gilt das auf S. 7 erläuterte entsprechend, d. h. in kartesischen Koordinaten erfüllt jede Komponente von \vec{A} die skalare Helmholtzgleichung (2.27).

Analog zur beschriebenen Vorgehensweise lässt sich auch ein elektrisches Vektorpotential \vec{F} einführen. Analog zu Gl. (2.30) gilt hierfür⁴ [33]

$$-\operatorname{rot} \vec{F} = \vec{E}. \quad (2.43)$$

Die Wahl des negativen Vorzeichens steht frei und erfolgt aus Symmetriegründen. Nach der Eliminierung des skalaren *magnetischen* Potentials φ_m mittels einer entsprechenden Lorentz-Eichung ergibt sich die Wellengleichung für das elektrische Vektorpotential [33]

$$\diamond \vec{F} = -\beta^2 \vec{F}. \quad (2.44)$$

2.3.2 Berechnung der Felder \vec{E} und \vec{H} aus den Vektorpotentialen

Wird eine Feldverteilung aus \vec{E} und \vec{H} ausschließlich mit dem magnetischen Vektorpotential \vec{A} beschrieben, dann kann \vec{H} aus Gl. (2.30) gewonnen werden. Für die Berechnung von \vec{E} ist \vec{H} in das Durchflutungsgesetz (2.14) einzusetzen, d. h.

$$\vec{E} = -\frac{j}{\omega\varepsilon_0\varepsilon_r} \cdot \operatorname{rot} \vec{H} = -\frac{j}{\omega\varepsilon_0\varepsilon_r} \cdot \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A}. \quad (2.45)$$

Die zweifache Anwendung des Rotations-Operators in Gl. (2.45) führt insbesondere bei der Anwendung krummliniger Koordinatensysteme zu vergleichsweise komplizierten Ausdrücken. Es ist von Vorteil, $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A}$ durch Gl. (2.38) auszudrücken und dabei φ mittels Gl. (2.41) durch die Divergenz von \vec{A} zu ersetzen:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\frac{j}{\omega\varepsilon_0\varepsilon_r} \cdot \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} = \frac{j}{\omega\varepsilon_0\varepsilon_r} \cdot (j\omega\varepsilon_0\varepsilon_r \operatorname{grad} \varphi - \beta^2 \vec{A}) \\ &= -\operatorname{grad} \left(-\frac{\operatorname{div} \vec{A}}{j\omega\varepsilon_0\varepsilon_r} \right) - j\omega\mu_0\mu_r \vec{A} = -\frac{j}{\omega\varepsilon_0\varepsilon_r} \cdot \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A} - j\omega\mu_0\mu_r \vec{A} \end{aligned} \quad (2.46)$$

⁴In der Literatur wird öfters auch $-\operatorname{rot} \vec{F} = \vec{D}$ gesetzt, vgl. z. B. [45].

Entsprechend der vorangegangenen Betrachtung berechnet sich \vec{E} bei der ausschließlichen Beschreibung einer Feldverteilung durch das elektrische Vektorpotential \vec{F} aus Gl. (2.43) und daraus \vec{H} mit dem Induktionsgesetz (2.15) zu

$$\vec{H} = \frac{\mathbf{j}}{\omega\mu_0\mu_r} \cdot \text{rot } \vec{E} = -\frac{\mathbf{j}}{\omega\mu_0\mu_r} \cdot \text{rot rot } \vec{F}. \quad (2.47)$$

Auch hier lässt sich $\text{rot rot } \vec{F}$ durch $\text{grad div } \vec{F}$ (und einen zusätzlichen Term) ersetzen, so dass analog zu Gl. (2.46) gilt:

$$\vec{H} = -\frac{\mathbf{j}}{\omega\mu_0\mu_r} \cdot \text{grad div } \vec{F} - \mathbf{j}\omega\varepsilon_0\varepsilon_r\vec{F} \quad (2.48)$$

Sofern eine Feldverteilung mit einer Kombination aus \vec{A} und \vec{F} beschrieben wird, überlagern sich die jeweiligen Anteile für \vec{E} und \vec{H} :

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\text{rot } \vec{F} - \frac{\mathbf{j}}{\omega\varepsilon_0\varepsilon_r} \cdot \text{rot rot } \vec{A} \\ &= -\text{rot } \vec{F} - \frac{\mathbf{j}}{\omega\varepsilon_0\varepsilon_r} \cdot \text{grad div } \vec{A} - \mathbf{j}\omega\mu_0\mu_r\vec{A} \end{aligned} \quad (2.49)$$

$$\begin{aligned} \vec{H} &= \text{rot } \vec{A} - \frac{\mathbf{j}}{\omega\mu_0\mu_r} \cdot \text{rot rot } \vec{F} \\ &= \text{rot } \vec{A} - \frac{\mathbf{j}}{\omega\mu_0\mu_r} \cdot \text{grad div } \vec{F} - \mathbf{j}\omega\varepsilon_0\varepsilon_r\vec{F} \end{aligned} \quad (2.50)$$

Die Wellengleichungen (2.22) und (2.23) für \vec{E} und \vec{H} können nicht getrennt voneinander gelöst werden, weil \vec{E} und \vec{H} über die maxwellschen Gleichungen miteinander verkoppelt sind. Die Vektorpotentiale \vec{A} und \vec{F} können hingegen völlig unabhängig voneinander angenommen werden, für sie trifft das Prinzip der ungestörten Überlagerung zu. Es ist also möglich, aus einer gegebenen (Anfangs-)Feldverteilung \vec{E} und \vec{H} die Vektorpotentiale \vec{A} und \vec{F} zu bestimmen (vgl. Abschnitt 2.3.3), dann deren Wellengleichungen (2.42) und (2.44) *getrennt* voneinander zu lösen und schließlich das Ergebnis mit den Gln. (2.49) und (2.50) zurück in \vec{E} und \vec{H} zu wandeln. Sowohl \vec{A} als auch \vec{F} kann jeweils ein eigenes „existenzfähiges“ (d. h. den maxwellschen Gleichungen gehorchendes) elektromagnetisches Feld mit \vec{E} und \vec{H} repräsentieren.

2.3.3 Berechnung der Vektorpotentiale aus den Feldern \vec{E} und \vec{H} bei einem in ϕ rotationssymmetrischen Feld

Zur Berechnung der Vektorpotentiale \vec{A} und \vec{F} aus den Feldstärken \vec{E} und \vec{H} steht zunächst keine eindeutige Bestimmungsgleichung zur Verfügung. Für die Rotation in Gl. (2.30) und (2.43) existiert kein einfacher „Umkehroperator“, und es bleibt noch festzulegen, wie vorhandene Feldstärken \vec{E} und \vec{H} auf die Vektorpotentiale \vec{A} und \vec{F} aufzuteilen sind.

Nach Gl. (2.49) kann eine gegebene Feldstärke (im Folgenden die „Wirkung“) \vec{E} von \vec{A} oder \vec{F} allein oder von beiden gemeinsam verursacht sein. Um von der Wirkung auf die einzelnen Ursachen schließen zu können, ist es von Vorteil, wenn *eine* Wirkung nur *eine* Ursache hat, d. h. wenn z. B. eine Komponente von \vec{E} ausschließlich von \vec{A} , nicht aber von \vec{F} abhängt. In diesem Fall wäre eine einfache Bestimmungsgleichung für \vec{A} zu erhoffen, ohne dass \vec{F} mit einbezogen werden müsste. Dieses Ziel ist erreicht, wenn *eine* Komponente der von \vec{F} erzeugten Feldstärke \vec{E} grundsätzlich Null ist, d. h. wenn z. B. in kartesischen Koordinaten gilt:

$$\vec{E} = -\text{rot } \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \\ \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.51)$$

Gl. (2.51) ist erfüllt, wenn gilt:

$$F_x = F_y = 0 \quad (2.52)$$

Ein elektrisches Vektorpotential \vec{F} , das nur eine z-Komponente aufweist, erzeugt also in jedem Fall ein elektromagnetisches Feld mit $E_z = 0$. Dieses Feld wird „transversal elektrisch (TE) bzgl. z“ genannt. Dementsprechend erzeugt ein magnetisches Vektorpotential \vec{A} mit $A_x = A_y = 0$ ein elektromagnetisches Feld mit $H_z = 0$, das als „transversal magnetisch (TM) bzgl. z“ bezeichnet wird.

Im Folgenden soll betrachtet werden, welches elektromagnetische Feld von einem elektrischen Vektorpotential bewirkt wird, das nur eine einzige von Null verschiedene Komponente aufweist und somit ein TE-Feld bezüglich dieser Komponente erzeugt. In [33] wird \vec{E} und \vec{H} für den TE- (und auch den analogen TM-) Fall in verschiedenen Koordinatensystemen angegeben.

Hier soll ein Spezialfall behandelt werden. Entsprechend dem späteren Anwendungsfall für die zweidimensionale Analyse von Linsenantennen mit der PE-Methode kommen als Vorstufe zu den nachfolgend verwendeten Strahlenkoordinaten zunächst Kugelkoordinaten mit einer Rotationssymmetrie in ϕ (quasi Polarkoordinaten r, θ) zur Anwendung. Eine Begründung für die Wahl des Sonderfalls „Rotationssymmetrie in ϕ “ ist in Anhang G (S. 147) zu finden. Der Zusammenhang zwischen dreidimensionalen Kugelkoordinaten und kartesischen Koordinaten ist in Anhang A.1 (S. 133) aufgeführt. Wenn das zweidimensionale Polarkoordinatensystem in der x-z-Ebene angenommen wird, gilt

$$x = r \sin \theta \quad (2.53)$$

$$z = r \cos \theta \quad (2.54)$$

und wegen der Rotationssymmetrie in ϕ

$$\frac{\partial}{\partial \phi} = 0. \quad (2.55)$$

Elektromagnetisches Feld TE bzgl. ϕ

Um ein elektromagnetisches Feld zu erzeugen, das die Eigenschaft „TE bzgl. ϕ “ (also keine Komponente E_ϕ) aufweist, soll ein elektrisches Vektorpotential \vec{F} mit lediglich einer ϕ -Komponente F_ϕ verwendet werden. Zur Abkürzung wird F_ϕ mit ψ bezeichnet. Bei ψ handelt es sich nicht etwa um das skalare Potential φ , wie es in Abschnitt 2.3.1 für die Lorentz-Eichung verwendet wurde, sondern um eine Komponente des elektrischen Vektorpotentials:

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} F_r \\ F_\theta \\ F_\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \psi \end{pmatrix} \quad (2.56)$$

Für das magnetische Vektorpotential gelte hingegen

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.57)$$

Mit den Gln. (2.49) und (2.50) ergibt sich daraus für den TE-Fall unter Berücksichtigung von $\partial/\partial\phi = 0$ und der Divergenz bzw. Rotation in Kugelkoordinaten (vgl. Anhang A.2):

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_r \\ E_\theta \\ E_\phi \end{pmatrix} = -\text{rot} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \cdot \psi) \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot \psi) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.58)$$

$$\begin{aligned} \vec{H} &= \begin{pmatrix} H_r \\ H_\theta \\ H_\phi \end{pmatrix} = -\frac{j}{\omega \mu_0 \mu_r} \cdot \text{grad div} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \psi \end{pmatrix} - j\omega \varepsilon_0 \varepsilon_r \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \psi \end{pmatrix} \\ &= -\frac{j}{\omega \mu_0 \mu_r} \cdot \text{grad} \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \psi \right) - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ j\omega \varepsilon_0 \varepsilon_r \psi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -j\omega \varepsilon_0 \varepsilon_r \psi \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.59)$$

Mit Gl. (2.59) lässt sich $\psi = F_\phi$ direkt aus H_ϕ berechnen, ψ und H_ϕ sind proportional zueinander. Der einfache Zusammenhang zwischen ψ und H_ϕ kommt nur durch die Annahme der Rotationssymmetrie ($\partial/\partial\phi = 0$) zustande.

Elektromagnetisches Feld TM bzgl. ϕ

Hinsichtlich des TM-Falls bzgl. ϕ wird angenommen, dass für das elektrische Vektorpotential $\vec{F} = 0$ gilt und das magnetische Vektorpotential \vec{A} lediglich eine ϕ -Komponente

aufweist. Diese werde mit ψ_m abgekürzt:

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \psi_m \end{pmatrix} \quad (2.60)$$

Durch Einsetzen von $\vec{A} = \hat{\phi} \cdot \psi_m$ und $\vec{F} = 0$ in die Gln. (2.49) und (2.50) ergibt sich unter Berücksichtigung der Rotationssymmetrie ($\partial/\partial\phi = 0$) für den TM-Fall bzgl. ϕ :

$$\begin{aligned} \vec{E} = \begin{pmatrix} E_r \\ E_\theta \\ E_\phi \end{pmatrix} &= -\frac{j}{\omega\epsilon_0\epsilon_r} \cdot \text{grad div} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \psi_m \end{pmatrix} - j\omega\mu_0\mu_r \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \psi_m \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -j\omega\mu_0\mu_r\psi_m \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.61)$$

$$\vec{H} = \begin{pmatrix} H_r \\ H_\theta \\ H_\phi \end{pmatrix} = \text{rot } \vec{A} = \text{rot} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \psi_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \cdot \psi_m) \\ -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot \psi_m) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.62)$$

ψ_m ist somit proportional zu E_ϕ und lässt sich entsprechend leicht bestimmen.

Beliebiges Feld als Überlagerung von TE- und TM-Fall bzgl. ϕ

Ein beliebiges rotationssymmetrisches Feld in ϕ (d.h. $\partial/\partial\phi = 0$) kann als Überlagerung eines TE- und eines TM-Feldes gesehen werden [33]. Die Addition von Gl. (2.58) und (2.61) sowie (2.59) und (2.62) ergibt:

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_r \\ E_\theta \\ E_\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \cdot \psi) \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot \psi) \\ -j\omega\mu_0\mu_r\psi_m \end{pmatrix} \quad (2.63)$$

$$\vec{H} = \begin{pmatrix} H_r \\ H_\theta \\ H_\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \cdot \psi_m) \\ -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot \psi_m) \\ -j\omega\epsilon_0\epsilon_r\psi \end{pmatrix} \quad (2.64)$$

Ausgehend von einem beliebigen in ϕ rotationssymmetrischen Anfangsfeld, das durch die Feldstärken \vec{E} und \vec{H} gegeben ist, kann ψ_m aus E_ϕ und ψ aus H_ϕ berechnet werden. Nun lassen sich die Wellengleichungen für $\psi_m = A_\phi$ und $\psi = F_\phi$ *getrennt* lösen. Dies kann z. B. mit der Methode der Parabolischen Gleichung erfolgen und das Ergebnis mit den Gln. (2.63) und (2.64) in \vec{E} und \vec{H} zurück gewandelt werden.

Eine solche Vorgehensweise setzt voraus, dass die TE- und TM-Feldanteile nicht (z. B. durch das Vorhandensein von Strukturen, die als Modenwandler wirken) miteinander verkoppelt sind. Bei rotationssymmetrischen Streukörpern und rotationssymmetrischen Feldern ist ein Übergang zwischen dem TE- und dem TM-Fall aufgrund der Stetigkeitsbedingung für die tangentialen Feldstärken jedoch ausgeschlossen; vgl. hierzu die Brechung oder Reflexion eines geometrisch-optischen Strahls, die stets in der Einfallsebene erfolgt.

Kapitel 3

Strahlenkoordinaten

Die Anwendung der Methode der Parabolischen Gleichung setzt voraus, dass das verwendete Koordinatensystem hinreichend gut an die tatsächliche Ausbreitungsrichtung der (in diesem Fall elektromagnetischen) Welle angepasst ist, vgl. Abschnitt 4.2.4. Dabei sollte die eine Schar von Koordinatenlinien mit dem lokal herrschenden Poynting-Vektor (vgl. Abschnitt 6.4) und die andere Schar mit den senkrecht dazu verlaufenden Phasenfronten übereinstimmen. Um beliebige Linsenformen analysieren zu können, wird die Anwendung orthogonaler Strahlenkoordinaten vorgeschlagen. Die nachfolgende Betrachtung beschränkt sich aufs Zweidimensionale.

Kartesische Koordinaten und Polarkoordinaten sind Spezialfälle von orthogonalen Strahlenkoordinaten. Zu deren Veranschaulichung wird die Form der jeweils auftretenden Koordinatenlinien hergeleitet. In kartesischen Koordinaten (x, z) lässt sich beispielsweise mit

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x_0 \\ z \end{pmatrix}, \quad x_0 = \text{const.}, \quad z \in \mathcal{R} \quad (3.1)$$

eine Gerade beschreiben, die parallel zur z -Achse verläuft. In Polarkoordinaten ergeben sich durch

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} r_0 \\ \theta \end{pmatrix}, \quad r_0 = \text{const.}, \quad r_0 > 0, \quad \theta \in [0, \pi] \quad (3.2)$$

Halbkreise um den Ursprung $r = 0$. In Strahlenkoordinaten (ξ, s) kann die durch

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} \xi_0 \\ s \end{pmatrix}, \quad \xi_0 = \text{const.}, \quad s \in [s_{\min}, s_{\max}] \quad (3.3)$$

gegebene Kurve beliebig geformt sein, also zum Beispiel genau der Linie entsprechen, von der eine PE-Rechnung ausgehen soll. Abb. 3.1 zeigt einen Punkt P mit den Strahlenkoordinaten (ξ_1, s_1) . s kann als Bogenlänge ausgehend vom Punkt $s = 0$ für $\xi = 0$ gesehen werden, allerdings muss der Krümmungsradius ρ dieses Bogens nicht konstant sein (dann hätte man den Spezialfall eines Polarkoordinatensystems), sondern er ist i. Allg. selbst eine Funktion von s .

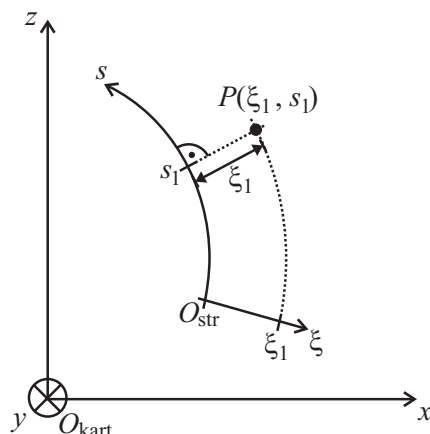


Abbildung 3.1: Zweidimensionales Strahlenkoordinatensystem, das in der Ebene der kartesischen Koordinate $y = 0$ liegt.

3.1 Zusammenhang zwischen Strahlenkoordinaten und kartesischen Koordinaten

Das Strahlenkoordinatensystem sei für die nachfolgende Betrachtung durch die Linie $\xi = 0$, d. h. durch die Menge aller Punkte

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} \xi_0 \\ s \end{pmatrix}, \quad \xi_0 = 0, \quad s \in [s_{\min}, s_{\max}] \quad (3.4)$$

festgelegt. Es liege bzgl. kartesischer Koordinaten in der Ebene $y = 0$. Für jeden Wert s haben die zugehörigen Punkte auf der krummlinigen s -Achse die kartesischen Koordinaten

$$x = x(s) \quad (3.5)$$

$$z = z(s). \quad (3.6)$$

Ausgehend von der krummlinigen s -Koordinatenachse verläuft die ξ -Richtung senkrecht. Zur Bestimmung der kartesischen Koordinaten des Punktes $P(\xi_1, s_1)$ in Abb. 3.2 muss der (auf die Länge eins normierte) Normalenvektor \hat{n} bekannt sein. Die Bestimmung erfolgt anhand des (ebenfalls auf die Länge eins normierten) Tangentenvektors \hat{t} im Punkt $A(\xi = 0, s_1) = A(x(s_1), z(s_1))$. Es gilt:

$$\hat{t} = \frac{1}{\sqrt{dx^2 + dz^2}} \begin{pmatrix} dx \\ dz \end{pmatrix} = \frac{1}{ds} \begin{pmatrix} dx \\ dz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{dx}{ds} \\ \frac{dz}{ds} \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

Da \hat{n} und \hat{t} senkrecht aufeinander stehen, verschwindet deren Skalarprodukt und es gilt:

$$\hat{n} = \begin{pmatrix} \pm \frac{dz}{ds} \\ \mp \frac{dx}{ds} \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

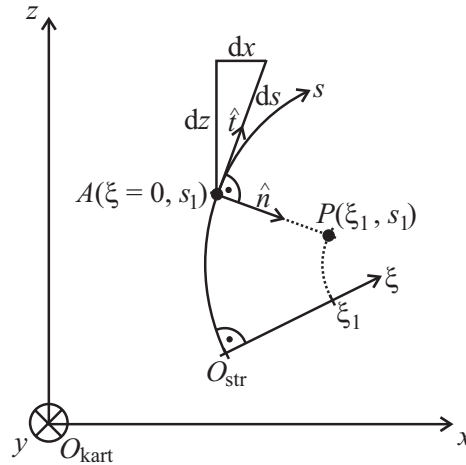


Abbildung 3.2: Zusammenhang zwischen Strahlenkoordinaten und kartesischen Koordinaten

Entsprechend

$$\hat{n} = \hat{y} \times \hat{t} \quad (3.9)$$

wird hinsichtlich der Vorzeichen

$$\hat{n} = \begin{pmatrix} +\frac{dz}{ds} \\ -\frac{dx}{ds} \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

gewählt. Für die kartesischen Koordinaten des Punkts $P(x_1(\xi_1, s_1), z_1(\xi_1, s_1))$ gilt somit:

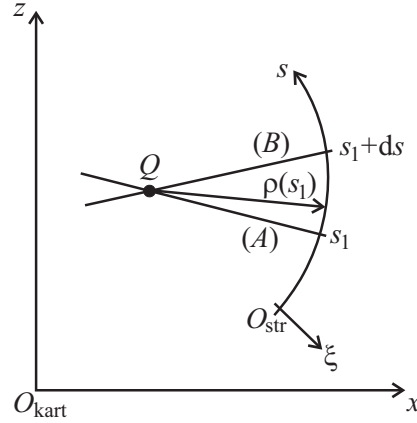
$$x_1 = x(s_1) + \frac{dz}{ds}(s_1) \cdot \xi_1 = x(s_1) + z'(s_1) \cdot \xi_1 \quad (3.11)$$

$$z_1 = z(s_1) - \frac{dx}{ds}(s_1) \cdot \xi_1 = z(s_1) - x'(s_1) \cdot \xi_1 \quad (3.12)$$

3.2 Krümmungsradius

Der Krümmungsradius ρ der Linie $\xi = 0$ spielt im Folgenden eine wichtige Rolle. Er ist i. Allg. von s abhängig. Zur Unterscheidung, ob die Linie $\xi = 0$ im betrachteten Punkt konkav oder konvex ist, soll ρ auch negative Werte annehmen können. Abb. 3.3 zeigt den Schnittpunkt Q der Geraden (A) und (B) als Mittelpunkt des Krümmungskreises der Linie $\xi = 0$ an der Stelle $s = s_1$. Der Richtungsvektor von (A) und (B) entspricht dem Normalenvektor \hat{n} am jeweiligen Schnittpunkt mit der Linie $\xi = 0$. Der Normalenvektor ist in Gl. (3.10) gegeben. Für die Punkte auf den beiden Geraden, die durch die Ortsvektoren \vec{a} und \vec{b} in kartesischen Koordinaten erreicht werden, gilt:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} x(s_1) \\ z(s_1) \end{pmatrix} + a \cdot \begin{pmatrix} \frac{dz}{ds}(s_1) \\ -\frac{dx}{ds}(s_1) \end{pmatrix}, \quad a \in \mathcal{R} \quad (3.13)$$

Abbildung 3.3: Zur Bestimmung des Krümmungsradius $\rho(s)$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} x(s_1 + ds) \\ z(s_1 + ds) \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} \frac{dz}{ds}(s_1 + ds) \\ -\frac{dx}{ds}(s_1 + ds) \end{pmatrix}, b \in \mathcal{R} \quad (3.14)$$

Im Schnittpunkt Q beider Geraden gilt bei hinreichend kleinem ds

$$a \approx b \approx -\rho(s) \quad (3.15)$$

und daher sowohl

$$x(s_1) - \rho(s) \cdot \frac{dz}{ds}(s_1) = x(s_1 + ds) - \rho(s) \cdot \frac{dz}{ds}(s_1 + ds) \quad (3.16)$$

als auch

$$z(s_1) + \rho(s) \cdot \frac{dx}{ds}(s_1) = z(s_1 + ds) + \rho(s) \cdot \frac{dx}{ds}(s_1 + ds) \quad (3.17)$$

Gl. (3.16) kann nach $\rho(s)$ aufgelöst werden:

$$\rho(s) = -\frac{x(s_1 + ds) - x(s_1)}{\frac{dz}{ds}(s_1) - \frac{dz}{ds}(s_1 + ds)} = -\frac{\frac{dx}{ds}(s_1)}{-\frac{d^2z}{ds^2}(s_1)} = \frac{x'(s_1)}{z''(s_1)} \quad (3.18)$$

Alternativ ergibt sich aus Gl. (3.17):

$$\rho(s) = \frac{z(s_1 + ds) - z(s_1)}{\frac{dx}{ds}(s_1) - \frac{dx}{ds}(s_1 + ds)} = \frac{\frac{dz}{ds}(s_1)}{-\frac{d^2x}{ds^2}(s_1)} = -\frac{z'(s_1)}{x''(s_1)} \quad (3.19)$$

Liegt der Punkt Q entsprechend Abb. 3.3 links¹ von der Linie $\xi = 0$, so gilt $\rho(s) > 0$. Liegt Q auf der rechten Seite, so gilt $\rho(s) < 0$. Das Vorzeichen des Krümmungsradius wird beibehalten, damit später ohne Fallunterscheidung durch einfache Addition des Werts ξ der Krümmungsradius einer Linie $\xi = \text{const.}$ in Abhängigkeit von s im Strahlenkoordinatensystem bestimmt werden kann.

¹genauer gesagt: Es gilt $\rho(s) > 0$, wenn Q auf der Seite der Linie $\xi = 0$ liegt, von der die Normalenvektoren $\hat{n}(s)$ weg weisen.

3.3 Vektoroperatoren in Strahlenkoordinaten

Zur Herleitung der Parabolischen Wellengleichung aus der Wellengleichung (2.42) für das magnetische oder (2.44) für das elektrische Vektorpotential werden der vektorielle Laplace-Operator \diamond und hierfür nach Gl. (2.20) die Vektoroperatoren grad, div und rot in Strahlenkoordinaten benötigt. Für die Vektoranalysis müssen die zweidimensionalen Strahlenkoordinaten aus Abschnitt 3.1 um eine dritte Dimension ergänzt werden. Da später Rotationssymmetrie bezüglich dieser Dimension angenommen wird, bietet sich dafür der von Zylinder- und Kugelkoordinaten her bekannte Azimutwinkel ϕ an. Durch Drehung des in der Ebene $y = 0$ liegenden 2D-Strahlenkoordinatensystems um die z-Achse um den Winkel ϕ kann (bei geeigneter Wahl der Linie $\xi = 0$) jeder Punkt $P(\xi_1, s_1, \phi_1)$ im dreidimensionalen Raum erreicht werden. In kartesischen Koordinaten habe P die Koordinaten x_1, y_1 und z_1 . Aus Gl. (3.11) folgt:

$$x_1 = (x(s_1) + z'(s_1) \cdot \xi_1) \cdot \cos \phi_1 \quad (3.20)$$

$$y_1 = (x(s_1) + z'(s_1) \cdot \xi_1) \cdot \sin \phi_1 \quad (3.21)$$

Für z_1 gilt unverändert Gl. (3.12):

$$z_1 = z(s_1) - x'(s_1) \cdot \xi_1$$

Für eine möglichst anschauliche Ableitung der Vektoroperatoren in Strahlenkoordinaten soll im Folgenden der in Abb. 3.4 dargestellte Zusammenhang zwischen kartesischen Koordinaten und Strahlenkoordinaten verwendet werden. Dabei wird angenommen, dass für jeden Punkt auf der Linie $\xi = 0$ der Krümmungsradius $\rho(s)$ sowie die (zweidimensionalen kartesischen) Koordinaten des Schnittpunkts $Q(x_0, z_0)$ bekannt sind. $\rho(s)$ lässt sich mit Gl. (3.18) oder (3.19) bestimmen, die Koordinaten von Q ergeben sich durch Einsetzen von $\rho(s)$ in Gl. (3.13) oder (3.14) unter Berücksichtigung von Gl. (3.15).

Eine wichtige Annahme zur Vereinfachung der in den Vektoroperatoren enthaltenen Ableitungen besteht darin, dass sowohl $\rho(s)$ als auch die (zweidimensionalen) Koordinaten von $Q(x_0, z_0)$ in der unmittelbaren Umgebung des Punktes $A(\xi = 0, s = s_1, \phi_1 = 0)$ näherungsweise konstant, also von s unabhängig sind. In diesem Fall verhalten sie sich bezüglich der Ableitung nach s als Konstanten. Für hinreichend kleine Auslenkungen ds um A ist diese Annahme gerechtfertigt und es gilt für die kartesischen (dreidimensionalen) Koordinaten des Punktes $P(x, y, z)$ unter Einbeziehung des Azimutwinkels ϕ :

$$s = s_1 + ds \quad (3.22)$$

$$x(\xi, s, \phi) = \left[x_0(s_1) + (\rho(s_1) + \xi) \cdot \sin \left(\theta_1 - \frac{s - s_1}{\rho(s_1)} \right) \right] \cdot \cos \phi \quad (3.23)$$

$$y(\xi, s, \phi) = \left[x_0(s_1) + (\rho(s_1) + \xi) \cdot \sin \left(\theta_1 - \frac{s - s_1}{\rho(s_1)} \right) \right] \cdot \sin \phi \quad (3.24)$$

$$z(\xi, s) = z_0(s_1) + (\rho(s_1) + \xi) \cdot \cos \left(\theta_1 - \frac{s - s_1}{\rho(s_1)} \right) \quad (3.25)$$

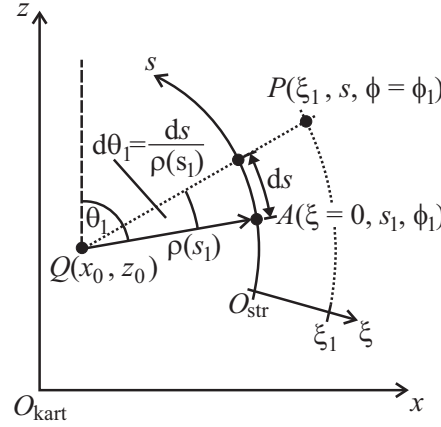


Abbildung 3.4: Zusammenhang zwischen kartesischen Koordinaten und Kugelkoordinaten für die Ableitung der Vektoroperatoren. In dieser Abbildung liegt das 2D-Strahlenkoordinatensystem in der Ebene $y = 0$, d. h. $\phi = \phi_1 = 0$.

Bei θ_1 handelt es sich um den Winkel des Normalenvektors in Punkt A gegenüber der kartesischen z -Achse. Mit Hilfe von dx , dz und ds in Abb. 3.2 ist ersichtlich, dass gilt:

$$\theta_1 = \frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{dx}{ds}(s_1) = \frac{\pi}{2} + \arcsin x'(s_1) \quad (3.26)$$

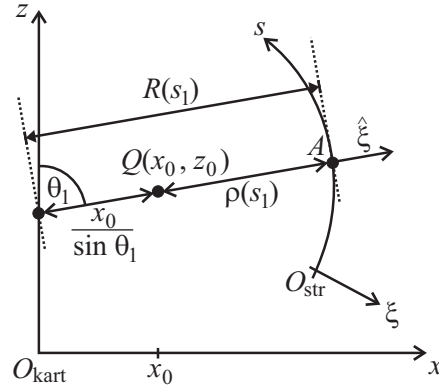
$$= \frac{\pi}{2} + \arccos \frac{dz}{ds}(s_1) = \frac{\pi}{2} + \arccos z'(s_1) \quad (3.27)$$

Für die Ableitung der Vektoroperatoren wird ein lokales kartesisches Koordinatensystem in dem Punkt benötigt, in dem die Operatoren anzuwenden sind [45]. In der unmittelbaren Umgebung dieses Punktes stimmt das krummlinige orthogonale Koordinatensystem mit dem lokalen kartesischen Koordinatensystem überein. Letzteres wird durch Tangentenvektoren an die ggf. gekrümmten Koordinatenlinien gebildet. Diese Vektoren bestehen aus kartesischen Koordinaten und sind nicht auf eins normiert. In zweidimensionalen Strahlenkoordinaten mit einer zusätzlichen dritten Dimension (dem Azimutwinkel) ϕ ergibt sich für die Tangentenvektoren \vec{t}_ξ , \vec{t}_s und \vec{t}_ϕ im Punkt P

$$\vec{t}_\xi = \begin{pmatrix} \frac{\partial x(\xi, s, \phi)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial y(\xi, s, \phi)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial z(\xi, s)}{\partial \xi} \end{pmatrix}, \quad \vec{t}_s = \begin{pmatrix} \frac{\partial x(\xi, s, \phi)}{\partial s} \\ \frac{\partial y(\xi, s, \phi)}{\partial s} \\ \frac{\partial z(\xi, s)}{\partial s} \end{pmatrix}, \quad \vec{t}_\phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial x(\xi, s, \phi)}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y(\xi, s, \phi)}{\partial \phi} \\ \frac{\partial z(\xi, s)}{\partial \phi} \end{pmatrix} \quad (3.28)$$

und mit Gl. (3.23) bis (3.25) unter Berücksichtigung von

$$\sin \left(\theta_1 - \frac{s - s_1}{\rho(s_1)} \right) \approx \sin \theta_1 \quad \text{für} \quad ds = s - s_1 \rightarrow 0 \quad (3.29)$$

Abbildung 3.5: Zur Bedeutung von R

für die Vektoren und deren Beträge

$$\vec{t}_\xi = \begin{pmatrix} \sin \theta_1 \cdot \cos \phi \\ \sin \theta_1 \cdot \sin \phi \\ \cos \theta_1 \end{pmatrix}, \quad |\vec{t}_\xi| = t_\xi = 1, \quad (3.30)$$

$$\vec{t}_s = \begin{pmatrix} -\frac{\rho(s_1) + \xi}{\rho(s_1)} \cdot \cos \theta_1 \cdot \cos \phi \\ -\frac{\rho(s_1) + \xi}{\rho(s_1)} \cdot \cos \theta_1 \cdot \sin \phi \\ \frac{\rho(s_1) + \xi}{\rho(s_1)} \cdot \sin \theta_1 \end{pmatrix}, \quad |\vec{t}_s| = t_s = \left| \frac{\rho(s_1) + \xi}{\rho(s_1)} \right|, \quad (3.31)$$

$$\vec{t}_\phi = \begin{pmatrix} -[x_0(s_1) + (\rho(s_1) + \xi) \cdot \sin \theta_1] \cdot \sin \phi \\ [x_0(s_1) + (\rho(s_1) + \xi) \cdot \sin \theta_1] \cdot \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.32)$$

$$|\vec{t}_\phi| = t_\phi = |x_0(s_1) + (\rho(s_1) + \xi) \cdot \sin \theta_1| = |(R(s_1) + \xi) \cdot \sin \theta_1|. \quad (3.33)$$

Dabei ist

$$R(s_1) = \frac{x_0(s_1)}{\sin \theta_1} + \rho(s_1) \quad (3.34)$$

die Entfernung des zugehörigen Punkts A auf der Linie $\xi = 0$ von der Achse der Rotationssymmetrie in (bzw. genau entgegengesetzt zur) Richtung des Normalenvektors $\hat{\xi}$, vgl. Abb. 3.4 und 3.5.

Im Bereich $s = s_1 + ds$ gilt $s_1 \approx s$ für $ds \rightarrow 0$, so dass für die Berechnung von t_s und t_ϕ s_1 durch s ersetzt werden kann. Bezüglich einer Ableitung von t_s und t_ϕ nach s wird s_1 (und damit auch alle von s_1 abgängigen Größen) jedoch als Konstante betrachtet.

3.3.1 Gradient eines in ϕ rotationssymmetrischen Skalars

Aus dem Ausdruck für $\text{grad } u$ in [45] für allgemeine krummlinige, orthogonale Koordinatensysteme und den Gln. (3.30) bis (3.33) folgt für eine in ϕ rotationssymmetrische

skalare Funktion wegen $\partial/\partial\phi = 0$:

$$\text{grad } u = \begin{pmatrix} (\text{grad } u)_\xi \\ (\text{grad } u)_s \\ (\text{grad } u)_\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{t_\xi} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{1}{t_s} \frac{\partial u}{\partial s} \\ \frac{1}{t_\phi} \frac{\partial u}{\partial \phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \left| \frac{\rho(s_1)}{\rho(s_1) + \xi} \right| \frac{\partial u}{\partial s} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.35)$$

3.3.2 Divergenz eines in ϕ rotationssymmetrischen Vektorfeldes

Für die Divergenz eines in Strahlenkoordinaten (ξ, s) gegebenen und in ϕ rotationssymmetrischen Vektorfeldes ergibt sich anhand der allgemeinen Form in [45] mit $\partial/\partial\phi = 0$:

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{v} = \text{div} \begin{pmatrix} v_\xi \\ v_s \\ v_\phi \end{pmatrix} &= \frac{1}{t_\xi t_s t_\phi} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} (v_\xi t_s t_\phi) + \frac{\partial}{\partial s} (v_s t_\xi t_\phi) + \frac{\partial}{\partial \phi} (v_\phi t_\xi t_s) \right) \\ &= \frac{1}{t_\xi t_s t_\phi} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} (v_\xi t_s t_\phi) + \frac{\partial}{\partial s} (v_s t_\xi t_\phi) \right) \end{aligned} \quad (3.36)$$

Insbesondere verschwindet die Divergenz eines Vektorfeldes, das nur eine ϕ -Komponente aufweist, beim gleichzeitigen Vorliegen einer Rotationssymmetrie in ϕ völlig:

$$\text{div} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v_\phi \end{pmatrix} = 0 \quad (3.37)$$

3.3.3 Rotation eines in ϕ rotationssymmetrischen Vektorfeldes

Mit der allgemeinen Form für krummlinige orthogonale Koordinaten aus [45] folgt für zweidimensionale Strahlenkoordinaten (ξ, s) mit einer zusätzlichen Dimension (dem Azimutwinkel) ϕ :

$$\text{rot } \vec{v} = \text{rot} \begin{pmatrix} v_\xi \\ v_s \\ v_\phi \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{t_s t_\phi} \left(\frac{\partial}{\partial s} (v_\phi t_\phi) - \frac{\partial}{\partial \phi} (v_s t_s) \right) \\ \frac{1}{t_\xi t_\phi} \left(\frac{\partial}{\partial \phi} (v_\xi t_\xi) - \frac{\partial}{\partial \xi} (v_\phi t_\phi) \right) \\ \frac{1}{t_\xi t_s} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} (v_s t_s) - \frac{\partial}{\partial s} (v_\xi t_\xi) \right) \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

Für Rotationssymmetrie in ϕ (d. h. $\partial/\partial\phi = 0$) und mit $t_\xi = 1$ (vgl. (3.30)) ergibt sich:

$$\text{rot } \vec{v} = \text{rot} \begin{pmatrix} v_\xi \\ v_s \\ v_\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{t_s t_\phi} \frac{\partial}{\partial s} (v_\phi t_\phi) \\ -\frac{1}{t_\phi} \frac{\partial}{\partial \xi} (v_\phi t_\phi) \\ \frac{1}{t_s} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} (v_s t_s) - \frac{\partial}{\partial s} (v_\xi) \right) \end{pmatrix} \quad (3.39)$$

Die Beträge t_s und t_ϕ können den Gln. (3.31) und (3.33) entnommen werden.

3.4 Wellengleichung in Strahlenkoordinaten

In Gl. (2.42) und (2.44) ist die Wellengleichung für das elektrische und magnetische Vektorpotential gegeben. Im Gegensatz zu kartesischen Koordinaten, bei denen der vektorielle Laplace-Operator \diamond einer komponentenweisen Anwendung des skalaren Laplace-Operators Δ entspricht (vgl. S. 7), ist bei krummlinigen orthogonalen Koordinatensystemen die Definitionsgleichung für \diamond (2.20) zu verwenden.

Es wird eine bezüglich ϕ rotationssymmetrische elektromagnetische Feldverteilung vorausgesetzt. Wie bei der Betrachtung in Kugelkoordinaten in Abschnitt 2.3.3 soll das gesamte Feld i. Allg. aus der Summe eines TM- und eines TE-Feldes bezüglich ϕ dargestellt werden. Aus den Gln. (2.30) und (2.43) folgt, dass der TE- bzw. TM-Fall bzgl. ϕ genau dann sichergestellt werden kann, wenn die ϕ -Komponente der Rotation in Gl. (3.39) verschwindet. Dies ist allgemein der Fall, wenn der Operand der Rotation \vec{v} *ausschließlich* eine ϕ -Komponente aufweist (d. h. v_ξ und v_s verschwinden).

Entsprechend Gl. (2.56) wird für den TE-Fall bzgl. ϕ angenommen, dass das elektrische Vektorpotential lediglich eine ϕ -Komponente aufweist:

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} F_\xi \\ F_s \\ F_\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \psi \end{pmatrix} \quad (3.40)$$

Gl. (3.40) in (2.44) eingesetzt ergibt mit (2.20):

$$\diamond \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \psi \end{pmatrix} = \text{grad div} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \psi \end{pmatrix} - \text{rot rot} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \psi \end{pmatrix} = -\beta^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \psi \end{pmatrix} \quad (3.41)$$

Wegen der Rotationssymmetrie verschwindet gemäß Gl. (3.37) die Divergenz, so dass sich die Wellengleichung folgendermaßen vereinfacht:

$$\text{rot rot} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \psi \end{pmatrix} = \beta^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \psi \end{pmatrix} \quad (3.42)$$

Die Ausführung der durch Gl. (3.39) für rotationssymmetrische Felder gegebenen Rotation in Strahlenkoordinaten ergibt:

$$\begin{aligned} \beta^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \psi \end{pmatrix} &= \text{rot rot} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \psi \end{pmatrix} = \text{rot} \begin{bmatrix} \frac{1}{t_s t_\phi} \frac{\partial}{\partial s} (\psi t_\phi) \\ -\frac{1}{t_\phi} \frac{\partial}{\partial \xi} (\psi t_\phi) \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{t_s} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(-\frac{t_s}{t_\phi} \frac{\partial}{\partial \xi} (\psi t_\phi) \right) - \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{t_s t_\phi} \frac{\partial}{\partial s} (\psi t_\phi) \right) \right] \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.43)$$

Damit lautet die skalare Wellengleichung für ψ :

$$\frac{1}{t_s} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{t_s}{t_\phi} \frac{\partial}{\partial \xi} (\psi t_\phi) \right) + \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{t_s t_\phi} \frac{\partial}{\partial s} (\psi t_\phi) \right) \right] = -\beta^2 \psi \quad (3.44)$$

Gl. (3.44) gilt für rotationssymmetrische Felder in ϕ . t_s und t_ϕ sind in Gl. (3.31) bzw. (3.33) gegeben. Sie sind i. Allg. selbst von ξ und s abhängig und müssen daher mit abgeleitet werden. Wird anstelle des elektrischen Vektorpotentials ein magnetisches Vektorpotential \vec{A} angenommen, das ausschließlich eine ϕ -Komponente $A_\phi = \psi_m$ aufweist, so ergibt sich durch Einsetzen von $\vec{A} = \hat{\phi} \cdot A_\phi$ in Gl. (2.44) dieselbe Wellengleichung; in Gl. (3.44) ist lediglich ψ durch ψ_m zu ersetzen.

3.5 Zusammenhang zwischen den Skalaren ψ , ψ_m und den Feldstärken \vec{E} , \vec{H} bei Rotationssymmetrie in ϕ

Bei den Skalaren ψ und ψ_m handelt es sich um die ϕ -Komponente des elektrischen bzw. magnetischen Vektorpotentials, für die jeweils die Wellengleichung (3.44) aufgestellt werden kann. Die PE-Berechnung wird anhand ψ bzw. ψ_m durchgeführt. Die Schnittstelle zu anderen Berechnungsverfahren sowie die Vergleichsgröße bei der Nachbildung realer Anordnungen ist die elektrische und die magnetische Feldstärke. Insofern sind vor der Anwendung von PE ψ und/oder ψ_m aus den Feldstärken und anschließend umgekehrt die Feldstärken aus ψ und ψ_m zu berechnen.

Gegeben sei das elektrische und magnetische Vektorpotential \vec{F} und \vec{A} in Strahlenkoordinaten mit jeweils ausschließlich einer ϕ -Komponente ψ und ψ_m gemäß Gl. (3.40). Die Feldstärken \vec{E} und \vec{H} ergeben sich aus den Gln. (2.49) und (2.50):

$$\vec{E} = -\text{rot} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \psi \end{pmatrix} - \frac{j}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_r} \cdot \text{grad div} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \psi_m \end{pmatrix} - j\omega \mu_0 \mu_r \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \psi_m \end{pmatrix} \quad (3.45)$$

$$\vec{H} = \text{rot} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \psi_m \end{pmatrix} - \frac{j}{\omega \mu_0 \mu_r} \cdot \text{grad div} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \psi \end{pmatrix} - j\omega \varepsilon_0 \varepsilon_r \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \psi \end{pmatrix} \quad (3.46)$$

Nach Gl. (3.37) verschwindet die Divergenz für ein Vektorfeld, das lediglich eine ϕ -Komponente sowie Rotationssymmetrie bzgl. ϕ aufweist. Mit dem Rotationsoperator aus Gl. (3.39) folgt:

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_\xi \\ E_s \\ E_\phi \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{1}{t_s t_\phi} \frac{\partial}{\partial s} (\psi t_\phi) \\ -\frac{1}{t_\phi} \frac{\partial}{\partial \xi} (\psi t_\phi) \\ 0 \end{pmatrix} - j\omega \mu_0 \mu_r \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \psi_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{t_s t_\phi} \frac{\partial}{\partial s} (\psi t_\phi) \\ \frac{1}{t_\phi} \frac{\partial}{\partial \xi} (\psi t_\phi) \\ -j\omega \mu_0 \mu_r \psi_m \end{pmatrix} \quad (3.47)$$

$$\vec{H} = \begin{pmatrix} H_\xi \\ H_s \\ H_\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{t_s t_\phi} \frac{\partial}{\partial s} (\psi_m t_\phi) \\ -\frac{1}{t_\phi} \frac{\partial}{\partial \xi} (\psi_m t_\phi) \\ 0 \end{pmatrix} - j\omega \varepsilon_0 \varepsilon_r \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{t_s t_\phi} \frac{\partial}{\partial s} (\psi_m t_\phi) \\ -\frac{1}{t_\phi} \frac{\partial}{\partial \xi} (\psi_m t_\phi) \\ -j\omega \varepsilon_0 \varepsilon_r \psi \end{pmatrix} \quad (3.48)$$

Wie beim elektromagnetischen Feld in Kugelkoordinaten (vgl. Abschnitt 2.3.3) können somit bei Rotationssymmetrie in ϕ die Größen ψ und ψ_m direkt aus H_ϕ bzw. E_ϕ berechnet werden. ψ repräsentiert den Feldanteil TE bzgl. ϕ , ψ_m den Anteil TM bzgl. ϕ .

Kapitel 4

Die Methode der Parabolischen Gleichung (PE)

4.1 Elliptische Wellengleichung als Ausgangspunkt

Der Ausgangspunkt für die Herleitung der parabolischen Wellengleichung in Strahlenkoordinaten ist die elliptische Wellengleichung (3.44) in Strahlenkoordinaten für die mittels ψ abgekürzte ϕ -Komponente des elektrischen Vektorpotentials \vec{F} .

Zur besseren Veranschaulichung soll jedoch zunächst eine zweidimensionale Wellengleichung in kartesischen Koordinaten betrachtet werden. Aus Gl. (2.27) folgt mit Gl. (2.25) und der Annahme $\partial/\partial y = 0$:¹

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\psi + \beta^2\psi = 0 \\ \text{oder} & \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \beta^2 \right) \psi = 0 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Bei der Helmholtz-Gleichung (4.1) handelt es sich um eine elliptische² Differentialgleichung [7].

Das Ziel bei der Analyse dielektrischer Streukörper mittels der Methode der Parabolischen Gleichung besteht darin, die Wellengleichung ausgehend von einer Anfangswert-Verteilung von ψ , die auf einer Fläche (z. B. Apertur) gegeben ist, unter Berücksichtigung von Randbedingungen zu lösen. Die elliptische Wellengleichung (4.1) kann nicht direkt dazu verwendet werden. Ist zum Beispiel die Größe ψ in einer Apertur als Anfangswert bekannt³, so kann Gl. (4.1) keinen Aufschluss darüber geben, in welche der beiden (senk-

¹D. h., das zugrunde liegende elektromagnetische Feld ist in y -Richtung unendlich ausgedehnt und nicht von y abhängig. Es könnte z. B. von einer Linienquelle erzeugt sein, die parallel zur y -Achse verläuft.

²Die Wellengleichung für nicht in der Zeit harmonische Schwingungen beinhaltet anstelle β^2 die zweifache Ableitung nach der Zeit $-(1/c^2) \cdot (\partial^2/\partial t^2)$. Durch die unterschiedlichen Vorzeichen der Ableitung nach dem Ort und der Zeit wäre jene Differentialgleichung somit als *hyperbolisch* zu klassifizieren.

³Vgl. beispielsweise den Zusammenhang von ψ und H_ϕ in Gl. (3.48).

recht zur Apertur liegenden) Richtungen sie strahlt. Tatsächlich kann eine Apertur in beide Richtungen strahlen (z. B. bei einer planaren Schlitzantenne ohne Kavität, oder sie wird von einer Welle durchdrungen (z. B. bei der Apertur des offenen Hohlleiters). Die Information über das $\partial\psi/\partial r$ müsste mit als Anfangswert eingehen.

So wird die elliptische Wellengleichung (4.1) in erster Linie verwendet, um stationäre Zustände zu beschreiben [7], d. h. um Randwertprobleme zu lösen, z. B. die möglichen Feldkonfigurationen (Moden) im Innern von Hohlleitern [45].

Der Übergang zur Parabolischen Gleichung verschafft der Wellengleichung (4.1) die nötige Richtungsinformation, um sie effizient für Anfangswertprobleme einzusetzen.

4.2 Herleitung der Standard-PE (SPE)

Für die Herleitung der Parabolischen Gleichung ist das A-priori-Wissen erforderlich, in welche ungefähre Richtung die Wellenausbreitung erfolgt. Das Koordinatensystem wird so gewählt, dass sich die elektromagnetische Welle vorzugsweise in eine Koordinatenrichtung ausbreitet, d. h. in Kugel- oder Polarkoordinaten gewöhnlich in r-Richtung, in Strahlenkoordinaten (vgl. Kapitel 3) in ξ -Richtung und in kartesischen Koordinaten z. B. in x-Richtung.

In dieser Arbeit ist die Wellenzahl β bei einer PE-Rechnung abschnittsweise konstant, so dass auf die Einführung einer Referenzwellenzahl β_0 verzichtet werden kann.

Die Bezeichnung „Standard-PE“ erfolgt in Anlehnung an [47] und steht im Gegensatz zur Weitwinkel-PE, die in Abschnitt 4.3 behandelt wird.

4.2.1 Abspaltung des Phasenterms $e^{-j\beta x}$

Zunächst soll angenommen werden, dass die Ortsabhängigkeit der komplexen Amplitude in Ausbreitungsrichtung (hier die x-Richtung) hauptsächlich durch den Phasenterm $e^{-j\beta x}$ verursacht wird [48]. Schreibt man ψ als Produkt einer Funktion Ψ und des Phasenterms, d. h.

$$\psi = \Psi \cdot e^{-j\beta x}, \quad (4.2)$$

so ist Ψ bedeutend schwächer von x abhängig als ψ . Im Fall einer ebenen Welle, die sich in x-Richtung ausbreitet, ist Ψ sogar konstant. Stimmen die tatsächliche und die angenommene Ausbreitungsrichtung exakt überein, stellt Ψ die (komplexe) Amplitude von ψ dar. Wird Gl. (4.2) in (4.1) eingesetzt, können die Ableitungen nach x ausgeführt werden:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \beta^2 \right) (\Psi \cdot e^{-j\beta x}) = 0 \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \cdot e^{-j\beta x} - j\beta \Psi \cdot e^{-j\beta x} \right) + \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \beta^2 \right) (\Psi \cdot e^{-j\beta x}) = 0 \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \cdot e^{-j\beta x} - 2j\beta \frac{\partial \Psi}{\partial x} \cdot e^{-j\beta x} - \beta^2 \Psi \cdot e^{-j\beta x} + \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \beta^2 \right) (\Psi \cdot e^{-j\beta x}) = 0 \quad (4.5)$$

Da sich $e^{-j\beta x}$ bzgl. der Ableitung nach z als Konstante verhält, kann Gl. (4.5) durch den Phasenterm dividiert werden. Es bleibt:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - 2j\beta \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = 0 \quad (4.6)$$

Gl. (4.6) ist eine exakte Form der Wellengleichung (4.1). Noch wurde nicht vorausgesetzt, dass sich die Welle *tatsächlich* in x -Richtung ausbreitet. Für die Ableitung der PE aus Gl. (4.6) gibt es zwei unterschiedliche Methoden: Eine anschauliche, bei der die zweifache Ableitung nach x vernachlässigt wird, und eine zweite, bei der Gl. (4.6) faktorisiert und der dabei entstehende Wurzeloperator, der auf einen Differentialoperator anzuwenden ist, approximiert wird.

4.2.2 PE durch Vernachlässigung von $\partial^2 \Psi / \partial x^2$

Falls sich Ψ tatsächlich (wie vorausgesetzt) nur schwach mit x ändert, d. h. für

$$\left| \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right| \ll \beta \cdot |\Psi| \quad (4.7)$$

und

$$\left| \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \right| \ll \beta \cdot \left| \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right|, \quad (4.8)$$

kann $\partial^2 \Psi / \partial x^2$ in Gl. (4.6) vernachlässigt werden und es resultiert die Parabolische Gleichung

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = -\frac{j}{2\beta} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2}. \quad (4.9)$$

Dabei handelt es sich um eine parabolische Differentialgleichung [7]. Sie ähnelt der (eindimensionalen) Diffusionsgleichung für die Wärmeleitung in einem Stab [58]

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad (4.10)$$

allerdings ist die Diffusionskonstante D in Gl. (4.10) reell und bei der zugehörigen parabolischen Wellengleichung (4.9) mit $D = (2j\beta)^{-1}$ imaginär.

4.2.3 Alternative: Faktorisierung und Approximation des Wurzeloperators

Eine andere Möglichkeit, die Parabolische Gleichung abzuleiten, besteht darin, den Ausdruck

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - 2j\beta \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2}$$

in Gl. (4.6) als Produkt zweier Faktoren zu schreiben [47]. Damit gilt für Ψ :

$$\left[\left[\frac{\partial}{\partial x} - j\beta \left(1 - \sqrt{1 + \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2}} \right) \right] \cdot \left[\frac{\partial}{\partial x} - j\beta \left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2}} \right) \right] \right] \Psi = 0 \quad (4.11)$$

Gl. (4.11) ist erfüllt, wenn zumindest einer der Faktoren Null wird, also z. B.

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} - j\beta \left(1 - \sqrt{1 + \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2}} \right) \right] \Psi = 0. \quad (4.12)$$

Der Wurzeloperator lässt sich auf die zweifache Ableitung nach z nicht direkt anwenden. Mit der Näherung

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2} \quad \text{für } |x| \ll 1 \quad (4.13)$$

ergibt sich aus Gl. (4.12) die Parabolische Gleichung (4.9):

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} - j\beta \left(1 - 1 - \frac{1}{2\beta^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \right] \Psi = \left[\frac{\partial}{\partial x} + \frac{j}{2\beta} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \Psi = 0.$$

Das bedeutet, dass die Vorgehensweise in Abschnitt 4.2.2 (d. h. die Vernachlässigung der zweifachen Ableitung nach x) der Approximation des Wurzeloperators nach Gl. (4.13) entspricht. Die Approximation nach Gl. (4.13) war zunächst aus Gründen der Einfachheit naheliegend. Sofern sie sich nicht als hinreichend genau erweist, kann eine genauere Approximation verwendet werden, dies führt zur sog. Weitwinkel-PE, vgl. Abschnitt 4.3.

4.2.4 Gültigkeit der Näherung

Es stellt sich die Frage, inwieweit die Forderungen (4.7) und (4.8) in der Praxis erfüllt werden. Es sei angenommen, dass sich der Beobachter auf der x -Achse befindet, das Feld von einer (rundstrahlenden) Linienquelle im Ursprung des zweidimensionalen kartesischen Koordinatensystems erzeugt wird und die Ausbreitung entlang der x -Achse tatsächlich in x -Richtung erfolgt. Im Fernfeld⁴ fällt die Amplitude mit dem Faktor $1/\sqrt{x}$. Ausgehend von einem Wert Ψ_0 beim Abstand $x = x_0$ gilt:

$$|\Psi| = |\Psi_0| \cdot \sqrt{\frac{x_0}{x}} \quad (4.14)$$

$$\left| \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right| = \frac{1}{2} |\Psi_0| \cdot \sqrt{\frac{x_0}{x^3}} \quad (4.15)$$

$$\left| \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \right| = \frac{3}{4} |\Psi_0| \cdot \sqrt{\frac{x_0}{x^5}} \quad (4.16)$$

$$(4.17)$$

Die Forderung (4.7) bedeutet somit

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} \ll \beta = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (4.18)$$

⁴Eine Nahfeldbetrachtung unter Einbeziehung nicht-rundstrahlender Linienquellen erfolgt in Abschnitt 4.8.1 (S. 61).

