

Institut für Konstruktionstechnik
und Technisches Design
Universität Stuttgart
Prof. Dr.-Ing. H. Binz

Matthias Beck

**Analyse der Belastung und
Beanspruchung von konischen
Stirnrädern in kreuzender Achslage**

Bericht Nr. 632

Analyse der Belastung und Beanspruchung von konischen Stirnrädern in kreuzender Achslage

Von der Fakultät Konstruktions-, Produktions- und Fahrzeugtechnik
der Universität Stuttgart
zur Erlangung der Würde eines Doktors der
Ingenieurwissenschaften (Dr.-Ing.) genehmigte Abhandlung

vorgelegt von
Dipl.-Ing. Matthias Beck
aus Berlin

Hauptberichter: Prof. Dr.-Ing. Hansgeorg Binz
Mitberichter: Prof. Dr.-Ing. Bernd Bertsche

Tag der mündlichen Prüfung: 22. Januar 2015

Institut für Konstruktionstechnik und Technisches Design
der Universität Stuttgart

2015

D93

ISBN-10: 3-922823-89-0

ISBN-13: 978-3-922823-89-6

Institut für Konstruktionstechnik und Technisches Design

Prof. Dr.-Ing. Hansgeorg Binz

Universität Stuttgart

Pfaffenwaldring 9

D-70569 Stuttgart

Telefon +49 (0)711 685-66055

Telefax: +49 (0)711 685-66219

E-Mail: mail@iktd.uni-stuttgart.de

Für meine Familie.

SO EINE ARBEIT WIRD EIGENTLICH NIE FERTIG,
MAN MUß SIE FÜR FERTIG ERKLÄREN,
WENN MAN NACH ZEIT UND UMSTÄNDEN
DAS MÖGLICHSTE GETAN HAT.

JOHANN WOLFGANG VON GOETHE, ITALIENISCHE REISE, 16. MÄRZ 1787

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit am Institut für Konstruktions-technik und Technisches Design (IKTD) der Universität Stuttgart. Mein Dank gilt meinem Doktorvater Herrn Prof. Dr.-Ing. Hansgeorg Binz für die Betreuung der Arbeit, sein großzügiges Vertrauen und die von ihm gewährten Freiheiten.

Außerdem danke ich Herrn Prof. Dr.-Ing. Bernd Bertsche für die kritische Durchsicht des Manuskripts und die Übernahme des Mitberichts.

Mein besonderer Dank gilt den Kollegen Dipl.-Ing. Matthias Bachmann und Dipl.-Ing. Christopher Traut für die vielen intensiven Fachdiskussionen und das Korrekturlesen der Dissertation. Für die Jagd nach sprachlichen Fehlern danke ich Dipl.-Vw. Michael Beck und Dipl.-Ing. Sabrina Lämmle.

Wesentliche Unterstützung leisteten auch die vielen wissenschaftlichen Hilfskräfte, Studien-, Diplom- und Bachelorarbeiter, die zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben. Insbesondere gilt mein Dank Herrn B. Sc. Simon Matter für die engagierte und konstruktive Mitarbeit am Prüfstand.

Herr Jochen Ziegler aus der Institutswerkstatt unterstützte mich mit Rat und Tat bei der Konstruktion und Fertigung so mancher Bauteile des Prüfstands, dafür danke ich ihm.

Weiter möchte ich mich bei meinen Kollegen am Institut für die angenehme Atmosphäre bedanken. Insbesondere Dipl.-Ing. Markus Wagner hat mit seiner stets freundlichen, hilfsbereiten und gewissenhaften Art, nicht nur in den lustigen Espresso Pausen, dazu beigetragen.

All meinen Freunden danke ich für die Aufmunterung und den Rückhalt in schwierigen Phasen.

Jasmin danke ich für die viele Rücksichtnahme und Unterstützung, den Zuspruch und Ansporn. Sie hat mich stets ermutigt, auch wenn die Tage lang und die Probleme groß waren.

Nicht zuletzt danke ich meiner Familie und meinen Eltern von Herzen. Sie unterstützten mich stets und ermöglichten mir meine Ausbildung. Ihnen verdanke ich viel des bisher Erreichten.

Stuttgart, Juni 2014

Matthias Beck

Inhaltsverzeichnis

| | |
|---|------------|
| Bezeichnungen und Einheiten | VII |
| Grundbegriffe und Begriffsdefinitionen | XI |
| Abstract | XV |
| 1 Einleitung..... | 1 |
| 1.1 Problemstellung | 2 |
| 1.2 Zielsetzung und Struktur der Arbeit | 3 |
| 2 Stand der Technik..... | 6 |
| 2.1 Einordnung und Einsatzgebiete von Beveloidrädern | 6 |
| 2.2 Zahnform von Beveloidrädern..... | 9 |
| 2.2.1 Unterschiede zu Zylinderrädern | 11 |
| 2.2.2 Unterschiede zu Kegelrädern..... | 12 |
| 2.2.3 Zusammenstellung der Unterschiede..... | 13 |
| 2.3 Beanspruchungsermittlung an Zylinderradverzahnungen..... | 15 |
| 2.3.1 Analytisches Verfahren nach DIN 3990 | 15 |
| 2.3.2 Rechnergestützte Optimierungswerkzeuge | 19 |
| 2.4 Beanspruchungsermittlung und Optimierungswerkzeuge für asymmetrische Zylinderradverzahnungen | 22 |
| 2.5 Beanspruchungsermittlung an Kegelrädern..... | 24 |
| 2.5.1 Analytisches Verfahren nach DIN 3991 | 24 |
| 2.5.2 Beanspruchungsermittlung mit BECAL..... | 25 |
| 2.6 Auslegung von Beveloidrädern | 25 |
| 2.6.1 Verzahnungsvorauslegung | 26 |
| 2.6.2 Analytische Beanspruchungsberechnung | 27 |
| 2.6.3 Simulative Beanspruchungsanalyse und Geometrieoptimierung | 28 |
| 2.6.3.1 Erzeugung des Geometriemodells | 29 |
| 2.6.3.2 Beanspruchungsanalyse und Optimierungswerkzeuge..... | 30 |
| 2.7 Zahnfedersteifigkeit | 32 |
| 2.7.1 Allgemeine Definition der Zahnfedersteifigkeit von Zylinderrädern | 33 |
| 2.7.2 Verfahren zur Steifigkeitsermittlung von Zylinderrädern..... | 36 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 2.7.3 | Verfahren nach DIN 3990..... | 37 |
| 2.7.4 | Zahnsteifigkeit asymmetrischer Verzahnungen..... | 38 |
| 2.8 | Fazit zum Stand der Technik | 39 |
| 3 | Konkretisierung der Zielsetzung und Vorgehensweise..... | 42 |
| 3.1 | Konkretisierung der Zielsetzung..... | 42 |
| 3.2 | Vorgehensweise..... | 45 |
| 4 | Beanspruchungsermittlung mittels FE-Simulation | 47 |
| 4.1 | Modellerzeugung..... | 48 |
| 4.2 | Randbedingungen..... | 52 |
| 4.3 | Ergebnisauswertung | 54 |
| 4.4 | Automatisierung des Simulationsablaufs | 56 |
| 4.5 | Validierung der FE-Simulation | 58 |
| 4.5.1 | Untersuchungsraum | 58 |
| 4.5.2 | Einzelergebnisse für die Fußspannung | 59 |
| 4.5.3 | Effektergebnisse des Teilfaktorplans..... | 61 |
| 4.5.4 | Steifigkeitsberechnung | 62 |
| 4.5.5 | Bewertung der Ergebnisse | 64 |
| 4.6 | FE-Analyse von Beveloidrädern..... | 64 |
| 4.7 | Fazit der FE-Simulationsmethode..... | 67 |
| 5 | Zahnfedersteifigkeit von Beveloidverzahnungen..... | 68 |
| 5.1 | Adaption des Verfahrens nach DIN 3990 für Beveloidräder..... | 68 |
| 5.2 | Anpassungsfaktoren für Beveloidräder | 69 |
| 5.2.1 | Einflüsse aufgrund des abweichenden Zahnquerschnitts | 70 |
| 5.2.2 | Einflüsse aufgrund des abweichenden Zahnlängsschnitts | 73 |
| 6 | Analytisches Rechenmodell für Beveloidräder | 79 |
| 6.1 | Grundaufbau | 79 |
| 6.2 | Eingangsgrößen..... | 81 |
| 6.2.1 | Analytische Ermittlung der lastfreien Klaffung | 82 |
| 6.2.2 | Berührlinie auf den Flanken..... | 82 |
| 6.2.3 | Numerische Ermittlung der lastfreien Klaffung | 84 |
| 6.3 | Grundlegende Verzahnungsgeometrie | 85 |
| 6.3.1 | Zahnform..... | 85 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 6.3.2 | Ersatz-Achsabstand | 86 |
| 6.3.3 | Eingriffslinie..... | 87 |
| 6.4 | Verzahnungssteifigkeit..... | 87 |
| 6.5 | Ermittlung der Lastverteilung und tragenden Scheiben | 87 |
| 6.5.1 | Lastverteilung..... | 88 |
| 6.5.2 | Tragende Scheibenpaare..... | 90 |
| 6.6 | Ermittlung der Fußbeanspruchung | 90 |
| 6.7 | Ermittlung der Flankenpressung | 92 |
| 6.8 | Korrekturfunktion für die Berechnung der Breitenlastverteilung..... | 93 |
| 6.9 | Fazit zum analytischen Rechenmodell..... | 96 |
| 7 | Experimentelle Untersuchungen | 97 |
| 7.1 | Versuchskonzept | 97 |
| 7.2 | Prüfverzahnungen | 99 |
| 7.3 | Verzahnungsvermessung | 101 |
| 7.4 | Modifizierter Drehübertragungsprüfstand..... | 102 |
| 7.5 | Versuchsvorbereitung..... | 103 |
| 7.6 | Versuchsplanung..... | 105 |
| 7.7 | Versuchsdurchführung..... | 106 |
| 8 | Validierung der Beanspruchungsanalyse..... | 107 |
| 8.1 | Untersuchung von Zylinderrädern..... | 107 |
| 8.2 | Messungen an Geradverzahnungen..... | 108 |
| 8.2.1 | Messung der Fußspannung | 108 |
| 8.2.2 | Variation des Achswinkels | 111 |
| 8.2.3 | Variation der Last | 112 |
| 8.2.4 | Variation der Tragbildlage | 113 |
| 8.2.5 | Variation der Verzahnungskorrektur..... | 116 |
| 8.3 | Messungen an der Schrägverzahnung | 117 |
| 8.4 | Screening-Simulationen..... | 118 |
| 8.4.1 | Untersuchungsraum..... | 119 |
| 8.4.2 | Effektergebnisse des vollständigen faktoriellen Versuchsplans | 119 |
| 8.4.3 | Erweiterter Untersuchungsraum..... | 121 |
| 8.5 | Diskussion der Ergebnisse | 122 |

| | |
|---|------------|
| 9 Zusammenfassung..... | 125 |
| 10 Ausblick | 128 |
| Literaturverzeichnis..... | 130 |
| Anhang A: Technische Skizzen der Räder | 139 |
| Anhang B: Flankenlinienmessung der Prüfräder | 142 |
| Anhang C: Flussdiagramme der Berechnungen..... | 144 |

Bezeichnungen und Einheiten

Formelzeichen

| Symbol | Einheit | Erläuterung |
|----------------------------------|------------------------|---|
| a | mm | Achsabstand |
| a | --- | Konstante |
| A | --- | Eingriffsbeginn |
| b | mm | Breite |
| B | --- | innerer Einzeleingriffspunkt |
| C | --- | Polynomkonstante, Korrekturfaktor |
| C | --- | Wälzpunkt |
| c' | N/($\mu\text{m mm}$) | Einzelfedersteifigkeit |
| c' _{th} | N/($\mu\text{m mm}$) | theoretische Einzelfedersteifigkeit |
| c _y | N/($\mu\text{m mm}$) | Eingriffsfedersteifigkeit |
| d | mm | Durchmesser |
| D | --- | äußerer Einzeleingriffspunkt |
| E | --- | Eingriffsende |
| F | N | Kraft |
| g _f | mm | Fußeingriffsstrecke |
| g _{α} | mm | Eingriffsstrecke |
| j | --- | Anzahl der tragenden Scheiben |
| K | μm | Klaffung |
| K _{Fβ} | --- | Breitenlastverteilungsfaktor Fuß, bzw. Breitenfaktor |
| K _{Hβ} | --- | Breitenlastverteilungsfaktor Flanke, bzw. Breitenfaktor |
| m | mm | Modul |
| n | --- | Anzahl der Scheiben, der Simulationen |
| N _F | --- | Exponent des Breitenfaktors |
| p _{et} | mm | Stirneingriffsteilung |
| p _t | mm | Stirnteilung |
| q' | ($\mu\text{m mm}$)/N | Nachgiebigkeit |
| r, R | mm | Radius |
| s _y | mm | Zahndicke am Betrachtungsradius r _y |
| T | Nm | Lastmoment |

| Symbol | Einheit | Erläuterung |
|-----------------|----------------|------------------------------|
| T | --- | Tangentenpunkt am Grundkreis |
| U | mm | Verformung |
| u | --- | Zähnezahlverhältnis |
| x | --- | Profilverschiebung |
| Y_F | --- | Formfaktor |
| Y_S | --- | Spannungskorrekturfaktor |
| Y_β | --- | Schrägenfaktor |
| z | --- | Zähnezahl |
| Z_B | --- | Einzeleingriffsfaktor |
| Z_E | --- | Elastizitätsfaktor |
| Z_H | --- | Zonenfaktor |
| Z_n | --- | Ersatzzähnezahl |
| Z_β | --- | Schrägenfaktor |
| Z_ε | --- | Elastizitätsfaktor |

| Symbol | Einheit | Erläuterung |
|----------------------|----------------|---|
| α | ° | Profilwinkel |
| α_{wt} | ° | Betriebseingriffswinkel |
| β | ° | Schrägungswinkel |
| Δ | % | Abweichung |
| ε_α | --- | Profilüberdeckung |
| ε_β | --- | Sprungüberdeckung |
| ζ | --- | Stirnschnitt, von der Zehe aus gemessen |
| θ | ° | Profilverschiebungswinkel |
| σ | MPa | Spannung |
| Σ | ° | Achswinkel |
| φ | ° | Winkel, Winkel der Wälzstellung |

Abkürzungen

| | |
|-------|----------------------------------|
| APDL | ANSYS Parametric Design Language |
| BECAL | Bevel-Gear-Calculation |

| | |
|--------|--|
| BEM | Boundary Element Method |
| DIN | Deutsches Institut für Normung |
| DMS | Dehnungsmessstreifen |
| FEM | Finite-Elemente-Methode |
| FVA | Forschungsvereinigung Antriebstechnik e.V. |
| FZG | Forschungsstelle für Zahnräder und Getriebebau |
| GVZ | Geradverzahnung |
| inv | Involutfunktion |
| LVR | Lastverteilungsrechnung |
| PVK | Profilverschiebungskorrektur |
| SimKoS | Simulationsprogramm zur Optimierung des Zahneingriffs konischer Stirnräder |
| SM | Scheibenmodell |
| SVZ | Schrägverzahnung |
| WNV | Welle-Nabe-Verbindung |
| WS | Wälzstellung |
| ZaKo3D | Dreidimensionale Zahnkontaktanalyse |
| ZKD | Zahnkranzdicke |

Indizes

| Index | Erläuterung |
|--------------|-----------------------|
| A | Anwendung |
| a | Kopfkreis |
| analyt | analytisch |
| b | Grundkreis |
| B | Bezugsprofil |
| Berühr | Berührung |
| Bev | Beveloidrad |
| BS | Standard Bezugsprofil |
| E | Ersatz- |
| erf | erforderlich |
| Erz | Erzeugende |
| F | Fuß, Form |

| Index | Erläuterung |
|--------------|--------------------------------------|
| gem | gemeinsam |
| H | Hertz'sche Pressung, Flankenpressung |
| i | Zählvariable |
| L | links |
| m | Mitte- |
| Mw | Mittelwert |
| n | Normal- |
| opt | optimiert |
| P | Bezugsprofil, zulässige Spannung |
| R | rechts, Radkörper |
| S | Spannung |
| t | tangential |
| th | theoretisch |
| trag | tragend |
| V | Dynamik |
| vorh | vorhanden |
| w | Wälz-, Betrieb- |
| Wälzk | Ersatzwälzkegel |
| Zyl | Zylinderrad |
| 0 | Nenn- |
| 1,2 | Rad 1,2 |

Grundbegriffe und Begriffsdefinitionen

Beveloidräder können aufgrund ihrer Eigenschaften zwischen Stirnrädern und Kegelrädern eingeordnet werden. Wesentliche Begriffe stammen daher auch von beiden Verzahnungstypen ab. Um Missverständnisse zu vermeiden, sind die wichtigsten in dieser Arbeit verwendeten Begriffsdefinitionen nachfolgend zusammengestellt. Sie sind teilweise aus folgenden Normen und Schriften entnommen: [DIN867], [DIN868], [DIN3960], [DIN3971], [ROTH98], [ROTH01], [KLINGELNBERG08], [NIEMANN03], [LINKE10].

Grundlegende Definitionen

Verzahnungsgeometrie:

- Achswinkel: „Der Achsenwinkel Σ eines Radpaares mit sich schneidenden (bzw. synonym kreuzenden) Radachsen ist der Winkel, um den eine der beiden Radachsen über die Wälzachse hinweg geschwenkt werden muss, bis die Achsen zusammenfallen.“ [DIN868, S. 7]
- Beveloidrad: Zahnrad mit evolventischen Flanken im Stirnschnitt und einer über der Breite veränderlichen Profilverschiebung, hergestellt mit zahnstangenartigen Werkzeugen. Wird auch synonym als „konisches Stirnrad“ bezeichnet. In anderer Literatur anzutreffende Begriffe wie „Konusrad“ [ROTH98, S. 231] oder „kegeliges Stirnrad“ [WAGNER93] sind hier nicht verwendet.
- Ersatzwälzkegel: Gedanklicher Wälzkörper der Beveloidverzahnung in schneidender bzw. kreuzender Achslage
- Ferse: Stirnseite mit dem größten Außendurchmesser am Kopf
- Flanke: „Zahnflanken sind diejenigen Teile der Oberfläche eines Zahnes, die sich zwischen dem Kopfmantel- und der Fußmantelfläche befinden.“ [DIN868, S. 7]
- Fuß: Bereiche im Zahnlückengrund mit kleinstem Durchmesser

- Klaffung: Kürzester Abstand der Zahnflanken von Ritzel und Rad der unverformten Verzahnung in einer Wälzstellung
- Kopf: Mantelfläche am Außendurchmesser des Zahns
- Punktewolke: Ansammlung von Punkten, die in definierten Abständen auf der Zahnoberfläche liegen. Die Koordinaten der Punkte sind tabellarisch aufgelistet und in einem maschinenlesbaren Datenformat abgespeichert.
- Stirnschnitt: Schnittfläche des Zahnrades senkrecht zur Rotationsachse. Das Zahnrad kann in beliebig vielen Ebenen geschnitten werden.
- Windschief: Zwei Achsen besitzen keinen gemeinsamen Schnittpunkt.
- Zahnkranzdicke: Radiales Maß im Stirnschnitt zwischen dem Innendurchmesser der Zahnradnabe und dem Fußkreisdurchmesser, [WINTER83, S. 56].
- Zahnradzscheibe: Teilsegment eines Zahnrades, das durch zwei Stirnschnitte auf die Breite b_{Scheibe} begrenzt ist. Das Zahnrad kann aus $n = b/b_{\text{Scheibe}}$ Scheiben bestehen. Die Zahnradzscheibe besitzt per Definition entlang ihrer Breite eine einheitliche geometrische Form.
- Zehe: Stirnseite mit dem kleinsten Außendurchmesser am Kopf
- Zylinderrad: Synonym für Stirnrad, findet hier Verwendung zur deutlicheren Abgrenzung zu Beveloidrädern

Belastung und Beanspruchung:

- Eingriffsfedersteifigkeit: Mittelwert der Einzelfedersteifigkeit im Stirnschnitt während des Abwälzens der Verzahnung.
- Einzelfedersteifigkeit: Steifigkeit eines Zahnpaares im Stirnschnitt
- Lastverteilung: Verteilung der Last pro Breitereinheit entlang der Berührlinie in einer Wälzstellung.

| | |
|---|--|
| Linienlast: | Belastung entlang der Berührlinie in einer Wälzstellung |
| Theoretische Einzelfedersteifigkeit c'_{th} : | Theoretische Steifigkeit eines geradverzahnten Zahnpaars im Stirnschnitt mit Norm-Bezugsprofil |
| Zahnfedersteifigkeit: | „Die Zahnfedersteifigkeit wird definiert als die Zahnnormalkraft im Stirnschnitt, die erforderlich ist, um ein oder mehrere gleichzeitig im Eingriff stehende Zahnpaare mit abweichungsfreier Verzahnung von 1 mm Zahnbreite um 1 μm normal zur Zahnevolvente im Stirnschnitt zu verformen.“ [DIN3990-1, S. 51] |
| Zahnfußspannung: | Größte positive Zugspannung in der Fußkurve eines Zahns im Stirnschnitt unter Last [DIN3990-3, S. 3] |

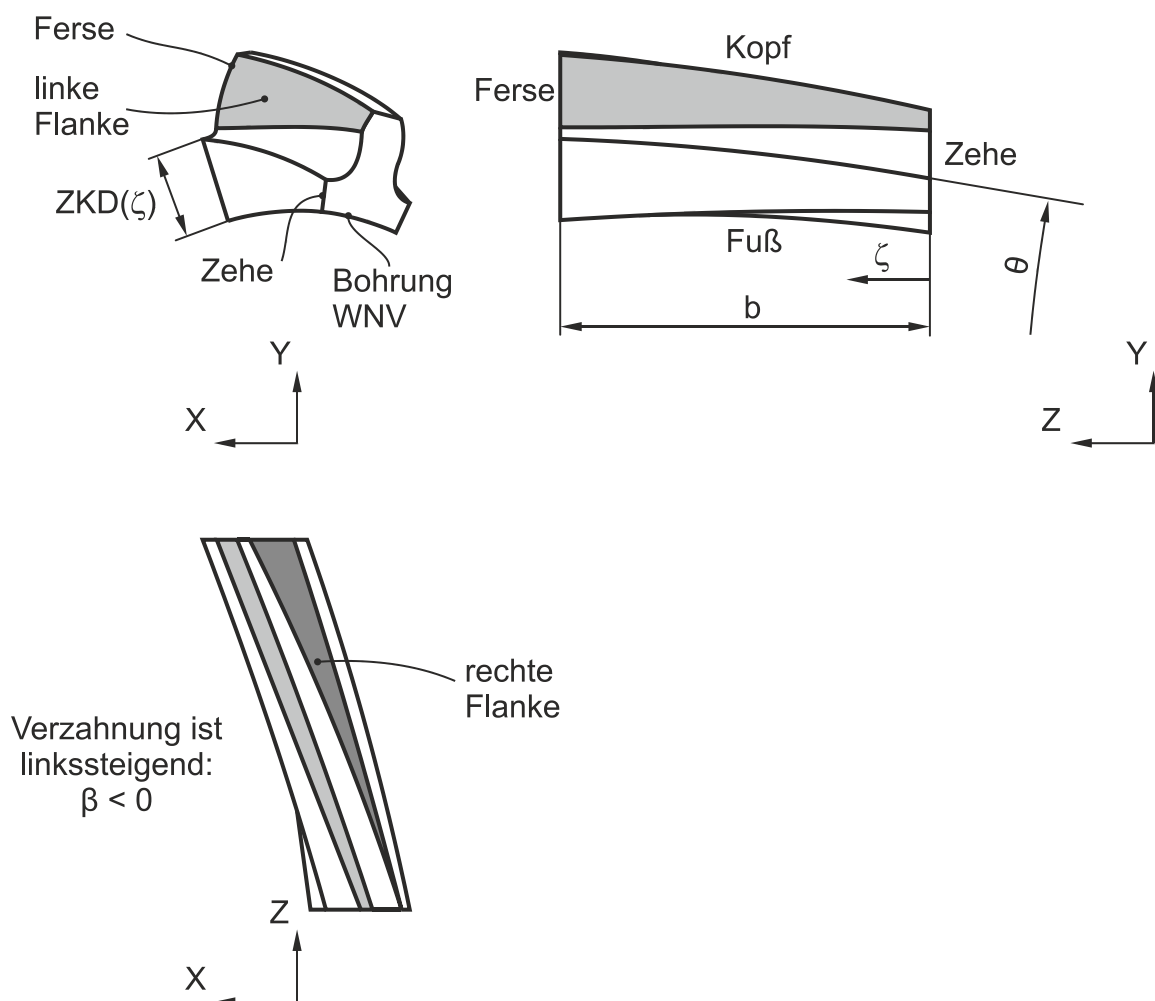


Bild 0.1: Benennungen am Beispiel eines linkssteigenden Beveloidzahns

Konventionen dieser Arbeit

Folgende Konventionen finden in dieser Arbeit Verwendung:

- [LINKE10, S. 93]: „Eine Verzahnung ist rechtssteigend, wenn bei einem auf die Stirnseite gelegten Zahnrad die Flanken nach rechts oben verlaufen. Sie besitzen dann einen positiven Schrägungswinkel“, siehe auch [DIN3960, S. 11].
- Bei rechtssteigenden Verzahnungen sieht man, mit Blickrichtung der Drehachse, die rechte Flanke, [DIN3960, S. 6].
- Es kämmt stets Rechtsflanke mit Rechtsflanke [DIN3960, S. 6].
- Die Blickrichtung verläuft vom Achsschnittpunkt auf die konische Verzahnung [ROTH98, S. 243].
- Beveloidräder sind bei strenger Betrachtung immer Schrägverzahnungen, da sich rechnerisch stets ein Schrägungswinkel ergibt [ROTH98, S. 240], siehe auch Kapitel 2.2, Gleichung (2.3). Es werden in dieser Arbeit nur diejenigen Schrägverzahnungen als solche bezeichnet, bei deren Herstellung das Werkzeugbezugsprofil um den Schrägungswinkel β_P verschwenkt ist.

Abstract

Analysis of the load and stress of beveloid gears with intersecting axes

In this thesis, a numerical and analytical method calculating the load distribution and stresses is presented.

Beveloid gears are a special type of involute gears. They can be produced with the same tools like the well-known involute spur gears. The variable addendum modification along the tooth width results in a conical shape and changing forms of the transverse sections. It is possible to assemble a beveloid gear set with an axis intersection angle up to 20° . Because of the complex tooth geometry, there is point contact between the flanks of meshing gears. This causes a non-uniformed load distribution over the tooth width and results in high stresses. The contact conditions are comparable to bevel gears.

For these reasons, load carrying calculation methods of other gear types cannot be transferred to beveloid gears easily. Finite-element software is a possible way for calculating stresses of any complicated geometry. The FE-method is able to consider the complex tooth form of beveloid gears fundamentally. The disadvantages of the finite-element method are the demands for a high-quality model and the time consumption for preparation, calculation and interpretation of the analysis. Due to this, the simulation of beveloid gears is expensive and the use of that gear type is less common than spur gears or bevel gears. For a calculation of the load distribution and stresses of beveloid gears without using expensive computer power, an easy analytical method is needed. An approach for that is presented in this thesis.

First, a high-quality structural mechanics analysis for defining and validating the analytical approach was needed. This was realized by using the finite-element method. Therefore, the “simulation program for conical spur gears SimKoS” of the Institute for Engineering Design and Industrial Design (IKTD) of the University of Stuttgart was extended to an interface to the FE-program “ANSYS”. The problem of much time consumption in pre- and post-processing was solved by an automation of the workflow using the programming language “APDL”. The model building was not done by importing data from a CAD tool, but it took place directly within the FE-program. Proceeding

that, a higher model quality and reduced amount of time could be achieved. A FE-model is generated within a few minutes.

The simulation procedure was tested with a set of involute spur gears and helical gears. For validating the calculation of the tooth root stress, a screening test setup was deployed. The results of the simulations were compared to the ones of the analytical approach according to the German standard [DIN3990]. The comparison of the results showed minor differences and only small effects. For validating the stiffness calculation procedure, a parameter variation was conducted. It also showed a good accordance between the FEM and [DIN3990].

With the FE-simulation, the stiffness of beveloid gears was investigated systematically. It showed some differences compared to the stiffness of spur gears. The influence of the different transverse section of helical beveloid gears is negligible. Not, however, the influences of the change in tooth form along the width. For an easy way to calculate the stiffness of beveloid gears, an analytical approach based on [DIN3990] was defined. Therefore adapting factors were defined considering the geometrical differences to spur gears.

An analytical approach was derived for calculating the load distribution and tooth root of beveloid gears in intersectional axes arrangement. The three dimensional beveloid gears were simplified to a set of thin cylindrical involute spur gear disks within this approach, Figure 1. Due to the characteristic discretization, the approach can be named as disk model.

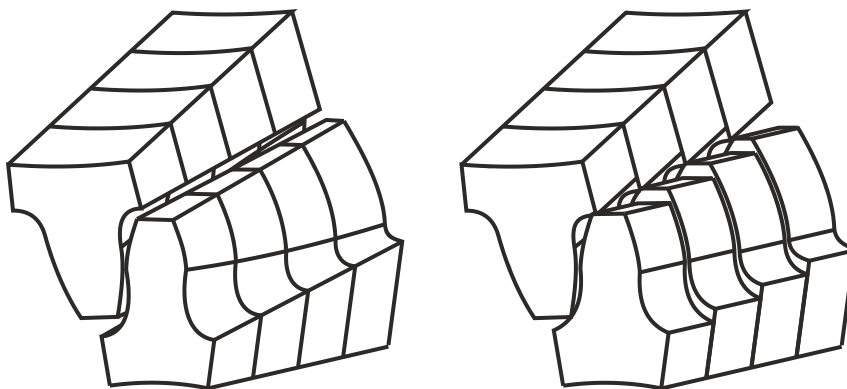


Figure 1: Beveloid gear set (left), substitution with disks of cylindrical involute spur gears (right)

Input data for the model were the main gear set data, the loads and the load free gaping. The model includes an analogy with springs for calculating the load distribution over

the tooth width. For the spring hardness, the tooth stiffness was adopted. The calculation of the tooth root stress was performed with the approach according to [DIN3990] and the determined load distribution factors. A use of computer programs was not required. The disk model calculates the highest tooth root stress of the gear set. It neither investigates the whole plane of action nor runs a locally stress calculation.

The validation of the disk model contains three steps. First, cylindrical involute spur gears were investigated to check the transfer of the approach according to [DIN3990] into the model. Second, the tooth root stresses were measured on six different beveloid gear sets and the results were compared to theoretical and numerical calculations. Third, a large amount of theoretical beveloid gear sets was investigated with the FEM and the disk model.

For the experimental second step of the validation, a set of beveloid gears was produced. The whole teeth were measured with a three dimensional measurement machine to consider the exact geometry within the FE-simulations. Strain gauges (DMS) were applied to the tooth root fillet in the middle of the tooth width. In the test bench, the tooth root stress under load was recorded and the contact pattern photographed. Within the experimental investigations, the axes intersection angle, the load, the applied flank modifications, the position of the contact pattern and the helical angle were the varied parameters. The difference between the measured values and the theoretical results of the FEM and the disk model was calculated. The disk models showed a difference to the measurement up to 9 %. The deviations of the FE-results were slightly smaller.

The third step in the validation consists of theoretical calculations. A full-factorial screening test setup was executed. The four regarded factors with influence on the shape of the transverse sections and the stresses were the axis intersection angle, the helical angle, the ratio and the radius of the tooth root fillet. The parameters were varied and the differences between the disk model and the FE were calculated. It was found that the axis intersection angle has no significant impact on the quality of the results. The differences rose with increasing the helical angle. Up to a helical angle of 20°, the difference was about 11 %.

The presented numerical and analytical calculation methods help the designer directly and methodically in the gear design process. The disk model calculates important parameters like the load distribution along the tooth width and the tooth root stress. The

results can be used in a load carrying calculation analysis according to [DIN3990]. This procedure is suitable for beveloid gear sets, focusing on use with high moments. For applications with more requirements, such as low noise generation, the disk model delivers an additional criterion for possible design variants. The procedure of designing is more structured and methodical by using the disk model.

Aufgrund des zu Stirnrädern identischen Herstellungsprozesses werden Beveloidräder oft als konische Stirnräder bezeichnet. Zur deutlicheren Unterscheidung werden die bekannten zylindrischen Stirnräder in dieser Arbeit als Zylinderräder bezeichnet.

1.1 Problemstellung

Die Auslegung von Verzahnungen dient im Allgemeinen dem rechnerischen Nachweis der Ertragbarkeit auftretender Beanspruchungen und der Optimierung des Betriebsverhaltens beispielsweise bezüglich der Schwingungsanregung. Zu diesen Themen wurde für Zylinder- und Kegelräder eine Reihe von analytischen Methoden entwickelt. Aufgrund der zu diesen Zahnradtypen unterschiedlichen Zahnform und Einbausituation der Beveloidräder können die anerkannten analytischen Auslegungsmethoden nicht ohne Weiteres auf Beveloidräder angewandt werden.

Die Adaption von Spezialsoftware mit höherwertigen Berechnungsansätzen zur Auslegung von Zylinder- oder Kegelrädern für eine Anwendung auf Beveloidräder findet derzeit statt [BRECHER13B], [SCHLECHT13B]. Die Software wird nach ihrer Fertigstellung nicht frei zugänglich sein. Andere simulative Berechnungsansätze zur Beanspruchungsermittlung, wie etwa die Finite-Elemente-Methode (FEM), können grundsätzlich die geometrischen Besonderheiten von Beveloidverzahnungen berücksichtigen. Ihr Einsatz ist zeit- und rechenintensiv und eignet sich daher wenig für Variantenrechnungen im industriellen Umfeld.

Allen computergestützten Rechenverfahren gemein ist ein erhöhter Aufwand zur Durchführung einer Berechnung. Dieser Aufwand kann zum Beispiel aus den notwendigen Spezialkenntnissen, Lizenzkosten oder dem erforderlichen Bedienungsaufwand resultieren. In Tabelle 1.1 sind einige dieser Aufwände zusammengestellt und in Bild 1.2 deren Summe visualisiert.

| Aufwand für Personal | Infrastruktur |
|--|---|
| <ul style="list-style-type: none">• Grund-, Fach-, Spezialkenntnisse• Schulungsaufwand• Arbeitszeit für die Anwendung• Arbeitszeit für die Auswertung und Nutzbarmachung der Ergebnisse• Arbeitsaufwand zur Pflege der Infrastruktur | <ul style="list-style-type: none">• Hardware Beschaffung• Hardware Erhaltung• Software Lizenzkosten• Betriebskosten• Rechenzeit |

Tabelle 1.1: Aufwände für die Nutzung von höherwertigen Zahnradauslegungsverfahren

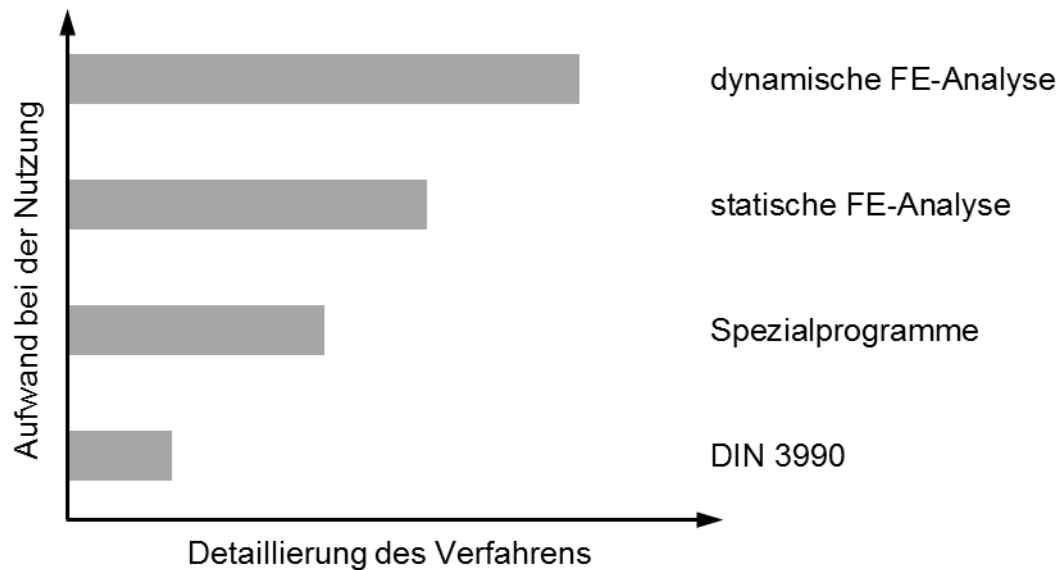


Bild 1.2: Aufwand strukturmechanischer Auslegungsmethoden für Zylinderräder

Zusammengefasst kann festgestellt werden, dass es derzeit keine einfachen analytischen Auslegungsverfahren für Beveloidräder gibt, höherwertige Rechenverfahren wie die FEM sehr aufwändig sind und angepasste Spezialsoftware nicht verfügbar ist. Die Auslegung einer Beveloidstufe erscheint daher derzeit nur für Einsatzgebiete lohnenswert, in denen entweder hohe Stückzahlen oder bauliche Vorteile realisiert werden sollen, sodass die beschriebenen Aufwände für die Verzahnungsauslegung in Kauf genommen werden.

1.2 Zielsetzung und Struktur der Arbeit

Die kreuzende Achslage von Beveloidverzahnungen bietet gegenüber der parallelen Achslage eine größere Flexibilität in der Anordnung des Antriebsstrangs und ist damit ein wesentlicher Vorteil dieser Zahnradart. Eine verbreitete Anwendung von Beveloidverzahnungen, vor allem in Produkten kleinerer und mittlerer Unternehmen, erfordert einfach anwendbare Auslegungsverfahren. Im Rahmen dieser Arbeit soll daher eine Methode entwickelt werden, mit der die Belastung und Beanspruchung von Beveloidrädern in kreuzender Achslage ermittelt werden kann. Um eine einfache Anwendung der Methode zu gewährleisten, soll auf das Lösen komplexer Gleichungen und die Zuhilfenahme von aufwändigen Computerprogrammen zur Spannungsermittlung verzichtet werden.

Die Vorteile einer solchen Methode sind vielfältig. Die auftretenden Beanspruchungen können direkt analytisch bestimmt werden und in einen anschließenden Tragfähigkeits-

nachweis einfließen. Somit ist eine Auslegung der Verzahnung möglich, beispielsweise für Stellantriebe. Zeigt die Untersuchung der gewählten Verzahnungsdaten erhöhte Beanspruchungen, kann daraus die Notwendigkeit zur Aufbringung von Flankenmodifikationen abgeleitet werden. Soll die Konstruktion mit höherwertigen Rechenverfahren für hohe Leistungen weiter optimiert werden, können vor der Durchführung zeit- und rechenintensiver Computersimulationen mit der Methode ungünstige Verzahnungsvarianten identifiziert und vom weiteren Vorgehen ausgeschlossen werden. Es ergibt sich eine Beschleunigung des Auslegungsprozesses.

Da Beveloidverzahnungen geometrisch und kinematisch zwischen Zylinder- und Kegelrädern einzuordnen sind und für beide Verzahnungstypen zum Teil leicht unterschiedliche Begrifflichkeiten existieren, sind zu Beginn die in dieser Arbeit verwendeten Begriffe und Konventionen erläutert. Im Kapitel zum Stand der Technik werden Auslegungsmethoden für Zylinder- und Kegelräder umrissen und erläutert, warum sie nicht auf Beveloidräder anwendbar sind. Daraus resultiert die Konkretisierung der Zielsetzung der Arbeit sowie der Vorgehensweise in Kapitel 3. Der zu definierende Berechnungsansatz für die Ermittlung der Beanspruchung von Beveloidverzahnungen bedarf der Validierung anhand einer Vielzahl unterschiedlicher Verzahnungsdaten. Dazu wird eine Simulationsmöglichkeit für Beveloidräder unter Zuhilfenahme der FEM geschaffen. Die Beanspruchungsermittlung mittels Simulation ist in Kapitel 4 beschrieben. Die Zahnfedersteifigkeit von Beveloidrädern wird in Kapitel 5 untersucht und eine Berechnungsmethode dafür vorgestellt. Sie geht in ein analytisches Rechenmodell für Beveloidräder ein, welches in Kapitel 6 hergeleitet wird. Das Vorgehen zur experimentellen Bestätigung der Ergebnisse ist in Kapitel 7 beschrieben. In Kapitel 8 sind Ergebnisse aus den analytischen, numerischen und experimentellen Untersuchungen gegenübergestellt. Abschließend folgen eine Zusammenfassung und ein Ausblick. Die Struktur der Arbeit ist in Bild 1.3 dargestellt.

Diese Arbeit basiert teilweise auf veröffentlichten Beiträgen des Autors: [BECK10], [BECK11A], [BECK11B], [BECK11C], [BECK12A], [BECK12B], [BECK13].

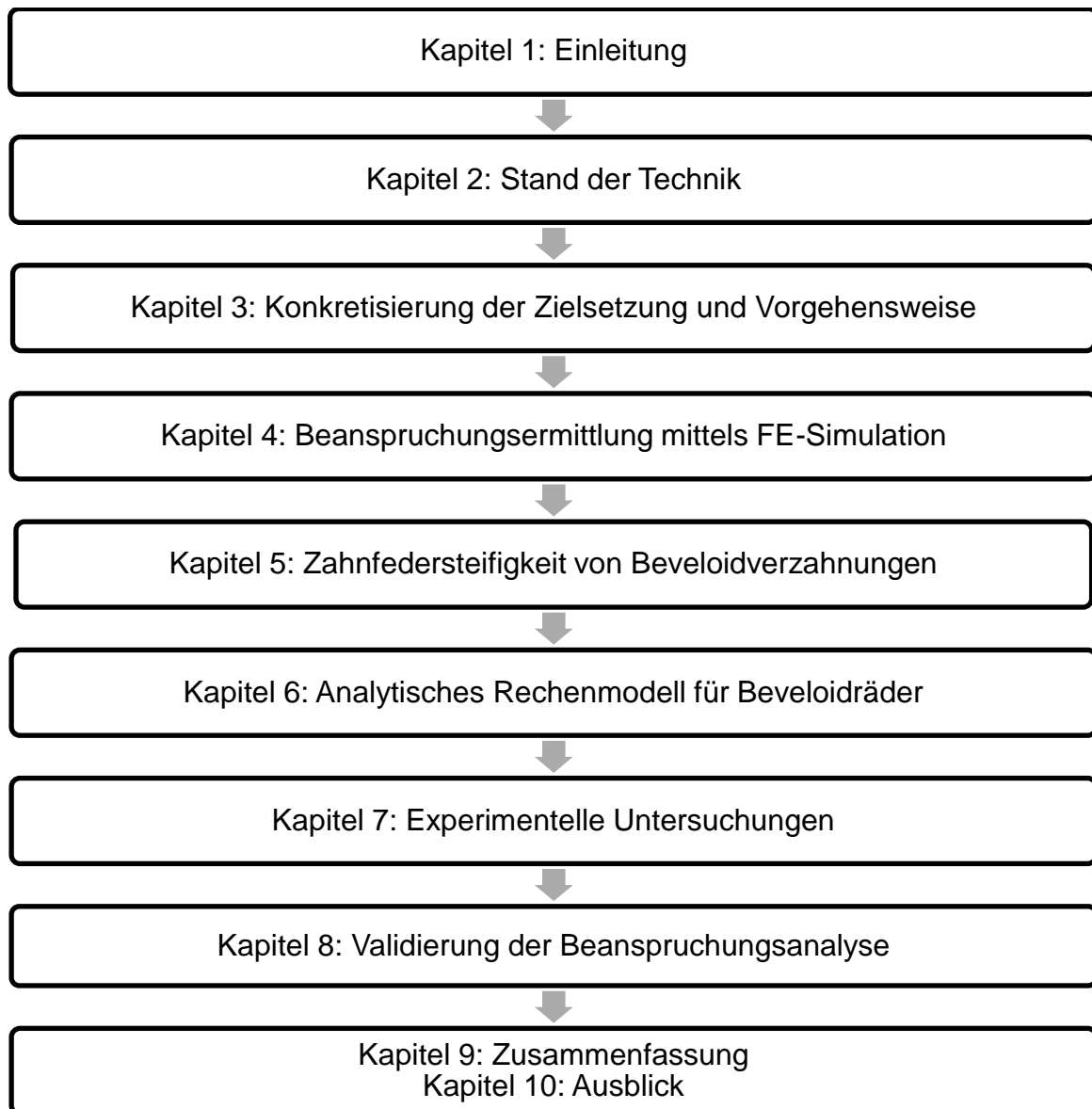


Bild 1.3: Struktur der Arbeit

2 Stand der Technik

In dieser Zusammenstellung zum Stand der Technik sind die geometrischen Besonderheiten von Beveloidrädern und ihre Unterschiede zu anderen Zahnformen beschrieben. Die wesentlichen Methoden zur Bestimmung der Beanspruchung und Zahnfedersteifigkeit von Zylinder- und Kegelrädern sind aufgeführt. Außerdem ist der Stand der Technik zur Auslegung von Beveloidrädern dargestellt.

2.1 Einordnung und Einsatzgebiete von Beveloidrädern

Roth [ROTH98, S. 231 ff] hat die wesentlichen Merkmale von Beveloidrädern zusammengefasst, die nachfolgend wiedergegeben sind. Beveloidräder ermöglichen die Bildung von drei grundlegenden Achslagen, siehe Bild 2.1.