Aus (4.8) folgt

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{x} \ll \beta = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad (4.19)$$

so dass gelten muss:

$$x \gg \frac{3}{2} \cdot \frac{\lambda}{2\pi} = 0,24 \lambda \quad (4.20)$$

Bei einer Punktquelle im dreidimensionalen Raum steht in Gl. (4.20) anstelle des Faktors $3/2$ der Faktor 2. Es wird deutlich, dass zumindest für den Fernfeld-Fall schon ab recht kleinen Entfernungen von der Quelle die Amplitudenabnahme im Lauf der Wellenausbreitung nicht mehr für die Gültigkeit der PE relevant ist.

Weitaus wichtiger ist die Frage, inwieweit die PE gültig ist, wenn die Ausbreitung nicht genau in die vorgesehene Richtung erfolgt. Dazu sei angenommen, dass gilt:

$$\frac{\partial|\psi|}{\partial x} \approx 0 \quad (4.21)$$

Die Ausbreitung erfolge in Wirklichkeit nicht — wie durch die Festlegung der für die Lösung der PE erforderlichen Ausbreitungswege parallel zur x-Achse quasi angenommen — in x-Richtung, sondern im Elevationswinkel θ' zur x-Achse, d. h.

$$\psi = \Psi_0 \cdot \exp\left(-j\beta \frac{x}{\cos \theta'}\right). \quad (4.22)$$

Aus Gl. (4.2) folgt

$$\Psi = \Psi_0 \cdot \exp\left[j\beta x \left(1 - \frac{1}{\cos \theta'}\right)\right]. \quad (4.23)$$

Die Beträge in Gl. (4.7) und (4.8) lauten:

$$|\Psi| = |\Psi_0| \quad (4.24)$$

$$\left|\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right| = \beta \left|1 - \frac{1}{\cos \theta'}\right| \cdot |\Psi_0| \quad (4.25)$$

$$\left|\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}\right| = \beta^2 \left|1 - \frac{1}{\cos \theta'}\right|^2 \cdot |\Psi_0| \quad (4.26)$$

Aus Gl. (4.7) oder (4.8) folgt

$$\left|1 - \frac{1}{\cos \theta'}\right| \ll 1, \text{ d. h.} \quad (4.27)$$

$$|\theta'| \ll \frac{\pi}{3} \hat{=} 60^\circ. \quad (4.28)$$

Wie streng Ungleichung (4.28) einzuhalten ist, wird in der Literatur unterschiedlich beurteilt. Die Angaben für die zulässige Obergrenze für θ' bewegen sich im Bereich von 10° [43] bis 15° [46].

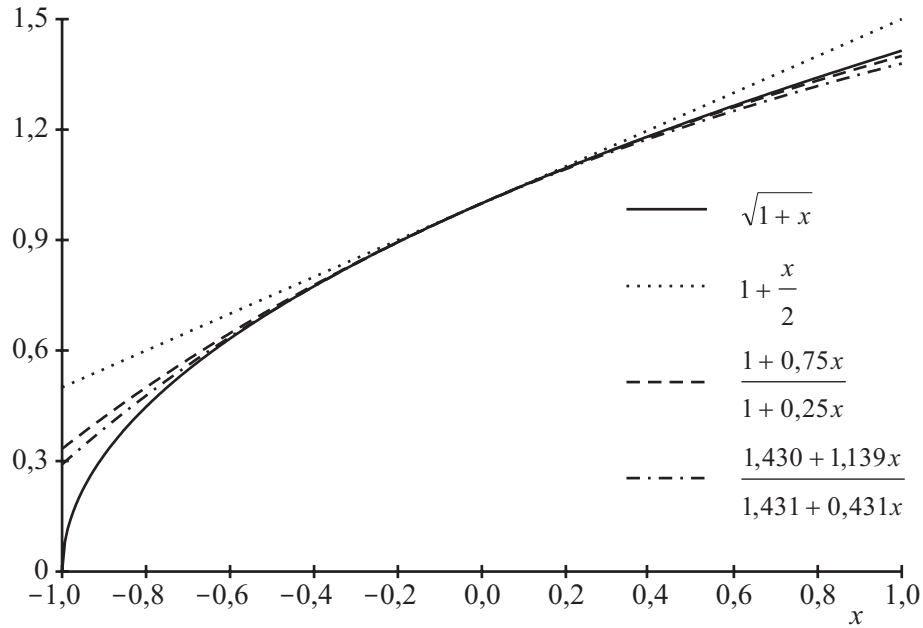


Abbildung 4.1: Gültigkeitsbereich der Näherungen $1 + x/2$, $(1 + 0,75x)/(1 + 0,25x)$ [12] und $(1,430 + 1,139x)/(1,431 + 0,431x)$ [28] für $\sqrt{1+x}$ am Beispiel $x \in \mathcal{R}$

4.3 Weitwinkel-PE (WWPE)

In Abschnitt 4.2.3 wurde gezeigt, dass die Herleitung der Parabolischen Gleichung (4.9) die Approximation des Wurzeloperators nach Gl. (4.13) beinhaltet. Nach Abschnitt 4.2.4 ist vor allem die Wellenausbreitung abseits der angenommenen Ausbreitungsrichtung dafür verantwortlich, dass Vorgaben für die Gültigkeit von Näherungen verletzt werden. Daher liegt es nahe, die Approximation des Wurzeloperators zu verbessern, um größere Abweichungen zwischen der angenommenen und tatsächlichen Ausbreitungsrichtung zuzulassen. Claerbout führte hierzu die Approximation mittels einer gebrochen rationalen Funktion ein [12]:

$$\sqrt{1+x} \approx \frac{1 + \frac{3}{4}x}{1 + \frac{1}{4}x} \quad \text{für } |x| \ll 1 \quad (4.29)$$

Dabei handelt es sich um eine Padé-Approximation. Abb. 4.1 zeigt den im Vergleich zu Näherung (4.13) deutlich vergrößerten Gültigkeitsbereich von (4.29) am Beispiel von reellen Zahlen.

Mit der Näherung (4.29) ergibt sich für die Wellengleichung (4.12)

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} - j\beta \left(1 - \frac{1 + \frac{3}{4} \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2}}{1 + \frac{1}{4} \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2}} \right) \right] \Psi = 0 \quad (4.30)$$

bzw. vereinfacht:

$$\left(1 + \frac{1}{4\beta^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \frac{\partial \Psi}{\partial x} = -\frac{j}{2\beta} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \quad (4.31)$$

Im Gegensatz zur Standard-PE (4.9) ist in Gl. (4.31) auch $\partial \Psi / \partial x$ zweifach nach z abzuleiten. Dies lässt sich jedoch problemlos im Finite-Differenzen-Schema zur numerischen Lösung der PE umsetzen (vgl. [47] sowie Abschnitt 4.5.1). In [43] wird gezeigt, dass sich so die zulässige Abweichung der tatsächlichen von der angenommenen Ausbreitungsrichtung — unter Zugrundelegung derselben Fehlertoleranz — von 10° auf 23° steigern lässt. Häufig wird die maximal zulässige Abweichung sogar mit 45° [8, 46, 47] angegeben und Gl. (4.31) als „ 45° -Gleichung“ bezeichnet. In [28] wird die rationale Funktion zur Approximation des Wurzeloperators so gewählt, dass die maximale Abweichung gegenüber der Wurzelfunktion im Intervall⁵ $x = (0, 1 - \cos^2 \theta')$ minimiert ist. Je nach der zu erwartenden Abweichung θ' zwischen der angenommenen und tatsächlichen Ausbreitungsrichtung ergeben sich dadurch geringfügig unterschiedliche Approximationen für den Wurzeloperator, für $\theta' = 40^\circ$ verwendet Greene

$$\sqrt{1+x} \approx \frac{1,430 + 1,139x}{1,431 + 0,431x} \quad (4.32)$$

Im maßgeblichen Bereich $-1 \leq x \leq 1$ (vgl. Abb. 4.1) stimmen Greenes und Claerbouts Approximation nahezu überein; wie in der allgemeinen PE-Literatur wird auch in [28] die maximal zulässige Abweichung θ' lediglich mit 40° angegeben, so dass im Folgenden im Zusammenhang mit der Weitwinkel-PE ausschließlich Näherung (4.29) verwendet wird. Bei Verwendung des Fourier-Split-Step-Algorithmus (vgl. Abschnitt 4.7.1) lässt sich die zulässige Abweichung zwischen der angenommenen und tatsächlichen Ausbreitungsrichtung unter bestimmten Voraussetzungen auf annähernd 90° erhöhen [18]; dies soll aber nicht Gegenstand der weiteren Betrachtung sein.

4.4 Parabolische Gleichung in Strahlenkoordinaten

Ausgangspunkt für die Herleitung der PE in Strahlenkoordinaten ist die Wellengleichung (3.44) für die ϕ -Komponente des elektrischen oder magnetischen Vektorpotentials ψ bzw. ψ_m , vgl. hierzu Kapitel 3.

4.4.1 Standard-PE in Strahlenkoordinaten

Entsprechend der in Abschnitt 4.2.1 und 4.2.2 beschriebenen Vorgehensweise wird

$$\psi = \Psi \cdot e^{-j\beta\xi} \quad (4.33)$$

⁵D. h. das Argument der Wurzelfunktion liegt im Intervall $(\cos^2 \theta', 1)$

in die Wellengleichung (3.44) eingesetzt. Der Term in der Wellengleichung mit den Ableitungen nach ξ dividiert durch $e^{-j\beta\xi}$ werde mit X abgekürzt:

$$X = \frac{1}{t_s} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{t_s}{t_\phi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(t_\phi \Psi \cdot e^{-j\beta\xi} \right) \right] e^{-j\beta\xi} \quad (4.34)$$

t_s und t_ϕ sind dabei i. Allg. von ξ abhängig (vgl. (3.31) und (3.33)) und müssen mit abgeleitet werden. Die Ausführung der Ableitungen ergibt

$$X = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} \cdot (O_1 + O_2 - 2j\beta) + \Psi \cdot \left[O_3 - j\beta \frac{1}{t_s} \frac{\partial t_s}{\partial \xi} + \left(O_4 - \frac{j\beta}{t_\phi} \right) \frac{\partial t_\phi}{\partial \xi} - \beta^2 \right] \quad (4.35)$$

mit

$$O_1 = \frac{1}{t_s} \frac{\partial t_s}{\partial \xi}, \quad O_2 = \frac{1}{t_\phi} \frac{\partial t_\phi}{\partial \xi}, \quad O_3 = \frac{1}{t_\phi} \frac{\partial^2 t_\phi}{\partial \xi^2} \quad \text{und} \quad O_4 = \frac{1}{t_s} \frac{\partial^2 t_s}{\partial \xi^2}.$$

Unter der Voraussetzung, dass in der unmittelbaren Umgebung eines durch Strahlenkoordinaten gegebenen Punktes der zugehörige Krümmungsradius ρ und der Mittelpunkt des Krümmungskreises Q näherungsweise konstant ist (vgl. Abschnitt 3.3), ist dort t_s und t_ϕ lediglich von ξ und s abhängig. Das Einsetzen der Gln. (3.31) und (3.33) in die Ausdrücke für O_1 bis O_4 ergibt:

$$O_1 = \frac{1}{\rho + \xi} \quad (4.36)$$

$$O_2 = \frac{\sin \theta_1}{x_0 + (\rho + \xi) \sin \theta_1} = \frac{1}{R + \xi} \quad (4.37)$$

$$O_3 = 0 \quad (4.38)$$

$$O_4 = \frac{R - \rho}{(\rho + \xi)(R + \xi)^2 \sin \theta_1} \quad (4.39)$$

Zur Bedeutung von R vgl. Abb. 3.5 auf S. 23. Es gilt:

$$|O_1| \ll 2\beta \quad \text{für} \quad |\rho + \xi| \gg \frac{\lambda}{4\pi} \quad (4.40)$$

$$|O_2| \ll 2\beta \quad \text{für} \quad |R + \xi| \gg \frac{\lambda}{4\pi} \quad (4.41)$$

$$|O_4| \ll \frac{\beta}{t_\phi} \quad \text{für} \quad \left| \frac{1}{\rho + \xi} - \frac{1}{R + \xi} \right| \ll \beta \quad (4.42)$$

O_1 und O_2 sind demnach vernachlässigbar, wenn der betrachtete Punkt weiter als ca. eine Wellenlänge sowohl vom Mittelpunkt des Krümmungskreises als auch in (oder genau entgegengesetzt zur) $\hat{\xi}$ -Richtung von der z-Achse als Achse der Rotationssymmetrie entfernt liegt. Dies stellt keine nennenswerte Einschränkung dar, da die PE in der Umgebung des Schnittpunkts zweier angenommener Ausbreitungswege ohnehin nicht anwendbar ist (vgl. Abschnitt 4.8.2).

O_4 ist vernachlässigbar, wenn sowohl $|\rho + \xi|^{-1}$ als auch $|R + \xi|^{-1}$ wesentlich kleiner als β ist. Diese Forderung ist durch die Bedingungen für die Vernachlässigbarkeit von O_1 und O_2 bereits erfüllt.

Schließlich wird in Gl. (4.35) der Term $\partial^2\Psi/\partial\xi^2$ — entsprechend der Herleitung der SPE in Abschnitt 4.2.2 — unter den Voraussetzungen⁶ (4.7) und (4.8) vernachlässigt, so dass gilt:

$$X \approx -2j\beta \frac{\partial\Psi}{\partial\xi} - \left[j\beta \left(\frac{1}{t_s} \frac{\partial t_s}{\partial\xi} + \frac{1}{t_\phi} \frac{\partial t_\phi}{\partial\xi} \right) + \beta^2 \right] \Psi \quad (4.43)$$

Somit folgt aus den Gln. (3.44), (4.33), (4.34) und (4.43) die (Standard-) PE in Strahlenkoordinaten für rotationssymmetrische Felder in ϕ :

$$\frac{\partial\Psi}{\partial\xi} = -\frac{j}{2\beta} \frac{1}{t_s} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{t_s t_\phi} \frac{\partial}{\partial s} (\Psi t_\phi) \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{t_s} \frac{\partial t_s}{\partial\xi} + \frac{1}{t_\phi} \frac{\partial t_\phi}{\partial\xi} \right) \Psi \quad (4.44)$$

Der Term in Gl. (4.44)

$$-\frac{1}{2} \left(\frac{1}{t_s} \frac{\partial t_s}{\partial\xi} + \frac{1}{t_\phi} \frac{\partial t_\phi}{\partial\xi} \right) \Psi$$

beschreibt die von der Wellenlänge unabhängige (auch bei GO-Berechnungen zu berücksichtigende) Amplitudenänderung durch die Konvergenz oder Divergenz der Strahlen bzw. angenommenen Ausbreitungswege, bei denen es sich um Geraden mit $s = \text{const.}$ handelt.

4.4.2 Weitwinkel-PE in Strahlenkoordinaten

Auch in Strahlenkoordinaten lässt sich eine Weitwinkel-PE⁷ angeben. Hierzu werden zwar in Gl. (4.35) die Terme O_1 bis O_4 vernachlässigt, die zweifache Ableitung nach ξ wird jedoch zunächst beibehalten. Daraus folgt als Näherung für die Wellengleichung mit abgespaltem Ausbreitungsterm

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial\xi^2} - 2j\beta \frac{\partial\Psi}{\partial\xi} + \frac{1}{t_s} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{t_s t_\phi} \frac{\partial}{\partial s} (\Psi t_\phi) \right) - j\beta \left(\frac{1}{t_s} \frac{\partial t_s}{\partial\xi} + \frac{1}{t_\phi} \frac{\partial t_\phi}{\partial\xi} \right) \Psi = 0 \quad (4.45)$$

oder

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} - 2j\beta \frac{\partial}{\partial\xi} + A \right] \Psi = 0 \quad (4.46)$$

mit

$$A\Psi = \frac{1}{t_s} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{t_s t_\phi} \frac{\partial}{\partial s} (\Psi t_\phi) \right) - j\beta \left(\frac{1}{t_s} \frac{\partial t_s}{\partial\xi} + \frac{1}{t_\phi} \frac{\partial t_\phi}{\partial\xi} \right) \Psi. \quad (4.47)$$

Gl. (4.46) kann wie in Abschnitt 4.2.3 beschrieben als Produkt zweier Faktoren geschrieben werden:

$$\left[\left[\frac{\partial}{\partial\xi} - j\beta \left(1 - \sqrt{1 + \frac{A}{\beta^2}} \right) \right] \cdot \left[\frac{\partial}{\partial\xi} - j\beta \left(1 + \sqrt{1 + \frac{A}{\beta^2}} \right) \right] \right] \Psi = 0 \quad (4.48)$$

Laut [47] gilt diese Faktorisierung lediglich dann exakt, wenn A nicht von ξ abhängt. Da t_s und t_ϕ gemäß den Gln. (3.31) und (3.33) eine Funktion von ξ darstellen, ist Gl. (4.48) genau genommen nur als Näherung zu verstehen. In [47] tritt diese Problematik durch einen von x abhängigen Brechungsindex auf.

⁶Dabei ist x sinngemäß durch ξ zu ersetzen.

⁷PE, bei der die maximale Abweichung zwischen der angenommenen und tatsächlichen Ausbreitungsrichtung der Welle maximal 45° betragen darf, vgl. Abschnitt 4.3.

Gl. (4.48) ist erfüllt, wenn einer der Faktoren Null wird; aus

$$\left[\frac{\partial}{\partial \xi} - j\beta \left(1 - \sqrt{1 + \frac{A}{\beta^2}} \right) \right] \Psi = 0 \quad (4.49)$$

folgt mit der Näherung (4.13) die Standard-PE (4.44). Die Claerbout-Approximation (4.29) führt zur Weitwinkel-PE in Strahlenkoordinaten:

$$\left(1 + \frac{A}{4\beta^2} \right) \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} = -\frac{j}{2\beta} A \Psi \quad (4.50)$$

Gegenüber der Standard-PE (4.44) ist in Gl. (4.50) auf der linken Seite der Term $A/(4\beta^2)$ hinzugekommen; die Anwendung von A auf $\partial\Psi/\partial\xi$ lässt sich auch in Strahlenkoordinaten ins Finite-Differenzen-Schema integrieren, vgl. Abschnitt 4.5.2.

4.5 Lösung der Parabolischen Gleichung mit Finiten Differenzen (FD)

4.5.1 FD-Algorithmus für kartesische Koordinaten

Die prinzipielle Funktionsweise des Finite-Differenzen-Verfahrens wird zunächst aus Gründen der Anschaulichkeit in kartesischen Koordinaten gezeigt. In Abschnitt 4.5.2 erfolgt der Übergang zu Strahlenkoordinaten.

Im Gegensatz zur elliptischen Wellengleichung (4.1) kann die parabolische Wellengleichung (4.9) ausgehend von einer auf einer Linie $x = \text{const.}$ ⁸ gegebenen Anfangsverteilung von Ψ eindeutig gelöst werden. Beim Finite-Differenzen-Verfahren wird $\Delta\Psi/\Delta x \approx \partial\Psi/\partial x$ aus der zweifachen Ableitung nach z berechnet, vgl. (4.9). $\Psi + \Delta\Psi$ entspricht dem „neuen“ Ψ an der Stelle $x + \Delta x$. So wird im Laufe der Rechnung Ψ Schritt für Schritt in Richtung der (angenommenen) Wellenausbreitung berechnet. Für die Rechnung an sich braucht nur die Verteilung von Ψ an der letzten Stelle x bekannt zu sein, so dass Ψ nicht im gesamten Raum, sondern nur auf den angenommenen Phasenfronten $x = \text{const.}$ vorgehalten werden muss. Dies führt zu einer erheblichen Einsparung an Speicherplatz gegenüber asymptotisch exakten Methoden.

Der allgemeine Finite-Differenzen-Algorithmus zur Lösung einer parabolischen Differentialgleichung ist in z. B. in [58] beschrieben.

In diesem Abschnitt werde zunächst davon ausgegangen, dass die Gitterweiten Δx und Δz konstant sind. Bei Verwendung von Strahlenkoordinaten und bei Anfangswerten, die *nicht* auf einer Linie $x = \text{const.}$ gegeben sind, kommen variable Gitterweiten zum Einsatz, vgl. Abschnitt 4.5.2 und 6.6. Für die Betrachtung in kartesischen Koordinaten gelte folgende

⁸Sind die Anfangswerte auf einer Linie $x \neq \text{const.}$ gegeben, so kommt das Verfahren mit Becken und Flanken in Betracht, vgl. Abschnitt 6.6.

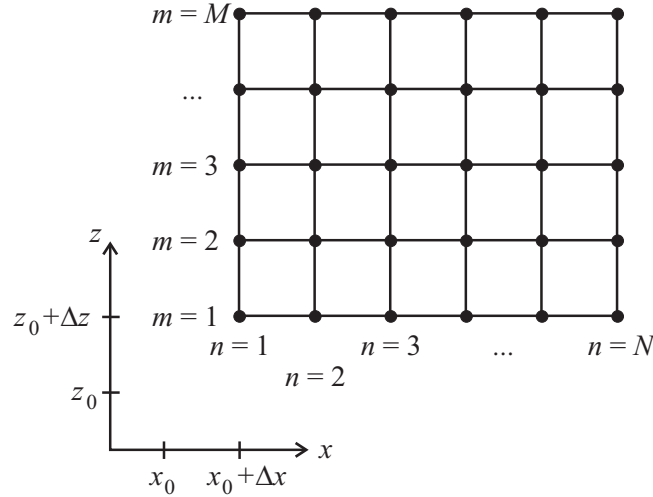


Abbildung 4.2: $N \times M$ -Gitter zur Lösung der PE mit finiten Differenzen (hier: kartesische Koordinaten)

Diskretisierung:

$$x_n = x_0 + n \cdot \Delta x, \quad n \in \mathcal{Z} \quad (4.51)$$

$$z_m = z_0 + m \cdot \Delta z, \quad m \in \mathcal{Z} \quad (4.52)$$

Ein entsprechendes Gitter ist in Abb. 4.2 dargestellt. Formal können n und m auch halbzahlige Werte annehmen, um Stellen zu bezeichnen, die zwischen den Gitterpunkten liegen. x_0 und z_0 sind die Koordinaten eines Referenzpunkts, der die Lage des n - m -Gitters im Raum bestimmt. $\Psi(x_n, z_m)$ werde im Folgenden mit $\Psi_{n,m}$ abgekürzt. Für die Ableitung nach x gilt zwischen den Stellen n und $n+1$, also formal an der Stelle $n+1/2$:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x}(x_{n+1/2}, z_m) = \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)_{n+1/2, m} \approx \frac{\Psi_{n+1, m} - \Psi_{n, m}}{\Delta x} \quad (4.53)$$

Zu klären ist die Frage, an welcher Stelle die in Gl. (4.9) vorkommende zweifache Ableitung nach z zu berechnen ist, an der Stelle n , $n+1$ oder dazwischen. Naheliegend ist zunächst die Berechnung an der Stelle n , da dort die Werte $\Psi_{n,m}$ bekannt sind:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right)_{n, m} &\approx \frac{\left(\frac{\partial \Psi}{\partial z} \right)_{n, m+1/2} - \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z} \right)_{n, m-1/2}}{\Delta z} \\ &\approx \frac{\frac{\Psi_{n, m+1} - \Psi_{n, m}}{\Delta z} - \frac{\Psi_{n, m} - \Psi_{n, m-1}}{\Delta z}}{\Delta z} = \frac{\Psi_{n, m+1} - 2\Psi_{n, m} + \Psi_{n, m-1}}{(\Delta z)^2} \end{aligned} \quad (4.54)$$

Diese *explizite* Berechnung der zweifachen Ableitung führt jedoch zu einer numerischen Instabilität [58]. Das *implizite* Verfahren besteht darin, die Ableitung an der Stelle $n+1$ zu

berechnen. Dort ist Ψ zwar zunächst nicht bekannt, jedoch lässt sich für die unbekanntenen $\Psi_{n+1,m}$ ein Gleichungssystem aufstellen und lösen. Das implizite Verfahren ist *unbedingt* stabil, liefert aber nicht die höchstmögliche Genauigkeit [58]. In der Praxis wird daher häufig ein (gleich gewichteter) Mittelwert aus dem impliziten und expliziten Verfahren verwendet, das sog. Crank-Nicolson-Schema [43, 44, 58]. Im Rahmen dieser Arbeit sollen beide Anteile i. Allg. unterschiedlich gewichtet werden. Mit Gl. (4.54) folgt:

$$\left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2}\right)_{n,m} \approx \frac{(\Psi_{n,m+1} - 2\Psi_{n,m} + \Psi_{n,m-1}) + v(\Psi_{n+1,m+1} - 2\Psi_{n+1,m} + \Psi_{n+1,m-1})}{(1+v) \cdot (\Delta z)^2} \quad (4.55)$$

Für $v = 1$ erfolgt die Gleichgewichtung des expliziten und impliziten Anteils und damit die Anwendung des Crank-Nicolson-Schemas. Mit $v > 1$ wird der implizite Anteil höher gewichtet, dies wird im Rahmen der vorliegenden Arbeit dazu verwendet, um ansatzweise Instabilitäten zu vermeiden, vgl. Abschnitt 7.1.5. Aus $v \rightarrow \infty$ folgt das implizite Schema. Mit Gl. (4.53) und (4.55) lautet die Standard-PE (4.9)

$$\frac{\Psi_{n+1,m} - \Psi_{n,m}}{\Delta x} = \frac{(\Psi_{n,m+1} - 2\Psi_{n,m} + \Psi_{n,m-1}) + v(\Psi_{n+1,m+1} - 2\Psi_{n+1,m} + \Psi_{n+1,m-1})}{2j\beta \cdot (1+v) \cdot (\Delta z)^2} \quad (4.56)$$

bzw.

$$-va\Psi_{n+1,m-1} + b\Psi_{n+1,m} - va\Psi_{n+1,m+1} = a\Psi_{n,m-1} + b'\Psi_{n,m} + a\Psi_{n,m+1} \quad (4.57)$$

mit

$$a = \frac{1}{2j\beta \cdot (1+v) \cdot (\Delta z)^2}, \quad b = \frac{1}{\Delta x} + \frac{v}{j\beta \cdot (1+v) \cdot (\Delta z)^2} \quad \text{und} \\ b' = \frac{1}{\Delta x} - \frac{1}{j\beta \cdot (1+v) \cdot (\Delta z)^2}. \quad (4.58)$$

Erfolgt die Berechnung in einem Gitter mit $m = 1 \dots M$, so folgt aus (4.57) das Gleichungssystem:

$$\begin{bmatrix} b & -va & 0 & 0 & 0 \\ -va & b & -va & 0 & 0 \\ 0 & -va & b & -va & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & -va & b \end{bmatrix} \cdot \vec{\Psi}_{n+1} = \begin{pmatrix} a(\Psi_{n,0} + \Psi_{n,2} + v\Psi_{n+1,0}) + b'\Psi_{n,1} \\ a(\Psi_{n,1} + \Psi_{n,3}) + b'\Psi_{n,2} \\ a(\Psi_{n,2} + \Psi_{n,4}) + b'\Psi_{n,3} \\ \vdots \\ a(\Psi_{n,M-1} + \Psi_{n,M+1} + v\Psi_{n+1,M+1}) + b'\Psi_{n,M} \end{pmatrix} \quad (4.59)$$

Dabei ist

$$\vec{\Psi}_{n+1} = \begin{pmatrix} \Psi_{n+1,1} \\ \Psi_{n+1,2} \\ \Psi_{n+1,3} \\ \vdots \\ \Psi_{n+1,M} \end{pmatrix} \quad (4.60)$$

der Lösungsvektor. Es fällt auf, dass Ψ am unteren und oberen Rand (d. h. für $m = 0$ und $m = M + 1$) sowohl an der Stelle n als auch an $n + 1$ bekannt sein muss. Dabei handelt es sich um die Randbedingungen bei der Lösung der Differentialgleichung; beim rein impliziten Schema ($v \rightarrow \infty$) genügt die Kenntnis an der Stelle $n + 1$. Beispielsweise kann $\Psi_{n,0} = \Psi_{n+1,0} = \Psi_{n,M+1} = \Psi_{n+1,M+1} = 0$ gesetzt werden, um dort das Verschwinden der skalaren Größe Ψ zu erzwingen. Die Frage der Randbedingungen wird in Abschnitt 4.6 behandelt.

Die Matrix in Gl. (4.59) ist tridiagonal, dies ermöglicht eine sehr effiziente Lösung des Gleichungssystems, ein Algorithmus ist beispielsweise in [58] gegeben.

Die Weitwinkel-PE (4.31) unterscheidet sich von der Standard-PE (4.9) durch den zusätzlichen Term

$$\frac{1}{4\beta^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

auf der linken Seite. Mit der Ableitung nach x und der zweifachen Ableitung nach z gemäß Gl. (4.53) und (4.54) folgt unter Verwendung finiter Differenzen:

$$\frac{1}{4\beta^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{\partial \Psi}{\partial x} \approx \frac{\Psi_{n+1,m+1} - \Psi_{n,m+1} - 2 \cdot (\Psi_{n+1,m} - \Psi_{n,m}) + \Psi_{n+1,m-1} - \Psi_{n,m-1}}{4\beta^2 \cdot \Delta x \cdot (\Delta z)^2} \quad (4.61)$$

Wird die rechte Seite von Gl. (4.61) zur linken Seite von Gl. (4.56) addiert, führt dies zur Weitwinkel-PE in finiten Differenzen

$$\begin{aligned} &(-va + q)\Psi_{n+1,m-1} + (b - 2q)\Psi_{n+1,m} + (-va + q)\Psi_{n+1,m+1} \\ &= (a + q)\Psi_{n,m-1} + (b' - 2q)\Psi_{n,m} + (a + q)\Psi_{n,m+1} \end{aligned} \quad (4.62)$$

mit a , b und b' nach Gl. (4.58) und

$$q = \frac{1}{4\beta^2 \Delta x (\Delta z)^2}. \quad (4.63)$$

Die $M \times M$ -Matrix $\|A\|$ im zu lösenden Gleichungssystem

$$\|A\| \cdot \vec{\Psi}_{n+1} = \vec{R} \quad (4.64)$$

mit $\vec{\Psi}_{n+1}$ nach Gl. (4.60) lautet

$$\|A\| = \begin{bmatrix} b - 2q & -va + q & 0 & 0 & 0 \\ -va + q & b - 2q & -va + q & 0 & 0 \\ 0 & -va + q & b - 2q & -va + q & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & -va + q & b - 2q \end{bmatrix} \quad (4.65)$$

und die rechte Seite

$$\vec{R} = \begin{pmatrix} (a + q)(\Psi_{n,0} + \Psi_{n,2}) + (va + q)\Psi_{n+1,0} + (b' - 2q)\Psi_{n,1} \\ (a + q)(\Psi_{n,1} + \Psi_{n,3}) + (b' - 2q)\Psi_{n,2} \\ (a + q)(\Psi_{n,2} + \Psi_{n,4}) + (b' - 2q)\Psi_{n,3} \\ \vdots \\ (a + q)(\Psi_{n,M-1} + \Psi_{n,M+1}) + (va + q)\Psi_{n+1,M+1} + (b' - 2q)\Psi_{n,M} \end{pmatrix}. \quad (4.66)$$

\vec{R} hat M Zeilen; das Potential $\Psi_{n,0}$, $\Psi_{n+1,0}$, $\Psi_{n,M+1}$ und $\Psi_{n+1,M+1}$ ist durch die Randbedingungen bekannt, vgl. Abschnitt 4.6.

In [2] wird die Weitwinkel-PE in zweidimensionalen Zylinderkoordinaten r, z mit finiten Differenzen gelöst. Da dort anstelle von $e^{-j\beta x}$ der Faktor $H_0^{(1)}(\beta x)$ ausgeklammert wird, ergibt sich durch Ersetzen von r durch x (bis auf ein Vorzeichen⁹) dieselbe um den Phasenterm bereinigte Wellengleichung wie (4.6) und daher auch dasselbe Finite-Differenzen-Schema für die Weitwinkel-PE.

4.5.2 FD-Algorithmus für Strahlenkoordinaten

Der Finite-Differenzen-Algorithmus zur Lösung der PE in Strahlenkoordinaten unterscheidet sich von demjenigen in kartesischen Koordinaten im Wesentlichen durch die Abhängigkeit der Gitterweite senkrecht zur Ausbreitungsrichtung von den Strahlenkoordinaten ξ, s und der Berücksichtigung von zusätzlichen in der Strahlenkoordinaten-PE enthaltenen Terme.

Standard-PE

Ausgangspunkt ist die Standard-PE (4.44) in Strahlenkoordinaten für rotationssymmetrische Felder in ϕ

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \xi} = -\frac{j}{2\beta} S\Psi - \Xi\Psi \quad (4.67)$$

mit

$$S\Psi = \frac{1}{t_s} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{t_s t_\phi} \frac{\partial}{\partial s} (\Psi t_\phi) \right) \quad (4.68)$$

und

$$\Xi = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{t_s} \frac{\partial t_s}{\partial \xi} + \frac{1}{t_\phi} \frac{\partial t_\phi}{\partial \xi} \right). \quad (4.69)$$

S entspricht der zweifachen Ableitung nach z in kartesischen Koordinaten. Zunächst werde — wie in Gl. (4.54) — nur die *explizite* Berechnung von $S\Psi$ aus dem (bekannten) Potential Ψ an der Stelle n betrachtet. Die erste Ableitung nach s wird formal an den Stellen $m+1/2$ und $m-1/2$ berechnet:

$$\left(\frac{\partial}{\partial s} (\Psi t_\phi) \right)_{n, m+\frac{1}{2}} \approx \frac{(\Psi t_\phi)_{n, m+1} - (\Psi t_\phi)_{n, m}}{(\Delta s)_{n, m+\frac{1}{2}}} \quad (4.70)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial s} (\Psi t_\phi) \right)_{n, m-\frac{1}{2}} \approx \frac{(\Psi t_\phi)_{n, m} - (\Psi t_\phi)_{n, m-1}}{(\Delta s)_{n, m-\frac{1}{2}}} \quad (4.71)$$

Somit gilt für $S\Psi$:

$$(S\Psi)_{n, m} \approx \frac{\frac{(\Psi t_\phi)_{n, m+1} - (\Psi t_\phi)_{n, m}}{(t_s t_\phi \cdot \Delta s)_{n, m+\frac{1}{2}}} - \frac{(\Psi t_\phi)_{n, m} - (\Psi t_\phi)_{n, m-1}}{(t_s t_\phi \cdot \Delta s)_{n, m-\frac{1}{2}}}}{(t_s \cdot \Delta s)_{n, m}} \quad (4.72)$$

⁹ $H_0^{(1)}(\beta x)$ entspricht einer einlaufenden Welle und daher (im Fernfeld) einer Ortsabhängigkeit der Phase mit $e^{+j\beta x}$.

Aus Abb. 3.4 auf S. 22 geht hervor, dass für Δs geschrieben werden kann:

$$(\Delta s)_m = |\rho_m| \cdot (\Delta\theta_1)_m \quad (4.73)$$

Der Sonderfall paralleler Strahlen wird auf S. 47 gesondert betrachtet. Zur Abkürzung werde eingeführt:

$$\eta_{n,m} = |\rho_m + \xi_n| \cdot (\Delta\theta_1)_m \quad (4.74)$$

$$\zeta_{n,m} = |(R_m + \xi_n) \cdot \sin(\theta_1)_m| \quad (4.75)$$

Die Bedeutung von θ_1 , ρ und R ist aus Abb. 3.5 auf S. 23 ersichtlich. An den Gitterpunkten lauten die Beträge der Tangentenvektoren t_s und t_ϕ mit Gl. (3.31) und (3.33):

$$(t_s)_{n,m} = \left| \frac{\rho_m + \xi_n}{\rho_m} \right| \quad (4.76)$$

$$(t_\phi)_{n,m} = |(R_m + \xi_n) \cdot \sin(\theta_1)_m| = \zeta_{n,m} \quad (4.77)$$

Aus Gl. (4.73) und (4.76) folgt

$$(t_s \Delta s)_{n,m} = |\rho_m + \xi_n| \cdot (\Delta\theta_1)_m = \eta_{n,m} \quad (4.78)$$

und schließlich

$$\begin{aligned} (S\Psi)_{n,m} &\approx \frac{\zeta_{n,m+1}}{\eta_{n,m} \cdot \eta_{n,m+\frac{1}{2}} \cdot \zeta_{n,m+\frac{1}{2}}} \Psi_{n,m+1} \\ &\quad - \frac{\zeta_{n,m}}{\eta_{n,m}} \left(\frac{1}{\eta_{n,m+\frac{1}{2}} \cdot \zeta_{n,m+\frac{1}{2}}} + \frac{1}{\eta_{n,m-\frac{1}{2}} \cdot \zeta_{n,m-\frac{1}{2}}} \right) \Psi_{n,m} \\ &\quad + \frac{\zeta_{n,m-1}}{\eta_{n,m} \cdot \eta_{n,m-\frac{1}{2}} \cdot \zeta_{n,m-\frac{1}{2}}} \Psi_{n,m-1}. \end{aligned} \quad (4.79)$$

$\eta_{n,m}$ und $\zeta_{n,m}$ ist vorab für alle n, m bekannt. Hierzu ist vor Beginn der Berechnung der zum Ausbreitungsweg m gehörende Wert $(\theta_1)_m$, ρ_m und R_m zu bestimmen. ξ_n in Gl. (4.74) und (4.75) ergibt sich bei einem äquidistanten Raster in ξ -Richtung gemäß

$$\xi_n = n \cdot \Delta\xi, \quad (4.80)$$

ansonsten bei einem variablen $\Delta\xi$ zu

$$\xi_n = \sum_{i=1}^n (\Delta\xi)_i. \quad (4.81)$$

Für das in Gl. (4.69) definierte Ξ gilt mit t_s und t_ϕ nach Gl. (3.31) und (3.33)¹⁰:

$$\Xi = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{|\rho(s) + \xi|} + \frac{1}{|R(s) + \xi|} \right) \quad (4.82)$$

¹⁰Da keine Ableitung nach s erfolgt, kann s_1 durch s ersetzt werden.

Mit den Abkürzungen

$$\gamma_{n,m} = \frac{1}{|\rho_m + \xi_n|} \quad (4.83)$$

$$\Gamma_{n,m} = \frac{1}{|R_m + \xi_n|} \quad (4.84)$$

kann geschrieben werden:

$$(\Xi\Psi)_{n,m} \approx \frac{1}{2} (\gamma_{n,m} + \Gamma_{n,m}) \Psi_{n,m} \quad (4.85)$$

Für die Finite-Differenzen-Form der Standard-PE (4.44) wird für die rechte Seite von Gl. (4.67) wie in Abschnitt 4.5.1 ein (durch den Parameter v) gewichteter Mittelwert zwischen der Stelle n (expliziter Anteil) und der Stelle $n+1$ (impliziter Anteil) angesetzt. Daraus ergibt sich die diskretisierte PE:

$$\frac{\partial\Psi}{\partial\xi} \approx \frac{\Psi_{n+1,m} - \Psi_{n,m}}{\Delta\xi_n} = -\frac{j}{2\beta \cdot (1+v)} \cdot [(S\Psi)_{n,m} + v \cdot (S\Psi)_{n+1,m} - 2j\beta ((\Xi\Psi)_{n,m} + v \cdot (\Xi\Psi)_{n+1,m})] \quad (4.86)$$

Im Gegensatz zur Gl. (4.57) in kartesischen Koordinaten sind a , b und b' von n und m abhängig, außerdem ist a an der Stelle $m-1$ und $m+1$ i. Allg. unterschiedlich, so dass sich folgende diskretisierte PE ergibt:

$$-va_{n+1,m}\Psi_{n+1,m-1} + b_{n+1,m}\Psi_{n+1,m} - vc_{n+1,m}\Psi_{n+1,m+1} = a_{n,m}\Psi_{n,m-1} + b'_{n,m}\Psi_{n,m} + c_{n,m}\Psi_{n,m+1} \quad (4.87)$$

mit

$$a_{n,m} = \frac{1}{2j\beta \cdot (1+v)} \cdot \frac{\zeta_{n,m-1}}{\eta_{n,m} \cdot \eta_{n,m-\frac{1}{2}} \cdot \zeta_{n,m-\frac{1}{2}}} \quad (4.88)$$

$$c_{n,m} = \frac{1}{2j\beta \cdot (1+v)} \cdot \frac{\zeta_{n,m+1}}{\eta_{n,m} \cdot \eta_{n,m+\frac{1}{2}} \cdot \zeta_{n,m+\frac{1}{2}}} \quad (4.89)$$

$$b_{n,m} = \frac{1}{(\Delta\xi)_n} + \frac{v}{2j\beta \cdot (1+v)} \cdot \frac{\zeta_{n,m}}{\eta_{n,m}} \left(\frac{1}{\eta_{n,m+\frac{1}{2}} \cdot \zeta_{n,m+\frac{1}{2}}} + \frac{1}{\eta_{n,m-\frac{1}{2}} \cdot \zeta_{n,m-\frac{1}{2}}} \right) + \frac{v}{2 \cdot (1+v)} (\gamma_{n,m} + \Gamma_{n,m}) \quad (4.90)$$

$$b'_{n,m} = \frac{1}{(\Delta\xi)_n} - \frac{1}{2j\beta \cdot (1+v)} \cdot \frac{\zeta_{n,m}}{\eta_{n,m}} \left(\frac{1}{\eta_{n,m+\frac{1}{2}} \cdot \zeta_{n,m+\frac{1}{2}}} + \frac{1}{\eta_{n,m-\frac{1}{2}} \cdot \zeta_{n,m-\frac{1}{2}}} \right) - \frac{1}{2 \cdot (1+v)} (\gamma_{n,m} + \Gamma_{n,m}). \quad (4.91)$$

Die Matrix $\|A\|$ des Gleichungssystems (4.64) lautet

$$\|A\| = \begin{bmatrix} b_{n+1,1} & -vc_{n+1,1} & 0 & 0 & 0 \\ -va_{n+1,2} & b_{n+1,2} & -vc_{n+1,2} & 0 & 0 \\ 0 & -va_{n+1,3} & b_{n+1,3} & -vc_{n+1,3} & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & -va_{n+1,M} & b_{n+1,M} \end{bmatrix} \quad (4.92)$$

und die rechte Seite

$$\vec{R} = \begin{pmatrix} a_{n,1}\Psi_{n,0} + c_{n,1}\Psi_{n,2} + va_{n+1,1}\Psi_{n+1,0} + b'_{n,1}\Psi_{n,1} \\ a_{n,2}\Psi_{n,1} + c_{n,2}\Psi_{n,3} + b'_{n,2}\Psi_{n,2} \\ a_{n,3}\Psi_{n,2} + c_{n,3}\Psi_{n,4} + b'_{n,3}\Psi_{n,3} \\ \vdots \\ a_{n,M}\Psi_{n,M-1} + c_{n,M}\Psi_{n,M+1} + vc_{n+1,M}\Psi_{n+1,M+1} + b'_{n,M}\Psi_{n,M} \end{pmatrix}. \quad (4.93)$$

\vec{R} hat M Zeilen. Das Potential $\Psi_{n,0}$, $\Psi_{n+1,0}$, $\Psi_{n,M+1}$ und $\Psi_{n+1,M+1}$ ist durch die Randbedingungen bekannt, vgl. S. 41 sowie Abschnitt 4.6.

Weitwinkel-PE

Die Weitwinkel-PE (4.50) hat gegenüber der Standard-PE in Strahlenkoordinaten (4.44) auf der linken Seite den zusätzlichen Term

$$\frac{1}{4\beta^2} A \frac{\partial \Psi}{\partial \xi}.$$

Der in Gl. (4.47) definierte Operator A kann mit S und Ξ nach Gl. (4.68) und (4.69) abgekürzt werden:

$$A\Psi = S\Psi - 2j\beta\Xi\Psi \quad (4.94)$$

D. h. es gilt:

$$A \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} = S \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} - 2j\beta\Xi \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} \quad (4.95)$$

$\frac{\partial \Psi}{\partial \xi}$ liegt an der Stelle $n+1/2$ vor, vgl. (4.53) und (4.56). Zur Bestimmung von $\left(S \frac{\partial \Psi}{\partial \xi}\right)_{n+\frac{1}{2},m}$ wird in Gl. (4.79) $\Psi_{n,m}$ durch

$$\frac{\Psi_{n+1,m} - \Psi_{n,m}}{(\Delta\xi)_{n,m}}$$

ersetzt. Mit $a_{n,m}$ und $c_{n,m}$ nach Gl. (4.88) und (4.89) sowie dem in $b_{n,m}$ und $b'_{n,m}$ enthaltenen Anteil

$$b''_{n,m} = \frac{1}{2j\beta \cdot (1+v)} \cdot \frac{\zeta_{n,m}}{\eta_{n,m}} \left(\frac{1}{\eta_{n,m+\frac{1}{2}} \cdot \zeta_{n,m+\frac{1}{2}}} + \frac{1}{\eta_{n,m-\frac{1}{2}} \cdot \zeta_{n,m-\frac{1}{2}}} \right) \quad (4.96)$$

gilt:

$$\begin{aligned} \left(S \frac{\partial \Psi}{\partial \xi}\right)_{n+\frac{1}{2},m} &\approx \frac{2j\beta(1+v)}{(\Delta\xi)_{n+1}} \left(a_{n+1,m}\Psi_{n+1,m-1} - b''_{n+1,m}\Psi_{n+1,m} + c_{n+1,m}\Psi_{n+1,m+1} \right) \\ &\quad - \frac{2j\beta(1+v)}{(\Delta\xi)_n} \left(a_{n,m}\Psi_{n,m-1} + b''_{n,m}\Psi_{n,m} + c_{n,m}\Psi_{n,m+1} \right) \end{aligned} \quad (4.97)$$

Für $\Xi(\partial\Psi/\partial\xi)$ folgt mit Gl. (4.85):

$$\begin{aligned} \left(\Xi \frac{\partial \Psi}{\partial \xi}\right)_{n+\frac{1}{2},m} &\approx \frac{\Xi_{n+1,m}\Psi_{n+1,m} - \Xi_{n,m}\Psi_{n,m}}{(\Delta\xi)_{n+\frac{1}{2},m}} \\ &\approx \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma_{n+1,m} + \Gamma_{n+1,m}}{(\Delta\xi)_{n+1}} \Psi_{n+1,m} - \frac{\gamma_{n,m} + \Gamma_{n,m}}{(\Delta\xi)_n} \Psi_{n,m} \right) \end{aligned} \quad (4.98)$$

Unter Verwendung der Abkürzung

$$\Upsilon_n = \frac{j(1+v)}{2\beta(\Delta\xi)_n} \quad (4.99)$$

lautet der Weitwinkel-Anteil:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{4\beta^2} A \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} \right)_{n+\frac{1}{2},m} &\approx \Upsilon_{n+1} \cdot a_{n+1,m} \cdot \Psi_{n+1,m-1} \\ &- \left[\Upsilon_{n+1} \cdot b''_{n+1,m} + \frac{\Upsilon_{n+1}}{2 \cdot (1+v)} (\gamma_{n+1,m} + \Gamma_{n+1,m}) \right] \Psi_{n+1,m} \\ &+ \Upsilon_{n+1} \cdot c_{n+1,m} \cdot \Psi_{n+1,m+1} \\ &- \Upsilon_n \cdot a_{n,m} \cdot \Psi_{n,m-1} \\ &- \left[\Upsilon_n \cdot b''_{n,m} - \frac{\Upsilon_n}{2 \cdot (1+v)} (\gamma_{n,m} + \Gamma_{n,m}) \right] \Psi_{n,m} \\ &- \Upsilon_n \cdot c_{n,m} \cdot \Psi_{n,m+1} \end{aligned} \quad (4.100)$$

Dieser ist zur linken Seite von Gl. (4.87) zu addieren. Mit der Abkürzung

$$b'''_{n,m} = \left(b_{n,m} - \frac{1}{(\Delta\xi)_n} \right) \left(1 - \frac{\Upsilon_n}{v} \right) + \frac{1}{(\Delta\xi)_n} \quad (4.101)$$

und

$$b''''_{n,m} = \left(b'_{n,m} - \frac{1}{(\Delta\xi)_n} \right) (1 + \Upsilon_n) + \frac{1}{(\Delta\xi)_n} \quad (4.102)$$

lautet die Weitwinkel-PE unter Verwendung finiter Differenzen:

$$\begin{aligned} a_{n+1,m} (-v + \Upsilon_{n+1}) \Psi_{n+1,m-1} + b'''_{n+1,m} \Psi_{n+1,m} + c_{n+1,m} (-v + \Upsilon_{n+1}) \Psi_{n+1,m+1} \\ = a_{n,m} (1 + \Upsilon_n) \Psi_{n,m-1} + b''''_{n,m} \Psi_{n,m} + c_{n,m} (1 + \Upsilon_n) \Psi_{n,m+1} \end{aligned} \quad (4.103)$$

Dies führt mit

$$a'_{n,m} = a_{n,m} \cdot (v - \Upsilon_n) \quad (4.104)$$

$$c'_{n,m} = c_{n,m} \cdot (v - \Upsilon_n) \quad (4.105)$$

$$a''_{n,m} = a_{n,m} \cdot (1 + \Upsilon_n) \quad (4.106)$$

$$c''_{n,m} = c_{n,m} \cdot (1 + \Upsilon_n) \quad (4.107)$$

im Gleichungssystem (4.64) zur Matrix

$$\|A\| = \begin{bmatrix} b'''_{n+1,1} & -c'_{n+1,1} & 0 & 0 & 0 \\ -a'_{n+1,2} & b'''_{n+1,2} & -c'_{n+1,2} & 0 & 0 \\ 0 & -a'_{n+1,3} & b'''_{n+1,3} & -c'_{n+1,3} & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & -a'_{n+1,M} & b'''_{n+1,M} \end{bmatrix} \quad (4.108)$$

und der rechten Seite

$$\vec{R} = \begin{pmatrix} a''_{n,1}\Psi_{n,0} + c''_{n,1}\Psi_{n,2} + a'_{n+1,1}\Psi_{n+1,0} + b''''_{n,1}\Psi_{n,1} \\ a''_{n,2}\Psi_{n,1} + c''_{n,2}\Psi_{n,3} + b''''_{n,2}\Psi_{n,2} \\ a''_{n,3}\Psi_{n,2} + c''_{n,3}\Psi_{n,4} + b''''_{n,3}\Psi_{n,3} \\ \vdots \\ a''_{n,M}\Psi_{n,M-1} + c''_{n,M}\Psi_{n,M+1} + c'_{n+1,M}\Psi_{n+1,M+1} + b''''_{n,M}\Psi_{n,M} \end{pmatrix}. \quad (4.109)$$

Wird Υ_n zu Null gesetzt, ergibt sich die Standard-PE.

Sonderfall paralleler angenommener Ausbreitungswege

Für den Sonderfall parallel verlaufender angenommener Ausbreitungswege gehen die zweidimensionalen Strahlenkoordinaten in zweidimensionale kartesische Koordinaten über. In diesem Fall gilt $|\rho| \rightarrow \infty$ und $\Delta\theta_1 \rightarrow 0$. Innerhalb eines Berechnungsgebietes können sowohl parallele als auch konvergierende und divergierende Strahlen vorkommen, weshalb ein kontinuierlicher Übergang zwischen beiden Fällen möglich sein muss. Für $|\rho_m| \rightarrow \infty$ gilt

$$\gamma_{n,m} = \frac{1}{|\rho_m + \xi_n|} \rightarrow 0 \quad (4.110)$$

und

$$\eta_{n,m} = \eta_m = (\Delta s)_m \quad (4.111)$$

vgl. hierzu (4.73) und (4.74). $(\Delta s)_m$ stellt in diesem Fall den Abstand der parallelen Strahlen dar.

4.6 Randbedingungen

Auf der rechten Seite des Gleichungssystems (4.64) müssen die Potentialwerte $\Psi_{n,0}$, $\Psi_{n+1,0}$, $\Psi_{n,M+1}$ und $\Psi_{n+1,M+1}$ bekannt sein. Für die Verwirklichung dieser Randbedingungen gibt es verschiedene Möglichkeiten, die in diesem Abschnitt diskutiert werden.

4.6.1 Magnetische Wand für Felder TE bzgl. ϕ , elektrische Wand für Felder TM bzgl. ϕ (Kurzschluss-Randbedingung)

Im einfachsten Fall werden die Potentialwerte $\Psi_{n,0}$, $\Psi_{n+1,0}$, $\Psi_{n,M+1}$ und $\Psi_{n+1,M+1}$ zu Null gesetzt. Für den TE-Fall¹¹ bzgl. ϕ bedeutet dies nach Gl. (3.48), dass die zum Rand tangential verlaufende Komponente H_ϕ verschwindet¹². Insofern wird eine ideale magnetische Wand nachgebildet. Diese verläuft parallel zur am Rand angenommenen Ausbreitungsrichtung in ξ -Richtung. Entsprechend führt das Nullsetzen von ψ_m beim TM-Fall bzgl. ϕ nach Gl. (3.47) zum Verschwinden der Tangentialkomponente der elektrischen

¹¹In diesem Fall steht ψ für die ϕ -Komponente des elektrischen Vektorpotentials.

¹²Aus $\Psi = 0$ folgt $\psi = 0$, vgl. (4.33).

Feldstärke E_ϕ und damit zur Nachbildung einer ideal leitfähigen elektrischen Wand. Da am Rand des Gitters $\Psi = 0$ bzw. $\Psi_m = 0$ erzwungen wird, kann von einer Kurzschluss-Randbedingung gesprochen werden.

4.6.2 Elektrische Wand für Felder TE bzgl. ϕ , magnetische Wand für Felder TM bzgl. ϕ (Leerlauf-Randbedingung)

Auch für den (durch ψ repräsentierten) TE-Fall bzgl. ϕ lässt sich am Rand eine ideal *elektrisch* leitfähige Wand modellieren. Im Gegensatz zum TM-Fall lautet die dort verschwindende Tangentialkomponente E_ξ . Nach Gl. (3.47) führt dies zur Forderung¹³

$$\frac{\partial}{\partial s}(\psi t_\phi) = 0. \quad (4.112)$$

Dies kann verwendet werden, um die auf der rechten Seite des Gleichungssystems (4.64) auftretenden Potentialwerte an der Stelle $m = 0$ bzw. $m = M + 1$ zu eliminieren. Unter Verwendung finiter Differenzen lautet Gl. (4.112) z. B. für den oberen Rand bei $m = M$

$$\frac{(\Psi t_\phi)_{n,M+1} - (\Psi t_\phi)_{n,M}}{(\Delta s)_{M+\frac{1}{2}}} = \frac{\zeta_{n,M+1}\Psi_{n,M+1} - \zeta_{n,M}\Psi_{n,M}}{(\Delta s)_{M+\frac{1}{2}}} = 0 \quad (4.113)$$

mit $(\Delta s)_m$ nach Gl. (4.73) und $\zeta_{n,m}$ nach Gl. (4.75) bzw. (4.77). Aus Gl. (4.113) folgt

$$\Psi_{n,M+1} = \Psi_{n,M} \cdot \frac{\zeta_{n,M}}{\zeta_{n,M+1}} \quad (4.114)$$

und für den unteren Rand dementsprechend

$$\Psi_{n,0} = \Psi_{n,1} \cdot \frac{\zeta_{n,1}}{\zeta_{n,0}}. \quad (4.115)$$

Gl. (4.114) und (4.115) kann direkt in die rechte Seite des Gleichungssystems (4.64) eingesetzt werden. Der Eintrag für Ψ an der Stelle $n + 1$ gelangt so von der rechten Seite zurück in die Matrix und wird deren Hauptdiagonalelement in der ersten bzw. letzten Zeile zugeschlagen. Zur Erhöhung der Genauigkeit kann es in Betracht gezogen werden, in Gl. (4.113) die Differenz zwischen dem Potential an den Gitterpunkten $M + 1$ und $M - 1$ zu verwenden, d. h. um den Punkt M die zentrale Differenz anzusetzen.

Auf dieselbe Art und Weise lässt sich beim durch ψ_m repräsentierten TM-Fall bzgl. ϕ am Rand ein Verschwinden der tangentialen Magnetfeldstärke H_ξ erzwingen und sich so eine magnetische Wand modellieren. Bei der Betrachtung einer stehenden Welle, die durch eine leerlaufende Leitung verursacht wird, gilt am Ort des Leerlaufs $\partial u / \partial x = 0$, da die sinusförmig vom Ort abhängige Spannung dort ihr Maximum und dementsprechend die Steigung Null hat. Insofern kann beim Erzwingen der Forderung in Gl. (4.112) von einer Leerlauf-Randbedingung gesprochen werden.

¹³Vgl. auch [19] für die Randbedingung bei einer elektrisch ideal leitenden Ebene bei vertikaler und horizontaler Polarisation.