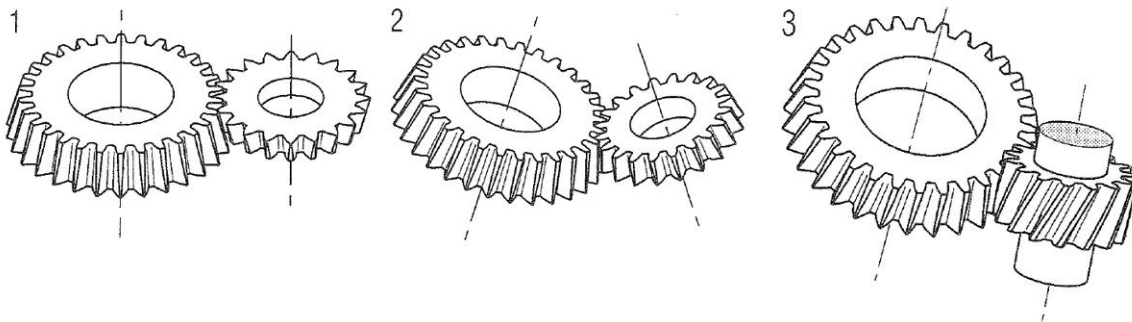


Bild 2.1: Mögliche Achslagen von Beveloidverzahnungen: 1) parallel, 2) kreuzend bzw. schneidend, 3) windschief [ROTH98, S. 231]

Die Getriebeeingangs- und Ausgangswellen können analog zu Zylinderradpaarungen parallel verlaufen, siehe 1) in Bild 2.1. Die zweite Möglichkeit stellt eine kreuzende Achslage dar, dabei schneiden sich die Achsen in einem kleinen Achswinkel von bis zu 20° , 2) in Bild 2.1. Die dritte mögliche Achslage ist eine windschiefe Anordnung, bei der kein Schnittpunkt der Achsen auftritt, 3) in Bild 2.1. Diese vielfältigen Möglichkeiten verschiedener Achslagen sind mit keiner anderen Zahnform darstellbar, siehe auch Tabelle 2.1.

Im Fall einer parallelen Achslage kann durch axiale Verschiebung eines Rades das Zahnspiel eingestellt werden. Dadurch wird bei einer Änderung der Momentenrichtung der entstehende Ruck minimiert und die stoßartige Belastung abgemildert. Diese spielarmen Getriebe werden beispielsweise in Roboterantrieben eingesetzt, [HÖHN11, S. 62], siehe auch Bild 2.2.

| Zahnrad | Achslage | Achswinkel | Achsabstand |
|----------------|------------|---|-----------------------------|
| Zylinderräder | parallel | $\Sigma = 0^\circ$ | in weiten Bereichen möglich |
| Beveloidräder | parallel | $\Sigma = 0^\circ$ | in weiten Bereichen möglich |
| | kreuzend | $\Sigma = 0^\circ \dots 20^\circ$ | nicht vorhanden |
| | windschief | $\Sigma = 0^\circ \dots 20^\circ$ | in weiten Bereichen möglich |
| Kegelräder | kreuzend | $\Sigma = \text{ca. } 30^\circ \dots 150^\circ$ | nicht vorhanden |
| Hypoidräder | windschief | $\Sigma = \text{ca. } 30^\circ \dots 150^\circ$ | klein |
| Schneckenräder | windschief | $\Sigma = 90^\circ$ | in weiten Bereichen möglich |
| Kronenräder | kreuzend | $\Sigma = \text{ca. } 30^\circ \dots 150^\circ$ | klein |

Tabelle 2.1: Eigenschaften verschiedener Verzahnungstypen, in Anlehnung an [ROTH01, S. 9]



Bild 2.2: Beispiel für eine Beveloid-Planetenstufe in einem Roboterantrieb [HÖHN11, S. 62]

Beveloidverzahnungen in kreuzender oder windschiefer Achslage finden beispielsweise in Schiffsgetriebenen Verwendung [WINKLER02, S. 15]. In Schiffen mittlerer Leistung kann mithilfe des Achswinkels die Propellerwelle schräg unter die Wasserlinie geführt werden, wobei der Schiffsdiesel nicht verkippt, sondern horizontal eingebaut ist [SCHIMPF96B]. Ein in den letzten Jahren wachsendes Einsatzfeld von Beveloidverzahnungen liegt bei Kfz-Getrieben. Durch Ausführung eines Achswinkels kann die Getriebeausgangswelle kompakter positioniert und eine günstigere Bauraumausnutzung erzielt werden [ALXNEIT10, S. 3]. Börner [BÖRNER05B, S. 35] beschreibt beispielsweise die Konstruktion eines Getriebes, in dem die Rückführung des Moments

vom Getriebeausgang des längs eingebauten Getriebes zur Vorderachse mit einer Beveloidstufe erfolgt. Wegen des Achswinkels kann die Ausgangswelle näher zum Getriebe angeordnet werden, der gewonnene Bauraum wird unter anderem für eine vergrößerte Beinfreiheit des Beifahrers genutzt, siehe Bild 2.3.

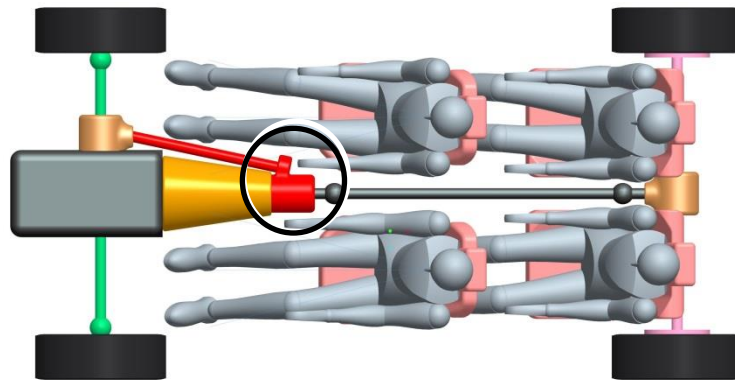


Bild 2.3: Antriebsstrang eines Allradfahrzeugs mit Beveloidstufe am Getriebeausgang (symbolisch) [ALXNEIT10, S. 3]

In Vielstufen-Industriegetrieben fanden Beveloidverzahnungen auch schon früher Verwendung [SCHÄFER64, S. 5]. Durch Kuppeln unterschiedlicher Zahnradpaare einer verkippt verlaufenden Mittelwelle ergeben sich verschiedene Übersetzungen des Schaltgetriebes. Die Anordnung der Wellen im Getriebe sind windschief, siehe Bild 2.4.

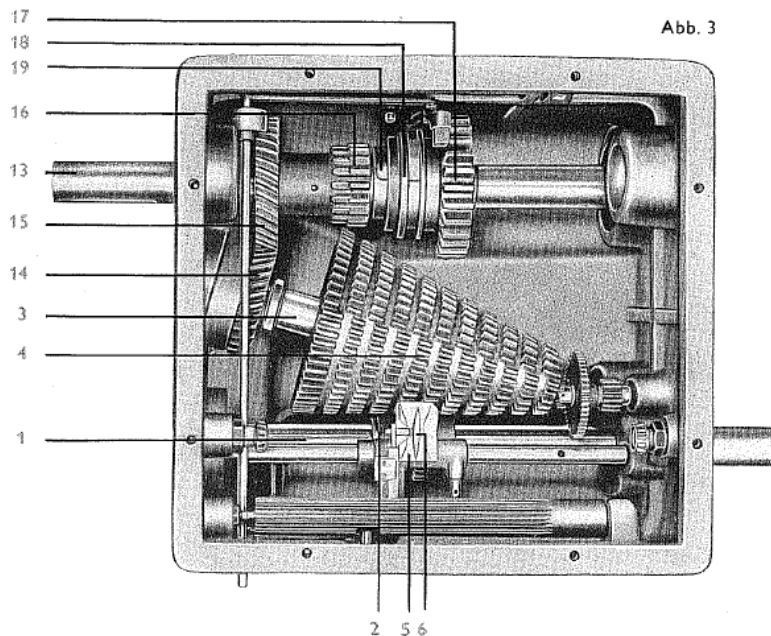


Bild 2.4: Vielstufen-Industriegetriebe der Firma C. H. Schäfer [SCHÄFER64, S. 8]

Weitere Anwendungsbeispiele von Beveloidrädern sind beispielsweise in [ALXNEIT10, S. 9] aufgeführt.

2.2 Zahnform von Beveloidrädern

Die grundlegenden geometrischen Eigenschaften der Beveloidradpaarung in paralleler Achslage beschreibt Zierau [ZIERAU89] und den allgemeinen Fall von kreuzender und windschiefer Achslage Roth [ROTH98]. Die nachfolgenden Zusammenhänge sind aus [ROTH98, S. 231 ff] entnommen. Außenverzahnte Beveloidräder können mit den gleichen zahnstangenartigen Werkzeugen wie die häufig verwendeten Zylinderräder hergestellt werden. Das Werkzeug ist dabei um den Profilverschiebungswinkel θ verkippt. Daraus resultiert eine über der Breite linear ansteigende Profilverschiebung und eine konische Außenform, sie ist in Bild 2.5 deutlich zu erkennen. Der Profilverschiebungswinkel ist über der Breite direkt am Fußkreisdurchmesser messbar. Auch der Kopfmantel der Verzahnung ist konisch, der ausgeführte Winkel kann sich aber wegen aufgebrachtener Kopfkreis Korrekturen vom Profilverschiebungswinkel unterscheiden. [ROTH98, S. 231 ff]



Bild 2.5: Geradverzahntes Beveloidrad mit Profilverschiebungswinkel $\theta = 11^\circ$

Aufgrund der Herstellung mit geradflankigen Werkzeugen weisen Beveloidräder im Stirnschnitt Evolventen auf, die durch die Profilwinkel $\alpha_{tL,R}$ charakterisiert sind. Das verkippte Werkzeug bewirkt im Vergleich zu Zylinderrädern eine Änderung der Profilwinkel, des Grundkreisdurchmessers und zahlreicher weiterer Kenngrößen, woraus sich die Unterschiede der Stirnschnitte beider Zahnradarten ergeben.

Ist das Werkzeug zusätzlich um den Schrägungswinkel β_P verschwenkt, entstehen schrägverzahnte Beveloidräder. Beveloidräder sind bei strikter Betrachtung immer

Schrägverzahnungen, da sich nach Gleichung (2.3) auch bei $\beta_P = 0^\circ$ stets Schrägungswinkel ergeben [ROTH98, S. 240]. Es werden in dieser Arbeit nur die Schrägverzahnungen als solche bezeichnet, bei deren Herstellung das Werkzeugbezugsprofil um den Schrägungswinkel β_P verschwenkt ist. In diesem Fall ergeben sich für Links- und Rechtsflanke unterschiedliche Profilwinkel und Grundkreisdurchmesser, der Stirnschnitt ist asymmetrisch. Das obere Vorzeichen in den Gleichungen (2.1) und (2.3) gilt für Linksflanken, das untere für Rechtsflanken. [ROTH98, S. 231 ff]

$$\tan(\alpha_{tL,R}) = \tan(\alpha_t) \cdot \cos(\theta) \pm \tan(\beta_P) \cdot \sin(\theta) \quad (2.1)$$

$$d_{bL,R} = d \cdot \cos(\alpha_{tL,R}) \quad (2.2)$$

$$\tan(\beta_{L,R}) = \mp \tan(\alpha_t) \cdot \sin(\theta) + \tan(\beta_P) \cdot \cos(\theta) \quad (2.3)$$

Neben diesen, die Stirnschnitte betreffenden Auswirkungen der Herstellung, ergeben sich weitere besondere Eigenschaften von Beveloidrädern. Die Zahnform unterscheidet sich wegen der veränderlichen Profilverschiebung über der Breite sehr deutlich von anderen Zahntypen. So sind in jedem Stirnschnitt die Zahnfußkurve, die Fußdickensehne und die Mächtigkeit des Zahngrundkörpers unterschiedlich. Die Zahnbreite von Beveloidrädern ist durch die geometrischen Grenzen zur Vermeidung von Unterschnitt und zu spitzen Zähnen, diese Grenze wird auch als Spitzgrenze bezeichnet, eingeschränkt. Die Maximalbreite ist somit eine Funktion unter anderem des Profilverschiebungswinkels. Der Grundkreis und die Teilung sind in jedem Stirnschnitt gleich, daher weisen Beveloidräder Grund- und Teilzylinder auf. [ROTH98, S. 231 ff]

Aus den in Bild 2.1 dargestellten möglichen Achslagen parallel, kreuzend und windschief ergeben sich unterschiedliche kinematische Zusammenhänge bezüglich des Eingriffsfelds. [ROTH98, S. 231 ff]

Die Eingriffssituation von Beveloidrädern in paralleler Achslage ist in [ROTH98, S. 261 ff] ausführlich beschrieben. In dieser Achslage sind die Kegel beider Räder gegensinnig angeordnet. Sie weisen den gleichen Profilverschiebungswinkel mit unterschiedlichen Vorzeichen auf und die gedanklichen Wälzkörper sind Zylinder. Die Tangentialebene an beide Grundzylinder spannt die Eingriffsebene auf. Wegen der Konuswinkel an beiden Zahnköpfen ergibt sich ein angenähert trapezartiges Eingriffsfeld. Die Verzahnung ist konjugiert und es besteht Linienkontakt der Zahnflanken, die Verzahnung trägt über der gesamten Zahnbreite. Die genaueren geometrischen Zusammenhänge können [ROTH98, S. 262] entnommen werden.

In kreuzender Achslage sind die Kegel beider Räder gleichsinnig orientiert und die Profilverschiebungswinkel in der Regel unterschiedlich. Die Grundzylinder stehen um den Achswinkel verkippt zueinander und die Form der Wälzkörper sind Kegel [TRAUT11A, S. 219]. Die Gestalt des Eingriffsfelds ist Gegenstand aktueller Untersuchungen. Die Verzahnung ist nicht konjugiert, sodass eine Klaffung zwischen den Flanken von Rad und Gegenrad entsteht [ROTH98, S. 254]. In diesem Fall spricht man von einer punktförmigen Berührung, da das Tragbild auf einen kleinen Bereich konzentriert ist. Dies führt an der Flanke und am Fuß zu einer Beanspruchungskonzentration [BECK11B, S. 224]. Durch gezielte Änderung der Profilverschiebung und der Profilverschiebungswinkel kann die Lage des Tragbilds verändert werden [WAGNER93, S. 92 FF]. Man spricht dann von einer Profilverschiebungswinkelkorrektur. Die Summe der Profilverschiebungswinkel θ ist in der Regel ungleich dem Achswinkel Σ .

Bei windschiefer Achslage ergeben sich im Vergleich zur kreuzenden Achslage komplexere geometrische Verhältnisse des Zahneingriffs, zudem ist diese Achslage wenig gebräuchlich, weshalb im weiteren Vorgehen die Untersuchung auf kreuzenden Achsen konzentriert bleibt.

Die von Zylinderrädern bekannte Notation zur Beschreibung der Verzahnungskenngrößen findet auch für Beveloidräder Verwendung. Tsai [TSAI97] entwickelt demgegenüber eine vereinheitlichte, mathematische Notation zur Beschreibung evolventischer Zahnräder in unterschiedlichen Achslagen. Er leitet die Zahnform von Zylinder-, Beveloid-, Kronen- und Torusrädern von einer allgemeinen vektoriellen Darstellung ab. Diese mathematische Beschreibungsart der Zahnform wird hier nicht verwendet.

2.2.1 Unterschiede zu Zylinderrädern

Die Unterschiede in der Zahnform zwischen Zylinderrädern und Beveloidrädern ergeben sich aus dem Verkippen des zahnstangenartigen Werkzeugs bei der Herstellung, wie dies zuvor beschrieben ist. Die über der Zahnbreite veränderliche Zahnform und, im Fall einer Schrägverzahnung, die asymmetrische Stirnschnittgeometrie sind hier wesentliche Unterschiede. Die verschiedenen Zahnformen sind im Bild 2.6 dargestellt.

Aus den geometrischen Unterschieden ergeben sich für Beveloidräder in kreuzender Achslage grundsätzlich andere Berührungsverhältnisse als bei Zylinderrädern [ROTH98, S. 254]. Der Eingriff findet bei Zylinderrädern über der gesamten Zahnbreite statt. Durch Fertigungsabweichungen und Verformungen der Getriebeteile unter Last

kann es zu einer Fehlstellung der Zähne und damit zu einer Lastkonzentration bis hin zum Kantentragen kommen, was zur Überbeanspruchung führen kann. Mit Flankenmodifikationen, wie zum Beispiel einer Breitenballigkeit, werden die tragende Breite und damit die Empfindlichkeit gegenüber Achslageabweichungen gezielt eingestellt.

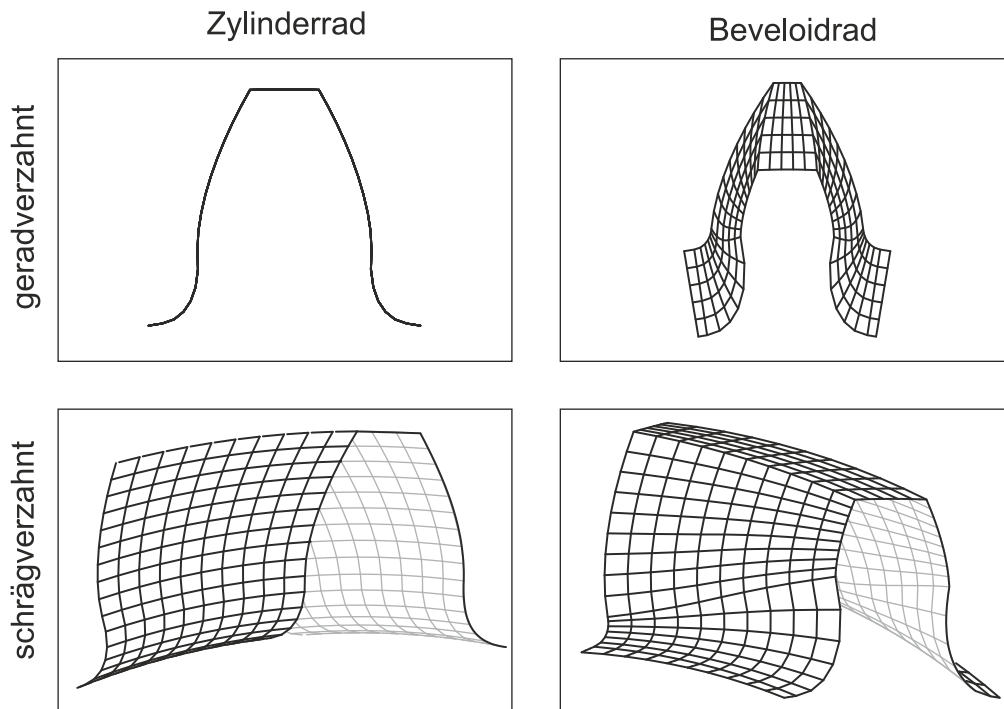


Bild 2.6: Vergleich der Zahnform von Zylinder- und Beveloidrädern

Dem gegenüber sind unkorrigierte Beveloidverzahnungen in kreuzender Achslage nicht konjugiert und weisen eine punktförmige Berührung auf, das Tragbild ist auf kleine Bereiche reduziert [ROTH98, S. 254]. Um das Tragen zu verbreitern, ist beispielweise eine Breitenhohlballigkeit nötig [WINKER02, S. 67].

2.2.2 Unterschiede zu Kegelnrädern

Die geometrischen Grundlagen von Kegelnrädern sind durch Klingelberg [KLINGELNBERG08] zusammengestellt. Daraus sind die nachfolgenden Informationen entnommen. Kegelnräder erhalten ihre konische Form unter anderem aufgrund eines über der Breite ansteigenden Moduls. Da alle Zahnhöhenkennwerte modulabhängig sind, ergeben sich für Kopf-, Teil- und Fußkegel unterschiedliche Werte. Als Folge davon ist die Teilung über der Zahnbreite ebenfalls variabel. Der Stirnschnitt von Kegelnrädern kann asymmetrisch ausgeführt und das Tragbild punktförmig konzentriert sein.

Die exakte Zahnform von Kegelrädern ist vom angewendeten Herstellungsverfahren abhängig. Eine Übersicht der wichtigsten Herstellungsverfahren kann [KLINGELNBERG08, S. 17 ff] entnommen werden.

2.2.3 Zusammenstellung der Unterschiede

In den vorangegangenen Kapiteln sind die Eigenschaften von Beveloidrädern und ihre Unterschiede zu anderen Zahnformen beschrieben. Skizzen der Zahnform entlang der Zahnbreite von Zylinder-, Beveloid- und Kegelrädern sind im Bild 2.7 dargestellt.

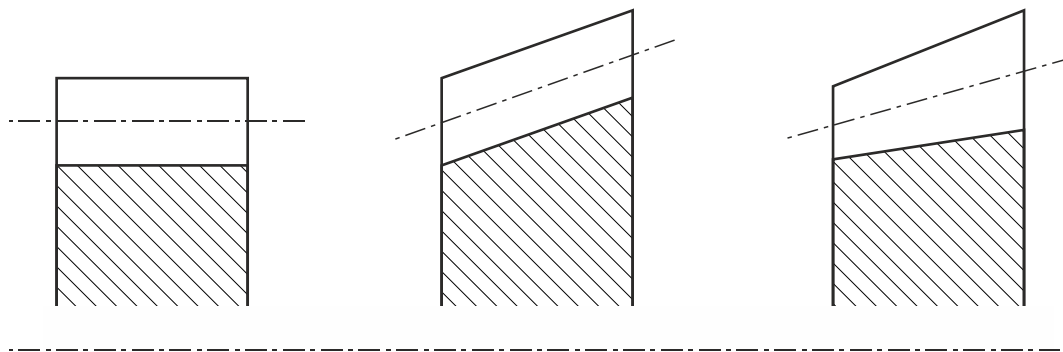


Bild 2.7: Skizzen der Zahnformen über der Zahnbreite, v.l.n.r.: Zylinderrad, Beveloidrad, Kegelrad in Anlehnung an [ROTH98, S. 295]

Ein Überblick über die wesentlichen Unterschiede der Zahnformen ist Tabelle 2.2 zu entnehmen.

| | Zylinderrad | Beveloidrad | | Kegelrad |
|---------------------------------|--------------------|--------------------|----------------------|-------------------------------|
| Zahnform über Breite | konstant | veränderlich | | veränderlich |
| Profilverschiebung über Breite | konstant | veränderlich | | konstant |
| Modul über Breite | konstant | konstant | | veränderlich |
| Teilung über Breite | konstant | konstant | | veränderlich |
| mögliche Achslage | parallel | parallel | kreuzend, windschief | kreuzend (Hypoid: windschief) |
| Stirnschnittlage Rad - Gegenrad | parallel | parallel | verkippt | verkippt |
| Flankenberührung | Linienkontakt | Linienkontakt | Punktkontakt | Punktkontakt Linienkontakt |

Tabelle 2.2: Unterschiede der Zahnformen entlang der Zahnbreite, in Anlehnung an [ROTH01], [ROTH98], [KLINGELNBERG08]

Für die Beanspruchungsermittlung an einer Verzahnung ist insbesondere die Form des Zahnquerschnitts von Bedeutung. Die Unterscheidung zwischen symmetrischer und asymmetrischer Ausführung des Stirnschnitts ist in Tabelle 2.3 aufgeführt.

| Zahnradtyp | Stirnschnitt | |
|---|--------------|--------------|
| | symmetrisch | asymmetrisch |
| Zylinderrad, Bezugsprofil nach [DIN867] | X | |
| asymmetrisches Zylinderrad | | X |
| Kegelrad, entsprechend des Herstellverfahrens | X | X |
| Hypoidrad | | X |
| geradverzahntes Beveloidrad | X | |
| schrägverzahntes Beveloidrad | | X |

Tabelle 2.3: Gestalt der Stirnschnitte verschiedener Zahnformen, in Anlehnung an [ROTH01], [ROTH98], [KLINGELNBERG08]

Die Profilwinkel der anliegenden Flanken beeinflussen unter anderem die Flankenbeanspruchung [DIN3990] und Zahnfedersteifigkeit [LINKE10, S. 202]. Entsprechend der Zahnform, der Profilverschiebungswinkel und der Achsanordnung unterscheiden sich bei Beveloidverzahnungen die Profilwinkel der kämmenden Flanken, Gleichung (2.1). Dies ist in Tabelle 2.4 veranschaulicht.

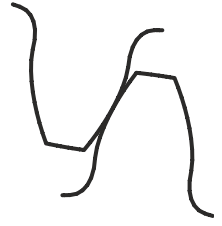
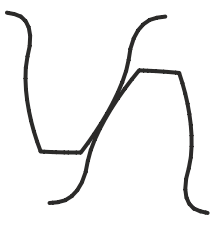
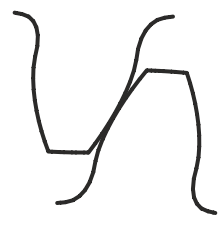
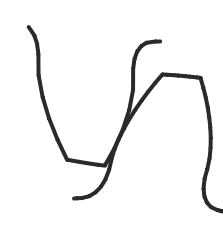
| | Zylinderrad | asym. Zylinderrad | Beveloid, achsparallel | Beveloid, kreuzende Achse |
|--|---|---|--|---|
| Skizze |  |  |  |  |
| Achslage | parallel | parallel | parallel | kreuzend |
| θ_1, θ_2 | $\theta_1 = \theta_2 = 0^\circ$ | $\theta_1 = \theta_2 = 0^\circ$ | $\theta_1 = -\theta_2$ | i.d.R. $\theta_1 \neq \theta_2$ |
| Paarung: α_{t1}, α_{t2} | $\alpha_{t1} = \alpha_{t2}$ | $\alpha_{t1} = \alpha_{t2}$ | $\alpha_{t1} = \alpha_{t2}$ | i.d.R. $\alpha_{t1} \neq \alpha_{t2}$ |
| Zahn: α_{tL}, α_{tR} | $\alpha_{tL} = \alpha_{tR}$ | $\alpha_{tL} \neq \alpha_{tR}$ | GVZ: $\alpha_{tL} = \alpha_{tR}$ SVZ: $\alpha_{tL} \neq \alpha_{tR}$ | GVZ: $\alpha_{tL} = \alpha_{tR}$ SVZ: $\alpha_{tL} \neq \alpha_{tR}$ |
| β_1, β_2 | $\beta_1 = -\beta_2$ | $\beta_1 = -\beta_2$ | $\beta_1 = -\beta_2$ | $\beta_1 = -\beta_2$ |

Tabelle 2.4: Gegenüberstellung der Profilverschiebungs-, Profil- und Schrägungswinkel, in Anlehnung an [ROTH01], [ROTH98], [KLINGELNBERG08]

Aus den in Tabelle 2.1 bis Tabelle 2.4 dargestellten Unterschieden der Zahnformen von Zylinder-, Beveloid- und Kegelrädern kann auf die Gemeinsamkeiten geschlossen

werden. Zwischen Zylinderrädern und Beveloidrädern bestehen Ähnlichkeiten bezüglich der Teilung, des Moduls und der Stirnschnittform. Zu Kegelrädern bestehen Gemeinsamkeiten aufgrund der variablen Zahnform entlang der Breite und der Flankenberührung. Beveloidräder können daher zwischen beiden Verzahnungen eingeordnet werden.

2.3 Beanspruchungsermittlung an Zylinderradverzahnungen

Aufgrund der Ähnlichkeiten der Zahnform und der Art der Flankenberührung werden nachfolgend in Deutschland gebräuchliche Verfahren und Methoden zur Beanspruchungsermittlung von Zylinder- und Kegelrädern hinsichtlich einer Anwendung auf Beveloidräder untersucht. Ein besonderer Schwerpunkt liegt auf der Berücksichtigung einer ungleichmäßigen Lastverteilung entlang der Zahnbreite, da es aufgrund der punktförmigen Flankenberührung von Beveloidrädern zu einer Lastkonzentration kommt [ROTH98, S. 254].

2.3.1 Analytisches Verfahren nach DIN 3990

Der analytische Tragfähigkeitsnachweis von Zylinderrädern gegen Zahnbruch und Grübchenbildung kann nach DIN 3990 [DIN3990] geführt werden, die nachfolgenden Informationen sind daraus entnommen. Dem Rechengang liegt eine ebene Betrachtungsweise zugrunde, da die Eigenschaften der idealisierten Verzahnung entlang der Breite als konstant angenommen sind.

Der dritte Teil der DIN 3990 behandelt den Zahnfußfestigkeitsnachweis, die nachfolgende Darstellung ist auf die darin enthaltene Methode B bezogen. Im Festigkeitsnachweis wird zwischen nomineller und auftretender Zahnfußspannung unterschieden. Die nominelle Zahnfußspannung der fehlerfreien Geradverzahnung wird am Berührungspunkt einer 30° Tangente an die Fußkurve bestimmt, siehe Bild 2.8. Die Verzahnung befindet sich dabei in der Wälzstellung des Einzeleingriffspunkts D, bei dem der Übergang vom Einzeleingriff zum Mehrfacheingriff erfolgt. In diesem Punkt wird die vollständige Last mit dem größten Hebelarm von einem Zahn getragen.

Die Fußbeanspruchung berechnet sich aus der Biege-Nennspannung eines einseitig eingespannten Balkens. Die Umrechnung auf die komplexe Zahnform und die konkrete Zahnfußgeometrie geschieht durch die Multiplikation mit Spannungs- und Formfaktoren, Gleichung (2.4). Der Formfaktor Y_F berücksichtigt den Einfluss der Zahnform des Untersuchungsrad auf die Fußspannung. Durch die Einbeziehung des Eingriffswinkels bei

der Ermittlung von Y_F hängt der Faktor auch von den Größen des Gegenrads und somit von der Radpaarung ab. Der Spannungskorrekturfaktor Y_S berücksichtigt die Kerbwirkung und den komplexen Spannungszustand in der Fußrundung auf die Fußspannung.

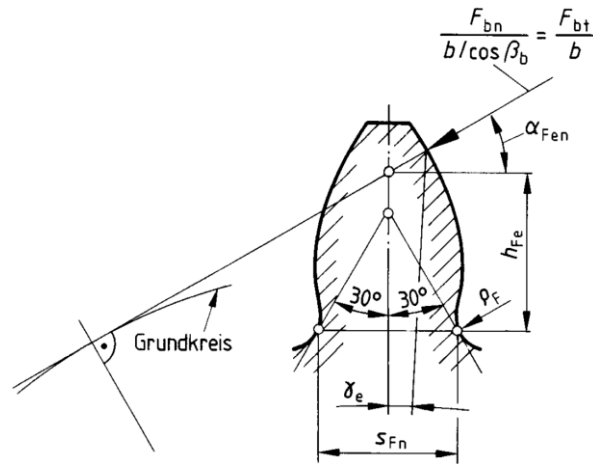


Bild 2.8: Ermittlung der Beanspruchung am Zahnfuß nach [DIN3990, S. 8]

$$\sigma_{F0} = \frac{F_t}{b \cdot m_n} \cdot Y_F \cdot Y_S \cdot Y_\beta \quad (2.4)$$

Aufgrund der ebenen Betrachtung der Geradverzahnung gilt die mit Gleichung (2.4) berechnete Fußspannung für die gesamte Zahnbreite. Eine Unterscheidung verschieden beanspruchter Stirnschnitte findet nicht statt und der höchstbeanspruchte Stirnschnitt wird nicht bestimmt. Dieses Vorgehen stellt insbesondere bei Schrägverzahnungen eine Näherung dar.

Ein weiterführendes Gedankenmodell zur einfachen räumlichen Vorstellung schrägverzahnter Zylinderräder diskretisiert die Geradverzahnung im Normalschnitt in eine Vielzahl feiner Scheiben, die leicht verdreht zueinander eine Schrägverzahnung ergeben. Dieses Gedankenmodell ist in Bild 2.9 dargestellt. Tatsächlich unterscheiden sich die Verzahnungsdaten von Gerad- und Schrägverzahnung in der Realität, sodass diese Modellvorstellung nicht exakt ist. Daher wird die Schrägverzahnung im Rechengang nach [DIN3990] als eine Ersatz-Geradverzahnung angenähert. Die geänderten Verzahnungsdaten sind unter anderem durch den Stirnmodul und die Ersatzzähnezahl berücksichtigt, die ebene Betrachtungsweise bleibt dadurch erhalten.

$$z_n = \frac{z}{\cos^2(\beta_b) \cdot \cos(\beta)} \quad (2.5)$$

$$m_t = \frac{m_n}{\cos(\beta)} \quad (2.6)$$

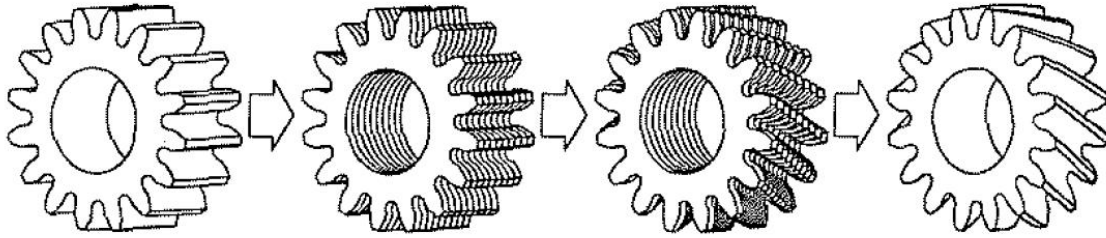


Bild 2.9: Gedankliche Entstehung einer Schrägverzahnung anhand eines Scheibenmodells [STAHL01, S. 8]

Im Gegensatz zu Geradverzahnungen verläuft die Berührlinie bei Schrägverzahnungen schräg über den Zahn. Entlang der Zahnbreite ändert sich unter anderem der Biegehebelarm der Zahnnormalkraft, sodass sich ein ungleichmäßiger Verlauf der Fußspannung einstellt [NIEMANN03, S. 152]. Es ergibt sich daraus für Schrägverzahnungen ein vollständig verändertes Beanspruchungsverhalten als bei Geradverzahnungen [STAHL01, S. 8].

Mit Gleichung (2.4) wird der Maximalwert der Fußbeanspruchung während des Abwälzens bestimmt, er liegt in der Regel nicht in der Radmitte. Nach Niemann [NIEMANN03, S. 152] kann der höchstbeanspruchte Stirnschnitt der Schrägverzahnung angenähert berechnet werden. Falls ein eindeutiges Einzeleingriffsgebiet vorhanden ist, gilt:

$$\zeta_{Niemann} = \frac{p_{et} \cdot b}{g_{\alpha} + \varepsilon_{\beta} \cdot p_{et}} \quad \text{mit } \varepsilon_{\alpha} + \varepsilon_{\beta} < 2 \quad (2.7)$$

Falls kein eindeutiges Einzeleingriffsgebiet vorhanden ist, gilt:

$$\zeta_{Niemann} = \frac{g_{\alpha} \cdot b}{g_{\alpha} + \varepsilon_{\beta} \cdot p_{et}} \quad \text{mit } \varepsilon_{\alpha} + \varepsilon_{\beta} > 2 \quad (2.8)$$

Die beanspruchungserhöhende Auswirkung einer ungleichmäßigen Lastverteilung über der Zahnbreite und in Profilrichtung wird in [DIN3990] mit den Lastverteilungsfaktoren K_{β} und K_{α} berücksichtigt, indem sie mit der Nennspannung multipliziert werden. Der Flanken-Breitenlastverteilungsfaktor $K_{H\beta}$ gibt das Verhältnis der Maximallast zur mittleren Last auf der Flanke in einer Wälzstellung an.

$$K_{H\beta} = \frac{\left(\frac{F}{b}\right)_{max}}{\frac{F_m}{b}} \quad (2.9)$$

Der Faktor beschreibt weder den Verlauf der Lastverteilung, noch den Ort der maximalen Belastung, er ist daher für die Definition von topologischen Flankenmodifikationen

zu ungenau [KUNERT1999, S. 3]. Eine ungleichmäßige Lastverteilung auf der Flanke wirkt sich in etwas abgeschwächter Form auf die Spannungsverteilung am Zahnfuß aus. Dies wird nach [DIN3990] mit dem Fuß-Breitenlastverteilungsfaktor $K_{F\beta}$ berücksichtigt.

$$K_{F\beta} = K_{H\beta}^{N_F} \quad (2.10)$$

Der Tragfähigkeitsnachweis für Zahnbruch wird nach [DIN3990] durch den Vergleich der auftretenden Zahnfußspannung mit einer zulässigen Spannung σ_{FP} geführt. Darin enthalten sind Faktoren für den Anwendungsfall K_A und zur Berücksichtigung der dynamischen Anregung K_V . Für Zylinderräder sind im 5. Teil der Norm eigene Werkstoffkennwerte definiert.

$$\sigma_F = \sigma_{F0} \cdot K_A \cdot K_V \cdot K_{F\beta} \cdot K_{F\alpha} \leq \sigma_{FP} \quad (2.11)$$

Der zweite Teil der Norm behandelt den Tragfähigkeitsnachweis gegen Grübchenbildung, darin ist die Theorie nach Hertz [HERTZ81, S. 156] zugrunde gelegt. Die Zähne sind durch einen linienförmigen Zylinderkontakt mit Ersatzkrümmungsradien angenähert. Auch hierbei werden eine Schrägverzahnung, eine ungleichmäßige Lastverteilung und verschiedene Werkstoffe mit den Faktoren Z_β , Z_H , Z_ϵ , Z_B und Z_E berücksichtigt. Die nominelle Flankenpressung ergibt sich zu:

$$\sigma_{H0} = Z_H \cdot Z_E \cdot Z_\epsilon \cdot Z_\beta \cdot \sqrt{\frac{F_t}{d_1 \cdot b} \cdot \frac{u+1}{u}} \quad (2.12)$$

Der Tragfähigkeitsnachweis der Flankenbeanspruchung ist erfüllt, wenn die auftretende Pressung kleiner der zulässigen Pressung ist.

$$\sigma_H = Z_B \cdot \sigma_{H0} \sqrt{K_A \cdot K_V \cdot K_{H\beta} \cdot K_{H\alpha}} \leq \sigma_{HP} \quad (2.13)$$

Die Norm DIN 3990 ist allgemein anerkannt und findet nicht nur in Deutschland Anwendung [KISSLING00, S. 1]. Sie wurde fast unverändert in die internationale Norm ISO 6336 [ISO6336] übergeführt, zwischen beiden Verfahren bestehen nur geringe Unterschiede [KISSLING00, S. 1], [WESER11, S. 51]. Im amerikanischen Sprachraum existiert zur Auslegung von Zylinderrädern die amerikanische Norm AGMA 2001 [AGMA01]. Kissling vergleicht die amerikanische Norm mit der DIN 3990 [KISSLING00, S. 2]. Er zeigt an Beispielverzahnungen die Unterschiede der ermittelten Fußbeanspruchungen auf und führt dies auf unterschiedlich definierte Faktoren zurück.

Der Rechengang nach DIN 3990 zur Auslegung von Zylinderrädern beinhaltet Vereinfachungen, um eine einfache und direkte Durchführung des Tragfähigkeitsnachweises zu ermöglichen. Dies führt beispielsweise bei großen Profil- oder Sprungüberdeckungen zu deutlichen Unterschieden der Ergebnisse im Vergleich mit genaueren Rechenmethoden [SCHINAGL02, S. 110], [LINKE10, S. 315]. Um die Tragfähigkeit besser ausnutzen zu können, finden rechnergestützte Optimierungswerkzeuge Verwendung.

2.3.2 Rechnergestützte Optimierungswerkzeuge

Der analytische Ansatz nach [DIN3990] ist in zahlreichen Programmen hinterlegt, um dem Konstrukteur ein bewährtes und bedienungsfreundliches Auslegungswerkzeug anzubieten. Beispiele dafür sind „STplus“ [STAHL13A, S. 3] der Forschungsvereinigung Antriebstechnik oder kommerzielle Programme wie etwa „KISSsoft“ [KISSLING00, S. 7] oder „eAssistant“ [GWJ13, S. 135]. Die Programme beinhalten neben dem Norm-Rechengang nach DIN 3990 häufig nicht genormte Erweiterungen [STAHL13A, S. 4]. Der Schwerpunkt der nachfolgenden Zusammenstellung liegt auf simulativen Rechenmethoden, die einen von der DIN 3990 abweichenden Ansatz verfolgen.

Grundsätzlich besteht mit der Finite-Elemente-Methode die Möglichkeit, strukturmechanische Beanspruchungen an beliebigen Körpern zu ermitteln [FRÜHE11, S. 8]. Beispiele für häufig eingesetzte FE-Programme sind „ANSYS“, „NASTRAN“ oder „ABAQUS“. Die Geometrie wird in der FEM in einfache Elemente diskretisiert und für jedes Element sowie dessen Knoten die Verformungen bestimmt. Mit einem linear-elastischen Ansatz können die Beanspruchungen im gesamten Körper ermittelt werden. Eine kinematische Interaktion und Kraftübertragung zwischen mehreren Bauteilen kann mit Kontaktbedingungen erfolgen, wobei eine nichtlineare Kontaktdeformation berücksichtigt wird. Die Berechnungsdurchführung ist somit auch mit der komplexen Geometrie von Verzahnungen und ganzer Rädertriebe möglich [ZIEGLER12].

Der Rechenaufwand und der Speicherplatzbedarf einer Analyse steigen mit der Anzahl der eingesetzten Elemente, zudem ist ein großer Aufwand zur Modellvorbereitung nötig. Die Ergebnisausgabe erfolgt in der Regel nicht in den üblichen Kenngrößen der Verzahnungstechnik. Hierzu ist eine gesonderte Umrechnung der Ergebnisse in fachspezifische Größen erforderlich.

Aus den genannten Gründen eignen sich FE-Simulationen von Verzahnungen wenig für Variantenrechnungen im industriellen Umfeld, wenn nicht besonders hohe Stückzahlen der herzustellenden Verzahnungen oder besondere Umstände den Aufwand rechtferti-

gen. Durch die direkte Berücksichtigung beliebiger Körperformen ist die Anwendung der FEM jedoch insbesondere für die Untersuchung von Zahnradsonderformen oder besonderer Getriebekonstruktionen interessant, wenn kein bisheriger Berechnungsansatz anwendbar ist [FRÜHE11, S. 8]. Aus diesen Gründen findet die FEM auch in derartigen Forschungsvorhaben Verwendung.

Frühe [FRÜHE11] nutzt das kommerzielle FE-Programm „ANSYS“ zur Untersuchung von verlustoptimierten Verzahnungen mit elliptischen Fußkurven. Dazu erstellt er das Modell eines Stirnschnitts und extrudiert die Verzahnung in die Zahnbreite. Über der Zahnbreite veränderliche Flankenmodifikationen bringt er durch Positionsänderungen der Flankenknoten auf. Dieses Modellierungsverfahren ist für Beveloidräder nicht anwendbar, da sich ihre Zahnform entlang der Zahnbreite deutlich ändert. Wang [WANG03] nutzt ebenfalls das FE-Programm „ANSYS“ zur Untersuchung von geradverzahnten Zylinderrädern. Eine Zeitersparnis für den Modellaufbau erreicht er durch die Parametrisierung des Modells und die Verwendung der Programmiersprache „APDL“ [ANSYS09A], siehe auch Kapitel 4. Wang ermittelt die Zahnsteifigkeiten metallischer und nichtmetallischer Räder.

Roth [ROTH13, S. 1316] untersucht mithilfe der FEM die Optimierung der Fußbeanspruchung von Zylinderrädern durch bionische Fußkurven. Die Standardform der Fußrundung ersetzt er durch eine gemäß der Methode der Zugdreiecke nach [MATTHECK06] optimierte Form mit einem variablen Krümmungsverlauf. Die mit den FE-Analysen ermittelte Reduzierung der Fußspannung ist durch spannungsoptische Versuche und Pulsator-Versuche bestätigt.

Ziegler [ZIEGLER12] berechnet gewichtsoptimierte, dünnwandige Stegräder eines Rädertriebs mit der FEM und erweitert den statischen FE-Ansatz um eine Zeitintegration. Mit dem modal reduzierten, elastischen Mehrkörpersystem ist eine direkte Analyse des schwingungstechnischen Verhaltens des gesamten Rädertriebs möglich, ohne auf vereinfachende Annahmen bei der Berechnung der Zahnsteifigkeit angewiesen zu sein. Die Methode ermittelt als Ergebnis Kontaktkräfte zwischen den Zahnflanken. Eine Umrechnung in übliche Kenngrößen der Auslegung wie Flanken- und Fußbeanspruchung findet nicht statt. Das Verfahren wird derzeit unter anderem für die Berücksichtigung von Schrägverzahnungen und von Verzahnungen mit Achswinkel erweitert [EBERHARD13, S. 4].

Um den Rechenzeitbedarf zu reduzieren und direkt für Verzahnungen übliche Ergebnisarten wie beispielsweise die Zahnfedersteifigkeit zu bestimmen, wurden die nachfolgend beschriebenen Spezialprogramme zur Zahnradauslegung entwickelt. Sie dienen im Allgemeinen dem Ziel, die Beanspruchungen und Geräuschanregung beim Abwälzen durch optimierte Flankenmodifikationen zu reduzieren. Dazu werden die Last- und Beanspruchungsverteilungen für eine Vielzahl an Wälzstellungen getrennt berechnet.