4.6.3 Absorbierende Randbedingung

Neben der Nachbildung einer ideal leitfähigen elektrischen und magnetischen Wand ist insbesondere die Modellierbarkeit einer „absorbierenden Randbedingung“ von Interesse. Dabei wird erreicht, dass eine elektromagnetische Welle das Berechnungsgebiet reflexionsfrei verlassen kann. Hierfür gibt es bei PE verschiedene Ansätze:

Absorbierende Schichten

Zwischen dem eigentlichen Berechnungsbereich und der in Abschnitt 4.6.1 beschriebenen Randbedingung $\Psi = 0$ wird zur Realisierung einer absorbierenden Randbedingung ein verlustbehaftetes Medium (mit komplexer Dielektrizitätszahl) angenommen, in dem sich die Welle aufzehrt [19]. Dieses Verfahren eignet sich insbesondere für sehr große Berechnungsweiten, da hier nicht nur die angenommene, sondern auch die tatsächliche Richtung der Wellenausbreitung praktisch senkrecht auf dem Berechnungsrand liegt (streifender Einfall). Mit einer zunehmenden Abweichung vom streifenden Einfall ist zur zuverlässigen Dämpfung eine größere Dicke der absorbierenden Schicht erforderlich [47].

Ideal angepasste Schichten (Perfectly Matched Layers, PML)

Für den *nicht* streifenden Einfall einer Welle auf den Rand kann das in [6] ursprünglich für FDTD entworfene und in [13, 60] auf PE angewandte Verfahren der „Perfectly Matched Layers“ (PML) zum Einsatz kommen. Dabei gelingt der reflexionsfreie Übergang vom eigentlichen Berechnungsgebiet zu einer stark dämpfenden Schicht. Aufgrund der starken Dämpfung kann die Schicht dünn sein, dadurch ist der zusätzliche numerische Berechnungsaufwand gering. Jedoch führt nur der Anteil der Ausbreitung *senkrecht* zur Grenzfläche zu einer Dämpfung. Dies wird bei Betrachtung der PE (8.10) in [47] als Vorstufe zur Implementierung von PML mit FD in kartesischen Koordinaten deutlich¹⁴:

$$\frac{1}{1 - j\gamma(z)} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{1 - j\gamma(z)} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) - 2j\beta \frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0 \quad (4.116)$$

Dabei steht $\gamma(z)$ für den Dämpfungsparameter. Dieser kann sich nur für $\partial/\partial z \neq 0$ auswirken. Je größer die Abweichung der tatsächlichen von der angenommenen Ausbreitungsrichtung ist, desto größer ist beispielsweise $\partial\Psi/\partial z$, vgl. Abschnitt 4.2.4 auf S. 32. Daher bietet sich PML insbesondere bei Verwendung der Weitwinkel-PE an, wenn a priori bekannt ist, dass die angenommene und die tatsächliche Ausbreitungsrichtung voneinander abweichen. Ist letzteres nicht der Fall, liegt streifender Einfall auf den Berechnungsrand vor. In [60] wird daher vorgeschlagen, bei zu erwartendem streifenden Einfall PML mit anderen Methoden zu kombinieren.

¹⁴Die Wiedergabe erfolgt so, dass die Formelzeichen mit denen in dieser Arbeit übereinstimmen; der Unterschied im Vorzeichen wird dadurch verursacht, dass der ortsabhängige Phasenterm der komplexen Feldstärken in [47] $e^{+j\beta x}$ statt $e^{-j\beta x}$ lautet, vgl. (2.4) in [47] und Gl. (4.2) in dieser Arbeit.

Transparent Boundary Condition (STBC, TBC) nach Hadley

In [29] schlägt Hadley vor, das Potential am Rand des Gitters (d. h. an der Stelle $m = 0$ bzw. $m = M + 1$) aus den beiden äußersten (an der Stelle n bekannten) Gitterpunkten zu extrapolieren. Die folgende Betrachtung gelte für zweidimensionale kartesische Koordinaten x, z mit einer angenommenen Wellenausbreitung in x -Richtung¹⁵. Am Ort der zu realisierenden Randbedingung gilt unter Annahme einer lokal ebenen Welle

$$\psi(x, z) = \psi_0 \cdot \exp[-j(\beta_x x + \beta_z z)] \quad (4.117)$$

bzw. nach Abspaltung des Phasenterms gemäß Gl. (4.2) aufgrund der Annahme einer vorherrschenden Ausbreitung in x -Richtung

$$\Psi(x, z) = \Psi_0 \cdot \exp[-j((\beta_x - \beta) x + \beta_z z)]. \quad (4.118)$$

ψ_0 bzw. Ψ_0 sei die in der unmittelbaren Umgebung des Randpunkts näherungsweise konstante komplexe Amplitude der lokal ebenen Welle. Die Wellenzahl β_z beschreibt den Anteil der Welle, der das Berechnungsgebiet senkrecht zur vorherrschenden Ausbreitungsrichtung durch die zu realisierende „transparente“ Randbedingung verlässt. Da x an der Stelle n konstant ist, folgt aus Gl. (4.118) unter Verwendung finiter Differenzen:

$$\frac{\Psi_{n,m}}{\Psi_{n,m-1}} = \exp[-j\beta_z(z_m - z_{m-1})] = \exp[-j\beta_z \Delta z] \quad (4.119)$$

Hadleys Annahme besteht nun darin, dass dieselbe Wellenzahl β_z z. B. am oberen Rand sowohl an der Stelle n als auch an der Stelle $n + 1$ ebenso für den Übergang von $\Psi_{n,m}$ nach $\Psi_{n,m+1}$ gilt, d. h.

$$\frac{\Psi_{n,M+1}}{\Psi_{n,M}} = \frac{\Psi_{n+1,M+1}}{\Psi_{n+1,M}} = \exp[-j\beta_z \Delta z]. \quad (4.120)$$

Mit dem nach Gl. (4.119) bestimmten Exponential kann somit wie in Abschnitt 4.6.2 das Potential am Rand eliminiert werden. Würde $\beta_z = 0$ erzwungen, ergäbe sich dieselbe Randbedingung wie in Abschnitt 4.6.2, d. h. eine elektrische Wand für den TE-Fall bzw. eine magnetische Wand für den TM-Fall bzgl. ϕ . Das ursprünglich in [29] veröffentlichte Verfahren wird im Folgenden mit STBC bezeichnet, wobei „S“ in Anlehnung an [30] für „simple“ steht. In [30] wird die Methode dahingehend verfeinert, dass β_z ggf. aus weiter innen liegenden Randpunkten berechnet wird, und TBC genannt.

Hadley leitet das Verfahren unter Verwendung des Energieerhaltungsprinzips her und weist in diesem Zusammenhang darauf hin, dass β_z einen positiven Realteil aufweisen muss, da sonst modelliert würde, dass Energie von außen ins Berechnungsgebiet gelangt. In [30] schlägt er vor, den Realteil — falls dieser negativ ist — zu Null zu setzen. Dies zeigt, dass die numerische Bestimmung von β_z anhand von Gl. (4.119) problematisch sein

¹⁵Dies erfolgt in Anlehnung an Abschnitt 4.2; in [29] wird von einer Ausbreitung der Welle in z -Richtung sowie von einem unterschiedlichen Vorzeichen im ortsabhängigen Phasenterm ausgegangen.

kann, diese Bedenken werden bereits in [29] geäußert. Dennoch liefert die Methode bei der Ausbreitung (nicht interferierender) gaußscher Strahlen (vgl. Abschnitt 4.7.2) gute Ergebnisse [29, 30].

In [68] wird die Anwendbarkeit von STBC und TBC auf allgemeinere Probleme hin untersucht. Dabei wird die Eignung von STBC und TBC grundsätzlich bestätigt, aber auf zwei Einschränkungen hingewiesen. Zum einen führt das Vorhandensein von Interferenz in der Nähe des Randes zum Auftreten von Reflexionen und damit zu einer Abschwächung der Wirksamkeit von STBC bzw. TBC. Zum anderen lassen sich die (unerwünschten) Reflexionen am Rand nicht dadurch verringern, dass die Auflösung des Gitters verfeinert wird.

Auch bei den Untersuchungen in [2, 24] konnte TBC für die Realisierung einer absorbierenden Randbedingung eingesetzt werden. Im Rahmen der Untersuchungen, die dieser Arbeit zugrunde liegen, hat sich die Anwendung der Hadley-Randbedingung in vielen, jedoch nicht in allen Beispielen als geeignet erwiesen. Insbesondere im Zusammenhang mit der Anwendung der Weitwinkel-PE wurden Instabilitäten beobachtet. Eine Anwendung für allgemeine Probleme sollte daher mit Bedacht und mit Plausibilitätskontrollen erfolgen.

Nicht-lokale absorbierende Randbedingungen

Randbedingungen für den Schritt n , deren Ableitung ausschließlich aus den Potentialwerten an derselben Stelle n erfolgt, werden *lokale* Randbedingungen genannt. Im Gegensatz hierzu sind *nicht-lokale* Randbedingungen von Potentialverteilungen auf Linien (2D-Fall) bzw. Flächen (3D-Fall) abhängig. Die bisher in diesem Abschnitt 4.6.3 beschriebenen absorbierenden Randbedingungen sind lokal, Beispiele für nicht-lokale absorbierende Randbedingungen finden sich in [26, 47, 52]. Givoli kommt zum Schluss, dass lokale Randbedingungen zwar grundsätzlich gute Ergebnisse für bestimmte Fälle bringen, jedoch teilweise Beispiele gefunden werden können, in denen sie versagen. Nicht-lokale absorbierende Randbedingungen erfordern zwar einen höheren Rechenaufwand, zeichnen sich jedoch durch eine höhere Genauigkeit und eine kleinere Anfälligkeit gegenüber numerischen Störungen (d. h. durch eine bessere Robustheit) aus [26]. Dies wird z. B. durch [68] bestätigt.

Das in Kapitel 6 vorgestellte Verfahren zur Analyse dielektrischer Linsenantennen kommt ohne die Verwendung absorbierender Randbedingungen aus. Dementsprechend ist in diesem Zusammenhang eine nähere Betrachtung nicht-lokaler absorbierender Randbedingungen nicht erforderlich.

4.6.4 Bekanntes Potential als Randbedingung

Sofern das Potential am unteren oder oberen Rand (d. h. $\Psi_{n,0}$ bzw. $\Psi_{n,M+1}$) bekannt ist, kann es direkt in die rechte Seite des Gleichungssystems (4.64) eingesetzt werden.

Damit lautet die Randbedingung, dass ein a priori bekanntes Potential am Rand herrschen muss. Dieses Prinzip wird auch bei den nicht-lokalen absorbierenden Randbedingungen verwendet. Das Potential auf dem Rand wird dort z. B. mit einer Greenschen Funktion aus Anfangswerten und vorangegangenen Rand-Potentialwerten berechnet und als bekannter Wert ins Finite-Differenzen-Schema eingesetzt [52].

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit tritt ein bekanntes Potential als Randbedingung auch dann auf, wenn die Linie, auf der die Anfangswerte für die PE-Berechnung gegeben sind, nicht mit einer angenommenen Phasenfront identisch ist, d. h. wenn die angesetzten Ausbreitungswege — z. B. geometrisch-optische Strahlen — nicht senkrecht von der Linie mit den Anfangswerten abgehen, vgl. Bild 6.13 auf S. 98. Eine ausführliche Betrachtung dieses Falls wird in Abschnitt 6.6 (S. 97 ff.) vorgenommen.

4.7 Andere Lösungsverfahren und mit PE verwandte Methoden

4.7.1 Split-Step-Algorithmus

Neben dem Finite-Differenzen-Verfahren ist der Fourier-Split-Step-Algorithmus das zweite gebräuchliche Verfahren zur Lösung der parabolischen Differentialgleichung. Dabei erfolgt die Berechnung ebenfalls Schritt für Schritt in Ausbreitungsrichtung.

Da im Rahmen dieser Arbeit innerhalb einer PE-Berechnung der Brechungsindex stets konstant ist, wird dies auch im Folgenden bei der Beschreibung des Fourier-Split-Step-Algorithmus angenommen. Dadurch ist der „Split“, d. h. die Trennung des Anteils mit der zweifachen Ableitung nach z und des Anteils mit dem Brechungsindex, nicht erforderlich. Für eine vollständige Betrachtung sei daher auf [47] verwiesen.

Ausgangspunkt sei die zweidimensionale PE in kartesischen Koordinaten (4.9). Die prinzipielle Vorgehensweise besteht darin, das an der Stelle x bekannte Potential Ψ bezüglich der z -Richtung einer Fouriertransformation zu unterziehen. Lautet die Randbedingung für den unteren Rand an der Stelle $z = 0$, dass das Potential dort Null ist, bietet sich die Fouriersinustransformation für ungerade Funktionen an [7, 47]:

$$\mathcal{F}_s \Psi(x, z) = P(x, p) = \int_0^\infty \Psi(x, z) \sin(2\pi pz) dz \quad (4.121)$$

$$\mathcal{F}_s^{-1} P(x, p) = \Psi(x, z) = 4 \cdot \int_0^\infty P(x, p) \sin(2\pi pz) dp \quad (4.122)$$

Die Fouriertransformation von Gl. (4.9) ergibt [47]

$$\frac{\partial P(x, p)}{\partial x} = -\frac{j}{2\beta} \cdot (-4\pi^2 p^2) P(x, p) = D \cdot P(x, p) \quad (4.123)$$

mit

$$D = \frac{j2\pi^2 p^2}{\beta}, \quad (4.124)$$

d. h. die zweifache Ableitung nach z wird durch die Fouriersinustransformation zum Faktor $(-4\pi^2 p^2)$. Dies ist der entscheidende Grund für die Verwendung der Fouriertransformation. Die Differentialgleichung (4.123) hat die Lösung

$$P(x, p) = e^{D \cdot x} \quad (4.125)$$

Ohne die Fouriertransformation hätte aus Gl. (4.9) eine ähnliche Lösung konstruiert werden können: Aus

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = -\frac{j}{2\beta} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \Psi = D' \cdot \Psi \quad (4.126)$$

folgt

$$\Psi(x) = e^{D' \cdot x}. \quad (4.127)$$

Im Gegensatz zu Gl. (4.125) ist Gl. (4.127) nur formal zu sehen, da das Exponential einer zweifachen Ableitung nach z nicht direkt, sondern nur approximativ berechnet werden kann¹⁶, was zur ursprünglichen PE (4.9) führt. Letzteres gilt bei Verwendung der Näherung $e^x \approx 1 + x$ für $|x| \ll 1$. In [14, 16] wird an dieser Stelle eine Padé-Näherung für das Exponential (zusammen mit der Wurzel mit der zweifachen Ableitung) eingesetzt. So ergibt sich eine Weitwinkel-PE, die mit finiten Differenzen gelöst wird.

Aus Gl. (4.125) folgt für das Potential ein kleines Stück Δx weiter in Ausbreitungsrichtung:

$$P(x + \Delta x, p) = e^{D \cdot (x + \Delta x)} = P(x, p) \cdot e^{D \cdot \Delta x} \quad (4.128)$$

Gl. (4.128) kann nach dem letzten Schritt zurücktransformiert werden:

$$\Psi(x + \Delta x, z) = \mathcal{F}_s^{-1} \left(P(x, p) \cdot e^{D \cdot \Delta x} \right) \quad (4.129)$$

Theoretisch ist bei den Transformationen (4.121) und (4.122) von 0 bis ∞ zu integrieren. Das Abbrechen der Integration bei einer bestimmten Höhe z führt zu Reflexionen, die durch absorbierende Randbedingungen vermindert werden können [47].

Eine Verwendung des Fourier-Split-Step-Algorithmus in Strahlenkoordinaten wird nicht verfolgt, da eine entsprechende Fouriertransformation bezüglich der Strahlenkoordinate s (also entlang einer i. Allg. gekrümmten Linie $\xi = \text{const.}$) erforderlich wäre. Im Rahmen dieser Arbeit wird daher ausschließlich das in Abschnitt 4.5 beschriebene Finite-Differenzen-Verfahren angewandt.

4.7.2 Gaußsche Strahlen

Gaußsche Strahlen sind spezielle Lösungen der Standard-PE (4.9) [27]. Sie stellen ein Mittelweg zwischen geometrisch-optischen Strahlen und Elementarquellen (z. B. Dipolen oder im Folgenden allgemein Multipolen) dar. Die Gemeinsamkeit mit GO-Strahlen besteht in der festgelegten Ausbreitungsrichtung eines Strahls, während ein Multipol (abgesehen von

¹⁶Vgl. die Approximation des Wurzeloperators in Abschnitt 4.2.3.

der Gewichtung mit seiner Richtcharakteristik) in alle Richtungen strahlt. Wie ein Multipol beinhaltet ein gaußscher Strahl die Amplitudenabnahme durch die in der Praxis unvermeidliche Divergenz eines Strahls, d. h. die im Fernfeld zu beobachtende Abnahme der Feldstärken mit $1/r$ (3D-Fall) bzw. $1/\sqrt{r}$ (2D-Fall). Das Zentrum eines Multipols entspricht der *Taille* eines gaußschen Strahls, wo die Feldstärke bzw. das Potential ψ maximal ist.

Der fundamentale Mode beim gaußschen Strahl weist senkrecht zur Ausbreitungsrichtung die Amplitudenverteilung einer gaußschen Glockenkurve auf. Bei höheren Moden gibt es mehrere Extrema mit Nullstellen dazwischen.

Gaußsche Strahlen sind im Rahmen der vorliegenden Arbeit in zweierlei Hinsicht von Bedeutung. Zum einen wäre die Beschreibung der Wellenausbreitung in der Linse durch eine geeignete Überlagerung von gaußschen Strahlen [4] denkbar (analog zur Überlagerung von Elementarquellen zur Beschreibung der Strahlung einer Apertur), zum anderen ist der gaußsche Strahl als (eine) exakte Lösung der Standard-PE sehr gut zur Validierung numerischer Lösungsverfahren für die PE geeignet.

In der Praxis werden gaußsche Strahlen bei der Modellierung optischer Systeme eingesetzt [27], aber auch zur Beschreibung der akustischen und elektromagnetischen Wellenausbreitung [9, 22, 59, 65].

Gaußscher Strahl in zweidimensionalen kartesischen Koordinaten

Im Zusammenhang mit gaußschen Strahlen hat die Größe ψ dieselbe Bedeutung wie bei der skalaren Wellengleichung (4.1). Entsprechend zu den Annahmen (2.56) und (2.57) kann ψ als eine (bzw. die einzige) Komponente eines Vektorpotentials aufgefasst und so mittels ψ eine ausbreitungsfähige elektromagnetische Welle beschrieben werden. In zweidimensionalen kartesischen Koordinaten lautet der Ausdruck für ψ beim fundamentalen Mode eines gaußschen Strahls bei Ausbreitung in x-Richtung und der Taille bei $x = 0$ [27]

$$\psi(x, z) = \psi_0 \cdot \sqrt{\frac{w_0}{w(x)}} \cdot \exp \left\{ - \left(\frac{z}{w(x)} \right)^2 - j \left(\beta x + \frac{\pi z^2}{\lambda R(x)} - \frac{\phi_0(x)}{2} \right) \right\} \quad (4.130)$$

mit

$$w(x) = w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{x}{x_c} \right)^2} \quad (4.131)$$

$$R(x) = x + \frac{x_c^2}{x} \quad (4.132)$$

$$\phi_0(x) = \arctan \frac{x}{x_c} \quad (4.133)$$

$$x_c = \frac{\pi w_0^2}{\lambda} \quad (4.134)$$

und ψ_0 als dem maximalen Potential, das an der Taille auf der Zentrallinie des Grundmodes des gaußschen Strahls auftritt. Bei $w(x)$ handelt es sich um dessen Weite an der

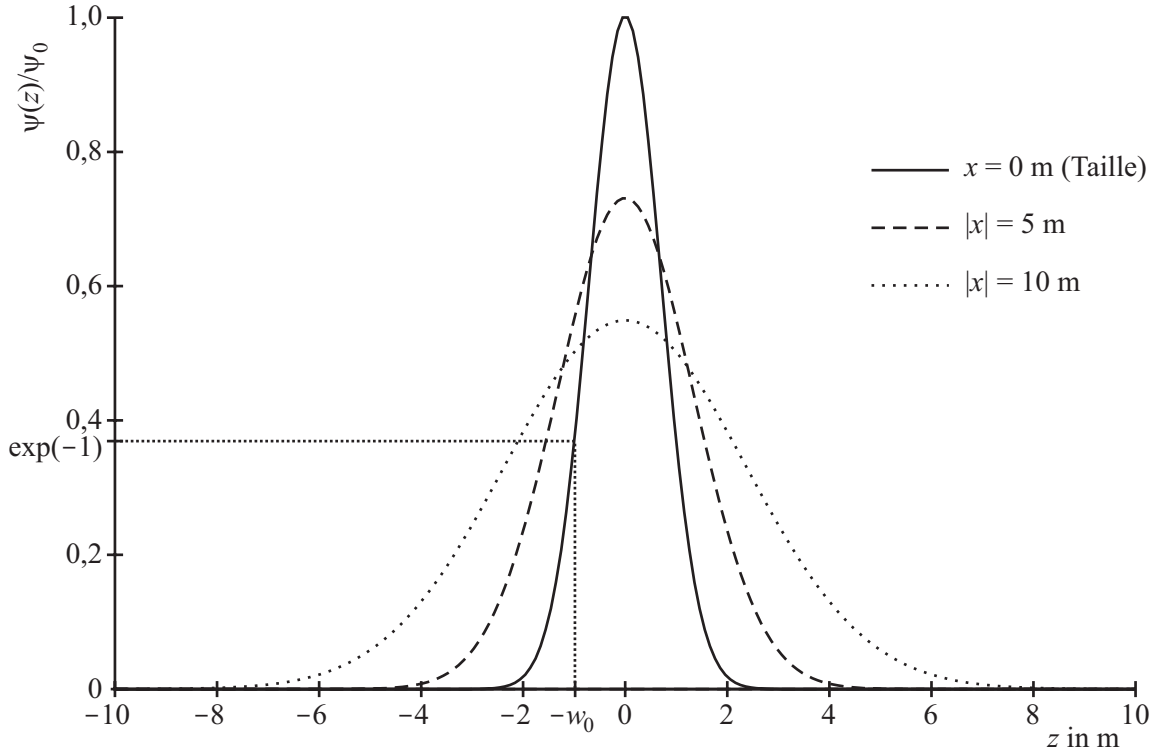


Abbildung 4.3: Betrag des Potentials ψ eines zweidimensionalen gaußschen Strahls (Fundamentalmode mit $w_0 = \lambda = 1$ m, Ausbreitung in x -Richtung) senkrecht zu dessen Ausbreitungsrichtung (gaußsche Glockenkurve)

Stelle x ; für $|z| \leq w(x)$ gilt

$$e^{-1} \leq \left| \frac{\psi(x, z)}{\psi(x, z=0)} \right|_{x=\text{const.}} \leq 1. \quad (4.135)$$

Die kleinste Weite w_0 tritt an der Taille des gaußschen Strahls bei $x = 0$ auf. $R(x)$ stellt näherungsweise den Krümmungsradius der Phasenfronten dar [22]. Abb. 4.3 zeigt den Querschnitt eines gaußschen Strahls, d. h. den Verlauf des Betrags des Potentials ψ senkrecht zur Ausbreitungsrichtung. Bzgl. Gl. (4.130) ist zu beachten, dass nur der gemäß Gl. (4.2) um den Phasenterm $\exp(-j\beta x)$ bereinigte gaußsche Strahl die Standard-PE (4.9) erfüllt. $\phi_0(x)$ stellt eine zusätzliche Phasenverschiebung dar, die keine physikalische Bedeutung hat, aber erforderlich ist, damit der gaußsche Strahl die Standard-PE erfüllt. Im Vergleich zu einer ebenen Welle, die sich in dieselbe Richtung ausbreitet, beträgt diese zusätzliche Phasenverschiebung (beim zweidimensionalen Strahl) maximal $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(-\frac{\phi_0(x)}{2} + \frac{\phi_0(-x)}{2} \right) = -\pi/2$. Da $\phi_0(x)$ bekannt ist, kann sie bei Bedarf herausgerechnet werden. Bei x_c handelt es sich um die *konfokale Entfernung* oder Rayleigh-Entfernung des gaußschen Strahls. Für $|x \ll x_c|$ wird vom Nahfeld und für $|x \gg x_c|$ vom Fernfeld eines gaußschen Strahls gesprochen. Lediglich im Fernfeld erfüllt der gaußsche Strahl in guter Näherung die exakte (elliptische) Wellengleichung (4.1).

Nach Gl. (4.130) ergibt sich die Schar der Phasenfronten des Grundmodes eines zweidi-

mensionalen gaußschen Strahls, der sich in x-Richtung ausbreitet, aus der Forderung

$$\beta x + \frac{\pi z^2}{\lambda R(x)} - \frac{\phi_0(x)}{2} = n \cdot \Delta\phi, n \in \mathcal{Z}. \quad (4.136)$$

Dabei stellt $\Delta\phi$ den Abstand der Phasenfronten dar. Die Gleichung für den Verlauf der Phasenfront lautet somit:

$$z(x) = \pm \sqrt{\frac{\lambda R(x)}{\pi} \left(n \cdot \Delta\phi + \frac{\phi_0(x)}{2} - \beta x \right)} \quad \text{für } 0 < \frac{x}{x_0} \leq 1 \quad (4.137)$$

In Abb. 4.4 sind die entsprechenden Phasenfronten mit $\Delta\phi = 2\pi$, d. h. mit einem Abstand von etwa einer Wellenlänge dargestellt. Durch die zusätzliche Phasenverschiebung beim gaußschen Strahl $\phi_0(x)$ ist der Abstand der Phasenfronten im Bereich der Zentrallinie (hier der x-Achse) etwas größer als eine Wellenlänge.

Höhermodige gaußsche Strahlen

Abb. 4.3 zeigt den fundamentalen Mode eines gaußschen Strahls. Im Zusammenhang mit der Methode der Summation gaußscher Strahlen treten auch höhere Moden m auf. Dabei wird das Potential des Grundmodes $\psi(x, z)$ mit hermiteschen Polynomen $H_m(z)$ der Ordnung m multipliziert [27]. Die gaußsche Glockenkurve bleibt auch beim höhermodigen gaußschen Strahl eine Einhüllende des Potentials $\psi(x, z)$ senkrecht zur Ausbreitungsrichtung. Dessen Verlauf sieht so aus, als würde eine Trägerschwingung, deren Frequenz durch die Ordnung des hermiteschen Polynoms m gegeben ist, mit der gaußschen Glockenkurve amplitudenmoduliert.

Auch die höhermodigen gaußschen Strahlen sind exakte Lösungen der parabolischen Wellengleichung (4.9). Der Potentialverlauf ergibt sich zu

$$\psi_m(x, z) = \psi(x, z) \cdot \sqrt{\frac{1}{2^m \cdot m!}} \cdot H_m\left(\frac{\sqrt{2} z}{w(x)}\right) \cdot \exp[j m \phi_0(x)] \quad (4.138)$$

mit $\psi(x, z)$ als Ausdruck für den Grundmode des gaußschen Strahls mit denselben Parametern w_0 und λ gemäß Gl. (4.130) [27]. Für $m = 0$ geht Gl. (4.138) in den Grundmode $\psi(x, z)$ über. Die hermiteschen Polynome $H_m(u)$ sind in Anhang B (S. 135) zu finden. Bild B.1 (S. 136) zeigt den Potentialverlauf $\psi_m(x = 0, z)$ an der Taile senkrecht zur Ausbreitungsrichtung für $m = 0 \dots 3$.

4.7.3 Methode der Summation gaußscher Strahlen

Die Methode der Summation gaußscher Strahlen stellt einen Mittelweg zwischen der Überlagerung von Elementarquellen und der geometrischen Strahlenoptik dar [50]. Während Elementarquellen rundstrahlen und daher am Ort des Beobachters die Beiträge *aller* Elementarquellen (zu denen Sichtkontakt besteht) addiert werden müssen, stellt ein gaußscher Strahl eine *gebündelte* Strahlungsquelle dar. Dadurch sind im Beobachtungspunkt

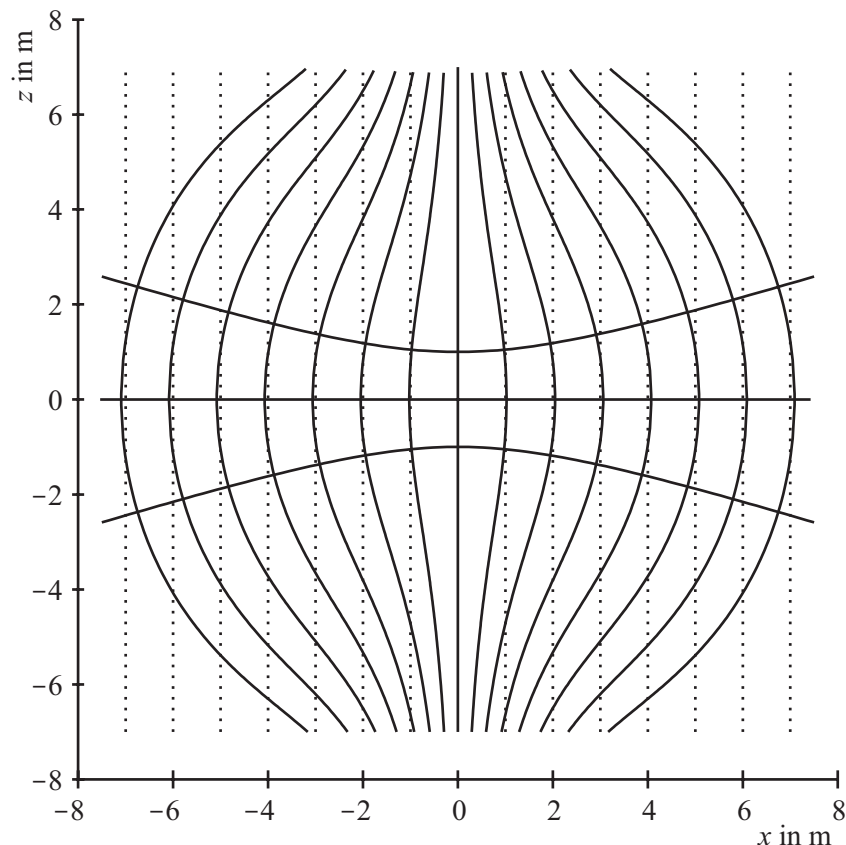


Abbildung 4.4: Phasenfronten (mit $\Delta\phi = 2\pi$, d. h. im Bereich der Zentrallinie näherungsweise im Abstand λ) bei einem zweidimensionalen gaußschen Strahl mit $w_0 = \lambda = 1$ m. Der Strahl breitet sich in x-Richtung aus und wird durch die Linien $z(x) = \pm w(x)$ angedeutet. Zum Vergleich sind die Phasenfronten einer entsprechenden ebenen Welle gepunktet dargestellt. In den Bereichen, in denen der Abstand der Phasenfronten deutlich von $\lambda = 1$ m abweicht, ist die Amplitude des Potentials so klein, dass dies nicht weiter von Bedeutung ist, vgl. Abb. 4.3.

nur diejenigen gaußschen Strahlen zu berücksichtigen, die diesen treffen oder in unmittelbarer Nähe an diesem vorbeilaufen. Die Beiträge aller anderen gaußschen Strahlen können vernachlässigt werden, wenn ihre Amplitude am Ort des Beobachters praktisch auf Null abgefallen ist, vgl. Abb. 4.3 auf S. 55. Aufgrund der endlichen Amplitude und der stets von Null verschiedenen Breite eines gaußschen Strahls kann die Methode auch dann angewandt werden, wenn sich die Zentrallinien aller gaußschen Strahlen exakt in einem Punkt schneiden. Während bei der Geometrischen Optik der (Winkel-)Abstand zweier Strahlen für die Amplitude des zugehörigen Feldes maßgeblich ist [10] und daher im Schnittpunkt zweier geometrisch optischer Strahlen eine unendlich große Amplitude anzunehmen wäre, werden bei den gaußschen Strahlen wie bei Elementarquellen nur deren Potentiale (bzw. Felder) ohne Berücksichtigung des gegenseitigen Abstands überlagert.

Der Ansatz bei der Summation gaußscher Strahlen entspricht im Wesentlichen demjeni-

gen bei der Fresnel-Integral-Methode (vgl. Abschnitt 5.2): Ausgehend von einer bekannten Feldverteilung in einer Apertur (oder allgemein auf der Oberfläche eines Körpers, durch die Strahlung tritt) wird eine Reihe gaußscher Strahlen gesucht, die (zumindest näherungsweise) dieselbe Feldverteilung erzeugt. Sofern die angenommene Ausbreitungsrichtung der gaußschen Strahlen (bis auf ca. $\pm 15^\circ$, vgl. Abschnitt 4.2.4) mit der *tatsächlichen* Richtung der Wellenausbreitung übereinstimmt, kann aufgrund des Eindeutigkeitssatzes davon ausgegangen werden, dass die Summe der gaußschen Strahlen auch außerhalb der Apertur (bzw. weit von der Oberfläche entfernt) die Strahlung der ursprünglichen Apertur (bzw. des ursprünglichen Körpers) repräsentiert. Der Vorteil, dass im Beobachtungspunkt statt der Wirkung vieler rundstrahlender Elementarquellen nur relativ wenige gaußsche Strahlen zu überlagern sind, wird durch zwei Nachteile erkauft. Zum einen muss die Ausbreitungsrichtung im gesamten Berechnungsbereich a priori (bis auf ca. $\pm 15^\circ$) bekannt sein, zum anderen muss erst eine geeignete Reihe gaußscher Strahlen gefunden werden, die das Feld in der Apertur hinreichend gut charakterisiert.

Die in der Literatur anzutreffenden Verfahren zur Anwendung der Methode der Summation gaußscher Strahlen unterscheiden sich darin, ob lediglich fundamentale oder auch höhermodige gaußsche Strahlen zum Einsatz kommen. Dabei herrschen ähnliche Verhältnisse wie bei der Beschreibung eines Feldes im Raum durch (viele) Elementarquellen bzw. (einen oder wenige) Multipole. Es ist zu erwarten, dass entweder vergleichsweise *vielen* gaußsche Grundmoden oder aber *wenigen* Strahlbündel mit *höheren Moden* zur Beschreibung der Strahlung einer Apertur benötigt werden. Ein Vergleich beider Ansätze ist in [20] enthalten.

Die Richtung der gaußschen Strahlen wird in der Regel in Übereinstimmung mit geometrisch-optischen Strahlen angenommen [4]. Bei (hinsichtlich der Ausbreitungsgeschwindigkeit) inhomogenen Medien (z. B. im Bereich der Seismik oder Unterwasser-Akustik) führt dies zu gekrümmten Strahlen. In der Apertur, in der eine geeignete Reihe gaußscher Strahlen zur Beschreibung der Feldverteilung gefunden werden soll, sind jedoch auch bei inhomogenen Medien alle Strahlen *lokal* gerade, sodass die Annahme (auch in der Folge) gerader Strahlen bei der Methode der Summation gaußscher Strahlen keine Beschränkung der Allgemeinheit darstellt.

Summation ausschließlich fundamentaler Moden

Die zunächst naheliegende Variante der Methode der Summation gaußscher Strahlen besteht darin, lediglich deren Grundmode zu verwenden [4, 9]. Zur Beschreibung der Strahlung einer Linienquelle vergleichen Červený, Popov und Pšenčík deren Potentialverlauf mit einem Integral über (zweidimensionale) gaußsche Strahlen, die senkrecht von dieser Linie abgehen und je nach Winkel ϕ gewichtet werden [9]:

$$u(M) = \int_0^{2\pi} \Phi(\phi) u_\phi(s, n) d\phi \quad (4.139)$$

Dabei ist $u(M)$ das Potential im Beobachtungspunkt M , $\Phi(\phi)$ die Gewichtungsfunktion und $u_\phi(s, n)$ der gaußsche Strahl, der sich in Richtung ϕ ausbreitet. s und n sind die in [9] verwendeten Strahlenkoordinaten des jeweiligen gaußschen Strahls (vergleichbar mit x und z in kartesischen Koordinaten). Dort wird gezeigt, dass $\Phi(\phi)$ bei einer rundstrahlenden Linienquelle eine Konstante darstellt, wenn die überlagerten gaußschen Strahlen (bis auf ihre unterschiedlichen Richtungen) alle gleichartig sind, d. h. insbesondere dieselbe Tailenbreite im Vergleich zur Wellenlänge aufweisen¹⁷. Es wird für die Gültigkeit von Gl. (4.139) vorausgesetzt, dass sich alle in Frage kommenden Beobachtungspunkte M im Fernfeld der Linienquelle befinden. Laut [65] ist das Verfahren auch für nicht rundstrahlende Linienquellen anwendbar. In diesem Fall ist die Gewichtungsfunktion $\Phi(\phi)$ proportional zu deren komplexer Richtcharakteristik.

Der Vorteil dieses Verfahrens (z. B. gegenüber der Überlagerung von Elementarquellen) besteht darin, dass die Integration in Gl. (4.139) in Abhängigkeit von der Lage des Beobachtungspunkts M nur einen Teilbereich des Intervalls $[0, 2\pi)$ umfassen muss, da die anderen Strahlen M lediglich in ihrem Randbereich „streifen“ und somit bei der Integration keinen nennenswerten Beitrag liefern. Durch eine geschickte (allerdings a priori vorzunehmende) Wahl der Tailenbreite und -position der gaußschen Strahlen kann die Zahl der im Rahmen der numerischen Integration zu summierenden Strahlen (zur Erzielung einer bestimmten Genauigkeit) minimiert und damit die Effizienz des Verfahrens optimiert werden [4].

In [64] kommen dreidimensionale gaußsche Strahlen mit i. Allg. elliptischem Querschnitt zur Berechnung der Richtcharakteristik von großen Reflektorantennen (Durchmesser z. B. 80 Wellenlängen) zum Einsatz. Es wird der Ansatz gewählt, dass das aus der Überlagerung der gaußschen Strahlen hervorgehende Feld an bestimmten Punkten einer vorgegebenen Oberfläche mit dem tatsächlichen Feld übereinstimmt (point matching). Nachdem die Strahlung des Erregers durch eine Reihe gaußscher Strahlen ausgedrückt worden ist, wird deren Reflexion am Antennenreflektor betrachtet. Eine Kantenbeugung am Reflektor bleibt unberücksichtigt. Die Bestimmung der Gewichtungsfaktoren für die einzelnen gaußschen Strahlen erfolgt im Fernfeld der Erreger; dementsprechend wird vorausgesetzt, dass sich auch der Reflektor im Fernfeld der Erregerantenne befindet.

In [1] wird von einer im Zweidimensionalen erfolgten Analyse einer elliptischen Siliziumlinse mit einem Durchmesser von ca. 11 Freiraumwellenlängen mittels 24 gaußscher Strahlen berichtet.

Summation höherer Moden

Bei der Methode der (ggf. „multiplen“) Multipole wird eine komplizierte Feldverteilung im Raum durch eine einzige oder wenige gezielt platzierte punktförmige Quellen beschrieben, die i. Allg. — wenn man sie als Antenne betrachtet — eine durchaus komplizierte

¹⁷Für die Überlagerung *unterschiedlicher* gaußscher Strahlen vgl. [65].

Richtcharakteristik aufweisen können. Daher liegt es nahe, einen entsprechenden Ansatz bei der Methode der Summation gaußscher Strahlen zu betrachten. Es ist zu erwarten, dass durch die Überlagerung mehrerer (hinsichtlich der Zentrallinie und Tailenposition) übereinanderliegender gaußscher Strahlen, die einen unterschiedlichen Modenindex m aufweisen (vgl. den entsprechenden Abschnitt auf S. 56), kompliziertere Feldverteilungen im Raum nachgebildet werden können und dadurch ein Auskommen mit insgesamt weniger Strahlen möglich ist.

Die Grundlage hierfür ist die Darstellung einer Funktion $f(t)$ im Zeitbereich durch eine Reihe von Elementarsignalen $F(m, n, \Omega, t)$ mit diskreten Frequenzen (bei der Grundschwingung Ω und bei den Oberschwingungen $n\Omega$) und Hüllkurven in Form von gaußschen Glockenkurven, deren Maxima an verschiedenen diskreten Punkten

$$t_m = m \cdot \frac{2\pi}{\Omega} = m \cdot L \quad (4.140)$$

liegen:

$$f(t) = \sum_m \sum_n A_{m,n} F(m, n, \Omega, t) = \sum_m \sum_n A_{m,n} \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{L}} \cdot \exp \left[-\pi \left(\frac{t - t_m}{L} \right)^2 + jn\Omega t \right] \quad (4.141)$$

Dies wurde erstmals von Gabor in seiner „Theory of Communication“ vorgeschlagen¹⁸ [25]. Der Parameter Ω kann zunächst willkürlich gewählt werden. Für $\Omega \rightarrow 0$ (d. h. $L \rightarrow \infty$) stellt sich der Grenzfall einer Fouriertransformation des Zeitsignals ein: Der Realteil des Arguments des Exponentials in Gl. (4.141) ist unabhängig von t näherungsweise 0, mit einem hinreichend großen n können alle Frequenzen eingestellt werden. Umgekehrt wird die Einhüllende der „Impulse“ für $\Omega \rightarrow \infty$ (d. h. $L \rightarrow 0$) zu einem Dirac-Stoß; der Abstand der Dirac-Stöße geht dann gegen 0, und nur der Gleichsignal-Fall ($n = 0$) ist relevant: Es liegt eine Abtastung im Zeitbereich vor.

Das Gabor'sche Elementarsignal $F(m, n, \Omega, t)$ wird nun mit einem (ggf. höhermodigen) gaußschen Strahl in Verbindung gebracht. Die Methode der Summation gaußscher Strahlen unter ausschließlicher Verwendung des Grundmodes stellt den Grenzfall der Abtastung im Zeitbereich dar ($L \rightarrow 0$). Mit zunehmendem Abstand L der gaußschen Strahlen werden die höheren Moden wichtiger. Einziger zeigt in [20], wie sich die Wahl des Parameters L auf die Verteilung der Koeffizienten $A_{m,n}$ auswirkt. Die Bestimmung der $A_{m,n}$ ähnelt einer Fouriertransformation der Feldverteilung in der Apertur (vgl. [61]) und erscheint deshalb nur bei planaren Aperturen (unter Verwendung kartesischer Koordinaten) zweckmäßig. In [61] wird die Methode zur Analyse elektrisch großer Reflektorantennen (Durchmesser ca. 100 Wellenlängen) verwendet. Dabei wird der Abstand der gaußschen Strahlen klei-

¹⁸Die vorgesehene Anwendung war, Signale auf ihren Informationsgehalt hin zu untersuchen. Anders als bei der Fouriertransformation gab es zunächst keine Orthogonalitätsbeziehungen, die eine Bestimmung der Gabor-Koeffizienten $A_{m,n}$ aus einem beliebigen Zeitsignal ermöglichten, so dass die Gabor-Transformation zunächst kaum eine Bedeutung erlangte. Erst Bastiaans zeigte 1980 eine Möglichkeit zur Bestimmung der Gabor-Koeffizienten [5].

ner gewählt, als es durch Gl. (4.140) nach [25] vorgegeben ist; dadurch kann Stabilität gewährleistet werden.

Für die Analyse von beliebig geformten dielektrischen Streukörpern müsste die Bestimmung der Verteilung der Koeffizienten $A_{m,n}$ anhand der Feldverteilung einer i. Allg. gekrümmten, nicht analytisch beschreibbaren Fläche erfolgen. Es ist davon auszugehen, dass die in Abschnitt 4.5 dargelegte Methode der Lösung der PE mittels finiter Differenzen für die Behandlung allgemeiner Streukörper flexibler ist als die Methode der Summation gaußscher Strahlen, so dass letztere im Folgenden nicht weiter betrachtet wird.

4.8 Grenzen der Anwendbarkeit von PE

4.8.1 Nahfeld

I. Allg. ist eine Anwendbarkeit der Methode der Parabolischen Gleichung erst beim Vorliegen von Fernfeldbedingungen sichergestellt. Ein Grund dafür sind die Forderungen für die Gültigkeit der PE (4.7) und (4.8) auf S. 31. Im Nahfeld einer Antenne ist $\partial\Psi/\partial x$ möglicherweise zu groß. In der Praxis wird darauf geachtet, dass eine PE-Rechnung erst in hinreichend großem Abstand von einer realen Antenne beginnt. Dadurch kann außerdem sichergestellt werden, dass z. B. bei parallel zum Erdboden angenommenen Ausbreitungswegen die Abweichung zur tatsächlichen Ausbreitungsrichtung nicht zu groß wird, vgl. Abschnitt 4.2.4 (S. 32).

Bei der Analyse von Linsenantennen kann der Abstand zwischen Speiseantenne und Linse (innerhalb der mit PE gerechnet werden soll) klein sein, deshalb ist die Frage des Mindestabstands zu untersuchen. Dies soll durch die Betrachtung der Strahlung eines sphärischen Multipols am Ort der Speiseantenne erfolgen. Durch die gewichtete Überlagerung der Beiträge hinreichend vieler Moden des Multipols kann die Strahlung einer Antenne im Nah- und Fernfeld vollständig charakterisiert werden [32, 33].

Es ist jedoch zu betonen, dass die Gültigkeit der PE für die einzelnen Moden einer Antenne zwar bedeutet, dass die PE auch für das Summenfeld anwendbar ist, der Umkehrschluss jedoch nicht gilt: Das Gesamtfeld einer Antenne kann durchaus für PE geeignet sein, obwohl einzelne Moden, die zur Repräsentation des Gesamtfeldes erforderlich sind, bei einer einzelnen Betrachtung sich als nicht geeignet erweisen. Diese Vorstellung entspricht dem Prinzip, dass die Summe von Lösungen einer linearen Differentialgleichung dieselbe auch erfüllt, i. Allg. jedoch die Lösung einer linearen Differentialgleichung nicht in Summanden zerlegt werden kann, die diese automatisch ebenso erfüllen. Dennoch verspricht die nachfolgende Betrachtung Antworten auf die Frage des Mindestabstands zwischen Quelle und PE-Berechnungsgebiet.

Zur Nachbildung der Speiseantenne werde ein in z -Richtung orientierter sphärischer Multipol mit einem Feld TM bezüglich r und Rotationssymmetrie in ϕ betrachtet (d. h. $\partial/\partial\phi = 0$). Die fehlende ϕ -Abhängigkeit führt dazu, dass entsprechend der Notation

in [11, 32, 33] nur Moden mit $m = 0$ vorkommen.

Wegen des Sonderfalls TM bezüglich r existiert nur eine radiale Komponente des magnetischen Vektorpotentials A_r . Nach [33] gilt für das Magnetfeld

$$H_\phi = -\frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} = -\frac{\partial}{\partial \theta} \psi_{m,r} \quad (4.142)$$

mit

$$\psi_{m,r} = \sum_n C_n h_n^{(2)}(\beta r) P_n^0(\cos \theta) \quad (4.143)$$

$$= \sum_n (\psi_{m,r})_n \quad (4.144)$$

für $m = 0$. Dabei deuten die zum skalaren Potential gehörenden Indizes „m,r“ dessen Herkunft von A_r an. Bei $h_n^{(2)}(x)$ handelt es sich um eine sphärische Hankelfunktion der Ordnung n für eine vom Multipol weglauende Welle, $P_n^0(x)$ ist ein legendresches Polynom n ten Grades [7, 33] und C_n der Gewichtungsfaktor für den entsprechenden Mode.

Um die Abstrahlung der Antenne hinreichend genau zu beschreiben, erfolgt die Summation über n bis zum höchsten vorkommenden Mode N , der sich näherungsweise aus dem Radius r_0 der kleinsten Kugel ergibt, die die entsprechende Antenne gerade umschließt [11, 32]:

$$N = k \cdot r_0 + 10 \quad (4.145)$$

Für die im Rahmen dieser Arbeit betrachteten Felder TE (bzw. TM) bezüglich ϕ ergibt sich durch den Vergleich von (4.142) und (2.59):

$$\begin{aligned} -j\omega\varepsilon_0\varepsilon_r\psi &= -\frac{\partial}{\partial \theta} \psi_{m,r} \\ \psi &= \frac{1}{j\omega\varepsilon_0\varepsilon_r} \frac{\partial}{\partial \theta} \psi_{m,r} \end{aligned} \quad (4.146)$$

Das mit PE zu behandelnde (um den Phasenterm bereinigte) Potential lautet somit

$$\Psi = \frac{1}{j\omega\varepsilon_0\varepsilon_r} \frac{\partial}{\partial \theta} \psi_{m,r} \cdot e^{j\beta r}. \quad (4.147)$$

Es setzt sich nach Gl. (4.144) zusammen aus den (gewichteten) Moden

$$\Psi_n = \frac{1}{j\omega\varepsilon_0\varepsilon_r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\psi_{m,r})_n \cdot e^{j\beta r} = \frac{e^{j\beta r}}{j\omega\varepsilon_0\varepsilon_r} \cdot C_n \cdot h_n^{(2)}(\beta r) \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} P_n^0(\cos \theta). \quad (4.148)$$

Die r -Abhängigkeit von Ψ_n wird lediglich durch die Terme $e^{j\beta r}$ und $h_n^{(2)}(\beta r)$ gebildet. Sofern ausschließlich der Mode n existiert, führt die Voraussetzung für die Gültigkeit der PE-Näherung (4.8) (für beliebige Winkel θ) zur Forderung

$$\left| \frac{\frac{\partial^2}{\partial r^2} [(\psi_{m,r})_n \cdot e^{j\beta r}]}{\beta \cdot \frac{\partial}{\partial r} [(\psi_{m,r})_n \cdot e^{j\beta r}]} \right| = \left| \frac{\frac{\partial^2}{\partial r^2} [h_n^{(2)}(\beta r) \cdot e^{j\beta r}]}{\beta \cdot \frac{\partial}{\partial r} [h_n^{(2)}(\beta r) \cdot e^{j\beta r}]} \right| \ll 1. \quad (4.149)$$

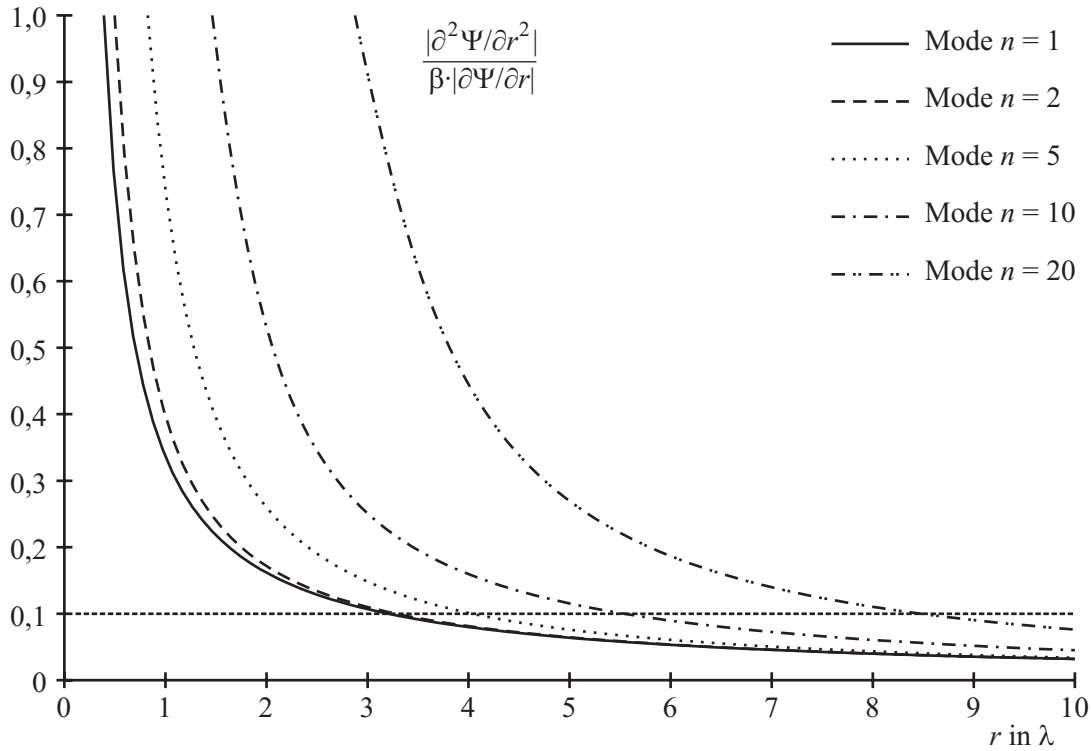
Abbildung 4.5: Erfüllung der Ungleichung (4.8) in Abhängigkeit vom Modenindex n

Abb. 4.5 zeigt die (numerisch berechnete) linke Seite der Ungleichung (4.149) in Abhängigkeit von der Entfernung r für verschiedene Modenindizes n . Es wird deutlich, dass der zur Gültigkeit der PE-Näherung (4.13) erforderliche Mindestabstand r_{\min} mit dem Modenindex zunimmt. Wird als Grenze der Anwendbarkeit

$$10 \cdot \left| \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \right| = \beta \left| \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right| \quad (4.150)$$

festgelegt, ergibt sich näherungsweise der in Abb. 4.6 dargestellte Mindestabstand in Abhängigkeit von der Ordnung des Modes n , der durch den empirisch gefundenen Ausdruck

$$(r_{\min})_n \approx \left(0,31n + \frac{5}{n+5} + 2 \right) \cdot \lambda \quad (4.151)$$

approximiert werden kann. Dieser gilt zwar nur für die Anwendung der PE auf isoliert auftretende Moden der Ordnung n . Dennoch kann er dahingehend interpretiert werden, dass selbst für schwach bündelnde Antennen ($n \approx 1 \dots 10$) bzw. Elementardipole ($n = 1$) ein Abstand zwischen Antenne und PE-Gebiet von mindestens drei bis fünf Wellenlängen einzuhalten ist. Bei stärker bündelnden Antennen ($n > 10$) wäre demnach — je nach dem höchsten zu berücksichtigenden Mode N — mit Mindestabständen in der Größenordnung von fünf bis zehn Wellenlängen zu rechnen.

Ein eventueller Beitrag zu $|\partial \Psi / \partial x|$ bzw. $|\partial^2 \Psi / \partial x^2|$, der entsteht, wenn die tatsächliche Ausbreitungsrichtung nicht mit der angenommenen übereinstimmt¹⁹, kommt noch hinzu

¹⁹Vgl. Abschnitt 4.2.4.

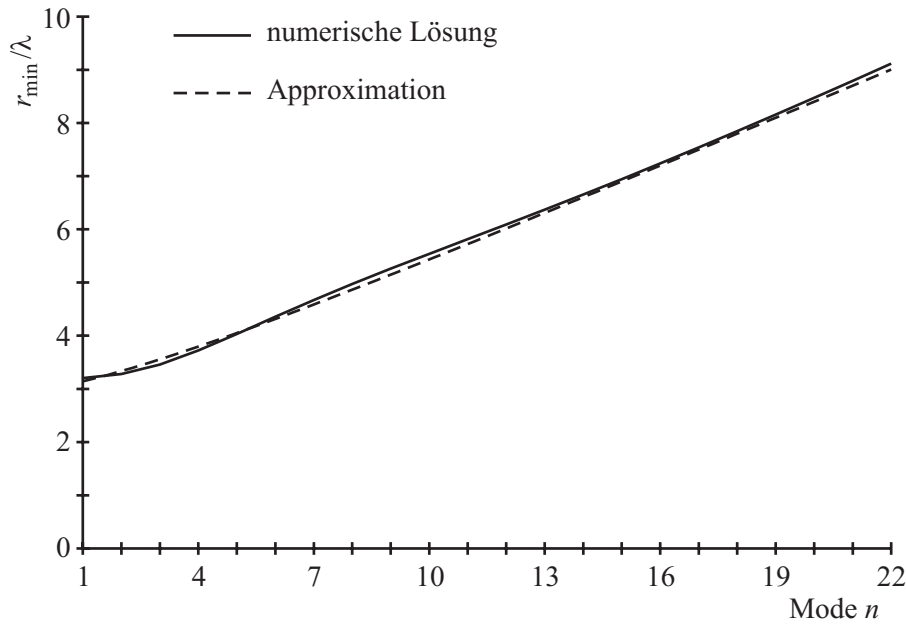


Abbildung 4.6: Mindestentfernung zwischen Antenne und PE-Gebiet in Abhängigkeit vom Modenindex n (numerische Lösung und Approximation durch Gl. (4.151)).

und führt entsprechend zu einem größeren Mindestabstand als in Gl. (4.151) angegeben. Die an dieser Stelle nicht explizit behandelte Voraussetzung (4.7) führt bei der Vorgabe

$$10 \cdot \left| \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right| \leq \beta |\Psi| \quad (4.152)$$

für alle Modenindizes n zu kleineren (also weniger kritischen) Mindestabständen als (4.8). Im reaktiven Nahfeld einer Antenne kann keine PE angewendet werden, da dort keine vorherrschende Ausbreitungsrichtung angegeben werden kann, vgl. Abschnitt 4.8.3. Das reaktive Nahfeld reicht lediglich bis in eine Entfernung von ca. $\lambda/(2\pi)$ ausgehend von jedem Punkt der Antenne [11]. Wird der in Gl. (4.151) gegebene Mindestabstand eingehalten, kann davon ausgegangen werden, dass kein reaktives Nahfeld mehr vorliegt.

4.8.2 Sich kreuzende angenommene Ausbreitungswege

Sich kreuzende angenommene Ausbreitungswege stellen bei der PE-Methode ein Problem dar, das einer genaueren Betrachtung bedarf. Bei der klassischen Behandlung der Wellenausbreitung mittels PE werden die Ausbreitungswege a priori so angesetzt, dass sie sich *nicht* schneiden können. Dies kann beispielsweise durch die Verwendung zueinander paralleler Ausbreitungswege sichergestellt werden.

Im Bereich der Wellenausbreitung wird die PE gewöhnlich erst im Fernfeld einer Quelle eingesetzt, da erst ab einem Mindestabstand von einigen Wellenlängen die Forderungen für die Gültigkeit der PE (4.7) und (4.8) erfüllt sind, vgl. hierzu die Betrachtungen in Abschnitt 4.8.1. Im Fernfeld einer Quelle kann die sich ausbreitende Welle näherungsweise als

lokal eben angenommen werden. Parallele oder divergierende angenommene Ausbreitungswege genügen, um die tatsächliche Ausbreitungsrichtung der Welle bis auf die geforderten $\pm 15^\circ$ (Standard-PE) anzunähern. Reflexionen am Erdboden erfolgen durch streifenden Einfall und können auch durch zum Boden parallele angenommene Ausbreitungswege korrekt erfasst werden. Bereiche konvergierender angenommener Ausbreitungswege brauchen nicht angesetzt zu werden.

Bei der Analyse von Linsenantennen verhält es sich dahingehend anders, dass die PE auch schon innerhalb des Antennensystems zum Einsatz kommt, in dem Bereiche konvergierender Strahlung nicht (wie im Fernfeld einer Antenne) ausgeschlossen sind. Werden nun die für die PE-Berechnung angenommenen Ausbreitungswege an die tatsächliche Ausbreitungsrichtung angepasst (z. B. durch Verwendung von Strahlenkoordinaten), bedarf die Behandlung des Übergangsbereichs zwischen konvergierender und divergierender Strahlung, also z. B. die Überwindung eines Brennpunkts oder „Brennflecks“, einer genaueren Betrachtung und Diskussion.

Sofern geometrisch-optische Strahlen als Ausbreitungswege verwendet werden, kann es auch in Bereichen nicht-konvergierender Strahlen durch Rundungsfehler bzw. Ungenauigkeiten im Polygonzug, der die Linsenoberfläche beschreibt, zu sich schneidenden angenommenen Ausbreitungswegen kommen, die die Anwendung von PE erheblich stören, vgl. hierzu auch Anhang C ab S. 137.

Entscheidend ist, dass mit PE nicht über den Kreuzungspunkt zweier (oder gar mehrerer bzw. aller) Ausbreitungswege hinweg gerechnet werden kann. Dies wird nachfolgend begründet. Die Lösung der Problematik sich schneidender Ausbreitungswege führt zum Ansatz, die angenommenen Ausbreitungswege am Verlauf der Energieströmungslinien zu orientieren, vgl. Abschnitt 6.4.

Im Schnittpunkt zweier Ausbreitungswege ist deren Abstand Null. Dies entspricht in kartesischen Koordinaten im Finite-Differenzen-Algorithmus einem $\Delta z = 0$, vgl. (4.54), bzw. $\Delta s = 0$, vgl. (4.72), und führt damit zu einer Division durch Null.

Die Wahrscheinlichkeit, dass der Schnittpunkt zweier Ausbreitungswege beim Voranschreiten der PE-Rechnung *exakt* getroffen wird, ist genau genommen gleich Null²⁰, wenn dessen Position (also z. B. in Strahlenkoordinaten die ξ -Koordinate einer der beiden Ausbreitungswege) nicht im durch die Gln. (4.51), (4.80) oder (4.81) gegebenen Raster liegt. Dadurch ist es möglich, dass der Finite-Differenzen-Algorithmus trotz Überschreitens eines Kreuzungspunkts nicht aufgrund des Fehlers „Division durch Null“ abbricht. Wird die PE-Rechnung jedoch ohne Beachtung des Schnitts weiter durchgeführt, ergibt sich die in Abb. 4.7 beschriebene Problematik der Vertauschung der Reihenfolge räumlich benachbarter Ausbreitungswege im Schnittpunktbereich, wodurch die Bestimmung der zweiten Ableitung nach Gl. (4.54) bzw. (4.72) fehlerhaft würde. Sofern sich *alle* Ausbreitungswege in *einem* Punkt (Brennpunkt) schneiden, kommt der Singularität die Bedeutung zu,

²⁰Dies ist vergleichbar mit der Wahrscheinlichkeit Null, dass eine reelle Zufallszahl *exakt* einer anderen reellen Zahl entspricht.

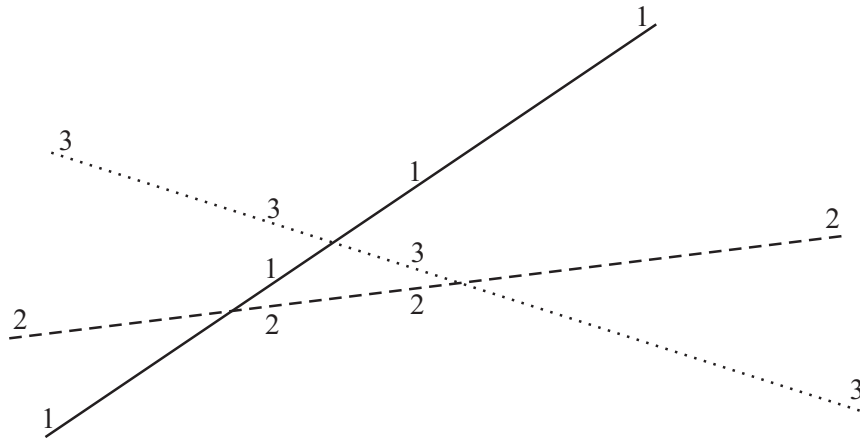


Abbildung 4.7: Problem einer vertauschten räumlichen Abfolge dreier sich nicht in einem Punkt schneidender Strahlen

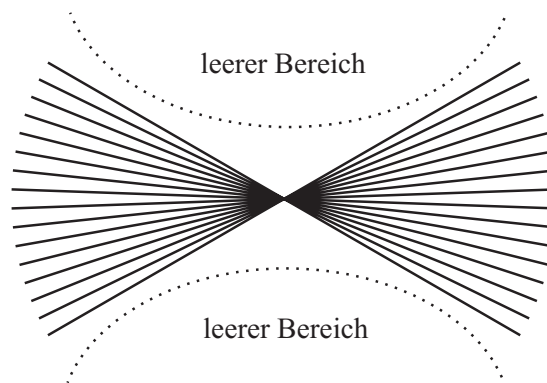


Abbildung 4.8: Entstehung von leeren Bereichen durch Konzentration von Strahlen

dass in deren Umgebung weite Bereiche des Raums nicht mehr erfasst werden, vgl. hierzu Abb. 4.8.

4.8.3 Keine vorherrschende Ausbreitungsrichtung, Reflexionen

Für die Anwendung von PE muss eine vorherrschende Ausbreitungsrichtung der elektromagnetischen Welle bekannt sein. Die Lösung der PE erfolgt Schritt für Schritt in Ausbreitungsrichtung. Rücklaufende Wellen bleiben somit prinzipiell unberücksichtigt. Bei der Analyse von Linsenantennen, die abschnittsweise aus homogenen Materialien mit jeweils konstanter Dielektrizitätszahl bestehen, stellt dies insofern keine wesentliche Einschränkung dar, als Reflexionen nur an den Abschnittsgrenzen, an denen die Dielektrizitätszahl springt, entstehen können. Bei Bedarf lässt sich ausgehend von einer Abschnittsgrenze unter Berücksichtigung der Randbedingungen entsprechend den fresnelschen Beziehungen eine PE-Rechnung für die reflektierten Anteile in die entgegengesetzte Richtung starten. Je nach der geforderten Genauigkeit sind Mehrfachreflexionen bis zu

einer bestimmten Ordnung zu berücksichtigen, d. h. mehrere getrennte PE-Rechnungen durchzuführen und schließlich alle Teilergebnisse zu überlagern.

Collins und Evans verwenden das Prinzip der abschnittswisen Lösung der PE in Gebieten konstanter Ausbreitungsgeschwindigkeit und die Betrachtung der Reflexionen an den Grenzflächen dieser Gebiete zur Entwicklung eines Algorithmus für die sog. Zwei-Wege-PE [15, 49].

Kapitel 5

Klassische Analyse dielektrischer Streukörper

5.1 Geometrische Optik

Beim Verfahren der Geometrischen Optik wird eine lokal ebene Welle durch einen Strahl repräsentiert, der sich in einem homogenen Medium mit konstanter Brechzahl geradlinig ausbreitet. Die Forderung nach lokal ebenen Wellen bewirkt, dass die Strukturen — z.B. Grenzflächen, auf welche die GO-Strahlen treffen — groß gegenüber der Wellenlänge sein müssen. Ein GO-Strahl verändert seine Eigenschaften im Laufe seiner Ausbreitung nicht und tritt nicht in Wechselwirkung mit anderen Strahlen. Für ihn gilt das Prinzip der ungestörten Superposition. Der herausragende Vorteil der Geometrischen Optik ist der außerordentlich geringe Bedarf an Rechenzeit und Speicherplatz. Bei der Analyse von dielektrischen Linsen mittels GO wird angenommen, dass von der Speiseantenne Strahlen ausgehen, die bei einem schrägen Einfall auf die Grenzfläche zwischen Luft und Linse gemäß dem Snelliusschen Brechungsgesetz gebrochen werden [10]. Ferner kommt es gemäß den Fresnelschen Beziehungen zu Reflexionen an den Grenzflächen, sofern keine geeigneten Antireflexionsschichten vorhanden sind. Mit GO kann i. Allg. nur die Wellenausbreitung über kurze Strecken, also z. B. bis zur Linsenapertur, aber nicht das Fernfeld bestimmt werden. Im Fernfeld einer Antenne verlaufen alle Strahlen radial ausgehend vom weit entfernten und daher punktförmig anzunehmenden Ort der Antenne, dem gedachten Phasenzentrum. Dies bedeutet, dass sich die Richtcharakteristik nicht mehr (wie im Nahfeld) mit der Entfernung zwischen Antenne und Beobachter ändert, wie es die Definition des Fernfeldbegriffs erfordert. Exakt von einem Punkt ausgehende Strahlen bewirken, dass die Amplituden der mittels GO berechneten Feldstärken — wie dies im Fernfeld einer Antenne der Fall sein muss — mit $1/r$ bei Punktquellen bzw. $1/\sqrt{r}$ bei Linienquellen abnehmen. Die aus einer Apertur (z.B. einer Linse) tretenden GO-Strahlen schneiden sich jedoch i. Allg. *nicht* rückwärtig in einem Punkt. Der bei den in Abschnitt 6.4 behandelten Energieströmungslinien zu beobachtende allmähliche Übergang zu scheinbar von ein und

demselben Punkt ausgehenden Strahlen und damit zum Fernfeld ist mittels GO nicht modellierbar. Beispielsweise lässt sich der Übergang von parallelen Strahlen zu radial verlaufenden Strahlen als unvermeidliche Divergenz (Strahlaufweitung) eines Laserstrahls beobachten und mit dem starken Amplitudengefälle am Rand des Strahlbündels und der dadurch gemäß den maxwellschen Gleichungen einsetzenden „Felddiffusion“ in den Schattenbereich begründen. Werden mit GO nur kurze Wegstrecken (also z. B. Ausbreitungswege innerhalb einer dünnen Linse) zurückgelegt, kann die fehlende Berücksichtigung der durch das Amplitudengefälle bedingten Divergenz i. Allg. hingenommen und die Feldverteilung in der Apertur oder in einer vorgelagerten — geometrisch einfacher beschreibbaren — virtuellen Apertur hinreichend genau bestimmt werden. Je länger die mittels GO im Nahfeld überwundene Laufstrecke ist und je kleiner die Strukturen der Grenzflächen zwischen zwei unterschiedlichen Dielektrika ausfallen, desto eher sind bei Anwendung der GO Ungenauigkeiten zu erwarten, also z. B. bei Linsenantennen, die einen kleinen Durchmesser, aber eine große Dicke aufweisen. Für die Berechnung des Fernfeldes wird gewöhnlich auf äquivalente Quellen (vgl. Abschnitt 5.2) zurückgegriffen.

Der Schnittpunkt zweier GO-Strahlen bildet — sofern sie aus derselben Quelle stammen — ein lokales Phasenzentrum, d. h. einen lokalen Brennpunkt im geometrisch-optischen Sinne. Schneiden sich benachbarte Strahlen nicht in ein und demselben Punkt, bildet die Aneinanderreihung der lokalen Brennpunkte im Zweidimensionalen eine Brennlinie (im Dreidimensionalen entsprechend eine Brennfläche), die Kaustik genannt wird [17]. Der Abstand r vom lokalen Phasenzentrum bestimmt den dort vorherrschenden Grad der Amplitudenzunahme (bei konvergierenden Strahlen) bzw. -abnahme (bei divergierenden Strahlen). Bei GO gilt:

$$E(r + \Delta r) = E(r) \cdot \frac{r}{r + \Delta r} \quad (5.1)$$

für eine Kugelwelle¹ (3D-Fall) und

$$E(r + \Delta r) = E(r) \cdot \sqrt{\frac{r}{r + \Delta r}} \quad (5.2)$$

für eine Zylinderwelle (2D-Fall). Dabei ist es von Vorteil,

$$\begin{aligned} r &> 0 \text{ für divergierende Strahlen und} \\ r &< 0 \text{ für konvergierende Strahlen} \end{aligned}$$

anzunehmen, vgl. Abb. 5.1. Im lokalen Brennpunkt (d. h. für $\Delta r = r$) ergibt sich nach Gl. (5.1) und (5.2) eine unendlich hohe Feldstärke. Dies kommt von der geometrisch-optischen Anschauung, dass im Brennpunkt ein endlicher Leistungsfluss in einem gegen Null gehenden Volumen konzentriert wird. In Wirklichkeit ist eine derartige Konzentration aufgrund der natürlichen Divergenz einer stark gebündelten Strahlungsquelle nicht

¹Hier wird der Sonderfall betrachtet, dass der Schnittpunkt eines Strahls mit dessen Nachbar in der ersten Dimension (also z. B. in ϑ -Richtung) und mit dessen Nachbar in der zweiten Dimension (z. B. in φ -Richtung) identisch ist, sonst ist eine differenziertere Betrachtung erforderlich.

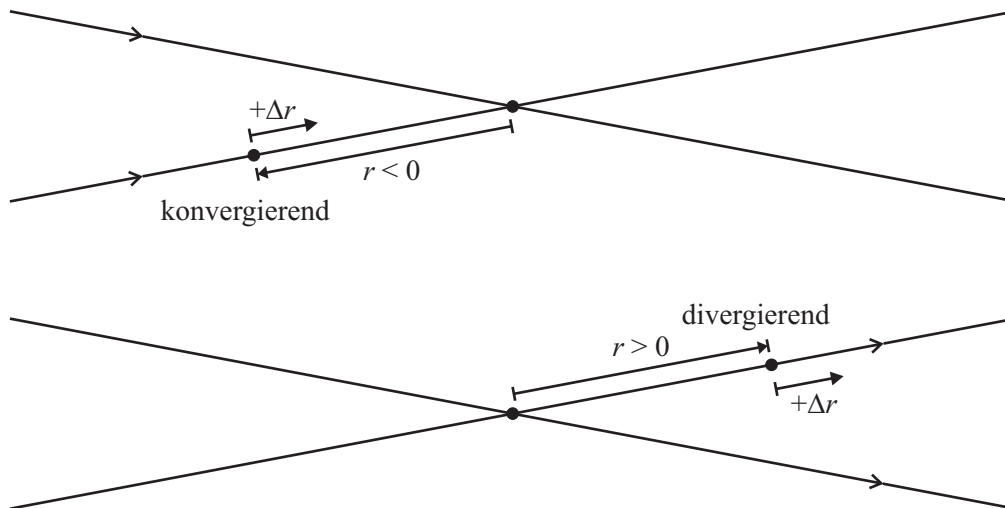


Abbildung 5.1: Sich schneidende Strahlen bei GO

möglich; anstelle eines von GO vorhergesagten Brennpunkts kommt es zu einem (je nach Frequenz mehr oder weniger stark) räumlich (d. h. auch in Ausbreitungsrichtung) ausge dehnten „Brennbereich“. In der Umgebung von Strahlschnittpunkten versagt somit die GO zur Beschreibung der genauen Feldverteilung.

Dennoch gilt für einen geometrisch-optischen Strahl das Prinzip der ungestörten Überlagerung in linearen Medien, d. h. in entsprechender Entfernung hinter dem Brennpunkt kann GO zur Bestimmung der dort vorherrschenden Felder wieder verwendet werden, wenn derjenige Teil des elektromagnetischen Feldes, den der Strahl repräsentiert, nach wie vor als lokal ebene Welle anzunehmen ist.

Sich kreuzende Strahlen können durch numerische Ungenauigkeiten bei der Analyse auch in Linsen auftreten, bei denen ausgehend vom ursprünglichen Entwurf nur parallele und divergierende Strahlen zu erwarten sind. Diese Problematik tritt insbesondere dann auf, wenn die Geometrie der zu analysierenden Linse (in einer zweidimensionalen Betrachtung) durch einen Polygonzug repräsentiert wird. Jeder Bereich um einen entsprechend gerichteten Knick im Polygonzug stellt quasi eine Miniatur-Sammellinse dar, die beispielsweise einfallende näherungsweise parallele Strahlen dahingehend bündeln kann, dass sie sich schneiden — auch wenn die Sammellinse so klein gegenüber der Wellenlänge ist, dass dieser Bündelungseffekt in Wirklichkeit nicht zu Tage tritt. Dies wird in Anhang C ab S. 137 genauer betrachtet. Sofern der so entstandene Schnittpunkt zweier (oder mehrerer) Strahlen in unmittelbarer Nähe der Linsenapertur liegt, wird dort für die Fernfeldberechnung fälschlicherweise ein sehr hoher (im Grenzfall ein gegen unendlich gehender) Betrag der äquivalenten Quelle angenommen. Diese Problematik sich unbeabsichtigt kreuzender Strahlen betrifft nicht nur die Linsenanalyse mittels GO, sondern auch die Anwendung der PE, vgl. Abschnitt 4.8.2.

5.2 Äquivalente Quellen, Fresnel-Integral-Methode

Auf äquivalente Quellen wird gewöhnlich zurückgegriffen, um ausgehend von einer bekannten Feldverteilung in der Apertur einer Antenne deren Fernfeld zu bestimmen. Grundsätzlich besteht die Möglichkeit, äquivalente Quellen bereits an der Linseneintrittsfläche anzunehmen und in einem ersten Schritt die Feldstärkeverteilung entlang der Apertur zu bestimmen, um eine höhere Genauigkeit unter Inkaufnahme eines höheren Rechenzeitbedarfs im Vergleich zur Geometrischen Optik zu erzielen; dieser Ansatz wird beispielsweise in [56] verfolgt.

Beim Ausdruck „Methode der äquivalenten Quellen“ handelt es sich um einen Überbegriff für die Vorgehensweise, dass die Wirkung realer Quellen in Gegenwart von Materialien (z. B. Blenden, Streukörpern) virtuellen Quellen zugeschrieben wird, die vorzugsweise im Freiraum strahlen und in den relevanten Teilbereichen dasselbe Feld erzeugen wie die realen Quellen [66]. Während bei der Feldberechnung beim Vorhandensein von Streukörpern Randbedingungen zu berücksichtigen sind, gestaltet sich die Überlagerung der von äquivalenten Quellen im Freiraum verursachten Felder entsprechend einfach. Das wesentliche Element bei der Anwendung der Methode ist die richtige Anordnung äquivalenter Quellen im Raum und die Bestimmung von deren (komplexen) Amplituden. Kern der Methode sind das Äquivalenzprinzip und das Huygenssche Prinzip. Ersteres besagt, dass die Wirkung von (realen) Quellen, die sich innerhalb eines geschlossenen Gebiets befinden, außerhalb des Gebiets eindeutig und exakt durch die tangential elektrische und magnetische Feldstärke auf der Oberfläche des Gebiets gegeben sind [33]. Das Huygenssche Prinzip besagt, dass jede Wellenfront als Überlagerung von Wellenfronten elementarer Quellen angesehen werden kann [39]. Dadurch kann der kontinuierliche Verlauf der tangentialen elektrischen und magnetischen Feldstärke auf dem Rand des Gebiets durch eine Reihe von Elementarquellen nachgebildet werden.

In [56] wird eine ellipsenförmige Linse mittels äquivalenter Quellen und der physikalisch-optischen Näherung analysiert und das Verfahren allgemein beschrieben. Nachfolgend soll die Anwendung äquivalenter Quellen im Kontext mit der Anwendung der PE-Methode stehen und eine Vorgehensweise aufgezeigt werden, wie eine Rechnung mit denselben Eingangsgrößen wie bei einer PE-Rechnung — einem bekannten skalaren Potential auf einer Anfangsfront — erfolgen kann. Dieses Verfahren ist dann z. B. einsetzbar, um einen PE-Algorithmus zu verifizieren. Die nachfolgenden Betrachtungen erfolgen im Zweidimensionalen unter Annahme von Linienquellen. Bei der Verwendung von Algorithmen, bei denen eine Rotationssymmetrie in ϕ vorausgesetzt wird, bedeutet das, dass der Abstand der maßgeblichen Raumbereiche von der Rotationsachse gegen unendlich geht. Die Koordinate ϕ geht in diesem Fall in die Zylinderkoordinate² y über, d. h. $H_\phi = H_y$. Wegen der Betrachtung des 2D-Falls gilt $\partial/\partial y = 0$, vgl. Anhang G.

²Es werden Zylinderkoordinaten r, θ, y verwendet, bei denen r und θ der Definition in Kugelkoordinaten für $\phi = 0$ entsprechen, vgl. Anhang A.1.

Aus Gl. (3.48) geht hervor, dass die skalare Wellenfunktion ψ im TE-Fall bzgl. ϕ proportional zur ϕ -Komponente des magnetischen Feldes ist. Bei der Berechnung der Wellenausbreitung mittels PE wird zu Beginn der Rechnung ψ aus H_ϕ ermittelt, ψ schrittweise im gesamten Gebiet berechnet und dort, wo das Berechnungsergebnis gesucht ist, H_ϕ wiederum aus ψ bestimmt. Die Komponenten des elektrischen Feldes können aus ψ mittels Differenzierung gewonnen werden, vgl. (3.47).

Mittels der Methode der äquivalenten Quellen soll wie bei der Anwendung von PE die Verteilung von $H_\phi = H_y$ im TE-Fall bzgl. y direkt aus gegebenen H_y -Werten auf einer Anfangsfront bestimmt werden. Hierzu erfolgt entlang der Anfangsfront eine Trennung des Raumes in zwei Gebiete. Die Anfangsfront wird dabei wie bei der Herleitung der Physikalischen Optik in [3] ins Unendliche verlängert, vgl. Abb. 5.2a. Gebiet 1 enthält sämtliche (real vorhandenen) Quellen. Entsprechend dem Äquivalenzprinzip werden auf der Anfangsfront elektrische Flächenströme \vec{J}_* angesetzt, die in Gebiet 2 dieselbe Wirkung haben wie die Quellen in Gebiet 1. Es gilt [33]

$$\vec{J}_* = \hat{n} \times \vec{H}. \quad (5.3)$$

Um keine magnetischen Flächenströme aufgrund des (noch unbekannt³) elektrischen Feldes ansetzen zu müssen, wird Gebiet 1 mit einem idealen magnetischen Leiter ($\kappa_m \rightarrow \infty$) aufgefüllt, vgl. Abb. 5.2b. Dies ist zulässig, da Gebiet 1 bedingt durch die Überlagerung der Wirkung der realen und äquivalenten Quellen feldfrei ist [33]. Um äquivalente Quellen zu erhalten, die im Freiraum strahlen, muss das ideal magnetisch leitfähige Material entfernt werden. Hierzu wird wie bei der Physikalischen Optik näherungsweise angenommen, dass der lokale Krümmungsradius der Fläche, auf der die elektrischen Ströme angenommen werden, groß gegenüber der Wellenlänge ist. In diesem Fall ist es vertretbar, die Bildladungsmethode anzuwenden, wodurch die doppelten Ströme $2 \cdot \vec{J}_*$ im Freiraum strahlen (Abb. 5.2c).

Nach der klassischen Vorgehensweise [3, 33] ergibt sich aus der Überlagerung der Wirkung der elektrischen Flächenströme \vec{J}_* an einem Beobachtungspunkt das *magnetische* Vektorpotential

$$\vec{A}(\vec{r}) = -\frac{j}{4} \int_{S_\ell} \vec{J}_*(\vec{r}') \cdot H_0^{(2)}(\beta|\vec{r} - \vec{r}'|) d\ell. \quad (5.4)$$

Bei S_ℓ handelt es sich (wegen des 2D-Falls) um die Linie mit den äquivalenten Quellen und bei $H_0^{(2)}(x)$ um die Hankelfunktion nullter Ordnung zweiter Art; \vec{r}' stellt den Ortsvektor zur jeweiligen Quelle \vec{J}_* dar. \vec{A} weist dieselben Komponenten wie \vec{J}_* auf, d. h. ausgehend von den \vec{J}_* in Abb. 5.2 z. B. in Zylinderkoordinaten eine r - und θ -, aber keine y -Komponente. Die Berechnung von $H_\phi = H_y$ aus \vec{A} erfolgt nach Gl. (2.30) durch Bildung der Rotation von \vec{A} . In Zylinderkoordinaten r, θ, y gilt z. B. im 2D-Fall für $\partial/\partial y = 0$ und

³Zur Bestimmung des elektrischen Feldes wäre es gemäß Gl. (2.58) erforderlich, H_y nach r abzuleiten; dies ist numerisch aber noch nicht möglich, da lediglich H_y -Werte auf *einer* Front und nicht auf zwei benachbarten Fronten gegeben sind.

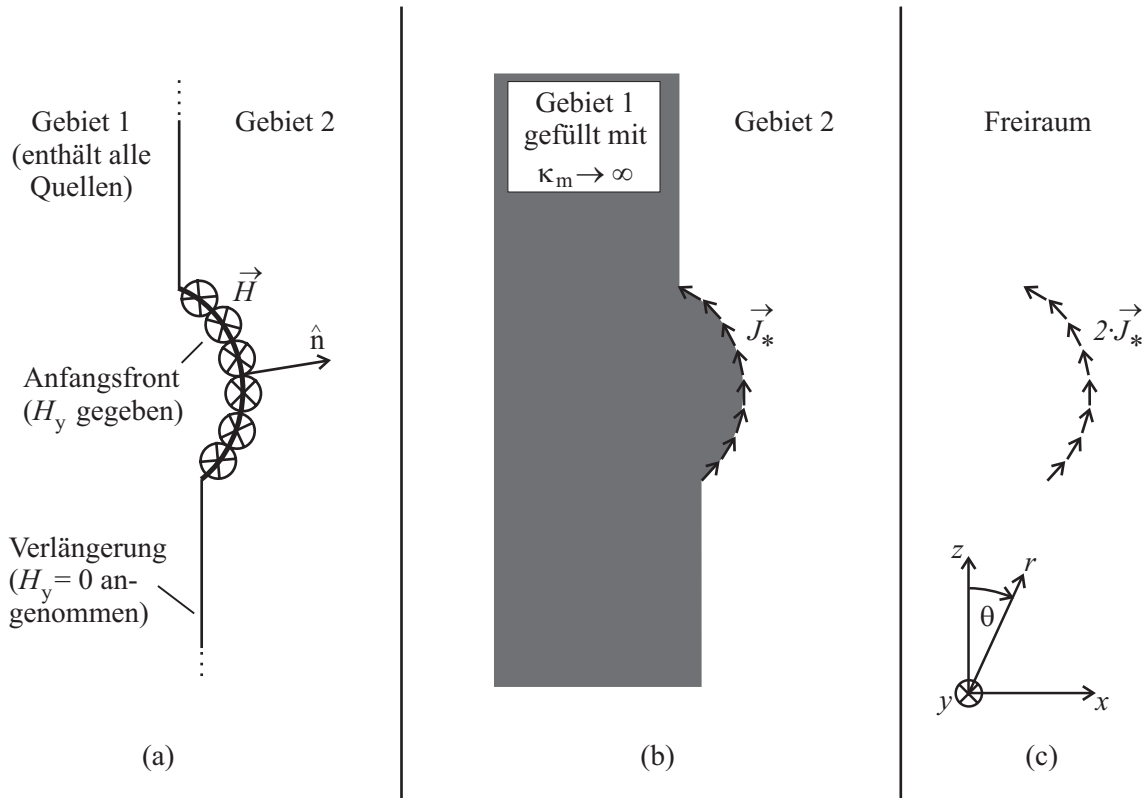


Abbildung 5.2: Bestimmung äquivalenter Flächenströme aus dem auf der Anfangsfront gegebenem Magnetfeld im TE-Fall bzgl. ϕ bei Rotationssymmetrie in ϕ

einem \vec{A} , das keine y-Komponente aufweist⁴:

$$\vec{H} = \text{rot} \begin{pmatrix} A_r \\ A_\theta \\ 0 \end{pmatrix} = \hat{y} \cdot \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot A_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} A_r \right) = \hat{y} \cdot H_y \quad (5.5)$$

Demnach ist i. Allg. eine Ableitung in r-Richtung erforderlich, was bedeutet, dass das mittels Gl. (5.4) berechnete Vektorpotential \vec{A} zur numerischen Ausführung der Differenzierung für zwei unterschiedliche Werte von r vorliegen muss. Abgesehen von der eigentlichen Differenzierung bedeutet dies einen um Faktor zwei erhöhten Rechenaufwand für die Methode der äquivalenten Quellen. Daher soll im Folgenden gezeigt werden, wie $H_\phi = H_y$ direkt aus der Überlagerung der äquivalenten Linienquellen ohne Bildung der Rotation des Vektorpotentials bestimmt werden kann. Dazu wird die Wirkung eines Flächenstroms der infinitesimalen Länge $d\ell$ betrachtet. Vorübergehend wird die Annahme getroffen, dass er in z-Richtung zeigt, vgl. Abb. 5.3. Der Flächenstrom erzeugt im Beobachtungspunkt P den magnetischen Vektorpotential-Anteil

$$d\vec{A} = -\frac{j}{4} \vec{J}_*(\vec{r}') \cdot H_0^{(2)}(\beta|\vec{r} - \vec{r}'|) d\ell. \quad (5.6)$$

⁴Für die Rotation in Zylinderkoordinaten vgl. z. B. [45].

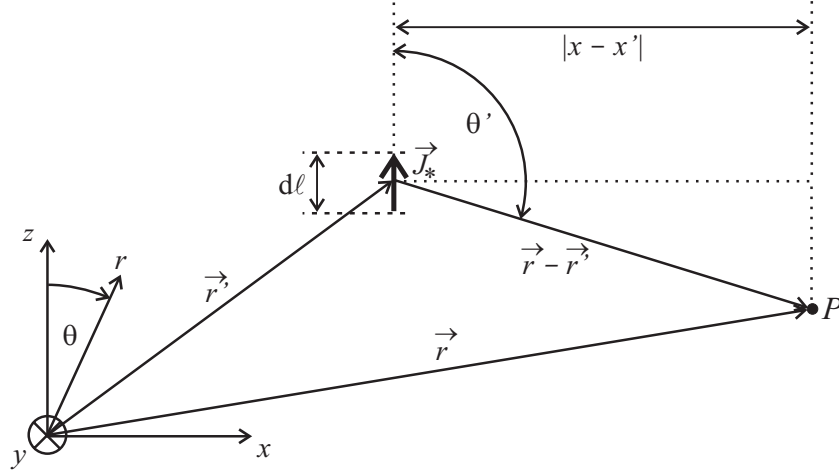


Abbildung 5.3: Zur Herleitung der Strahlung eines Linienstroms mit der infinitesimalen Länge $d\ell$. (Der Linienstrom ist in $\pm y$ -Richtung unendlich ausgedehnt.)

Da \vec{J}_* in z -Richtung zeigt, weist \vec{A} lediglich eine z -Komponente auf. In kartesischen Koordinaten gilt für den hier betrachteten 2D-Fall mit der Annahme $y = 0$

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{r}' = \begin{pmatrix} x' \\ 0 \\ z' \end{pmatrix}, \quad (5.7)$$

d. h.

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{(x - x')^2 + (z - z')^2}. \quad (5.8)$$

Aus Gl. (5.6) und (5.8) folgt

$$dA_z = -\frac{j}{4} |\vec{J}_*(\vec{r}')| \cdot H_0^{(2)} \left(\beta \sqrt{(x - x')^2 + (z - z')^2} \right) d\ell. \quad (5.9)$$

Aus Gl. (2.30) folgt mit $\partial/\partial y = 0$

$$\vec{H} = -\hat{y} \cdot \frac{\partial}{\partial x} A_z \quad (5.10)$$

und mit Gl. (5.9) und $\partial H_0^{(2)}(x)/\partial x = -H_1^{(2)}(x)$ (vgl. [7])

$$\begin{aligned} dH_y &= -\frac{\partial}{\partial x} dA_z \\ &= -\frac{j\beta}{4} |\vec{J}_*(\vec{r}')| \cdot H_1^{(2)} \left(\beta \sqrt{(x - x')^2 + (z - z')^2} \right) \cdot \frac{x - x'}{\sqrt{(x - x')^2 + (z - z')^2}} d\ell. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Mittels des in Abb. 5.3 enthaltenen Winkels θ' zwischen der Orientierung der Quelle \vec{J}_* und der Verbindungslinie zwischen Quelle und Beobachtungspunkt ($\vec{r} - \vec{r}'$) lässt sich folgende Abkürzung einführen:

$$\frac{x - x'}{\sqrt{(x - x')^2 + (z - z')^2}} = \sin[\theta'(\vec{r}', \vec{r})] \quad (5.12)$$

Aus Gl. (5.3) folgt mit dem zusätzlichen Faktor zwei aus der Anwendung der Bildladungsmethode (vgl. Abb. 5.2c):

$$|\vec{J}_*(\vec{r}')| = 2 \cdot H_y(\vec{r}') \quad (5.13)$$

Durch die im TE-Fall bzgl. y vorherrschende Proportionalität zwischen H_y und der y -Komponente des elektrischen Vektorpotentials $F_y = \psi$ kann H_y auf der linken und rechten Seite von Gl. (5.11) durch ψ ersetzt werden; mit Gl. (5.8), (5.12) und (5.13) ergibt sich

$$d\psi = -\frac{j\beta}{2} \cdot \psi(\vec{r}') \cdot H_1^{(2)}(\beta|\vec{r} - \vec{r}'|) \cdot \sin[\theta'(\vec{r}', \vec{r})] d\ell. \quad (5.14)$$

Nach dieser Schreibweise ist es nicht mehr erforderlich, dass die äquivalenten Linienquellen in z -Richtung orientiert sind, da lediglich deren Abstand $|\vec{r} - \vec{r}'|$ und deren Winkel θ' zum Beobachtungspunkt entscheidend ist. Die Wirkung aller Quellen ergibt sich schließlich aus der Integration von Gl. (5.14):

$$\psi(\vec{r}) = -\frac{j\beta}{2} \int_{S_\ell} \psi(\vec{r}') \cdot H_1^{(2)}(\beta|\vec{r} - \vec{r}'|) \cdot \sin[\theta'(\vec{r}', \vec{r})] d\ell. \quad (5.15)$$

Mit Gl. (5.15) lässt sich die skalare Größe ψ wie bei Anwendung eines PE-Algorithmus im Zweidimensionalen ausgehend von einer auf einer Anfangsfront gegebenen Verteilung von ψ in abschnittsweise homogenen Medien berechnen.

Pro Beobachtungspunkt P sind die Anteile aller Linienquellen zu integrieren, zu denen ein direkter „Sichtkontakt“ besteht. Sofern kein Sichtkontakt besteht, würde die Strahlung der betreffenden Quelle durch das ideal magnetisch leitfähige Material in Abb. 5.2b abgeschirmt. Es darf nicht übersehen werden, dass der Übergang von Abb. 5.2b nach Abb. 5.2c eine (wie bei der Physikalischen Optik praktizierte) Näherung darstellt, was sich darin äußert, dass z. B. in Abb. 5.2b enthaltene Beugungseffekte nicht mehr in Erscheinung treten, wenn die Quellen im Freiraum strahlen.

Im Vergleich zur PE-Methode ist der Rechenaufwand bei Verwendung äquivalenter Quellen ab einer bestimmten Größe des Berechnungsproblems in jedem Fall höher. Für einen einfachen Vergleich sei angenommen, dass ψ_n in N Beobachtungspunkten gesucht ist und ausgehend von N Punkten, in denen ψ bekannt ist, bestimmt werden soll, vgl. das PE-Gitter in Abb. 4.2. Bei PE steigt die Zahl der erforderlichen Berechnungsschritte linear mit N , bei Verwendung äquivalenter Quellen mit N^2 .

5.3 Verwendung asymptotisch exakter Methoden

Die Verwendung asymptotisch exakter Methoden zur Analyse dielektrischer Linsen ist prinzipiell möglich, bedeutet aber einen vergleichsweise hohen Aufwand an Rechenzeit und Speicherplatz. „Asymptotisch exakt“ bedeutet bei numerischen Berechnungsverfahren, dass abgesehen von der Diskretisierung des Raumes, der Zeit oder der Geometrie der Streukörper keine Näherungen enthalten sind. Durch eine entsprechend feine Diskretisierung lässt sich somit eine beliebige Genauigkeit erreichen. Eine Übersicht über die Verwendung der asymptotisch exakten Methoden FDTD (Finite Differenzen im Zeitbereich),

MoM (Momentenmethode) und FEM (Finite Elemente) für die Analyse von Antennen findet sich in [35]. Im Folgenden wird die Eignung von FDTD und MoM zur Berechnung dielektrischer Linsen näher betrachtet.

5.3.1 Finite Differenzen im Zeitbereich (FDTD)

Beim FDTD-Verfahren wird der Raum in rechteckige (2D-Fall) bzw. quaderförmige Zellen unterteilt [69]. An den Kanten der Zellen werden die jeweiligen elektrischen Feldstärken angenommen, in der Zellenmitte die Komponenten der magnetischen Feldstärke⁵. Für jede Zelle kann eine (komplexe) Dielektrizitätszahl ε_r oder eine ideale Leitfähigkeit angenommen werden. Zellen mit unterschiedlichem ε_r und Bereiche idealer Leitfähigkeit dürfen direkt aneinanderstoßen. Damit sind auch inhomogene Linsendielektrika modellierbar. Die Speisung von Antennen erfolgt durch Einprägung einer Feldstärke an bestimmten Punkten im Raum. Es werden die maxwellschen Gleichungen im Zeitbereich gelöst. Die Berechnung erfolgt in Zeitschritten. Zur Einsparung von Rechenzeit und Speicherplatz wird der diskretisierte Raum um die zu analysierende Antenne möglichst klein gehalten, so dass die Felder i. Allg. nicht in der Fernfeld-Entfernung vorliegen; die Berechnung des Fernfeldes erfolgt daher mittels einer Nahfeld-Fernfeld-Transformation.

Durch die Rechnung im Zeitbereich ist eine beliebige Signalform zur Speisung möglich. Für spätere Fernfeld-Berechnungen ist ein im Verlauf von ca. 5 Perioden anschwingender Sinus vorteilhaft [51]. In diesem Fall erfolgt die Berechnung üblicherweise so lange, bis sich auch an den Rändern des Berechnungsgebiets ein eingeschwungener Zustand eingestellt hat. Sofern bei der Analyse dielektrischer Linsen Reflexionen innerhalb der Linse ausgeblendet werden sollen, ist es erforderlich, die Berechnung abubrechen, wenn die (lediglich) gebrochenen Anteile den Rand des Gitters bzw. die Fläche, deren Feldverteilung für die Bestimmung des Fernfeldes verwendet wird, bereits erreicht haben, die reflektierten Anteile jedoch noch nicht. Da in diesem Fall aber noch kein eingeschwungener Zustand herrscht, bedarf die Wahl des genauen Abbruchzeitpunkts einer sorgfältigen Betrachtung. Prinzipiell lassen sich Reflexionen innerhalb einer Linse mit FDTD veranschaulichen, wenn die Linsenantenne mit einem Impuls gespeist und die Stoßwellenfront im Verlauf der Berechnung visuell verfolgt wird.

Der Aufwand an Speicherplatz steigt bei FDTD linear mit dem Volumen. Daher können auch große dielektrische Streukörper mit FDTD behandelt werden. Schwerer wiegt bei FDTD die Rechenzeit. Um einen Vergleich anzustellen, sei im Folgenden angenommen, dass für eine PE-Rechnung und eine FDTD-Rechnung dasselbe Gitter mit den Abmessungen $N \times M$ verwendet wird, vgl. Abb. 4.2 auf S. 39. Die Berechnungszeit werde für FDTD so festgelegt, dass eine Welle das Berechnungsgebiet der Länge $\ell = (N - 1) \cdot \Delta x$

⁵Diese Betrachtung gilt nur, falls kein zusätzliches „magnetisches“ Berechnungsgitter zur Behandlung von magnetischen Materialien $\mu_r \neq 1$ vorhanden ist.

horizontal durchqueren kann. Hierfür wird die Zeit

$$t = T \cdot \Delta t = \ell/c = (N - 1) \cdot \frac{\Delta x}{c} \quad (5.16)$$

benötigt, dabei steht c für die Ausbreitungsgeschwindigkeit. Die Courant-Bedingung besagt, dass die zulässige Schrittweite im Zeitbereich Δt proportional zur räumlichen Auflösung Δx ist [69]. Im Zweidimensionalen gilt:

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{\sqrt{2} \cdot c} \quad (5.17)$$

Aus Gl. (5.16) und (5.17) folgt für die Zahl der nötigen Berechnungsschritte:

$$T = (N - 1) \cdot \sqrt{2} \approx N \cdot \sqrt{2} \quad (5.18)$$

Zu jedem Zeitschritt werden bei FDTD an allen $N \times M$ Gitterpunkten die Feldstärken mittels einer Differenzgleichung bestimmt, somit ist die Zahl der notwendigen Berechnungen proportional zu $N^2 \cdot M$.

Bei der PE-Methode ist die Zahl der notwendigen Berechnungsschritte proportional zu $N \cdot M$. Somit existiert eine Gitterlänge N_{\min} , ab der PE gegenüber FDTD eine kürzere Rechenzeit hat.

5.3.2 Momentenmethode (MoM)

Zur Behandlung dielektrischer Streukörper kann im Rahmen der Momentenmethode entweder die Oberflächenstrommethode (OSM) oder die Volumenstrommethode (VSM) angewendet werden [36]. Die OSM kommt bei (zumindest schichtweise) homogenen dielektrischen Körpern zum Einsatz. Dabei werden auf den Grenzflächen (zwischen Gebieten mit jeweils konstanten Dielektrizitätszahlen, z. B. Linsendielektrikum und Luft) äquivalente elektrische und magnetische Oberflächenströme angesetzt, die — wenn deren Werte mit der MoM bestimmt worden sind — die Streuwirkung des dielektrischen Körpers beschreiben. Entsprechend sind bei der OSM die Grenzflächen der Dielektrika, also z. B. die Linsenoberfläche, zu diskretisieren. Bei der VSM können inhomogene Dielektrika modelliert werden, allerdings ist die Zahl der Elemente und damit der Zeit- und Speicherplatzbedarf bedingt durch die Diskretisierung des Volumens erheblich größer als bei der OSM.

Die Momentenmethode kann im Zweidimensionalen angewendet werden; in [70] wird eine dielektrische (gestufte) Sammellinse mit der (zweidimensionalen) OSM analysiert.

Der Speicherplatz- und Rechenzeitbedarf steigt bei MoM mit der auf die Wellenlänge bezogenen Größe des Streukörpers stark an [36, 63]. Bei der (dreidimensionalen) MoM steigt der Speicherplatzbedarf bei OSM z. B. mit der 4. Potenz des Linsendurchmessers und die Rechenzeit mit der 4. bis 6. Potenz. Die Anwendung der MoM ist daher (im Dreidimensionalen) auf Streukörper mit der Größe einiger Wellenlängen beschränkt, wobei der gegenseitige Abstand der Streukörper bei hinreichend großen Entfernungen nicht

in den Rechenzeit- und Speicherplatzbedarf des Problems eingeht. Zur Analyse größerer Anordnungen kann die MoM unter Einschränkung ihrer allgemeinen Verwendbarkeit mit anderen Methoden (z. B. Physikalische Optik, UTD, Mehrfach-Multipol-Methode) kombiniert werden [37, 63].

Ein wesentlicher Vorteil der MoM besteht in den direkt aus den Strömen berechenbaren Fernfeldern. Ein Nachteil ist, dass nur der eingeschwungene Zustand betrachtet werden kann. Es ist also nicht wie bei FDTD (vgl. Abschnitt 5.3.1) möglich, durch frühzeitiges Abbrechen der Berechnung Reflexionen auszublenden. Zur Bestimmung der Feldverteilung im Innern der Linse ist es bei MoM erforderlich, das Feld an jedem Punkt durch Überlagerung der Wirkungen aller Ströme zu berechnen. Bei FDTD liegt die Feldverteilung prinzipbedingt im gesamten Volumen, bei PE in dem bereits durchschrittenen Berechnungsgebiet vor.

Kapitel 6

Linsenanalyse mittels PE

Im Folgenden wird dargelegt, wie die Analyse dielektrischer Linsen mittels der PE-Methode erfolgen kann. Die Anwendung von PE führt dabei in dreifacher Hinsicht zu Vorgaben, die beim Entwurf eines Algorithmus zu berücksichtigen sind. Zum einen darf sich die Wellenzahl β während eines Berechnungsschritts nicht abrupt ändern. Zweitens müssen die bei PE angenommenen Ausbreitungswege mehr oder weniger der tatsächlichen Ausbreitungsrichtung entsprechen, vgl. Abschnitt 4.2.4 und 4.3. Drittens dürfen sich die angenommenen Ausbreitungswege nicht schneiden. Diese Punkte sollen nun vertieft werden.

6.1 Überwindung der Grenzfläche zwischen Luft und Linsendielektrikum

Betrachtet werde der senkrechte Einfall einer sich im Vakuum ausbreitenden ebenen Welle auf die ebene Grenzfläche eines den Halbraum ausfüllenden Dielektrikums mit der Dielektrizitätszahl ε_r . Die einfallende Welle habe die Amplitude der elektrischen Feldstärke E_e . Aus der Kontinuität der (zur Grenzfläche) tangentialen elektrischen und magnetischen Feldstärke folgt für die Feldstärke der reflektierten Welle

$$E_r = r \cdot E_e$$

und für die Feldstärke der weiterlaufenden (oder „gebrochenen“) Welle

$$E_g = (1 + r) \cdot E_e.$$

Dabei ist r der Reflexionsfaktor

$$r = \frac{1 - \sqrt{\varepsilon_r}}{1 + \sqrt{\varepsilon_r}}.$$

Zwar ist die resultierende Gesamtfeldstärke an der Grenzfläche

$$E_{\text{ges}} = E_e + E_r = E_g$$

kontinuierlich, jedoch springt E_e beim Übergang zu E_g um den Betrag E_r (entsprechendes gilt für den Übergang des magnetischen Feldes von der einfallenden zur weiterlaufenden

Welle). Dies führt dazu, dass auch das magnetische oder elektrische Vektorpotential beim Übergang von der einfallenden zur weiterlaufenden Welle springt; vgl. hierzu z. B. den einfachen Zusammenhang zwischen E_ϕ und der ϕ -Komponente des magnetischen Vektorpotentials $\vec{A} = \hat{\phi} \cdot \psi_m$ im TM-Fall in Gl. (2.61) auf S. 14. Der Sprung des Vektorpotentials führt zu einer gegen unendlich gehenden Ableitung

$$\left| \frac{\partial \psi}{\partial r} \right| \quad \text{bzw.} \quad \left| \frac{\partial \psi_m}{\partial r} \right|,$$

was die Voraussetzung (4.7) zur Herleitung der PE in Abschnitt 4.2.2 in hohem Maße verletzen würde. Ferner könnte die reflektierte Welle nicht beschrieben werden, da sie genau entgegengesetzt zur angenommenen Ausbreitungsrichtung verläuft.

Somit kann eine harte Grenze zwischen zwei Dielektrika nicht vom PE-Algorithmus überwunden werden, es sei denn, der Unterschied in den Dielektrizitätszahlen ist sehr klein, so dass die Höhe des Sprungs vernachlässigbar ist. Dies ist z. B. bei Linsen für Röntgenstrahlen der Fall [38].

Es wird also vorgeschlagen, die PE-Methode abschnittsweise in Gebieten homogener (oder zumindest nur allmählich veränderlicher) Dielektrizitätszahl anzuwenden. Für die Analyse dielektrischer Linsen bedeutet das eine Bestimmung des Anfangsfeldes auf der Eintrittsfläche der Strahlung in die Linse, die Annahme der reflektierten und gebrochenen Welle mit Feldstärkeamplituden gemäß den fresnelschen Beziehungen ([45], vgl. auch Anhang J) und anschließend getrennte PE-Rechnungen für die reflektierten und gebrochenen Anteile. Zur Berücksichtigung evtl. auftretender Mehrfachreflexionen wäre demnach für jede Teilwelle eine eigene PE-Rechnung mit anschließender Überlagerung zum Gesamtergebnis erforderlich. In der Praxis kann oftmals auf die Betrachtung der Reflexionen verzichtet werden, da sie in der Regel durch geeignete Antireflexionsschichten gedämpft werden (vgl. z. B. [62]). Eine Linsensynthese unter Einbeziehung von Reflexionen (d. h. eine gezielte Ausnutzung reflektierter Anteile) würde eine (i. Allg. unerwünschte) Schmalbandigkeit der Linseneigenschaften zur Folge haben, da die Linse groß gegenüber der Wellenlänge ist und dadurch kleine Schwankungen in der Betriebsfrequenz bereits Unterschiede in den Weglängendifferenzen zwischen hin- und rücklaufenden Teilwellen in der Größenordnung von $\lambda/2$ verursachen können. Dadurch würde durch eine leichte Frequenzverschiebung z. B. konstruktive in destruktive Interferenz umgekehrt.

Zur Bestimmung des von einem Primärstrahler einer Linsenantenne erzeugten Anfangsfeldes auf der Linseneintrittsfläche kommt eine Modellierung in einem asymptotisch exakten Feldberechnungsprogramm oder eine Nachbildung des Primärstrahlers mittels geeigneter Elementarquellen in Betracht, vgl. dazu das Beispiel in Abschnitt 7.2.2. Die gegenseitige Wechselwirkung zwischen der Speiseantenne und der Linse als Streukörper bleibt so unberücksichtigt; dies ist jedoch insofern unkritisch, als der Fokus bei den hier vorzunehmenden Feldberechnungen auf der Bestimmung der Richtcharakteristik und nicht der Eingangsimpedanz liegt.

6.2 Wahl der Ausbreitungswege für PE anhand des a priori bekannten Verlaufs von GO-Strahlen

Die Anwendung von PE erfolgt entlang von „angenommenen Ausbreitungswegen“, die mehr oder weniger der tatsächlichen Ausbreitungsrichtung entsprechen müssen, vgl. Abschnitt 4.2.4 und 4.3. Es stellt sich die Frage, wie diese Ausbreitungswege gewählt werden können, wenn das Ergebnis der Berechnung, d. h. das Wissen über die tatsächliche Ausbreitungsrichtung, noch nicht vorliegt.

Eine Möglichkeit, die Ausbreitungsrichtung innerhalb der Linse abzuschätzen, besteht in der Betrachtung der geometrisch-optischen Strahlen. Je größer die Linse im Vergleich zur Wellenlänge ist, desto besser geben geometrisch-optische Strahlen die tatsächliche Ausbreitungsrichtung wieder, vgl. Abschnitt 5.1. Bei kleineren Linsen wird GO zwar zunehmend ungenau; als für die PE-Rechnung „angenommene Ausbreitungswege“ ist eine Eignung jedoch weiterhin zu erwarten, da die Abweichung zwischen angenommener und tatsächlicher Ausbreitungsrichtung mit bis zu 45° bei der WWPE hinreichend groß sein darf.

Ein bedeutender Vorteil bei der Verwendung von GO-Strahlen als angenommene Ausbreitungswege bei PE besteht in der einfachen Bestimmung anhand der Dielektrizitätszahl und des snelliusschen Brechungsgesetzes. Ein Nachteil, und oftmals ein Grund, warum GO-Strahlen nicht ohne weiteres einsetzbar sind, besteht darin, dass sie sich schneiden können. Sich schneidende Ausbreitungswege sind bei PE nicht zulässig, vgl. Abschnitt 4.8.2, treten aber überall auf, wo zu Sammellinsen ähnliche Strukturen eine Strahlbündelung verursachen. Im Folgenden werden daher Möglichkeiten betrachtet, wie bei der Anwendung von GO sich schneidende Ausbreitungswege vermieden werden können.

Die Veranschaulichung erfolgt (im Zweidimensionalen) anhand einer Ellipse, die eine parallel zur großen Halbachse einfallende ebene Welle in einem ihrer Brennpunkte bündelt, sofern die Brechzahl im Innern der Ellipse

$$n = \frac{1}{\sqrt{1 - (b/a)^2}}$$

beträgt, vgl. Abb. 6.1 und Anhang D (S. 141 ff.). Bei a und b handelt es sich um die große bzw. kleine Halbachse der Ellipse. Das Ziel besteht nun darin, trotz der Existenz des Brennpunkts und der sich dementsprechend dort schneidenden GO-Strahlen die PE-Methode über diesen Bereich hinweg anzuwenden.

6.3 Möglichkeiten zur Überwindung eines geometrisch-optischen Brennpunkts

Bei der Behandlung der in Abb. 6.1 dargestellten Linse mittels PE ist die Orientierung der angenommenen Ausbreitungswege an geometrisch-optischen Strahlen zumindest in der

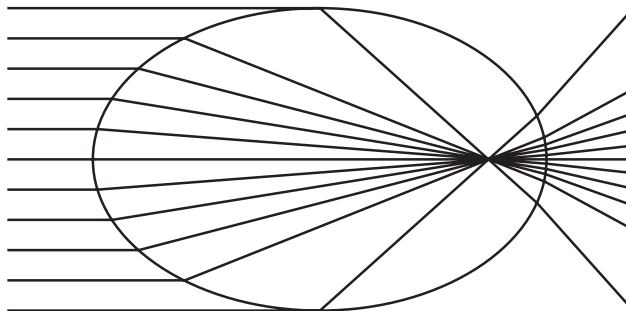


Abbildung 6.1: Strahlbündelung bei einer Ellipse mit dem Halbachsenverhältnis $a/b = 3/2$ und einer Brechzahl $n = \sqrt{1,8} \approx 1,34$

Umgebung des Brennpunkts nicht möglich, da sich die Ausbreitungswege bei PE nicht schneiden dürfen, vgl. Abschnitt 4.8.2. Im Folgenden werden Möglichkeiten diskutiert, die Problematik der Existenz geometrisch-optischer Brennpunkte zu umgehen.

6.3.1 Parallele Ausbreitungswege im Brennpunktbereich oder der gesamten Linse

Wenn geometrisch-optische Strahlen aufgrund von sich schneidenden Strahlen nicht als Ausbreitungswege für PE in Frage kommen, stellt sich die Frage, in welchem Maß sie übereinstimmen müssen und ob größere Abweichungen zwischen beiden zulässig sind. Eine Möglichkeit zur Vermeidung sich kreuzender Ausbreitungswege besteht im Beispiel der elliptischen Linse in der Verwendung *paralleler* Ausbreitungswege, entweder nur im Brennpunktbereich (Abb. 6.2) oder in der gesamten Linse (Abb. 6.3). Dadurch kann es zu erheblichen Abweichungen zwischen der angenommenen und tatsächlichen Ausbreitungsrichtung kommen, was die Anwendung der Weitwinkel-PE (vgl. Abschnitt 4.3) erfordern kann. Ggf. müsste der Einsatz einer sogenannten „Very-Wide-Angle PE“ [18] erwogen werden. Im hier betrachteten Beispiel der elliptischen Linse mit $n = 1,34$ beträgt die maximale Abweichung zwischen einem GO-Strahl und dem PE-Ausbreitungsweg im Innern der Linse

$$\delta_{\max} = 90^\circ - \arcsin \frac{1}{\sqrt{1,8}} = 41,8^\circ. \quad (6.1)$$

Sofern der GO-Strahl die tatsächliche Ausbreitungsrichtung hinreichend repräsentiert, lässt dies den Schluss zu, dass die Weitwinkel-PE für die Lösung des Problems noch geeignet ist. Ein weiteres Argument für die Eignung der WWPE liegt darin, dass die Amplitude bei dem äußersten Strahl klein ist, da im Grenzfall aufgrund des streifenden Einfalls der ebenen Welle der Betrag des Reflexionsfaktors eins ist und dadurch keine Transmission ins Linseninnere erfolgt. Fehler durch eine zu große Winkelabweichung dürften somit nur einen geringen Einfluss aufs Gesamtergebnis haben.

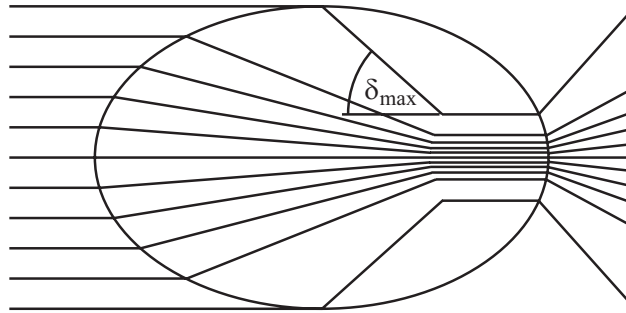


Abbildung 6.2: Parallele angenommene Ausbreitungswege im Brennpunktbereich, (zumindest) dort Anwendung der Weitwinkel-PE.