Das „Ritzelkorrekturprogramm - RIKOR“ der Forschungsvereinigung Antriebstechnik dient der Ermittlung topologischer Flankenkorrekturen für Zylinderräder, wofür eine detaillierte Zahnkontaktanalyse durchgeführt wird. Otto stellt die Funktionsweise des Programms umfassend dar [OTTO09, S. 13 ff], [OTTO07, S 9 ff]. RIKOR beinhaltet zwei Berechnungsverfahren mit unterschiedlichen Ansätzen. In einer ebenen Betrachtungsweise wird der Breitenlastfaktor analog zum Ansatz nach [DIN3990] bestimmt. Die Ergebnisse können direkt in den weiteren Rechenweg der Norm übernommen werden. In einer topologischen Betrachtungsweise werden die Änderungen der lokalen Steifigkeiten berücksichtigt und die Lastverteilung entlang verschiedener Berührlinien bestimmt. Bei diesem Vorgehen findet die Einflusszahlenmethode und das Ersatzmodell eines einseitig eingespannten Plattenträgers nach Schmidt [SCHMIDT72] Verwendung. Die Ergebnisse können nicht direkt in den Rechengang nach [DIN3990] übernommen werden. Die Zahnverformungen werden mit dem Ansatz nach Weber Banaschek [WEBER55] ermittelt. Zusätzlich berücksichtigt das Programm die Nachgiebigkeiten der Zahnräder und des Welle-Lager-Systems sowie die Abweichungen und Korrekturen durch Superposition. Die lokalen Lastverteilungen werden für das gesamte Eingriffsfeld bestimmt. Entlang der Berührlinie wird die Hertz'sche Pressung und Kontakttemperatur bestimmt, die Fußbeanspruchung folgt aus einer Spannungseinflussfunktion. Das Programm wird laufend aktualisiert, derzeit erfolgt die Validierung zur korrekten Berücksichtigung unterschiedlicher Welle-Nabe-Verbindungen und Radkörpergeometrien [STAHL13B, S. 3].

Das Programm „FE-Stirnradkette (STIRAK)“ ist ebenfalls eine Entwicklung der Forschungsvereinigung Antriebstechnik zur Zylinderrad-Berechnung und -Optimierung mittels Flankenmodifikationen. Das Programm ermittelt mit der Finite-Elemente-Methode Verschiebungseinflusszahlen der Verzahnung und berücksichtigt dabei die konkrete Radkörpergestaltung. Mit den Einflusszahlen berechnet STIRAK in einer Zahnkontaktanalyse ein Federnmodell nach Neupert [NEUPERT83], wobei auch

komplexe Räderschemata modelliert werden können. Als Ergebnisse werden Tragbilder, Drehfehlerverläufe sowie Flanken- und Fußbeanspruchungen ausgegeben. [GACKA12]

Mit dem Programm „LVR – Lastverteilungsrechnung“ kann die Last- und Spannungsverteilung evolventischer Außenverzahnungen im Eingriffsfeld bestimmt werden [BÖRNER95, S. 61]. Es berücksichtigt dabei die Wellenkontur, Lageranordnung und die daraus resultierenden Nachgiebigkeiten. Zur Ermittlung der Lastverteilung wird ein Segmentmodell verwendet, wobei einzelne Segmente durch Koppelsteifigkeiten verbunden sind [BÖRNER05A, S. 151]. Durch optimierte Befüllung der Matrizen in zu lösenden Gleichungssystem ist die erforderliche Rechendauer, im Vergleich zu ähnlich hochwertigen Verfahren wie der FEM, gering. Als Ergebnis werden unter anderem die Beanspruchungen an Flanke und Fuß, die Drehwegabweichung und Kontakttemperatur ausgegeben. [BÖRNER05A]

2.4 Beanspruchungsermittlung und Optimierungswerkzeuge für asymmetrische Zylinderradverzahnungen

Bei Getrieben mit Vorzugslastrichtung, beispielsweise Kfz-Getrieben, Windradgetrieben oder Hebekränen, überträgt hauptsächlich eine Flanke das Lastmoment, während die Rückflanke des Zahns weniger häufig oder gar nicht belastet ist. Durch eine unterschiedliche Ausführung der Profilwinkel beider Flanken sowie die Anpassung der Fußrundungsradien kann die Beanspruchung auf der Lastseite abgesenkt werden, woraus sich Tragfähigkeitssteigerungen ergeben. Der Stirnschnitt von Zylinderrädern ist in diesem Fall nicht mehr symmetrisch zur Zahnmittellinie, weshalb man auch von einer asymmetrischen Verzahnung spricht. Diese sind nicht mit genormten Werkzeugbezugsprofilen nach [DIN868] herstellbar. [BRECHER10, S. 41]

Die in Kapitel 2.3 beschriebenen Methoden für die Auslegung von Zylinderrädern setzen einen symmetrischen Stirnschnitt voraus, sodass sie nicht ohne Weiteres für asymmetrische Stirnverzahnungen anwendbar sind. Stahl [STAHL12A, S. 99 ff] untersucht diesbezüglich den Rechengang zum Nachweis der Zahnfußtragfähigkeit nach [DIN3990] für einen großen Bereich möglicher Profilwinkelkombinationen von 10° bis 45° je Flanke. Er schlägt eine Erweiterung der Form- und Spannungsfaktoren Y_F und Y_S um den Faktor Y_α vor, sodass damit eine asymmetrische Form evolventischer Zylinderräder berücksichtigt werden kann. Er definiert eine die asymmetrische Form berücksichtigende Berechnung des Nennspannungsquerschnitts und des Biegehebel-

arms. Einen Ansatz zur Ermittlung von Y_α gewinnt Stahl mithilfe der Ergebnisse von FE-Simulationen und der Methode der kleinsten Fehlerquadrate. In seiner Untersuchung sind die kämmenden Flanken beider Räder mit den gleichen Profilwinkelkombinationen versehen.

Die komplexe Zahnform asymmetrischer, geradverzahnter Zylinderräder untersucht auch Pedersen mithilfe der FEM [PEDERSEN10, S. 1707]. Er schlägt zur Verringerung der Fußspannung ein Werkzeugbezugsprofil mit einem Profilwinkel von 36° auf der Lastseite in Kombination mit einer elliptischen Fußkurve vor. Auf der Leerlaufseite verzichtet er auf einen Radius am Werkzeugbezugsprofil, um die elliptische Fußkurve der Lastseite maximal ausformen zu können. Dadurch entsteht auf der Leerlaufseite ein unrealistischer Fußbereich. Nach den Erkenntnissen von Krüger [KRÜGER13, S. 1333] ist allerdings in der lastabgewandten Fußrundung mit betragsmäßig vergrößerten Druckspannungen zu rechnen.

Gacka [GACKA12] passt das Programm „FE-Stirnradkette“ zur Berücksichtigung asymmetrischer Zylinderräder an, siehe auch Kapitel 2.3.2. Damit ist es möglich, eine beliebige evolventische Zahnstückengeometrie und frei wählbare Zahnfußausrundungen im Programm zu berücksichtigen. Brecher [BRECHER10, S. 41 ff] wendet das Programmsystem auf Hochverzahnungen an und zeigt am Beispiel einer Windkraftanlage das Potenzial zur Gewichtseinsparung durch geringere notwendige Zahnbreiten. Außerdem implementiert Brecher [BRECHER13c, S. 5] eine Vorauslegungsroutine, um in Abhängigkeit der geforderten Profilwinkel das notwendige Werkzeugbezugsprofil festzulegen. Dazu beschreibt er die von symmetrischen Zylinderrädern abweichenden geometrischen Grenzen der asymmetrischen Zahnform.

Das Potenzial einer höheren Tragfähigkeit von asymmetrischen Verzahnungen zeigt Linke [LINKE12, S. 29] anhand der Berechnung der Spannungsverteilung am Zahnfuß mithilfe des Singularitätenverfahrens. In der Untersuchung wird mithilfe der Boundary Element Method die Außenkontur eines Stirnschnitts vernetzt und dadurch das lineare Gleichungssystem effizient gelöst. Durch den vergrößerten Profilwinkel an der Lastflanke ist die Fußspannung auf der zugbeanspruchten Seite reduziert, woraus Linke eine höhere Tragfähigkeit ableitet [LINKE12, S. 29]. In einer weiterführenden Untersuchung zeigt Krüger, dass die Absenkung der Fußzugspannung nicht zu einer gleichermaßen gesteigerten Erhöhung der Tragfähigkeit führt [KRÜGER13, S. 1333]. An der druckbeanspruchten Zahnhälfte sinkt bei asymmetrischen Stirnschnitten die Fußdruckspannung,

wodurch der Fußquerschnitt beim Abwälzen stärker wechselnd beansprucht wird und sich andere zulässige Spannungsamplituden ergeben. Bei der Suche nach einem optimierten asymmetrischen Bezugsprofil ist nach [KRÜGER13, S. 1333] daher die entstehende Fußkurve an der belasteten sowie unbelasteten Flanke zu berücksichtigen.

Wie dargestellt ist, bewirkt die deutlich asymmetrische Stirnschnittform der Zylinderräder eine geänderte Beanspruchung. Einheitliche Empfehlungen für eine optimale Stirnschnittgestaltung sind noch nicht allgemein anerkannt. Die Entwicklung von analytischen und numerischen Rechenverfahren zur Beanspruchungsermittlung dauert an.

2.5 Beanspruchungsermittlung an Kegelnrädern

2.5.1 Analytisches Verfahren nach DIN 3991

Der analytische Tragfähigkeitsnachweis von Kegelnrädern kann nach DIN 3991 [DIN3991] geführt werden. Darin sind die Kegelnräder durch die Tredgoldsche Näherung als Ersatz-Zylinderradverzahnungen angenähert. Die Ersatzverzahnung weist die Daten in Breitenmitte der Kegelnräder auf. Die komplexe Zahnform von Kegelnrädern ist nur näherungsweise berücksichtigt. Die Beanspruchungsermittlung erfolgt mit den Ansätzen für Zylinderräder. Im Tragfähigkeitsnachweis können daher die an Zylinderrädern gewonnenen Werkstoffkennwerte herangezogen werden. Die vereinfachenden Annahmen bei der Auslegung von Kegel- und Zylinderrädern ist in Bild 2.10 visualisiert.

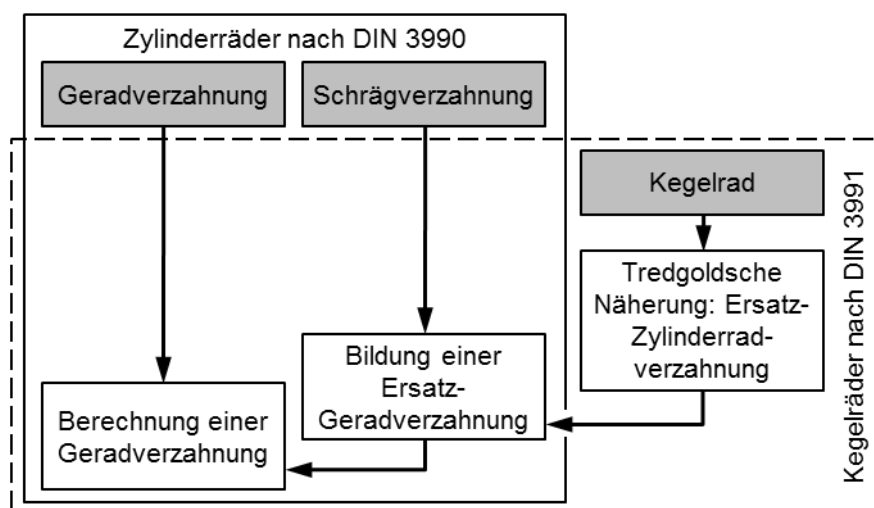


Bild 2.10: Staffelung vereinfachender Annahmen bei der analytischen Auslegung von Kegelnrädern und Zylinderrädern

2.5.2 Beanspruchungsermittlung mit BECAL

Für eine detaillierte Zahnkontaktanalyse muss die komplexe Zahngeometrie in einem ausreichend genauen Geometriemodell beschrieben und verfügbar sein. Die Zahnform von Kegelrädern ist komplex und hängt vom verwendeten Herstellungsverfahren des Kegelrads ab [KLINGELNBERG08, S. 23]. Das Kegelradauslegungsprogramm „BECAL“ der Forschungsvereinigung Antriebstechnik führt zur Geometrieberechnung eine Fertigungssimulation durch [HAASE98, S. 15 ff]. Darin sind die kinematischen Modelle verschiedener Kegelradfräsmaschinen enthalten. Aus den Bewegungen der Schneidmesser relativ zum Werkstück wird die Geometrie der Verzahnung berechnet. Die Ermittlung der Last- und Spannungsverteilung erfolgt mit verallgemeinerten Einflussfunktionen [SCHLECHT11, S. 198]. Als Ergebnisse werden unter anderem die Beanspruchungen auf Flanke und Fuß, Drehfehler und Tragbilder ausgegeben. Wie bei Zylinderrädern kann auch bei Kegelrädern durch asymmetrische Werkzeugbezugsprofile die Beanspruchung optimiert werden. Dies zeigt Schlecht [SCHLECHT13A, S. 165] anhand von Rechnungen mit BECAL und der FEM.

Neben BECAL gibt es weitere, speziell für Kegelräder entwickelte Programme kommerzieller Anbieter auf die hier nicht weiter eingegangen wird. Dies sind zum Beispiel „KIMoS“ der Firma Klingelberg, „GearEngineer“ der Firma GWJ oder „KNplus“ der Forschungsvereinigung Antriebstechnik.

2.6 Auslegung von Beveloidrädern

Für Zylinderräder ist eine Vielzahl an Optimierungsprogrammen und Auslegungsmethoden entstanden, wovon wesentliche in den vorangegangenen Kapiteln dargestellt sind. Eine Anwendung der Methoden auf Beveloidverzahnungen in kreuzender Achslage ist nicht ohne Weiteres möglich, da sie die

- veränderliche Zahnform über der Breite,
- kreuzende Achslage,
- Berührbreite der lastübertragenden Flanken,
- verkippt zueinander stehenden Stirnschnitte und
- in der Regel ungleichen Profilwinkel kämmender Flanken

nicht berücksichtigen. Eine durchgehende, die Last und die geometrischen Besonderheiten der Beveloidräder berücksichtigende Auslegungsmethode existiert nicht.

Der grundlegende Auslegungsprozess für Verzahnungen gliedert sich im Allgemeinen in die Bereiche der Vorauslegung, Nachrechnung, Optimierung durch Flankenmodifikationen [NIEMANN03, S. 256] sowie die Prüfung der Herstellbarkeit. Bei Beveloidrädern ergibt sich bei diesem Vorgehen die Schwierigkeit großer Wechselwirkungen zwischen den Verzahnungsparametern, beispielsweise zwischen den gewählten Verzahnungshauptdaten und der Tragbildlage [ALXNEIT10, S. 45]. Die nachfolgenden Ausführungen orientieren sich dennoch an dieser Gliederung.

2.6.1 Verzahnungsvorauslegung

Die Vorauslegung der Verzahnung bildet die Grundlage aller weiteren Entwurfsschritte [NIEMANN03, S. 256]. Dabei werden die Hauptdaten unter Berücksichtigung der Vorgaben gewählt. Ein durchgehender Prozess zur Vorauslegung von Beveloidverzahnungen mit definierten Berechnungsvorschriften, wie er für Zylinderräder existiert, besteht nur in Ansätzen. Die wesentlichen Grundgrößen der Verzahnungsgeometrie sind von Roth [ROTH98, S. 231 ff] und Zierau [ZIERAU89] beschrieben. Zierau leitet die Wahl der Hauptdaten konischer Stirnräder in paralleler Achslage her.

Wagner [WAGNER93] entwickelt ein Verfahren, in dem in einem ersten Schritt zu einem gegebenen Zylinder- oder Beveloidrad sowie bekannter Radachsen die ideale, konjugierte Gegenflanke ermittelt wird. Konjugierte Räder weisen einen linienförmigen Kontakt entlang der gesamten Zahnbreite auf. Das mit seinem Algorithmus definierte ideale Gegenrad besitzt in der Regel kein Evolventen-Profil und ist nicht mit Standard Werkzeugen herstellbar. In einem zweiten Schritt wird versucht, das ideale Gegenrad durch ein Beveloidrad anzunähern, welches diese Nachteile nicht aufweist. Das Tragbild dieser Paarung kann auf einen kleinen Bereich reduziert sein und durch die Anpassung der Profilverschiebungswinkel das Tragbild mittig ausgerichtet werden. Die Summe beider Profilverschiebungswinkel ist in der Regel ungleich dem Achswinkel. Das Vorgehen wird im Folgenden als Profilverschiebungswinkelkorrektur bezeichnet. Der Ansatz nach Wagner ist in das Programm „BEVELO“ integriert, es gibt als Ergebnis neben den Verzahnungsdaten des eingepassten Gegenrads auch die Klaffungswerte aus. Bachmann [BACHMANN07], [BACHMANN09] erweitert das Programm zur Berechnung von Innenverzahnungen. Schimpf [SCHIMPF96A] verwendet das Programm „BEVELO“ für die Durchführung von Parameterstudien, um die Verzahnungshauptdaten vorauszulegen. Das Optimierungskriterium des iterativen Vorgehens ist eine reduzierte lastfreie Klaffung der Paarung.

Im Programm „DimKoS“ werden die Verzahnungsdaten der Beveloidrad-Paarung in den Radmitten mit dem Verfahren für Zylinderräder nach Niemann [NIEMANN03, S. 261 FF] festgelegt. Anschließend legt das Programm die Zahnbreiten, Profilverschiebungen und Profilverschiebungswinkel innerhalb der geometrischen Grenzen von Beveloidverzahnungen fest. Das Programm ist ein Bestandteil des „Simulationsprogramms für konische Stirnräder SimKoS“. [UHLIG11]

2.6.2 Analytische Beanspruchungsberechnung

Die Verzahnungsvorauslegung dient der Vordimensionierung des Getriebes und legt die Verzahnungshauptdaten fest. Daran schließt sich die Auslegung der weiteren Maschinenelemente des Getriebes und ein Tragfähigkeitsnachweis der Verzahnung an.

Die Flankenberührung von Beveloidrädern und ihre Kinematik unterscheiden sich in Abhängigkeit der Achslage der Räder. Die Ansätze zum Tragfähigkeitsnachweis müssen dies entsprechend berücksichtigen und unterscheiden sich daher je nach Achslage.

In paralleler Achslage berühren sich die Flanken von Beveloidrädern über der gesamten Zahnbreite und die Stirnschnitte liegen in einer Ebene [ROTH98, S. 254]. Zierau [ZIERAU89, S. 139] schlägt im Ausblick seiner Arbeit für einen Tragfähigkeitsnachweis der Beveloidradpaarung ihre Substitution durch zwei Ersatz-Zylinderradpaarungen vor. Er weist ihnen die Hauptdaten der Stirnschnitte an den Zehen beider Räder zu und führt eine Berechnung nach [DIN3990] durch. Tsai [TSAI05, S. 1142] führt für parallele Paarungen FE-Analysen durch und vergleicht die Ergebnisse mit Messungen der Fußspannung. Er stellt eine ungleichmäßige Beanspruchungsverteilung entlang der Zahnbreite fest. Für einen analytischen Tragfähigkeitsnachweis nach ISO 6336 [ISO6336] schlägt er eine Ergänzung der Nennspannungsberechnung um zwei Lastverteilungs- und Geometriefaktoren vor, ohne diese genauer zu beschreiben.

Brecher [BRECHER13A] untersucht ebenfalls die parallele Achslage von Beveloidverzahnungen unter Anwendung von Ersatz-Zylinderrädern. Zur Durchführung eines analytischen Tragfähigkeitsnachweises verwendet er die Methode nach ISO 6336 [ISO6336] bei gleichzeitiger Betrachtung zweier Stirnschnitte in einer Rechnung. Den Formfaktor Y_F bestimmt er entsprechend der Verzahnungsdaten in der Zahnmitte, den Spannungsfaktor Y_S am höchstbeanspruchten Stirnschnitt. Für die Ermittlung des höchstbeanspruchten Stirnschnitts verwendet er die FE-gestützte Software „ZaKo3D“. Eine analytische Berechnung des relevanten Stirnschnitts erfolgt nicht, sodass das Vorgehen nicht unabhängig von Rechnerunterstützung ist.

In kreuzender Achslage berühren sich die Flanken von Beveloidrädern nur punktförmig und die Kinematik ist im Vergleich zur parallelen Achslage komplexer. Eine analytische Berechnung muss dies korrekt berücksichtigen. Für den Tragfähigkeitsnachweis von Beveloidrädern in kreuzender Achslage vereinfacht Schimpf [SCHIMPF96B] die Verzahnung in Anlehnung an die Tredgoldsche Näherung von Kegelrädern zu Ersatz-Zylinderrädern. Die Berechnung erfolgt mit den Methoden von Zylinderrädern nach [DIN3990] mit den Hauptdaten der mittleren Stirnschnitte beider Räder unter der Annahme, dass Linienberührung der Flanken vorliegt [SCHIMPF96A, S. 28]. Diesen Ansatz verfolgt auch Börner bei der Auslegung einer Beveloid-Schlussstufe eines Kfz-Getriebes [BÖRNER05B, S. 31]. Er beschreibt, dass die Auslegung von Beveloidrädern bei vorliegender Linienberührung, wofür geeignete Flankenmodifikationen aufgebracht werden müssen, nach [DIN3990] erfolgen kann.

Die Punktberührung führt zu einer Lastkonzentration auf der Flanke. Die last- und beanspruchungserhöhende Wirkung eines reduzierten Tragbilds geschieht nach [DIN3990] mit den Lastverteilungsfaktoren $K_{H\beta}$ und $K_{F\beta}$. Die Faktoren sind ursprünglich für Zylinderräder definiert worden und es existiert kein Verfahren für ihre Adaption auf Beveloidräder. Für einen Tragfähigkeitsnachweis von Beveloidrädern mit der Annäherung als Ersatz-Zylinderräder müssen die Lastverteilungsfaktoren vom Konstrukteur individuell für eine Verzahnung und in Abhängigkeit der tatsächlichen Flankenberührung geschätzt werden. Die Faktoren wirken sich unmittelbar auf die ermittelten Beanspruchungen an Flanke und Fuß aus, sodass für eine sinnvolle Faktorenwahl ein hohes Maß an Kompetenz und Erfahrung erforderlich ist. Werden die Faktoren zu niedrig geschätzt, besteht die Gefahr eines vorzeitigen Getriebeausfalls. Bei einer Überschätzung kommt es hingegen zu einer Überdimensionierung. Es existiert kein formalisiertes Verfahren, mittels dessen mit analytischen Methoden die Belastung und Beanspruchung von Beveloidrädern in kreuzender Achslage bestimmt werden kann. Eine Alternative stellen höherwertige, computergestützte Ansätze dar.

2.6.3 Simulative Beanspruchungsanalyse und Geometrieoptimierung

Die Zahnform von Beveloidrädern und ihr Eingriffsverhalten sind im Vergleich zu anderen Verzahnungen sehr komplex, siehe Kapitel 2.2. Von Zylinder- und Kegelrädern bekannte Simulationsprogramme können diese Besonderheiten nicht vollständig berücksichtigen. Angepasste Programmvarianten befinden sich in der Weiterentwicklung, um Beveloidräder berücksichtigen zu können. Für eine numerische Beanspruchungs-

analyse ist einerseits die Bereitstellung eines ausreichend genauen Geometriemodells der Verzahnung, andererseits eines leistungsfähigen Rechenmodells erforderlich.

2.6.3.1 Erzeugung des Geometriemodells

Die Geometrieerzeugung dient der Erstellung einer virtuellen Abbildung der Beveloidverzahnung für die anschließende Verwendung in einem Analyseprogramm. Aufgrund der komplexen Zahnform stellt dies eine wesentliche Schwierigkeit dar. Die Güte der virtuellen Abbildung ist gleichzeitig eine Voraussetzung für eine hohe Ergebnisqualität.

Alxneit [ALXNEIT10, S. 55 ff] erstellt einen Flankengenerator für Beveloidverzahnungen. Im Flankengenerator sind die von Zylinderrädern bekannten analytischen Gleichungen der Zahnform enthalten und für Beveloidräder verallgemeinert. Eingangsgrößen sind die Kenngrößen des Herstellbezugsprofils eines zahnstangenartigen Werkzeugs nach DIN 867 [DIN867], die Verzahnungshauptdaten der Räder und die gewünschte Auflösung. Der Generator berechnet eine die Verzahnung repräsentierende Punktwolke und die dazugehörigen Normalenvektoren. Den berechneten Flankenpunkten können verschiedene Modifikationen nach dem Superpositionsprinzip überlagert werden. Traut [TRAUT09] ergänzt den Flankengenerator um die Berechnung der Fußkurve. Der Generator ist Teil des IKTD-Programms zur „Simulation konischer Stirnräder SimKoS“. Neben Beveloidrädern können auch Zylinderräder als Sonderfall der Beveloidräder mit dem Profilverschiebungswinkel null simuliert werden.

Zur virtuellen Erzeugung von Beveloidverzahnungen erstellt Röthlingshöfer [RÖTHLINGSHÖFER12, S. 33 ff] eine Fertigungssimulation und integriert sie in das Programm „GearGenerator“. In der Simulation wird das kontinuierliche Wälzschleifen mittels Schleifschnecke nachgebildet und die Zahnlückengeometrie mittels Hüllschnittverfahren bestimmt. Flankenmodifikationen können durch Änderungen des Werkzeugbezugsprofils und seiner Bewegungsbahn aufgebracht werden. Die Geometrie wird als Punktwolke mit dazugehörigen Normalenvektoren ausgegeben.

Der Ansatz eines allgemeinen Flankengenerators für verschiedene Zahnradtypen entwickeln Stahl [STAHL11] und Zimmer [ZIMMER12] für die Forschungsvereinigung Antriebstechnik. Mit dem allgemeinen Flankengenerator können die Zahnflanken unter anderem von Zylinder-, Beveloid-, Kronen-, Kegel- und Hypoidrädern bestimmt werden. Die Geometrie wird als Punktwolke mit dazugehörigen Normalenvektoren ausgegeben. Der allgemeine Flankengenerator soll zukünftig Schnittstellen zu den FVA-Programmen für Zylinder- und Kegelräder RIKOR, STplus und BECAL erhalten und die

Geometrie aus der Vorgabe der Werkzeuggeometrie und Herstellkinematik ermitteln [STAHL13C, S. 3].

2.6.3.2 Beanspruchungsanalyse und Optimierungswerkzeuge

Die Schwerpunkte vorangegangener Untersuchungen an Beveloidverzahnungen liegen hauptsächlich in der Optimierung der Berührverhältnisse der Flanken und des Anregungsverhaltens der Verzahnung. Die Untersuchungen haben vorrangig das Ziel, einen möglichst gleichmäßigen Zahneingriff mit geringem Drehfehler und niedriger Geräuschanregung bei gleichzeitig breitem Tragbild zu erreichen. Dies soll durch optimale Flankenmodifikationen realisiert werden. Zur systematischen Untersuchung werden daher spezielle numerische Optimierungswerkzeuge entwickelt.

Alxneit [ALXNEIT10] führt in seiner Arbeit Untersuchungen zur Optimierung der Feingestaltung von Beveloidverzahnungen durch. Er verwendet das Programm „SimKoS“, in dem ein Flankengenerator und eine Abwälzsimulation enthalten sind, siehe Kapitel 2.6.3.1. In der Abwälzsimulation erfolgt eine vektorielle Abstandsberechnung der Flankenpunkte in diskreten Wälzstellungen. Aus den Ergebnissen aller Wälzstellungen berechnet die Simulation das Tragbild und den Drehfehler. Zur systematischen Feinauslegung definiert Alxneit einen iterativen Simulationsprozess mittels Parametervariation der Verzahnungshauptdaten und Flankenmodifikationen [ALXNEIT10, S. 49]. Das Optimierungsziel ist die Verringerung des lastfreien Drehfehlers. Das Vorgehen berücksichtigt keine Lastverformungen, eine Auswertung der Beanspruchungen findet nicht statt.

Das Programm „SimKoS“ wird von Traut weiterentwickelt [TRAUT11B]. Eine automatisierte Simulationssteuerung ermöglicht ein verteiltes Rechnen auf verschiedenen Computern, die Anzahl der notwendigen Rechenaufträge wird mit statistischen Versuchsplänen optimiert. Neben der numerischen, iterativen Suche nach drehfehleroptimierten Auslegungen integriert Traut eine analytische Auslegung hohlballiger Flankenkorrekturen zur Erreichung von Linienkontakt [TRAUT11A], [TRAUT13]. Dabei wird der Profilverschiebungswinkel entlang der Zahnbreite örtlich angepasst. Dieses Verfahren wird als Profilverschiebungskorrektur „PVK“ bezeichnet.

Mehrere Arbeiten am Werkzeugmaschinenlabor der RWTH Aachen befassen sich mit der Erstellung des Simulations- und Auslegungswerkzeugs „ZaKo3D“, das auch Beveloidverzahnungen berücksichtigt. Hemmelmann [HEMMELMANN07] entwickelt eine für verschiedene Verzahnungsarten anwendbare Abwälzsimulation zur Ermittlung unter

anderem der Kontaktabstände, des Tragbilds und des lastfreien Drehfehlers. Er wendet dieses Vorgehen exemplarisch auf Beveloidverzahnungen an. Zur Berechnung der Zahnverformung mithilfe von Verschiebungseinflusszahlen werden Einheitskräfte auf jeden Flankenpunkt eines FE-Modells der Verzahnung aufgebracht, das Gleichungssystem gelöst und die Ergebnisse als Verschiebungsmatrix gespeichert. Die Beanspruchungsermittlung erfolgt mithilfe der Einflusszahlenmethode. Die Ermittlung des Tragbilds unter Last und der Flankenpressung geschieht mit dem Ersatz-Federnmodell nach Neupert [NEUPERT83] und den mit FE-Analysen ermittelten Verschiebungseinflusszahlen. Röhlingshöfer [RÖTHLINGSHÖFER12] ergänzt das Programmsystem um eine Simulation des Herstellungsprozesses von Beveloidrädern, wie dies in Kapitel 2.6.3.1 beschrieben ist, sowie eine Vorauswahl der Verzahnungsdaten nach Roth [ROTH98] und Wagner [WAGNER93]. Brecher untersucht den Einfluss von Fertigungs- und Montageabweichungen auf die Tragbildlage unter Berücksichtigung der Last [BRECHER11B]. Er erweitert das Programm ZaKo3D um die Beanspruchungsermittlung am Zahnfuß [BRECHER11C]. Die Validierung der Fußspannungsergebnisse erfolgt durch Gegenrechnungen mit dem kommerziellen FE-Programm ABAQUS. Messungen der Fußspannung sind nicht veröffentlicht. Zur Ermittlung der Tragfähigkeit von Beveloidrädern in paralleler Achslage integriert Brecher zudem eine lokale Schädigungsrechnung mit dem Weakest Link Model [BRECHER13B]. Zur Überprüfung führt er Laufversuche der Verzahnung in paralleler Achslage mit dem FZG-Verspannungsprüfstand durch.

Das Kegelradberechnungsprogramm „BECAL“ der FVA ermittelt unter anderem die Beanspruchungen an den Flanken und am Fuß von Kegel- und Hypoidrädern. Die Anwendung für Beveloidräder zeigt unterschiedliche Ergebnisse im Vergleich zu FE-Simulationen [GÄNZLE11], [BECK11A]. Schlecht [SCHLECHT13B, S. 9 ff] ergänzt die mathematische Formulierung des Berechnungskerns um eine zusätzliche Methode für Beveloidverzahnungen. Dadurch sollen alle Programmfunktionalitäten auch auf Beveloidverzahnungen anwendbar sein. Eine Validierung der Berechnungsergebnisse soll anhand von Vergleichsrechnungen mit der FEM stattfinden. Die in BECAL enthaltene Fertigungssimulation für Kegelräder kann keine Beveloidverzahnung erzeugen, sodass die Zahngeometrie dem Berechnungskern von außen übergeben werden muss [SCHLECHT13B, S. 7]. Sie soll zukünftig durch den allgemeinen Flankengenerator, der in Kapitel 2.6.3.1 beschrieben ist, erzeugt werden [STAHL13C, S. 3].

In Arbeiten der Zahnradfabrik Friedrichshafen wird das Zylinderrad-Berechnungsprogramm „LVR“ abgewandelt, sodass es Beveloidverzahnungen berücksichtigen kann [BÖRNER05A], [BÖRNER05B, S. 158]. Dabei werden unter anderem die an den Beveloidflanken auftretenden Kontaktabstände als Korrektur auf eine Zylinderadpaarung aufgebracht und damit die Berechnung durchgeführt. Das abgewandelte Programm ist nicht frei zugänglich.

Die vorgestellten, speziell für Beveloidverzahnungen angepassten Auslegungswerkzeuge befinden sich teilweise noch in der Entwicklung oder sind nicht frei zugänglich. Die Finite-Elemente-Methode kann beliebige Körper strukturmechanisch analysieren. Sie findet auch in Arbeiten zu Beveloidverzahnungen Anwendung. Tsai [TSAI05, S. 1133] nutzt das FE-System „MSC.Marc“ zur Untersuchung der Beanspruchungsverteilung am Zahnfuß in paralleler Achslage, siehe auch Kapitel 2.6.2. Brauer [BRAUER02], [BRAUER04], [BRAUER05] erstellt in seinen Arbeiten ebenfalls FE-Modelle von gerad- und schrägverzahnten Beveloidrädern in paralleler Achslage. Die Geometrie berechnet er aus dem verkippten, zahnstangenartigen Werkzeug mit Standard-Bezugsprofil als Punktwolke und übergibt sie an ein FE-Programm. Brauer nutzt die Simulation zur Ermittlung des Drehfehlers unter Last [BRAUER05, S. 450]. Beanspruchungen ermittelt er nicht.

Wu und Tsai [WU09] entwickeln einen analytischen Ansatz zur Ermittlung der Kontaktspannung von Beveloidrädern in windschiefer Achslage und stellen die Ergebnisse FE-Simulationen gegenüber. Sie untersuchen den Fall von Linienkontakt zwischen beiden Rädern. Dies stellt in windschiefer Achslage einen Sonderfall bestimmter Kombinationen der Verzahnungshauptdaten dar [ROTH98, S. 254]. Tsai und Wu erweitern ihr Modell [TSAI10, S. 659], sodass die Einschränkung auf einen Linienkontakt in windschiefer Achslage nicht mehr erforderlich ist. Die Validierung erfolgt anhand von FE-Simulationen und Prüfstandsversuchen. Liu [LIU10, S. 2] untersucht geradverzahnte Räder, die mit Schleifscheiben bearbeitet sind, erstellt einen FE-Netzgenerator und ermittelt die Kontaktspannung im Zahnkontakt mit dem FE-Programm ABAQUS.

2.7 Zahnfedersteifigkeit

Unter der Steifigkeit eines Maschinenelements wird im Allgemeinen das Verhältnis der für eine definierte elastische Verformung notwendigen Kraft zur Verformung selbst verstanden. Die Kenntnis der Steifigkeit ist eine wesentliche Voraussetzung zur Ermitt-

lung der Lastverteilung. Aufgrund der Lasteinwirkung stellt sich ein Kraftflussverlauf im Bauteil ein, woraus charakteristische Beanspruchungen resultieren.

Zylinderräder gehören zu den am häufigsten verwendeten Zahnradarten. Ihr Tragfähigkeitsnachweis bildet auch für andere Zahnformen wie beispielsweise Kegelräder die Grundlage, siehe Bild 2.10. Die Steifigkeit von Zylinderrädern ist Gegenstand zahlreicher Untersuchungen, unter anderem in [WEBER55], [BOSCH65], [SCHÄFER71], [ZIEGLER71], [SCHMIDT72], [NEUPERT83], [WINTER83], [LIN86]. Es konnte gezeigt werden, dass mit genauer Kenntnis der Steifigkeit aller im Kraftfluss liegender Getriebebauteile das Tragbild optimal eingestellt und die Beanspruchungen homogenisiert werden können. Dazu werden die Zahnflanken gezielt mit Modifikationen versehen und die Verzahnung für einen Betriebspunkt optimiert. Aufgrund der umfangreichen Untersuchungen ist im Folgenden der Stand der Technik der Zahnfedersteifigkeit von Zylinderrädern dargestellt.

Die elastische Verformung einer Zahnradpaarung setzt sich nach Linke [LINKE10, S. 246] grundsätzlich aus der Zahnverformung, Zahnradkörperverformung, Wellenverformung, Lagerverformung und Gehäuseverformung zusammen. Die Verformungen sind zum Teil nichtlinear zur Belastung. Sie zu ermitteln ist aufgrund der komplexen Geometrie meist nur mit hochwertigen Verfahren wie beispielsweise der FEM möglich. Zudem hängt die Verformung stark von der konkreten Getriebegestaltung ab. Daher wird im Weiteren nur die Verformung des Maschinenelements Zahnrad behandelt, bestehend aus der Zahnverformung und der Zahnradkörperverformung. [LINKE10, S. 246 FF]

2.7.1 Allgemeine Definition der Zahnfedersteifigkeit von Zylinderrädern

Linke fasst den Stand der Technik zur Zahnfedersteifigkeit von Zylinderrädern ausführlich zusammen [LINKE10, S. 202]. Bei der für die Steifigkeitsberechnung heranzuziehenden Verformung handelt es sich um die Verlagerung des Eingriffspunkts entlang der Eingriffslinie aufgrund der Lasteinwirkung [DIN3990, S. 51]. Die Verformung setzt sich nach [LINKE10, S. 202] aus nachfolgenden Bestandteilen zusammen, sie sind in Bild 2.11 veranschaulicht.

- a) Biegeverformung des Zahns
- b) Biegeverformung durch Einspannelastizität
- c) Schubverformung
- d) Abplattung aufgrund der Hertz'schen Pressung

- e) radiale Stauchung
- f) Kontaktelastizität
- g) Einfluss Zahnkrümmung
- h) Einfluss der Zahnenden
- i) Einfluss der Kranzelastizität

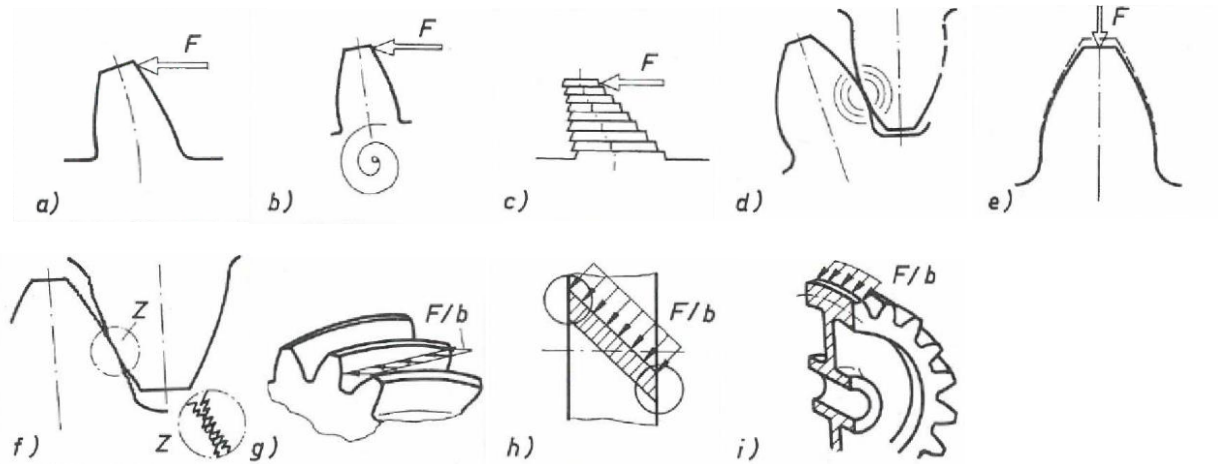


Bild 2.11: Bestandteile der Zahnverformung nach [LINKE10, S. 202]

Einzelne dieser Verformungsbestandteile der Verzahnung sind nichtlinear von der Last abhängig, sodass die Zahnfedersteifigkeit ebenfalls nichtlinear ist. Im Kraft-Verformungs-Diagramm ist der Verlauf der Zahnfedersteifigkeit progressiv steigend, siehe Bild 2.12.

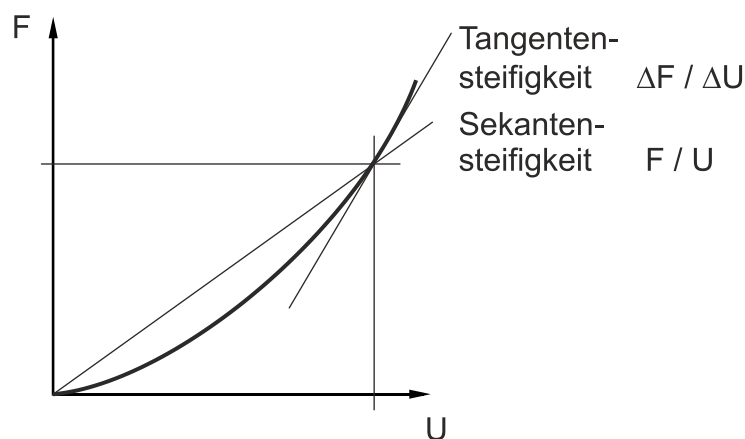


Bild 2.12: Steifigkeitsarten im Kraft-Verformungs-Diagramm nach [OTTO09, S. XIV]

In einzelnen Berechnungsmethoden für Zylinderräder wird der Steifigkeitsverlauf angenähert linearisiert, weshalb zwischen der Sekanten- und Tangentensteifigkeit zu unterscheiden ist [OTTO09, S. XIV]. In vereinfachten Berechnungsmethoden wird die Steifigkeit als unabhängig von der Last betrachtet, sie stellt sich als Sekante im Kraft-

Verformungs-Diagramm dar. Höherwertigere Berechnungsmethoden berücksichtigen die Nichtlinearität einzelner Verformungsbestandteile. Die Steifigkeit ist dann eine Tangente an die Kraft-Verformungskurve. [OTTO09, S. XIV]

Die oben genannten Verformungsbestandteile hängen unmittelbar von der Zahnform, der Radpaarung und der Eingriffsstellung ab. Daher wird die Steifigkeit stets für eine Paarung der Räder bestimmt. Über der Zahnhöhe ist die Steifigkeit aufgrund des unterschiedlichen Zahnquerschnitts veränderlich. Über der Zahnbreite ist insbesondere bei Schrägverzahnungen die Steifigkeit in einzelnen Stirnschnitten unterschiedlich. Die Zusammenhänge sind in Bild 2.13 dargestellt.

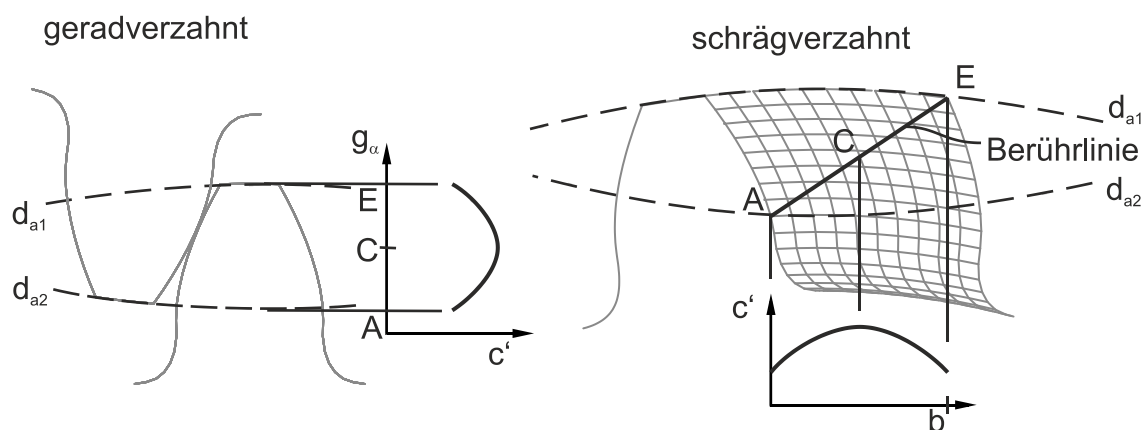


Bild 2.13: Qualitativer Steifigkeitsverlauf über der Zahnhöhe (links) und Zahnbreite (rechts)

Wesentliche Gründe für die unterschiedliche Steifigkeit sind nach [WIKIDAL97, S. 22]

- die über der Zahnbreite unterschiedlichen Hebelarme der Berührlinie,
- die Kerbeffekte an den Kopfkanten,
- die Kerbeffekte an den Stirnseiten,
- das Abknicken der Berührlinien an den Kopfkanten,
- Effekte der spitzen und stumpfen Stirnseiten.

Während des Abwälzens der Verzahnung verändern sich folglich die Steifigkeitswerte. Die Zahnfedersteifigkeit ist eine Funktion der Stirnschnittkoordinate, der Wälzstellung und der Last.

$$c = f(\zeta, WS, T) \quad (2.14)$$

Die aus dem zeitlichen Verlauf beim Abwälzen resultierenden Änderungen der Steifigkeit verursachen auch bei theoretisch idealen, unkorrigierten Zahnradern eine Drehwegschwankung. Dies kann zur Geräusentwicklung führen. [WIKIDAL97]

2.7.2 Verfahren zur Steifigkeitsermittlung von Zylinderrädern

Verzahnungen besitzen eine komplexe dreidimensionale Geometrie. Für die Ermittlung ihrer Steifigkeit sind daher umfangreiche Rechnungen erforderlich. Nachfolgend wird ein Überblick über die wesentlichen Berechnungsansätze zu Ermittlung der Steifigkeit beziehungsweise der Zahnverformung gegeben.

Im Allgemeinen wird die Steifigkeit als Quotient von Zahnnormalkraft F und Zahnverformung U berechnet [DIN3990].

$$c = \frac{F}{U} \quad (2.15)$$

Die Schwierigkeit der Steifigkeitsermittlung liegt in der Regel in der Berechnung der Zahnverformung unter Last.