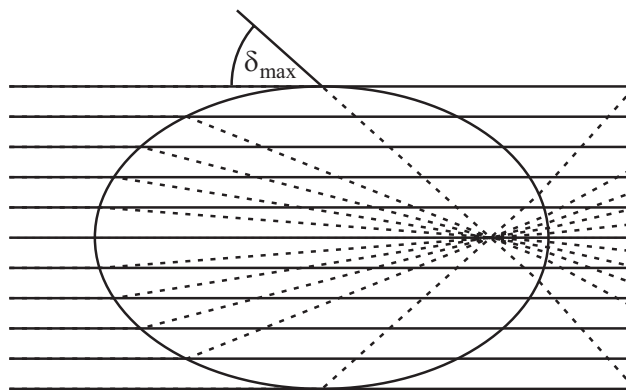


Abbildung 6.3: Parallele angenommene Ausbreitungswege in der gesamten Linse (und — wie hier gezeichnet — auch bei einer ggf. nachfolgenden PE-Rechnung ausgehend von der Apertur), Anwendung der Weitwinkel-PE.

6.3.2 Verbinden der Punkte auf der Ein- und Austrittslinie

Eine Vereinfachung des in Abschnitt 6.3.1 beschriebenen Verfahrens besteht darin, die Ein- und Austrittslinie (bzw. im 3D-Fall die entsprechenden Flächen) der Linse in gleich viele Punkte aufzuteilen. Der für die PE-Rechnung angenommene Ausbreitungsweg ergibt sich aus der Verbindungslinie zwischen je einem Punkt auf der Ein- und Austrittslinie, vgl. Abb. 6.4. In vielen Fällen wird es auch bei allgemeinen Linsenformen möglich sein zu erreichen, dass sich diese Verbindungslinien nicht schneiden. Anhand einer geometrisch-optischen Betrachtung kann anschließend untersucht werden, ob die dabei entstehende Winkelabweichung zwischen der angenommenen und (der anhand von GO erwarteten) tatsächlichen Ausbreitungsrichtung kleiner als 45° ist und somit die WWPE eingesetzt werden kann. Im Beispiel von Abb. 6.4 beträgt die maximale Abweichung δ_{\max} zwischen der so angenommenen und (aufgrund von GO zu erwartenden) tatsächlichen Ausbreitungsrichtung rechts neben dem Brennpunkt deutlich mehr als 45° . In diesem Fall — oder wenn bei einem anderen Beispiel keine kreuzungsfreie Verbindung der Punkte möglich ist — muss etappenweise vorgegangen werden, d. h. PE abschnittsweise mit angenommenen

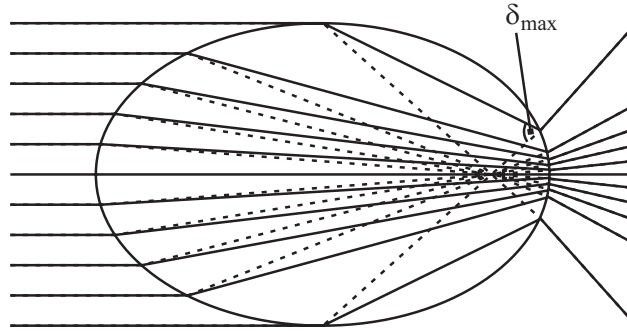


Abbildung 6.4: Festlegung der Ausbreitungswege durch einfaches Verbinden von Punkten auf der Ein- und Austrittsfläche ohne Rücksicht auf die tatsächliche Ausbreitungsrichtung.

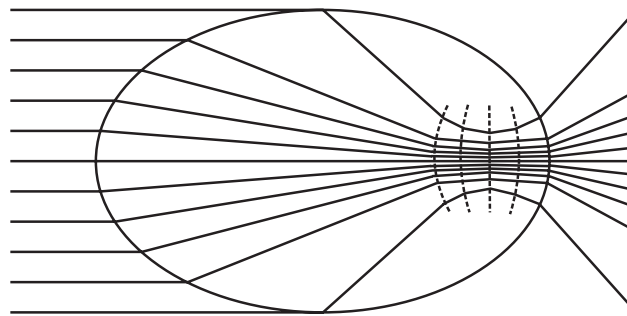


Abbildung 6.5: Abschnittsweise Änderung der Ausbreitungswege, um eine bessere Übereinstimmung zwischen angenommener und tatsächlicher Ausbreitungsrichtung zu erzielen. Mögliche Bereichsgrenzen sind gestrichelt eingezeichnet.

Ausbreitungswegen angewandt werden, die besser an die tatsächliche Ausbreitungsrichtung angepasst sind. Abb. 6.5 zeigt, wie im Beispiel der elliptischen Linse vorgegangen werden könnte.

Ein auf diese Weise eingerichtetes Gitter besteht i. Allg. weder aus parallelen noch aus radialen (d. h. sich in einem Punkt schneidenden) Ausbreitungswegen, was die Anwendung von Strahlenkoordinaten erfordert, vgl. Kapitel 3 und Abschnitt 4.5.2. Ferner verlaufen die Ausbreitungswege i. Allg. nicht senkrecht zur Fläche (bzw. im 2D-Fall Linie), von der aus die PE-Rechnung startet, d. h. die „Anfangsfront“ ist keine angenommene Phasenfront. Dies erfordert eine gesonderte Behandlung, vgl. Abschnitt 6.6.

6.3.3 Lösung der PE in krummlinigen Koordinatensystemen

Abb. 6.5 legt nahe, zur Behandlung eines Brennpunkts sog. elliptische Koordinaten [54]

$$x = \alpha \cdot \cosh u \cdot \cos v \quad (6.2)$$

$$y = \alpha \cdot \sinh u \cdot \sin v \quad (6.3)$$

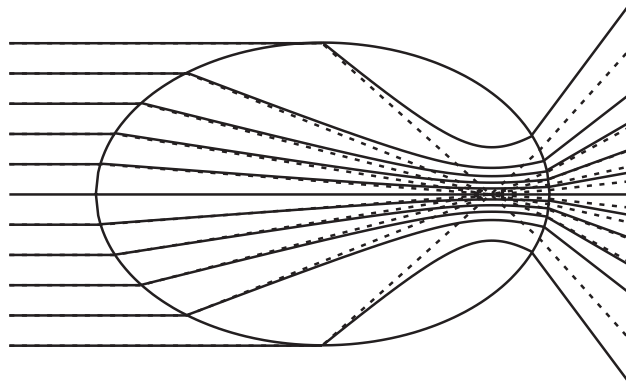


Abbildung 6.6: Verwendung elliptischer Koordinaten im Innern der Linse

zu verwenden. Den Linien $v = \text{const.}$ kommt dabei die Rolle der angenommenen Ausbreitungswege, den Ellipsen $v = \text{const.}$ abschnittsweise die der Phasenfronten zu. Die skalare Helmholtzgleichung (vgl. Abschnitt 4.1) lautet:

$$\frac{1}{\alpha^2 (\sinh^2 u + \sin^2 v)} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2} \right) = -\beta^2 \psi \quad (6.4)$$

Mit der Substitution

$$\psi = \Psi \cdot e^{\pm j\beta\alpha \cdot \sinh u} \quad (6.5)$$

für eine auf die Engstelle (quasi den linienförmigen Pol) des Koordinatensystems bei $u = 0$ zulaufende (+) bzw. aus ihr herauslaufende (-) Welle ergibt sich nach der in Abschnitt 4.2.1 beschriebenen Vorgehensweise die Parabolische Differentialgleichung

$$\pm 2j\beta \cdot \alpha \cosh u \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial u} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial v^2} = \Psi \cdot (\beta^2 \alpha^2 \cos^2 v \mp j\beta\alpha \sinh u), \quad (6.6)$$

die mit der in Abschnitt 4.5 beschriebenen Methode der Finiten Differenzen gelöst werden kann. Die Lage des elliptischen Koordinatensystems im Raum und dessen Parameter α ist (z. B. mittels GO) vorab so zu bestimmen, dass die Linien $v = \text{const.}$ hinreichend genau der tatsächlichen Ausbreitungsrichtung entsprechen. Abb. 6.6 zeigt die Anwendung elliptischer Koordinaten für die Linse mit $a/b = 3/2$ und $n = \sqrt{1,8}$. Der Parameter α wurde numerisch so bestimmt, dass die „gekrümmten Strahlen“ im Innern der Linse, d. h. die Linien $v = \text{const.}$ für $u \rightarrow \infty$ in die gestrichelt gezeichneten GO-Strahlen übergehen. Dies führt zu einem Wert $\alpha = 0,317 \cdot a$.

Für die Behandlung allgemeiner dielektrischer Linsen ist das Verfahren mit elliptischen Koordinaten jedoch zu speziell. So ist nur ein einziger Brennpunktbereich innerhalb der Linse zulässig, i. Allg. sind jedoch mehrere Bereiche sich schneidender Strahlen zu erwarten, vgl. Abschnitt 4.8.2 und die Betrachtung in Anhang C.

Um sich kreuzende angenommene Ausbreitungswege bei einer beliebig geformten Linse zu vermeiden, wäre gewissermaßen für jeden einzelnen Schnittpunkt ein separates (lokales) System elliptischer Koordinaten mit entsprechenden Schnittstellen zu benachbarten

Koordinatensystemen erforderlich. Die mögliche Vielzahl solcher Schnittpunkte spricht gegen eine derartige Vorgehensweise.

Dennoch ist der Ansatz, von der zwingenden Geradenform der angenommenen Ausbreitungswege abzukommen und die Ausbreitungswege um die geometrisch-optischen Brennpunkte kreuzungsfrei herumzuführen, interessant.

6.4 Energieströmungslinien als Ausbreitungswege

Die angenommenen Ausbreitungswege sollen bei der Anwendung von PE möglichst genau, zumindest aber bis auf 15° (SPE) bzw. 45° (WWPE) der tatsächlichen Ausbreitungsrichtung entsprechen, vgl. Kapitel 4. Geometrisch-optische Strahlen können diese Forderung in vielen Fällen erfüllen, führen jedoch zu Problemen, wenn sie sich schneiden, vgl. Abschnitt 4.8.2 und 6.2. Es stellt sich daher die Frage, ob anstelle von GO-Strahlen so etwas wie die *tatsächliche* Ausbreitungsrichtung der Welle als PE-Gitter verwendet werden kann. Zunächst soll davon ausgegangen werden, dass der Verlauf der Wellenausbreitung a priori bekannt ist. Eine praxisorientierte Betrachtung ohne Voraussetzung dieses A-priori-Wissens erfolgt in Abschnitt 6.5.2.

6.4.1 Bestimmung des Verlaufs von Energieströmungslinien

Bei Verwendung komplexer Feldstärkeamplituden \vec{E} und \vec{H} gilt für den als „Poynting-Vektor“ bezeichneten Vektor der Leistungsdichte

$$\vec{S} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ \vec{E} \times \vec{H}^* \}. \quad (6.7)$$

Der Stern bei \vec{H} kennzeichnet die konjugiert komplexe Größe. Der Zusammenhang mit dem Poynting-Vektor für allgemeine zeitabhängige Felder ist in Anhang E (S. 143) dargestellt. Der Poynting-Vektor \vec{S} kennzeichnet die am betreffenden Ort herrschende Ausbreitungsrichtung der elektromagnetischen Welle [45]. Energieströmungslinien entstehen durch die Aneinanderreihung von infinitesimalen Strecken in Richtung der am jeweiligen Ort vorherrschenden Poynting-Vektoren [41, 53]. Sie verlaufen zumindest im Zweidimensionalen exakt senkrecht zu den Phasenfronten [40]. Damit wären Energieströmungslinien hinsichtlich der Gültigkeitsbetrachtung der PE-Näherungen in Abschnitt 4.2.4 (ab S. 32) ideale für die Anwendung von PE anzunehmende Ausbreitungswege.

6.4.2 Bestimmung des Poynting-Vektors aus dem Potential

Im Rahmen dieser Arbeit werden elektromagnetische Felder betrachtet, die in ϕ rotations-symmetrisch sind, d. h. es gilt $\partial/\partial\phi = 0$. Dies schließt Felder ein, die von Linienquellen erzeugt werden; in diesem Fall wird von einer unendlich großen Entfernung zwischen Quelle und Rotationsachse ausgegangen. Im Fall der Rotations-symmetrie in ϕ genügt die

ϕ -Komponente des elektrischen Vektorpotentials $F_\phi = \psi$, um ein Feld TE bzgl. ϕ zu beschreiben, sowie die ϕ -Komponente des magnetischen Vektorpotentials $A_\phi = \psi_m$ zur Beschreibung eines Feldes TM bzgl. ϕ , vgl. Abschnitt 2.3.3. Aufgrund der Rotationssymmetrie verlaufen die Energieströmungslinien in Ebenen $\phi = \text{const.}$ und zeigen in allen diesen Ebenen dasselbe Bild; somit können sie exemplarisch in der Ebene $\phi = 0$ (d. h. in der Halbebene $y = 0$ für $x \geq 0$) bestimmt werden.

Im Folgenden wird der Fall „TE bzgl. ϕ “ betrachtet. Um das Vektorprodukt in Gl. (6.7) anwenden zu können, empfiehlt sich der Übergang zu kartesischen Koordinaten. Aus $\phi = 0$ und

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} F_r \\ F_\theta \\ F_\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \psi \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \vec{F} = \begin{pmatrix} F_\xi \\ F_s \\ F_\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \psi \end{pmatrix}$$

folgt in kartesischen Koordinaten

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi \\ 0 \end{pmatrix}$$

und mit Gl. (2.43)

$$\vec{E} = -\text{rot } \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & -\psi & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial z} \\ 0 \\ -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{pmatrix}. \quad (6.8)$$

Für das Magnetfeld gilt entsprechend mit Gl. (2.59)

$$H_y = H_\phi = -j\omega\varepsilon_0\varepsilon_r\psi. \quad (6.9)$$

Aus Gl. (6.7) folgt für den Poynting-Vektor mit $(-j \cdot z)^* = j \cdot z^*$

$$\vec{S} = \begin{pmatrix} S_x \\ S_y \\ S_z \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \text{Re} \left\{ \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial \psi}{\partial z} & 0 & -\frac{\partial \psi}{\partial x} \\ 0 & j\omega\varepsilon_0\varepsilon_r\psi^* & 0 \end{vmatrix} \right\} = \frac{1}{2} \text{Re} \left\{ j\omega\varepsilon_0\varepsilon_r\psi^* \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial x} \\ 0 \\ \frac{\partial \psi}{\partial z} \end{pmatrix} \right\}. \quad (6.10)$$

6.4.3 Energieströmungslinien bei einer ellipsenförmigen Linse

Als Beispiel sollen die Energieströmungslinien bei der aus Abschnitt 6.2 bekannten ellipsenförmigen Linse mit $a/b = 3/2$ und der Brechzahl $n = \sqrt{1,8}$ betrachtet werden. Die Berechnung erfolgt im Zweidimensionalen mittels der Fresnel-Integral-Methode (vgl. Abschnitt 5.2). Abb. 6.1 auf S. 84 zeigt den geometrisch-optischen Strahlengang durch die Linse. Die Länge der großen Halbachse a beträgt genau eine Freiraumwellenlänge λ_0 .

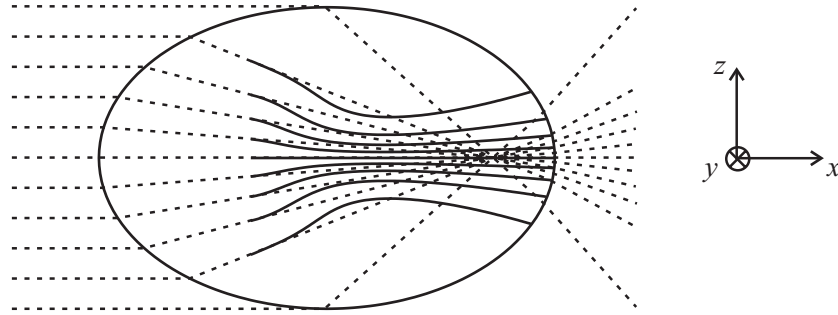
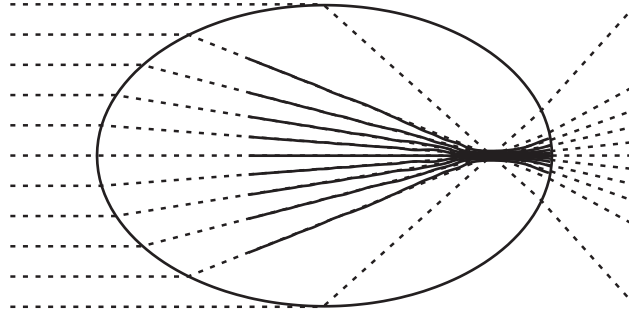
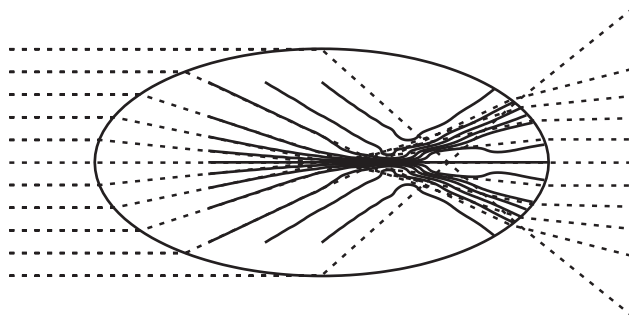


Abbildung 6.7: Verlauf der Energieströmungslinien im Innern der ellipsenförmigen Linse. Für die große Halbachse gilt $a = \lambda_0$. Der Verlauf der GO-Strahlen ist gestrichelt dargestellt.

Die Linse ist in y -Richtung unendlich ausgedehnt, d. h. die Feldberechnung kann z. B. in der Ebene $y = 0$ erfolgen. Es wird angenommen, dass die Linse von einer ebenen Welle getroffen wird, die sich entlang der großen Halbachse in x -Richtung ausbreitet und deren elektrischer Feldstärkevektor in der Ebene des Linsenquerschnitts $y = 0$ liegt. Somit liegt ein Feld TE bzgl. y vor. Die y -Richtung entspricht in der Ebene $y = 0$ der ϕ -Richtung in Kugelkoordinaten, so dass die ebene Welle für einen gegen unendlich gehenden Abstand von der Achse der Rotationssymmetrie in ϕ nach Gl. (2.58) und (2.59) mittels der zum Magnetfeld H_y proportionalen ϕ - bzw. y -Komponente des elektrischen Vektorpotentials $F_\phi = \psi$ beschrieben werden kann. Zur Berechnung des Feldes innerhalb der Linse werden gemäß Abschnitt 5.2 äquivalente Quellen auf der Linsenoberfläche angenommen, deren Betrag mittels Gl. (5.13) und einer Gewichtung mit den in Anhang J enthaltenen fresnelschen Beziehungen fürs Magnetfeld bestimmt wird. Aus Gl. (5.15) lässt sich innerhalb der Linse unter Vernachlässigung von Reflexionen die ϕ -Komponente des elektrischen Vektorpotentials $F_\phi = \psi$ und mit der in Abschnitt 6.4.2 beschriebenen Vorgehensweise der Poynting-Vektor zur Konstruktion der Energieströmungslinien nach Abschnitt 6.4.1 berechnen. Die Bestimmung der Energieströmungslinien erfolgt ausgehend von einer Linie, die hinreichend weit von den äquivalenten Quellen entfernt ist, damit Singularitäten am Ort der Quellen und Diskretisierungseffekte keine Rolle mehr spielen. Abb. 6.7 zeigt die auf diese Weise gewonnenen Energieströmungslinien. Diese stehen für die tatsächliche Ausbreitungsrichtung der Welle. Es zeigt sich eine Ähnlichkeit mit den Linien des elliptischen Koordinatensystems, vgl. Abb. 6.6. Auch der in den Abb. 6.2 und 6.5 vorgeschlagene Ansatz zur Überwindung des geometrisch-optischen Brennpunkts lässt eine für eine PE-Berechnung hinreichend genaue Übereinstimmung zwischen der angenommenen und tatsächlichen Ausbreitungsrichtung erwarten. Der Verlauf der Energieströmungslinien ist — im Gegensatz zum Verlauf geometrisch-optischer Strahlen — von der Wellenlänge abhängig. Abb. 6.8 zeigt die Energieströmungslinien, wenn die Linse zehn Mal so groß wie im vorangegangenen Beispiel ist, d. h. für $a = 10\lambda_0$. Der Brennpunkt ist deutlich schärfer. Bei genauem Hinsehen fällt auf, dass die Energieströmungslinien eine geringfügi-

Abbildung 6.8: Energieströmungslinien bei einer Länge der großen Halbachse von $a = 10\lambda_0$ Abbildung 6.9: Energieströmungslinien bei einer ellipsenförmigen Linse mit $b = a/2$, $a = 10\lambda_0$ und $n = \sqrt{1,8}$. (Gestrichelt gezeichnet: GO-Strahlen)

ge Welligkeit aufweisen. Eine wesentlich größere Welligkeit zeigt sich, wenn kein einfacher geometrisch-optischer Brennpunkt, sondern ein Bereich sich (nicht in einem Punkt) überlagernder Strahlen vorliegt. Abb. 6.9 zeigt die Energieströmungslinien bei einer ellipsenförmigen Linse, deren kleine Halbachse gegenüber den vorangegangenen Beispielen von $b = 2a/3$ auf $b = a/2$ verkürzt wurde. Die Brechzahl ist mit $n = \sqrt{1,8}$ unverändert, die Freiraumwellenlänge beträgt wie in Abb. 6.8 $\lambda_0 = a/10$. Es ist zu erkennen, dass Energieströmungslinien Ausbuchtungen aufweisen können. Abb. 6.10 zeigt Phasenfronten in einem vergrößerten Ausschnitt von Abb. 6.9 im Bereich der großen Halbachse im rechten Teil der Linse. Es ist zu erkennen, dass sich an einem Punkt Phasenfronten schneiden. Das bedeutet, dass die Phase in diesem Punkt nicht definiert ist, also das Potential ψ (und damit das Magnetfeld H_ϕ) dort eine Nullstelle haben muss. Diese Nullstellen sind von geschlossenen Energieströmungslinien — sog. Wirbeln [53] — umgeben, die jedoch nur dann aus der in Abschnitt 6.4.1 beschriebenen Bestimmungsmethode für Energieströmungslinien resultieren können, wenn der Startpunkt auf einem Wirbel liegt oder wenn aufgrund einer nicht hinreichend feinen Diskretisierung ein Vorstoß in einen Wirbel erfolgt.

Wirbel sind für die Konstruktion eines PE-Gitters aus Energieströmungslinien in einem hohen Maße problematisch. Bei der schrittweisen Lösung der PE unter Verwendung finiter Differenzen wird senkrecht zu den angenommenen Ausbreitungswegen die zweifache Ableitung gebildet, vgl. Abschnitt 4.5. Die Berechnung der Ableitungen erfolgt an derselben

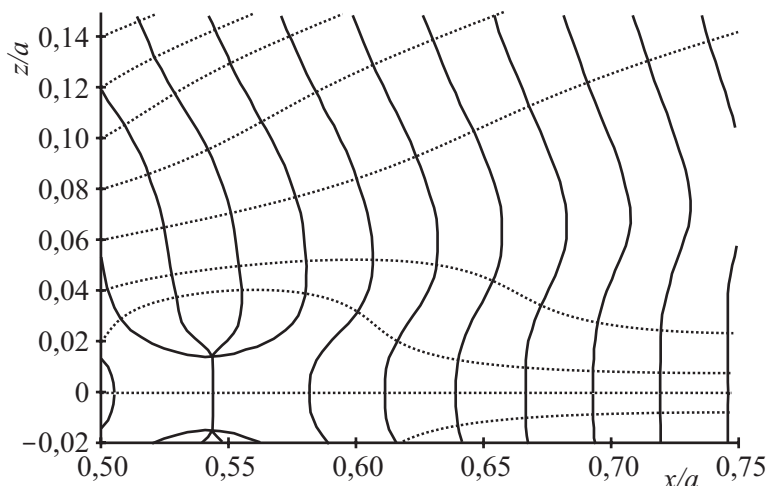


Abbildung 6.10: Phasenfronten (durchgezogen) und Energieströmungslinien (gepunktet) in einem Teilbereich um die große Halbachse der in Abb. 6.9 dargestellten Linse. Der Mittelpunkt der Ellipse hat die Koordinaten $x = z = 0$, die große Halbachse a erstreckt sich in x -Richtung, die kleine Halbachse b in z -Richtung, $b = a/2$.

Position der Wellenfront n aus dem Potential ψ an den beiden benachbarten angenommenen Ausbreitungswegen $(m-1)$ und $(m+1)$, vgl. (4.54). D. h. die zweifache Ableitung wird entlang einer *angenommenen* Phasenfront, die stets senkrecht zu einem *angenommenem* Ausbreitungsweg verläuft, gebildet. Würden nun Energieströmungslinien als *angenommene* Ausbreitungswege verwendet, so erfolgte die Bildung der zweifachen Ableitung entlang der in Abb. 6.10 eingezeichneten Phasenfronten. Die Schnittpunkte zwischen den Energieströmungslinien und den Phasenfronten wären die Gitterpunkte (n, m) für die Lösung der PE.

Aus Abb. 6.10 geht hervor, dass die Zuordnung benachbarter Punkte (selbes n , unterschiedliche Werte für m) bei Energieströmungslinien, zwischen denen ein Wirbel liegt, schwierig ist. Ein einfaches Durchverbinden benachbarter Punkte ausgehend von einer gemeinsamen Anfangs-Phasenfront liefert bei der Existenz von Wirbeln ein verzerrtes Gitter, vgl. Abb. 6.11. Die Problematik wird dadurch verschärft (aber nicht allein verursacht), dass die Phasenfronten in der Umgebung des Wirbels einen deutlich größeren Abstand als üblich haben. Es zeigt sich, dass zwei Energieströmungslinien unterschiedlich lang sein können, obwohl sie vor und nach einem Wirbel von denselben Phasenfronten geschnitten werden. Daraus folgt, dass Energieströmungslinien (und die dazugehörigen Phasenfronten) i. Allg. *kein* praktikables Gitter zur Lösung der PE darstellen, auch wenn sie der *tatsächlichen* Richtung der Wellenausbreitung entsprechen. Bei der Analyse allgemein geformter Linsen lässt sich ein Auftreten von Wirbeln nicht ausschließen.

Für die Lösung der PE sind also angenommene Ausbreitungswegen vorteilhaft, bei denen die Gleichmäßigkeit des Gitters nicht unter einer allzu großen Detailtreue leidet. Würde das PE-Gitter aus Energieströmungslinien erstellt, müsste es i. Allg. in einem solchen Maße

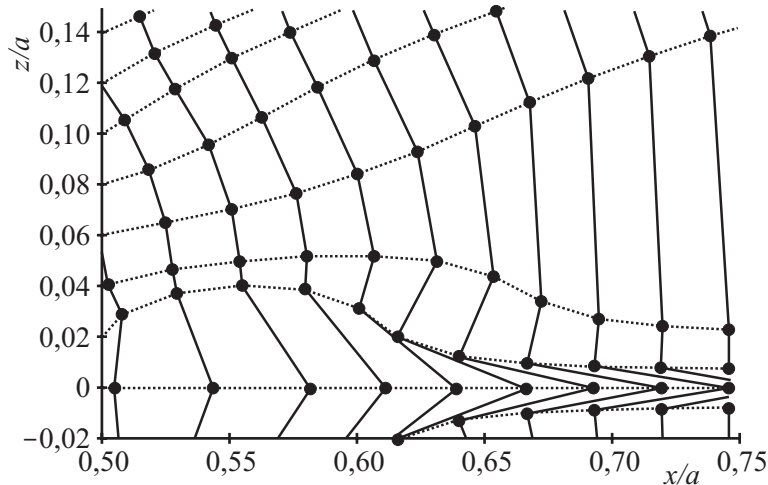


Abbildung 6.11: Ableitung eines PE-Gitters aus den Energieströmungslinien und Phasenfronten in Abb. 6.10. Problematik der Verzerrung des Gitters durch einen Wirbel zwischen zwei Energieströmungslinien.

„geglättet“ werden, dass keine Wirbel mehr zu Tage treten. Sofern Energieströmungslinien a priori bekannt sind, liefern sie jedoch einen Anhaltspunkt dafür, welches der in Abschnitt 6.3 beschriebenen Verfahren für die Überwindung von GO-Brennpunkten in Frage kommt und wie ggf. Parameter des PE-Gitters (z. B. die Breite des Bereichs paralleler Strahlen in Abb. 6.2) zu wählen sind.

6.5 Wahl der angenommenen Ausbreitungsrichtung anhand des Poynting-Vektors entlang der PE-Anfangsfront

Bei der konventionellen Anwendung von PE ist es üblich, dass die angenommenen Ausbreitungswege senkrecht von der Front, auf der die PE-Rechnung beginnt, abgehen. Bei der Analyse dielektrischer Linsen beginnt die PE-Rechnung für die Wellenausbreitung innerhalb der Linse auf der Grenzfläche zwischen Luft und Dielektrikum, vgl. Abschnitt 6.1. Somit wäre es zunächst naheliegend, die angenommenen Ausbreitungswege für PE senkrecht von dieser Grenzfläche ausgehen zu lassen. Doch gerade bei Linsen ist zu erwarten, dass die tatsächliche Ausbreitungsrichtung, gegeben durch die Energieströmungslinien, i. Allg. *nicht* senkrecht zur Grenzfläche zwischen den Dielektrika erfolgt, da diese Grenzfläche sonst (im geometrisch optischen Sinn) keine Funktion für die Strahlbrechung hätte. Durch das in Abschnitt 6.6 ab S. 97 detailliert beschriebene Verfahren ist es grundsätzlich möglich, Ausbreitungswege zu wählen, die *nicht* notwendigerweise senkrecht von der Anfangsfront der Berechnung ausgehen. Dies wurde bei den Beispielen in Abschnitt 6.3 bereits vorausgesetzt. Dadurch können die Ausbreitungswege so gewählt werden, dass sie

auf der Front, von der aus die PE-Berechnung startet, der dort vorherrschenden Richtung des Poynting-Vektors und damit dem lokalen Verlauf der Energieströmungslinien entsprechen. Für eine sinnvolle Festlegung der Ausbreitungswege ist also kein A-priori-Wissen von geometrisch-optischen Strahlen oder von Energieströmungslinien erforderlich, sondern lediglich die Kenntnis des Poynting-Vektors auf der PE-Anfangsfront. Dabei gilt es, zwei Punkte zu beachten. Zum einen können sich die so gewählten Ausbreitungswege irgendwo schneiden, in diesem Fall ist eine rechtzeitige Erkennung dieser Problematik und eine Neufestlegung der Ausbreitungswege erforderlich, was in Abschnitt 6.5.2 erörtert wird. Zum anderen kann die Poynting-Vektor-Verteilung durch Energieströmungs-Wirbel einen recht komplizierten Verlauf haben, vgl. Abschnitt 6.4.3. Liegt ein Punkt auf der PE-Anfangsfront in der Nähe eines Wirbels, weicht die Richtung des Poynting-Vektors dort stark von den übrigen Poynting-Vektoren (also der im großen und ganzen vorherrschenden Ausbreitungsrichtung) ab; der so angenommene Ausbreitungsweg könnte die anderen dadurch schneiden. Dies macht es erforderlich, die Poynting-Vektor-Richtungsverteilung (z. B. durch Mittelwertbildung oder Approximation durch ein Polynom niedrigen Grades) zu glätten, bevor sie für die Festlegung der angenommenen Ausbreitungswege verwendet wird.

6.5.1 Numerische Bestimmung der Richtung des Poynting-Vektors aus der Phase von ψ

Bei der Berechnung des Poynting-Vektors nach Abschnitt 6.4.2 wird neben der ϕ - bzw. y -Komponente des elektrischen Vektorpotentials auch die räumliche Ableitung $\partial\psi/\partial x$ und $\partial\psi/\partial z$ benötigt. Diese Ableitung steht im allerersten Schritt der PE-Rechnung (d. h. für $n = 0$, vgl. Abschnitt 4.5) noch nicht zur Verfügung. Zur Bestimmung der Richtung des Poynting-Vektors wird daher die Tatsache ausgenutzt, dass Energieströmungslinien (zumindest im Zweidimensionalen) stets senkrecht zu den Phasenfronten verlaufen [40]. Für die Konstruktion der lokalen Phasenfront wird näherungsweise angenommen, dass Punkt B , in dem das Potential ψ die Phase φ_B aufweist, genau

$$\rho = \frac{\varphi_B - \varphi_A}{\beta} \quad (6.11)$$

von derjenigen Phasenfront entfernt liegt, die durch Punkt A mit der Phase φ_A verläuft, vgl. Abb. 6.12. Die Richtung des Poynting-Vektors

$$\hat{n} = \frac{\vec{S}}{|\vec{S}|}$$

ergibt sich aus der Senkrechten zur Tangente an den Kreis um Punkt B , dessen Radius dem Abstand ρ entspricht. Im einzelnen gilt:

$$\alpha = \arg(x_A - x_B + j(z_A - z_B)) \quad (6.12)$$

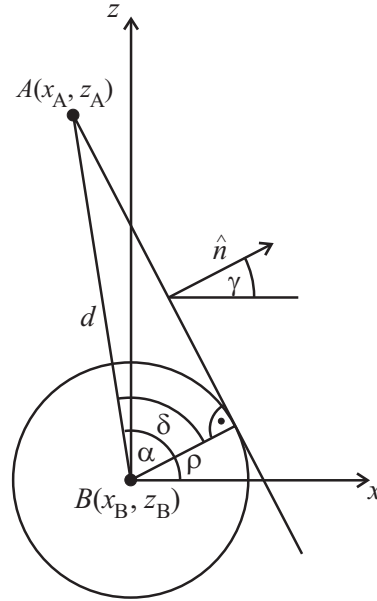


Abbildung 6.12: Bestimmung des lokalen Verlaufs der Phasenfront und daraus der Richtung des Poynting-Vektors aus der Phase von ψ in den Punkten A und B

$$d = |x_A - x_B + j(z_A - z_B)| \quad (6.13)$$

$$\delta = \arccos\left(\frac{\rho}{d}\right) = \arccos\left(\frac{\varphi_B - \varphi_A}{\beta \cdot d}\right) \quad (6.14)$$

$$\gamma = \alpha - \delta \quad (6.15)$$

$$\hat{n} = \hat{x} \cos \gamma + \hat{z} \sin \gamma \quad (6.16)$$

Dieses Verfahren erfordert die Gültigkeit der Annahme, dass sich die Phase in einem Punkt B mittels eines Phasenfronten-Bildes (z. B. Abb. 6.10) interpolieren lässt, falls B (im Gegensatz zu einem Punkt A) nicht auf einer gezeichneten Phasenfront liegt. Diese Möglichkeit der Interpolation ist gegeben, wenn die im Abstand $\Delta\varphi$ gezeichneten Phasenfronten in diesem Bereich einen gleichbleibenden geometrischen Abstand

$$\Delta r = \frac{\Delta\varphi}{\beta} \quad (6.17)$$

aufweisen. In weiten Teilen von Abb. 6.10 ist dies näherungsweise der Fall, jedoch nicht in der Nähe von Schnittpunkten von Phasenfronten (gleichbedeutend mit Wirbeln der Energieströmungslinien). Dort kann also der Verlauf der Phasenfront mit dem in Gl. (6.11) und Abb. 6.12 beschriebenen Verfahren *nicht* hinreichend genau bestimmt werden. Allerdings zeigen die Betrachtungen am Ende von Abschnitt 6.4.3, dass die Energieströmungslinien in der Nähe von Wirbeln ohnehin nicht für die Bildung eines PE-Gitters verwendet werden können, da ihre Richtung (lokal) stark von der übrigen bzw. allgemein vorherrschenden Ausbreitungsrichtung abweichen kann. An dieser Stelle sind die Richtungen der

für die PE anzunehmenden Ausbreitungswege zu interpolieren oder die Verteilung der Richtungsvektoren ist zu glätten, um evtl. wirbelbedingte Ausreißer zu beseitigen.

6.5.2 Adaptive Bestimmung der angenommenen Ausbreitungswege

Durch das in Abschnitt 6.5.1 beschriebene Verfahren lässt sich nicht nur zu Beginn der PE-Rechnung, sondern auch jederzeit zwischen den einzelnen Berechnungsschritten die tatsächliche Ausbreitungsrichtung der elektromagnetischen Welle abschätzen. Dies kann dazu verwendet werden, um die Übereinstimmung der *angenommenen* Ausbreitungswege mit der (näherungsweise) tatsächlichen Ausbreitungsrichtung zu überprüfen und bei einer zu großen Abweichung die Ausbreitungswege neu festzulegen. Eine derartige Neufestlegung kann auch dann erfolgen, wenn die schrittweise PE-Rechnung zu nahe an den Schnittpunkt zweier Ausbreitungswege gelangt ist, vgl. Abschnitt 4.8.2. Damit ist es prinzipiell möglich, das in Abb. 6.5 auf S. 86 angedeutete Verfahren zur Umgehung der Brennpunkt-Problematik vollautomatisch ohne Kenntnis des Verlaufs von Energieströmungslinien oder geometrisch-optischer Strahlen durchzuführen. Die für die PE-Rechnung in Strahlenkoordinaten angenommenen geradlinigen Ausbreitungswege werden also — wenn erforderlich — im Laufe der Berechnung wiederholt an die tatsächlich vorherrschende Ausbreitungsrichtung angepasst. Hierzu ist es erforderlich, dass die Ausbreitungswege nicht unbedingt senkrecht, sondern unter einem beliebigen Winkel auf der Anfangsfront einer PE-Rechnung stehen. Diese Problematik wird in Abschnitt 6.6 betrachtet. In der Praxis gelingt diese adaptive Strahlrichtungsbestimmung bei einfachen Feldverteilungen (z.B. bei derjenigen eines gaußschen Strahls, vgl. Abschnitt 4.7.2). Bei komplizierteren Feldverteilungen führt der i. Allg. gekrümmte Verlauf von Energieströmungslinien verbunden mit der begrenzten Genauigkeit der Richtungsbestimmung des Poynting-Vektors nach Abschnitt 6.5.1 trotz Glättung zu einem von Teilschritt zu Teilschritt zunehmend komplizierteren Verlauf des PE-Gitters mit ggf. immer mehr sich schneidenden Ausbreitungswegen, so dass nicht von einer Eignung des Verfahrens der adaptiven Ausbreitungswegsbestimmung für allgemeine Linsenformen gesprochen werden kann. Gleichwohl gibt der Vergleich der numerisch bestimmten Poynting-Vektoren mit den ursprünglich angenommenen Ausbreitungswegen einen Anhaltspunkt für die Übereinstimmung der angenommenen und tatsächlichen Ausbreitungsrichtung.

Unter dem Gesichtspunkt der Robustheit und allgemeinen Anwendbarkeit kann die in Abschnitt 6.3.2 beschriebene Methode des Durchverbindens von Punkten auf der Anfangs- und Endfront als am besten für die Praxis geeignet bezeichnet werden. Auch hierfür ist es erforderlich, dass die angenommenen Ausbreitungswege schräg von der Anfangsfront der PE-Rechnung abgehen dürfen, was nachfolgend ausführlich betrachtet wird.

6.6 Nicht senkrecht von der PE-Anfangsfront abgehende Ausbreitungswege

6.6.1 Problematik

Gewöhnlich stehen bei der Anwendung von PE die angenommenen Ausbreitungswege senkrecht auf derjenigen Front, von der die Berechnung ausgeht, d. h. auf der die Anfangswerte für ψ gegeben sind. Diese Front wird im Folgenden PE-Anfangsfront genannt. Sofern es sich bei der PE-Anfangsfront um eine *tatsächliche* Phasenfront handelt, zeigen die Poynting-Vektoren in Richtung der angenommenen Ausbreitungswege, d. h. es herrscht zumindest in der unmittelbaren Umgebung der PE-Anfangsfront — wie es bei der Anwendung von PE bis auf 15° (SPE) bzw. 45° (WWPE) genau gefordert ist — eine Übereinstimmung zwischen der angenommenen und tatsächlichen Ausbreitungsrichtung. Nach Abschnitt 6.1 ist die PE-Anfangsfront zumindest bei der ersten Teilberechnung identisch mit der Grenzfläche zwischen Luft und Linsendielektrikum. Senkrecht auf dem Dielektrikum stehende Ausbreitungswege widersprechen i. Allg. dem Wirkprinzip einer Linse: Nur bei einem schrägen Einfall kommt es im geometrisch-optischen Sinn zu einer Strahlbrechung und die Linse führt zu einer Veränderung des Strahlengangs. Die Vorgabe, dass die Wellenausbreitung senkrecht zur Grenzfläche zwischen Luft und Dielektrikum anzunehmen ist, würde die Freiheit, die Ausbreitungswege wie in Abschnitt 6.5 beschrieben an die tatsächliche Ausbreitungsrichtung anzupassen, beschneiden und ggf. zu sich schneidenden angenommenen Ausbreitungswegen führen. Eine möglichst gute Übereinstimmung zwischen der angenommenen und tatsächlichen Ausbreitungsrichtung ist wünschenswert, damit die Reserven des Verfahrens — eine zulässige Abweichung von 15° bzw. 45° — für sich krümmende Energieströmungslinien oder starke Amplitudenänderungen¹ in Ausbreitungsrichtung — z.B. in Brennpunktsnähe — vorbehalten bleiben.

Deutlicher wird die Problematik bei der in Abschnitt 6.5.2 beschriebenen Vorgehensweise der adaptiven Anpassung der angenommenen Ausbreitungswege an die tatsächliche Ausbreitungsrichtung. Abb. 6.13 zeigt die angenommenen Ausbreitungswege und die dazugehörigen Phasenfronten. Zunächst erfolgt die PE-Berechnung im linken Strahlenkoordinatensystem. Wird nun festgestellt, dass die angenommenen Ausbreitungswege an die tatsächliche Ausbreitungsrichtung angepasst werden müssen, ist die PE-Rechnung mit neu gewählten Ausbreitungswegen ausgehend von der letzten Front im alten Koordinatensystem fortzusetzen. Gewöhnliche PE-Algorithmen verlangen jedoch durchgehende (angenommene) Phasenfronten, die im neuen Koordinatensystem erst jenseits des in Abb. 6.13 eingezeichneten Übergangsbereiches existieren. Das Auftreten derartiger Übergangsbereiche ist gleichbedeutend mit der Beobachtung, dass die Ausbreitungswege im neuen Koordinatensystem i. Allg. nicht senkrecht zur letzten Front im alten System stehen.

¹Vgl. hierzu die Abschnitte 4.2.4 und 4.8.1.

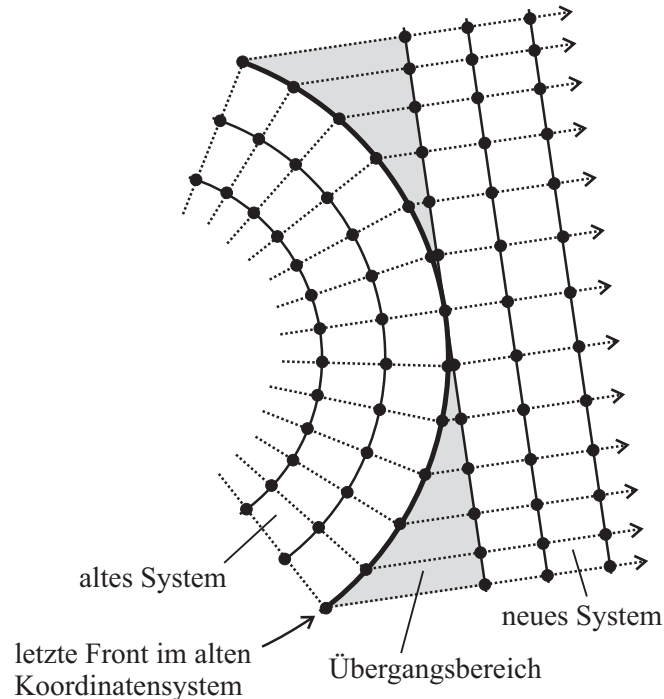


Abbildung 6.13: Übergang zwischen altem und neuem Strahlenkoordinatensystem. Gestrichelt: angenommene Ausbreitungswege, durchgezogen: angenommene Phasenfronten. Die Punkte symbolisieren das PE-Gitter.

6.6.2 Flanken: Einfacher Schnitt der neuen angenommenen Phasenfronten mit der PE-Anfangsfront

Beim Übergang zwischen zwei Strahlenkoordinatensystemen, in denen PE angewandt wird, schneiden die angenommenen Phasenfronten des neuen Systems die letzte angenommene Phasenfront des alten Systems, auf der je nach TM- oder TE-Fall über die skalare Größe ψ_m oder ψ das elektrische bzw. magnetische Feld bekannt ist, vgl. Abschnitt 3.5. Bei dieser Front im alten System kann es sich auch um die geometrische Berandung der Linse handeln, von der die PE-Berechnung ausgeht und auf der die angenommenen Ausbreitungswege nicht notwendig senkrecht stehen.

Aus Sicht des neuen Systems liegen auf der letzten Front des alten Systems Randpunkte mit bekanntem Potential ψ_m bzw. ψ vor, die gemäß Abschnitt 4.6.4 (S. 51) behandelt werden können. Abb. 6.14 zeigt das PE-Gitter, das sich auf diese Weise aus dem in Abb. 6.13 dargestellten Beispiel ergibt.

Die Anwendung von PE erfolgt in den Bereichen A und B (vgl. Abb. 6.14) getrennt, bis sich eine einzige durchgängige Phasenfront im neuen System ergibt, von der aus konventionell weitergerechnet werden kann. Anschaulich kann von einer Flanke des PE-Gitters gesprochen werden, die schrittweise wie in in Abb. 6.15 dargestellt „aufgefüllt“ wird.

Diese Vorgehensweise führt zu unterschiedlichen und zum Teil recht kleinen Schrittweiten $\Delta\xi$ in Ausbreitungsrichtung. Allzu kleine Schrittweiten führen zu Stabilitätsproblemen

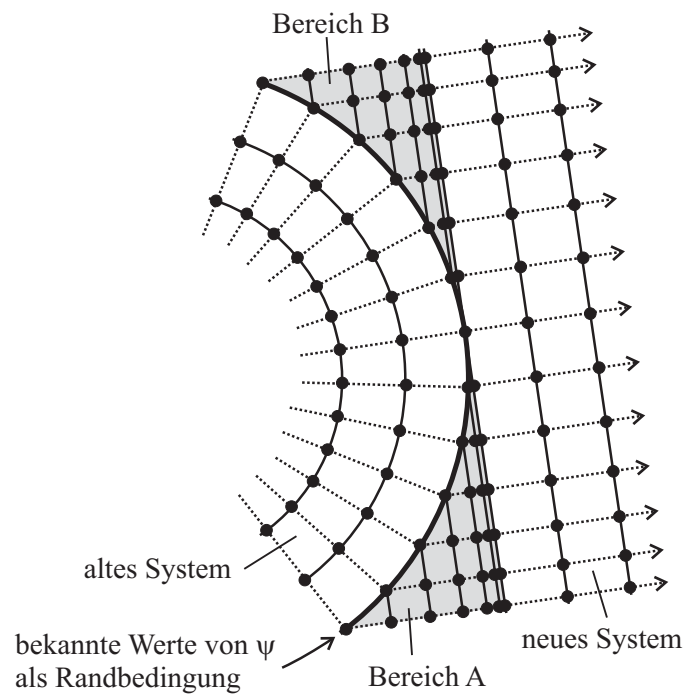


Abbildung 6.14: PE-Gitter in den Übergangsbereichen zwischen altem und neuem Strahlenkoordinatensystem

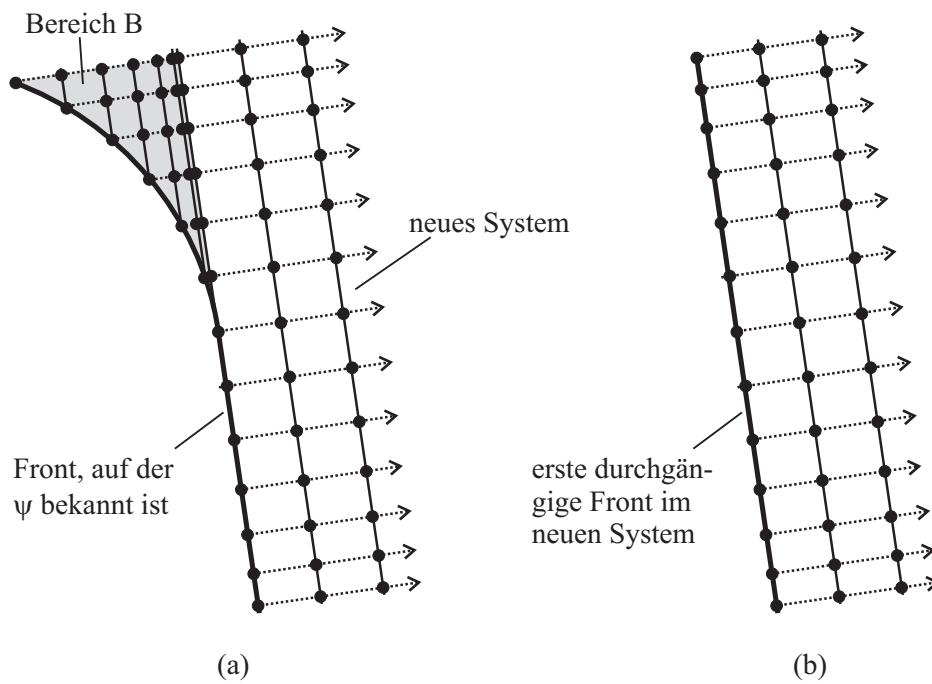


Abbildung 6.15: (a) PE-Gitter nach Auffüllung des Bereichs A, (b) PE-Gitter nach Auffüllung der Bereiche A und B.

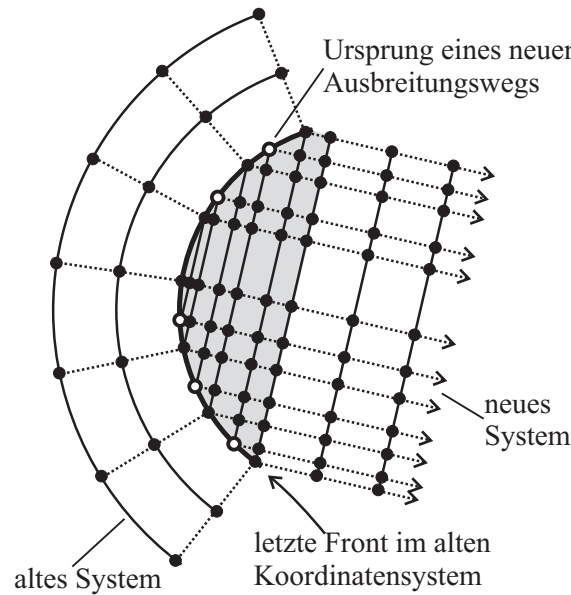


Abbildung 6.16: Zweifacher Schnitt der Ergebnisfront im alten System durch angenommene Phasenfronten im neuen System. Auffüllung eines Beckens.

bei der Anwendung dieses Verfahrens im Zusammenhang mit der Weitwinkel-PE, vgl. Abschnitt 6.6.5.

6.6.3 Becken: Zweifacher Schnitt der neuen angenommenen Phasenfronten mit der PE-Anfangsfront

Abb. 6.16 zeigt ein Szenario, bei dem die angenommenen Phasenfronten des neuen Systems die Ergebnis-Front des alten Systems im Übergangsbereich an *zwei* Punkten schneiden. I. Allg. kann nur einer der beiden Schnittpunkte einem auf der Endfront des alten Systems vorhandenen Punkt zugeordnet werden. Am gegenüberliegenden Rand ist in diesem Fall ein Punkt hinzuzufügen, der Wert der Größe ψ wird durch lineare Interpolation aus den benachbarten Punkten gewonnen. Durch den neu hinzugekommenen Punkt entsteht ein zusätzlicher angenommener Ausbreitungsweg, d. h. das Gitter wird insgesamt dichter. Ggf. kann das Gitter ausgedünnt werden, indem ein Punkt- bzw. Strahlenpaar entfernt wird. Dies ist insbesondere dann angezeigt, wenn zwei benachbarte Punkte einen sehr kleinen Abstand haben oder aufeinander liegen.

Anschaulich betrachtet bildet die Ergebnisfront im alten System ein Becken, an dessen tiefstem Punkt die Phase am größten ist. Durch die beschriebene Vorgehensweise wird das Becken im Laufe der PE-Teilberechnung sukzessive aufgefüllt, d. h. schließlich verläuft die *angenommene* Phasenfront an der Oberfläche des gefüllten Beckens.

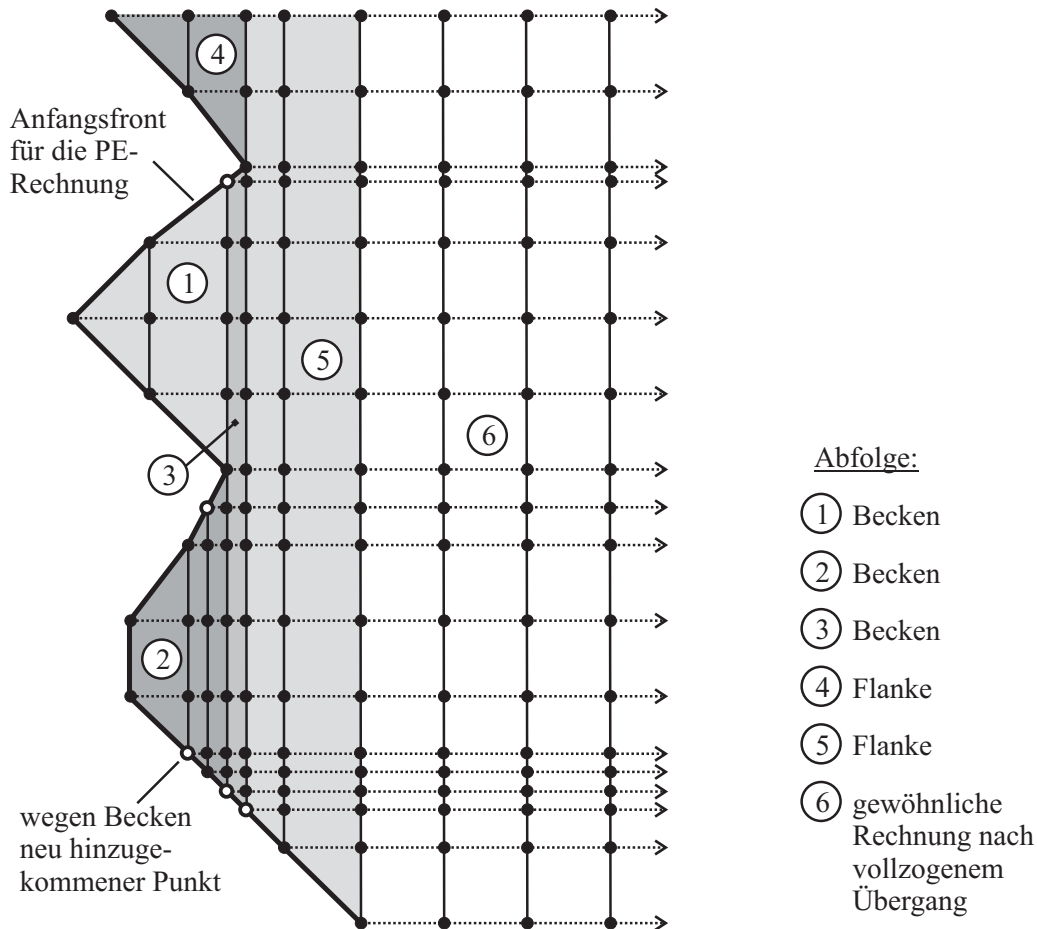


Abbildung 6.17: Beispiel für den Übergang zwischen zwei Strahlenkoordinatensystemen durch sukzessives Auffüllen von Becken und Flanken. Die angenommenen Ausbreitungswege verlaufen i. Allg. nicht — wie in diesem Beispiel — parallel zueinander.

6.6.4 Übergang zwischen zwei allgemeinen Strahlenkoordinatensystemen

Der Übergang zwischen zwei allgemeinen Strahlenkoordinatensystemen lässt sich sukzessive durch eine schrittweise Auffüllung der vorkommenden Flanken und Becken nach Abschnitt 6.6.2 und 6.6.3 realisieren. Hierzu sind vor Beginn der PE-Rechnung alle Becken und Flanken zu bestimmen. Ein Beispiel ist in Abb. 6.17 dargestellt.

6.6.5 Beobachtete Instabilität bei der WWPE durch kleine Schrittweiten

Beim Zulassen einer Anfangsfront, die nicht senkrecht zu den angenommenen Ausbreitungswegen verläuft, kann es prinzipbedingt zu sehr kleinen Schrittweiten kommen. Abb. 6.18 zeigt die beiden Extremfälle. Im einen Fall ist die Schrittweite in Ausbreitungsrichtung $\Delta\xi$ betroffen, im anderen Fall der Abstand zwischen den Strahlen Δs .

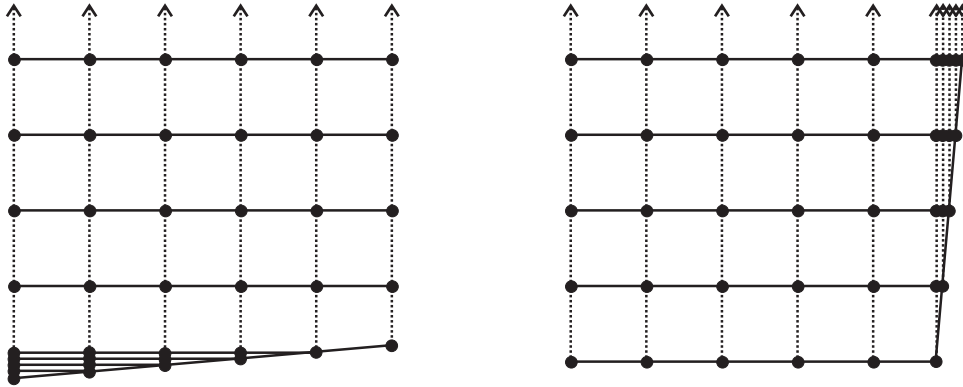


Abbildung 6.18: Zur möglichen Entstehung sehr kleiner Schrittweiten

Die Erfahrung zeigt, dass die Entstehung sehr kleiner Schrittweiten beim „Auffüllen“ von Becken und Flanken bei Anwendung der Standard-PE — abgesehen vom Rechenzeitbedarf, um diese vielen kleinen Schritte abzuarbeiten — keine nachteilige Auswirkung hat. Im Gegensatz dazu ist bei der Weitwinkel-PE in nicht-kartesischen Koordinaten eine Neigung zur Instabilität zu beobachten. Dies betrifft beide in Abb. 6.18 dargestellten Extremfälle. Es ist bekannt, dass die Schrittweite bei der Methode der Finiten Differenzen grundsätzlich nicht beliebig klein werden darf, da sich sonst Rundungsungenauigkeiten bei der Berechnung der Ableitung nach Gl. (4.53) zu größeren Fehlern summieren können [31]. Offenbar ist die Standard-PE diesbezüglich deutlich robuster als die Weitwinkel-PE. Eine mögliche Ursache für die Anfälligkeit der WWPE hinsichtlich zu kleiner Schrittweiten liegt in der (im Vergleich zur SPE) zusätzlichen zweifachen Ableitung von $\partial\Psi/\partial\xi$ senkrecht zur Ausbreitungsrichtung, vgl. (4.50). Aus diesem Grund muss von einer generellen Verwendung der WWPE im Bereich von Becken und Flanken abgeraten werden.

6.7 Bestimmung des Fernfeldes der Linsenantenne

6.7.1 Aperturbelegung

Zur Überwindung der Grenze zwischen Linsendielektrikum und Luft erfolgt die Anwendung von PE abschnittsweise in Gebieten homogener Dielektrizitätszahl, vgl. Abschnitt 6.1. Somit erfolgt die PE-Rechnung zunächst bis zur Linsenapertur. Von dort kann — mit der relativen Dielektrizitätszahl von Luft $\varepsilon_r = 1$ — ins Fernfeld gerechnet werden.

I. Allg. verlaufen die angenommenen Ausbreitungswege (z. B. geometrisch-optische Strahlen) nicht senkrecht zur Linsenapertur, vgl. hierzu die Argumentation zu Beginn von Abschnitt 6.5 auf S. 93. Dadurch stellt die Apertur i. Allg. keine angenommene Phasenfront dar. In diesem Fall müssen die Ergebnisse mehrerer aufeinander folgender Schritte ausgewertet werden, um die Aperturbelegung zu erhalten. Die PE-Rechnung ist so lange fortzusetzen, bis alle Punkte der Grenzfläche erfasst worden sind, vgl. Abb. 6.19. Es stellt

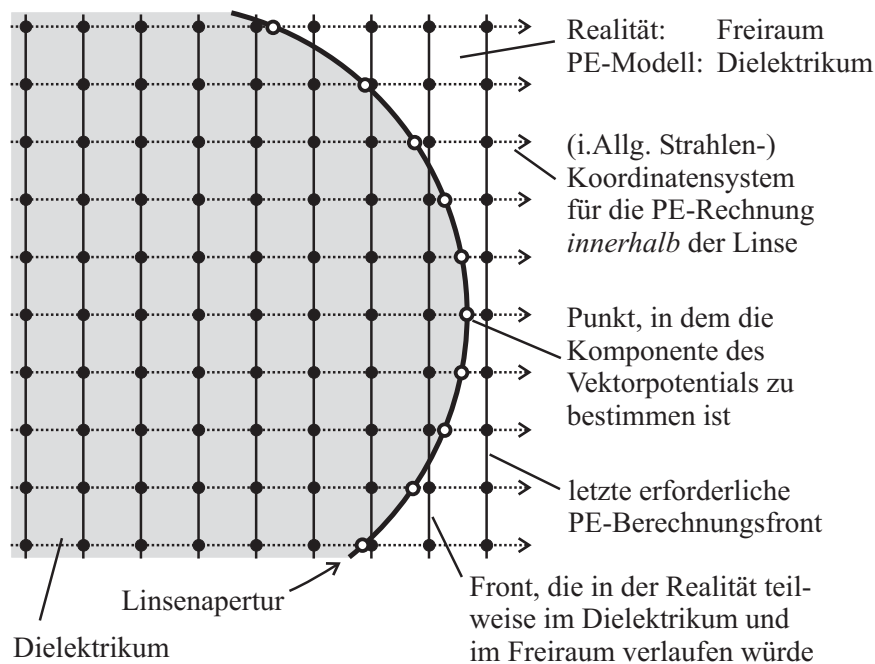


Abbildung 6.19: Linsenapertur, die i. Allg. nicht senkrecht von den (innerhalb der Linse) angenommenen Ausbreitungswegen getroffen wird.

sich die Frage, wie die Grenzfläche zwischen Linsendielektrikum und Luft während der letzten Berechnungsschritte zu berücksichtigen ist. Der abrupte Übergang zwischen zwei verschiedenen Dielektrika innerhalb einer Berechnungsfront ist nicht behandelbar, vgl. Abschnitt 6.1. Insofern wird vorgeschlagen, das Vorhandensein der Grenzfläche zunächst zu ignorieren und so lange im gesamten PE-Gitter ein homogenes Linsendielektrikum anzunehmen, bis die Feldverteilung bzw. die maßgebliche Komponente des Vektorpotentials der einfallenden Welle in allen Punkten auf der Grenzfläche bestimmt worden ist. Anschließend kann entsprechend zu den fresnelschen Beziehungen (vgl. z. B. Anhang J) die Aufspaltung in einen reflektierten und weiterlaufenden Anteil erfolgen und der weiterlaufende Anteil als Aperturbelegung verwendet werden. Die Frage, inwiefern die fresnelschen Beziehungen näherungsweise auch für gekrümmte Oberflächen verwendet werden können, wird in Abschnitt 7.2.2 behandelt.

6.7.2 Anwendung von PE ausgehend von der Apertur bis ins Fernfeld

Ausgehend von der Aperturbelegung kann das Fernfeld entweder konventionell mit der Fresnel-Integral-Methode (vgl. Abschnitt 5.2) oder aber mittels der PE-Methode berechnet werden. Letzteres soll näher betrachtet werden. Ausgehend vom Ort der Antenne ist das Fernfeld erreicht, wenn die Richtcharakteristik nicht mehr vom Abstand r zwischen

der Antenne und dem Beobachter abhängt. Dies ist näherungsweise ab einer Entfernung

$$r_{\min} = 2 \cdot \frac{D^2}{\lambda_0}, \quad (6.18)$$

der sog. Rayleigh-Entfernung, der Fall [32]. Bei D handelt es sich um den Durchmesser einer Kugel, die die Antenne (eng) umschließt; im Falle einer Aperturantenne kann D direkt aus der Aperturgröße abgeschätzt werden. Die Fernfeld-Berechnung erfolgt somit durch Anwendung von PE bis in eine Entfernung r_{\min} nach Gl. (6.18) von der Apertur. Prinzipiell entspricht die Vorgehensweise bei der Fernfeldberechnung derjenigen bei der Berechnung der Wellenausbreitung innerhalb der Linse, vgl. Abschnitt 6.2 bis 6.5. Als Endfront wird (im 2D-Fall) ein Kreis mit Radius r_{\min} um den Mittelpunkt der Antenne angenommen. Wie in Abschnitt 6.7.1 beschrieben erfolgt die Anwendung von PE so lange, bis alle Punkte auf der Endfront von der durchs Berechnungsgebiet wandernden PE-Front erreicht worden sind.

Das in Abschnitt 6.3.2 beschriebene Durchverbinden von Punkten auf der Anfangs- und Endfront kommt auch bei der Fernfeldberechnung in Betracht, wenn sichergestellt ist, dass die Abweichung zwischen der auf diese Weise angenommenen und der tatsächlichen Ausbreitungsrichtung nicht zu groß wird. Dies kann durch einen Vergleich zwischen den Richtungen der angenommenen Ausbreitungswege und den nach Abschnitt 6.5.1 bestimmten Poynting-Vektoren überprüft werden.

Kapitel 7

Anwendungsbeispiele

Die Realisierung des in Kapitel 6 beschriebenen Konzepts für die Anwendung von PE in Strahlenkoordinaten erfolgt durch die Erstellung eines Computerprogramms in C/C++, dessen Ablaufplan in Anhang F auf S. 146 abgebildet ist und das für alle nachfolgenden Beispiele verwendet wird.

7.1 PE-Rechnung im Freiraum

7.1.1 Betrachtetes Szenario

Die Validierung des PE-Verfahrens soll durch einen Vergleich mit asymptotisch exakten Rechenverfahren durchgeführt werden. Da die PE-Methode bei der Analyse dielektrischer Linsen abschnittsweise in homogenen Medien angewendet wird (vgl. Abschnitt 6.1), erfolgt die Evaluation in einem Gebiet mit konstanter Dielektrizitätszahl, d. h. es kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit der Freiraum-Fall untersucht werden. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit ist der PE-Algorithmus auf Rotationssymmetrie bzgl. ϕ ausgelegt, vgl. Anhang G ab S. 147. Für einen Vergleich mit asymptotisch exakten Methoden bieten sich Quellen an, die ein rotationssymmetrisches elektromagnetisches Feld erzeugen, also z. B. Dipole, die sich auf der Rotationsachse (z-Achse) befinden und in Richtung der Rotationsachse orientiert sind.

Bei der PE-Methode erfolgt die Feldberechnung ausgehend von einer skalaren Rechengröße auf einer Anfangsfront. Hierbei handelt es sich um die einzige Komponente eines Vektorpotentials. Insofern bietet sich folgende Vorgehensweise für die Evaluation an:

1. Berechnung der Komponente des Vektorpotentials auf der Anfangsfront mittels einer asymptotisch exakten Methode.
2. Berechnung der Komponente des Vektorpotentials auf der Endfront mittels PE ausgehend vom Potential auf der Anfangsfront.

3. Zum Vergleich erfolgt die Berechnung der entsprechenden Komponente des Vektorpotentials auf der Endfront ebenso mittels der asymptotisch exakten Methode.

Elektrische z-Dipole erzeugen ein elektromagnetisches Feld, bei dem der elektrische Feldanteil keine ϕ -Komponente aufweist [45], also ein Feld „TE bzgl. ϕ “. Bei einem derartigen Feld ist das bei der PE-Methode verwendete skalare Potential ψ proportional zur ϕ -Komponente des Magnetfeldes, vgl. Abschnitt 2.3.3, so dass das eine direkt aus dem anderen bestimmt werden kann.

In Abschnitt 6.2 wurde dargelegt, dass elektromagnetische Felder, in denen Fokussierungseffekte auftreten, nicht ohne weiteres mit der PE-Methode behandelbar sind. Fokussierung bedeutet, dass sich geometrisch-optische Strahlen schneiden und wegen der Singularität im Schnittpunkt zumindest in dessen näherer Umgebung nicht als angenommene Ausbreitungswege für PE verwendet werden können. Um die in Abschnitt 6.3 diskutierten Verfahren zur Umgehung der Brennpunkt-Problematik zu evaluieren, soll im Folgenden ein Beispiel betrachtet werden, bei dem ein Brennpunkt vorkommt. Hierzu werden entlang der z-Achse (Rotationsachse des Kugelkoordinatensystems) Elementardipole mit einem konstanten Betrag des Dipolmoments und einer Phasenbelegung nach Gl. (7.1) angeordnet. Die Elementardipole sind in z-Richtung orientiert, so dass ein bzgl. ϕ rotationssymmetrisches elektromagnetisches Feld erzeugt wird. Der Abstand Δz zwischen den einzelnen Quellen beträgt eine zehntel Freiraumwellenlänge.

$$\varphi(z) = \beta_0 \sqrt{z^2 + x_0^2} \quad (7.1)$$

Im Punkt $x = x_0, z = 0$ überlagern sich die Anteile aller Elementarquellen gleichphasig, so dass dieser Punkt einen Brennpunkt im geometrisch-optischen Sinne darstellt. Abb. 7.1 zeigt die Verteilung des Betrages der ϕ -Komponente der magnetischen Feldstärke und Abb. 7.2 die zugehörigen (nach Abschnitt 6.4 numerisch berechneten) Energieströmungslinien für $x_0 = 5\lambda_0$ und Quellen auf der Rotationsachse im Bereich $-5\lambda_0 \leq z \leq 5\lambda_0$. Zur Evaluation der einzelnen Konzepte zur Überwindung des Brennpunkts erfolgt die Anwendung von PE ausgehend von der Linie $x = \lambda_0$. Abb. 7.3 zeigt neben dem dort vorherrschenden Betrag der ϕ -Komponente des Magnetfeldes auch den Betrag auf den Linien $x = 5\lambda_0$ und $x = 10\lambda_0$. Die Linie $x = 5\lambda_0$ enthält den geometrisch-optischen Brennpunkt.

7.1.2 Verwendung zueinander paralleler Ausbreitungswege

Eine klassische Behandlung des Problems mittels PE besteht darin, Ausbreitungswege zu verwenden, die insgesamt im Mittel der tatsächlichen Ausbreitungsrichtung entsprechen. Da die geometrisch-optischen Strahlen bzw. Energieströmungslinien vor dem Brennpunkt konvergieren und nach dem Brennpunkt divergieren, kommt die Verwendung von PE-Ausbreitungswegen in Betracht, die parallel zur x-Achse verlaufen. Dadurch werden sich

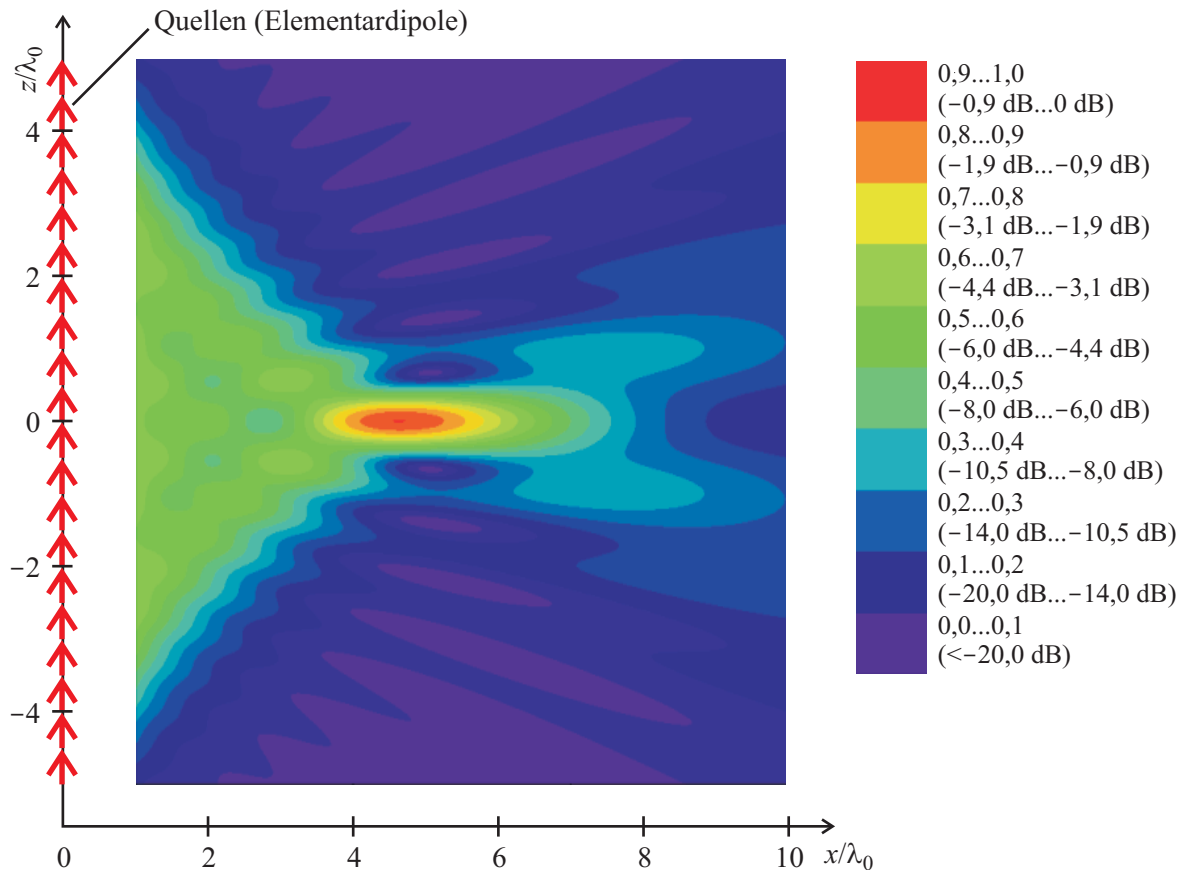


Abbildung 7.1: Aufs Maximum normierter Betrag der ϕ -Komponente der magnetischen Feldstärke, asymptotisch exakte Rechnung (Elementarquellen-Überlagerung in jedem Punkt).

kreuzende Ausbreitungswege vermieden; ferner ist die Abweichung zwischen der angenommenen und tatsächlichen Ausbreitungsrichtung vor und nach dem Brennpunkt gleich groß. Die Front, von der die PE-Rechnung ausgeht, verläuft bei der klassischen PE-Methode senkrecht zu den Ausbreitungswegen und somit parallel zur z -Achse. Die Rechnung erfolgt von $x = \lambda_0$ bis $x = 10\lambda_0$. Um den Einsatz einer absorbierenden Randbedingung zu vermeiden, wird eine hinreichend große Ausdehnung des PE-Gitters in $\pm z$ -Richtung vorgesehen. Laut Abb. 7.3 liegt der Betrag der magnetischen Feldstärke H_ϕ bzw. des Potentials ψ für $|z| > 35\lambda_0$ unterhalb von -40 dB des Maximalwerts auf der jeweiligen PE-Front, so dass bei einem entsprechend ausgedehnten PE-Gitter eine Kurzschluss-Randbedingung eingesetzt werden kann, ohne dass es zu nennenswerten Reflexionen kommt. Aus Abb. 7.3 geht ferner hervor, dass der Betragsverlauf in Brennpunktsnähe (z. B. bei $x = 5\lambda_0$) recht kompliziert ist, so dass zu dessen Erfassung eine feine Gitterauflösung erforderlich ist.

Die Abb. 7.4 und 7.5 zeigen einen Vergleich zwischen dem exakten Verlauf und dem PE-

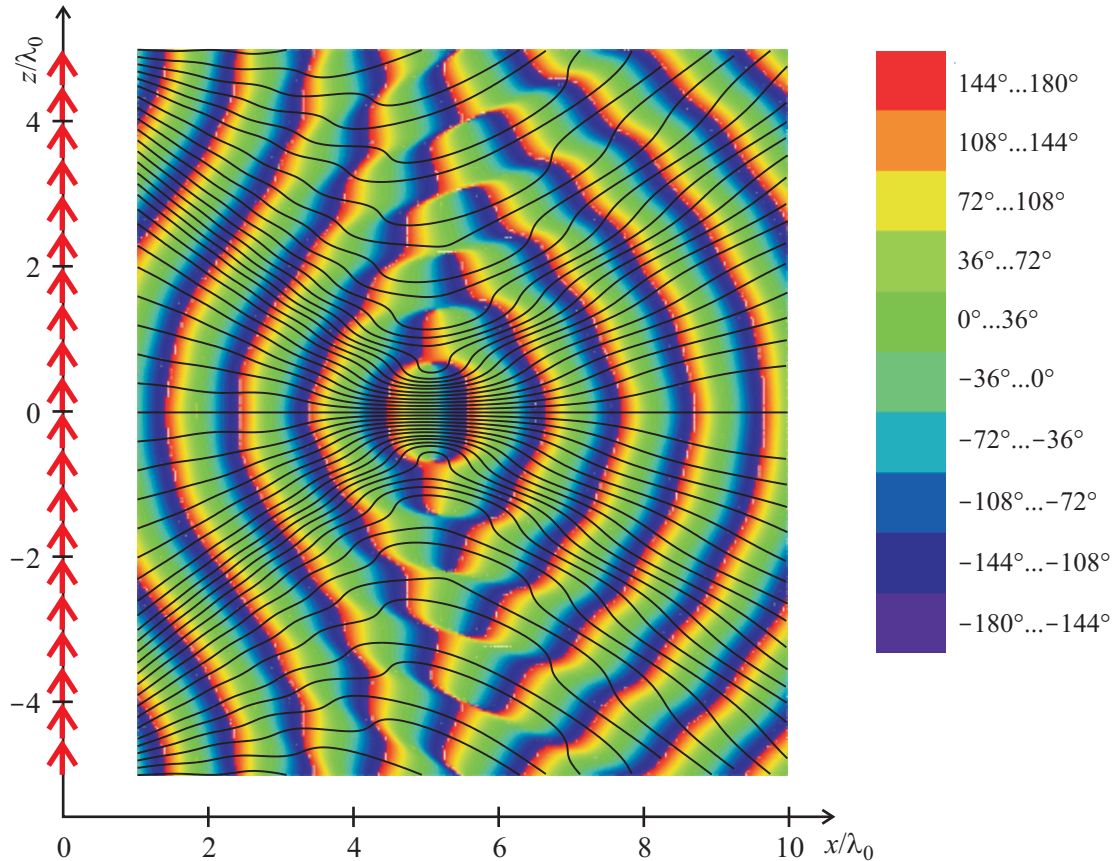


Abbildung 7.2: Phase der ϕ -Komponente der magnetischen Feldstärke und Energieströmungslinien, asymptotisch exakte Rechnung (Elementarquellen-Überlagerung in jedem Punkt).

Ergebnis (sowohl Standard-PE als auch Weitwinkel-PE) bei $x = 5\lambda_0$ bzw. $x = 10\lambda_0$. Die Rechnung erfolgte mit einer Gitterauflösung in (angenommener) Ausbreitungsrichtung $\Delta x = \lambda_0/40$ und einer Auflösung entlang einer (angenommenen) Phasenfront von $\Delta_z = \lambda_0/20$. Eine weitere Verfeinerung der Auflösung bringt keine wesentliche Verbesserung der Genauigkeit; ein in den beiden Dimensionen um den Faktor 4 gröberes Gitter zeigt bereits eine deutliche Verschlechterung der Genauigkeit. Beim in Abb. 7.4 dargestellten Ergebnis an der Stelle $x = 5\lambda_0$ wird deutlich, dass das Standard-PE-Ergebnis nur im Hauptmaximum — dem eigentlichen Brennfleck — mit dem exakten Ergebnis übereinstimmt. Die Nebenmaxima sind hingegen nicht an der richtigen Stelle, und die Nullstellen sind kaum ausgeprägt. Bei Verwendung der Weitwinkel-PE ist die Übereinstimmung deutlich besser, dennoch ist die Position der Nebenmaxima für $|z| > \lambda_0$ zunehmend ungenau. Die Ursache der Ungenauigkeit liegt darin, dass die angenommene Ausbreitungsrichtung (parallele Ausbreitungswege) und die tatsächliche Ausbreitungsrichtung (Ener-

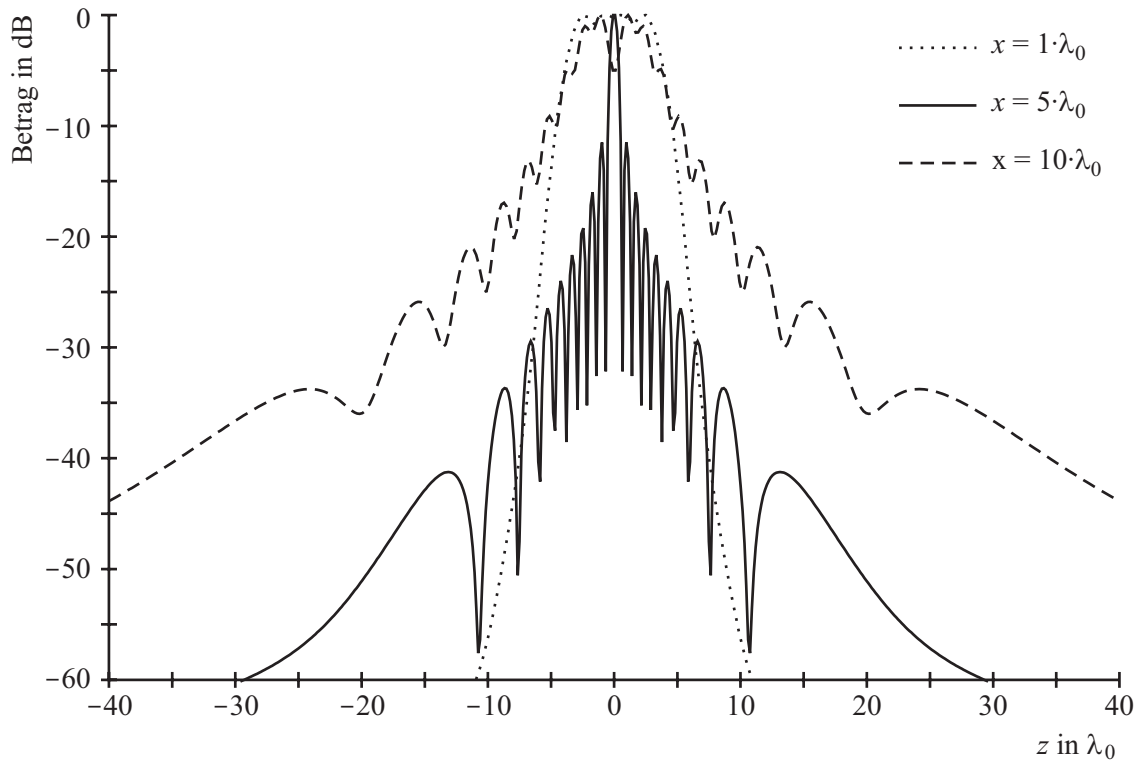
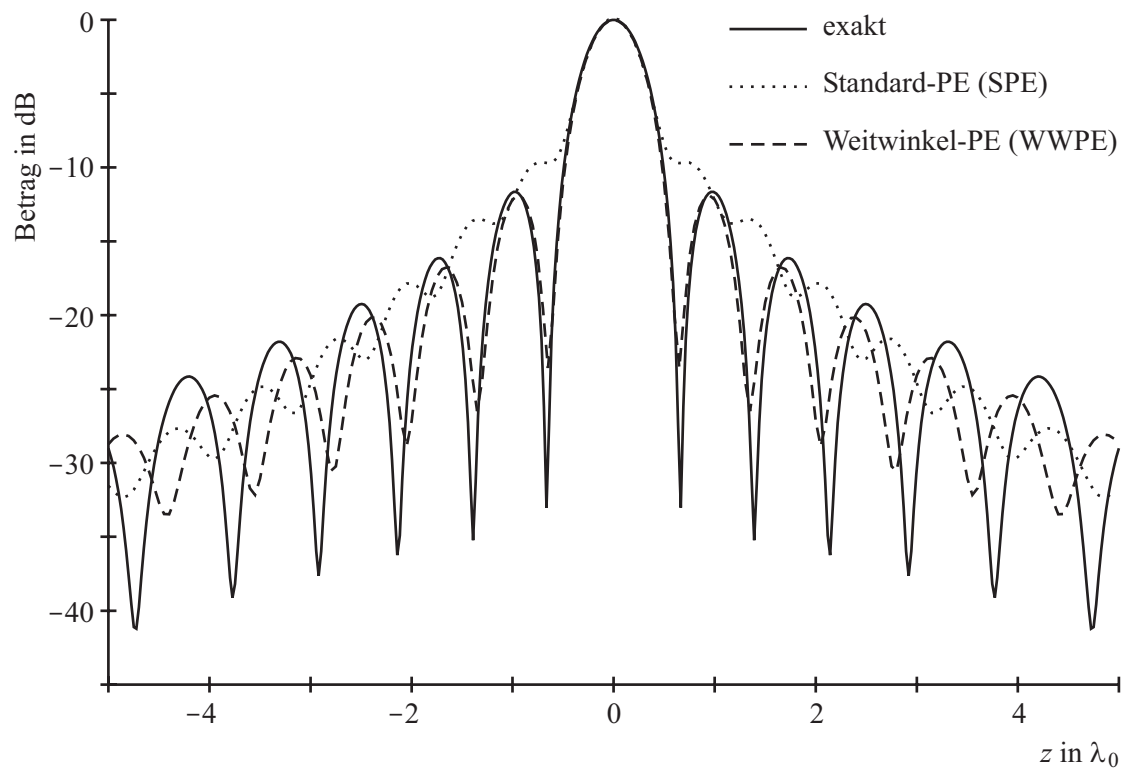
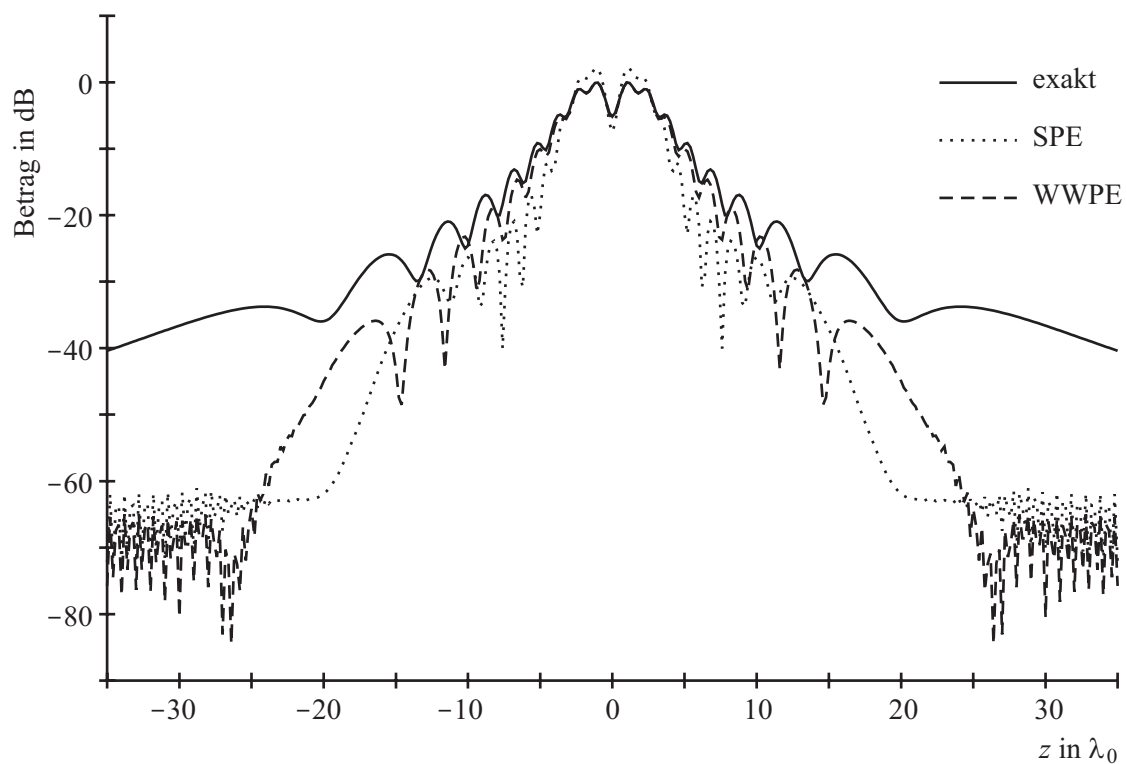


Abbildung 7.3: Betrag der ϕ -Komponente der magnetischen Feldstärke, asymptotisch exakte Rechnung für verschiedene Werte von x (Elementarquellen-Überlagerung in jedem Punkt).

gieströmungslinien nach Abb. 7.2) nicht übereinstimmen. Bei der Weitwinkel-PE wirkt sich diese fehlende Übereinstimmung deutlich weniger stark aus. Bei $x = 10\lambda_0$ (Abb. 7.5) zeigen sich bei der Standard-PE auch im Bereich der Hauptmaxima Abweichungen bis zu 2 dB. Die WWPE ist bis $|z| \approx 4\lambda_0$ hinreichend genau. Die Art von Rauschen am oberen und unteren Berechnungsrand ($|z| \geq 23\lambda_0$) wird durch Reflexionen an der Kurzschluss-Randbedingung verursacht. Es bleibt somit festzuhalten, dass mit der Weitwinkel-PE zwar eine deutliche Verbesserung gegenüber der Standard-PE zu erzielen ist. Dennoch besteht ein Potential, die Genauigkeit zu verbessern, indem die angenommenen Ausbreitungswege an die tatsächliche Ausbreitungsrichtung angepasst werden.

7.1.3 PE-Rechnung mit einer beliebigen Anfangsfront

Nachfolgend wird ein Beispiel betrachtet, bei dem die PE-Rechnung ausgehend von einer Front erfolgt, auf der die angenommenen Ausbreitungswege *nicht* senkrecht stehen. Bei der Anfangsfront handelt es sich somit weder um eine angenommene, noch um eine tatsächliche Phasenfront. Eine Erörterung dieser Problematik findet sich in Abschnitt 6.6. Wie im vorangegangenen Beispiel verlaufen die angenommenen PE-Ausbreitungswege parallel zur x-Achse und die Anfangsfront erstreckt sich von $z = -35\lambda_0$ bis $z = 35\lambda_0$.

Abbildung 7.4: Berechnungsergebnis bei $x = 5\lambda_0$ Abbildung 7.5: Berechnungsergebnis bei $x = 10\lambda_0$

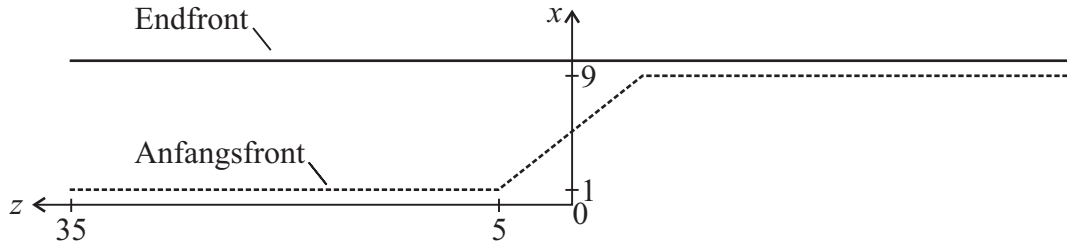


Abbildung 7.6: Im Bereich des Brennflecks schräge Anfangsfront. Die angenommenen Ausbreitungswege verlaufen parallel zur x-Achse.

Im Bereich des Brennflecks ($x \approx 5\lambda_0$, $z \approx 0$, vgl. Abschnitt 7.1.1) verläuft die in Abb. 7.6 dargestellte Anfangsfront schräg. Die Front, auf der die PE-Rechnung endet, liegt bei $x = 10\lambda_0$. Abb. 7.7 zeigt das Berechnungsergebnis für die Weitwinkel- und Standard-PE. Für negative Werte von z stimmen das SPE- und WWPE-Ergebnis gut mit dem exakten Verlauf überein, da die Anfangsfront in diesem Bereich sehr nahe an der Endfront liegt. Durch den kurzen Weg, der bei der PE-Rechnung zurückgelegt wird, kann sich kaum eine größere Abweichung herausbilden. Für positive Werte von z ergibt sich ein ähnlicher Verlauf wie im vorangegangenen Beispiel (gestreckte Anfangsfront bei $x = \lambda_0$).

Es zeigt sich also, dass bekannte Potentialwerte — wie es in den Abschnitten 4.6.4 und 6.6 vorgeschlagen wurde — auf der Anfangsfront als Randbedingung für das Finite-Differenzen-Schema verwendet werden können.

7.1.4 Adaptive Wahl der PE-Ausbreitungswege anhand von A-priori-Wissen

Im vorangegangenen Abschnitt wurde gezeigt, dass die angenommenen Ausbreitungswege nicht notwendig senkrecht auf der Anfangsfront der PE-Rechnung stehen müssen. Dadurch sind die Voraussetzungen für die Wahl von angenommenen Ausbreitungswegen, die an die tatsächliche Ausbreitungsrichtung angepasst sind, geschaffen, vgl. Abschnitt 6.5.2.

Zunächst sollen die Ausbreitungswege so gelegt werden, dass sie abschnittsweise dem ungefähren Verlauf der Energieströmungslinien entsprechen. Abb. 7.8 zeigt, wie eine entsprechende Einteilung vorgenommen werden kann:

- Bereich 1: konvergierende Ausbreitungswege, $1 \leq x/\lambda_0 \leq 3,5$
 - Unterbereich A1: radial auf den (geometrisch-optischen) Brennpunkt zulau-fend, auf der Anfangsfront für $0 \leq |z/\lambda_0| \leq 4$.
 - Unterbereich B1: kontinuierlicher Übergang der Strahlrichtungen zwischen den Bereichen A1 und C1, auf der Anfangsfront für $4 < |z/\lambda_0| \leq 5$.
 - Unterbereich C1: Energieströmungslinien, die in diesem Bereich beginnen, spie-len für die Hauptstrahlung der Anordnung nur eine untergeordnete Rolle; daher

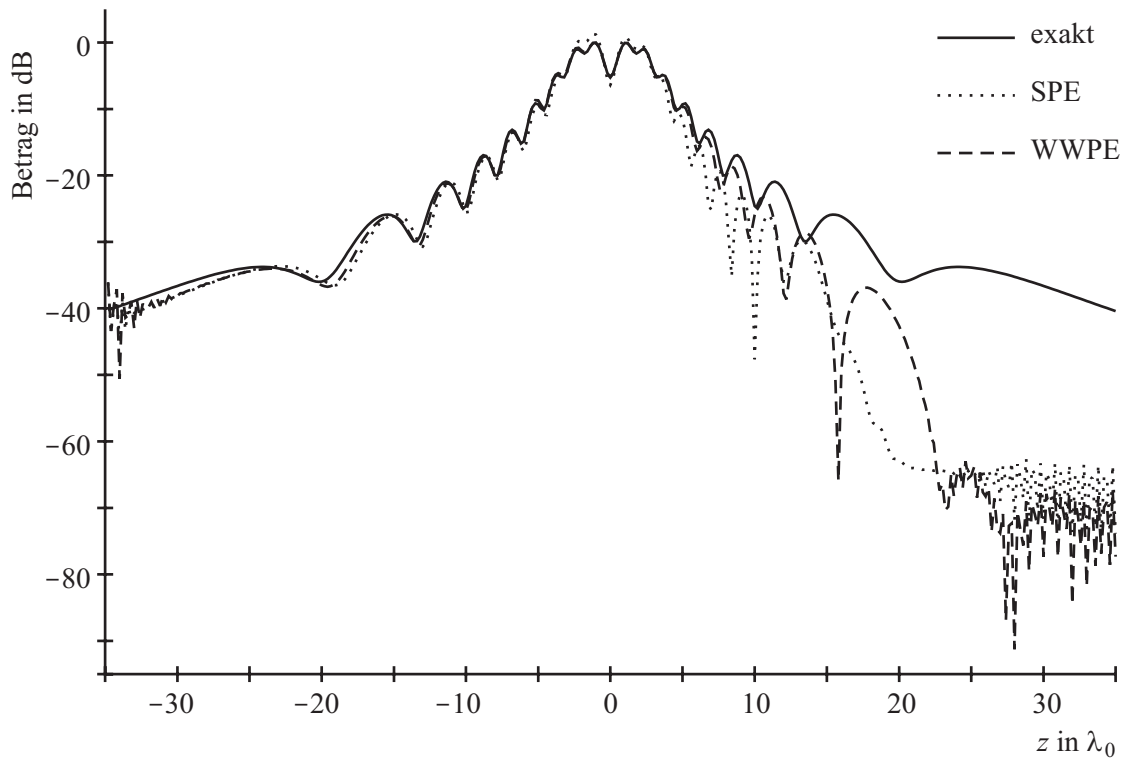


Abbildung 7.7: Berechnungsergebnis bei $x = 10\lambda_0$ bei einer Anfangsfront nach Abb. 7.6

besteht die primäre Funktion dieses Bereiches in der Vermeidung von Reflexionen am Rand des PE-Gitters. Für $5 < |z/\lambda_0| \leq 35$ werden zur x-Achse parallele Strahlen angenommen, bei $z = 35\lambda_0$ ist das PE-Gitter mit einer Kurzschluss-Randbedingung abgeschlossen.

- Bereich 2: zur x-Achse parallele Ausbreitungswege ($3,5 \leq x/\lambda_0 \leq 6,5$, $0 \leq |z/\lambda_0| \leq 35$).
- Bereich 3: divergierende Ausbreitungswege, $6,5 \leq x/\lambda_0 \leq 10$.
 - Unterbereich A3: divergierende Ausbreitungswege, $0 \leq |z/\lambda_0| \leq 1,5$.
 - Unterbereich B3: Ausbreitungswege im Winkel von $\pm 45^\circ$ zur x-Achse für $|z/\lambda_0| \leq 35$ auf der Anfangsfront.

In allen drei Bereichen werden 1400 Ausbreitungswege verwendet, deren Anfangspunkte äquidistant ($1/20 \lambda_0$) auf den Anfangsfronten verteilt sind. Dadurch ist eine hinreichend hohe Auflösung in allen Bereichen gewährleistet. Außerhalb von Becken und Flanken beträgt die Schrittweite in Ausbreitungsrichtung $1/20$ Wellenlänge.

Die Rechnung mit angepassten Ausbreitungswegen wird unter Verwendung der Standard- und Weitwinkel-PE durchgeführt. Solange bei der WWPE-Rechnung Becken und Flanken durchschritten werden, wird auf SPE umgeschaltet, vgl. Abschnitt 6.6.5. Abb. 7.9 zeigt das Ergebnis im Vergleich zum exakten Verlauf und einer SPE- und WWPE-Rechnung

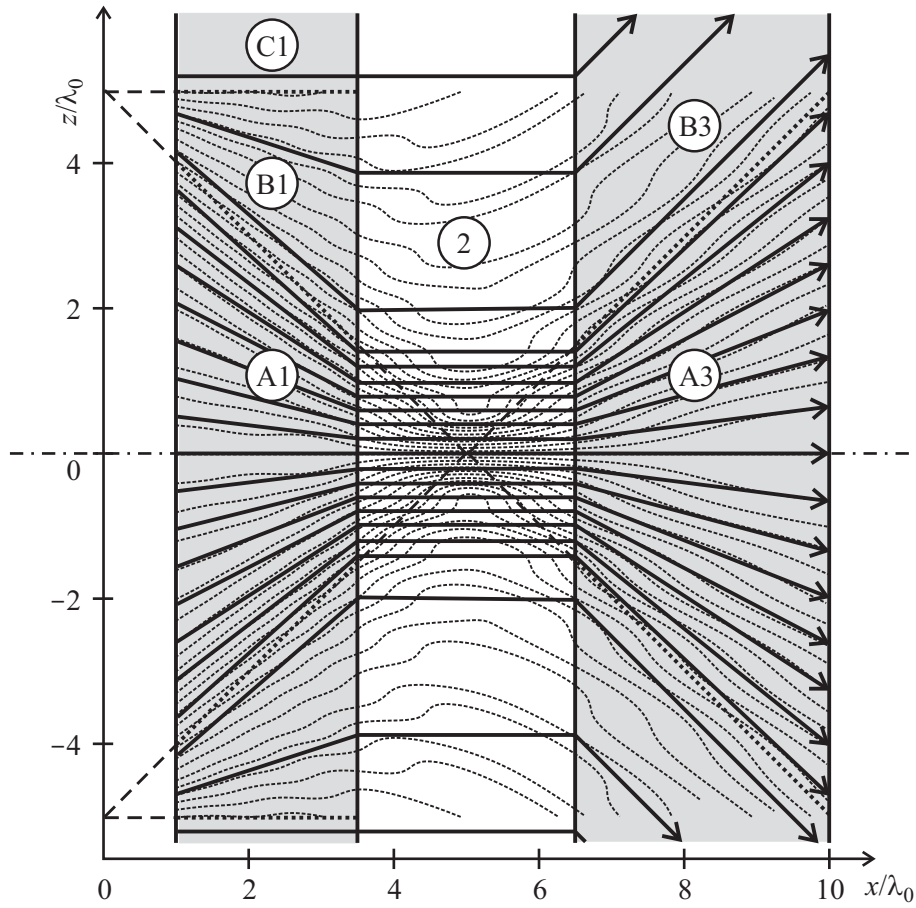


Abbildung 7.8: Anpassung der Ausbreitungswege an die tatsächliche Ausbreitungsrichtung mittels Betrachtung der Energieströmungslinien

mit Ausbreitungswegen, die *nicht* angepasst sind, sondern auch in Gebiet 1 und 3 parallel zur x-Achse verlaufen. Es zeigt sich, dass vor allem die SPE-Rechnung mit parallelen, also nicht angepassten Ausbreitungswegen, vom exakten Ergebnis abweicht. Durch die adaptiven Ausbreitungswegen kann die Genauigkeit von SPE deutlich verbessert werden. WWPE kommt bei parallelen, nicht angepassten Ausbreitungswegen mit der Abweichung zwischen der angenommenen und tatsächlichen Ausbreitungsrichtung, wie es zu erwarten ist, eher zurecht. Eine Anpassung der Ausbreitungswegen führt bei WWPE zwar nicht im Bereich des Hauptmaximums, aber erkennbar im Bereich der Nebenmaxima zu einer erhöhten Genauigkeit. Sofern es also nicht nur auf die Erfassung des Hauptmaximums ankommt, führt die WWPE mit angepassten Ausbreitungswegen zum besten Ergebnis, gefolgt von der SPE mit angepassten Wegen, der WWPE ohne Anpassung und schließlich der SPE ohne Anpassung.

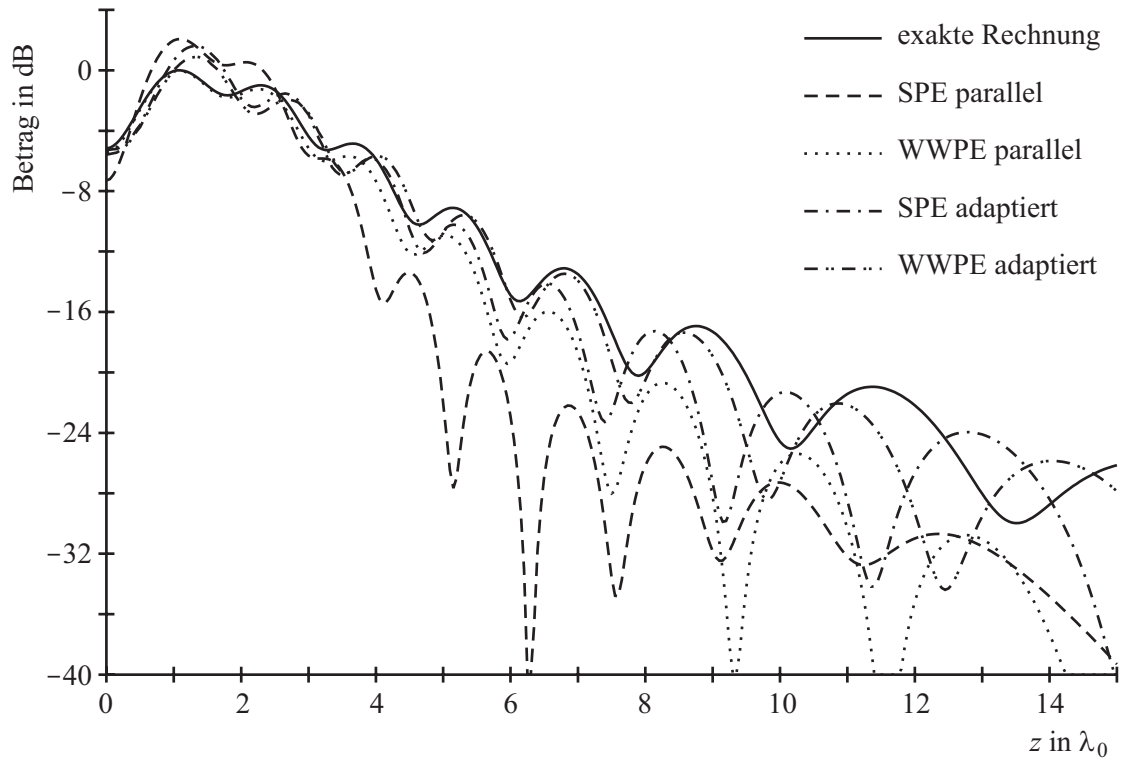


Abbildung 7.9: Ergebnis der Anwendung der Standard- und Weitwinkel-PE bei nicht angepassten (parallelen) Ausbreitungswegen und abschnittsweise an die Ausbreitungsrichtung adaptierten Wegen

7.1.5 Unterschiedliche Gewichtungen des expliziten und impliziten Anteils

Bei der Lösung der PE mittels finiter Differenzen wird gewöhnlich das Crank-Nicolson-Schema verwendet, d. h. der explizite und der implizite Anteil wird gleich gewichtet, vgl. Abschnitt 4.5.1. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit hat es sich als vorteilhaft erwiesen, den impliziten Anteil höher zu gewichten, um Stabilität zu garantieren und — auch bei *noch* vorliegender Stabilität — einen glatteren Verlauf des Ergebnisses zu erzielen. In [58] wird vorgeschlagen, zur Beseitigung von Rauigkeiten im PE-Ergebnis die letzten Schritte einer PE-Rechnung rein implizit durchzuführen. Würde im Verlauf der gesamten Rechnung rein implizit gerechnet, wäre die Genauigkeit geringer als beim Crank-Nicolson-Schema. Im Zusammenhang mit der Linsenanalyse stellt sich das Problem, dass die Endfront einer PE-Rechnung, also z. B. die Linsenapertur, i. Allg. nicht mit einer angenommenen Phasenfront identisch ist und somit das Ergebnis auf der Endfront schrittweise abgespeichert wird, je nachdem, welche Stelle der Endfront gerade von der durchziehenden Wellenfront getroffen wird. Der Bereich der PE-Rechnung, in dem Ergebnisse abgespeichert werden, kann also recht groß sein. Ein frühzeitiges Umschalten auf eine rein implizite Rechnung hätte also eine verminderte Genauigkeit in einem möglicherweise recht großen

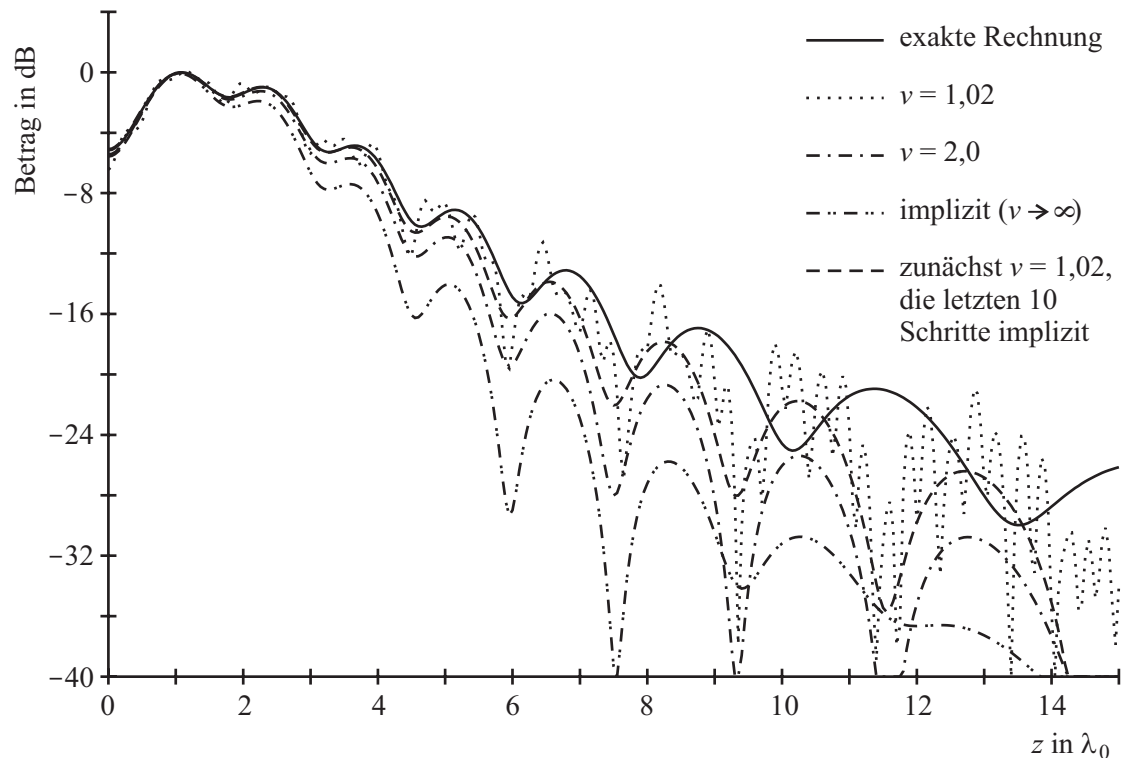


Abbildung 7.10: Unterschiedliche Gewichtung des impliziten und expliziten Anteils

Berechnungsgebiet zur Folge. Insofern bietet sich die Höhergewichtung des impliziten Anteils im Verlauf der gesamten Rechnung und ein Verzicht auf rein implizite Schritte am Schluss an.

Als Vergleich diene die WWPE-Rechnung mit parallelen Ausbreitungswegen aus Abschnitt 7.1.4, vgl. dort Abb. 7.9. Abb. 7.10 zeigt das exakte Ergebnis, das WWPE-Ergebnis für verschiedene Werte von v und das Ergebnis, wenn zunächst mit Crank-Nicolson und die letzten Schritte rein implizit gerechnet werden. Für $v = 1$ (exaktes Crank-Nicolson-Schema) ist die Rechnung bei Verwendung der in Anhang F beschriebenen Software instabil, für $v \geq 1,02$ kann von Stabilität gesprochen werden. Bei $v = 1,02$ zeigen sich deutliche Überschwinger, die sich in Abb. 7.10 wegen des logarithmischen Maßstabs vor allem bei kleinen Pegeln bemerkbar machen, aber bei linearer Darstellung auch im Bereich des Hauptmaximums erkennbar wären. Es ist davon auszugehen, dass die kleine Schrittweite und die Tatsache, dass die Weitwinkel-PE verwendet wurde, für die Instabilität bei $v = 1$ verantwortlich ist, vgl. die in Abschnitt 6.6.5 geschilderten Probleme bei der Anwendung von der WWPE im Zusammenhang mit Becken und Flanken.

Sofern 94 % der Strecke (8,5 Wellenlängen) mit $v = 1,02$ gerechnet werden und die letzten 6 % (1/2 Wellenlänge, 10 Schritte) mit $v \rightarrow \infty$, ergibt sich eine recht gute Übereinstimmung mit dem exakten Verlauf. Die geringste Übereinstimmung ergibt sich bei der rein impliziten Rechnung ($v \rightarrow \infty$). Die Güte des Ergebnisses für $v = 2$ liegt dazwischen. Es zeigt sich also, dass durch eine Höhergewichtung des impliziten Anteils auf eine Glättung

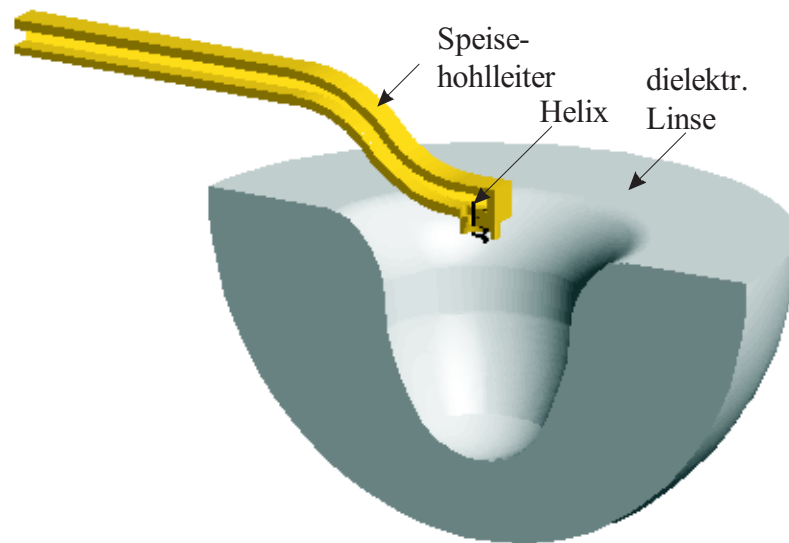


Abbildung 7.11: Linsenantenne aus [62]

durch rein implizite Schritte am Berechnungsschluss verzichtet werden kann, ohne einen allzugroßen Verlust an Genauigkeit hinzunehmen.