Die gebräuchliche Berechnung der Zahnnachgiebigkeit von Zylinderrädern geht auf Weber und Banaschek zurück [WEBER55]. In ihrem Ansatz betrachten sie den Zahn im Normalschnitt als einseitig eingespannten Balken mit veränderlicher Dicke. Mit einem kontinuums-mechanischen Ansatz für Geradverzahnungen werden die einzelnen Verformungskomponenten getrennt bestimmt und addiert. Ihre Arbeit bildet die Grundlage für viele weitere Untersuchungen. Bosch [BOSCH65] modelliert Schrägverzahnungen als eine Aneinanderreihung zueinander verdrehter Geradverzahnungen und wendet darauf den Ansatz von Weber und Banaschek an. Schäfer [SCHÄFER71] baut ebenfalls auf den Ergebnissen von Weber und Banaschek auf. Er nähert den Größtwert der Steifigkeit beim Abwälzen durch ein Polynom an. Zudem leitet er ein weiteres Polynom zur Bestimmung der Steifigkeit aus den Zähnezahlen und Profilverchiebungen her. Die Polynome ermöglichen eine sehr schnelle Berechnung der Steifigkeit und stellen die Grundlage für den Polynomansatz nach [DIN3990, S. 51] dar. Winter und Podlesnik [WINTER83] verallgemeinern den Polynomansatz nach Schäfer [SCHÄFER71] auf weitere Radkörperformen, Linienlasten und Welle-Nabe-Verbindungen mithilfe von Anpassungsfaktoren. Ihr Rechengang ist teilweise in [DIN3990] integriert.

Neben den Untersuchungen, die in die Definition des Rechenverfahrens nach [DIN3990] einfließen, behandeln weitere Arbeiten die Steifigkeit von Zylinderrädern. Ziegler [ZIEGLER71] unterteilt die Schrägverzahnung über der Zahnbreite in Scheiben, welche er jeweils als brettförmige Balken betrachtet und mit Einzelkräften belastet. Zur vereinfachten Annäherung der Steifigkeit leitet er Nomogramme und Näherungspolynome her. Schmidt [SCHMIDT72] betrachtet die Zahnpaarung als zwei entlang der

Zahnbreite einseitig eingespannte Plattenträger und wendet dabei die Ansätze nach Weber und Banaschek an. Daraus können Einflusszahlen entlang der Berührlinie bestimmt werden. Diese Methode wird von Placzek [PLACZEK88] in das „Ritzelkorrekturprogramm RIKOR“ der FVA integriert. Mit dem Programm können topologische Flankenmodifikationen für eine optimierte Lastverteilung ermittelt werden.

Neupert [NEUPERT83] verwendet die Finite-Elemente-Methode zur Bestimmung der Verformungen unter Last. Daraus leitet er Verformungseinflusszahlen ab und berechnet die Lastverteilung an der Verzahnung. In nachfolgenden Arbeiten entsteht daraus das Programm „FE-Stirnradkette“ der FVA.

Eine im englischen Sprachraum verbreitete Methode ist in [LIN86] beschrieben. Darin wird der Stirnschnitt einer Geradverzahnung in Zahnhöhenrichtung in Scheiben diskretisiert. Die Nachgiebigkeit unter Last ergibt sich aus den Verformungsbestandteilen eines Biegebalkens, der Zahneinspannung und der Fußkurvenverformung.

2.7.3 Verfahren nach DIN 3990

Die im vorangegangenen Kapitel beschriebenen Verfahren zur Berechnung der Steifigkeit einer Zylinderradverzahnung beinhalten zum Teil komplexe mathematische Ansätze, weshalb für ihre Anwendung eine Rechnerunterstützung notwendig ist. Im Tragfähigkeitsnachweis für Zylinderräder nach [DIN3990] ist ein Rechenverfahren enthalten, das einer einfachen analytischen Anwendung zugänglich ist und daher hier detaillierter vorgestellt wird. Seine Entstehung und Herleitung ist in Kapitel 2.7.2 beschrieben.

Die theoretische Einzelfedersteifigkeit der Verzahnung im Stirnschnitt c'_{th} wird nach [DIN3990] an einem ebenen Scheibenpaar mit einem Millimeter Breite bestimmt. Die Steifigkeit ergibt sich nach Gleichung (2.16) aus dem Kehrwert der Nachgiebigkeit q' . Die Bestimmung der Nachgiebigkeit erfolgt mit einem Polynomansatz, der auf die Arbeit von Schäfer [SCHÄFER71] zurückgeht. In die Berechnung der Nachgiebigkeit fließen die Zähnezahl und Profilverchiebung ein, sodass die Steifigkeit sehr einfach ermittelt werden kann. Die theoretische Einzelfedersteifigkeit ist angenähert nicht von der Last abhängig. Die Gleichung (2.17) wird daher auch als Näherungspolynom bezeichnet.

$$c'_{th} = \frac{1}{q'} \quad (2.16)$$

$$q' = C_1 + \frac{C_2}{z_{n1}} + \frac{C_3}{z_{n2}} + C_4 \cdot x_1 + C_5 \cdot \frac{x_1}{z_{n1}} + C_6 \cdot x_2 + C_7 \cdot \frac{x_2}{z_{n2}} + C_8 \cdot x_1^2 + C_9 \cdot x_2^2 \quad (2.17)$$

Die Polynomkoeffizienten sind in nachfolgender Tabelle 2.5 dargestellt.

| | | | | |
|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| C₁ | C₂ | C₃ | C₄ | C₅ |
| 0,04723 | 0,15551 | 0,25791 | -0,00635 | -0,11654 |
| C₆ | C₇ | C₈ | C₉ | |
| -0,00193 | -0,24188 | -0,00529 | 0,00182 | |

Tabelle 2.5: Einheitenlose Konstanten für Gleichung (2.17) [DIN3990]

Die theoretische Einzelfedersteifigkeit wird für Verzahnungen mit dem Nenn-Bezugsprofil ermittelt. Eine davon abweichende Zahnform und Radkörpergestaltung ist in den Anpassungsfaktoren C_{BS} und C_R berücksichtigt. Eine Schrägverzahnung wird durch den Faktor $\cos(\beta)$ und die Ersatzzähnezahl nach Gleichung (2.5) berücksichtigt. Die Einzelfedersteifigkeit ergibt sich dann zu:

$$c' = 0,8 \cdot c'_{th} \cdot C_R \cdot C_{BS} \cdot \cos(\beta) \quad (2.18)$$

Das Ergebnis der Steifigkeit ist unabhängig von der Last und stellt eine Sekante in Bild 2.12 dar [OTTO09, S. XIV].

Der Polynomansatz bestimmt den Maximalwert der Steifigkeit während des Einzeleingriffs am Wälzpunkt der Paarung. Die zeitlichen Schwankungen der Steifigkeit während des Abwälzens, hervorgerufen durch den Wechsel von Einzel- und Mehrfacheingriff, werden durch die mittlere Steifigkeit c_γ berücksichtigt.

$$c_\gamma = c' \cdot (0,75 \cdot \varepsilon_\alpha + 0,25) \quad (2.19)$$

Die im Rechenverfahren enthaltenen Vereinfachungen ermöglichen eine einfache, rechnerische Anwendung. Das Verfahren wird daher häufig als Näherungslösung zur Steifigkeitsberechnung bezeichnet. Trotzdem zeigen sich gute Übereinstimmungen mit Ergebnissen höherwertiger Verfahren [DIN3990, S. 51]. Die Ergebnisse finden allgemeine Anerkennung und Verwendung.

2.7.4 Zahnsteifigkeit asymmetrischer Verzahnungen

Stahl [STAHL12B] untersucht die Steifigkeit von asymmetrischen Zylinderrädern. Dazu führt er Variationsrechnungen mithilfe der FEM durch und definiert Anpassungsfaktoren für den Polynomansatz nach [DIN3990]. Die Untersuchungen beziehen sich auf einen

großen Bereich möglicher Profilwinkelkombinationen zwischen 10° und 45° . Zudem sind die Profilwinkel der kämmenden Flanken in seiner Untersuchung identisch ausgeführt.

Die Steifigkeit von Beveloidrädern in paralleler Achslage untersucht Brecher mithilfe des Programms ZaKo3D [BRECHER13A]. Er stellt dabei nur geringe Unterschiede im Vergleich zu symmetrischen Zylinderrädern fest. Da bei einer parallelen Achslage die Profilverschiebungswinkel und Schrägungswinkel beider Räder betragsmäßig gleich, ihre Vorzeichen aber unterschiedlich sein müssen, ergeben sich nach Gleichung (2.1) identische Profilwinkel der kämmenden Flanken, siehe auch Tabelle 2.4.

2.8 Fazit zum Stand der Technik

Die Zahnform und die möglichen Achslagen von Beveloidrädern weisen teilweise Ähnlichkeiten zu Zylinder- oder Kegelrädern auf. Der Stirnschnitt von Beveloidrädern ist vergleichbar mit symmetrischen beziehungsweise asymmetrischen Zylinderrädern. Bezüglich der Achslage und der Flankenberührung sind Beveloidräder mit Kegelrädern vergleichbar.

In bisherigen Arbeiten zu Beveloidverzahnungen liegt ein Schwerpunkt in der Optimierung der Verzahnungsdaten mit dem Ziel der Reduzierung der Drehfehler. Durch die gezielte Wahl der Verzahnungshauptdaten und Flankenmodifikationen soll ein breites Tragbild und eine gleichmäßige Drehübertragung erreicht werden. Die aus der Punktberührung resultierende örtliche Überlastung und hohe Beanspruchung von Beveloidrädern in kreuzender Achslage sind bislang wenig untersucht.

Die analytische Auslegung von Beveloidverzahnungen ist aufgrund der Unterschiede in der Zahnform nicht ohne Weiteres mit den bekannten Verfahren anderer Verzahnungsarten möglich. Einer direkten Verwendung der [DIN3990] zur Auslegung von Beveloidrädern steht entgegen, dass die Radachsen nicht parallel sind. Die Stirnschnitte von Beveloidradpaarungen liegen nicht in einer Ebene und können asymmetrisch sein. Die Zahnform von Beveloidrädern ändert sich zudem entlang der Breite. Der Normansatz geht von einer über der gesamten Breite tragenden Verzahnung aus und berücksichtigt eine ungleichmäßige Lastverteilung mit Faktoren. Diese Faktoren können nicht auf Beveloidräder übertragen werden.

Die analytische Auslegung von Kegelrädern nach [DIN3991] vereinfacht die Kegelradverzahnung mithilfe der Tredgoldschen Näherung zu einer Zylinderradverzahnung. Eine

Auslegung von Beveloidrädern kann weder mit dem Ansatz nach [DIN3990] noch nach [DIN3991] direkt erfolgen.

Als Vereinfachung in der analytischen Berechnung wird die Beveloidverzahnung mit Ersatz-Zylinderrädern mit den Daten der mittleren Stirnschnitte angenähert, die Auslegung erfolgt dann nach [DIN3990]. Zur Berücksichtigung der unterschiedlichen Zahnform, Achslage und Lastverteilung müssen Korrekturfaktoren und Breitenlastfaktoren abgeschätzt und die Beiwerte der erforderlichen Sicherheit konservativ gewählt werden. Dies setzt ein hohes Maß an Erfahrung und die Möglichkeit einer praktischen Überprüfung voraus. Eine geschlossene, analytische, auf den Verzahnungsdaten des Beveloidrads aufbauende Ermittlung der Lastverteilungsfaktoren beziehungsweise der Beanspruchung ist nicht verfügbar. Auch fehlt die Möglichkeit der analytischen Berechnung der Steifigkeit.

Die Ansätze zur analytischen Beanspruchungsermittlung an asymmetrischen Zylinderrädern von Stahl [STAHL12A, S. 99 ff] setzen gleiche Profilwinkel der kämmenden Flanken voraus. Dies ist bei Beveloidverzahnungen unter anderem aufgrund der Profilverschiebungswinkelkorrektur zur Einstellung der Tragbildlage in der Regel nicht der Fall. Beide kämmenden Flanken weisen meist unterschiedliche Profilwinkel auf, siehe auch Tabelle 2.4. Die Profilwinkelkombinationen von Beveloidradpaarungen liegen außerdem in deutlich kleineren Bereichen als sie Stahl untersucht. Daher erscheint die Anwendung des von ihm definierten Faktors auf Beveloidräder als nicht zweckmäßig.

Rechnergestützte Verfahren zur Beanspruchungsberechnung von anderen Verzahnungsarten wie Zylinderrädern, asymmetrischen Zylinderrädern oder Kegeln können nur Teilaspekte von Beveloidrädern, beispielsweise die kreuzende Achslage oder die über der Zahnbreite veränderliche Zahnform, berücksichtigen. Sie sind daher nicht auf Beveloidräder anwendbar.

Für Beveloidräder erstellte Varianten der Spezialprogramme wie ZaKo3D oder BECAL sind derzeit in der Entwicklung und nicht frei zugänglich. Messungen zur Validierung der Berechnungsergebnisse sind nicht veröffentlicht. Das „Simulationsprogramm für Konische Stirnräder“ kann die Verzahnungen lastfrei optimieren, strukturmechanische Analysen sind nicht möglich.

Die Untersuchung von Beveloidverzahnungen mit FE-Simulationen erfordert einen hohen Zeitaufwand zur Modellerstellung und Berechnung, außerdem ist ein hohes Maß an Verfahrenskennntnis nötig. Arbeiten zur Beanspruchungsanalyse an Beveloidrädern

mithilfe der FEM beschäftigen sich hauptsächlich mit der parallelen oder windschiefen Achslage. Berechnungsziele sind Drehfehlerverläufe oder Kontaktspannungen. Untersuchungen der Beanspruchung in kreuzender Achslage sind nur vereinzelt veröffentlicht.

Die Steifigkeit von Beveloidrädern in kreuzender Achslage wurde bislang nicht näher betrachtet. Stahl [STAHL12B] untersucht die Zahnsteifigkeit asymmetrischer Zylinderräder und definiert Anpassungsfaktoren für den Polynomansatz nach [DIN3990]. Die Profilwinkel von Beveloidrädern sind nach Gleichung (2.1) deutlich kleiner als die in seiner Untersuchung, sodass die definierten Anpassungsfaktoren den für Beveloidräder relevanten Bereich weniger gut berücksichtigen. Zudem sind die Profilwinkel der kämmenden Flanken bei Beveloidrädern in kreuzender Achslage nach Gleichung (2.1) unterschiedlich, siehe Tabelle 2.4. Die Anpassungsfaktoren nach [STAHL12B] sind somit nicht auf Beveloidräder übertragbar.

Brecher [BRECHER13A] untersucht die Steifigkeit von Beveloidrädern in paralleler Achslage und stellt nur geringe Unterschiede im Vergleich zu Zylinderrädern fest. Auch in seiner Untersuchung sind die Profilwinkel der kämmenden Flanken identisch, die Winkel sind im Fall einer kreuzenden Achslage allerdings in der Regel verschieden. Aus den genannten Gründen sind die Ergebnisse von Brecher nicht ohne Weiteres auf die kreuzende Achslage übertragbar.

Mit dieser Zusammenfassung zum Stand der Technik der Beanspruchungsermittlung an Beveloidrädern in kreuzender Achslage kann im folgenden Abschnitt die Konkretisierung der Zielsetzung erfolgen.

3 Konkretisierung der Zielsetzung und Vorgehensweise

Aus dem im Kapitel 2 beschriebenen Stand der Technik von Beveloidrädern ergibt sich eine Vielzahl möglicher Untersuchungen. Im folgenden Kapitel werden die konkrete Zielsetzung und das dazu notwendige Vorgehen definiert.

3.1 Konkretisierung der Zielsetzung

Die dreidimensionale Zahnform von Beveloidrädern ist sehr komplex und die Themenfelder der Lastverteilungs- und Beanspruchungsberechnung sehr umfangreich, sodass Einschränkungen für das weitere Vorgehen festzulegen sind. Aus den drei möglichen Achsanordnungen folgen unterschiedliche Berührungsbedingungen im Zahnkontakt. In dieser Arbeit werden Beveloidräder in kreuzender Achslage untersucht. Diese Anordnung ist technisch sehr interessant, da sie dem Konstrukteur große Möglichkeiten in der Ausführung des Antriebstrangs bietet, die bislang wenig genutzt werden. In kreuzender Achslage kann im Antriebsstrang ein Achswinkel von 0° bis zu 20° realisiert und dadurch die Anordnung anderer Baugruppen innerhalb einer Maschine erleichtert werden.

Eine systematische Untersuchung der Fußbeanspruchung von Beveloidrädern in kreuzender Achslage fand bislang nicht statt. Ebenso existiert keine formalisierte, analytische Berechnungsvorschrift für Beveloidräder. Für eine analytische Ermittlung der Beanspruchungen werden die Beveloidräder bislang durch Zylinderräder mit den Daten der mittleren Stirnschnitte angenähert. Die Auslegung erfolgt nach [DIN3990]. Der Konstrukteur benötigt für eine zutreffende Abschätzung der Berechnungsfaktoren, der erforderlichen Sicherheit und den aus der Annäherung resultierenden Abweichungen ein hohes Maß an Verfahrenskompetenz und Erfahrung.

Rechnergestützte Spezialsoftware anderer Verzahnungsarten berücksichtigen die Eigenschaften von Beveloidrädern in kreuzender Achslage nicht vollständig. Angepasste Versionen der Programme für Beveloidräder befinden sich derzeit in der Entwicklung und sind noch nicht verfügbar.

Simulationen, die auf der Methode der Finiten Elemente beruhen, benötigen zur Modellvorbereitung, Berechnungsdurchführung und Auswertung viel Zeit und Rechenkapazität. FE-Reihenuntersuchungen mit einer großen Parameteranzahl sind daher in ihrer Durchführung ineffizient. Außerdem sind Verzahnungen durch eine Viel-

zahl von Parametern definiert, sodass eine vollständige Untersuchung sämtlicher Wechselwirkungen unmöglich ist.

Unter anderem aus den genannten Gründen werden Beveloidräder bislang vorzugsweise dort eingesetzt, wo

- der Vorteil eines kleinen Achswinkels zwingend benötigt wird, oder
- besondere Anforderungen bzw. große Stückzahlen detaillierte Untersuchungen rechtfertigen.

Zur Entschärfung der Problematik ist eine einfache Methode zur Beanspruchungsrechnung erforderlich. Die Berechnung soll schnell und analytisch durchgeführt werden können, um nicht auf besonders leistungsfähige Computersysteme angewiesen zu sein und die breite Anwendbarkeit der Methode zu ermöglichen. Zweckmäßig erscheint eine Untersuchung der Übertragbarkeit und Erweiterung vorhandener Berechnungsmöglichkeiten auf Beveloidräder. Als Basis für das zu erstellende Berechnungsmodell wird der Tragfähigkeitsnachweis für Zylinderräder nach [DIN3990] gewählt. Der Tragfähigkeitsnachweis ist allgemein anerkannt, mit bekannten Verzahnungshauptdaten einfach durchführbar und die im Nachweis enthaltenen, grundlegenden Ansätze werden auch für die Auslegung anderer Zahnformen eingesetzt, beispielsweise Kegelräder. Die Wahl des Vorgehens für Zylinderräder nach [DIN3990] für eine Übertragung auf Beveloidräder ist möglich, da Ähnlichkeiten zwischen beiden Zahnformen bestehen.

Wesentliche Auslegungskriterien einer Verzahnung sind die Beanspruchungen am Fuß und auf der Flanke. Eine detaillierte Untersuchung beider Beanspruchungsarten für Beveloidräder ist sehr umfangreich. Daher ist eine thematische Konzentration erforderlich. Überbeanspruchungen auf der Flanke führen zur Bildung von Grübchen, die sich durch eine veränderte Geräuschentwicklung bemerkbar machen. Ein Notlauf oder die Notabschaltung des Getriebes ist dann in der Regel noch möglich.

Ein Zahnbruch bedeutet ein plötzliches katastrophales Versagen des Getriebes. Durch ein Blockieren der Verzahnung oder den Wegfall des Lastmoments wegen mehrerer abgebrochener Zähne kann es zu Schäden am gesamten Antriebsstrang kommen. Zahnbrüche sind deshalb unbedingt zu vermeiden. Die frühzeitige Entdeckung eines sich anbahnenden Zahnbruchs ist in der Regel nur mit aufwändigen Getriebeinspektionen möglich. Für einsatzgehärtete Verzahnungen stellt eine Überbeanspruchung am Fuß zudem einen häufigen Ausfallgrund dar [NIEMANN03, S. 124]. Die Fußspannung ist deshalb ein wesentliches technisches Auslegungskriterium. Die Fußspannung kann

direkt mit Dehnungsmessstreifen bestimmt und mit den Ergebnissen von höherwertigen FE-Simulationen verglichen werden.

Aus den genannten Gründen wird im weiteren Verlauf die Berechnung der Fußbeanspruchung von Beveloidrädern in kreuzender Achslage als Ziel festgelegt. Die Aufgabe lässt sich in vier Teilziele untergliedern:

1. Ermöglichung detaillierter strukturmechanischer FE-Analysen von Beveloidverzahnungen bei verringertem Zeitaufwand: Für eine effiziente Durchführung von Parametervariationen ist der notwendige Modellierungs-, Rechenzeit- und Auswertungsaufwand möglichst gering zu halten. Erst mithilfe eines leistungsfähigen Simulationswerkzeugs können gezielt Untersuchungen zur direkten analytischen Berechnung der Lastverteilung und Beanspruchung erfolgen.
2. Durchführung von FE-Analysen an Beveloidverzahnungen in kreuzender Achslage zur Bestimmung der Verformungen und Beanspruchungen: Dadurch können die Auswirkungen der in dieser Achslage auftretenden Punktberührung kämmender Flanken auf die Fußbeanspruchung dargestellt werden. Des Weiteren ist eine detaillierte, numerische Untersuchung der Zahnfedersteifigkeit der Beveloidrad-Stirnschnitte möglich.
3. Herleitung eines analytischen Rechenmodells zur Ermittlung der Lastverteilung und Fußbeanspruchung von Beveloidrädern mit direkter Berücksichtigung ihrer Eigenschaften.
4. Validierung der Ergebnisse des analytischen Ansatzes durch den Vergleich mit den Ergebnissen aus den FE-Analysen und mit Messungen.

Sind diese Teilziele erreicht, erhält der Konstrukteur im Verzahnungsauslegungsprozess die Unterstützung durch ein Werkzeug, das die konkrete Verzahnungsgeometrie der Beveloidräder berücksichtigt. Es ergeben sich daraus unter anderem diese Vorteile:

- Direkte Bestimmung der Breitenlastverteilung, Steifigkeit und Beanspruchung am Zahnfuß, ohne wichtige Einflussgrößen abschätzen zu müssen. Der Rechengang ist nachvollziehbar, strukturiert und dokumentiert.
- Die ermittelte Fußbeanspruchung kann in einen anschließenden Tragfähigkeitsnachweis einfließen.
- Aus der ermittelten Breitenlastverteilung kann die Beanspruchung der Beveloidradflanke bestimmt und ein Tragfähigkeitsnachweis bezüglich Grübchenbildung geführt werden.

- Die Steifigkeitswerte können zur Untersuchung der aus der dynamischen Belastung entstehenden Beanspruchungen herangezogen werden.
- Für die Auslegung von Beveloidverzahnungen mit hohen Anforderungen, beispielsweise bezüglich der Geräuscentwicklung im Betrieb, sind die Ergebnisse ein zusätzliches Kriterium zu überprüfender Varianten. Wenig sinnvoll gewählte Verzahnungsdaten können erkannt und vor weiteren Untersuchungen mit höherwertigen und aufwändigeren Verfahren ausgeschlossen werden. Daraus ergeben sich ein geringerer Aufwand und eine Zeitersparnis.

3.2 Vorgehensweise

Die in Kapitel 3.1 beschriebenen Teilziele gliedern die Arbeit in einzelne Arbeitsschritte. Die Nummerierung bezieht sich auf die Kapitelnummer.

4. Erstellung eines detaillierten, numerischen Untersuchungswerkzeugs zur Beanspruchungsermittlung mittels FE-Simulation für die Analyse von Beveloidverzahnungen unter Last:

Das lastfrei arbeitende Simulationsprogramm zur Optimierung konischer Stirnräder „SimKoS“ wird um eine Datenschnittstelle und um die Steuerung von FE-Simulationen erweitert. Damit sollen Verzahnungen unter Berücksichtigung der Last strukturmechanisch untersucht werden. Mit dem Vorgehen zur Modellbildung und der Ergebnisauswertung sollen normvergleichbare Ergebnisse erzielt werden. FE-spezifische Ergebnisarten müssen dazu umgerechnet werden. Die Arbeitsschritte einer Simulation sollen weitest möglich optimiert und automatisiert sein, um den Zeitbedarf bei der Durchführung von Parametervariationen zu verkürzen.

Ein Vergleich der FE-Ergebnisse von Zylinderrädern mit Normangaben wird das Vorgehen absichern. Der Nachweis, dass die Simulation auch Beveloidverzahnungen korrekt abbildet, wird anhand von Messungen erfolgen. Die Ergebnisse sind in Kapitel 8 dargestellt.

5. Untersuchung der Zahnfedersteifigkeit von Beveloidverzahnungen:
Mit FE-Analysen soll die Steifigkeit in Beveloidradstirnschnitten bestimmt und ein analytischer Ansatz zur Ermittlung der Steifigkeit definiert werden. Mit dem Ansatz werden Simulationen zur Steifigkeitsbestimmung umgangen.
6. Ableitung eines normbasierten Vorgehens zur Ermittlung der Belastung und Beanspruchung in Form eines analytischen Rechenmodells:

Der Berechnungsansatz nach [DIN3990] soll auf die Berücksichtigung von Beveloidrädern in kreuzender Achslage erweitert werden.

7. Experimentelle Untersuchungen:

Die von theoretischen Überlegungen ausgehenden Ansätze werden einer praktischen Überprüfung unterzogen. Dazu wird ein Versuchskonzept mit verschiedenen Prüfverzahnungen definiert.

8. Validierung der Beanspruchungsanalyse:

Die an den Prüfverzahnungen ermittelten Ergebnisse des Rechenmodells werden denen aus FE-Simulationen und Messungen gegenübergestellt. Zudem erfolgt ein Vergleich mit theoretisch untersuchten Verzahnungen.

Die Teilziele und das Vorgehen sind in Bild 3.1 graphisch veranschaulicht.

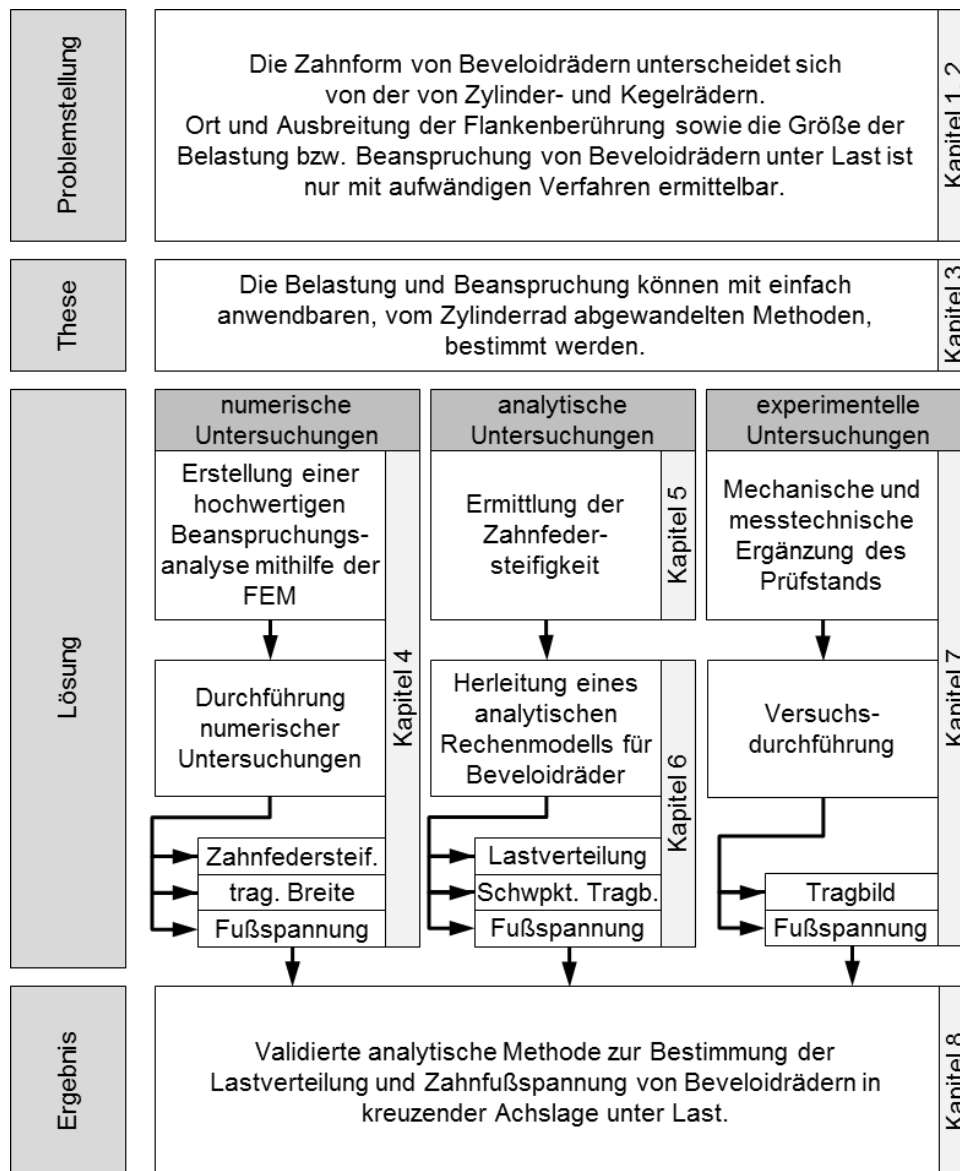


Bild 3.1: Konkretisierung der Vorgehensweise und Struktur der Arbeit

4 Beanspruchungsermittlung mittels FE-Simulation

Wie bereits in Kapitel 2 dargestellt wurde, ist die Zahnform von Beveloidrädern sehr komplex und die Simulationsprogramme anderer Verzahnungsarten berücksichtigen ihre Eigenschaften nicht ausreichend. Anpassungen existierender Programme befinden sich in der Entwicklung und sind nicht verfügbar. Daher wird eine Simulationsmöglichkeit durch Verwendung der Finiten-Elemente-Methode (FEM) geschaffen, um die Beanspruchung von Beveloidrädern zu ermitteln.

Mit der Finiten-Elemente-Methode wird ein beliebiger Körper durch eine Anzahl kleiner Grundelemente diskretisiert, mithilfe von Ansatzfunktionen für jedes Element ein Gleichungssystem aufgestellt, gelöst und daraus die Verformungen und Beanspruchungen des Körpers ermittelt. Die Methode ist zur strukturmechanischen Analyse komplexer Bauteile weit verbreitet. Zur Simulation von Beveloidrädern wird hier das kommerzielle Programmsystem „ANSYS Classic“ in der Version 12.1 verwendet, da es einerseits mit der graphischen Benutzeroberfläche, andererseits durch eine eigene Skriptsprache „APDL“ automatisiert bedient und gesteuert werden kann, [ANSYS09A], [ANSYS09B].

Eine FE-Simulation gliedert sich in drei Teilbereiche:

- Preprocessing: Die Bauteilgeometrie wird falls nötig vereinfacht, diskretisiert und das Modell mit Randbedingungen versehen.
- Solving: Ein Gleichungssystem wird aufgestellt und numerisch gelöst.
- Postprocessing: Zur Auswertung und Veranschaulichung werden die Ergebnisse graphisch dargestellt und gegebenenfalls anderen Programmen zur Weiterverarbeitung zur Verfügung gestellt.

Die Durchführung einer FE-Simulation von komplexer Geometrie ist aufgrund der umfangreichen Arbeitsschritte zur Modellbildung und Modellvorbereitung aufwändig sowie die Berechnung des Gleichungssystems langwierig. Eine FE-Analyse bedarf daher immer der steten kritischen Prüfung durch den Bediener. Um ein einheitliches Vorgehen sicherzustellen und Zeit bei der Modellierung zu sparen, wird ein teilautomatisierter Arbeitsablauf entwickelt, dessen Bestandteile nachfolgend vorgestellt werden. Das Zusammenwirken der Bestandteile ist im Anhang C bildlich dargestellt. Das grundsätzliche Vorgehen ist auch in [BECK10] und [BECK11B] beschrieben.

4.1 Modellerzeugung

Die zur Simulation von Beveloidrädern erforderliche Verzahnungsgeometrie wird mit dem Programm SimKoS berechnet. In SimKoS ist ein auf analytischen Gleichungen aufbauender Flankengenerator enthalten, der in vorangegangenen Arbeiten von Traut [TRAUT09], [TRAUT10] und Alxneit [ALXNEIT10] entstand, siehe auch Kapitel 2.6.3.1. Mit ihm kann die Geometrie von gerad- und schrägverzahnten Zylinder- und Beveloidrädern als Punktwolken erzeugt werden. Der Generator berechnet die Verzahnung stirnschnittweise, jeder Stirnschnitt wird in die Teilbereiche evolventische Flanken, Kopfkurve, Fußkurven sowie Fußkreis unterteilt. Die Anzahl der berechneten Stirnschnitte und der Punkte auf den Teilbereichen kann frei gewählt werden. Es entsteht eine die Verzahnungsoberfläche repräsentierende Punktwolke. Der Flankengenerator berücksichtigt bei der Berechnung Vorgaben zu Flankenmodifikationen, Kopfkürzungen und den Werkzeugbezugsprofilen. [BECK10, S. 37]

Das Datenformat der SimKoS Punktwolke ist nicht mit dem FE-Programm ANSYS kompatibel, weshalb eine Schnittstelle und eine geeignete Geometrieverarbeitung erforderlich sind. Zur Datenübergabe nach ANSYS stehen grundsätzlich zwei Wege zur Verfügung [ANSYS09c]:

- Erstellung der Geometrie in einem CAD-System und anschließende Speicherung in einem neutralen Datenformat, welches in ANSYS importiert werden kann.
- Modellierung der Geometrie direkt in ANSYS mithilfe von Steuerbefehlen.

Auf dem erstgenannten Weg wird aus der Punktwolke mit einer CAD-Software ein Volumenmodell der Verzahnung erstellt und dieses anschließend in ein von ANSYS lesbares, neutrales Datenformat exportiert. Die erzielbare Genauigkeit der exportierten Geometrie ist allerdings durch das CAD-System und das gewählte Datenformat beschränkt. Die Oberfläche eines Beveloidzahns besteht an den Flanken aus Flächen mit großen Krümmungsradien und am Zahnfuß aus Flächen mit deutlich kleineren Radien. Die vom CAD-System beim Datenexport erzielbare Genauigkeit liegt in der Größenordnung von Flankenmodifikationen. Dies ist als ungenügend zu bewerten.

Um die Problematik beim Import von Volumen und Flächen in die FE-Umgebung zu umgehen, bietet sich eine direkte Geometriemodellierung innerhalb des FE-Programms an. Die Komplexität der Zahnform, die erforderliche Genauigkeit und die Anzahl zu berücksichtigender Punkte innerhalb der Verzahnungs-Punktwolke schließen eine händische Modellierung durch den Benutzer jedoch aus. Daher erfolgt die Übergabe

der Geometrieinformationen durch die neu geschaffene Datenschnittstelle „FEM-Erzeuger“ unter Verwendung der ANSYS-eigenen Skriptsprache „APDL ANSYS Parametric Design Language“ [ANSYS09A]. Die Funktionsweise der Datenschnittstelle ist auch in [BECK10] und [BECK11A] beschrieben.

Frühe [FRÜHE11, S. 19] erstellt ebenfalls mithilfe der APDL Stirnschnittmodelle von Zylinderrädern. Volumenmodelle bildet er durch die Extrusion in Zahnbreitenrichtung, in diese Richtung veränderliche Flankenmodifikationen realisiert er durch Verschieben einzelner Knoten in Normalenrichtung. Dieses Vorgehen ist bei Beveloidrädern nicht praktikabel, da sich die Stirnschnittform über der Breite ändert. Aus diesem Grund werden sämtliche mit SimKoS errechneten Punkte durch die Datenschnittstelle direkt an das FE-Modell übergeben, die Punkte durch Spline-Interpolationen zu Linien verbunden und daraus Berandungsflächen und Volumina erstellt. Bild 4.1 veranschaulicht schematisch den Vorgang der Modellbildung.

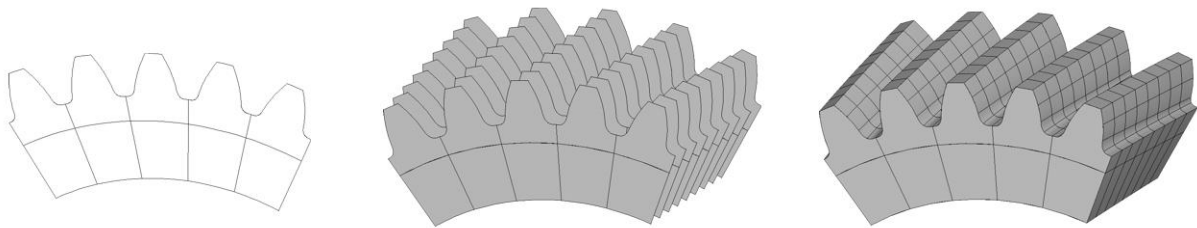


Bild 4.1: Veranschaulichung der Geometrieerzeugung, v.l.n.r.: Erzeugung der Stirnschnittlinien, 2D-Stirnschnittmodell, Volumenmodell

Die erzielte Modellierungsgenauigkeit hängt von der Auflösung der übergebenen Punktwolke ab. Wie in Tabelle 4.1 anhand eines Beispiels einer Beveloidverzahnung ersichtlich ist, ergibt sich im Modellierungsverfahren B mit 49 Stirnschnitten und 30 Punkten auf der Evolvente eine ausreichende Genauigkeit der Geometrie. Ein Zahn wird dabei mit über 5.000 Punkten beschrieben. Die Abweichung der so erzeugten Geometrie liegt im Bereich von 2×10^{-3} mm und ist damit deutlich geringer als bei der Nutzung eines neutralen Datenformats zum Geometrieimport. Alle folgenden Simulationen dieser Arbeit wurden mit dieser Auflösung erstellt.

Ein weiterer Vorteil der direkten Modellierung innerhalb des FE-Programms liegt in der Möglichkeit, Geometriebestandteile zu Gruppen zusammenzufassen und damit gezielt zu bearbeiten. Dadurch kann im weiteren Verlauf der Simulation das Vorgehen systematisiert und automatisiert werden, da die Gruppen für Bearbeitungsbefehle direkt adressierbar sind. So werden beispielsweise die Flächen der Zahnradnabe zu einer

Gruppe zusammengefasst, wodurch sich das Aufbringen der Randbedingungen vereinfacht.

| Modellierungsverfahren | A | B |
|--|--|---|
| zu Grunde gelegte Version von SimKoS | 1.0 [ALXNEIT10], Ergänzung nach [TRAUT09] und [TRAUT10] | 2.0 [TRAUT13] |
| verwendete Auflösung der SimKoS Punktwolke (Stirnschnitte x Evolventenpunkte) | 25 x 30 | 49 x 30 |
| Anzahl erzeugter Stirnschnitte im Modell | 5 | 9 |
| Anzahl berücksichtigter Punkte entlang der Flankenlinie | 25 | 49 |
| Anzahl berücksichtigter Punkte auf der Evolvente | 30 | 30 |
| Anzahl berücksichtigter Punkte auf der Fußkurve (pro Stirnschnitt) | 23 | 23 |
| modellierte Punkte pro Zahn | ca. 3.300 | ca. 5.000 |
| Modellierungsabweichungen am Beispiel eines Beveloidrads: $z = 17$, $\beta = 30^\circ$, $\theta = 10^\circ$, $b = 30$ mm | Flanke: 8 μm Fuß: 17 μm | Flanke: 2 μm Fuß: 1 μm |

Tabelle 4.1: Vergleich der Genauigkeit verschiedener FE-Modellierungen

Mit der vorgestellten Schnittstelle wird für jedes Zahnrad ein Segment bestehend aus fünf Zähnen direkt erzeugt. Das mittlere Zahnpaar der Radsegmente überträgt die Last. Es wird im weiteren Verlauf der Analyse zur Auswertung herangezogen und als Untersuchungszahnpaar bezeichnet. Die modellierten Nachbarzähne dienen der Berücksichtigung der Lastverteilung und der versteifenden Wirkung. Das Zahnvolumen ist über der Breite in acht Segmente unterteilt. Dadurch vereinfacht sich die Selektion von Elementen, die Kontrolle der Vernetzung und die Auswertung der Ergebnisse, da die Elemente der Geometrie fest angehören.

Bei der Erstellung des Modells wird auf das Kopieren von Geometriebestandteilen verzichtet. Das Kopieren würde ein Verschmelzen benachbarter Flächen und Volumina erfordern wozu boolesche Geometrie-Operationen durchgeführt werden müssen. Die Operationen haben negative Auswirkungen auf die erzielbare Genauigkeit [ULRICH12, S. 20]. Sie sind durch die direkte Modellierung der fünf Zähne obsolet.

Der modellierte Radkörper weist eine zylindrische Bohrung auf, in der die Randbedingungen appliziert sind, siehe Bild 4.2. Das radiale Maß zwischen dem Bohrungsradius

und dem Fußkreisradius wird als Zahnkranzdicke (ZKD) bezeichnet [WINTER83, S. 56] und beträgt an der Zehe $4 \times m_n$.

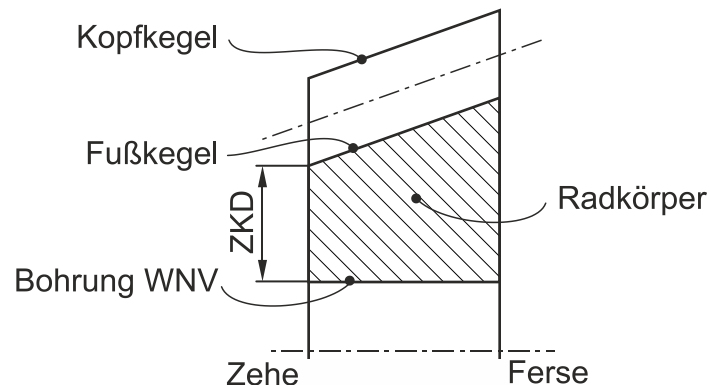


Bild 4.2: Gestaltung des Radkörpers über der Zahnbreite, Zahnkranzdicke (ZKD) an der Zehe

Die Diskretisierung der Geometrie erfolgt durch die Verwendung des in ANSYS integrierten Vernetzungsmoduls. In einem ersten Schritt werden die mittleren Stirnschnitte der beiden Räder mit Flächenelementen vernetzt. Am Untersuchungszahnpaar erhalten die Flanken und Fußkurven ein dichtes Netz. Die Nachbarzähne sind mit zunehmender Entfernung zum Untersuchungszahnpaar gröber vernetzt, um die Knotenanzahl und damit die Rechenzeit zu reduzieren. In einem zweiten Schritt erfolgt die Vernetzung des Zahnvolumens durch Extrusion der Flächenelemente zu Hexaeder-Elementen. Dadurch ist eine über der Zahnbreite identische Vernetzung sichergestellt. Das FE-Modell wird insgesamt mit etwa 200.000 Knoten vernetzt. Den Elementen sind die Materialeigenschaften von Stahl zugeordnet, siehe Tabelle 4.2.

| | | |
|-----------------|--------------|---------|
| E-Modul | E [MPa] | 210.000 |
| Querkontraktion | γ [-] | 0,28 |
| Reibung | μ [-] | 0,1 |

Tabelle 4.2: In den Simulationen verwendete Materialdaten

Die händische Durchführung der vorgestellten Modellierung benötigt einen Zeitaufwand von mehreren Tagen. Durch die Verwendung der vorgestellten skriptbasierten Schnittstelle „FEM-Erzeuger“ geschieht dies automatisch. Die Geometrieerstellung und Vernetzung erfolgt in weniger als einer Minute. Ein weiterer Vorteil der automatischen Modellerstellung ist die geringere Fehlerwahrscheinlichkeit durch eine Fehlbedienung des Benutzers. Ein Beispiel eines FE-Modells ist in Bild 4.3 dargestellt.