7.2 PE-Rechnung zur Analyse einer Linsenantenne

Nachfolgend soll die PE-Methode — wie es in Abschnitt 6 ausgeführt ist — abschnittsweise zur Analyse einer dielektrischen Linse verwendet werden. Grundlage der Untersuchungen ist die in [62] beschriebene Linsenantenne mit einem rotationssymmetrischen Linsenkörper, vgl. Abb. 7.11. Als Speiseantenne kommt dort eine kurze Helix (1,5 Windungen) mit einer speziell geformten Groundplane nach [55] zum Einsatz. Das Linsendielektrikum besteht aus Polyäthylen (PE, $\epsilon_r = 2,25$).

Abb. 7.12 zeigt den Linsenquerschnitt mit geometrisch optischen Strahlen und dem verwendeten Koordinatensystem.

7.2.1 Modellierung für die Analyse mit dem zweidimensionalen PE-Algorithmus

Da die in den Abb. 7.11 und 7.12 dargestellte Linse eine Rotationssymmetrie aufweist, liegt es zunächst nahe, die geometrische Rotationsachse der Linse mit der Rotationsachse bzgl. ϕ in Kugelkoordinaten — der z-Achse bzw. der Achse $\theta = 0$ — zusammenzu-

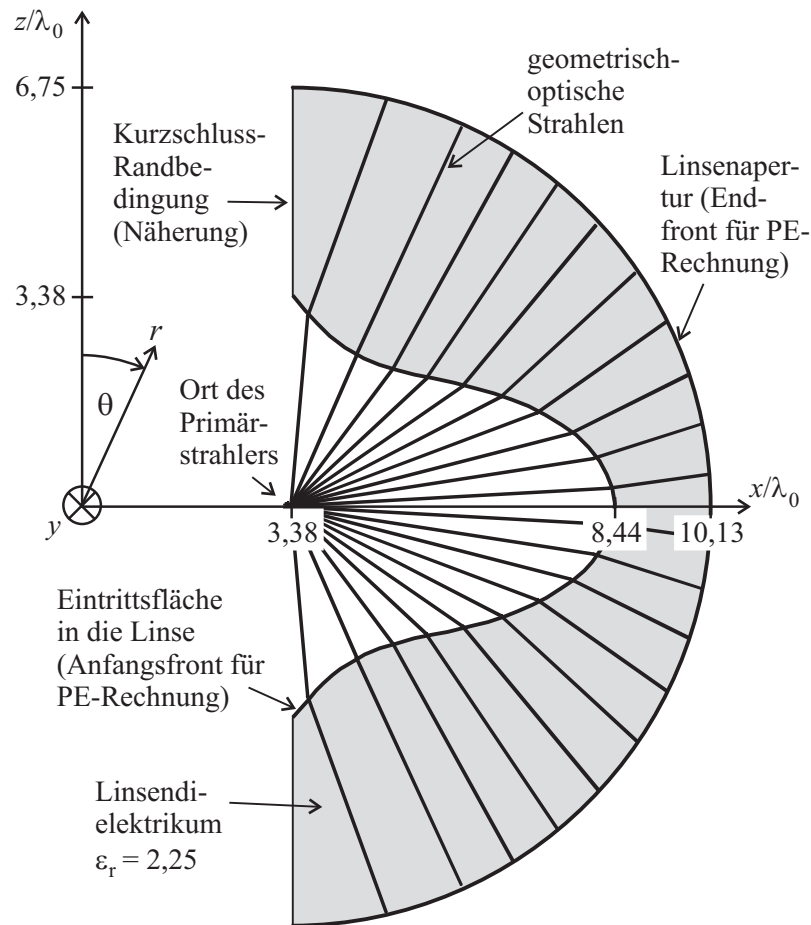


Abbildung 7.12: Querschnitt der mittels PE untersuchten Linse. Zur Wahl des Koordinatensystems vgl. Abschnitt 7.2.1.

legen, vgl. Abb. 7.13a. Allerdings besteht das Problem, dass die Speiseantenne (kurze Helixantenne nach [55]) diese Rotationssymmetrie nicht aufweist und daher auch kein rotationssymmetrisches Feld erzeugt, das mit der Rotationssymmetrie des Linsenkörpers übereinstimmt. Nun könnte statt der Helixantenne eine Ersatzquelle verwendet werden, die sowohl ein (bezüglich der Linsen-Rotationsachse) rotationssymmetrisches Feld erzeugt als auch in Richtung der Linsen-Rotationsachse strahlt. Dies ist aber aus physikalischen Gründen nicht möglich. In Anhang H wird gezeigt, dass der Poynting-Vektor in Richtung der Rotationsachse einer rotationssymmetrischen Feldverteilung verschwinden muss.

Um die Linse dennoch mittels eines 2D-Algorithmus analysieren zu können, muss das Modell von der Wirklichkeit abweichen. Als Speiseantenne wird anstelle der kurzen Helix ein Ring aus z -Dipolen angenommen, der ein rotationssymmetrisches Feld bzgl. der z -Achse (gleichbedeutend mit der Achse $\theta = 0$) erzeugt und im Schnittbild eine ähnliche Fernfeld-Richtcharakteristik aufweist wie die kurze Helixantenne, vgl. Abb. I.1 im Anhang auf S. 152. Dabei ist es wichtig, die rückwärtige Strahlung der im Ring enthaltenen z -Dipole in Richtung der Achse der Rotationssymmetrie abzuschirmen, z. B. indem die

Dipole direkt auf dem Mantel eines Zylinders aus ideal magnetisch leitfähigem Material angeordnet werden. Sonst könnte — je nach Ringdurchmesser — eine Auslöschung der Strahlung in der Ringebene erfolgen. Die Ringebene (Ebene $z = 0$) stellt die vorgesehene Hauptstrahlrichtung der Speiseantenne dar; wenn im 2D-Fall die Felder in der Ebene $y = 0$ betrachtet werden, liegt die Hauptstrahlrichtung somit auf der x-Achse. Der Linsenquerschnitt wird im konkreten Beispiel nun so angeordnet, dass die vormalige geometrische Rotationsachse des Linsenkörpers auf der x-Achse, also in Hauptstrahlrichtung des Speisedipolrings liegt, vgl. Abb. 7.12 und 7.13b. Dadurch wird in Wirklichkeit ein Linsenkörper analysiert, wie er in Abb. 7.14 dargestellt ist. Dieser Kompromiss wurde bereits in [62] bei der Analyse der Linse mittels eines 2D-FDTD-Algorithmus besprochen; zur besseren Vergleichbarkeit der Ergebnisse wird im Folgenden derselbe Abstand der Speiseantenne (d. h. des Primärstrahlers) vom Koordinatenursprung wie bei den Berechnungen in [62] verwendet ($3,38\lambda_0$, vgl. Abb. 7.12); auch die Ausdehnung des Dipols in z-Richtung, die für den Öffnungswinkel der Speiseantenne maßgeblich ist, wird mit $2h = 0,56\lambda_0$ beibehalten. Im Folgenden wird also nicht eine Linsenantenne nach Abb. 7.11, sondern eine nach Abb. 7.14 untersucht. Die genauen Abmessungen sind in Abb. 7.12 enthalten. Aus Abb. 7.20 ist zu entnehmen, wie die Speiseantenne mit magnetischer Groundplane aussehen könnte. Ferner wird aus dem dort abgebildeten (mit FDTD¹ berechneten) Verlauf des Magnetfeldes deutlich, warum ein Mindestabstand der Linse von der Achse der Rotationssymmetrie einzuhalten ist: Die rückwärtige, durch Reflexionen innerhalb der Linse verursachte Strahlung [62], soll durch einen Absorber daran gehindert werden, sich mit den gewünschten Anteilen in Hauptstrahlungsrichtung zu überlagern. Würde die Linsenrückseite die Rotationsachse berühren, wäre kein Platz für einen solchen Absorber.

7.2.2 Anfangsfeld auf der Linseneintrittsfläche

Die PE-Rechnung erfolgt abschnittsweise innerhalb von Gebieten konstanter Dielektrizitätszahl, vgl. Abschnitt 6.1. Um sie ausgehend von der Linseneintrittsfläche durchführen zu können, muss das dort vorherrschende Anfangsfeld bekannt sein. Die naheliegende Vorgehensweise besteht darin, die Speiseantenne — im vorliegenden Fall die kurze Helix nach [55] — in einem Feldberechnungsprogramm wie z. B. FEKO [21] ohne die Linse zu modellieren und die Feldstärken der einfallenden Welle am Ort der Linseneintrittsfläche zu berechnen.

Wie es in Abschnitt 7.2.1 dargelegt wurde, soll als Primärstrahler ein Ring aus elektrischen z-Dipolen verwendet werden, der rückwärtig durch ein ideal magnetisch leitfähiges Material abgeschirmt wird. Der Ring liegt in der Ebene $z = 0$ und erzeugt eine rotations-symmetrische Feldverteilung in ϕ . Die Fernfeld-Richtcharakteristik soll vergleichbar mit derjenigen einer kurzen Helix nach [55] sein.

¹Die Berechnung erfolgt mit dem Programm MAFIA [51], so dass genau genommen die mit FDTD verwandte „Finite Integrationstechnik“ (FIT) zum Einsatz kommt.

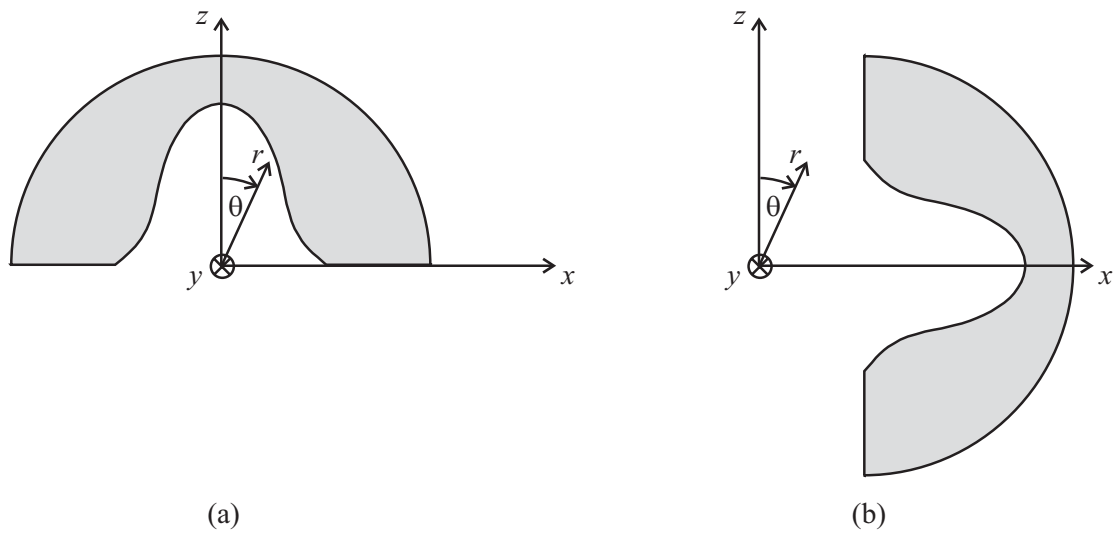


Abbildung 7.13: Denkbare Orientierungen des Linsenquerschnitts, jeweils in der Ebene $y = 0$. (a) ist zunächst naheliegend, da die Rotationsachse des Kugelkoordinatensystems bzgl. ϕ mit der Rotationsachse des Linsenkörpers übereinstimmt. (b) löst das Problem mit der Hauptstrahlung der Speiseantenne in Richtung der Rotationsachse.

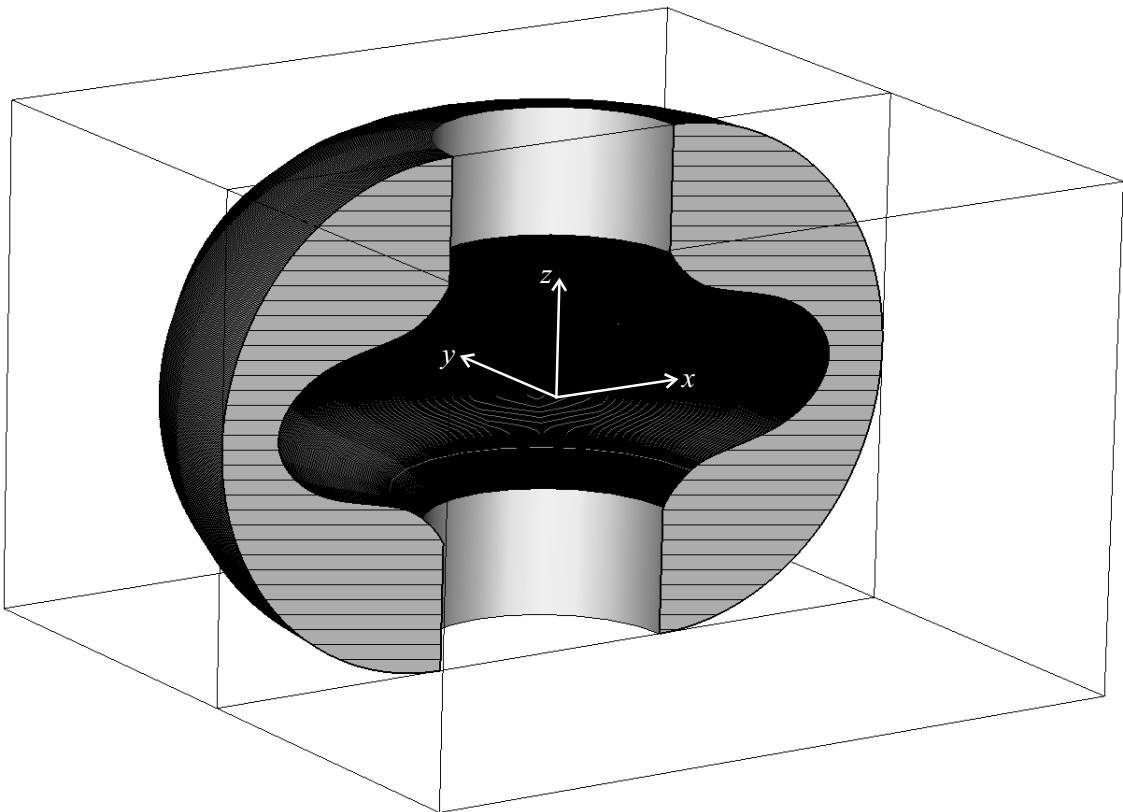


Abbildung 7.14: 3D-Ansicht der Linse, wie sie durch die Verwendung des 2D-Algorithmus ausgehend vom Schnittbild in Abb. 7.12 und 7.13b tatsächlich analysiert wird.

Das Vorgehen zur Berechnung des Nah- und Fernfeldes eines derartigen Dipolrings ist in Anhang I (S. 151) beschrieben. Die Rückwirkung der Linse auf die Speiseantenne und die endliche Ausdehnung des Zylinders aus ideal magnetisch leitfähigem Material in z -Richtung wird vernachlässigt; die auf die Linse einfallende elektromagnetische Welle ergibt sich aus der Strahlung der Primärantenne im Freiraum unter Berücksichtigung der Nahfeldanteile. Der Ring aus elektrischen z -Dipolen erzeugt ein Feld TM bezüglich ρ und z (d. h. in Kugelkoordinaten TM bzgl. r), d. h. es existiert lediglich eine ϕ -Komponente des Magnetfeldes. Aufgrund der Rotationssymmetrie ist H_ϕ gemäß Gl. (2.64) proportional zur ϕ -Komponente des elektrischen Vektorpotentials \vec{F} , so dass $H_\phi \sim \psi$ direkt als Rechengröße für die Anwendung der PE-Methode eingesetzt werden kann; das Feld ist TE bzgl. ϕ .

Ein Teil der vom Primärstrahler ausgehenden und auf die Linseninnenseite einfallenden Welle wird dort reflektiert. Der in die Linse hineinlaufende Anteil wird mittels der fresnelschen Beziehungen berechnet, vgl. hierzu Anhang J (S. 155). Das Magnetfeld der gebrochenen Welle (das nach wie vor nur eine ϕ -Komponente aufweist) dient als Anfangsfeld für die PE-Rechnung. Die Anwendung der fresnelschen Beziehungen stellt eine Näherung dar, da die Linseninnenseite gekrümmt ist. Anhand von Abb. 7.12 kann ein minimaler Krümmungsradius der Linseninnenseite $r_{c \min} \approx 1,7\lambda_0$ bestimmt werden, d. h. es gilt $\beta_0 r_{c \min} \approx 10$. Aus [34] und [67] geht hervor, dass die gewöhnlichen fresnelschen Beziehungen in diesem Fall eine hinreichend gute Näherung darstellen². Signifikante Abweichungen zwischen dem Einfall auf eine ebene und eine gekrümmte Oberfläche treten insbesondere im Bereich der Totalreflexion auf [34]; da im vorliegenden Fall eine Welle vom weniger dichten Medium (Vakuum) aufs Linsendielektrikum fällt, kann es nicht zur Totalreflexion kommen.

7.2.3 PE-Rechnung innerhalb der Linse bis zu deren Apertur

Ausgehend vom bekannten Magnetfeld H_ϕ auf der Linseneintrittsfläche wird nun das Magnetfeld auf der Linsenaustrittsfläche (Apertur) mittels der PE-Methode berechnet. Das hierfür nötige PE-Gitter wird entsprechend dem in Abschnitt 6.3.2 (S. 85) vorgeschlagenen Verfahren bestimmt. Hierzu wird der Querschnitt der Ein- und Austrittsfläche in gleich viele (im vorliegenden Beispiel 361) Punkte aufgeteilt. Die Verteilung der Punkte ist jeweils äquidistant. Der n te angenommene Ausbreitungsweg entsteht durch das Verbinden des n ten Punkts auf der Eintrittsfläche mit dem n ten Punkt auf der Apertur. Abb. 7.15 zeigt, dass bei dem hier betrachteten Beispiel die auf diese Weise erzeugten Ausbreitungswege recht gut mit dem Verlauf der geometrisch-optischen Strahlen übereinstimmen und daher zu erwarten ist, dass auch die Standard-PE problemlos einsetzbar ist.

²Dies gilt auch, wenn die Berechnungen in [34] mit $\beta_0 r_{c \min} = 10$ anstelle von $\beta_0 r_{c \min} = 50$ bzw. 150 nachvollzogen werden.

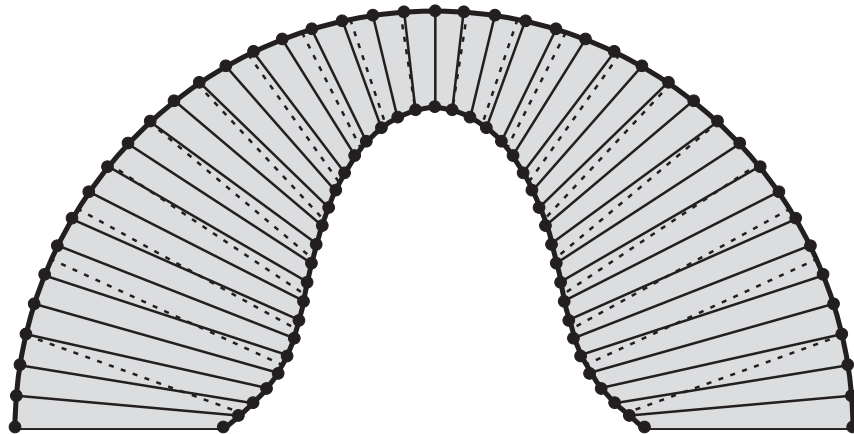


Abbildung 7.15: Für die PE-Rechnung verwendete Ausbreitungswege (durchgezogen), die durch das Verbinden äquidistanter Punkte auf der Anfangs- und Endfront konstruiert worden sind, und die im Innern der Linse verlaufenden GO-Strahlen (gestrichelt).

Die angenommenen Ausbreitungswege, die am Rand des Berechnungsgebiets verlaufen, streifen die Grenzfläche zwischen dem Linsendielektrikum und Luft. Dadurch ist an dieser Stelle von Totalreflexion auszugehen. Allerdings bedeutet die *Annahme* des parallel zur Grenzfläche verlaufenden Ausbreitungsweges nicht, dass die Anteile der elektromagnetischen Wellen, die auf die Grenzfläche treffen, *tatsächlich* mit einem Winkel von knapp 90° zu Lot einfallen. Die Phase des Reflexionsfaktors — und damit die Randbedingung — ist dadurch unbekannt. Durch die Ausführung der Speiseantenne in Form eines Rings aus z-Dipolen ist jedoch zu erwarten, dass keine nennenswerten Anteile auf die Grenzfläche einfallen und die Kenntnis des genauen Reflexionsfaktors dort nicht relevant ist. Um dies zu überprüfen, wird die PE-Rechnung sowohl mit einer Kurzschluss-Randbedingung (entsprechend einem Reflexionsfaktor von -1) als auch mit einer Leerlauf-Randbedingung (Reflexionsfaktor $+1$) durchgeführt. Sofern die Annahme, dass die Kenntnis des genauen Reflexionsfaktors unwesentlich ist, zutrifft, dürften sich beide Berechnungsergebnisse nur geringfügig unterscheiden.

Abb. 7.16 zeigt den mittels PE berechneten normierten Verlauf des Betrags der magnetischen Feldstärke auf der Apertur. In der Annahme, dass die Apertur mit einer Antireflexionsschicht versehen ist und keine nennenswerten Reflexionen auftreten, wird dabei nur die auf die Apertur einfallende Welle berücksichtigt. Die Berechnungen mit der Standard-PE und der Weitwinkel-PE stimmen praktisch überein. Am Rand sind zwar geringfügige Unterschiede zwischen der Kurzschluss- und der Leerlauf-Randbedingung festzustellen, Auswirkungen aufs Fernfeld sind dadurch jedoch nicht zu erwarten, so dass im Folgenden bedenkenlos die Kurzschluss-Randbedingung verwendet werden kann. Desweiteren ist in Abb. 7.16 der Verlauf der magnetischen Feldstärke für den geometrisch-optischen Fall dargestellt. Der etwas raue Verlauf kommt dadurch zustande, dass die Anfangsfront der Berechnung durch die endliche Feinheit der Diskretisierung nicht völlig glatt ist (vgl.

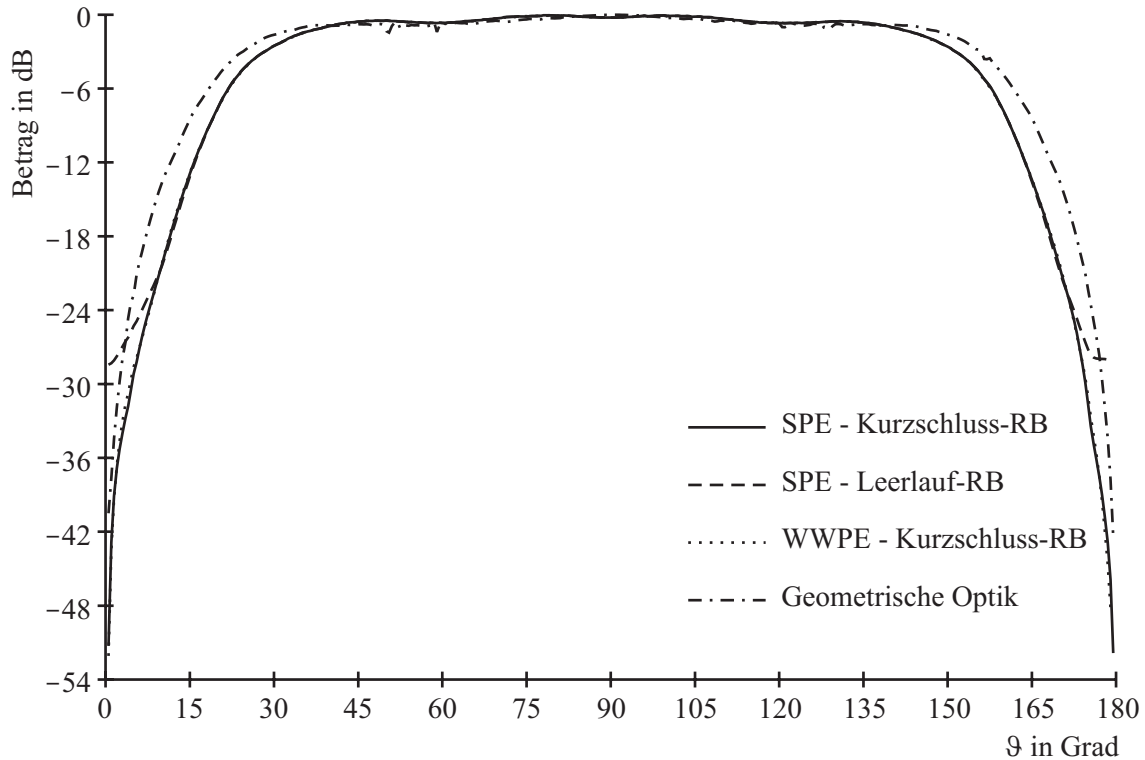


Abbildung 7.16: Ergebnis für den normierten Betrag des Magnetfeldes der Aperturbelegung der Linse nach Abb. 7.14 bei Speisung wie in Anhang I beschrieben. Der Winkelbereich $\theta = 0^\circ \dots 180^\circ$ gibt den in Abb. 7.12 dargestellten halbkreisförmigen Querschnitt der Apertur an.

Anhang C ab S. 137). Es zeigt sich eine erkennbare Abweichung zwischen dem PE- und GO-Ergebnis. Noch entscheidender als die Genauigkeit des Betrags ist für die nachfolgende Berechnung des Fernfeldes die Genauigkeit des Phasengangs. Dieser ist in Abb. 7.17 dargestellt. Es zeigt sich qualitativ derselbe Grad der Übereinstimmung wie beim Betrag, d. h. einzig das GO-Ergebnis sticht heraus. In der Mitte der Linse (d. h. für $\theta = 90^\circ$) stimmt das GO-Ergebnis sehr gut mit dem PE-Ergebnis überein. Dies liegt daran, dass die Linse hier vergleichsweise dünn und die von der Welle durchlaufene Strecke entsprechend kurz ist (ca. 2,5 Wellenlängen λ im Dielektrikum, vgl. Abb. 7.12). Entsprechend wenig kann es zur „Felddiffusion“ kommen, vgl. hierzu auch das Beispiel in Abschnitt 7.1.3. In Bereichen, in denen die durchlaufene Strecke größer wird, wird die Abweichung zwischen PE- und GO-Ergebnis zunehmend spürbarer.

Während die Front der PE-Rechnung durch die Linse zieht, können die lokalen Feldstärkewerte aufgezeichnet werden, um eine flächige Darstellung des Betrags wie in Abb. 7.18 zu gewinnen. Dabei wurde die Standard-PE mit einer Kurzschluss-Randbedingung verwendet.

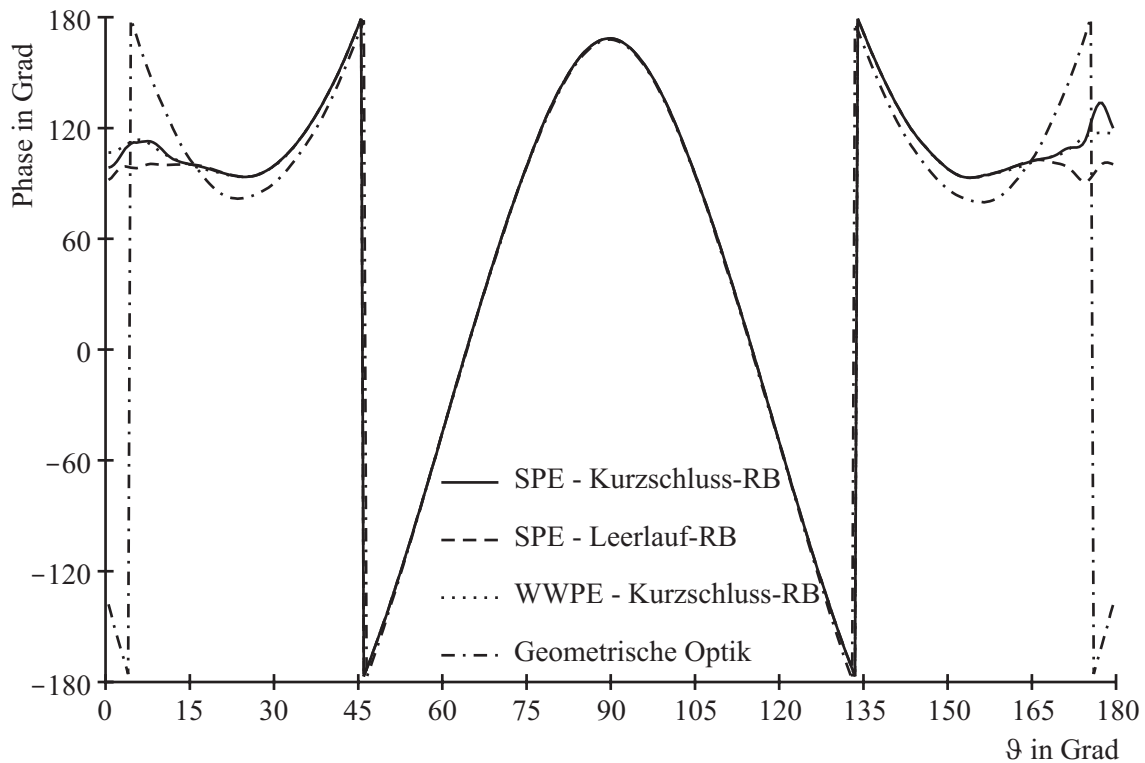


Abbildung 7.17: Zu Abb. 7.16 gehörende Darstellung des Phasengangs

7.2.4 Berechnung des Fernfeldes und Vergleich des PE-Ergebnisses mit einer FDTD-Berechnung

Ausgehend von der in Abschnitt 7.2.3 gewonnenen Aperturbelegung wird nun das Fernfeld der Linsenantenne berechnet. Dabei soll wiederum die PE-Methode verwendet werden, d. h. die Berechnung erfolgt ausgehend von der Apertur so weit in den Freiraum, dass Fernfeldbedingungen herrschen, vgl. Abschnitt 6.7.2. Im hier vorliegenden Fall passt die gesamte Linsenantenne in eine Kugel mit dem Durchmesser von etwa 20 Freiraumwellenlängen (vgl. Abb. 7.12 und 7.14). Nach Gl. (6.18) auf S. 104 ergibt sich so eine Mindestentfernung für die PE-Rechnung

$$r_{\min} = 800\lambda_0. \quad (7.2)$$

Durch die große Entfernung, die nötig ist, um das Fernfeld zu erreichen, dauert die PE-Rechnung vergleichsweise lange (um Größenordnungen länger als die Analyse der max. 6 Wellenlängen³ dicken Linse), so dass in der Praxis zur Fernfeldberechnung die Fresnel-Integral-Methode (vgl. Abschnitt 5.2) vorzuziehen wäre. Dennoch soll zur Veranschaulichung der PE-Methode eine Berechnung des Fernfeldes mittels PE bis zu einer Entfernung von $800\lambda_0$ erfolgen. Abb. 7.19 zeigt das Ergebnis bei Verwendung der Standard-PE für die gesamte Rechnung (einschließlich der Berechnung der Aperturbelegung), bei Verwendung

³Wellenlängen im Dielektrikum; beispielsweise aus Abb. 7.12 herauszulesen.

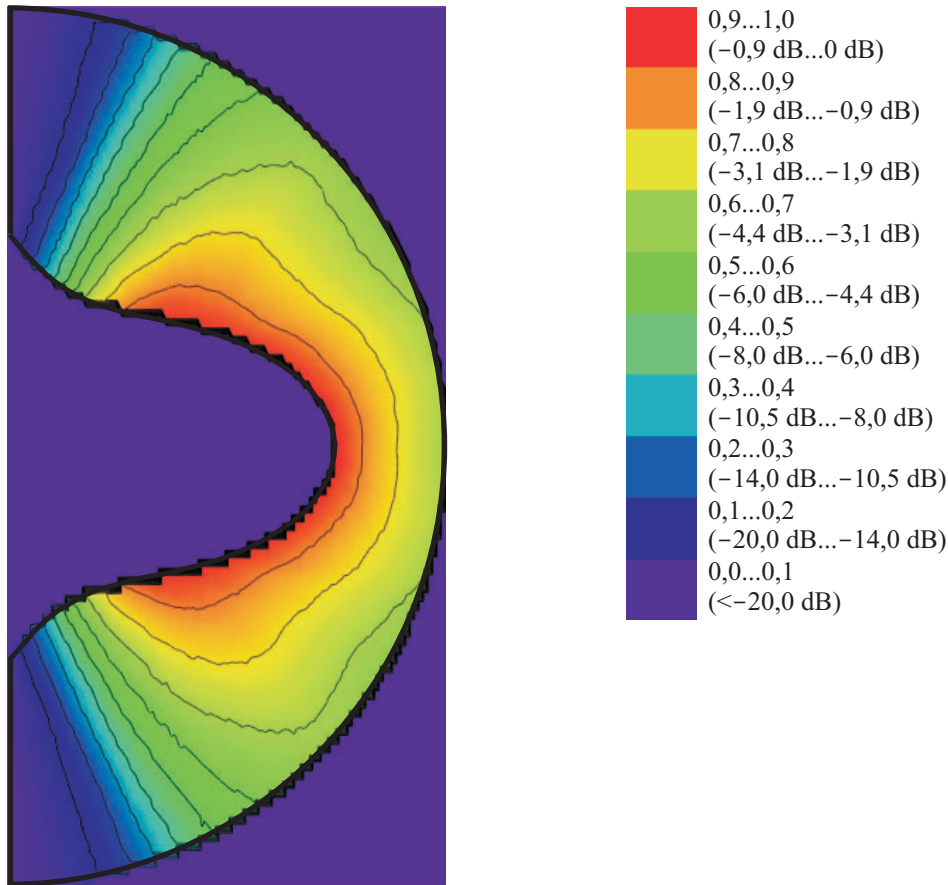


Abbildung 7.18: Normierter Betrag des Magnetfeldes innerhalb der Linse

der Weitwinkel-PE für die gesamte Berechnung sowie bei Verwendung der Geometrischen Optik zur Berechnung der Aperturbelegung und der Weitwinkel-PE zur Berechnung des Fernfeldes. Die angenommenen Ausbreitungswege verlaufen senkrecht zur halbkreisförmigen Apertur und haben einen Winkelabstand von einem halben Grad. Die Schrittweite in Ausbreitungsrichtung wird mit $1/20$ Wellenlänge genauso fein gewählt wie bei der Linsenanalyse; im praktischen Einsatz ist zu erwarten, dass mit zunehmendem Erreichen des Fernfeldes eine Verkürzung der Rechenzeit durch eine Verlängerung der Schrittweite erreicht werden könnte.

Zum Vergleich mit einer asymptotisch exakten Methode wird auf eine Berechnung mit dem Programm MAFIA [51] zurückgegriffen, die im Rahmen der Arbeiten zu [62] durchgeführt wurde. Abb. 7.20 zeigt das entsprechende Modell mit einer Höhenlinien-Darstellung des Betrags der magnetischen Feldstärke. Im Gegensatz zu den vorgenommenen Berechnungen mittels der PE-Methode treten hier Reflexionen in Erscheinung, wenngleich sie durch die Antireflexionsschichten minimiert werden. In Abb. 7.19 ist der mit MAFIA berechnete Schnitt durch die Fernfeld-Richtcharakteristik enthalten. Der Öffnungswinkel, d. h. in diesem Fall der Abstand zwischen den beiden Maxima, beträgt bei einer linseninternen Anwendung der PE-Methode 112° und bei Anwendung von GO innerhalb der Linse 118° .

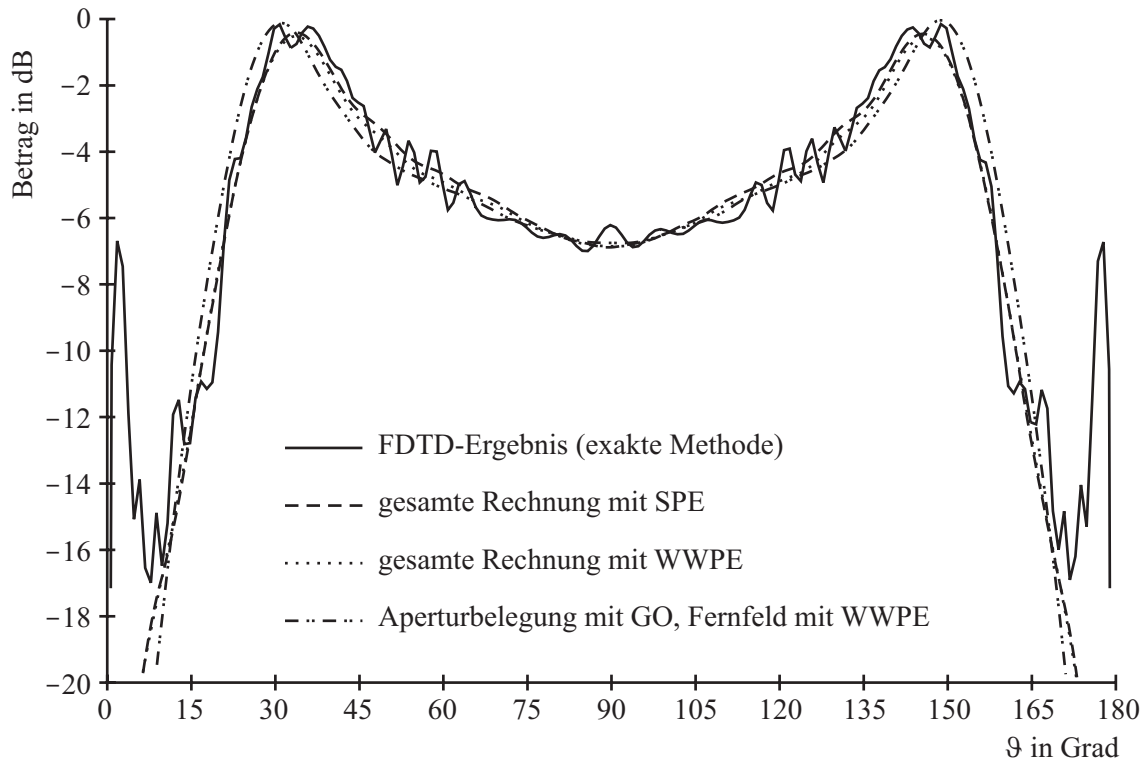


Abbildung 7.19: Mittels PE berechnetes Fernfeld der Linsenantenne im Vergleich zum FDTD-Ergebnis. Die PE-Ergebnisse sind jeweils aufs Maximum der WWPE-Rechnung mit der GO-Aperturbelegung normiert, die FDTD-Kurve ist auf ihr eigenes Maximum normiert.

Beim exakten (mittels MAFIA gewonnenen) Ergebnis ist die Angabe eines Öffnungswinkels schwierig, da in unmittelbarer Umgebung der beiden Maxima eine Überlagerung reflektierter Anteile in Erscheinung tritt. Ein Vergleich des Verlaufs der Richtcharakteristik an den Flanken (d. h. für $\theta < 30^\circ$ bzw. $\theta > 150^\circ$) zeigt, dass die PE-Rechnung den exakten Verlauf besser wiedergibt als die Rechnung mit GO. Zunächst mag es überraschen, dass auch das GO-Ergebnis relativ gut dem MAFIA-Ergebnis entspricht. Dabei darf jedoch nicht übersehen werden, dass die Linse in [62] hinsichtlich der Größe so dimensioniert wurde, dass sie mittels GO synthetisiert werden kann; dies impliziert auch eine Möglichkeit zur Analyse mittels GO. Der Vorteil von PE gegenüber GO würde deutlicher werden, wenn eine Linse so beschaffen wäre, dass in ihrer Apertur ein geometrisch-optischer Brennpunkt läge. Diese punktförmig auftretende hohe Feldstärke würde bei der Berechnung des Fernfeldes aus der Aperturbelegung die Wirkung der übrigen Aperturbereiche überstrahlen und wegen der infinitesimalen Ausdehnung des GO-Brennpunkts als Punktquelle vergleichsweise rund strahlen. Die PE-Methode gewährleistet in einem solchen Fall die Nachbildung der in der Praxis vorherrschenden vergleichsweise großen Fläche eines Brennpunktbereiches.

Abb. 7.21 zeigt den allmählichen Übergang von der Aperturbelegung zur Fernfeld-Richt-

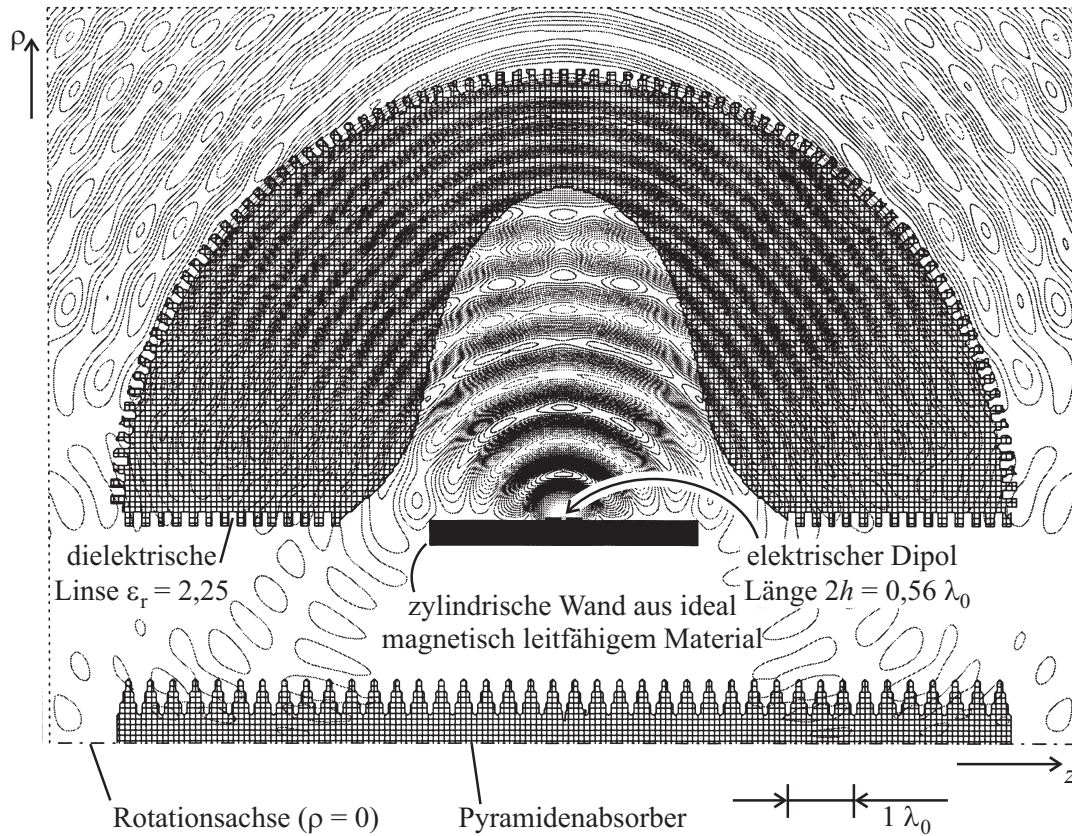


Abbildung 7.20: Modellierung der Linse im Feldberechnungsprogramm MAFIA [51] (2D-Zeitbereichslöser) und Darstellung des Betrags des Magnetfeldes (Realteil, da Rechnung im Zeitbereich) senkrecht zur Zeichenebene. Durch die Rillen wird eine Antireflexionschicht realisiert. Der Absorber an der Rotationsachse soll Reflexionen verhindern, die gleichbedeutend mit einer Strahlung von der anderen Seite der Rotationsachse (d. h. aus dem Halbraum $\pi/2 < \phi < 3\pi/2$) sind.

charakteristik. Zwischen einer Entfernung von $100\lambda_0$ und $1000\lambda_0$ ändert sich die Richtcharakteristik nur noch geringfügig, so dass die Abschätzung der nötigen Berechnungreichweite mittels Gl. (6.18) — in diesem Fall $r_{\min} = 800\lambda_0$ — als angemessen erscheint.

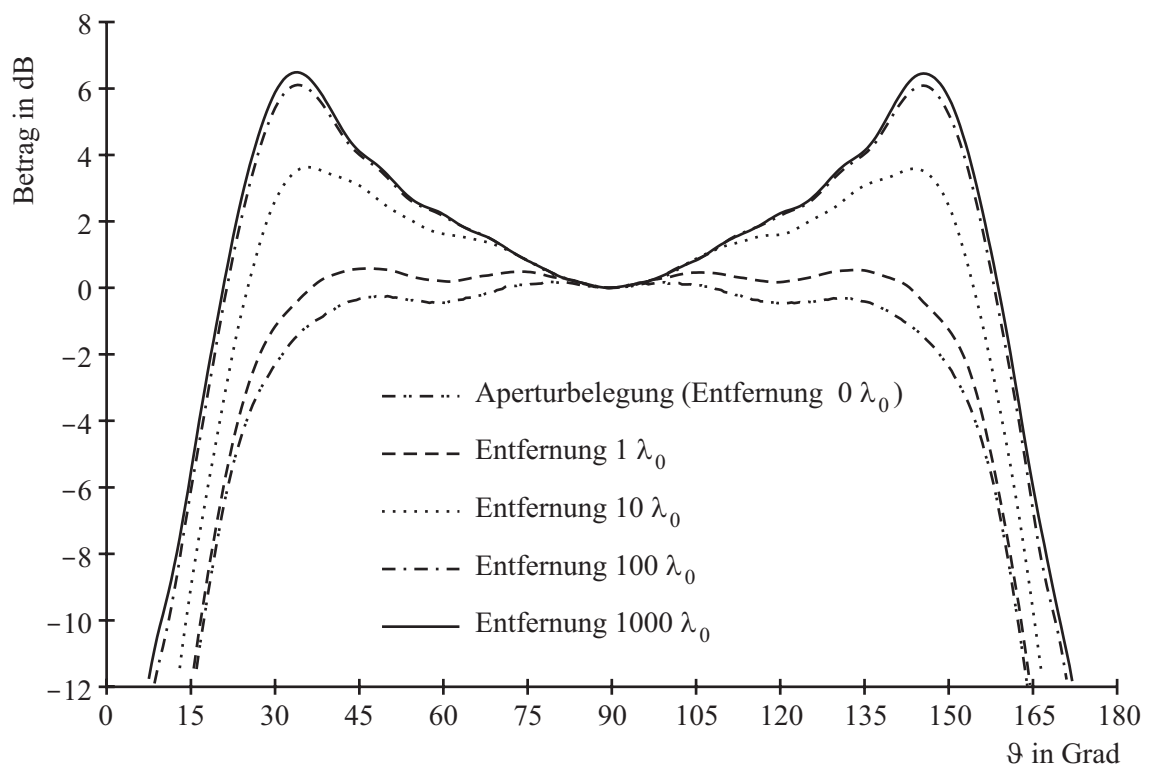


Abbildung 7.21: Übergang von der Aperturbelegung zur Fernfeld-Richtcharakteristik im Laufe der PE-Rechnung (Anwendung der Standard-PE).

Kapitel 8

Schlussfolgerungen und Ausblick

Die Anwendung der Methode der Parabolischen Gleichung zur Analyse von Linsenantennen unterscheidet sich von gewöhnlichen Anwendungen der PE-Methode vor allem in zwei Punkten. Zum einen beginnt die Rechnung i. Allg. nicht auf einer Linie oder Fläche, die einer angenommenen Wellenfront entspricht, und zum anderen kann in der Regel kein einfaches Koordinatensystem verwendet werden, das in allen Teilbereichen der Linse eine hinreichend gute Übereinstimmung der tatsächlichen Ausbreitungsrichtung mit der (über die Wahl der Ausbreitungswege) angenommenen Ausbreitungsrichtung gewährleistet.

Der erste Punkt konnte im Rahmen der vorliegenden Arbeit gelöst werden, indem zugelassen wurde, dass die angenommenen Wellenfronten zu Beginn der Berechnung diejenige Linie oder Fläche, auf der das Anfangsfeld gegeben ist, schneidet und die bekannte Feldstärke im Schnittpunkt als Randbedingung für das PE-Gitter verwendet wird. Diese Vorgehensweise hat sich durchweg als sehr robust erwiesen, so dass vorgeschlagen werden kann, auch bei anderen Einsatzformen der PE-Methode auf diese Weise zu verfahren.

Der zweiten Besonderheit wurde begegnet, indem die PE in Strahlenkoordinaten formuliert und das PE-Gitter somit an die tatsächliche Ausbreitungsrichtung angepasst wurde. Das hierfür notwendige A-priori-Wissen legt es nahe, das PE-Gitter aus geometrisch-optischen Strahlen zusammenzusetzen. Hierbei müssen Schnittpunkte von GO-Strahlen aber auf jeden Fall vermieden werden, was i. Allg. nicht sichergestellt werden kann. Es wurde ein möglicher Ausweg aufgezeigt, wonach das PE-Gitter dem Verlauf der Energieströmungslinien angepasst wird. Dabei tritt jedoch die Problematik auf, dass Energieströmungslinien einen Bogen um Wirbel machen können und hinter dem Wirbel einen Versatz in der Phase von einem ganzzahligen Vielfachen von 360° gegenüber einer auf der anderen Seite des Wirbels vorbeilaufenden Linie haben können. Würden Energieströmungslinien für das PE-Gitter verwendet, wären zwei benachbarte Linien dadurch ggf. unterschiedlich lang, was mit den bekannten Verfahren zur numerischen Lösung der PE nicht zu behandeln ist. Dies hindert zwar nicht daran, das Energieströmungslinienmuster zur Gewinnung des PE-Gitters derart zu vereinfachen, dass keine Wirbel mehr vorkommen und dennoch im großen und ganzen eine Übereinstimmung zwischen den angenommenen Aus-

breitungswegen und den Energieströmungslinien herrscht. Aber hierfür ist ein A-priori-Wissen erforderlich, das über die Kenntnis der geometrisch-optischen Strahlen hinausgeht und i. Allg. nicht zur Verfügung steht. Eine adaptive Strahlrichtungsbestimmung, d. h. eine bedarfsgerechte Änderung der Strahlrichtung im Verlauf der PE-Rechnung, scheidet in der Praxis an der Erkennung und am Umschiffen möglicher Wirbel. Somit besteht die robusteste Vorgehensweise in der kreuzungsfreien Verbindung der Punkte auf der Anfangs- und Endfront und der Anwendung der Weitwinkel-PE nach Claerbout [12], die eine Abweichung zwischen dem Verlauf des PE-Gitters und der tatsächlichen Ausbreitungsrichtung um bis zu 45° erlaubt. Es konnte gezeigt werden, dass mit dieser Methode ein Brennpunkt (in dem sich geometrisch optische Strahlen kreuzen) mit hinreichender Genauigkeit überwunden werden kann.

Anhand der Analyse einer aus der Literatur [62] bekannten Linsenantenne konnte gezeigt werden, inwiefern durch die Anwendung der PE-Methode Reflexionen gezielt ausgeblendet werden können, ohne auf die Genauigkeit asymptotisch exakter Methoden für die transmittierte Welle verzichten zu müssen. Zunächst mag es gegen PE sprechen, dass bei einer einfachen Anwendung keine Reflexionen mitberücksichtigt werden können. Es darf jedoch nicht übersehen werden, dass durch das Weglassen von Reflexionen das breitbandige Verhalten der Linse besser charakterisiert werden kann. Bei Verwendung asymptotisch exakter Methoden ist das Ausblenden von Reflexionen schwierig (vorzeitiger Berechnungsabbruch bei FDTD) oder unmöglich (klassische Momentenmethode, Methode der Finiten Elemente). Die Stärke der PE-Methode liegt allgemein in ihrer Schnelligkeit im Vergleich zu asymptotisch exakten Methoden. Diese wird bei Optimierungsvorgängen benötigt, bei denen in kurzer Zeit sehr viele Berechnungen erforderlich sind. Gerade bei Optimierungen wird man interne Reflexionen nicht mit einbeziehen wollen, da eine darauf optimierte Linsenantenne diesbezüglich ein schmalbandiges Verhalten hätte.

Die Beschränkung auf einen zweidimensionalen Algorithmus bedeutet für die praktische Anwendung eine wesentliche Einschränkung. Selbst, wenn eine Linse rotationssymmetrisch ist, so kann es doch sein, dass die Feldverteilung diese Rotationssymmetrie nicht aufweist oder dass es vorgesehen ist, dass die Linsenantenne in Richtung der Achse der Rotationssymmetrie strahlt, was wiederum die Behandlung im Dreidimensionalen erfordert. Nachdem die Anwendbarkeit der PE-Methode zur Analyse von Linsenantennen im Zweidimensionalen gezeigt worden ist, kann nun die Umsetzung im Dreidimensionalen erfolgen. Grundsätzliche Schwierigkeiten sind dabei nicht zu erwarten.

Hinsichtlich des abrupten Übergangs in der Dielektrizitätszahl zwischen Luft und dem Linsendielektrikum konnte gezeigt werden, dass dieser in Ausbreitungsrichtung gut durch eine abschnittsweise Rechnung in Gebieten konstanter Dielektrizitätszahl behandelt werden kann. Offen bleibt jedoch die Modellierung des streifenden Einfalls auf eine Grenzfläche, bei dem es selbst im Falle von Totalreflexion zu einer (vom Einfallswinkel abhängigen) Phasenverschiebung der reflektierten Welle kommt (vgl. z. B. [34]). Dies könnte möglicherweise ähnlich wie bei der Realisierung einer absorbierenden Randbedingung nach

Hadley (vgl. Abschnitt 4.6.3) berücksichtigt werden. Es ist jedoch zu erwarten, dass im praktischen Einsatz Linsenantennen so ausgeführt werden, dass die Feldstärken am Rand gering sind, da sonst die Gefahr bestünde, dass ein Teil der Strahlung der Speiseantenne an der Linse vorbei strahlt („Spill-Over“). Insofern wird sich die Modellierung des Randes mit einem anderem als dem tatsächlichen Reflexionsfaktor (also z. B. mittels einer Kurzschluss-Randbedingung) in den meisten Fällen als unproblematisch erweisen.

Anhang A

Kugelkoordinaten

A.1 Zusammenhang mit kartesischen Koordinaten

$$x = r \sin \theta \cos \phi \quad (\text{A.1})$$

$$y = r \sin \theta \sin \phi \quad (\text{A.2})$$

$$z = r \cos \theta. \quad (\text{A.3})$$

A.2 Divergenz und Rotation

Die nachfolgenden Formeln können beispielsweise [45] entnommen werden:

Divergenz

$$\operatorname{div} \begin{pmatrix} v_r \\ v_\theta \\ v_\phi \end{pmatrix} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta v_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} v_\phi \quad (\text{A.4})$$

Rotation

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \begin{pmatrix} v_r \\ v_\theta \\ v_\phi \end{pmatrix} &= \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta v_\phi) - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} v_\theta \right) \hat{r} \\ &+ \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} v_r - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_\phi) \right) \hat{\theta} \\ &+ \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} v_r \right) \hat{\phi} \end{aligned}$$

Bei \hat{r} , $\hat{\theta}$ und $\hat{\phi}$ handelt es sich um die Einheitsvektoren, die in die entsprechenden Richtungen zeigen.

Anhang B

Hermitesche Polynome

Die hermiteschen Polynome können z. B. über die Rekursionsformel

$$H_{m+1}(u) = 2[u \cdot H_m(u) - m \cdot H_{m-1}(u)] \quad (\text{B.1})$$

mit

$$H_0(u) = 1 \quad (\text{B.2})$$

$$H_1(u) = 2u \quad (\text{B.3})$$

bestimmt werden [27]. Für die Ordnungen 2 bis 4 ergibt sich somit:

$$H_2(u) = 4u^2 - 2 \quad (\text{B.4})$$

$$H_3(u) = 8u^3 - 12u \quad (\text{B.5})$$

$$H_4(u) = 16u^4 - 48u^2 + 12 \quad (\text{B.6})$$

Bei (höhermodigen) gaußschen Strahlen werden die hermiteschen Polynome mit einer gaußschen Glockenkurve multipliziert. Dadurch wird deren Randbereich, wo $|H_m(u)| \rightarrow \infty$ gilt, quasi ausgeblendet. Es ergibt sich eine Art Trägerschwingung, deren Frequenz durch die Ordnung des gaußschen Strahls festgelegt ist und die mit der gaußschen Glockenkurve amplitudenmoduliert ist. Das Potential an der Taille (d. h. an der Stelle $x = 0$) senkrecht zur Ausbreitungsrichtung (d. h. in z-Richtung) ergibt sich aus den Gln. (4.130) und (4.138) zu

$$\psi_m(x = 0, z) = \psi_0 \cdot \exp \left\{ - \left(\frac{z}{w_0} \right)^2 \right\} \cdot \sqrt{\frac{1}{2^m \cdot m!}} \cdot H_m \left(\frac{\sqrt{2} z}{w(x)} \right), \quad (\text{B.7})$$

vgl. Abb. B.1. $\psi_m(x = 0, z)$ ist rein reell, da $|R(x)| \rightarrow \infty$ für $x \rightarrow 0$ gilt.