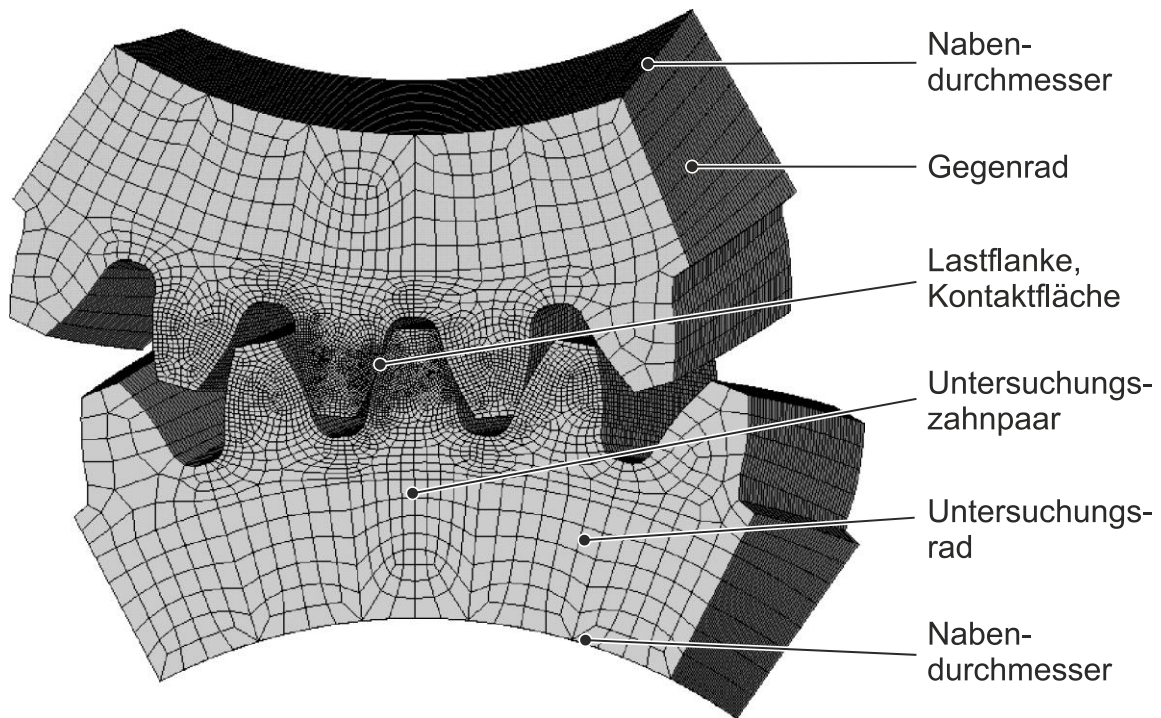


Bild 4.3: Beispiel eines FE-Modells einer schrägverzahnten Beveloidstufe

Jedes Rad weist im FE-Modell ein separates zylindrisches Koordinatensystem auf. Die Stirnschnitte liegen in der R - φ -Ebene, die Zahnbreite verläuft in Z -Richtung. Beide Koordinatensysteme besitzen im Schnittpunkt der Radachsen einen ortsidentischen Ursprung, die Z -Achsen sind um den Achswinkel Σ zueinander verschwenkt. Hierdurch ist eine Modellbearbeitung ohne Koordinatentransformation möglich, beispielsweise zur direkten Vorgabe von Verdrehwinkeln für jedes Rad.

4.2 Randbedingungen

Neben der korrekten geometrischen Modellierung und Vernetzung ist die Wahl der Untersuchungsrandbedingungen von großer Bedeutung für eine valide FE-Simulation. Unter Randbedingungen werden unter anderem Einspannungen, äußere Lasten und Kontaktflächen zusammengefasst.

Das Untersuchungsrad mit dem Untersuchungszahn ist an seinem Nabendurchmesser ohne Freiheitsgrad modelliert. Das Gegenrad weist einen Rotationsfreiheitsgrad auf, Bewegungen in die Koordinatenrichtungen radial und axial sind an seinem Nabendurchmesser gesperrt. Die berührenden Flanken von Untersuchungsrad und Gegenrad sind als Kontaktflächen definiert. Durch Kontaktflächen können in einer FE-Simulation Kräfte zwischen zwei Körpern übertragen werden. Wird eine Geradverzahnung in einer

Wälzstellung des Einzeleingriffs untersucht, berühren sich nur die Flanken der Untersuchungszähne. Die Flanken der Nachbarzähne berühren sich nicht und müssen daher nicht als Kontaktflächen ausgewiesen sein, wodurch Rechenzeit eingespart werden kann. Im Fall einer Schrägverzahnung ist zum Teil kein Einzeleingriffsgebiet vorhanden, sodass sich ebenso die Flanken der Nachbarzähne berühren und als Kontaktflächen modelliert sind. Die Flankenberührung wird stets reibungsbehaftet simuliert.

Die Modellierung der Last orientiert sich an der Belastung realer Zahnräder. Die Lasteinleitung erfolgt am Nabendurchmesser des Gegenrads. Das Lastmoment wird in Kräfte in Umfangsrichtung umgerechnet und gleichmäßig auf den Nabendurchmesser verteilt. Die Größe und das Vorzeichen des Lastmoments kann vorgegeben werden, wodurch Untersuchungen in beide Lastrichtungen möglich sind. Der Kraftfluss verläuft durch die Radsegmente und Kontaktflächen und wird an den Einspannungen des Untersuchungsrad ausgeleitet.

Die Berechnung der Verzahnung ist in beliebigen Wälzstellungen möglich. Um mit Normangaben vergleichbare Ergebnisse erzielen zu können, muss sich die Verzahnung in definierten Wälzstellungen befinden. So ist für Geradverzahnungen die Fußspannung in der Wälzposition „D“ zu bestimmen [DIN3990], für Schrägverzahnungen muss eine Abwälzsimulation in verschiedenen Wälzstellungen durchgeführt werden. Die aktuelle Wälzstellung einer Verzahnung muss daher korrekt eingestellt und kontrolliert werden können. Dies geschieht in der Radmitte.

Im zylindrischen Koordinatensystem wird die Winkelkoordinate eines Punkts „K“ an der Kopfkante in Zahnbreitenmitte herangezogen. K ist der Schnittpunkt der evolventischen Flanke mit dem Kopfkreis. Befindet sich die Verzahnung in der Wälzstellung C, besitzt die Kopfkante K im zylindrischen Koordinatensystem die Winkelkoordinate $K_{\varphi,C}$, siehe Bild 4.4.

$$K_{\varphi,C} = 90^\circ - \varphi_{CK} \quad (4.1)$$

Der Winkel zwischen den Punkten C und K wird aus der Evolventengleichung bestimmt.

$$\hat{\varphi}_{CK} = \text{inv}(\alpha_{at}) - \text{inv}(\alpha_{wt}) \quad (4.2)$$

Der Kopf- und der Betriebseingriffswinkel ergeben sich aus

$$\alpha_{at} = \arccos\left(\frac{r_b}{r_a}\right) \quad (4.3)$$

Die Zahnfußspannung ist eine wichtige Kenngröße zur Verzahnungsauslegung. Sie ist „die bei Belastung einer fehlerfreien Verzahnung durch das statische Nennmoment am Zahnfuß auftretende maximale örtliche Zugspannung“ [DIN3990, S. 3 FF]. Die Zugspannung ist im Stirnschnitt im Bereich des Berührungspunkts einer Tangente an die Fußkurve, die im Winkel von 30° zur Stirnschnittmittellinie verläuft, am größten [DIN3990-3, S. 8]. Aus der FE-Simulation kann die größte erste Hauptspannung in der Fußkurve ausgelesen und direkt mit Angaben nach [DIN3990] verglichen werden. Im Fall von Geradverzahnungen muss die Berechnung in der Wälzstellung D der Verzahnung durchgeführt werden. Im Fall von Schrägverzahnungen sind die maßgebliche Wälzstellung und der höchstbeanspruchte Stirnschnitt nach [NIEMANN03, S. 152] zu ermitteln. Werden die Werte der ersten Hauptspannung in der Fußkurve über der Zahnbreite aufgetragen, kann aus dem Verlauf auf die Lastverteilung längs der Breite geschlossen werden.

Als Tragbild wird der Flankenbereich bezeichnet, in dem es während des Abwälzens einer Verzahnung zur Berührung von Rad und Gegenrad kommt. Sichtbar wird das Tragbild an realen Rädern durch Aufbringung von Farbe auf den Zahnflanken. Beim Abgleiten der Flanken während des Abwälzens reibt sich die Farbe ab, der abgeriebene Bereich stellt das Tragbild dar. In der Ergebnisvisualisierung einer FE-Simulation ist der Bereich mit Flankenberührung rot eingefärbt. Das FE-Tragbild stellt stets ein Ergebnis einer diskreten Wälzstellung dar, weswegen sich die Ausbreitung des berührenden Bereichs in Zahnhöhenrichtung sehr gering darstellt. Ein Beispiel ist in Bild 4.7 auf Seite 61 aufgeführt.

Als weiteres Ergebnis kann die Zahnfedersteifigkeit bestimmt werden. Die Zahnfedersteifigkeit ist die erforderliche Zahnnormalkraft, um ein im Eingriff stehendes Zahnpaar von 1 mm Zahnbreite um $1 \mu\text{m}$ normal zur Zahnevolvente zu verformen [DIN3990, S. 51]. Für einen Ergebnisvergleich mit FE-Berechnungen sind daher zweidimensionale Analysen ausreichend. Dies spart Modellierungsaufwand und Rechenzeit. In den Analysen werden für Rad und Gegenrad die maximalen Verformungen der Flanken im Berührungspunkt ermittelt. Die Verformungsergebnisse liegen zunächst in kartesischen Koordinaten des Raums vor und müssen mithilfe des Betriebseingriffswinkels in die Richtung des Vektors der Eingriffslinie umgerechnet werden. Die Verformung in Richtung der Eingriffslinie wird als $U_{1,2}$ bezeichnet. Die Teilsteifigkeit $c'_{1,2}$ eines Rades ergibt sich durch Division der Kraft durch die Verformung.

$$c'_{1,2} = \frac{F_{bt}}{U_{1,2}} \tag{4.6}$$

Die Teilsteifigkeit eines Zahns ist im Kopfbereich kleiner als bei einer Berührung im Fußbereich. Der Kurvenverlauf der Teilsteifigkeit entlang der Eingriffsstrecke ist degressiv beziehungsweise progressiv, siehe auch Bild 4.5 rechts. Die Teilsteifigkeiten beider Räder ergeben zusammen, analog zu einer Reihenschaltung zweier Federn, die Zahnfedersteifigkeit eines Zahnpaars.

$$c' = \frac{1}{\frac{1}{c'_1} + \frac{1}{c'_2}} \tag{4.7}$$

Es ergibt sich ein Verlauf der Zahnfedersteifigkeit über der Eingriffslinie als Polynom 4. Ordnung [ZIEGLER71, S. 88], siehe dazu auch Bild 4.5 links. Der Höchstwert ist der mit Angaben aus [DIN3990] vergleichbare Steifigkeitswert der Verzahnung.

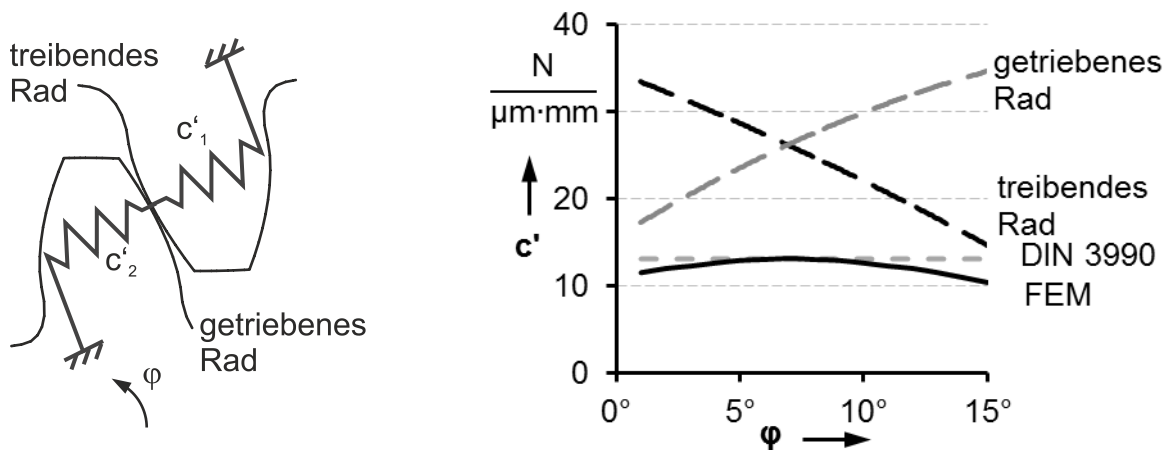


Bild 4.5: links: Symbolisierung der Zahnfedersteifigkeit als Federnschaltung
rechts: (Teil-) Steifigkeitsverläufe beim Abwälzen,
in Anlehnung an [BECK13]

4.4 Automatisierung des Simulationsablaufs

Die vorgestellte Datenschnittstelle „FEM-Erzeuger“ besteht aus einer Kombination von Bearbeitungs- und Auswerteskripten. Die Skripte verwenden ebenfalls die APDL und unterstützen die drei Phasen der FE-Simulation Preprocessing, Solving und Postprocessing. Dadurch ist ein effizientes Vorgehen möglich.

Bei Reihenuntersuchungen ergibt sich die Problematik einer eindeutigen Benennung aller Daten. Die Anzahl an Verzahnungsparametern, die eine Verzahnung definieren, ist sehr groß. Sämtliche Parameter können nicht in die Benennung einer Analyse aufge-

nommen werden. Eine Verzahnungssimulation erhält daher automatisiert eine eindeutige Identifikationsnummer, bestehend aus Datum und Uhrzeit ihrer Erstellung. Die Zuordnung zu konkreten Verzahnungsparametern erfolgt über ein Datenbanksystem. Durch eine automatische Ablaufsteuerung ist sichergestellt, dass die Nummerierung eindeutig ist.

Das Preprocessing wird durch zahlreiche Skripte unterstützt, zum Beispiel für das Ändern des Achswinkels, der Wälzstellung, das Aufbringen von Randbedingungen wie Einspannungen und Lasten und der Vernetzungssteuerung sowie zur Überprüfung der Modellierung etc. Zudem können abgeleitete Varianten einer Ausgangsanalyse mit veränderten Randbedingungen erstellt, berechnet und ausgewertet werden.

Eine vollständige Automatisierung des Berechnungsablaufs ist ebenfalls möglich. Dieses Vorgehen hat sich vor allem in zwei Einsatzszenarien als effizient erwiesen:

- Beanspruchungsermittlung im gesamten Eingriffsfeld: In einem vordefinierten Zyklus wird das Modell in eine neue Wälzstellung gebracht, automatisch umbenannt, berechnet und ausgewertet. Der Zyklus wiederholt sich je nach Benutzervorgaben für verschiedene Wälzstellungen.
- Bestimmung der Zahnfedersteifigkeit: Aus einem dreidimensionalen Modell werden Teilmodelle für verschiedene Stirnschnitte und Wälzstellungen automatisiert erstellt, umbenannt, Rechnungen durchgeführt und ausgewertet.

Ein Eingreifen des Benutzers ist nach Beginn der automatisierten Berechnungsroutine nicht mehr erforderlich, der Aufwand sinkt dadurch deutlich. Durch eine Bereinigungsroutine können nach einem Rechengang überzählige temporäre Dateien der FE-Analyse automatisch gelöscht werden, um Speicherplatz einzusparen.

Zur schnelleren Ergebnisauswertung stehen ebenfalls Skripte zur Verfügung. Beispielsweise werden die Spannungsergebnisse und Klaffungen zur Weiterverarbeitung in Textdateien exportiert und Bilder der Verzahnung erstellt, welche entsprechend der Beanspruchung eingefärbt sind. Ein Überblick über das Zusammenwirken der einzelnen Bestandteile der Simulationskette ist in Tabelle 4.3 dargestellt.

| Phase | Preprocessing | | Solving | Postprocessing | | |
|----------|---------------------|---|--|-------------------------|--|------------------------------|
| Programm | SimKoS | FEM-Erzeuger | ANSYS Makros/Skripte | | Tabellenkalkulation | |
| Aktionen | Punktwolke erzeugen | Dateien benennen Punktwolke konvertieren Geometrie erstellen Vernetzungsvorschlag Randbedingungen | Dateien benennen Randbedingungen Kontaktdefinition Einstellung der Wälzstellung bei Bedarf Wiederholung als Zyklus | Berechnungsdurchführung | Auswertung Visualisierung Datenbereinigung | Auswertung Visualisierung |

Tabelle 4.3: Arbeitsschritte einer FE-Simulation und daran beteiligte Unterstützungswerkzeuge

4.5 Validierung der FE-Simulation

Die Durchführung einer FE-Simulation besteht aus einer Vielzahl einzelner Arbeitsschritte. Die Simulationsergebnisse sind daher stets kritisch zu prüfen. Zur Absicherung der korrekten Funktion der Simulation wird ein Screening-Versuchsplan mit Zylinderrädern durchgeführt und die Simulationsergebnisse mit Normergebnissen verglichen.

4.5.1 Untersuchungsraum

Eine Überprüfung aller Verzahnungsdaten und ihrer Kombinationen mit vollständigen faktoriellen Versuchsplänen ist aufgrund des Zeitbedarfs zur Rechnungsdurchführung und des notwendigen Speicherplatzes nicht möglich. Screening-Versuchspläne bieten den Vorteil, mit reduziertem Aufwand einen Überblick über die Problemstellung zu erhalten, um dadurch die wesentlichen Faktoren zu bestimmen [KLEPPMANN13, S. 129 ff].

Dazu werden aus den Verzahnungsdaten vier Parameter als Faktoren ausgewählt und in Stufen variiert. Die ausgewählten Faktoren sind mit A bis D bezeichnet und besitzen einen wesentlichen Einfluss auf die Zahnform beziehungsweise auf die Fußbeanspruchung. Die Stufen der Faktoren sind so gewählt, dass sie den praktisch üblichen Bereich abdecken, siehe Tabelle 4.4.

Die Benennungen der untersuchten Kombinationen setzen sich aus den Faktoren zusammen. Liegt ein Faktor auf der + Stufe vor, ist sein Buchstabe Teil der Bezeichnung, andernfalls ist ein Unterstrich „_“ eingefügt. So weist beispielsweise die Verzahnung mit

der Benennung „A_C_“ die Daten $z = 42$, $x = 0$, $\beta = 20^\circ$, $\rho_{fP} = 0,25$ auf. Mithilfe dieser Notation sind komplexe Verzahnungsbeschreibungen stark komprimiert darstellbar.

| Faktor | Benennung: | | Stufe - | Stufe + |
|--------|--------------------|------------------|---------|---------|
| | | | „_“ | Faktor |
| A | Zähnezahl | $z [-]$ | 21 | 42 |
| B | Profilverschiebung | $x [-]$ | 0 | 0,5 |
| C | Schrägungswinkel | $\beta [^\circ]$ | 0 | 20 |
| D | Fußrundungsradius | $\rho_{fP} [-]$ | 0,25 | 0,38 |

Tabelle 4.4: Untersuchte Faktoren und Faktorstufen der Zylinderräder

Die weiteren Verzahnungsdaten sind in Tabelle 4.5 zusammengefasst.

| | | |
|-------------|-------------------|-----|
| Normalmodul | $m_n [\text{mm}]$ | 4,5 |
| Zahnbreite | $b [\text{mm}]$ | 30 |
| Last | $T [\text{Nm}]$ | 500 |
| Übersetzung | $i [-]$ | 1 |

Tabelle 4.5: Weitere Verzahnungsdaten der untersuchten Zylinderräder

Mit den gewählten Faktoren entsteht ein fraktioneller faktorieller 2^{4-1} Versuchsplan. Er besitzt acht Faktorstufenkombinationen was eine Auflösung von IV ergibt, und weist somit nur ein geringes Risiko der Effektvermischung auf [KLEPPMANN13, S. 129 ff]. Zur Versuchsdurchführung werden die Verzahnungen sowohl mit dem beschriebenen Vorgehen simuliert als auch Berechnungen nach [DIN3990] durchgeführt. In der FE-Analyse werden Abwälzsimulationen durchgeführt, um das gesamte Eingriffsfeld zu berücksichtigen.

4.5.2 Einzelergebnisse für die Fußspannung

Die Fußspannungs-Ergebnisse des Screening-Versuchsplans aus der Simulation und der Normrechnung sind exemplarisch für eine Geradverzahnung (GVZ) und Schrägverzahnung (SVZ) in Bild 4.6 über der Zahnbreite aufgetragen. Für die Geradverzahnung ergibt sich in der mittleren Zahnbreite ein nahezu gleichmäßiger Verlauf. Zu den Stirnseiten ist die Beanspruchung reduziert, was auf die verringerte Steifigkeit aufgrund der fehlenden Stützwirkung zurückzuführen ist. Im Fall der Schrägverzahnung weist das FE-Ergebnis einen Hochpunkt auf. Die ungleichmäßige Spannungsverteilung bei Schrägverzahnungen begründet sich mit der schräg über der Flanke verlaufenden Berührlinie, siehe auch Bild 4.7 (rechts), und der daraus folgenden unterschiedlichen Biegehebelarme. Der Stirnschnitt, in welchem die höchste Beanspruchung auftritt, kann mit Gleichung (2.8) bestimmt werden, das analytische Ergebnis ist in Bild 4.6 markiert.

Dabei zeigt sich eine gute Übereinstimmung zwischen dem analytischen Ergebnis des kritischen Stirnschnitts und dem Hochpunkt in den FE-Ergebnissen.

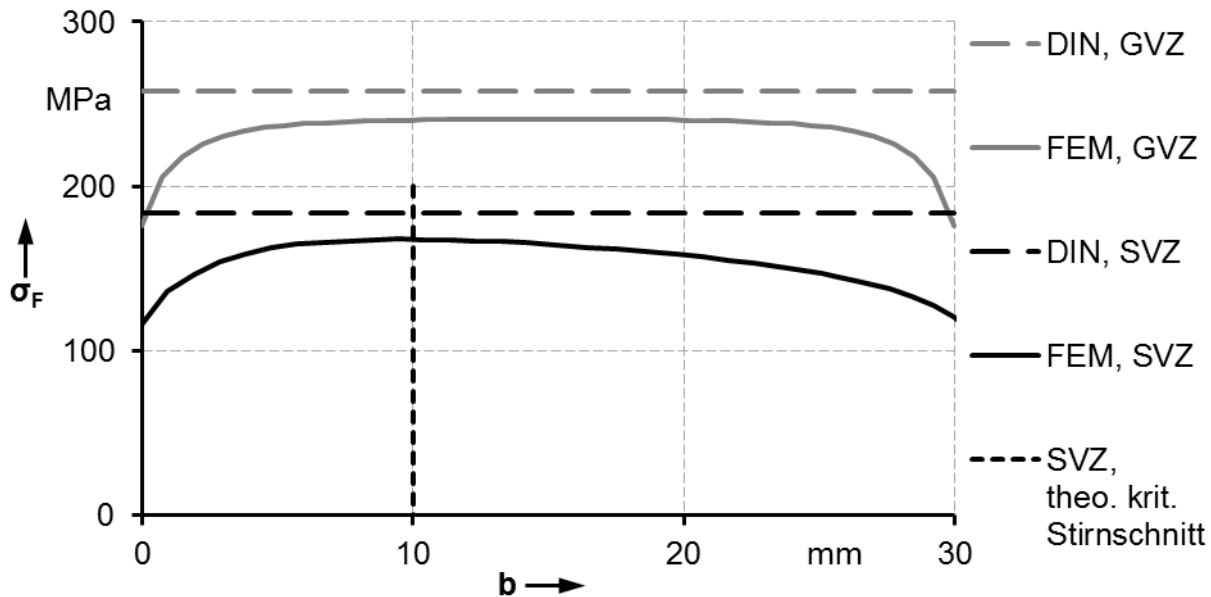


Bild 4.6: Auswertung der Fußspannungen über der Zahnbreite für die Gerad- (GVZ) und Schrägverzahnung (SVZ)

Im Bild 4.6 sind neben den FE-Ergebnissen auch die Ergebnisse nach [DIN3990] aufgetragen. Das Vorgehen nach Norm ermöglicht keine detaillierte Berechnung in einzelnen Stirnschnitten. Das Normergebnis gilt für die gesamte Verzahnung und ist daher als horizontale Linie über der gesamten Breite im Bild 4.6 eingezeichnet. Die DIN-Ergebnisse liegen über denen der FE-Analyse und sind daher tendenziell konservativ.

Die FE-Simulation berücksichtigt unmittelbar das Verformungs- und Beanspruchungsverhalten der Zahnform. Beim Wechsel vom Mehrfach- zum Einzeleingriffsgebiet des Untersuchungszahns verformt er sich mit zunehmender Belastung. Die volle Last wird daher nicht im theoretisch idealen Einzeleingriffspunkt übertragen, da der Berührungspunkt aufgrund der Verformung auf der Eingriffslinie wandert. Daraus resultieren leicht geänderte Richtungen der Last und Längen der Biegehebelarme. Diese Umstände sind unter anderem Gründe für die tendenziell konservative Ermittlung der Fußbeanspruchung nach [DIN3990]. Die immanente Ungenauigkeit ist eine wesentliche Motivation für die Entwicklung höherwertiger Rechenverfahren [OTTO09, S. 1 ff], wie sie in Kapitel 2.3.2 dargestellt sind. Mit ihnen sollen die Verzahnungsgeometrie und das Verformungsverhalten detaillierter als nach [DIN3990] erfasst und Tragfähigkeitsreserven erkannt werden können.

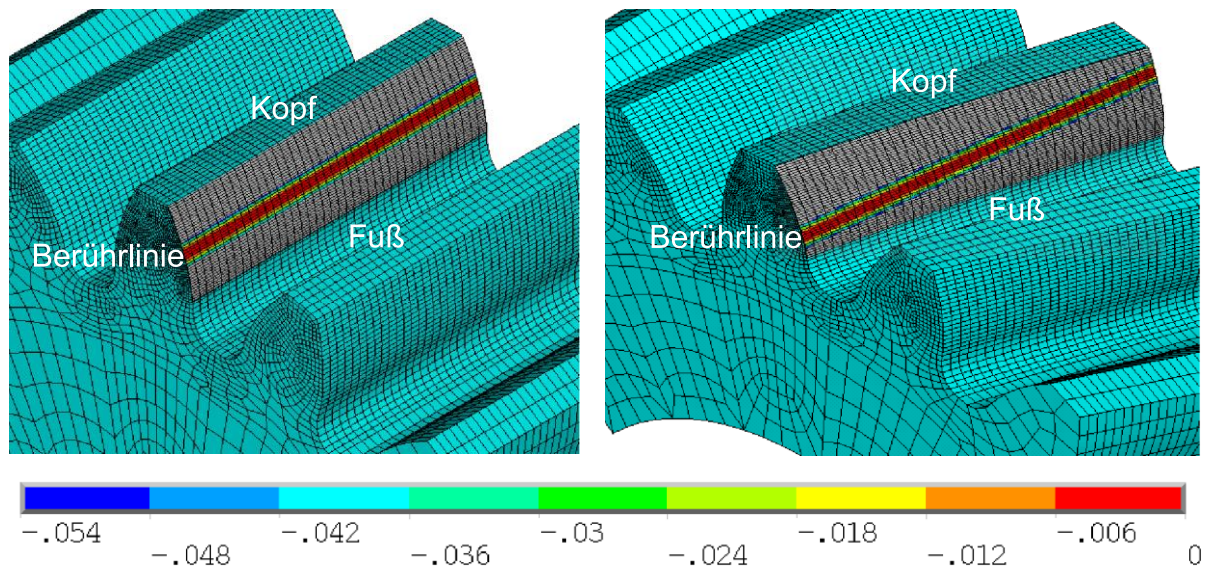


Bild 4.7: Tragbilder bzw. Berührlinien der zylindrischen Geradverzahnung (links), Schrägverzahnung (rechts), Einfärbung entsprechend der Klaffung in mm

4.5.3 Effektergebnisse des Teilfaktorplans

Die für zwei Verzahnungen exemplarisch in Kapitel 4.5.2 dargestellten numerischen und analytischen Ergebnisse werden für jede Verzahnung des Screenings ausgewertet. Der mit dem Screening zu untersuchende Effekt ist der Einfluss der Faktoren auf die Abweichungen zwischen den Simulationsergebnissen und den Normergebnissen. Die Abweichung $\Delta\sigma_F$ berechnet sich zu:

$$\Delta\sigma_F = \frac{\sigma_{F,DIN} - \sigma_{F,FEM}}{\sigma_{F,FEM}} \cdot 100\% \quad (4.8)$$

Der Effekt ergibt sich nach [KLEPPMANN13, S. 115]:

$$Effekt = \frac{2}{m} \cdot \sum_{i=1}^m (Vorzeichen_i \cdot \Delta\sigma_{F,i}) \quad \text{mit } m = 8 \quad (4.9)$$

Die berechneten Effekte sind in Bild 4.8 dargestellt. Keiner der untersuchten Faktoren bewirkt einen größeren Einfluss als 5 % auf die Abweichung. Das Vorgehen kann im untersuchten Parameterraum somit als robust eingestuft werden.

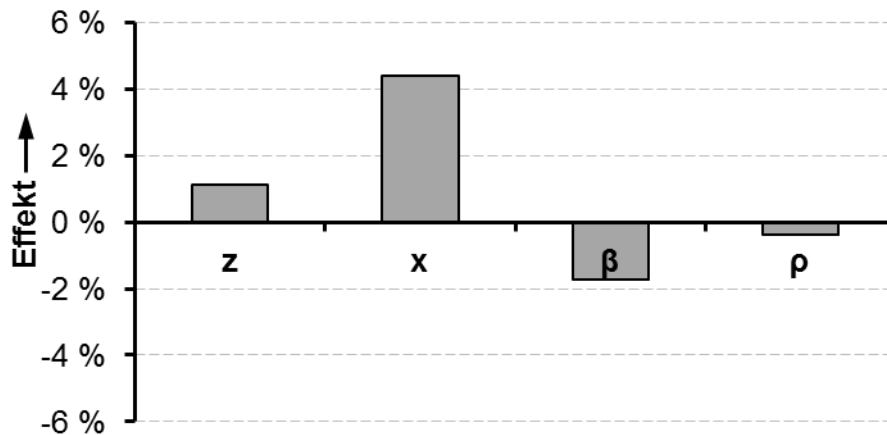
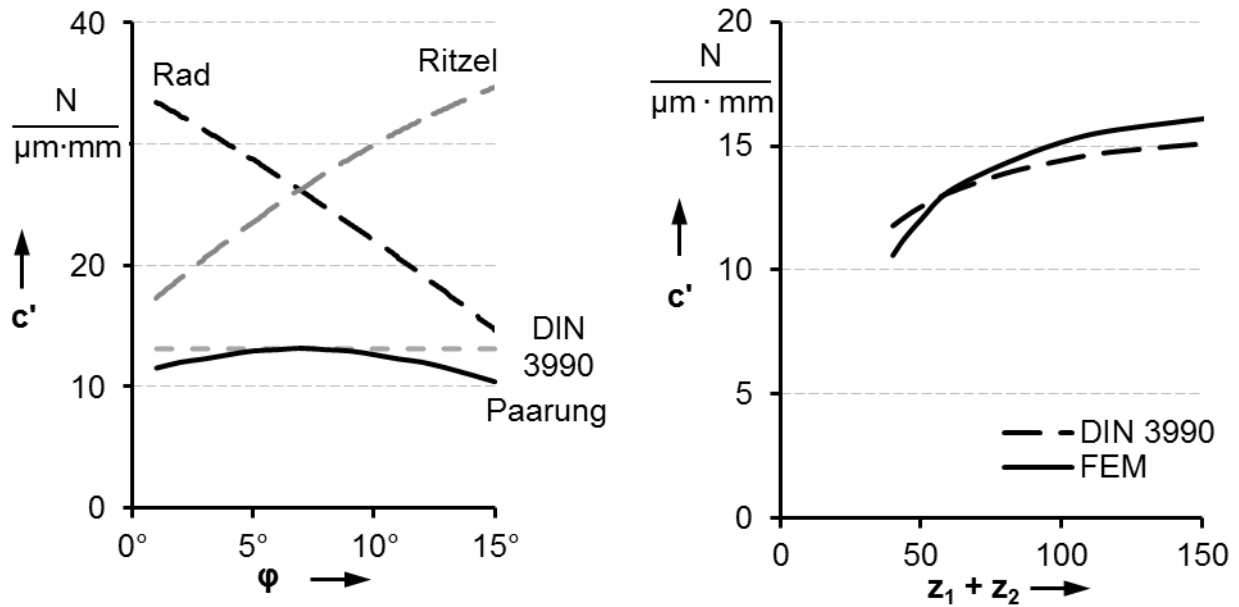


Bild 4.8: Effekte auf die Abweichung zwischen FE- und Norm-Ergebnissen

4.5.4 Steifigkeitsberechnung

Neben der Ermittlung der Beanspruchungen wird die FEM zur Berechnung der Zahnfedersteifigkeit herangezogen. Die Validierung erfolgt anhand einer Parametervariation. Als Ausgangsmodell der Variation dient das Norm-Bezugsprofil des analytischen Ansatzes [DIN3990, S. 52]. Vom Ausgangsmodell beginnend werden die Parameter Zähnezahl und Profilverschiebung variiert. Beide Verzahnungskenngrößen gehen in den analytischen Ansatz nach [DIN3990] für die Steifigkeit ein, siehe Gleichung (2.17). Um die Auswirkung der im analytischen Ansatz enthaltenen Näherung einer von der Last unabhängigen Steifigkeit abzuschätzen, wird als zusätzlicher Parameter die Linienlast variiert. Für die Verzahnungen werden die Steifigkeiten mithilfe des analytischen Ansatzes und mit der FE-Simulation bestimmt.

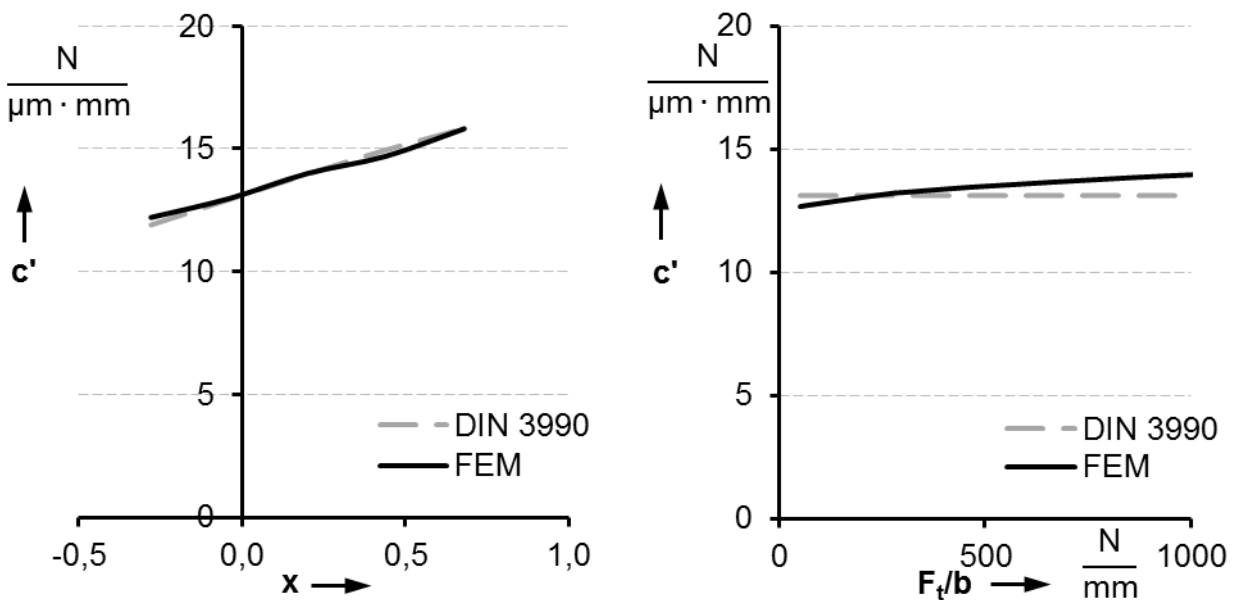
In Bild 4.9 sind links die ermittelten Steifigkeitsanteile von Ritzel und Rad sowie die sich nach Gleichung (4.7) ergebende Zahnfedersteifigkeit der Ausgangspaarung in verschiedenen Wälzstellungen aufgetragen. Zusätzlich ist das Ergebnis nach [DIN3990] dargestellt. Da mit dem Normansatz nach Gleichung (2.16) keine Untersuchung verschiedener Wälzstellungen möglich ist, ist das Ergebnis als horizontale Linie eingetragen. Im rechten Teilbild sind die Ergebnisse der Variation der Zähnezahl aufgetragen.

**Bild 4.9:** Steifigkeitsergebnisse der Parametervariation

links: Ergebnisse des Ausgangsmodells, Steifigkeiten beim Abwälzen

rechts: Variation der Zähnezahl

Im Bild 4.10 sind links die Ergebnisse einer Variation der Profilverschiebung aufgetragen. Rechts sind die Ergebnisse der Lastvariation dargestellt.

**Bild 4.10:** Steifigkeitsergebnisse der Parametervariation

links: Variation der Profilverschiebung

rechts: Variation der Last

4.5.5 Bewertung der Ergebnisse

Die FE-Simulationen zur Ermittlung der Zahnfußspannungen ergeben leicht niedrigere Werte als die Vergleichsrechnung nach [DIN3990]. Dies kann auf die unmittelbare Berücksichtigung der Zahnform und Lastaufteilung auf mehrere gleichzeitig im Eingriff stehende Zähne in der Simulation zurückgeführt werden. Der Effekt und seine Auswirkungen sind auch in der Literatur beschrieben, [SCHINAGL02, S. 110], [LINKE10, S. 315]. Der kritische Stirnschnitt in der FE-Simulation deckt sich sehr gut mit der theoretischen Vorhersage. Die Effekte der Screening-Versuche liegen unter 5 %. Die Simulation ergibt somit für einen großen Bereich untersuchter Parameter geringe Abweichungen.

Der Vergleich der berechneten Steifigkeiten zeigt ebenfalls ein hohes Maß an Übereinstimmung zwischen der numerischen und analytischen Lösung.

Nach [DIN3990] kann die Beanspruchungsermittlung mit jedem geeigneten messtechnischen oder mathematischen Verfahren erfolgen. Dies schließt ausdrücklich die Methode der Finiten-Elemente mit ein. Im vorangegangenen Abschnitt konnte eine gute Übereinstimmung der Simulationsergebnisse sowohl in ihren Tendenzen als auch den absoluten Werten mit den Ergebnissen der analytischen Rechnungen gezeigt werden. Daher kann das in Kapitel 4 beschriebene Vorgehen als DIN 3990-A konform bezeichnet werden, sodass es sinnvoll für Beveloidräder verwendet werden kann.

4.6 FE-Analyse von Beveloidrädern

Das vorgestellte Simulationsverfahren wird exemplarisch auf zwei Beveloidverzahnungen angewendet, um die Auswirkungen der ungleichmäßigen Last- und Beanspruchungsverteilung aufzuzeigen. FEM-Reihenuntersuchungen von Beveloidverzahnungen sind in Kapitel 8.4 dargestellt. Bei den hier aufgeführten Verzahnungen handelt es sich um eine geradverzahnte Beveloidradpaarung und eine mit 20° schrägverzahnte Beveloidrad-Paarung. Beide Verzahnungen bilden jeweils einen Achswinkel von 10°. Die Verzahnungsdaten sind in Tabelle 4.6 aufgeführt.

| | | |
|--------------------|-----------------|-------------|
| Achswinkel | Σ [°] | 10 |
| Schrägungswinkel | β [°] | 0° bzw. 20° |
| Normalmodul | m_n [mm] | 4,5 |
| Zahnbreite | b [mm] | 30 |
| Profilverschiebung | x_{Mitte} [-] | 0 |
| Zähnezahl | $z_1 = z_2$ [-] | 33 |
| Last | T [Nm] | 500 |

Tabelle 4.6: Verzahnungsdaten der untersuchten Beveloidverzahnungen

Die Beanspruchungsverteilung im Stirnschnitt ist beispielhaft in Bild 4.11 dargestellt. Analog zu Zylinderrädern liegt der Ort der höchsten Zugspannung im Stirnschnitt im Bereich des Berührungspunkts einer 30° Tangente an die Fußkurve. Diese Beanspruchung ist nach DIN 3990-3 als Fußspannung festgelegt.

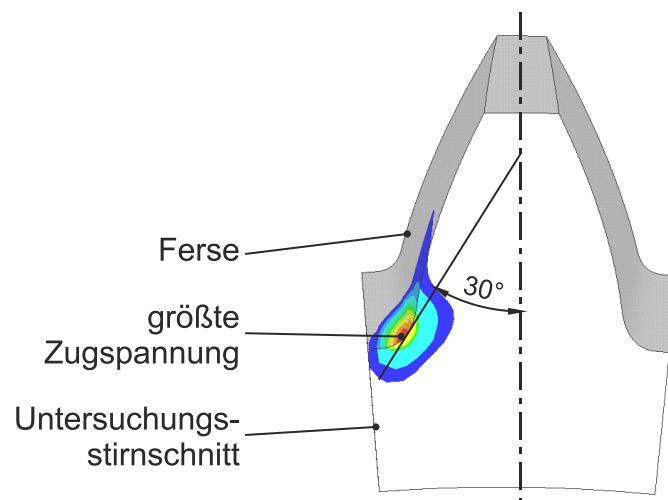


Bild 4.11: Maximale Fußspannung im Bereich des Berührungspunkts der 30° Tangente an der Fußkurve, [BECK12B, S. 122]

Als Ergebnis der FE-Rechnung wird die maximale Fußspannung aller Stirnschnitte und Wälzstellungen ausgewertet.

$$\sigma_{F,FEM} = \max(\sigma_F(\zeta, WS)) \quad (4.10)$$

Im Bild 4.12 sind die Fußspannungen der Gerad- (links) und Schrägverzahnung (rechts) entlang der Zahnbreite dargestellt. Es ergeben sich ungleichmäßige Verläufe. Die FE-Ergebnisse weisen eindeutige Hochpunkte und große Spannungsgradienten an den Stirnseiten der Räder auf.

Im Bild 4.12 sind neben den numerisch ermittelten Werten auch die Ergebnisse der Berechnung zweier Ersatz-Zylinderradverzahnungen entsprechend Kapitel 2.6.2 nach [DIN3990] aufgetragen. Sie besitzen die gleichen Verzahnungsdaten wie die Beveloidräder in der Zahnmitte. Für eine praktische Auslegung muss die spannungserhöhende Wirkung der punktuellen Flankenberührung im analytischen Rechengang mit dem Breitenlastfaktor $K_{H\beta}$ berücksichtigt werden. Wie groß dieser in Abhängigkeit der Profilverschiebungswinkel, Achs- und Schrägungswinkel ist, ist unbekannt. Eine Rechenvorschrift existiert nicht, der Faktor muss frei geschätzt werden. Für die Untersuchungen in dieser Arbeit wird der Faktor für Ersatz-Zylinderpaarungen zu eins gewählt.

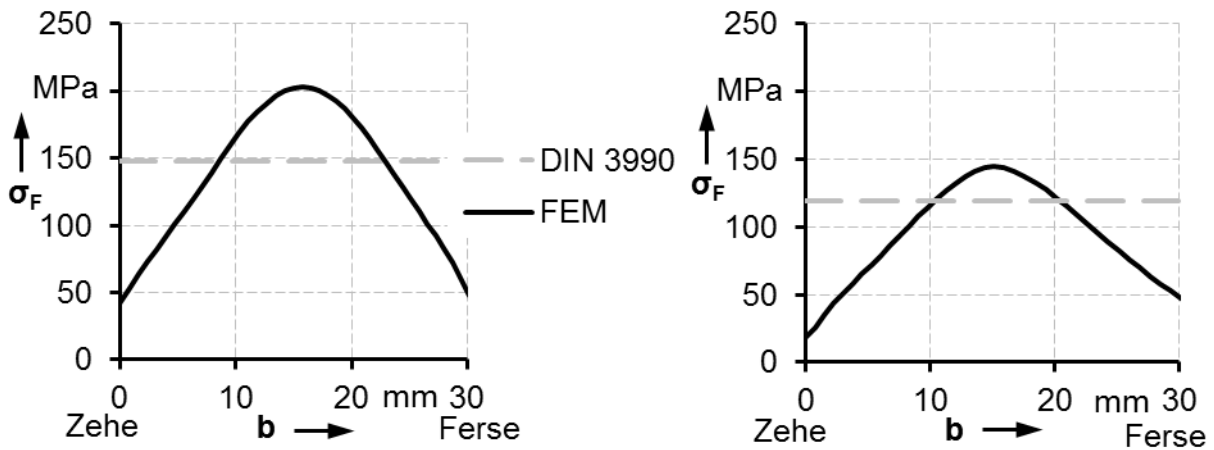


Bild 4.12: Fußspannungen der Beveloidräder entlang der Zahnbreite, Geradverzahnung (links), Schrägverzahnung (rechts)

Da eine Berechnung nach [DIN3990] keine lokale Berechnung entlang der Zahnbreite darstellt, bezieht sich das Ergebnis auf die gesamte Zahnbreite. Normergebnisse werden daher in dieser Arbeit in Diagrammen der Spannung entlang der Breite als horizontale Gerade dargestellt. Wie im Bild 4.12 zu sehen ist, ergeben sich für die Ersatz-Zylinderräder deutlich kleinere Werte als die maximalen FE-Werte. Die Verzahnungen sind demnach höher beansprucht als mit dem analytischen Ansatz ermittelt.

Im Bild 4.13 sind die Tragbilder einer Wälzstellung beider Beveloid-Verzahnungen dargestellt.