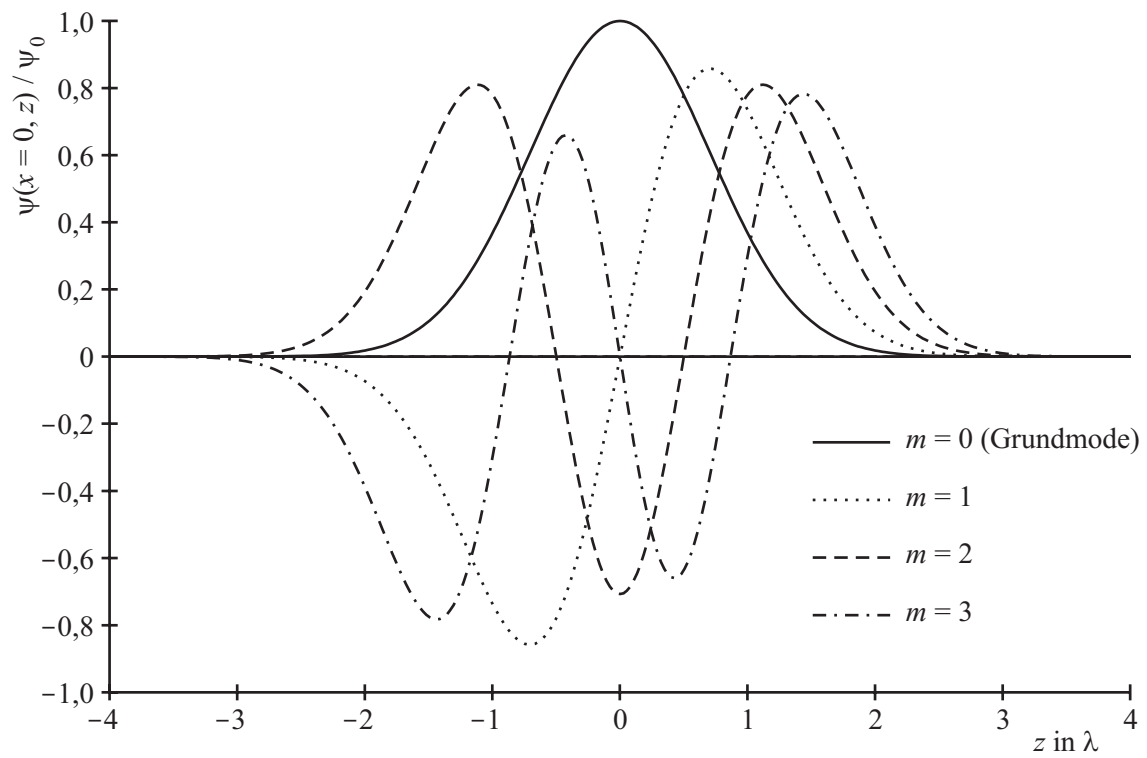


Abbildung B.1: Potentialverlauf bei höhermodigen gaußschen Strahlen mit $w_0 = \lambda$ an der Taille senkrecht zur Ausbreitungsrichtung

Anhang C

Rauhigkeit der Linsenoberfläche bei GO

Zur numerischen Analyse einer beliebig geformten Linse bietet es sich an, letztere durch einen Polygonzug zu beschreiben. Dabei tritt jedoch das Problem auf, dass jeder entsprechend gerichtete Knick quasi eine Miniatur-Sammellinse darstellt, die parallel einfallende Strahlen bündeln kann.

Die durch die Beschreibung der Linse mittels eines Polygonzugs entstandene Rauigkeit ist bei wirklichen Linsen (und damit auch bei Verwendung asymptotisch exakter Rechenmethoden) zu vernachlässigen, wenn die Rauigkeit um Größenordnungen kleiner als die Wellenlänge ist. Die Brechung geometrisch-optischer Strahlen erfolgt jedoch nicht in Abhängigkeit von der Frequenz. Kleinen Strukturen wird so bei der GO-Analyse ggf. eine sammelnde oder zerstreue Wirkung zugeschrieben, die aufgrund der kleinen Frequenz so nicht zu Tage tritt.

Bild C.1 zeigt den Einfall zweier paralleler GO-Strahlen auf die Oberfläche eines Linsendi-elektrikums mit der Brechzahl n . Das zweite Segment ist um den Winkel β verkippt. Das untere Segment wird unter dem Einfallswinkel (zum Lot) α_1 , das obere unter dem Winkel $\alpha_1 + \beta$ getroffen. Nach dem snelliusschen Brechungsgesetz ergeben sich die Ausfallswinkel (zum jeweiligen Lot)

$$\alpha_2 = \arcsin\left(\frac{1}{n} \sin \alpha_1\right) \quad \text{und} \quad (\text{C.1})$$

$$\alpha_3 = \arcsin\left(\frac{1}{n} \sin(\alpha_1 + \beta)\right). \quad (\text{C.2})$$

Für den Ausfallswinkel des oberen Strahls zum Lot des unteren Strahls gilt

$$\alpha'_2 = \alpha_3 - \beta \quad (\text{C.3})$$

Zum Schnitt der Strahlen kann es kommen, wenn die Ungleichung

$$\alpha'_2 < \alpha_2 \quad (\text{C.4})$$

erfüllt ist. Im Folgenden soll gezeigt werden, dass dies für beliebige Einfallswinkel α_1 für

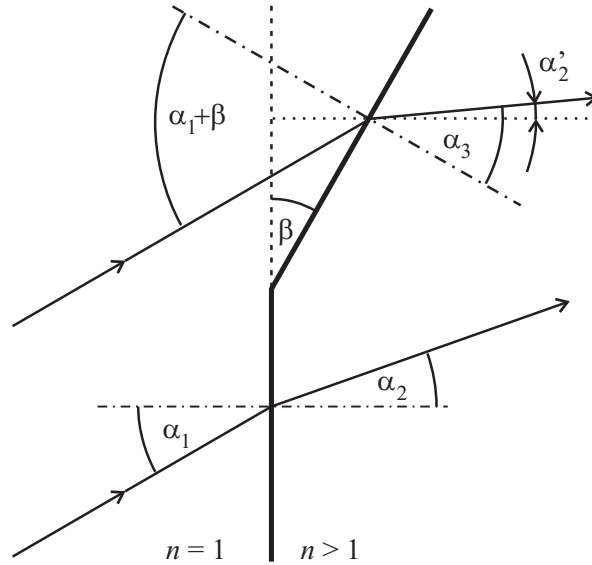


Abbildung C.1: Knick, der eine Miniatur-Sammellinse bildet.

eine Brechzahl $n > 1$ der Fall ist. Ungleichung (C.4) lautet ausgeschrieben:

$$\arcsin\left(\frac{1}{n} \sin(\alpha_1 + \beta)\right) - \beta < \arcsin\left(\frac{1}{n} \sin \alpha_1\right) \quad (\text{C.5})$$

$$\arcsin\left(\frac{1}{n} \sin(\alpha_1 + \beta)\right) < \arcsin\left(\frac{1}{n} \sin \alpha_1\right) + \beta \quad (\text{C.6})$$

$$\frac{1}{n} \sin(\alpha_1 + \beta) < \left(\frac{1}{n} \sin \alpha_1\right) \cos \beta + \sqrt{1 - \left(\frac{1}{n} \sin \alpha_1\right)^2} \sin \beta \quad (\text{C.7})$$

Da n positiv ist, gilt:

$$\sin(\alpha_1 + \beta) < \sin \alpha_1 \cos \beta + \sqrt{n^2 - (\sin \alpha_1)^2} \sin \beta \quad (\text{C.8})$$

$$\sin \alpha_1 \cos \beta + \cos \alpha_1 \sin \beta < \sin \alpha_1 \cos \beta + \sqrt{n^2 - (\sin \alpha_1)^2} \sin \beta \quad (\text{C.9})$$

Für $0 < \beta < 90^\circ$ ist $\sin \beta$ positiv und es gilt:

$$\cos \alpha_1 < \sqrt{n^2 - (\sin \alpha_1)^2} \quad (\text{C.10})$$

$$\sqrt{1 - (\sin \alpha_1)^2} < \sqrt{n^2 - (\sin \alpha_1)^2} \quad (\text{C.11})$$

$$1 < n^2 \text{ q.e.d.} \quad (\text{C.12})$$

Wenn der Abstand der einfallenden parallelen Strahlen sehr klein ist, liegt der Schnittpunkt beider Strahlen sehr nahe bei der Eintrittsfläche und damit ggf. noch innerhalb oder genau auf der Apertur der zu analysierenden Linse, vgl. Abb. C.2. Ein kleiner Abstand der Strahlen ist gleichbedeutend mit einer großen Strahlanzahl.

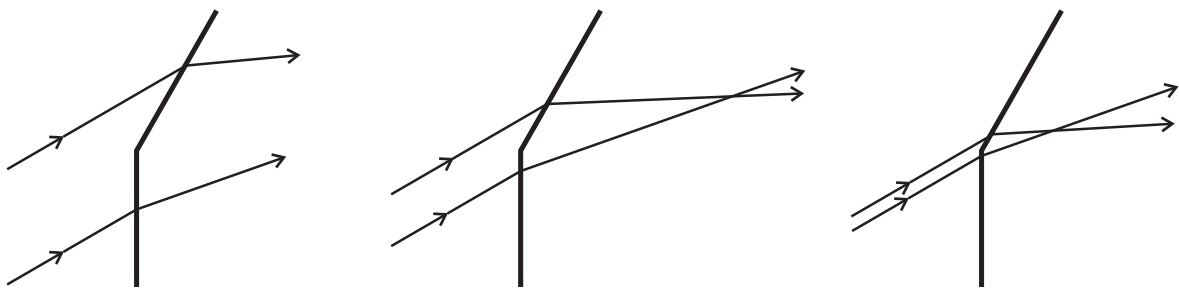


Abbildung C.2: Mit kleiner werdendem Strahlabstand in Richtung Eintrittsfläche wandernder Schnittpunkt

Anhang D

Bündelung einer ebenen Welle im Brennpunkt einer Ellipse

Im Folgenden soll gezeigt werden, dass (zumindest im Zweidimensionalen) eine Ellipse mit der Brechzahl n , die sich im Freiraum befindet, eine parallel zur großen Hauptachse einfallende ebene Welle in einem ihrer Brennpunkte bündelt, wenn ihre geometrischen Parameter passend zu n gewählt werden. Eine entsprechende Linse ist beispielsweise in [56] Gegenstand der Untersuchungen.

Die Voraussetzung für einen Brennpunkt im geometrisch-optischen Sinne sind gleiche Laufzeiten von einer ebenen Wellenfront im Freiraum zu einem Brennpunkt. Dies entspricht gleichen Weglängen, wobei Strecken im Innern des Streukörpers mit dessen Brechzahl n zu multiplizieren sind.

Abb. D.1 zeigt eine ebene Wellenfront L , die senkrecht zum Strahl S verläuft, den Brennpunkt F_1 sowie die Umrandung eines Streukörpers mit der Brechzahl n . Der Abstand zwischen der Wellenfront und dem Streukörper Δ spielt zunächst keine Rolle. Damit die einfallende ebene Welle im Brennpunkt gebündelt wird, muss für den Abstand $r(\alpha)$ der Punkte auf der Berandung vom Brennpunkt F_1 gelten:

$$\begin{aligned} n \cdot r(\alpha) + (f - \cos \alpha \cdot r(\alpha)) + \Delta &= n \cdot f + \Delta \\ r(\alpha) &= f \cdot \frac{n - 1}{n - \cos \alpha} \end{aligned} \quad (\text{D.1})$$

Dabei ist f die Brennweite. Für eine Ellipse gilt in Polarkoordinaten [7]:

$$r(\phi) = \frac{p}{1 + e \cos \phi}, \quad e < 1 \quad (\text{D.2})$$

Dabei ist e die Exzentrizität der Ellipse und p deren Halbparameter. Der Pol (d. h. der Ursprung des Polarkoordinatensystems $r = 0$) liegt in einem der beiden Brennpunkte. Mit $\alpha = \phi + \pi$ ergibt sich aus Gl. (D.1)

$$r(\phi) = f \cdot \frac{1 - \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n} \cos \phi} \quad (\text{D.3})$$

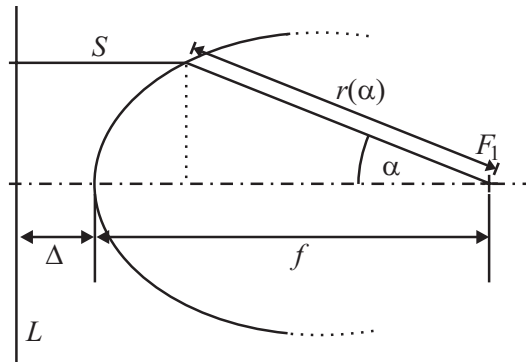


Abbildung D.1: Herleitung der Form eines Streukörpers zur Bündelung einer ebenen Welle in einem Brennpunkt

Aus dem Vergleich von (D.2) mit (D.3) ist direkt ersichtlich, dass Gl. (D.1) eine Ellipse beschreibt, wobei

$$e = \frac{1}{n} \quad \text{und} \quad p = f \cdot (1 - e)$$

gilt. Mit den in [7] gegebenen Zusammenhängen lassen sich die anderen Ellipsenparameter in Abhängigkeit vom Brechungsindex n und der Brennweite f angeben:

große Halbachse	$a = f \cdot \frac{n}{n+1}$
kleine Halbachse	$b = f \cdot \sqrt{\frac{n-1}{n+1}}$
Abstand zwischen Brenn- und Mittelpunkt	$c = f \cdot \frac{1}{n+1}$
Abstand der Leitlinie von der kleinen Achse	$d = f \cdot \frac{n^2}{n+1}$

Bei der Linie L in Abb. D.1 handelt es sich für

$$\Delta = d - a = f \cdot n \cdot \frac{n-1}{n+1}$$

um eine Leitlinie der Ellipse. Falls die Halbachsen a und b einer Ellipse gegeben sind, kann der (für die Bündelung einer aus entsprechender Richtung einfallenden ebenen Welle in einem Brennpunkt erforderliche) Brechungsindex n und die resultierende Brennweite f wie folgt berechnet werden:

$$n = \frac{1}{e} = \frac{a}{c} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - b^2}} \quad (\text{D.4})$$

$$f = a + c = a + \sqrt{a^2 - b^2} \quad (\text{D.5})$$

Anhang E

Der Poynting-Vektor im Zeit- und Frequenzbereich

Die Energieflussdichte der elektromagnetischen Energie ist für jeden Punkt im Raum durch den dort herrschenden Poynting-Vektor

$$\vec{s}(t) = \vec{e}(t) \times \vec{h}(t) \quad (\text{E.1})$$

gegeben [45, 53]. Für zeitharmonische elektromagnetische Felder mit der Kreisfrequenz ω gilt

$$\vec{e}(t) = \vec{e}_0 \cdot \cos(\omega t + \varphi_1) \quad (\text{E.2})$$

$$\vec{h}(t) = \vec{h}_0 \cdot \cos(\omega t + \varphi_2) \quad (\text{E.3})$$

und somit

$$\vec{s}(t) = (\vec{e}_0 \times \vec{h}_0) \cos(\omega t + \varphi_1) \cos(\omega t + \varphi_2). \quad (\text{E.4})$$

Bei \vec{e}_0 und \vec{h}_0 handelt es sich dabei um *reelle* Amplituden. Im zeitlichen Mittel gilt

$$\begin{aligned} \vec{S} &= (\vec{e}_0 \times \vec{h}_0) \cdot \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \cos(\omega t' + \varphi_1) \cos(\omega t' + \varphi_2) dt' \\ &= \frac{1}{2} (\vec{e}_0 \times \vec{h}_0) \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \end{aligned} \quad (\text{E.5})$$

Bei Verwendung komplexer Amplituden

$$\vec{E}_0 = \vec{e}_0 \cdot e^{j\varphi_1} \quad (\text{E.6})$$

$$\vec{H}_0 = \vec{h}_0 \cdot e^{j\varphi_2} \quad (\text{E.7})$$

lässt sich Gl. (E.5) folgendermaßen ausdrücken¹:

$$\vec{S} = \frac{1}{2} (\vec{e}_0 \times \vec{h}_0) \cos(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{1}{2} \text{Re} \left\{ (\vec{e}_0 \times \vec{h}_0) e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)} \right\} = \frac{1}{2} \text{Re} \left\{ \vec{E}_0 \times \vec{H}_0^* \right\}. \quad (\text{E.8})$$

¹Der Stern bei \vec{H}_0 kennzeichnet die konjugiert komplexe Größe.

Anhang F

Computerprogramm PESTRAHL

Zur Anwendung der PE-Methode in Strahlenkoordinaten wird im Rahmen der vorliegenden Arbeit ein Computerprogramm in C/C++ erstellt, dessen Ablaufplan in Abb. F.1 dargestellt ist.

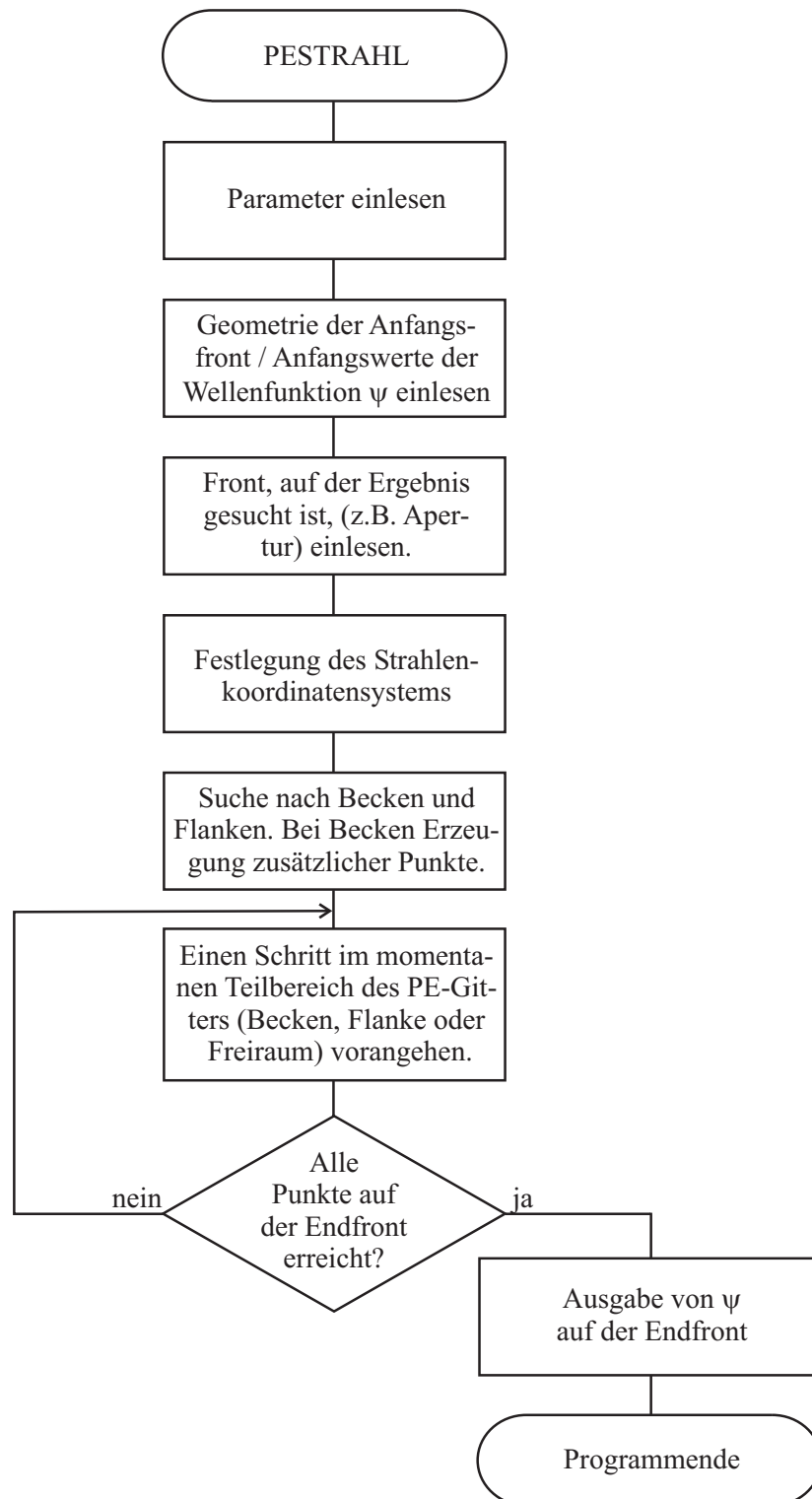


Abbildung F.1: Programmablaufplan zur Anwendung der PE-Methode in Strahlenkoordinaten

Anhang G

Wahl der Rotationssymmetrie in ϕ

Eine Behandlung von elektromagnetischen Feldern im Zweidimensionalen ist nur dann möglich, wenn das Feld lediglich von zwei der drei Raumdimensionen abhängt. Ein Beispiel hierfür sind Felder, die von Linienquellen ausgehen. Linienquellen sind in einer Raumdimension unendlich ausgedehnt und erzeugen (sofern es sich um Wechselstromquellen handelt) Zylinderwellen. Bei Linienquellen fällt die Feldstärke im Fernfeld nur mit $1/\sqrt{r}$ im Gegensatz zu $1/r$ bei von Punktquellen erzeugten Feldern.

Felder von Linienquellen werden vorteilhaft in Zylinderkoordinaten r, ϕ, z beschrieben, wobei die unendliche Ausdehnung in z -Richtung angenommen wird. Die Feldstärken sind in diesem Fall nicht von z abhängig; zur Beschreibung des Feldes genügen zweidimensionale Polarkoordinaten r, ϕ , bei der Differenzierung gilt $\partial/\partial z = 0$.

Zylinderwellen kommen in der Praxis nicht bzw. nur näherungsweise in einem kleinen räumlichen Bereich (z. B. im Nahfeld von gestockten Antennen) vor. Primärstrahler von Linsen- und Reflektorantennen treten — auch im Nahfeld — überwiegend als Punktquellen in Erscheinung. Ein 2D-Algorithmus zur Untersuchung der Wellenausbreitung in Linsenantennen, der Linienquellen und eine unendliche Ausdehnung der Linse in z -Richtung voraussetzt, wäre nur bedingt zur Analyse realer Linsen geeignet. Daher werden nicht Zylinderkoordinaten r, ϕ, z mit $\partial/\partial z = 0$, sondern Kugelkoordinaten r, θ, ϕ bzw. Strahlenkoordinaten ξ, s, ϕ mit $\partial/\partial \phi = 0$ angenommen. Dies setzt voraus, dass die zu analysierenden Felder und die Geometrie der Streukörper nicht von der Koordinate ϕ abhängen, also rotationssymmetrisch bzgl. ϕ sind. In Kugelkoordinaten zeigt die Rotationsachse in Richtung $\theta = 0$ oder $\theta = \pi$. Rotationssymmetrische Felder werden zum Beispiel von einem Dipol erzeugt, der in Kugelkoordinaten in Richtung $\theta = 0$ orientiert ist.

In der Praxis sind Linsenantennen i. Allg. nicht rotationssymmetrisch bzgl. ϕ . Es darf nicht übersehen werden, dass die Annahme der Rotationssymmetrie bzgl. ϕ i. Allg. nicht deshalb erfolgt, um die zu analysierende Antenne möglichst detailliert zu modellieren, sondern um eine Behandlung im Zweidimensionalen zu ermöglichen, vgl. hierzu Abschnitt 7.2.1. In [62] wurde die Richtcharakteristik einer *nicht* bzgl. ϕ rotationssymmetrischen Linsen-

antenne unter Annahme einer Rotationssymmetrie bzgl. ϕ mittels eines entsprechenden FIT-Programms (2D-Time-Domain-Modul von MAFIA [51]) erfolgreich bestimmt. Die FIT („Finite Integrationstechnik“) ist verwandt mit FDTD.

Für einen gegen unendlich gehenden Abstand der Quellen und des Schnitts der Streukörper-Geometrie von der Rotationsachse geht der Fall „Rotationssymmetrie bzgl. ϕ “ in den Fall der Linienquellen, Zylinderwellen und der unendlichen Ausdehnung in einer Raumrichtung über, vgl. Abb. 3.5 auf S. 23 mit $x_0 \rightarrow \infty$ (und damit (abseits der Pole) $R \rightarrow \infty$). Dadurch kann ein Algorithmus, der für eine Rotationssymmetrie bzgl. ϕ ausgelegt ist, universelle zweidimensionale Probleme lösen.

Anhang H

Strahlung einer rotationssymmetrischen Anordnung in Richtung der Rotationsachse

Nachfolgend soll gezeigt werden, dass eine rotationssymmetrische Anordnung, die eine bzgl. der z-Achse (gleichbedeutend mit der Achse $\theta = 0$) rotationssymmetrische Feldverteilung erzeugt, nicht in diese Richtung strahlen kann, d. h., dass der Poynting-Vektor auf der Rotationsachse gleich Null ist.

Eine Rotationssymmetrie bzgl. der z-Achse äußert sich darin, dass die Feldstärken nicht von der Koordinate ϕ abhängen, d. h. es gilt $\partial/\partial\phi = 0$.

Der Beweis erfolgt anhand von sphärischen Moden, wie sie bei der Nahfeld-Fernfeld-Transformation verwendet werden [11, 32]. Das Feld einer beliebigen Antenne lässt sich in jedem Abstand vollständig durch die (nicht vom Abstand abhängigen) Modenkoeffizienten Q_{smn} beschreiben [11], mit denen die einzelnen sphärischen Moden $\vec{F}_{smn}^{(c)}(r, \theta, \phi)$ gewichtet werden. Die elektrische und die magnetische Feldstärke kann in jedem Beobachtungspunkt aus der gewichteten Summe von allen möglichen sphärischen Moden berechnet werden, vgl. bei [11] die Gln. (2.27) bis (2.30).

Für die ϕ -Abhängigkeit enthalten die sphärischen Moden Terme $e^{jm\phi}$. Damit ein sphärischer Mode rotationssymmetrisch bzgl. ϕ ist, muss $m = 0$ gelten. Zur Beschreibung einer rotationssymmetrischen Feldverteilung kommen somit lediglich Moden mit $m = 0$ vor. Diese lauten für $s = 1$ und $s = 2$:

$$\vec{F}_{10n}^{(c)}(r, \theta) = \begin{pmatrix} F_{10nr}^{(c)} \\ F_{10n\theta}^{(c)} \\ F_{10n\phi}^{(c)} \end{pmatrix} = \beta_0 \sqrt{\frac{Z_{F0} \cdot (2n+1)}{4\pi \cdot n(n+1)}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -z_n^{(c)}(\beta_0 r) \frac{\partial}{\partial \theta} [P_n(\cos \theta)] \end{pmatrix} \quad (\text{H.1})$$

$$\vec{F}_{20n}^{(c)}(r, \theta) = \beta_0 \sqrt{\frac{Z_{F0} \cdot (2n+1)}{4\pi \cdot n(n+1)}} \cdot \begin{pmatrix} \frac{n(n+1)}{\beta_0 r} z_n^{(c)}(\beta_0 r) P_n(\cos \theta) \\ \frac{1}{\beta_0 r} \frac{\partial}{\partial(\beta_0 r)} [\beta_0 r z_n^{(c)}(\beta_0 r)] \frac{\partial}{\partial \theta} [P_n(\cos \theta)] \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{H.2})$$

Dabei steht $z_n^{(c)}$ abhängig von c für die sphärische Bessel-, Neumann- oder Hankelfunktion erster bzw. zweiter Art [11]. Bei P_n handelt es sich um die Legendre-Polynome, vgl. beispielsweise bei [33] Anhang E. Für $n = 1$, d. h. durch die Moden $\vec{F}_{101}^{(c)}(r, \theta)$ und $\vec{F}_{201}^{(c)}(r, \theta)$, wird jeweils die Strahlung eines Elementardipols repräsentiert, der in z -Richtung polarisiert ist; für $s = 1$ handelt es sich um einen magnetischen Elementardipol, der ein Feld TE bzgl. r erzeugt, und für $s = 2$ um einen elektrischen Elementardipol (d. h. hertzschen Dipol), der ein Feld TM bzgl. r erzeugt¹.

Im Fernfeld der Antenne sind lediglich die θ - und ϕ -Komponenten (und nicht die r -Komponente) der elektrischen und magnetischen Feldstärke für die Berechnung des Poynting-Vektors gemäß Gl. (6.7) von Bedeutung und dadurch nur die ϕ -Komponente von $\vec{F}_{10n}^{(c)}(r, \theta)$ und die θ -Komponente von $\vec{F}_{20n}^{(c)}(r, \theta)$. Beide Komponenten enthalten den Term $\frac{\partial}{\partial \theta} [P_n(\cos \theta)]$. Diese Ableitung kann durchgeführt werden:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} [P_n(\cos \theta)] = \sin \theta \cdot \frac{\partial}{\partial x} [P_n(x)] \quad (\text{H.3})$$

Die Legendre-Polynome $P_n(u)$ haben keine Polstellen und daher überall eine endliche Steigung. Insofern gilt in jedem Fall

$$\sin \theta \cdot \frac{\partial}{\partial x} [P_n(x)] \rightarrow 0 \quad \text{für } \theta \rightarrow 0, \pi. \quad (\text{H.4})$$

Also strahlen alle bzgl. der Koordinate ϕ rotationssymmetrischen Moden nicht in Richtung $\theta = 0$ und $\theta = \pi$ und dadurch nicht in Richtung der Achse der Rotationssymmetrie, was zu beweisen war.

¹TM bzgl. r bedeutet, dass das Magnetfeld keine r -Komponente aufweist

Anhang I

Strahlung eines elektrischen Dipolrings auf einem ideal magnetisch leitfähigen Zylinder

Im Folgenden wird die Strahlung eines Rings aus elektrischen Dipolen betrachtet, die in z -Richtung orientiert sind und die sich auf einem unendlich ausgedehnten Zylinder aus ideal magnetisch leitfähigem Material befinden, vgl. Abb. I.1(a). Die Geometrie und die vom Dipol erzeugten Felder sind rotationssymmetrisch bzgl. der z -Achse. Um auf Ergebnisse aus der Literatur zurückgreifen zu können, wird das duale Problem betrachtet, d. h. magnetische Dipole auf einem ideal elektrisch leitfähigen Zylinder, vgl. Abb. I.1(b). Dieser Fall tritt auf, wenn nach der Methode der äquivalenten Quellen (vgl. Abschnitt 5.2 ab S. 72) die Strahlung eines entsprechenden Schlitzes in einem Zylinder betrachtet wird, vgl. Abb. I.1(c), wobei das elektrische Feld im Schlitz lediglich eine ϕ -Komponente aufweist. Die Höhe des Schlitzes ist nicht klein gegenüber der Wellenlänge, sondern entspricht der Länge des Dipols (hier $0,56 \cdot \lambda_0$). So wie der Strom an den Dipolenden verschwindet, muss auch die tangential elektrische Feldstärke E_ϕ am Rand des Schlitzes verschwinden. Harrington schlägt zur Analyse der Strahlung von Aperturen in leitfähigen Zylindern ein Verfahren vor ([33] Abschnitt 5-12), das im Prinzip der zylindrischen Nahfeld-Fernfeld-Transformation [11] entspricht. Dabei wird das Feld in der Apertur durch zylindrische Moden ausgedrückt, aus denen das Nahfeld in der unmittelbaren Umgebung der Apertur sowie das Fernfeld berechnet werden kann. Für die Bestimmung der Strahlung der Speiseantenne einer Linse ist von Bedeutung, dass i. Allg. nicht von Fernfeld-Bedingungen ausgegangen werden kann, d. h. Fernfeld-Näherungen sind im Folgenden nicht zulässig.

Aufgrund der Rotationssymmetrie bzgl. ϕ kommen nur Zylindermoden mit $n = 0$ vor. Der z -Abhängigkeit im Unterbereich entspricht im Oberbereich eine Wellenzahl-Abhängigkeit. Linienquellen, die in z -Richtung orientiert sind, haben nur eine ρ -Komponente des Wellenzahlvektors (da wegen ihrer unendlichen Ausdehnung $\partial/\partial z = 0$ gilt). Durch die Rotationssymmetrie genügt im Folgenden die Betrachtung der Ebene $y = 0$. In dieser haben

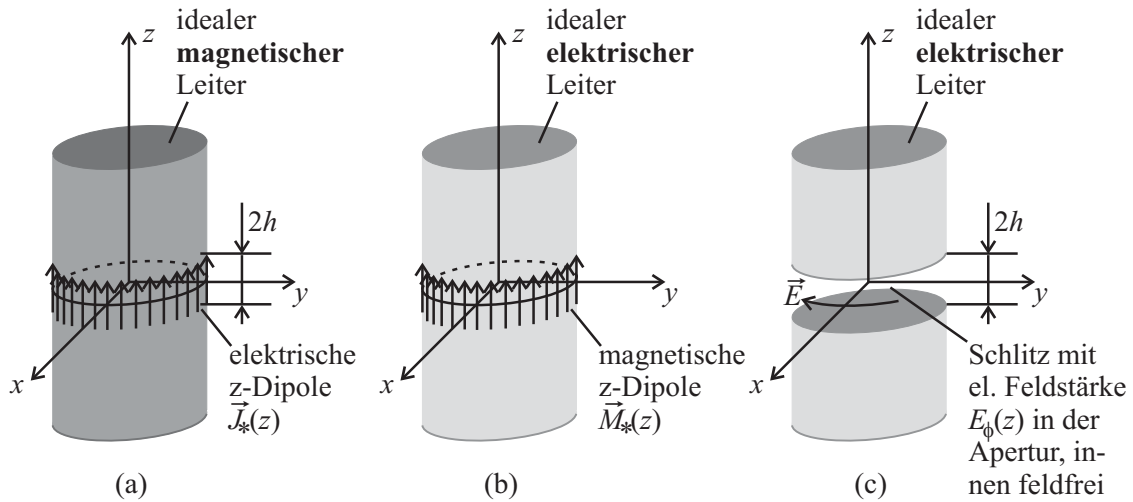


Abbildung I.1: Ring aus z-Dipolen, duales Problem und Betrachtung als Schlitzantenne

die Linienquellen nur eine x-Komponente des Wellenzahlvektors $\vec{\beta}$. Um nun auch andere Strahlungsrichtungen als die x-Richtung zuzulassen, werden trotz konstanter Betriebsfrequenz f verschiedene Werte von β_x angenommen. Es gilt:

$$\beta_0^2 = \beta_x^2 + \beta_z^2 \quad (\text{I.1})$$

Dabei ist $\beta_0 = 2\pi \cdot f/c_0$ durch $f = \text{const.}$ gegeben. Aus Gl. I.1 folgt:

$$\beta_x(\beta_z) = \pm \sqrt{\beta_0^2 - \beta_z^2} \quad (\text{I.2})$$

Ein „Durchscannen“ (von $-\infty$ bis $+\infty$) aller Werte von β_z sorgt nicht nur dafür, dass alle möglichen Werte für β_x vorkommen, sondern bezieht exponentiell gedämpfte Moden, die fürs unmittelbare Nahfeld von Bedeutung sind, automatisch mit ein. Dem undefinierten Vorzeichen vor der Wurzel in Gl. (I.2) kommt dabei die Bedeutung zu, dass sich bei einem reellen Ergebnis der Wurzel eine herauslaufende Welle ergeben muss (positives reelles Argument der Hankelfunktion $H_m^{(2)}(x)$), andererseits aber bei einem imaginären Ergebnis der Wurzel in jedem Fall ein exponentiell gedämpfter (und nicht etwa ansteigender) Feldverlauf (negativ imaginäres Argument der Hankelfunktion). Um zwischen den Vorzeichen umzuschalten, wird beispielsweise in [42] der Λ -Operator definiert.

In der Apertur der Schlitzantenne kommt nur eine ϕ -Komponente der elektrischen Feldstärke vor. Das transformierte Feld lautet¹ [33]:

$$\bar{E}_\phi(\beta_z) = \int_{-\infty}^{\infty} E_\phi(z) \cdot \exp(-j\beta_z z) dz \quad (\text{I.3})$$

Für $E_\phi(z)$ wird derselbe Verlauf wie bei der Stromverteilung eines Dipols allgemeiner Länge angenommen:

$$E_\phi(z) = E_0 \cdot \sin[\beta_0 \cdot (h - |z|)] \quad \text{für } -h \leq z \leq h, \quad 0 \text{ sonst.} \quad (\text{I.4})$$

¹Harrington verwendet für β_z den Parameter w .

Bei h handelt es sich um die halbe Länge des Dipols, vgl. Abb. I.1. Das Einsetzen von Gl. (I.4) in (I.3) und ein Ausführen der Integration liefert:

$$\bar{E}_\phi(\beta_z) = 2E_0 \cdot \frac{\beta_0}{\beta_0^2 - \beta_z^2} (\cos(h \cdot \beta_z) - \cos(h \cdot \beta_0)) \quad (\text{I.5})$$

Für das Feld außerhalb des Zylinders folgt nach [33] mit $dH_0^{(2)}(x)/dx = -H_1^{(2)}(x)$:

$$\begin{aligned} E_\phi(x, z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H_1^{(2)} \left[x \cdot \left(\pm \sqrt{\beta_0^2 - \beta_z^2} \right) \right]}{H_1^{(2)} \left[a \cdot \left(\pm \sqrt{\beta_0^2 - \beta_z^2} \right) \right]} \bar{E}_\phi(\beta_z) \exp(j\beta_z z) d\beta_z \\ &= \frac{2E_0}{\lambda_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H_1^{(2)} \left[x \cdot \left(\pm \sqrt{\beta_0^2 - \beta_z^2} \right) \right]}{H_1^{(2)} \left[a \cdot \left(\pm \sqrt{\beta_0^2 - \beta_z^2} \right) \right]} \frac{\cos(h \cdot \beta_z) - \cos(h \cdot \beta_0)}{\beta_0^2 - \beta_z^2} \exp(j\beta_z z) d\beta_z \end{aligned} \quad (\text{I.6})$$

Bei a handelt es sich um den Zylinderradius und bei $H_1^{(2)}(x)$ um die Hankelfunktion erster Ordnung für herauslaufende Wellen, wofür der hochgestellte Ausdruck „(2)“ steht. Für die Wahl des Vorzeichens vgl. den Abschnitt nach Gl. (I.2). Das Integral in Gl. (I.6) kann numerisch ausgewertet und somit das elektrische Feld E_ϕ überall außerhalb des Zylinders berechnet werden.

Anhang J

Fresnelsche Beziehungen für das Magnetfeld

Bei der in Abschnitt 7.2 vorgenommenen Analyse einer dielektrischen Linse mittels der PE-Methode wird ein rotationssymmetrisches elektromagnetisches Feld angenommen, das TE bzgl. ϕ und TM bzgl. r in Kugelkoordinaten bzw. TM bzgl. ρ und z in Zylinderkoordinaten ist. D. h. das Magnetfeld weist ausschließlich eine ϕ -Komponente H_ϕ auf. Die PE-Rechnung erfolgt anhand der zu H_ϕ proportionalen ϕ -Komponente des elektrischen Vektorpotentials \vec{F} , vgl. Abschnitt 7.2.2. Zur (näherungsweise) Berechnung der in der Linse weiterlaufenden (gebrochenen) Welle werden die fresnelschen Beziehungen für H_ϕ benötigt. Das Magnetfeld \vec{H} steht senkrecht zur Einfallsebene¹, dementsprechend liegt das elektrische Feld \vec{E} in der Einfallsebene. In der Literatur sind die fresnelschen Beziehungen gewöhnlich für das elektrische Feld angegeben. Nach der Betrachtung in [45] liegt der Fall der parallelen Polarisierung vor.

Zwar herrschen an der Linseneintrittsfläche i. Allg. keine Fernfeld-Bedingungen; sofern die Speiseantenne die Linse aber nicht berührt², kann jedoch davon ausgegangen werden, dass der Abstand zwischen Linse und Speiseantenne so groß ist ($> \lambda_0/2\pi$ [11]), dass von einer Überwindung des reaktiven Nahfeldes und einer Verknüpfung zwischen dem elektrischen und magnetischen Feld über den Feldwellenwiderstand Z_F gesprochen werden kann. In diesem Fall gilt für die Amplitude des Magnetfeldes der in Medium 1 auf die Grenzfläche einfallenden Welle

$$H_{e0} = E_{e0}/Z_{F1} \quad (\text{J.1})$$

und dementsprechend für die weiterlaufende (gebrochene) Welle in Medium 2

$$H_{g0} = E_{g0}/Z_{F2}. \quad (\text{J.2})$$

¹Bei der Einfallsebene handelt es sich durch die Ausnutzung der Rotationssymmetrie um eine Halbebene $\phi = \text{const.}$, also z. B. um die Halbebene $x > 0, y = 0$

²Wäre die Speiseantenne direkt mit der Linse verbunden, so läge an dieser Stelle keine Grenzfläche zwischen zwei Medien vor und die Anwendung der fresnelschen Beziehungen wäre nicht erforderlich.

Dabei sind E_{e0} und E_{g0} die entsprechenden Amplituden der elektrischen Feldstärke. Aus den in [45] hergeleiteten Beziehungen

$$\frac{Z_{F1}}{Z_{F2}} = \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} \quad (\text{J.3})$$

und

$$\frac{E_{g0}}{E_{e0}} = \frac{2 \sin \alpha_2 \cos \alpha_1}{\sin (\alpha_1 + \alpha_2) \cos (\alpha_1 - \alpha_2)} \quad (\text{J.4})$$

folgt

$$\frac{H_{g0}}{H_{e0}} = \frac{2 \sin \alpha_1 \cos \alpha_1}{\sin (\alpha_1 + \alpha_2) \cos (\alpha_1 - \alpha_2)} = \frac{\sin (2\alpha_1)}{\sin (\alpha_1 + \alpha_2) \cos (\alpha_1 - \alpha_2)}. \quad (\text{J.5})$$

Bei α_1 und α_2 handelt es sich um die Brechungswinkel gemäß dem snelliusschen Brechungsgesetz³ (vgl. Anhang C). Es ist zu beachten, dass Gl. (J.5) nur für den Fall gilt, dass das Magnetfeld senkrecht auf der Einfallsebene steht, und genau genommen nur, wenn eine ebene Welle auf eine unendlich ausgedehnte Grenzfläche fällt, d. h. die Grenzfläche muss groß gegenüber der Wellenlänge und die Krümmungen der Fläche und der Phasenfronten müssen vernachlässigbar sein.

³Für den Sonderfall $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ ist in Gl. (J.5) α_2 dennoch aus dem snelliusschen Brechungsgesetz mit dem Grenzfall $\alpha_1 \rightarrow 0$ zu berechnen.

Literaturverzeichnis

- [1] M. Akhavan-Bahabadi, A.A. Shishegar, and R. Faraji-Dana, Far field pattern computation of a double-slot antenna on elliptical Silicon dielectric lens using vectorial Gaussian beam. IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium 2002, Piscataway, NJ, USA, 2002, vol. 3, pp. 332-335.
- [2] T. Anada, T. Fujii, K. Morita, T. Tsuchiya and N. Endoh, Numerical Analysis of Long Range Acoustic Propagation Based on Wide Angle Parabolic Wave Equation. Japanese Journal of Applied Physics, Part 1, vol. 36, no. 5B, May 1997, pp. 3336-3339.
- [3] M. Ando, Physical Optics. Chapter 4 of: Analysis Methods for Electromagnetic Wave Problems, vol. 2, edited by E. Yamashita, Artech House, Boston, London, 1996.
- [4] V.M. Babich and M.M. Popov, Gaussian Summation Method (Review). Radiophysics and Quantum Electronics, USA, vol. 32, no. 12, Dec. 1989, pp. 1063-1081.
- [5] M.J. Bastiaans, Gabor's Expansion of a Signal into Gaussian Elementary Signals. Proceedings of the IEEE, vol. 68, no. 4, pp. 538-539, April 1980.
- [6] J.-P. Berenger, A Perfectly Matched Layer for the Absorption of Electromagnetic Waves. Journal of Computational Physics, vol. 114, 1994, pp. 185-200.
- [7] Bronstein, Semendjajew, Taschenbuch der Mathematik. 25. Auflage, hrsg. von G. Grosche. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1991.
- [8] H. Brysk, Numerical analysis of the 45-degree finite-difference equation for migration. Geophysics, vol. 48, no. 5, May 1983, pp. 532-542.
- [9] V. Červený, M.M. Popov, and I. Pšenčík, Computation of wave fields in inhomogeneous media – Gaussian beam approach. Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society, UK, vol. 70, no. 1, July 1982, pp. 109-128.
- [10] K.K. Chan, S.K. Rao, G.A. Morin and M.Q. Tang, Triangular Ray-Tube Analysis of Dielectric Lens Antennas. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. 45, no. 8, August 1997, pp. 1277-1285.

- [11] J. Christ, Korrektur prinzipbedingter und durch die Messumgebung verursachter Fehler bei der Nahfeld-Fernfeld-Transformation. Dissertation an der Universität Stuttgart, 1995. In: Berichte aus der Hochfrequenztechnik, Nr. D 93, Verlag Shaker, Aachen 1995.
- [12] J.F. Claerbout, Fundamentals of Geophysical Data Processing: With Applications to Petroleum Prospecting. Chapter 10-3 (pp. 194-207), McGraw-Hill, 1976.
- [13] F. Collino, Perfectly Matched Absorbing Layers for the Paraxial Equations. Journal of Computational Physics, vol. 131, 1997, pp. 164-180.
- [14] M.D. Collins, A split-step Padé solution for the parabolic equation method. Journal of the Acoustical Society of America, part 1, vol. 93, no. 4, April 1993, pp. 1736-1742.
- [15] M.D. Collins and R.B. Evans, A two-way parabolic equation for acoustic backscattering in the ocean. Journal of the Acoustical Society of America, vol. 91, no. 3, March 1992, pp. 1357-1368.
- [16] M.D. Collins and R.J. Cederberg, D.B. King and S.A. Chin-Bing, Comparison of algorithms for solving parabolic wave equations. Journal of the Acoustical Society of America, vol. 100, no. 1, July 1996, pp. 178-182.
- [17] S. Cornbleet, Microwave and Optical Ray Geometry. John Wiley & Sons Ltd., Chichester, New York, Brisbane, Toronto, Singapore, 1984.
- [18] R.A. Dalrymple, L.C. Munasinghe, D.H. Wood, and J.T. Kirby, A very-wide-angle acoustic model for underwater sound propagation. Journal of the Acoustical Society of America, vol. 88, no. 4, October 1990, pp. 1863-1876.
- [19] G.D. Dockery, Modeling Electromagnetic Wave Propagation in the Troposphere Using the Parabolic Equation. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. 36, no. 10, October 1988, pp. 1464-1470.
- [20] P.D. Einziger, S. Raz, and M. Shapira, Gabor representation and aperture theory. Journal of the Optical Society of America, part A, vol. 3, no. 4, pp. 508-522, April 1986.
- [21] EM Software & Systems-S.A. (Pty) Ltd, FEKO Users Manual Suite 4.0 (FEKO 45.154, PREFEKO 26.1-53 and later). Stellenbosch, Südafrika, 2002.
- [22] L. Empacher, Analyse eines Vielstrahl-Wellenleiters zur Übertragung hoher Mikrowellenleistungen. Dissertation an der Universität Stuttgart, Institut für Plasmaforschung, 1999.

- [23] C.A. Fernandes, Shaped Dielectric Lenses for Wireless Millimeter-Wave Communications. *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, vol. 41, no. 5, October 1999, pp. 141-150.
- [24] F. Fogli, G. Bellanca, and P. Bassi, TBC and PML conditions for 2D and 3D BPM: a comparison. *Optical and Quantum Electronics*, vol. 30, 1998, pp. 443-456.
- [25] D. Gabor, Theory of Communication. *The Journal of the Institution of Electrical Engineers*, part 3, vol. 93, pp. 429-457, Nov. 1946.
- [26] D. Givoli, Non-reflecting Boundary Conditions. *Journal of Computational Physics*, vol. 94, no. 1, May 1991, pp. 1-29.
- [27] P.F. Goldsmith, Quasioptical systems: Gaussian beam propagation and applications. IEEE Press, New York 1998.
- [28] R.R. Greene, The rational approximation to the acoustic wave equation with bottom interaction. *Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 76, no. 6, December 1984, pp. 1764-1773.
- [29] G.R. Hadley, Transparent boundary condition for beam propagation. *Optics letters*, vol. 16, no. 9, 1st May 1991, pp. 624-626.
- [30] G.R. Hadley, Transparent Boundary Condition for the Beam Propagation Method. *IEEE Journal of Quantum Electronics*, vol. 28, no. 1, January 1992, pp. 363-370.
- [31] C. Hafner, Numerische Berechnung elektromagnetischer Felder. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg 1987.
- [32] J. Hald, J.E. Hansen, F. Jensen, and F. Holm Larsen, Spherical Near-Field Antenna Measurements. Edited by J.E. Hansen. IEE electromagnetic wave series, vol. 26, Peter Peregrinus Ltd, London 1988.
- [33] R.F. Harrington, Time-Harmonic Electromagnetic Fields. McGraw-Hill Book Company, New York 1961.
- [34] M. Hentschel and H. Schomerus, Fresnel laws at curved dielectric interfaces of microresonators. *Physical Review E*, vol. 65, no. 4, April 2002, Article no. 045603 (4 pages).
- [35] A. Hoorfar and V. Jamnejad, Electromagnetic Modeling and Analysis of Wireless Communication Antennas. *IEEE Microwave Magazine*, vol. 4, no. 1, March 2003, pp. 51-67.

- [36] U. Jakobus, Erweiterte Momentenmethode zur Behandlung kompliziert aufgebauter und elektrisch großer elektromagnetischer Streuprobleme. Dissertation an der Universität Stuttgart, 1994. In: Fortschrittberichte VDI, Reihe 21, Nr. 171, VDI-Verlag, Düsseldorf 1995.
- [37] U. Jakobus, Intelligente Kombination verschiedener numerischer Berechnungsverfahren zur effizienten Analyse elektromagnetischer Streuprobleme unter besonderer Berücksichtigung der Parallelverarbeitung. Habilitationsschrift an der Universität Stuttgart, 1999. In: Berichte aus der Hochfrequenztechnik, Shaker-Verlag, Aachen 1999.
- [38] Yu.V. Kopylov, A.V. Popov, and A.V. Vinogradov, Application of the parabolic wave equation to X-ray diffraction optics. *Optics Communications*, vol. 118, August 1995, pp. 619-636.
- [39] L.D. Landau, E.M. Lifschitz, Lehrbuch der Theoretischen Physik. Band II: Klassische Feldtheorie. In Deutsch hrsg. von H.-G. Schöpf. 12. Aufl., Akademie-Verlag, Berlin 1992.
- [40] F. Landstorfer, Wellenablösung und Energietransport im Nahfeld von Stabantennen im Sendefall. Habilitationsschrift an der Technischen Universität München, 1971.
- [41] F. Landstorfer, H. Liska, H. Meinke und B. Müller, Energieströmung in elektromagnetischen Wellenfeldern. *Nachrichtentechnische Zeitschrift (NTZ)*, Band 25, Nr. 5, 1972, S. 225-231.
- [42] W.M. Leach, jr., and D.T. Paris, Probe Compensated Near-Field Measurements on a Cylinder. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 21, no. 4, July 1973, pp. 435-445.
- [43] D. Lee, S.T. McDaniel, Ocean Acoustic Propagation by Finite Difference Methods. *Computers & Mathematics with Applications*, vol. 14, no. 5, pp. 305-423, Pergamon Press, 1987.
- [44] D. Lee, G. Botseas, and J.S. Papadakis, Finite-difference solution to the parabolic wave equation. *Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 70, no. 3, September 1981, pp. 795-800.
- [45] G. Lehner, Elektromagnetische Feldtheorie für Ingenieure und Physiker. 1. Auflage, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg 1990.
- [46] M.F. Levy and P.-P. Borsboom, Radar cross-section computations using the parabolic equation method. *Electronics Letters*, vol. 32, no. 13, 20th June 1996, pp. 1234-1236.

- [47] M. Levy, Parabolic equation methods for electromagnetic wave propagation. IEE Electromagnetic Waves Series, vol. 45, London 2000.
- [48] G.D. Malyuzhinets, Developments in our concepts of diffraction phenomena. Soviet Physics Uspekhi, vol. 69(2), no. 5, Sep./Oct. 1959, pp. 749-758.
- [49] J.F. Lingeitch, M.D. Collins, M.J. Mills, and R.B. Evans, A two-way parabolic equation that accounts for multiple scattering. Journal of the Acoustical Society of America, vol. 112, no. 2, August 2002, pp. 476-480.
- [50] J.J. Maciel and L.B. Felsen, Systematic Study of Fields Due to Extended Apertures by Gaussian Beam Discretisation. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. 37, no. 7, July 1989, pp. 884-892.
- [51] "The MAFIA Collaboration", MAFIA – The ECAD System. T2 – The 2D Time Domain Solver. 8th July 1994. Inzwischen: CST GmbH, Darmstadt.
- [52] S.W. Marcus, A Hybrid (Finite Difference – Surface Green's Function) Method for Computing Transmission Losses in an Inhomogeneous Atmosphere Over Irregular Terrain. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. 40, no. 12, December 1992, pp. 1451-1458.
- [53] H. Meinke, F. Landstorfer, Energieströmung in elektromagnetischen Wellenfeldern. Lehrstuhl für Hochfrequenztechnik der Technischen Universität München, März 1977.
- [54] P. Moon and D.E. Spencer, Field Theory Handbook, 2nd edition, pp. 17-20. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg 1988.
- [55] H. Nakano and H. Mimaki, Radiation from a short helical antenna backed by a cavity. Electronics Letters, vol. 31, no. 8, April 1995, pp. 602-604.
- [56] D. Pasqualini, High-Frequency Analysis of Integrated Dielectric Lens Antennas. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. 52, no. 3, March 2004, pp. 840-847.
- [57] A.V. Popov, V.A. Vinogradov, N.Y. Zhu, and F.M. Landstorfer, 3D parabolic equation model of EM wave propagation in tunnels. Electronics Letters, vol. 35, no. 11, 27 May 1999, pp. 880-882.
- [58] William H. Press, Numerical Recipes. Publ. by the Press Syndicate of the University of Cambridge, Cambridge (MA, USA) 1986.
- [59] B. Rao and L. Carin, A Hybrid (Parabolic Equation)–(Gaussian Beam) Algorithm for Wave Propagation Through Large Inhomogeneous Regions. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. 46, no. 5, May 1998.

- [60] C.M. Rappaport, Perfectly Matched Absorbing Boundary Condition Based on Anisotropic Lossy Mapping of Space. *IEEE Microwave and Guided Wave Letters*, vol. 5, no. 3, March 1995, pp. 90-92.
- [61] C. Rieckmann, M.R. Rayner, C.G. Parini, D.H. Martin and R.S. Donnan, Novel modular approach based on Gaussian beam diffraction for analysing quasi-optical multi-reflector antennas. *IEE Proceedings Microwave Antennas Propagation*, vol. 149, no. 3, June 2002, pp. 160-167.
- [62] H.-O. Ruoss, P.M. Maier, F.M. Landstorfer and G. Villino, Lens antennas for mobile broadband systems in the millimetre-wave range. *Electronics Letters*, vol. 33, no. 18, 28th August 1997, pp. 1510-1512.
- [63] H.-O. Ruoff, Auf der Momentenmethode basierende Berechnungsverfahren zur Untersuchung der Wechselwirkung von Antennen und biologischen Körpern. Dissertation an der Universität Stuttgart, 1998. In: *Berichte aus der Hochfrequenztechnik*, Shaker-Verlag, Aachen 1999.
- [64] P. Schott, L. Lemaître, and O. Pascal, Use of Gaussian beams to compute antenna pattern. *Annales des Télécommunications*, vol. 57, no. 7-8, July-Aug. 2002, pp. 775-797.
- [65] H. Schröder, Anwendung der Methode der gauß'schen Strahlen zur Untersuchung der Schallausbreitung in der bodennahen Atmosphäre. Dissertation an der TU Berlin, Fortschritt-Berichte VDI, Reihe 15, Nr. 121. VDI-Verlag, Düsseldorf 1994.
- [66] H. Shigesawa, The Equivalent Source Method. Chapter 6 of: *Analysis Methods for Electromagnetic Wave Problems*, edited by E. Yamashita. Artech House, Boston, London, 1990.
- [67] A.W. Snyder and J.D. Love, Reflection at a Curved Dielectric Interface — Electromagnetic Tunneling. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 23, no. 1, January 1975, pp. 134-141.
- [68] G. Hugh Song, Transparent boundary conditions for beam-propagation analysis from the Green's function method. *Journal of the Optical Society of America, Part A*, vol. 10, no. 5, May 1993, pp. 896-904.
- [69] D.M. Sullivan, *Electromagnetic simulation using the FDTD method*. IEEE Press series on RF and microwave technology, New York, 2000.
- [70] H. Zhao, Berechnung von zweidimensionalen Linsenantennen mit der Momentenmethode. Diplomarbeit am Institut für Hochfrequenztechnik der Universität Stuttgart, 1997.

- [71] N. Zhu, Wellenbasierte Feldstärkeprognose in der Navigation und Kommunikation. Habilitationsschrift an der Universität Stuttgart, 2002. In: Berichte aus der Hochfrequenztechnik, Shaker-Verlag, Aachen 2003.