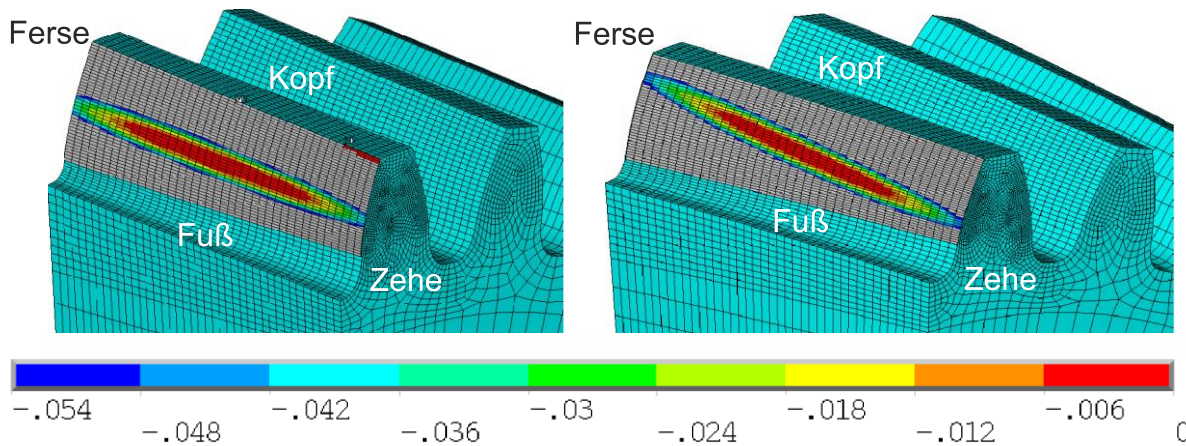


Bild 4.13: Tragbilder der Beveloid-Geradverzahnung (links), -Schrägverzahnung (rechts), Einfärbung entsprechend der Klaffung in mm

Es zeigt sich im Vergleich zu den Tragbildern der Zylinderräder in Bild 4.7 eine Konzentration der berührenden Bereiche in den Radmitten, während an den Stirnseiten der Räder Klaffung auftritt. In der Zahnmitte liegen die Hochpunkte der Spannungsverteilung.

lungen. Es besteht somit ein Zusammenhang zwischen der reduzierten tragenden Breite und der Beanspruchungskonzentration, er kann auf die geometrischen Eigenschaften der Beveloidverzahnungen zurückgeführt werden. Dies wird auch im Vergleich zu den Spannungsergebnissen von Zylinderrädern in Bild 4.6 deutlich, bei denen ein vollständiges Tragen und eine gleichmäßig verteilte Beanspruchung auftreten.

4.7 Fazit der FE-Simulationsmethode

Die Finite-Elemente-Methode ist zur Ermittlung strukturmechanischer Beanspruchungen geeignet. Mit dem vorgestellten Arbeitsablauf können weitgehend automatisiert Modelle von Verzahnungen erstellt, berechnet und die Fußbeanspruchung und Steifigkeit ausgewertet werden. Das Vorgehen ist durch die Automatisierung deutlich beschleunigt und effizienter als eine händische Bearbeitung.

Ein Screening-Versuchsplan für Zylinderradpaarungen zeigt gute Übereinstimmungen zwischen den FE-Ergebnissen und den Normberechnungen. In Parametervariationen sind ebenfalls gute Übereinstimmungen der nach Norm und mit FE berechneten Steifigkeitswerte von Zylinderrädern feststellbar.

Exemplarisch werden die Fußspannungen für je eine gerad- und schrägverzahnte Beveloidradpaarung dargestellt. Die Ergebnisse zeigen einen deutlich ungleichmäßigen Verlauf entlang der Zahnbreite. Der Maximalwert kann nicht analytisch mit einer Ersatz-Zylinderradpaarung bestimmt werden. Der Normansatz ermöglicht keine lokale Berechnung entlang der Zahnbreite und wesentliche Einflussparameter wie der Breitenlastfaktor für Beveloidräder sind nicht definiert.

Mit der Simulationsmethode können nun Reihenuntersuchungen der Zahnfedersteifigkeit, siehe Kapitel 5, und Lastkonzentration für Beveloidrädern, siehe Kapitel 8.4, durchgeführt und effizienter abgearbeitet werden. Das Ziel ist es, aus den Ergebnissen einen analytischen Ansatz zur Ermittlung der ungleichmäßigen Last- und Beanspruchungsverteilung abzuleiten.

5 Zahnfedersteifigkeit von Beveloidverzahnungen

Für die Berechnung der Breitenlastverteilung von Beveloidverzahnungen wird ein Federnmodell herangezogen, welches im nachfolgenden Kapitel 6 beschrieben ist. Für dessen Anwendung ist die Kenntnis der Zahnfedersteifigkeit der Verzahnung erforderlich. Damit die Berechnung der Breitenlastverteilung ohne Zuhilfenahme von Berechnungsprogrammen möglich ist, bedarf es auch zur Bestimmung der Zahnfedersteifigkeit einfacher, analytischer Gleichungen. Daher soll im Folgenden die Übertragbarkeit der Steifigkeitsberechnung von Zylinderrädern nach [DIN3990] auf Beveloidräder geprüft werden. Die Untersuchung wird mit der Methode der Finiten-Elemente durchgeführt, das Vorgehen dazu ist in Kapitel 4.3 beschrieben. Die in diesem Kapitel vorgestellten Ergebnisse sind auszugsweise auch in [BECK13, S. 1501 ff] beschrieben.

5.1 Adaption des Verfahrens nach DIN 3990 für Beveloidräder

In [DIN3990] ist ein einfaches Berechnungsverfahren zur Ermittlung der Zahnfedersteifigkeit von Zylinderrädern enthalten. Mit dem Näherungspolynom nach Gleichung (2.17) wird der Maximalwert der Steifigkeit während des Abwälzens berechnet. In der Norm wird die Abweichung zu den Ergebnissen von Weber und Banaschek [WEBER55] mit maximal 8 % angegeben [DIN3990-1, S. 52]. Näherungsweise finden die Steifigkeitswerte von Zylinderrädern auch für andere Zahnradtypen wie beispielsweise Kegelräder Verwendung [DIN3991, S. 5]. Daher liegt die Übertragung des rechnerischen Ansatzes auf Beveloidräder nahe, wobei allerdings die Auswirkungen der von Zylinderrädern abweichende Zahnform zu untersuchen ist. Die wesentlichen Unterschiede, welche nicht im Näherungspolynom nach [DIN3990] berücksichtigt werden, sind im nachfolgenden Bild 5.1 zusammengefasst.

Die Stirnschnitte von geradverzahnten Beveloidrädern besitzen nach Gleichung (2.1) einen zum Bezugsprofilwinkel von 20° geringeren Wert des Profilwinkels, Teilbild A in Bild 5.1. Im Fall von Schrägverzahnungen ergeben sich für Rechts- und Linksflanken unterschiedliche Stirneingriffswinkel, woraus eine asymmetrische Zahnform folgt, Teilbild B in Bild 5.1. Wegen der veränderlichen Profilverschiebung über der Breite ist der Fußkreisdurchmesser veränderlich und somit auch die Zahnkranzdicke und die Einspannelastizität der Verzahnung, Teilbild C in Bild 5.1.

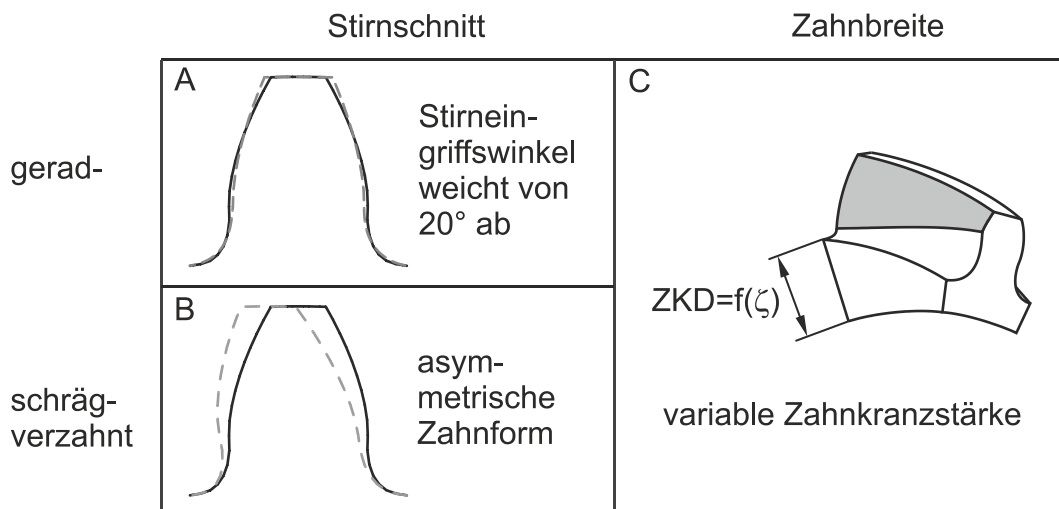


Bild 5.1: Wesentliche Unterschiede der Zahnformen von Beveloidrädern und Zylinderrädern, in Anlehnung an [BECK13]

Die Auswirkungen dieser Unterschiede auf die Zahnfedersteifigkeit sind zu untersuchen und mit Anpassungsfaktoren für das Näherungspolynom nach Gleichung (2.17) zu berücksichtigen.

5.2 Anpassungsfaktoren für Beveloidräder

Der Berechnungsansatz nach [DIN3990] bestimmt die Steifigkeit der Verzahnung in einem Stirnschnitt. Der Ansatz geht von einer über der Zahnbreite konstanten Zahnform und Steifigkeit aus. Um die im Vergleich zu Zylinderrädern abweichende Zahnform bei der Bestimmung der Zahnfedersteifigkeit berücksichtigen zu können, werden nachfolgend Anpassungsfaktoren für den Berechnungsansatz nach [DIN3990] eingeführt. Die Faktoren sind für eine abschnittsweise Bestimmung der Steifigkeit von Beveloidradstirnschnitten definiert.

Die Steifigkeit zweier Beveloidrad-Stirnschnitte in kreuzender Achslage c'_{Bev} , welche in eine Ebene gekippt sind, wird definiert als das Produkt aus der Zylinderradsteifigkeit c'_{DIN3990} und dem Faktor C_{Bev} . Er fasst die Auswirkungen der geometrischen Unterschiede von Beveloidrädern auf die Steifigkeit zusammen.

$$c'_{\text{Bev}} := c'_{\text{DIN3990}} \cdot C_{\text{Bev}} \quad (5.1)$$

Der Faktor C_{Bev} besteht aus zwei Teilfaktoren, die die abweichende Zahnform im Zahnlängsschnitt mit C_{ZKD} beziehungsweise im Zahnquerschnitt mit $C_{\alpha, \text{Bev}}$ berücksichtigen. Die drei Faktoren sind einheitenlos definiert.

$$C_{\text{Bev}} := C_{\text{ZKD}} \cdot C_{\alpha, \text{Bev}} \quad (5.2)$$

Zur Definition der Faktoren wird die Steifigkeit von Beveloidverzahnungen mithilfe des in Kapitel 4.3 vorgestellten numerischen Verfahrens mittels FEM bestimmt. Als Ausgangsmodell der Parametervariationen dient eine Zylinderradverzahnung nach Schäfer [SCHÄFER71, S. 93], auf dessen Arbeit das Näherungspolynom zurückgeht. Die verwendeten Grunddaten sind in Tabelle 5.1 aufgeführt.

| | | |
|--------------|------------------------|-----------------|
| Bezugsprofil | DIN 867 | 1,2 / 0,2 / 1,0 |
| Linienlast | F_{bt} [N/mm] | 294 |
| Normalmodul | m_n [mm] | 4,5 |
| Übersetzung | i [-] | 1,0 |

Tabelle 5.1: Ausgangsmodell für die Parametervariationen

5.2.1 Einflüsse aufgrund des abweichenden Zahnquerschnitts

Der stirnschnittbezogene Faktor $C_{\alpha, \text{Bev}}$ ist definiert als das Verhältnis der Steifigkeiten eines Beveloidradstirnschnitts zu einem Zylinderrad mit den gleichen Verzahnungsdaten.

$$C_{\alpha, \text{Bev}} := \frac{c'_{\text{Bev}}}{c'_{\text{Zyl}}} \quad (5.3)$$

Aus der Verkippung des Herstellungswerkzeugs um den Profilverschiebungswinkel θ resultiert bei geradverzahnten Beveloidrädern eine Verkleinerung des Stirneingriffswinkels α_t . In Gleichung (2.1) wird dieser Umstand durch den Faktor $\cos(\theta)$ berücksichtigt, die Ergebnisse für den Eingriffswinkel sind in Bild 5.2 dargestellt.

Der Berechnungsansatz für die Zahnfedersteifigkeit von Zylinderrädern nach [DIN3990] berücksichtigt vom Nennprofil abweichende Stirneingriffswinkel, indem die theoretische Einzelfedersteifigkeit c'_{th} mit dem Bezugsprofilfaktor C_{BS} multipliziert wird, siehe Gleichung (2.18). Im Bild 5.2 sind zu den Eingriffswinkeln nach Gleichung (2.1) die sich nach [DIN3990] ergebenden Bezugsprofilfaktoren in Abhängigkeit des Profilverschiebungswinkels eingezeichnet. Es ergeben sich selbst für sehr große Profilverschiebungswinkel nur wenig von 1,0 abweichende Bezugsprofilfaktoren. Die Abweichung vom Nenn-Stirneingriffswinkel bei geradverzahnten Beveloidrädern kann daher vernachlässigt werden.

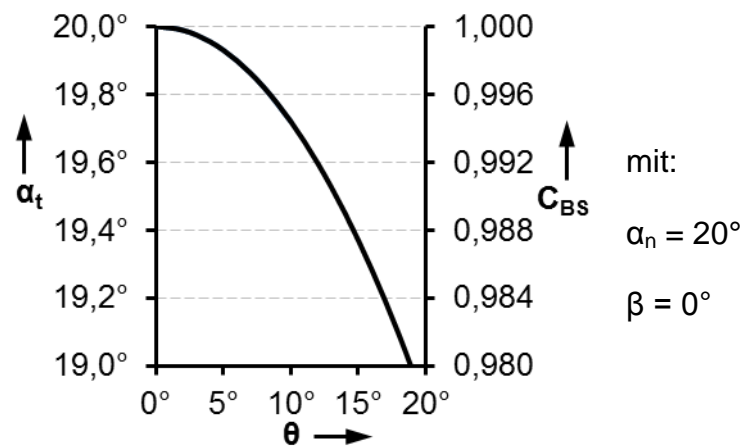


Bild 5.2: Stirneingriffswinkel und Bezugsprofilfaktor geradverzahnte Beveloidräder

Im Fall von schrägverzahnten Beveloidrädern ergeben sich nach den Gleichungen (2.1) und (2.2) für Links- und Rechtsflanken unterschiedliche Eingriffswinkel und Grundkreisdurchmesser, weshalb die Zahnform im Stirnschnitt asymmetrisch ist. Bild 5.3 verdeutlicht das Verhältnis der beiden Winkel als Maß für die Asymmetrie in Abhängigkeit vom Profilverschiebungs- und Schrägungswinkel. Im Fall einer symmetrischen Verzahnung, wie zum Beispiel bei Zylinderrädern, ist das Verhältnis 1,0.

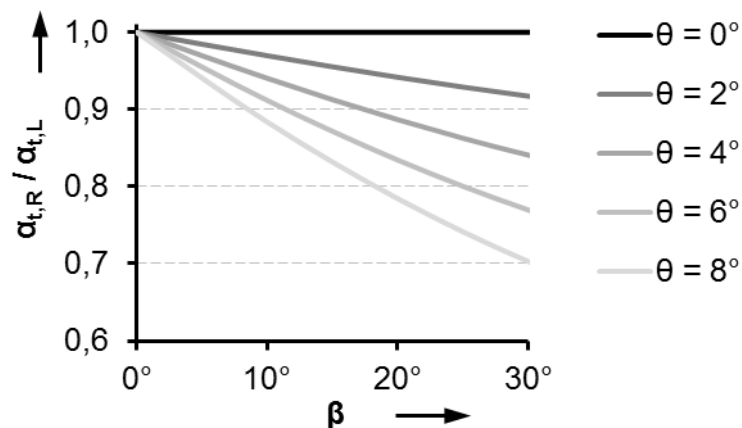


Bild 5.3: Verhältnis der Stirneingriffswinkel von Rechts- und Linksflanke

Da beide Flanken verschiedene Grundkreise aufweisen, ergeben sich in Abhängigkeit von der Lastrichtung unterschiedliche Betriebseingriffswinkel. Die belastende Zahnnormalkraft steht daher in unterschiedlichen Winkeln auf der Flanke und besitzt verschiedene Radial- und Tangentialkomponenten. Zudem sind die Krümmungsradien beider Flanken wegen der asymmetrischen Stirnschnittform unterschiedlich. Dies wirkt sich auf die Teilsteifigkeiten beider Räder aus und führt dazu, dass die Steifigkeiten über der Eingriffsstrecke bei anliegender Last an Links- oder Rechtsflanke unterschied-

lich verlaufen. Im Bild 5.4 sind beispielhaft die mit der FEM ermittelten Stirnschnittfaktoren $C_{\alpha, \text{Bev}}$ für eine Beveloidverzahnung mit $\theta = 8,5^\circ$ und $\beta = 30^\circ$ aufgetragen. Der Stirnschnitt der Verzahnung ist deutlich asymmetrisch, was auch das Verhältnis der Eingriffswinkel von Rechts- zu Linksflanke zeigt, welches 0,69 beträgt.

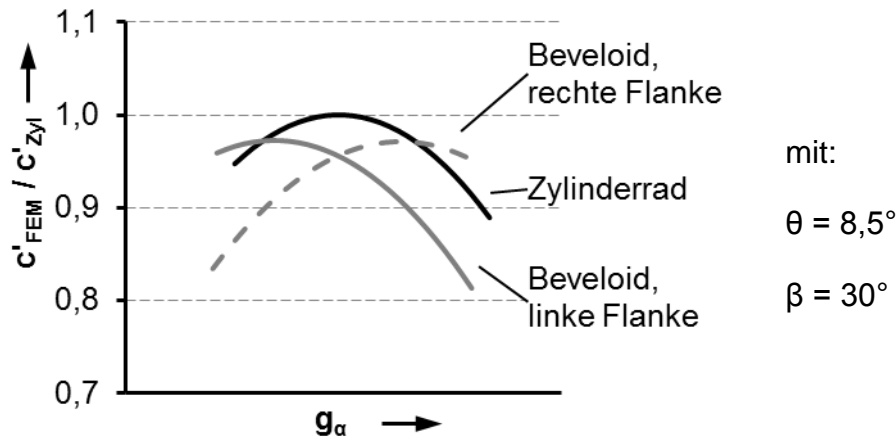


Bild 5.4: Steifigkeit schrägverzahnter Beveloid- und Zylinderräder entlang der Eingriffslinie, nach [BECK13]

Die Steifigkeitsverläufe beider Beveloidrad-Paarungen erreichen in unterschiedlichen Wälzstellungen ihre Höchstwerte und besitzen einen nahezu identischen Maximalwert. Die Lastrichtung hat daher einen vernachlässigbaren Einfluss auf die maximale Steifigkeit. Zusätzlich zu den Verläufen der Beveloidräder ist der Verlauf für eine Ersatz-Zylinderradpaarung mit gleichem Schrägungswinkel dargestellt. Die Maximalwerte der Beveloidräder liegen auf einem vergleichbaren Niveau des Zylinderrads, der Unterschied beträgt ca. 3 %.

Für Beveloidverzahnungen mit geringeren Schrägungs- oder Profilverschiebungswinkeln nimmt die Asymmetrie des Stirnschnitts ab, sodass sich der am obigen Beispiel aufgezeigte Unterschied der maximalen Steifigkeit im Vergleich von Links- und Rechtsflanken sowie zu Zylinderrädern weiter reduziert. Der Einfluss der von Zylinderrädern abweichenden Stirnschnittform auf die Steifigkeit ist daher gering. Der Faktor $C_{\alpha, \text{Bev}}$ wird näherungsweise gleich eins gesetzt.

5.2.2 Einflüsse aufgrund des abweichenden Zahn­längsschnitts

Der Radkörper des Zahnrads wird im Folgenden als Hohlzylinder bzw. Hohlkegel behandelt, siehe auch Kapitel 4.1. Leichtbau-Zahnräder mit Steg oder Bohrungen zur Gewichtseinsparung werden nicht betrachtet. Am Radkörper wird das radiale Maß zwischen dem Fußkreisradius der Verzahnung und dem zylindrischen Bohrungsdurchmesser der Welle-Nabe-Verbindung (WNV) in einem beliebigen Stirnschnitt als Zahnkranzdicke (ZKD) definiert [WINTER83, S. 56]. Beveloidverzahnungen weisen in jedem Stirnschnitt aufgrund der veränderlichen Profilverschiebung einen geänderten Fußkreis auf, der Radkörper ist über der Breite unterschiedlich mächtig, siehe Bild 5.5.

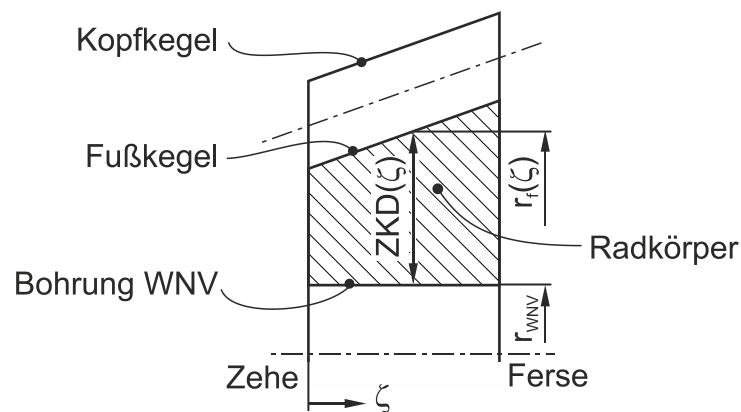


Bild 5.5: Zahnkranzdicke (ZKD) in einem Stirnschnitt ζ

Das Maß der Zahnkranzdicke ist wie viele Längenmaße von Verzahnungen auf den Modul bezogen und damit eine dimensionslose Größe.

$$ZKD(\zeta) := \frac{r_f(\zeta) - r_{WNV}}{m_n} \quad (5.4)$$

Die minimale Zahnkranzdicke in diesen Untersuchungen beträgt $4 \times m_n$, um die Mindest-Zahnkranzdicke nach [DIN3990-3, S. 2] einzuhalten. Die Änderung der Zahnkranzdicke entlang der Zahnbreite wird bezogen auf die Zehe der Verzahnung.

$$\Delta ZKD = ZKD(\zeta) - ZKD_{Zehe} = b(\zeta) \cdot \frac{\tan(\theta)}{m_n} \quad (5.5)$$

Die Änderung ist proportional zur Zahnbreite und dem Profilverschiebungswinkel der Beveloidverzahnung. Im nachfolgenden Bild 5.6 sind die Ergebnisse von Gleichung (5.5) für verschiedene Zahnbreiten und Winkel dargestellt. Für viele Kombinationen der Verzahnungsparameter θ und $b(\zeta)$ liegt ΔZKD in Bereichen größer null.

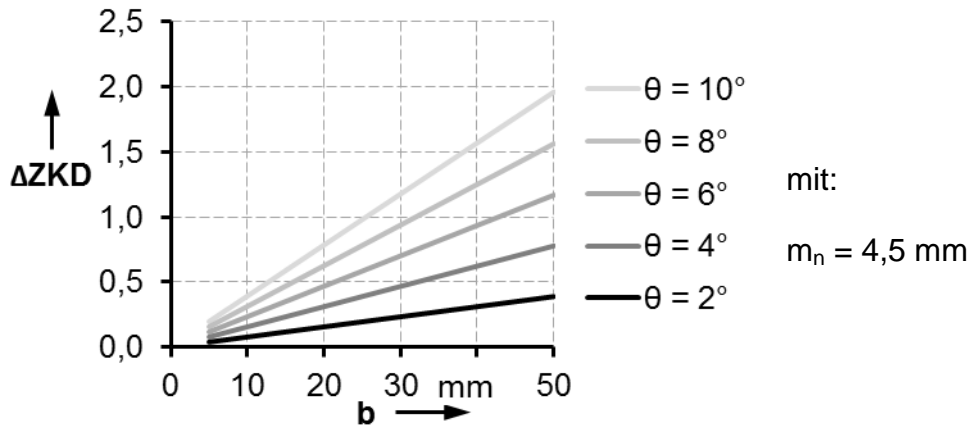


Bild 5.6: Änderung der ZKD für verschiedene Profilverschiebungswinkel

Die Gestaltung des Radkörpers und die Zahnkranzdicke besitzen einen Einfluss auf die Einspannelastizität der Verzahnung und damit auch auf die Steifigkeit [LINKE10, S. 202]. Der rechnerische Ansatz zur Bestimmung der Steifigkeit mit dem Näherungspolynom nach Gleichung (2.17) [DIN3990] geht von einer über der Breite einheitlichen Gestaltung des Radkörpers aus, sodass die Zahnkranzdicke und die Einspannelastizität in jedem Zylinderrad-Stirnschnitt idealisiert gleich sind. Bei einer unveränderten Übertragung dieses Ansatzes auf Beveloidräder würde dies einer konischen Bohrung als Welle-Nabe-Verbindung entsprechen, siehe Bild 5.7. In der Regel werden allerdings zylindrische Bohrungen für die Welle-Nabe-Verbindung an Zahnrädern verwendet, sodass die Zahnkranzdicke bei Beveloidrädern von der Breitenkoordinate abhängt.

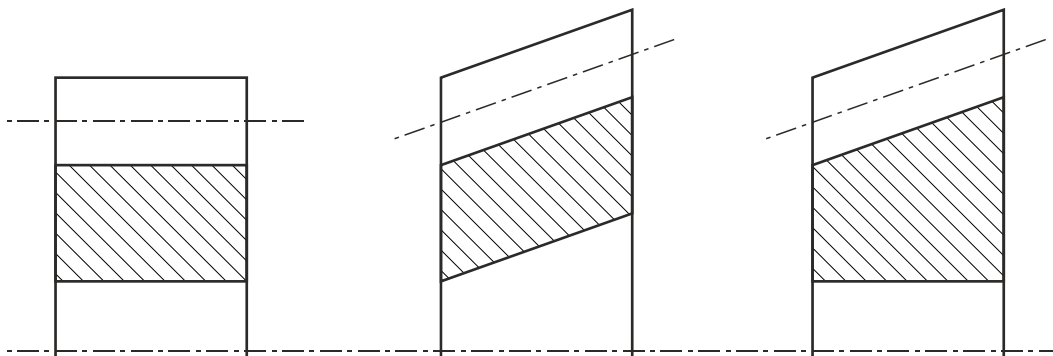


Bild 5.7: Skizzen der WNV: Zylinderrad (links), konische Bohrung am Beveloidrad (Mitte), zylindrische Bohrung am Beveloidrad (rechts)

Im Verfahren nach [DIN3990] wird das Näherungspolynom nach Gleichung (2.18) mit dem Radkörperfaktor C_R erweitert, sodass auch die Gestaltung des Radkörpers bei der Steifigkeitsberechnung berücksichtigt wird. Der Faktor bezieht sich auf die gesamte

Verzahnungsbreite und ist daher nicht für eine abschnittsweise Betrachtung einzelner Stirnschnitte der Beveloidräder geeignet.

Aus den genannten Gründen muss der Einfluss der bei Beveloidrädern veränderlichen Zahnkranzdicke über der Zahnbreite auf die Steifigkeit anderweitig als mit den Radkörperfaktor C_R berücksichtigt werden. Das in Kapitel 4 beschriebene FE-gestützte Vorgehen wird nachfolgend zur Untersuchung der Steifigkeit von Beveloidradstirnschnitten angewandt. Aber nutzt das Vorgehen ebenfalls und zeigt damit den grundsätzlichen Einfluss der Zahnkranzdicke auf die Steifigkeit auf [ALBER12, S. 41].

Die Auswirkungen der geometrischen Besonderheiten der veränderlichen Zahnkranzdicke von Beveloidrädern wird in der Steifigkeitsberechnung nach Gleichung (5.2) durch den Faktor C_{ZKD} berücksichtigt. Er ist in jedem Stirnschnitt ζ definiert als das Verhältnis der Steifigkeit einer Verzahnung mit um ΔZKD vergrößerter Zahnkranzdicke zur Steifigkeit der unveränderten Verzahnung. Der Faktor ist einheitenlos.

$$C_{ZKD}(\zeta) := \frac{c'_{FEM}(\zeta, \Delta ZKD(\zeta))}{c'_{FEM}(\zeta, \Delta ZKD = 0)} \quad (5.6)$$

Ausgehend von $(z_1 + z_2) = 30$ und $\Delta ZKD = 0$ sowie den Verzahnungsdaten nach Tabelle 5.1 werden die Zähnezahlen und Zahnkranzdicken variiert, die Steifigkeiten mithilfe der FEM bestimmt und der Faktor C_{ZKD} ermittelt. Die Ergebnisse sind im Bild 5.8 dargestellt.

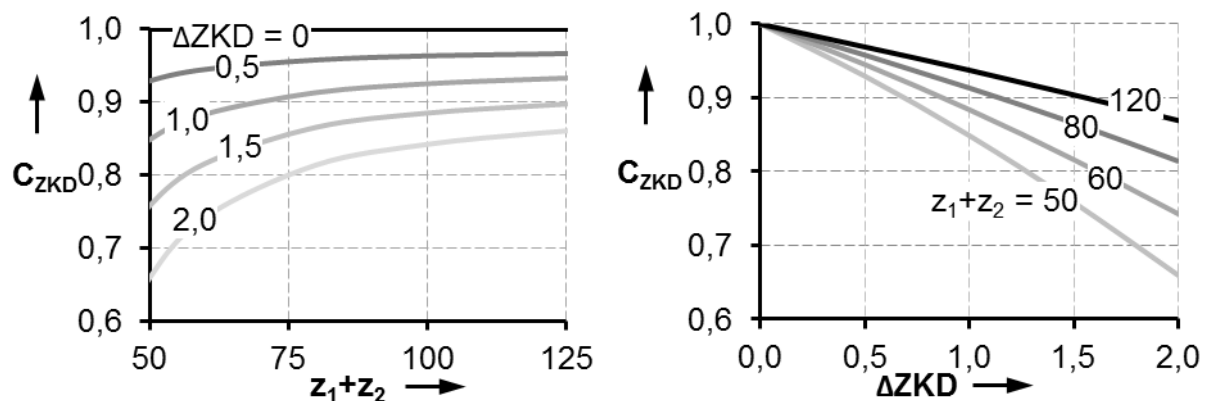


Bild 5.8: FE-Ergebnisse für C_{ZKD} in Abhängigkeit der Änderung der Zahnkranzdicke und der Zähnezahlsomme, in Anlehnung an [BECK13]

Liegt eine Zylinderradpaarung vor, so ergibt sich keine Änderung der Zahnkranzdicke, der Faktor C_{ZKD} ist 1. Liegt eine Beveloidverzahnung vor, ist der Profilverchiebungswinkel größer null und die Zahnkranzdicke über der Breite veränderlich. Der Faktor C_{ZKD} ist dann kleiner 1. Dieser Effekt ist mit zunehmender Zahnkranzdickenänderung und

abnehmender Zähnezahl größer. Analog zu einer mit zunehmender Länge weicheren Feder wird die Steifigkeit bei einer Änderung der Zahnkranzdicke kleiner.

Um den Faktor ohne aufwändige FE-Simulationen bestimmen zu können, bedarf es einer einfach anwendbaren analytischen Gleichung. Zu ihrer Definition wird ausgehend von den FE-Ergebnissen eine Ausgleichsrechnung durchgeführt. Dabei kommt die Methode der kleinsten Fehlerquadrate zum Einsatz. Die Summe der quadrierten Differenzen aus Datenpunkten und Ansatzpunkten stellt dabei die Fehlersumme dar, die durch die geeignete Wahl einer Ansatzfunktion minimal werden muss.

$$\min \sum_i \left(C_{ZKD,FEM,i} - C_{ZKD,analyt,i}(f_1, f_2) \right)^2 \quad (5.7)$$

Die Ansatzfunktion ist so gewählt, dass sie die beschriebenen Einflüsse von ΔZKD und der Zähnezahlsomme berücksichtigen kann.

$$C_{ZKD} := 1 - \frac{\Delta ZKD}{(z_1 + z_2)} \cdot f_1 + \Delta ZKD \cdot f_2 \quad (5.8)$$

Die Änderung der Zahnkranzdicke einer Beveloidstufe wird angenähert mit:

$$\Delta ZKD(\zeta) = \frac{b(\zeta)}{2 \cdot m_n} (\tan\theta_1 + \tan\theta_2) \quad \text{mit} \quad 0 \leq \zeta \leq b_{gem} \quad (5.9)$$

Aufgrund der gewählten Ansatzfunktion ist sichergestellt, dass der Faktor C_{ZKD} für Zylinderräder 1 ergibt und somit deren Steifigkeitswert nicht ändert. Um das Ziel der kleinsten Quadratsumme zu erreichen, werden die Faktoren f_1 und f_2 der Ansatzfunktion iterativ variiert. Das Minimum der Summe ist für die Faktoren erreicht, wenn gilt:

$$\begin{aligned} f_1 &= 10,49 \\ f_2 &= 0,027 \end{aligned} \quad (5.10)$$

Im Bild 5.9 sind die mit der FEM und dem analytischen Ansatz ermittelten Werte des Faktors C_{ZKD} für verschiedene Zähnezahlsommen und Änderungen der Zahnkranzdicke aufgetragen. Wird der definierte analytische Ansatz nach Gleichung (5.1) zur Steifigkeitsberechnung herangezogen, kann die Abweichung zu den mit der FEM bestimmten Steifigkeitswerten bestimmt werden.

$$\Delta c' = \frac{c'_{analyt} - c'_{FEM}}{c'_{FEM}} \cdot 100\% \quad (5.11)$$

Daraus ergibt sich das Abweichungsdiagramm in Bild 5.10, aus dem ersichtlich ist, dass die Abweichungen zwischen dem analytischen Ansatz und den FE-Ergebnissen kleiner 6 % sind. Die untersuchten Bereiche der Zähnezahlsomme und der Änderung der Zahnkranzdicke decken den üblichen Bereich von Industriegetrieben ab.

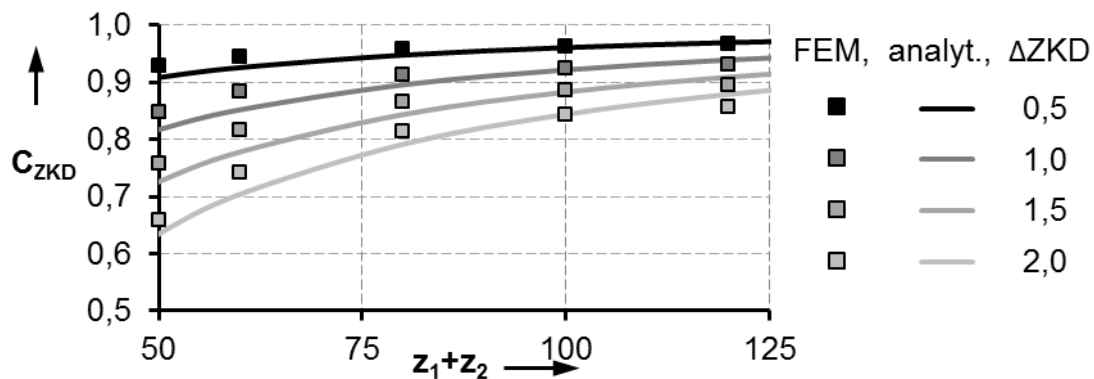


Bild 5.9: Numerisch und analytisch bestimmte Werte von C_{ZKD}

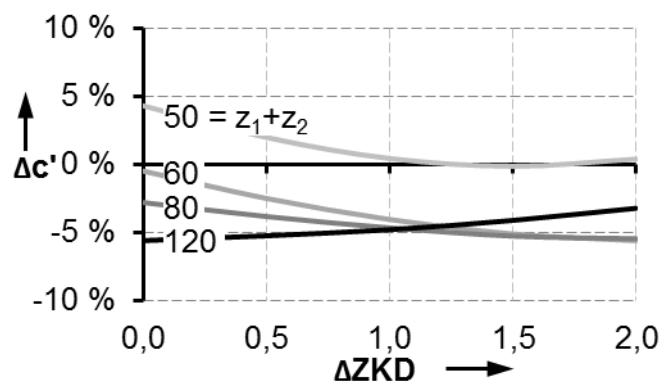
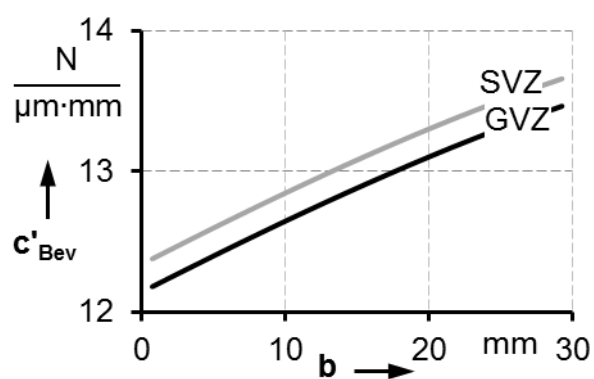


Bild 5.10: Abweichung zwischen numerisch und analytisch bestimmter Steifigkeit

Ein Beispiel der Steifigkeitsverläufe entlang der Zahnbreite für eine gerad- und schrägverzahnte Beveloidradpaarung ist in Bild 5.11 dargestellt.



Verzahnungsdaten der Paarungen „A___“ und „AB___“ nach Tabelle 8.2 (S. 122),
Notation entsprechend Kapitel 4.5.1

Bild 5.11: Beispiele für die Steifigkeiten entlang der Zahnbreiten einer gerad- (GVZ) und schrägverzahnten (SVZ) Beveloidradstufe

Mit den vorgestellten Anpassungsfaktoren können die wesentlichen geometrischen Unterschiede der Zahnform von Beveloid- und Zylinderrädern bei der Steifigkeitsberechnung berücksichtigt werden. Sie können mit einfachen analytischen Gleichungen für jeden Stirnschnitt bestimmt werden, da sie direkt von den Verzahnungshauptdaten abhängig sind. Die Faktoren ergeben für zylindrische Räder den Wert 1, sodass die Steifigkeitsergebnisse für Zylinderräder nicht verändert werden. Somit steht ein einfaches, analytisches Verfahren zur Verfügung, um die maximale Steifigkeit eines Beveloidrad-Stirnschnitts bestimmen zu können.

6 Analytisches Rechenmodell für Beveloidräder

Wesentliche Herausforderungen bei der Bestimmung der Beanspruchungen einer Beveloidverzahnung sind die über der Breite veränderliche Zahnform, die Achslage und die daraus folgenden Auswirkungen. Wie in den vorangegangenen Kapiteln dargestellt ist, sind zur Beanspruchungsermittlung hochwertige Rechenverfahren notwendig. Alternativ werden Ersatz-Zylinderradverzahnungen mit den Daten der mittleren Stirnschnitte gebildet, die analytische Nachrechnung erfolgt dann nach [DIN3990]. Beanspruchungserhöhende Effekte aufgrund der Berührungsverhältnisse und der Zahnform werden dabei durch eine Abschätzung der Breitenlastfaktoren berücksichtigt. Sie sinnvoll zu wählen, stellt eine große Herausforderung für den Konstrukteur dar, wofür Erfahrung, Simulationen oder Versuche notwendig sind. Daher wird im Folgenden ein Modell hergeleitet, mit dem die Breitenlastfaktoren und die Beanspruchungen anhand einer Rechenvorschrift nachvollziehbar ermittelt werden können. Das grundsätzliche Vorgehen ist angelehnt an das Vorgehen für Zylinderräder nach [DIN3990] und auszugsweise auch in [BECK12A] und [BECK12B] beschrieben sowie im Anhang C bildlich dargestellt.

6.1 Grundaufbau

Die komplexe, dreidimensionale Gestalt der Beveloidverzahnung wird durch abschnittsweise definierte Scheiben konstanter Breite diskretisiert, siehe Bild 6.1. Jedes Scheibenpaar, bestehend aus Scheiben für Rad und Gegenrad, wird als Zylinderradpaar angenähert und weist die im mittleren Stirnschnitt der Scheiben vorliegenden Verzahnungsdaten der tragenden Flanken auf. Innerhalb der modellierten Scheiben sind die Eigenschaften entlang der Scheibenbreite konstant.

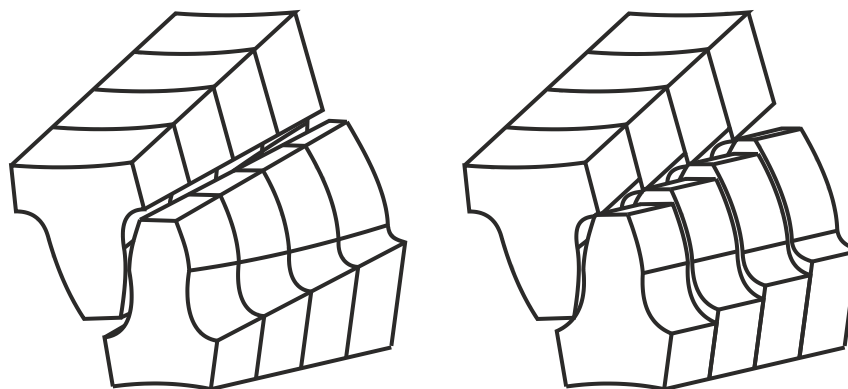


Bild 6.1: Beveloidverzahnung (links), Ersatz durch Zylinderrad-Scheiben (rechts), nach [BECK12A, S. 10]

Die Problematik der verkippt zueinander stehenden Stirnschnitte wird gelöst, indem sie gedanklich um den Achswinkel in eine Ebene zurückgeschwenkt werden. Mit diesem Vorgehen besteht die Beveloidradpaarung gedanklich aus Scheiben von Zylinder-radpaarungen mit jeweils individuellen Verzahnungshauptdaten wie etwa Achsabständen oder Profilverchiebungen. Die räumliche Verzahnung ist auf eine Reihe ebener Probleme reduziert, auf die im weiteren Verlauf die bekannten analytischen Gleichungen für evolventische Zylinderräder und die Auslegungsnorm [DIN3990] angewendet werden. Die darin enthaltene Annäherung einer Schrägverzahnung durch eine Ersatz-Geradverzahnung nach Gleichung (2.5) wird auch auf Beveloidräder angewendet.

$$z_n = \frac{z}{\cos^2(\beta_b) \cdot \cos(\beta)} \quad (2.5)$$

In [DIN3990] wird ein linearer Zusammenhang zwischen der Kraft auf einen Zahn und der Fußbeanspruchung zugrunde gelegt, siehe Gleichung (2.4). Damit kann innerhalb einzelner Scheibenpaare eine Analogie zu in Reihe geschalteten Druckfedern gebildet und die Fußbeanspruchung der Beveloidräder berechnet werden. Die modellierten Scheiben der Räder berühren sich gedanklich reibungsfrei, sodass keine Schubspannungen zwischen den Scheiben übertragen werden. Daraus resultierende Ungenauigkeiten bei der Ermittlung der Lastverteilung werden durch Korrekturfunktionen berücksichtigt. Diese sind in Kapitel 6.5.1 erläutert.

Eingangsgrößen des Rechenmodells sind die Verzahnungshauptdaten, die lastfreie Klaffung sowie das Nennmoment mit dem die Verzahnung belastet ist. In einem ersten Schritt erfolgt die Ermittlung der Lastverteilung mithilfe der lastfreien Klaffung entlang der Berührlinie und der Verzahnungssteifigkeit. Mit der Kenntnis der Lastverteilungsfaktoren ergeben sich im zweiten Schritt die Fuß- und Flankenbeanspruchungen der Verzahnung. Auf die einzelnen Punkte wird im Folgenden detailliert eingegangen.

Wegen der charakteristischen Berechnung der Beveloidverzahnung mittels diskreter Scheiben wird das analytische Rechenmodell auch synonym als Scheibenmodell, abgekürzt SM, bezeichnet. Der Grundaufbau des Scheibenmodells ist in Bild 6.2 graphisch dargestellt.

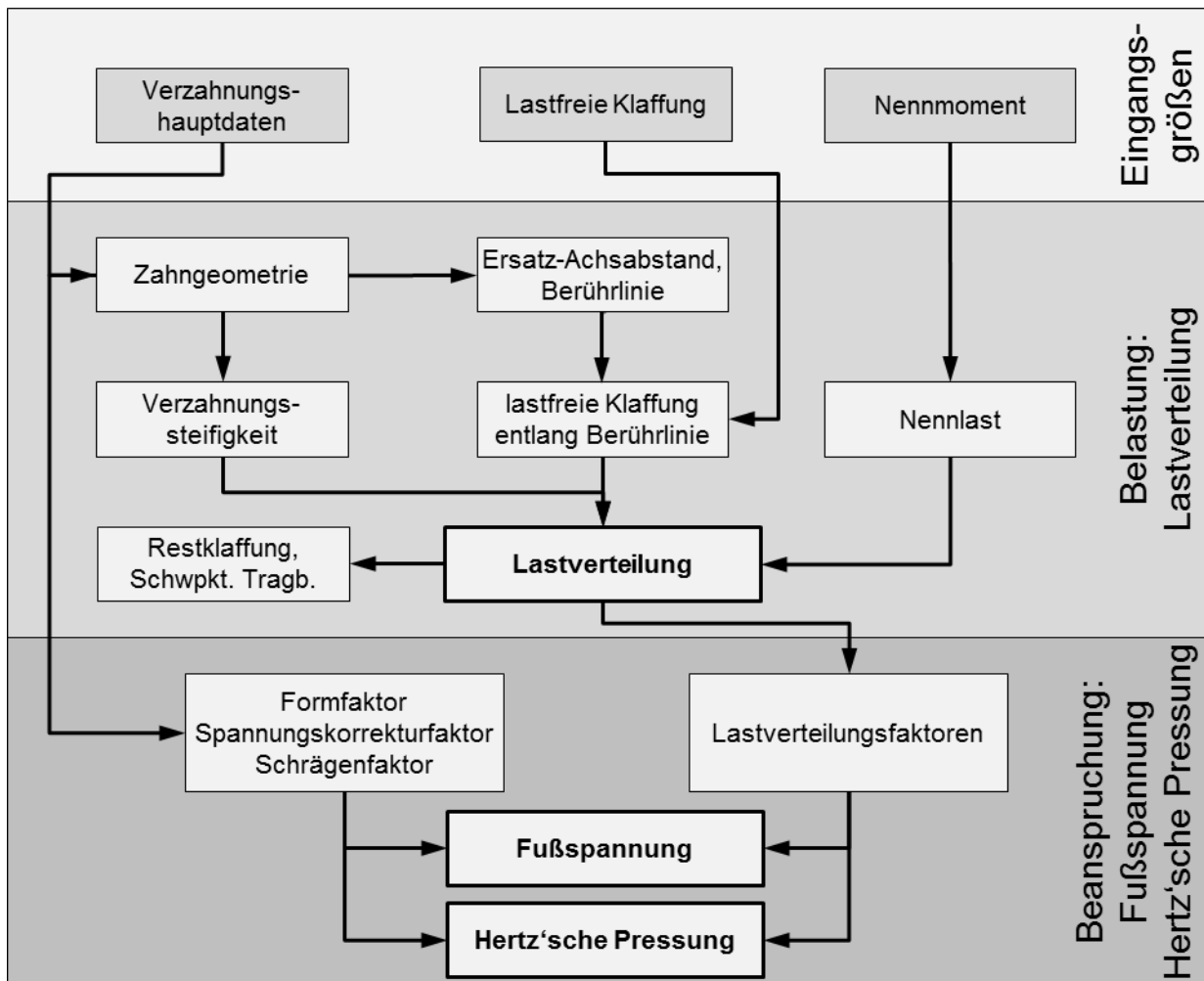


Bild 6.2: Grundsätzlicher Rechenablauf des Scheibenmodells, Unterteilung in die Ermittlung der Lastverteilung und der Beanspruchung

6.2 Eingangsgrößen

Wesentliche Eingangsgrößen des Scheibenmodells für die Belastungs- und Beanspruchungsermittlung von Beveloidrädern sind die Hauptdaten der Verzahnung. Sie hängen von den Einsatzbedingungen des Getriebes ab und werden vom Konstrukteur gewählt, beziehungsweise sind teilweise durch Anforderungen oder Vorgaben anderer Baugruppen festgelegt. Verfahren zur Ermittlung der Hauptdaten sind in Kapitel 2.6.1 zusammengefasst. Für das weitere Vorgehen werden die Hauptdaten und das Nennmoment als bekannt vorausgesetzt.

Eine weitere Eingangsgröße für das Scheibenmodell ist der Verlauf der lastfreien Klaffung über der Zahnbreite. Die lastfreie Klaffung ist der kürzeste Abstand eines jeden Flankenpunkts in Normalenrichtung zur Flanke des Gegenrades im lastfreien Zustand. Sie resultiert aus der komplexen Zahnform einer Beveloidverzahnung. Im Berührungspunkt

ist die Klaffung null und nimmt je nach Wahl der Verzahnungsdaten im optimalen Fall zu den Stirnseiten der Verzahnung hin zu. Die lastfreie Klaffung kann analytisch oder mit den in Kapitel 2.6.3 beschriebenen Methoden bestimmt werden.

6.2.1 Analytische Ermittlung der lastfreien Klaffung

Die lastfreie Klaffung kann für bestimmte Verzahnungshauptdaten geradverzahnter Beveloidrad-Paarungen analytisch ermittelt werden [TRAUT11A, S. 219 FF]. Der Ansatz nutzt die Tatsache, dass die Summe der Zahndicken beider Räder in einem Stirnschnitt s_y und die Klaffung K der Stirnteilung p_t entsprechen.

$$p_t(\zeta) = s_{y,1}(\zeta) + s_{y,2}(\zeta) + K(\zeta) \quad (6.1)$$

Traut verwendet diesen Ansatz zur Auslegung hohlballiger Korrekturen für Beveloidräder, indem er die Klaffung in eine lokale Änderung der Profilverchiebung umrechnet [TRAUT11A, S. 219 FF].

Insbesondere bei schrägverzahnten Beveloidrädern ergeben sich mit diesem Ansatz Abweichungen der berechneten lastfreien Klaffung im Vergleich zu Simulationsergebnissen. Die analytische Ermittlung wird daher hier nicht weiter verfolgt und stattdessen die Klaffung mit dem Programm „SimKoS“ bestimmt, wodurch für jeden Flankenpunkt ein Ergebniswert vorliegt. Dieser Datensatz wird als bekannt vorausgesetzt. Die für das Rechenmodell relevanten Flankenpunkte und ihre Klaffungsergebnisse werden aus der Berührlinie bestimmt.

6.2.2 Berührlinie auf den Flanken

Die Berührlinie ist bei Zylinderrädern „die Gerade, auf der die gepaarten Flanken sich linienhaft berühren“ [LINKE10, S. 92]. Ihr Verlauf über der Zahnbreite ist von den Verzahnungsdaten und der Wälzstellung abhängig. Im Fall einer Schrägverzahnung läuft sie schräg über die Zahnflanke. Synonym wird sie auch als Kontaktlinie oder bei schrägverzahnten Zylinderrädern als Erzeugende bezeichnet. Die Berührung der Zahnflanken einer Beveloidverzahnung weist eine andere Form auf, sie ist über der Zahnbreite deutlich verkürzt. Man spricht daher auch von einer punktförmigen bzw. durch die Verformung aufgrund einer Lasteinwirkung von ellipsenförmiger Berührung. Die kegeligen Ersatzwälzkörper bewirken zusätzlich eine Verkippung des Berührungsbereichs auf der Zahnflanke, wie in Bild 6.3 dargestellt ist.

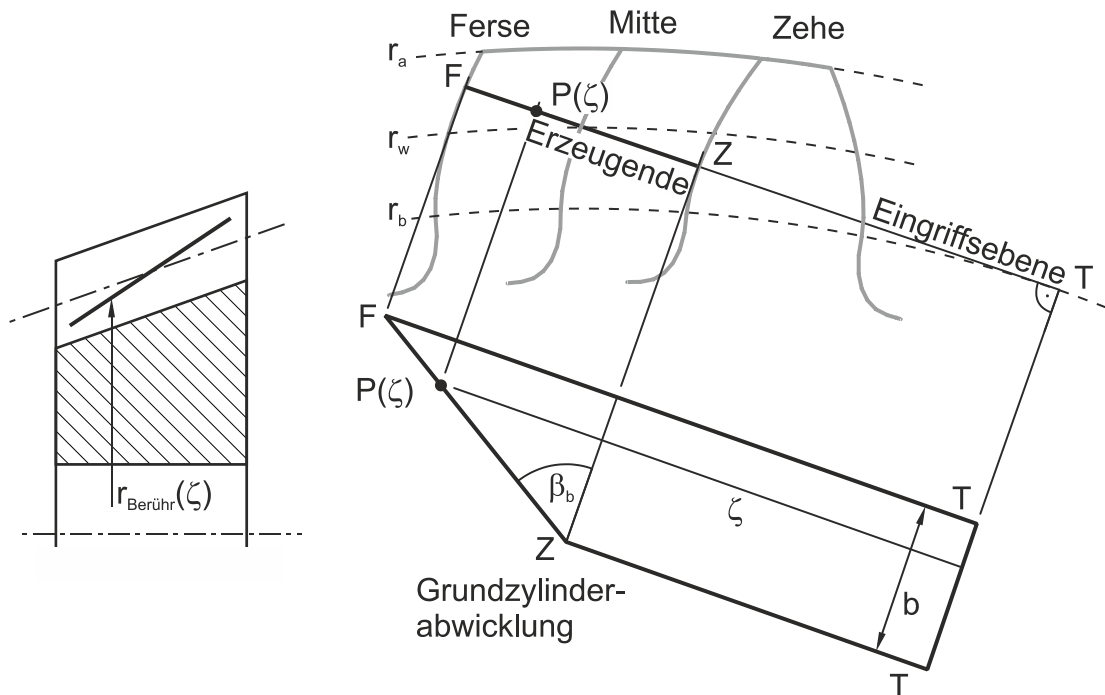


Bild 6.3: links: Schematischer Verlauf der Flankenberührung am Beveloidrad, rechts: Verlauf der Erzeugenden an Zylinderrädern, Grundzylinderabwicklung

In jeder Wälzstellung einer Verzahnung ergeben sich unterschiedliche Berührlinien und damit Biegehebelarme der angreifenden Last sowie verschiedene Flankenkrümmungsradien. Die Beanspruchungen an Flanke und Fuß sind daher von der Wälzstellung abhängig, siehe auch Kapitel 2.3.1. Welche Wälzstellung die höchsten Beanspruchungen an Beveloidrädern bewirkt, kann im Vorhinein nur geschätzt werden. Für das weitere Vorgehen wird daher der Verlauf einer Berührung angenommen, die in der Verzahnungsmitte durch den Wälzpunkt und verkippt bis zu den Stirnseiten verläuft. Mit ihr werden die Ergebnisse der lastfreien Klaffung ausgewertet.

Die Berührlinie setzt sich aus den Berührungspunkten in den Stirnschnitten zusammen. Die Radiuskoordinate des Berührungspunktes im zylindrischen Koordinatensystem ist der Berührungsradius. Er setzt sich im Stirnschnitt ζ angenähert aus einem Anteil der Erzeugenden sowie aus einem Anteil des Ersatzwälzkegels zusammen.

$$r_{\text{Berühr}}(\zeta) := r_{\text{Erz}}(\zeta) + r_{\text{Wälzk}}(\zeta) \quad (6.2)$$

Der Anteil aufgrund der Erzeugenden r_{Erz} kann mit der Grundkreisabwicklung der Eingriffsebene in Bild 6.3 bestimmt werden. Die Strecke vom Tangentenpunkt T der Flankennormale zum Berührungspunkt P(ζ) im Stirnschnitt ζ folgt aus der Evolventengleichung.

$$\overline{TP} = r_b \cdot \tan(\alpha_{wt}) + \left(b(\zeta) - \frac{b}{2}\right) \cdot \tan(\beta_b) \quad (6.3)$$

$$r_{Erz}(\zeta) = \sqrt{r_b^2 + \overline{TP}^2} \quad (6.4)$$

Der Ersatzwälzkegel der Beveloidverzahnung überlagert den Verlauf der Erzeugenden. Der Kegel besitzt den Öffnungswinkel Σ' und wird nach [TRAUT11A, S. 219] berechnet:

$$\tan(\Sigma') = \frac{\sin(\Sigma)}{\cos(\Sigma) + u} \quad (6.5)$$

Der Ersatzwälzkegel besitzt in den Stirnschnitten unterschiedliche Radien $r_{Wälzk}$.

$$r_{Wälzk}(\zeta) = \tan(\Sigma') \cdot \left(b(\zeta) - \frac{b}{2}\right) \quad (6.6)$$

Ein mit dem analytischen Ansatz bestimmter Verlauf der Berührlinie ist in Kapitel 8 Bild 8.4 mit dem numerischen Ergebnis einer FE-Simulation vergleichend gegenüber gestellt. Dabei zeigt sich eine gute Übereinstimmung.

Anhand des mit dem Ansatz bestimmten Verlaufs der Berührlinie wird die lastfreie Klaffung ausgewertet. Das Vorgehen ist in Bild 6.4 visualisiert.

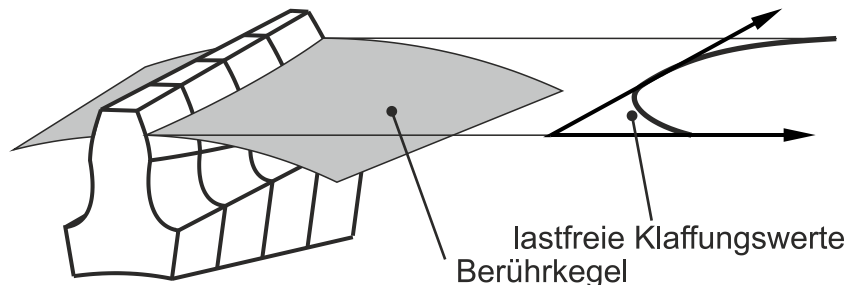


Bild 6.4: Schnitt des Berührkegels durch die Zahnflanke zur Bestimmung der lastfreien Klaffung, das Gegenrad ist nicht dargestellt, in Anlehnung an [BECK12B, S. 117]

6.2.3 Numerische Ermittlung der lastfreien Klaffung

Mit dem Programm SimKoS, siehe auch Kapitel 2.6.3, kann die lastfreie Klaffung numerisch bestimmt werden. Von den Verzahnungshauptdaten ausgehend kann darin eine die Verzahnung repräsentierende Punktwolke erstellt und virtuell lastfrei abgewälzt werden. In mehreren diskreten Wälzstellungen wird die lastfreie Klaffung als der kürzeste Abstand eines jeden Flankenpunkts zur Gegenflanke bestimmt. Das gesamte

Vorgehen ist sehr effizient, die Rechenzeit beträgt wenige Minuten. Der Ergebnissatz wird im Weiteren als bekannt vorausgesetzt.

Ein Ergebnissatz beinhaltet für jeden Punkt auf der Flanke einen Klaffungswert. Aus dem Klaffungswert kann nicht auf die Wälzstellung und die Lage der Berührlinie geschlossen werden, in der er ermittelt wurde. Daher wird für das weitere Vorgehen der Ergebnissatz entlang der angenäherten Berührlinie nach Gleichung (6.2) ausgewertet. Im Bild 6.5 sind die Klaffungswerte als heatmap dargestellt, darunter ist die Einfärbung des Untersuchungsobjekts entsprechend der Ergebniswerte, und die Auswertung entlang der Berührlinie veranschaulicht.

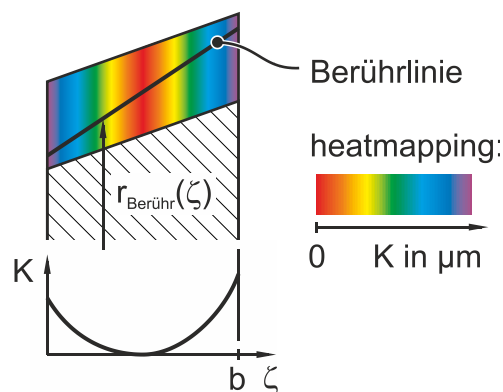


Bild 6.5: Auswertung der lastfreien Klaffung K entlang der Berührlinie

6.3 Grundlegende Verzahnungsgeometrie

Die grundlegende Verzahnungsgeometrie einer Beveloidradpaarung beinhaltet Angaben zur Zahnform und den Eingriffsverhältnissen. Die Grundlagen sind von Roth [ROTH98, S. 235] zusammengefasst und in Kapitel 2.2 dargestellt.

6.3.1 Zahnform

Die Zahnform von Beveloidrädern im Stirnschnitt unterscheidet sich von der von Zylinderrädern, da das Herstellungswerkzeug um den Profilverschiebungswinkel θ verkippt ist. Unter anderem ergibt sich der Profilbezug [ROTH98, S. 235] entlang der Zahnbreite:

$$b \cdot \tan(\theta) = x \cdot m_n \quad (6.7)$$

Wichtige Maße wie etwa Profilwinkel, Kopfkreis-, Fußkreis-, Teilkreis- und Grundkreisdurchmesser beziehen sich auf diese Ebene und weichen von den Werten für Zylinderräder ab. Berechnungsgleichungen für diese Größen stellt Roth [ROTH98, S. 235] ausführlich dar, siehe auch Kapitel 2.2.

Um Eingriffsstörungen zu vermeiden, kann der Kopfkreisdurchmesser von Beveloidrädern reduziert werden, siehe beispielsweise [WINKLER02, S. 63]. Der Profilver-schiebungswinkel ist dann nicht mehr direkt am Kopfkreis-, sondern nur am Fußkreis- messbar. Die Kopfkreisreduzierung ist im nachfolgend vorgestellten Scheibenmodell unmittelbar berücksichtigt.

6.3.2 Ersatz-Achsabstand

Beveloidräder in kreuzender Achslage weisen keinen Achsabstand auf. Ein solcher ist für die Berechnung als Ersatz-Zylinderrad allerdings erforderlich. Daher wird der Ersatz-Achsabstand a_E nach Traut herangezogen [TRAUT11A, S. 218]. Der Abstand ist in der Radmitte definiert als die Summe der beiden Wälzkreisradien. Ausgehend vom Abstand in der Radmitte ändert sich der Ersatz-Achsabstand aufgrund der Achslage entlang der Zahnbreite.

$$a_E(\zeta) = a_{E,m} + \tan(\Sigma) \cdot \left(\zeta - \frac{b}{2} \right) \quad (6.8)$$

Für das Rechenmodell werden die Scheiben um den Achswinkel Σ in eine Ebene geschwenkt und mit dem Ersatz-Achsabstand angeordnet. Bild 6.6 veranschaulicht die Anordnung und den Verlauf des Achsabstands.

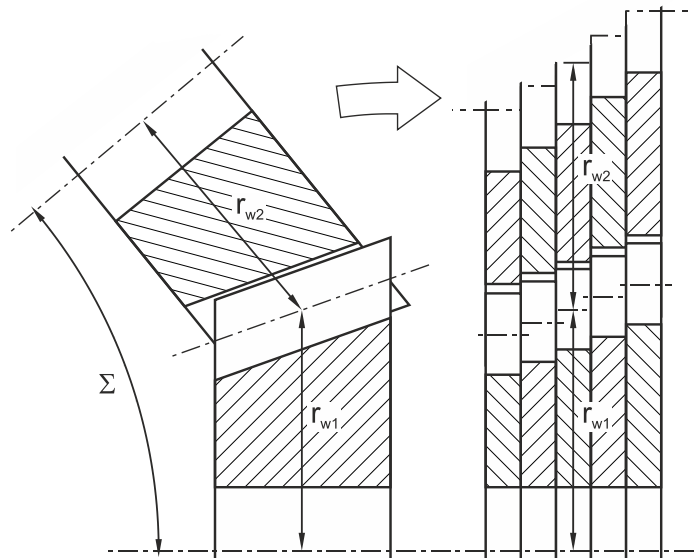


Bild 6.6: Definition des Ersatzachsabstands nach [TRAUT11A, S. 218] (links), Anwendung im Scheibenmodell (rechts)

Die räumliche Verzahnung ist als eine Reihung paralleler Zylinderradscheiben angenähert. Das tatsächlich räumliche Abwälzen der verkippt stehenden Stirnschnitte ist durch

ein ebenes Abwälzen substituiert. Die Achsen der Ersatz-Zylinderradscheiben liegen somit stufig parallel.

6.3.3 Eingriffslinie

Die in eine Ebene geschwenkten Scheiben der Beveloidräder stellen eine nicht konjugierte Verzahnung dar. Um die von Zylinderrädern bekannten Gleichungen trotzdem anwenden zu können, erfolgt die Annäherung der Scheiben zu Ersatz-Zylinderrädern. Die Eingriffslinie der Scheibenpaare wird, analog zu konjugierten Zylinderrädern, als eine Tangente an die in einer Ebene liegenden Grundkreise der Ersatz-Zylinderräder festgelegt. Dies stellt für schrägverzahnte Beveloidrad-Paarungen eine Näherung dar, da sich ihre Grundkreisdurchmesser nach Gleichung (2.2) von denen der Ersatz-Zylinderräder unterscheiden. Die Näherung ist für den weiteren Rechengang und zur Erfüllung des Verzahnungsgesetzes notwendig. Somit kann der Betriebseingriffswinkel α_{wt} für jedes Scheibenpaar bestimmt werden.

$$\cos(\alpha_{wt}(\zeta)) = \frac{r_{b1} + r_{b2}}{a_E(\zeta)} \quad (6.9)$$

Mithilfe der von Zylinderrädern bekannten Gleichungen können die Länge der Kopf- und Fußeingriffsstrecken sowie die Teilung und Überdeckung ermittelt werden.

6.4 Verzahnungssteifigkeit

Zur Ermittlung der Breitenlastverteilung ist im Scheibenmodell eine Analogie zu Druckfedern enthalten. Für die weitere Berechnung ist neben der lastfreien Klaffung auch die Verzahnungssteifigkeit erforderlich. Der Polynomansatz nach [DIN3990] stellt eine einfache Methode zur Ermittlung der Steifigkeit dar. Anpassungsfaktoren, die eine Anwendung für Beveloidräder ermöglichen, sind in Kapitel 5 beschrieben. Die derart bestimmte Steifigkeit fließt in das analytische Scheibenmodell ein.

6.5 Ermittlung der Lastverteilung und tragenden Scheiben

Die Belastung einer Verzahnung verteilt sich stets entlang der Zahnbreite. Nachfolgend wird ein Ansatz vorgestellt, der die Verteilung in Abhängigkeit von den Steifigkeiten und der Klaffungswerte bestimmt. Das Vorgehen ist auch teilweise in [BECK12A] und [BECK12B] beschrieben und lehnt sich an die Berechnung der Breitenfaktoren nach [DIN3990] an.

6.5.1 Lastverteilung

Zur Bestimmung der Lastverteilung wird innerhalb jedes Scheibenpaars eine Analogie zu in Reihe geschalteten Druckfedern zugrunde gelegt, bei der ein linearer Zusammenhang zwischen der Zahnkraft F und der Zahnverformung U besteht. Die Federnanalogie ist auch in der allgemeinen Definition der Zahnfedersteifigkeit nach [DIN3990] enthalten.

$$c' = \frac{F}{U} \tag{2.15}$$

Zahnnormalkräfte, Klaffungen und Verformungen stehen definitionsgemäß normal zur Zahnflanke und sind auf den Grundkreis bezogen. Die Werte sind daher direkt miteinander und mit der Steifigkeit verrechenbar, eine vektorielle Umrechnung ist nicht erforderlich.

Aus dem Ergebnissatz der Klaffungswerte, wie er in Kapitel 6.2.3 beschrieben ist, wird jedem Scheibenpaar ein Wert zugeordnet und die Scheibenpaare entsprechend der Rangfolge der Klaffungswerte sortiert. Die Sortierung ist für die Lösung der Gleichung (6.10) erforderlich.

Zur Ermittlung der auf ein Scheibenpaar wirkenden Kraft wird die Grundgleichung der Steifigkeit (2.15) nach der Kraft umgeformt und anstelle der Verformung des Zahns U der Klaffungswert K eingesetzt. Die Steifigkeit eines Scheibenpaares c_i ergibt sich mit Gleichung (5.1). Für jedes Scheibenpaar i wird die erforderliche Kraft $F_{bt,i,erf}$ bestimmt, bei der die Verformung der Klaffung des nachfolgend klaffenden Scheibenpaares $i+1$ entspricht sodass dieses ebenfalls trägt, siehe Bild 6.7. Die ermittelten Kräfte sind auf den Grundkreis bezogen. [BECK12A, S. 11]

$$F_{bt,i,erf} = c'_i \cdot K_{i+1} \tag{6.10}$$

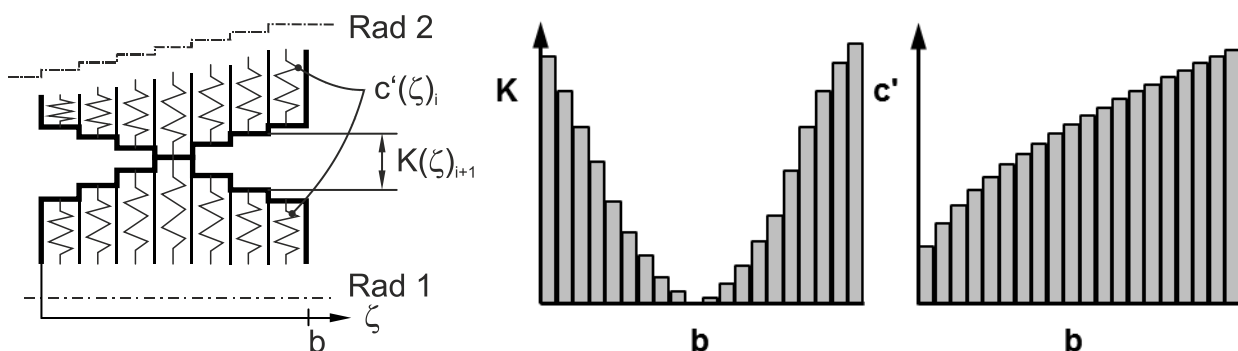


Bild 6.7: Anwendung der Klaffung und Steifigkeit im Scheibenmodell (links), qualitative Verläufe für K (Mitte) und c' (rechts), nach [BECK12A, S. 118]

Die Berechnung der Scheibenkräfte erfolgt so oft, bis ihre Summe der aufgrund des Belastungsmoments vorhandenen Umfangskraft am Grundkreis $F_{bt,vorh}$ entspricht. Die Anzahl der tragenden Scheiben j ist dann kleiner oder gleich der Anzahl der Scheiben n . Für das gesamte Vorgehen ist keine Iteration erforderlich. [BECK12A, S. 11]

$$\sum_{i=1}^j F_{bt,i,erf} = F_{bt,vorh} = \frac{2 \cdot T}{d_b} \quad \text{mit } 1 < j \leq n \quad (6.11)$$

Die Breitenlastverteilung auf der Flanke von Zylinderrädern ist nach [DIN3990, S. 21] definiert als das Verhältnis der maximalen Kraft je Zahnbreiteneinheit bezogen auf die durchschnittliche Kraft je Zahnbreiteneinheit. Dieser Wert wird in [DIN3990] für die gesamte Verzahnung bestimmt. Unter Verwendung der Definition von Zylinderrädern ergibt sich im Rechenmodell durch die Berechnung der Scheibenkräfte für jedes Scheibenpaar ein örtlicher Breitenlastverteilungsfaktor $K_{H\beta,i}$.

$$K_{H\beta,i} = \frac{(F_{bt,i}/b_{Scheibe})}{(F_{bt,vorh}/b)} \quad (6.12)$$

Der Verlauf des Breitenlastfaktors über der Zahnbreite ist für Beveloidradpaarungen in der Regel parabelförmig. Der Maximalwert liegt in den Stirnschnitten, in denen die lastfreie Klaffung das Minimum aufweist. Ist das Moment nicht hoch genug, um sämtliche klaffenden Scheibenpaare zu schließen, sind an den verbleibenden klaffenden Scheiben die Scheibenkräfte und damit die Lastverteilungsfaktoren $K_{H\beta,i}$ null. Dies ist in Bild 6.8 links qualitativ dargestellt. Übertragen alle Scheiben der Paarung die Last, unterscheiden sich die einzelnen Lastverteilungsfaktoren weniger deutlich, wie dies Bild 6.8 rechts darstellt.

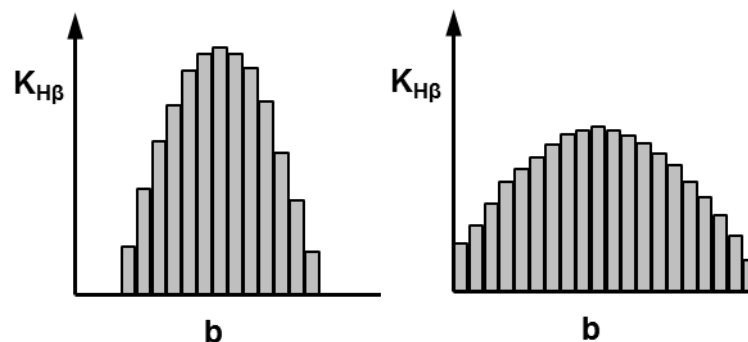


Bild 6.8: Qualitativer Verlauf der Lastverteilungsfaktoren über der Zahnbreite mit klaffenden Scheiben (links) bzw. vollständigem Tragen (rechts), in Anlehnung an [BECK12B, S. 119]

6.5.2 Tragende Scheibenpaare

Bei der Ermittlung der Lastverteilung ergibt sich für jedes Scheibenpaar ebenfalls die Verformung aufgrund der Lasteinwirkung. Durch Abzug der Verformung von der lastfreien Klaffung kann die Restklaffung bestimmt werden. Diese Zahnabschnitte klaffen auch unter der Lasteinwirkung und es bedarf eines höheren Moments zum Schließen der Klaffung. Durch Subtraktion der restlich klaffenden Scheibenpaare von der Gesamtzahl können die tragenden Scheibenpaare bestimmt werden. Die Summe der tragenden Scheibenpaare ergibt das Tragbild, dessen Flächenschwerpunkt aus den Breitenkoordinaten ermittelt wird. Die Ergebnisse der Lastverteilungsrechnung sind in Bild 6.9 veranschaulicht.

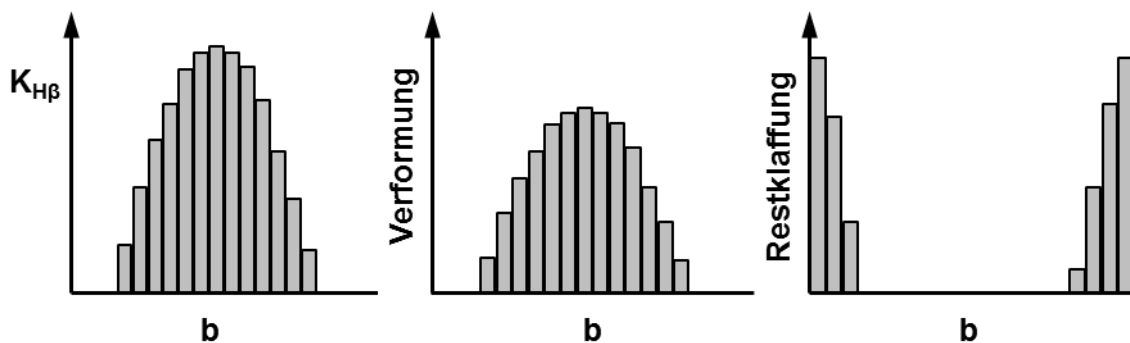


Bild 6.9: Qualitative Ergebnisse der Lastverteilungsrechnung: Breitenlastverteilung $K_{H\beta}$, Verformung des Zahns (Mitte), Restklaffung (rechts), in Anlehnung an [BECK12B, S. 119]

6.6 Ermittlung der Fußbeanspruchung

Der Modellierung mit Ersatz-Zylinderradscheiben folgend, wird die Beanspruchung am Zahnfuß mit dem Ansatz nach [DIN3990] bestimmt. Dieser Ansatz wird auf Beveloidräder angewandt, da die Norm allgemein anerkannt ist, sie auch für andere Zahnformen verbreitet Anwendung findet und leicht handhabbar ist.

Für jedes Scheibenpaar erfolgt die Berechnung der Beanspruchung mit der Grundgleichung (2.4) und dem in Kapitel 6.5 ermittelten Wert des Breitenlastverteilungsfaktors $K_{H\beta,i}$. Die ungleichmäßige Lastverteilung auf der Flanke wirkt sich in abgeschwächter Form auf die Spannungsverteilung am Zahnfuß aus. Dies wird nach [DIN3990] mit dem Fuß-Breitenfaktor $K_{F\beta}$ berücksichtigt.

$$K_{F\beta,i} = K_{H\beta,i}^{N_F} \quad (6.13)$$

Darin enthalten ist der Zahnformexponent N_F , der sich aus der Zahnhöhe h und -breite b ergibt.

$$N_F = \frac{(b/h)^2}{1 + b/h + (b/h)^2} \quad (6.14)$$

Die Abschwächung der Auswirkung einer ungleichmäßigen Lastverteilung entlang der Berührlinie auf die Fußspannungsverteilung ist in der Stützwirkung weniger stark belasteter Bereiche begründet. Der Fuß-Breitenfaktor ist kleiner als der Flanken-Breitenfaktor.

$$K_{F\beta,Bev} \leq K_{H\beta,Bev} \quad (6.15)$$

Mit der Grundgleichung (2.4) nach [DIN3990] ergibt sich die Zahnfußspannung aus der Multiplikation der auf die Breite b und den Modul m_n bezogenen Tangentialkraft am Teilkreis F_t mit dem Formfaktor $Y_{F,i}$, dem Spannungskorrekturfaktor $Y_{S,i}$ und dem Schrägenfaktor $Y_{\beta,i}$. Die Grundgleichung (2.4) wird für Beveloidräder um den örtlichen Lastverteilungsfaktor $K_{F\beta,Bev,i}$ erweitert zu:

$$\sigma_{F,Bev,i} = \frac{F_t}{b \cdot m_n} \cdot Y_{F,i} \cdot Y_{S,i} \cdot Y_{\beta,i} \cdot K_{F\beta,Bev,i} \quad (6.16)$$

Für jedes Scheibenpaar i werden die genannten Faktoren und die Spannung individuell bestimmt, siehe auch Bild 6.10.

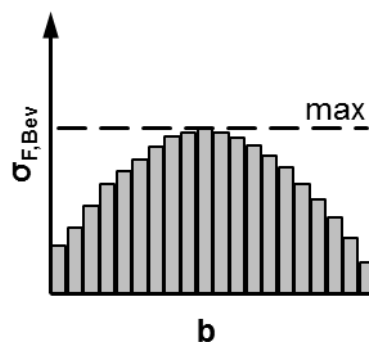


Bild 6.10: Qualitativer Verlauf der berechneten Fußspannungen entlang der Zahnbreite, markierter Maximalwert

Die Spannungsfaktoren gehen multiplikativ unmittelbar in die Fußspannungsberechnung ein. Das Produkt ist in Abhängigkeit des Profilverschiebungswinkels und der Zahnbreite einer Verzahnung entlang der Zahnbreite deutlich unterschiedlich und wird in jeder Scheibe mit dem örtlichen Lastverteilungsfaktor multipliziert. Daher muss der sich ergebende Maximalwert der Fußspannung entlang der Zahnbreite nicht in dem

Scheibenpaar liegen, in dem der Lastverteilungsfaktor das Maximum aufweist. Die über der Zahnbreite veränderliche Zahnform der Beveloidverzahnung ist somit in der abschnittsweisen Definition der Scheibenpaare berücksichtigt.

Der zugrunde gelegte Ansatz nach [DIN3990] beinhaltet mehrere Vereinfachungen. Darin wird keine Berechnung im Eingriffsfeld durchgeführt, wie dies bei höherwertigen Verfahren der Fall ist. Zudem ist die Schrägverzahnung nach [DIN3990] durch eine Ersatz-Geradverzahnung angenähert, siehe auch Gleichung (2.5). Besondere Effekte der Schrägverzahnung, wie beispielsweise die schräg über den Zahn laufende Berührlinie, sind aufgrund der ebenen Betrachtungsweise in den entsprechenden Faktoren der Norm vereinfacht berücksichtigt. Diese Vereinfachungen sind im vorgestellten Scheibenmodell enthalten, sodass damit keine lokale Berechnung möglich ist. Der im Modell ermittelte maximale Fußspannungswert ist somit das relevante Ergebnis und für die gesamte Verzahnung gültig:

$$\sigma_{F,Bev,SM} = \max(\sigma_{F,Bev,i}) \quad (6.17)$$

Darstellungen des Verlaufs der Fußspannung, bestehend aus den Ergebnissen aller Scheibenpaare, sind nur informativ. Ein direkter Vergleich mit Verläufen aus höherwertigen Rechenverfahren ist für Geradverzahnungen nur angenähert möglich, für Schrägverzahnungen jedoch nicht. Das Modell ermöglicht keine lokale Untersuchung entlang der Zahnbreite.

6.7 Ermittlung der Flankenpressung

Die beiden Beanspruchungsarten Fußspannung und Flankenpressung sind wesentliche Kriterien bei der Verzahnungsauslegung. Ebenso wie die Beanspruchung am Zahnfuß wird die Beanspruchung der Flanken mit den Lastverteilungsfaktoren nach Kapitel 6.5 und dem Ansatz nach [DIN3990] ermittelt. Die Verzahnung wird in der Norm durch ideale Ersatzzylinder angenähert und die Hertz'sche Pressung bestimmt. Für Beveloidräder wird die Grundgleichung der Flankenbeanspruchung (2.12) für jedes Scheibenpaar i in Analogie zu Gleichung (2.13) um den Faktor $\sqrt{K_{H\beta,Bev,i}}$ erweitert zu:

$$\sigma_{H,Bev,i} = Z_{H,i} \cdot Z_{E,i} \cdot Z_{\varepsilon,i} \cdot Z_{\beta,i} \cdot \sqrt{\frac{F_t}{d_1 \cdot b} \cdot \frac{u+1}{u}} \cdot \sqrt{K_{H\beta,Bev,i}} \quad (6.18)$$

Wie im Kapitel 2.7.1 dargestellt ist, besteht im Zahnkontakt ein nicht lineares Verformungsverhalten. Für die vollständige Erfassung sämtlicher Einflüsse auf die

Flankenpressung von Beveloidrädern sind tiefergehende Untersuchungen notwendig. Diese sind für den Rahmen dieser Arbeit zu umfangreich, sodass die Betrachtung der Flankenbeanspruchung im Weiteren nicht fortgeführt wird.

6.8 Korrekturfunktion für die Berechnung der Breitenlastverteilung

Die Diskretisierung der Verzahnung erfolgt idealisiert zwischen den Scheibenpaaren reibungsfrei. Eine Wechselwirkung bzw. Stützwirkung dazwischen ist nicht modelliert. Dadurch können sich einzelne Scheibenpaare entsprechend ihrer Klaffungswerte und Steifigkeiten unabhängig voneinander verformen. Aufgrund dieser Vereinfachung ist das Rechenmodell analytisch leicht lösbar, die ermittelten Lastverteilungsfaktoren werden allerdings zu groß bestimmt. Der Effekt ist besonders bei einer Kombination aus großen Änderungen des Klaffungsverlaufs über der Breite, beispielsweise durch große Profilverchiebungswinkel, und geringen Lasten ausgeprägt. In diesem Fall tragen wenige Scheiben einen Großteil der Last.

Eine genauere Bestimmung der Lastverteilungsfaktoren kann durch die Berücksichtigung einer Wechselwirkung zwischen den Scheibenpaaren, beispielsweise mithilfe von Zwischenfedern- oder Dämpfungselementen, erfolgen. Für die Belastungsermittlung muss dann allerdings anstelle von Gleichung (6.11) ein lineares Gleichungssystem iterativ numerisch gelöst werden. Dazu ist eine Rechnerunterstützung erforderlich. Um dies zu vermeiden, wird ein einfacherer Ansatz zur gezielten Korrektur der berechneten Lastverteilungsfaktoren verwendet.

Als Ansatz wird eine Parabelgleichung gewählt, um eine degressive Korrekturfunktion zu realisieren. Mit Gleichung (6.19) wird der mit dem Scheibenmodell bestimmte Breitenlastverteilungsfaktor eines Scheibenpaars $K_{H\beta,i}$ beeinflusst.

$$K_{H\beta,opt,i} = \sqrt{\frac{K_{H\beta,i} - 1 + a}{a}} \quad \begin{array}{l} \text{mit } K_{H\beta,i} \geq 1 \\ a \geq 0,4 \end{array} \quad (6.19)$$

Der Parameter a der Parabel legt die Größe der Korrektur fest. Für $a \geq 0,4$ wird $K_{H\beta,opt,i}$ reduziert. Mit steigenden Werten für a wird der korrigierte Breitenlastverteilungsfaktor kleiner, weshalb die ermittelte Beanspruchung ebenfalls geringer wird. Im Bild 6.11 sind die Kurvenverläufe der Korrekturfunktion für verschiedene Werte von a dargestellt.

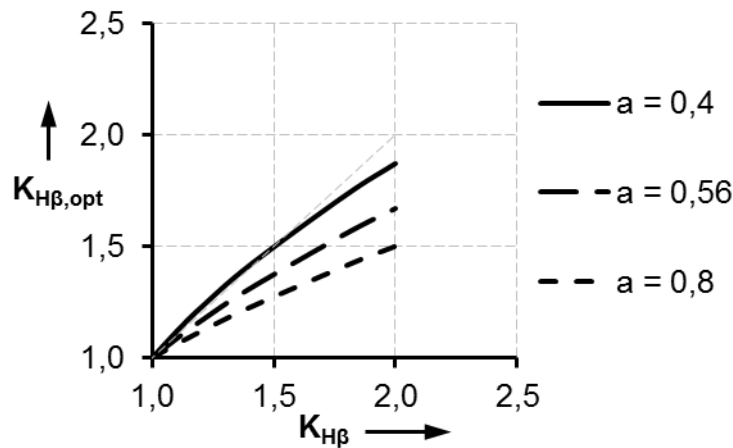


Bild 6.11: Korrekturfunktion des Breitenlastverteilungsfaktors in Abhängigkeit von a

Der optimale Wert für den Parabelparameter a wird durch einen vollständigen faktoriellen Screening-Versuchsplan mit drei Faktoren auf je zwei Stufen und mit acht Faktorstufenkombinationen festgelegt. Die Daten der untersuchten Verzahnungen sind in Tabelle 6.1 aufgeführt.

| | | |
|--------------------|-----------------|-----|
| Normalmodul | m_n [mm] | 4,5 |
| Zahnbreite | b [mm] | 30 |
| Profilverschiebung | x_{Mitte} [-] | 0 |
| Summe Zähnezahl | $z_1 + z_2$ [-] | 66 |
| Last | T [Nm] | 500 |
| Schrägungswinkel | β [°] | 0 |

Tabelle 6.1: Verzahnungsdaten der untersuchten Geradverzahnungen

Bei den Verzahnungen handelt es sich um Geradverzahnungen, sodass die Untersuchung zur Breitenlastverteilung nicht durch die Lastaufteilung auf mehrere im Eingriff stehende Zähne bei Schrägverzahnung vermischt wird. In der Radmitte ist eine Profilverschiebung von null gewählt. Dadurch ergibt sich für jede Verzahnung ein mittiges Tragbild. Bei einer anders gewählten Profilverschiebung muss das Tragbild mithilfe einer Profilverschiebungswinkelkorrektur für jede Kombination der Parameter mittig ausgerichtet werden. Die Folgen wären Abhängigkeiten zwischen den Faktoren. Aufgrund der gewählten unabhängigen Faktoren und des vollständigen faktoriellen Versuchsplans ist die erzielte Auflösung größer V. Es bestehen somit keine Faktorwechselwirkungen zwischen den ermittelten Effekten [KLEPPMANN13, S. 145].

Die gewählten Faktoren des Versuchsplans besitzen einen Einfluss auf die Stirnschnittgestalt sowie die Belastung und Beanspruchung der Beveloidverzahnung. Sie sind in Tabelle 6.2 aufgeführt. Die Faktorstufen sind übliche Werte für Industriegetriebe.

| | | Stufe - | Stufe + |
|--------|-------------------|---------------------|---------|
| Faktor | Benennung: | „“ | Faktor |
| A | Achswinkel | Σ [°] | 3 |
| C | Übersetzung | i [-] | 4 |
| D | Fußrundungsradius | ρ _{fP} [-] | 0,25 |
| | | | 0,38 |

Tabelle 6.2: Untersuchte Faktoren und Faktorstufen geradzahnter Beveloidräder

Für jede Verzahnung des Screenings wird mithilfe der FEM und des Scheibenmodells die Beanspruchung am Zahnfuß bestimmt. Zusätzlich wird im Rechenmodell der Parabelparameter a zur Korrektur der ermittelten Breitenlastverteilung variiert. Aus den Ergebnissen wird in Abhängigkeit des Parameters a die mittlere Abweichung zwischen den Scheibenmodell- und FE-Werten nach Gleichung (6.20) bestimmt.

$$\Delta_{Mw}(a) = \frac{1}{8} \cdot \sum_{i=1}^8 \left(\frac{\sigma_{F,SM,i}(a) - \sigma_{F,FEM,i}}{\sigma_{F,FEM,i}} \cdot 100\% \right) \quad (6.20)$$

Für die Festlegung eines optimalen Parameters a müssen die Ergebnisse zwei Bedingungen erfüllen:

$$\sigma_{F,SM,i}(a) > \sigma_{F,FEM,i} \quad (6.21)$$

$$\min(\Delta_{Mw}(a)) \quad (6.22)$$

Durch die Bedingung nach Gleichung (6.21) ist sichergestellt, dass das Scheibenmodell größere Spannungswerte als die FE-Simulation ergibt und damit konservativ ist. Mit der Erfüllung der Bedingung nach Gleichung (6.22) ist die mittlere Abweichung zwischen den FE- und Scheibenmodell-Ergebnissen am Kleinsten. Die Werte der mittleren Abweichung in Abhängigkeit des Parameters a sind in Bild 6.12 dargestellt.

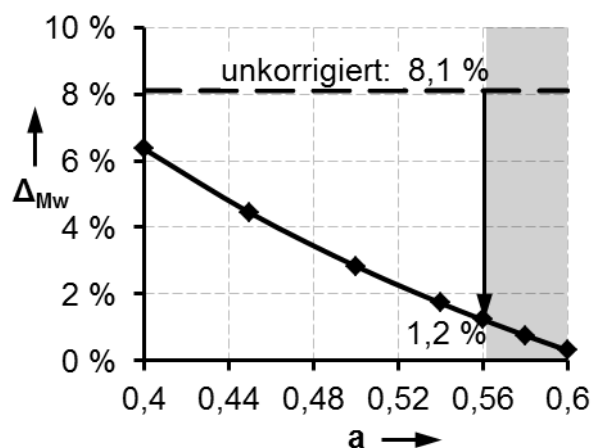


Bild 6.12: Mittlere Abweichung zwischen Scheibenmodell und FE-Simulation für verschiedene Werte von a

Ohne Korrektur der Breitenlastverteilung ergibt sich eine mittlere Abweichung zwischen den FE- und Scheibenmodell-Ergebnissen von ca. 8,1 %. Die Bedingungen (6.21) und (6.22) sind für einen Wert von $a = 0,56$ erfüllt. Die mittlere Abweichung ist dabei auf 1,2 % reduziert. Für noch größere Werte von a nimmt die mittlere Abweichung weiter ab, in diesen Fällen ist allerdings Bedingung (6.21) nicht mehr erfüllt. Dieser Bereich ist in Bild 6.12 grau hinterlegt.

6.9 Fazit zum analytischen Rechenmodell

Das vorgestellte Rechenmodell beinhaltet eine Übertragung der einfachen analytischen Methode nach [DIN3990] zur Analyse der Belastung und Beanspruchung von Beveloidrädern in kreuzender Achslage. Die komplexe Zahnform und die kreuzende Achslage finden mit dem Modell unmittelbare Berücksichtigung, ebenso die tatsächliche Feingeometrie, mit der die lastfreie Klaffung bestimmt wird. Die Berechnung erfolgt in diskreten Stirnschnitten und diskreten Lastschritten. Zusätzliche im Scheibenmodell getroffene Annahmen begründen sich mit der Verwendung der Beanspruchungsrechnung nach [DIN3990].

Die Zahnfedersteifigkeit von in eine Ebene geschwenkten Beveloidrad-Stirnschnitten kann mit der im vorangegangenen Kapitel vorgestellten Rechenvorschrift direkt analytisch bestimmt werden. Aus dem Scheibenmodell ergeben sich Breitenlastfaktoren auf der Flanke und am Zahnfuß. Das Modell bestimmt mit dem Fuß-Breitenlastfaktor die höchste Fußbeanspruchung, die in einen Tragfähigkeitsnachweis nach [DIN3990] einfließen kann. Die Validierung der Ergebnisse ist in den nachfolgenden Kapiteln beschrieben. Für den ermittelten Flanken-Breitenlastfaktor ist die Übernahme in den Tragfähigkeitsnachweis nach Norm ebenfalls möglich, eine Validierung der Flankenbeanspruchung findet im Rahmen dieser Arbeit jedoch nicht statt.

Das Scheibenmodell ermöglicht keine lokale Untersuchung der Beanspruchungen im Eingriffsfeld. Es ermöglicht ebenfalls keine Aussage über die kritische Breitenkoordinate oder über die kritische Eingriffsstellung. Das Ergebnis der Fußbeanspruchung nach Gleichung (6.17) bezieht sich auf die gesamte Zahnbreite, wie dies auch bei Zylinderrädern nach [DIN3990] der Fall ist. Ebenso sind Angaben zu den zulässigen Beanspruchungen analog [DIN3990] nicht Teil der Untersuchungen.

7 Experimentelle Untersuchungen

Die in den voranstehenden Kapiteln vorgestellten analytischen und numerischen Untersuchungen sind theoretischer Natur. Für eine Validierung der Ergebnisse werden sie experimentellen Untersuchungen gegenübergestellt, um die Aussagefähigkeit zu bestätigen. Dies ist umso wichtiger, da es sich bei der numerischen FE-Simulation um umfangreiche und aufwändige Berechnungen handelt. Das Vorgehen zur Versuchsdurchführung wird im Folgenden vorgestellt, die Ergebnisse in Kapitel 8.

7.1 Versuchskonzept

Verzahnungen sind durch eine Vielzahl von Verzahnungsparametern beschrieben. Durch vorangegangene, intensive Forschungen, beispielsweise an Zylinderrädern, sind die Einflüsse der Parameter auf die Beanspruchungen in die bekannten Berechnungsansätze integriert. Um die vollständige, korrekte Berücksichtigung aller Parameter im vorgestellten Scheibenmodell experimentell zu überprüfen, wäre eine große Anzahl an Versuchskörpern notwendig. Dies kann im Rahmen dieser Arbeit nicht geleistet werden. Daher erfolgt der experimentelle Nachweis anhand ausgewählter Verzahnungen, siehe Kapitel 7.2. Das Versuchskonzept ist so definiert, dass die Messergebnisse der durchgeführten Versuche sowohl mit denen der FE-Analysen als auch mit denen des Scheibenmodells vergleichbar sind.

Eine direkte messtechnische Validierung der Ergebnisse für die Lastverteilung ist nicht möglich. Mit einem aufwändigen Verfahren ist nur ein relativer Vergleich unterschiedlich belasteter Zahnabschnitte mittels Feinpapier messbar [KUPFER00]. Bei dieser Methode wird zwischen die Zahnflanken der stehenden Verzahnung ein Feinpapier eingebracht. Durch eine statische Lasteinwirkung verdünnt sich das Papier und bewirkt einen vergrößerten Durchschein von starkem Gegenlicht, welcher messbar ist.

Bei diesem Vorgehen bestehen mehrere Herausforderungen: Die Verzahnung darf während der Belastung nicht abwälzen, da die Gleitbewegung zwischen den Flanken das Papier zerreibt. Aus diesem Grund muss die relevante Berührlinie lastfrei exakt eingestellt und während der Belastung, trotz der unvermeidlichen Getriebeverformungen unter Last, beibehalten werden. Als Messergebnis wird eine relative Vergrößerung der Lichtdurchlässigkeit in höherbelasteten Bereichen bestimmt. Ein Vergleich mit berechneten Werten ist nur indirekt möglich. Aus Erfahrungen der praktischen Anwen-

dung dieses Verfahrens ist es für die im Rahmen dieser Arbeit angestrebten Versuche als nicht zielführend einzustufen [BACHMANN13A].

Die Fußspannung ist mit Dehnungsmessstreifen (DMS) unmittelbar messbar. Sie ist ein wesentliches technisches Auslegungskriterium und neben der Lastverteilung ein Ergebnis des vorgestellten Rechenmodells. Aufgrund der genannten Nachteile einer indirekten Messung der Lastverteilung erfolgt die experimentelle Bestätigung der Untersuchungen anhand der direkten Messung der Zahnfußspannung. Die Validierung des Scheibenmodells und der FEM geschieht durch den Vergleich der Berechnungsergebnisse mit den Messungen.

Die Beanspruchung von Beveloidrädern ergibt sich im vorgestellten Scheibenmodell aus dem Zusammenwirken der Steifigkeit, der Zahnform und der Nennlast, siehe auch Bild 6.2. Diese Bestandteile der Berechnung gilt es messtechnisch zu überprüfen. Eine direkte Messung der Steifigkeit ist sehr aufwändig, findet allerdings indirekt bei der Messung der Fußbeanspruchung statt. Um die tatsächlichen Eigenschaften der gefertigten Verzahnungen zu erfassen, erfolgt die Vermessung der Zahnräder vor und nach der Messtechnikapplikation. Das Lastmoment wird durch Massestücke erzeugt und ist ebenfalls direkt festgelegt. Die wesentlichen Bestandteile der theoretischen Berechnungen werden somit messtechnisch überprüft, wodurch negative Wechselwirkungen zwischen den Bestandteilen und daraus resultierende Verfälschungen der Messergebnisse minimiert werden.

Die Versuchsdurchführung erfolgt nach den gleichen Grundsätzen, die auch bei den analytischen und numerischen Berechnungen modelliert sind: Die im vorgestellten Scheibenmodell zugrunde gelegte Berechnungsmethode nach [DIN3990] und die numerischen FE-Analysen verwenden bei der Ermittlung der Fußbeanspruchung statische Ansätze. Bei den Versuchen findet ein langsames, kontrolliertes Abwälzen der Verzahnung unter konstanter Last statt. Dadurch ist sichergestellt, dass die Wälzstellung, welche die höchste Beanspruchung bewirkt, durchlaufen wird. Die Abwälzgeschwindigkeit wird durch das Messsystem erfasst, kontrolliert und begrenzt. Effekte aus der Drehgeschwindigkeit sind dadurch vernachlässigbar klein und die Versuche können als quasistatisch bezeichnet werden. Die Ergebnisse aus den Versuchen und den theoretischen Rechnungen sind somit grundsätzlich miteinander vergleichbar.

Ein langsames Abwälzen bei der Versuchsdurchführung ermöglicht im Gegensatz zu einer rein stehenden Messung zudem die Erstellung von Tragbildern. Dies dient der

Kontrolle der Flankenberührung und der Prüfstandseinstellung. Auf den Zahnflanken aufgebrachte Farbe wird während des Abwälzens zerrieben, Bereiche in denen eine Berührung stattfindet, sind dadurch metallisch glänzend und eindeutig identifizierbar. Das grundsätzliche Versuchskonzept ist in Bild 7.1 dargestellt.

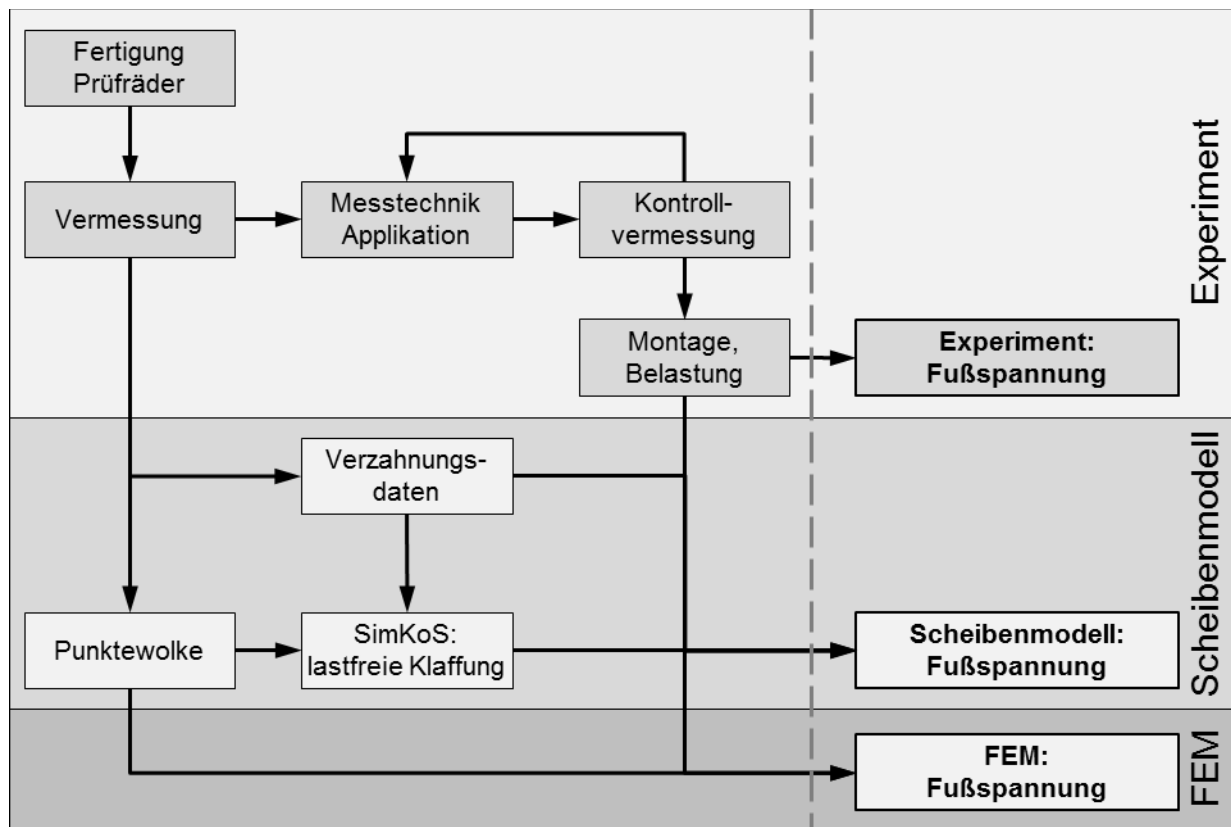


Bild 7.1: Grundsätzliches Versuchs- und Validierungskonzept

7.2 Prüfverzahnungen

Die Messungen der Fußbeanspruchungen an den Prüfverzahnungen sollen das analytische Scheibenmodell sowie die FE-Simulation validieren. Mit einem Ergebnisvergleich wird einerseits die generelle Anwendbarkeit des Scheibenmodells auf Beveloidräder, andererseits die Gültigkeit der vorgenommenen Vereinfachungen demonstriert. Dies soll an Beveloidverzahnungen mit charakteristischen Verzahnungshauptdaten erfolgen.

Verzahnungsparameter mit einem wesentlichen Einfluss auf den Unterschied in der Stirnschnittform zwischen Beveloidverzahnungen und Zylinderrädern sind der Profilver-schiebungswinkel sowie der Schrägungswinkel. Diese beiden Parameter werden daher an den Prüfverzahnungen variiert. Die Verzahnungsdaten der Prüfräder sind in Tabelle 7.1 aufgeführt. Technische Skizzen der Räder sind in Anhang A zu finden.

| | | Geradverzahnung | | | Schrägverzahnung | |
|---------------------------|-------------------|-------------------------|-------|-------|------------------|-------|
| | | Rad 1 | Rad 2 | Rad 3 | Rad 4 | Rad 8 |
| Normalmodul | m_n [mm] | 4,5 | 4,5 | 4,5 | 5,5 | 5,5 |
| Zähnezahl | z [---] | 29 | 31 | 33 | 27 | 27 |
| Zahnbreite | b [mm] | 30 | 30 | 30 | 30 | 30 |
| Schrägungswinkel | β [°] | 0 | 0 | 0 | -20 | +20 |
| Profilverschiebung | x_{Mitte} [---] | 0,25 | 0,25 | 0,25 | 0,2 | 0,2 |
| Profilverschiebungswinkel | θ [°] | 0 | 5,55 | 11,09 | 0 | 8,68 |
| Fußrundungsradius | ρ_{fP} [---] | 0,38 | 0,38 | 0,38 | 0,38 | 0,38 |
| Zahnfußhöhenfaktor | h_{fP} [---] | 1,25 | 1,25 | 1,25 | 1,25 | 1,25 |
| Flankenmodifikation | --- | keine | keine | keine | keine | keine |
| | | nach [TRAUT11A, S. 221] | | | | |

Tabelle 7.1: Verzahnungsdaten der experimentellen Prüfräder

Die Räder 2 und 3 sind mit großen Profilverschiebungswinkeln versehen, bei denen die geometrischen Grenzen des Querschnitts und der Spitzgrenze fast erreicht werden. Rad 8 zeigt eine Kombination von großen Profilverschiebungs- und Schrägungswinkeln. Weitere Kriterien bei der Wahl der Verzahnungsdaten waren zudem die üblichen technischen Regeln, die Herstellbarkeit und die Zugänglichkeit für die Applikation der Dehnungsmessstreifen.

Die Herstellung der Räder erfolgte mittels 5-Achsfräsens, wobei die Räder auf CNC Bearbeitungszentren aus dem vollen Material gefertigt wurden. Für Großverzahnungen, Prototypen, Einzelstücke oder in Reparaturfällen bietet diese Herstellart Vorteile gegenüber herkömmlich gefertigten Zylinder- und Kegelrädern [WESER13, S. 135]. Die Vorteile bestehen beispielsweise in geringeren Fertigungskosten, flexiblerer Fertigung, einer möglichen Optimierung der Zahnform und Fußausrundung, Herstellung neuartiger Korrekturen oder der über dem Radumfang unterschiedlichen Ausführung von Flankenmodifikationen.

Die beiden letztgenannten Vorteile fanden bei der Fertigung der Geradverzahnungen Anwendung. Die Räder 1 bis 3 sind über dem Umfang segmentiert und weisen abschnittsweise eine Profilverschiebungskorrektur nach Traut [TRAUT11A, S. 221] auf. Die Korrektur ändert lokal den Verlauf der Profilverschiebung entlang der Zahnbreite und damit die Zahndicke. Dadurch berühren sich die Flanken in größeren Bereichen, das Tragbild ist verbreitert und die Beanspruchung am Fuß reduziert. Die Paarungen 13 und 23 liegen daher in einer unkorrigierten und korrigierten Variante vor. Alle Zahnräder sind zudem mit einer Profilverschiebungswinkelkorrektur nach [WAGNER93] versehen, so dass ihr Tragbild mittig orientiert ist.

Die möglichen Paarungen der Räder sind in Tabelle 7.2 zusammengefasst. Mit den Paarungen sollen sowohl kleine als auch sehr große Achswinkel von 15° realisiert werden. Die Benennung der Paarungen richtet sich nach der Nummerierung der Räder einer Paarung.

| | Geradverzahnung | | | | Schrägverzahnung |
|------------------|-----------------|----------------------|----------------------|--|------------------|
| Räder | Rad 1, Rad 2 | Rad 1, Rad 3 | Rad 2, Rad 3 | | Rad 4, Rad 8 |
| Benennung | 12 | 13 | 23 | | 48 |
| Über- setzung | 1,07 | 1,14 | 1,06 | | 1 |
| Achswinkel | 5° | 10° | 15° | | 8° |
| Korrektur | --- | unkorr. korrigiert | unkorr. korrigiert | | --- |

Tabelle 7.2: In den Versuchen gebildete Paarungen der Prüfräder

7.3 Verzahnungsvermessung

Vor der Applizierung der Dehnungsmessstreifen und der Versuchsdurchführung werden die Verzahnungen mit einer 3D-Koordinatenmessmaschine vermessen. Ihr taktiles Messverfahren ist das am besten für Verzahnungen geeignete [HÄRTIG13, S. 400]. Die Messmaschine ermöglicht die vollständige Erfassung der komplexen Zahngestalt mit einer Wiederholgenauigkeit von unter $2\ \mu\text{m}$. Die Zähne sind mit einem Punkteraster auf den Flanken und am Zahnfuß topologisch vermessen, siehe Bild 7.2.



Bild 7.2: Vermessung der Verzahnung mithilfe einer Koordinatenmessmaschine

Die so erstellte Punktwolke wird in das Programm SimKoS geladen und steht damit für Simulationen zur Verfügung. Mit SimKoS wird eine lastfreie Abwälzsimulation durchge-

führt und die lastfreie Klaffung berechnet, anschließend erfolgt eine Last berücksichtigende FE-Simulation zur Analyse der Beanspruchungen.

Die bei Zylinderrädern übliche Art der Bewertung von Fertigungsfehlern auf den Flanken mithilfe weniger Kenngrößen ist bei Beveloidrädern nicht ohne Weiteres möglich [BACHMANN13B, S. 111]. Da die aufgenommenen Punktwolken direkt für die Simulationen eingesetzt werden, ist dies jedoch auch nicht erforderlich. Die Messschriebe sind in einer für Zylinderräder üblichen Darstellung in Anhang B zu finden.

7.4 Modifizierter Drehübertragungsprüfstand

Die Versuchsdurchführung erfolgt mit dem modifizierten Drehübertragungsprüfstand, siehe Bild 7.3. Der Prüfstand ist von Dittert [DITTERT06] und Alxneit für Beveloidräder in kreuzender Achslage aufgebaut worden und in [ALXNEIT10, S. 131] ausführlich beschrieben. Alxneit führt an dem Prüfstand Messungen des Drehübertragungsfehlers an quasi lastfrei abwälzenden Beveloidverzahnungen durch. Der Prüfstand besitzt zur gezielten Einstellung der Achslage an den Zahnradtaufnahmen drei Freiheitsgrade. Ein Lagerturm kann lateral und radial (Linearturm), der andere Lagerturm angular (Drehurm) verfahren. An definierten Anschlagpunkten ist die eingestellte Position überprüfbar. Die Achslage und der Achswinkel sind durch die Führungen in einem Bereich von null bis 20° einstellbar. Aufgrund der Flexibilität des Aufbaus können unterschiedliche Zahnradtypen eingebaut werden, beispielsweise Beveloidverzahnungen in paralleler Achslage, Hohlradverzahnungen und Zylinderräder.

Zur Aufbringung der nötigen Verspannungsmomente ist der Prüfstand mechanisch erweitert worden. Schmidt ergänzt eine Möglichkeit zur Belastung der Verzahnung mit einem statischen Drehmoment [SCHMIDT11]. Dazu verstärkt er die Konstruktion des Aufbaus, optimiert die Seilführung und konstruiert Halterungen für Massestücke. Matter erarbeitet eine Verblockung zur Sicherstellung der Positionstreue während der Lasteinwirkung [MATTER13]. Das einstellbare Verspannmoment bis zu 300 Nm wird gravimetrisch erzeugt und wirkt statisch. Messungen sind somit nicht durch Schwankungen in der Momenterzeugung beeinflusst. Gleichzeitig kann die Verzahnung beliebig abwälzen.

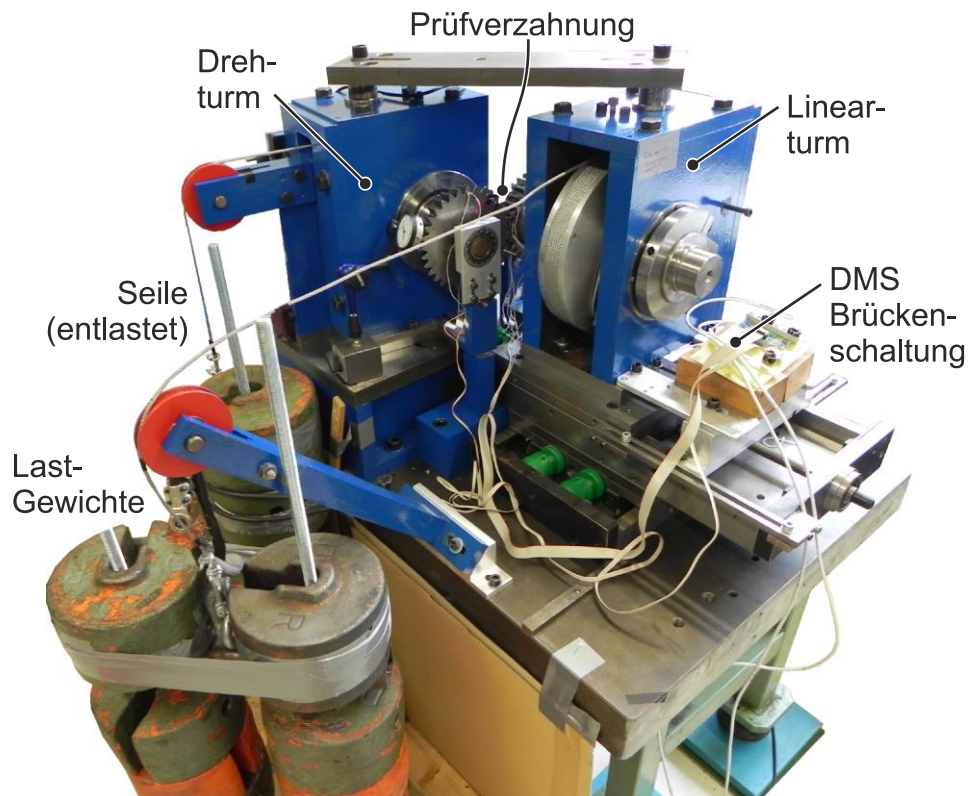


Bild 7.3: Modifizierter Drehübertragungsprüfstand bei der Versuchsvorbereitung

7.5 Versuchsvorbereitung

Die Messung der Zahnfußspannung erfolgt mit Dehnungsmessstreifen, die in Zahnbreitenmitte an der 30° Tangente der Fußkurve appliziert sind, siehe Bild 7.4.

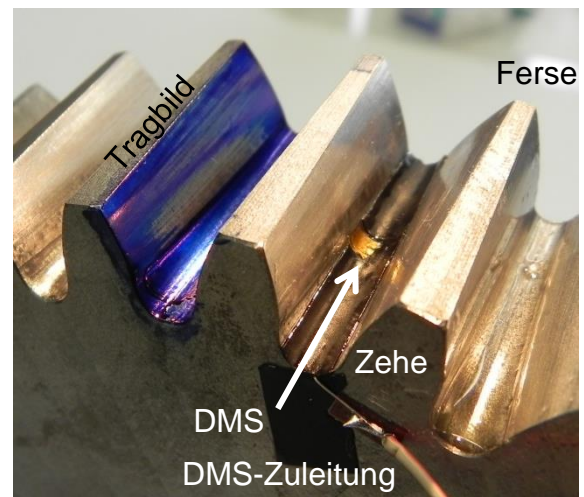
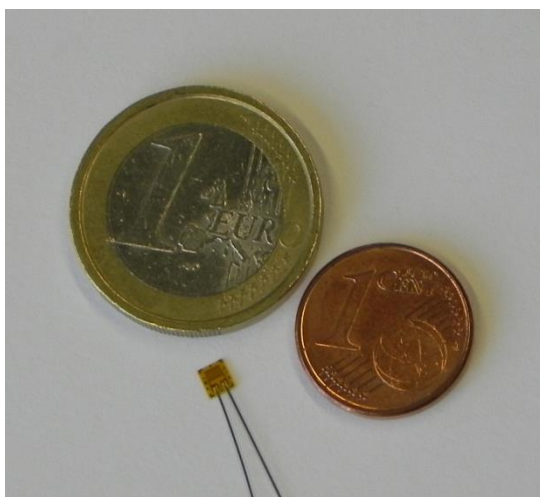


Bild 7.4: Größenvergleich der verwendeten DMS, Rad 2 nach der Applizierung

Dehnungsmessstreifen kleben auf der Probenoberfläche und erfassen die Bauteilverformungen aufgrund der Lasteinwirkung in Form einer Widerstandsänderung des Messdrahts. Die Oberfläche der Probe wird durch das Bekleben mit DMS unzugänglich,

daher sind die Zähne vor der Messtechnikapplikation vollständig vermessen worden, wie es in Kapitel 7.3 beschrieben ist. Wegen der beengten Verhältnisse in der Zahnfußkurve und um das Messergebnis nicht zu verfälschen, muss die Messgitterfläche des Dehnmessstreifens möglichst klein sein. Die verwendeten DMS besitzen eine Messgitterlänge von 0,76 mm [VISHAY10, S. 8], wodurch die Applizierung sehr aufwändig ist. Mithilfe einer passend angefertigten Schablone aus klebender Klarsichtfolie ist die Positionierung und Ausrichtung des DMS auf einer ebenen Arbeitsfläche vorbereitet. Durch Anlegen der Schablone an die Kopfkante und die Zahnflanke ist der DMS am korrekten Ort positioniert. Die Kontrolle der korrekten Orientierung erfolgt mit weiteren Schablonen und einer erneuten Vermessung. Dieses Applizierungsverfahren entwickelte Matter [MATTER13].

Neben den zur Messung der Zahnfußspannung aktiven DMS sind passive DMS an den nicht im Kraftfluss liegenden Stirnseiten der Zahnräder angebracht. Zusammen mit Festwiderständen sind die Dehnmessstreifen zu einer Wheatstone'schen Messbrücke verschaltet [HOFFMANN87, S. 145]. Die passiven DMS dienen darin der Kompensation möglicher Temperaturänderungen bei der Versuchsdurchführung. Mithilfe der Schaltung ist es möglich, die lastbedingte Materialdehnung als Widerstandsänderung der Brücke zu messen und mit Materialkonstanten in eine mechanische Zugbeanspruchung umzurechnen.

Eine weitere Messgröße am Prüfstand ist die Abwälzgeschwindigkeit der Verzahnung. Dazu erfasst ein Triangulationslaser die Position eines Massestücks, welches an einem auf der Welle aufgewickelten Faden hängt. Bei der Abwicklung des Fadens während des Abwälzens wird der Weg gemessen, das Messsignal abgeleitet und damit die Winkelgeschwindigkeit der Welle bestimmt. Damit ist eine direkte Kontrolle der Abwälzgeschwindigkeit möglich, um das Kriterium einer quasistatischen Versuchsdurchführung zu überprüfen. Die Messgrößen der Brückenschaltung und des Triangulationslasers laufen in der zentralen Messdatenerfassung zusammen, werden verstärkt, umgerechnet, visualisiert und gespeichert. Das Messsystem wurde in einer Reihe studentischer Arbeiten entwickelt und optimiert [SCHMIDT11], [BERNHARD12], [MATTER13].

Die Kontrolle der korrekt eingestellten Achslage erfolgt durch Tragbildaufnahmen. Dazu wird blaue Anreißfarbe auf die tragenden Zahnflanken aufgebracht. Die Relativbewegung der aufeinander abgleitenden Flanken reibt die Farbe ab, der Kontaktbereich

glänzt metallisch. Das Tragbild ist dadurch eindeutig sichtbar und wird fotografisch festgehalten.

7.6 Versuchsplanung

Die experimentelle Überprüfung des theoretischen Vorgehens erfolgt anhand von sechs Paarungen mit unterschiedlichen Verzahnungshauptdaten. Die Paarungen sind in Tabelle 7.2 aufgeführt. Die Benennung der Paarungen setzt sich aus den Nummern der beteiligten Räder zusammen. Mit den Versuchen werden die nachfolgend beschriebenen Ziele verfolgt.

Die mit den Versuchen zu messenden Fußspannungen sind direkt mit den Ergebnissen der FE-Simulation und des analytischen Scheibenmodells vergleichbar. Aus der Gegenüberstellung der Ergebnisse mit den Messwerten werden Abweichungen in Abhängigkeit der Versuchsparameter bestimmt und aufgetragen. Dies geschieht bei allen Radpaarungen. Das Ziel ist die Validierung der Ergebnisse des analytischen Scheibenmodells und der FE-Simulation. Die Ergebnisse sind in Kapitel 8 dargestellt.

Die Versuche werden stets mit dem maximalen Lastmoment einer Paarung durchgeführt. Im Prüfplan in Tabelle 7.3 sind daher entsprechende Versuche für alle Paarungen in Spalte 5 gekennzeichnet. Die im Scheibenmodell angewendete Analogie zu Druckfedern, die nach [DIN3990] bezüglich der Last angenähert konstante Zahnfedersteifigkeit und die in der FE-Simulation verwendeten Kontaktbedingungen werden anhand von Lastvariationen überprüft. Die Lastvariation wird mit den Paarungen 13, bestehend aus den Rädern 1 und 3, und Paarung 23, bestehend aus den Rädern 2 und 3, durchgeführt. In Tabelle 7.3 sind diese Varianten der Versuche in der Spalte 4 gekennzeichnet.

Bei den Versuchen ist die Tragbildlage stets mittig orientiert. Mit Versuchen an einer gezielt veränderten Tragbildlage kann die korrekte Berücksichtigung der Radanordnung in der FE-Simulation und im analytischen Ansatz experimentell bestätigt werden. Dies geschieht anhand der Paarung 23, siehe Spalte 6 bis 8 in Tabelle 7.3.

Die Verzahnungen der Paarungen 13 und 23 sind zusätzlich in korrigierten Varianten ausgeführt. Anhand der Versuche mit diesen Paarungen kann die korrekte Berücksichtigung der Korrektur und der veränderten Klaffungswerte in den theoretischen Rechnungen überprüft werden, siehe Spalte 9 und 10 in Tabelle 7.3.

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---------|----------|---------|-----------|------|----------------------|-------|-------|-----------------|-------|
| | | | Last | | Tragbildorientierung | | | Verz-korrektur. | |
| Paarung | Σ | β | Variation | max. | Zehe | Mitte | Ferse | unkorr. | korr. |
| 12 | 5° | 0° | | X | | X | | X | |
| 13 | 10° | 0° | X | X | | X | | X | X |
| 23 | 15° | 0° | X | X | X | X | X | X | X |
| 48 | 8° | 20° | | X | | X | | X | |

Tabelle 7.3: Prüfplan, durchgeführte Varianten der Versuche sind grau hinterlegt

7.7 Versuchsdurchführung

Die allgemeine Versuchsdurchführung läuft wie nachfolgend beschrieben ab: Die Verzahnung wird eingebaut und die Achslage und der Achswinkel kontrolliert. Die Achslage des Prüfstands ist frei einstellbar. Die korrekte Montage der Prüfräder und Prüfstandseinstellung sind wesentlich für valide Messergebnisse. Die Überprüfung erfolgt durch Positionsmessungen am Aufbau und eine Kontrolle des lastfreien Tragbilds.

Anschließend erfolgt die Belastung der Verzahnung mit einem statisch wirkenden Moment, wodurch der Prüfstand mechanisch verspannt wird. Das Lastmoment wird gravimetrisch durch Massestücke erzeugt. Mit der Portionierung der Massestücke ist eine Variation der Last möglich. Für ein Kräftegleichgewicht an den Zähnen sind die Massestücke in Abhängigkeit der Verzahnungshauptdaten und Achslagen geeignet zu kombinieren. Das Maximalmoment der Paarungen ist daher uneinheitlich.

Die Verzahnung ist durch das Moment mechanisch verspannt, es müssen nur die Reibungsverluste ausgeglichen und die Drehbewegung aufgebracht werden. Das Vorgehen besitzt den Vorteil, dass das Lastmoment nicht durch Schwankungen des Antriebsmoments überlagert ist. Die Drehbewegung beträgt etwa 2 min⁻¹. Die Versuchsdurchführung erfolgt mit einer langsamen, gleichmäßigen Wälzbewegung. Der mit den DMS versehene Zahn kommt dabei in Eingriff, wird beansprucht und die Fußspannungswerte werden aufgezeichnet. Somit kann von einer quasistatischen Belastung der Zähne ausgegangen werden.

Aus dem Messschrieb der aufgezeichneten Fußspannung wird der Maximalwert ausgewertet. Um die Messergebnisse nicht durch unvermeidliche, zufällige Schwankungen zu verfälschen, wird jede Messung mindestens 8-fach, in der Regel 15-fach wiederholt und aus den Einzelwerten der Mittelwert bestimmt. Außerdem wird das Tragbild fotografisch festgehalten. Die aufgenommenen Messergebnisse sind in Kapitel 8 dargestellt.

8 Validierung der Beanspruchungsanalyse

In den vorangegangenen Kapiteln wurden die numerischen, analytischen und experimentellen Methoden zur Beanspruchungsanalyse vorgestellt. Mit den nachfolgenden Untersuchungen zur Validierung soll die Anwendbarkeit der FE-Simulation sowie des Scheibenmodells auf Beveloidverzahnungen dargestellt werden. Dies geschieht in drei Schritten. Im ersten Schritt wird in Kapitel 8.1 die korrekte Implementierung des Berechnungsansatzes nach [DIN3990] in das Scheibenmodell anhand von Zylinderrädern untersucht. Die korrekte Übertragung ist eine Grundvoraussetzung für Untersuchungen an Beveloidrädern. Der Vergleich der Ergebnisse nach [DIN3990] und des Scheibenmodells zeigt den Einfluss der Diskretisierung der Verzahnung in einzelne Scheiben und der Last in Stufen. Im zweiten Schritt werden in Kapitel 8.2 und 8.3 Messungen der Fußspannung am Prüfstand vorgestellt und die Ergebnisse mit denen des Scheibenmodells sowie der FE-Simulation gegenübergestellt. Dies ist der Hauptteil der experimentellen Validierung. Zur Überprüfung weiterer Verzahnungsparameter werden im dritten Schritt in Kapitel 8.4 theoretische Verzahnungen mit FE-Rechnungen untersucht. Dies ist der Hauptteil der theoretischen Validierung.

8.1 Untersuchung von Zylinderrädern

Das analytische Scheibenmodell basiert auf dem Berechnungsansatz nach [DIN3990]. Die korrekte Übertragung der Norm in das Scheibenmodell ist eine wesentliche Voraussetzung für eine Anwendung des Modells auf Beveloidräder. Zur Überprüfung werden die Beanspruchungen an Zylinderrädern nach [DIN3990] sowie mit dem Scheibenmodell bestimmt. Die zu untersuchenden Zylinderrad-Verzahnungen sind die des Screening-Versuchsplans in Kapitel 4.5. Die Verzahnungen sind zusätzlich mit einer Balligkeit über der Gesamtbreite von 1 μm versehen. Dadurch ist auch bei idealen Zylinderrädern zu den Stirnseiten hin eine Klaffung vorhanden, mit der im Scheibenmodell die Berechnung der Lastverteilung erfolgen kann.

Ein Vergleich der Beanspruchungsergebnisse beider Methoden ermöglicht eine grundlegende Überprüfung des Vorgehens. Die Differenz $\Delta\sigma_F$ zwischen den Ergebnissen ergibt sich zu:

$$\Delta\sigma_F = \frac{\sigma_{F,SM} - \sigma_{F,DIN}}{\sigma_{F,DIN}} \cdot 100\% \quad (8.1)$$

Die Auswertung erfolgt analog zu dem in Kapitel 4.5.3 dargestellten Vorgehen. Die Effekte werden mit Gleichung (4.9) ermittelt und sind in Bild 8.1 dargestellt. Theoretische Überlegungen lassen im Fall einer korrekten Übertragung des Berechnungsansatzes für alle Faktoren einen Effekt von 0 % erwarten.

Die ermittelten Effekte sind erwartungsgemäß niedrig. Kein Faktor besitzt einen größeren Effekt auf die Abweichung als 0,5 %. Die Abweichung kann auf das breiten- und lastdiskrete Vorgehen und die zusätzliche Modellierung einer Breitenballigkeit bei der Berechnung zurückgeführt werden. Der Rechengang nach [DIN3990] ist daher korrekt im Scheibenmodell berücksichtigt.

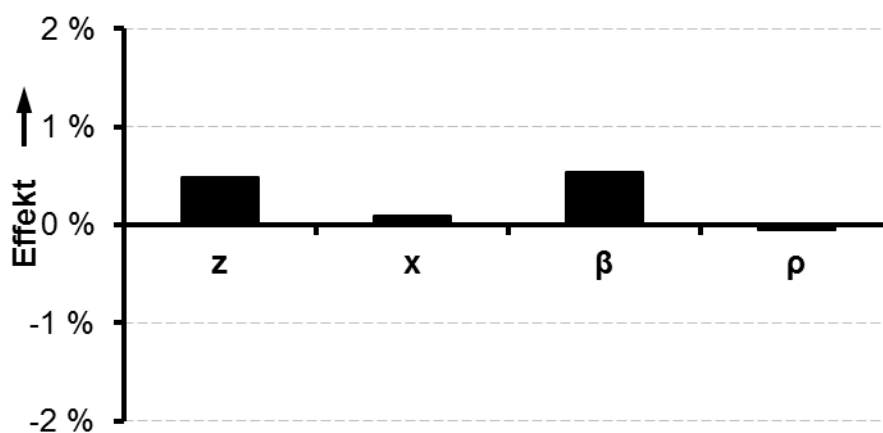


Bild 8.1: Effekte auf die Abweichungen zwischen den Ergebnissen nach Norm und Scheibenmodell für Zylinderräder

8.2 Messungen an Geradverzahnungen

Zur Validierung der FE-Simulation und des Scheibenmodells werden nachfolgend deren Ergebnisse mit Messungen an Geradverzahnungen gegenübergestellt. Die FE-Simulationen erfolgen mit Berücksichtigung der gefertigten und topologisch vermessenen Verzahnung, wie dies in Kapitel 7.3 beschrieben ist.

8.2.1 Messung der Fußspannung

Die Versuchsdurchführung erfolgt nach dem im Kapitel 7.7 beschriebenen Vorgehen. Die Räder werden montiert, der Prüfstand eingestellt, die Last aufgebracht und die Fußspannung während des langsamen Abwälzens aufgezeichnet. Ein Versuch wird mehrfach wiederholt, um zufällige Einflüsse zu minimieren und die Präzision der Messungen darzustellen. Nachfolgend sind die Ergebnisse für die Paarung 13 bestehend

aus den Rädern 1 und 3 im Bild 8.2 aufgetragen. Die Verzahnung bildet einen Achswinkel von 10° und ist mit 299 Nm belastet.

Im linken Teil von Bild 8.2 sind die kontinuierlich aufgezeichneten Messwerte der acht Wiederholungsmessungen dargestellt. Die Messkurven verlaufen nahezu deckungsgleich und differieren hauptsächlich gegen Ende der Messung. Das Aufzeichnungsende ist bei jeder Messung einzeln festgelegt. Ausgewertet wird der Größtwert jeder Messung und damit ein Mittelwert gebildet, siehe Bild 8.2 rechts. Die Größtwerte zeigen kaum Streuung, die berechnete Standardabweichung beträgt 1 % des Mittelwerts. Die Messungen sind daher präzise [DIN55350].

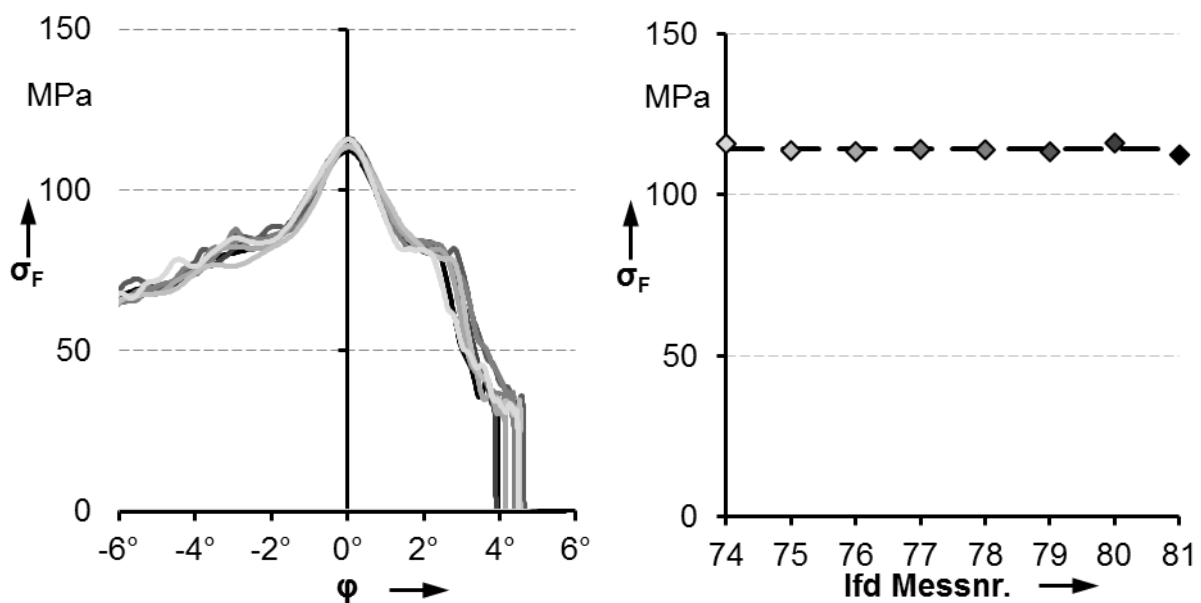


Bild 8.2: Messungen der Fußspannung an Paarung 13: aufgezeichnete Messschriebe (links), Auswertung der Größtwerte (rechts)

Im Bild 8.3 sind die Ergebnisse der Fußspannungen entlang der Zahnbreite dargestellt.

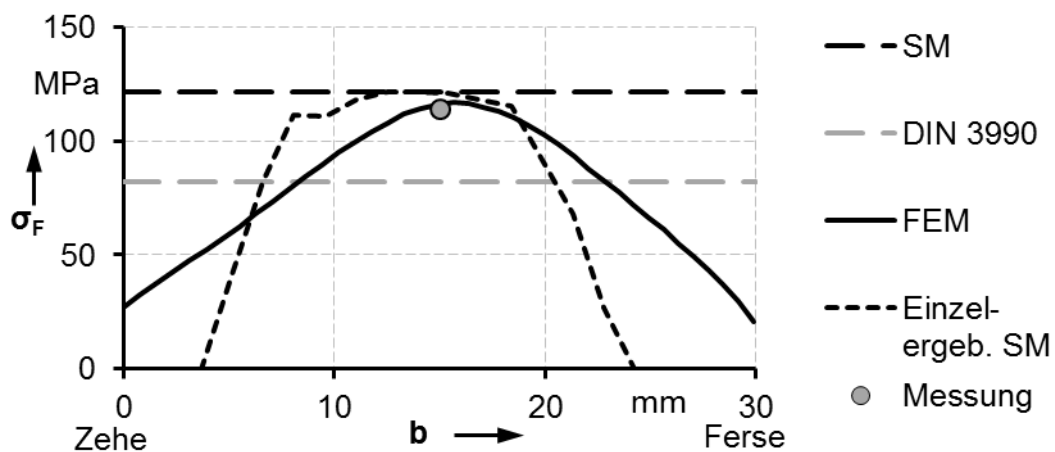


Bild 8.3: Ermittelte Fußspannungen an Paarung 13 entlang der Breite

Die Ergebniskurve der FE-Simulation weist einen stetigen Verlauf mit ausgeprägtem Hochpunkt auf. Der aus den Messwerten bestimmte Mittelwert der Fußspannung ist entsprechend der Breitenkoordinate der DMS-Messstelle als Punkt eingezeichnet, da die Messung der Beanspruchung mit den DMS punktförmig in der Zahnbreitenmitte erfolgt. Es zeigt sich eine gute Übereinstimmung zwischen der Simulation und der Messung. Die Gegenüberstellung der prozentualen Unterschiede der Ergebnisse ist in Bild 8.6 in der Mitte dargestellt.

Das Scheibenmodell bestimmt die Lastverteilung und Beanspruchung abschnittsweise für jede Scheibe. Aufgrund der Vorgehensweise und des verwendeten Ansatzes nach [DIN3990] ist das Ergebnis des Scheibenmodells nach Gleichung (6.17) für die gesamte Zahnbreite gültig und als horizontale Linie in Bild 8.3 eingezeichnet. Eine Darstellung der Einzelergebnisse jeder Scheibe entlang der Zahnbreite nach Gleichung (6.16) ist für Geradverzahnungen nur angenähert möglich, da das Scheibenmodell keine Analyse des Eingriffsfelds beinhaltet, siehe auch Kapitel 6.6. Die Ergebnisse der einzelnen Scheiben sind nur zur Veranschaulichung zusätzlich im Bild 8.3 dargestellt. Es zeigt sich eine gute qualitative Übereinstimmung der Lage des Hochpunkts sowie des Maximalwerts mit den anderen Ergebnissen. Als horizontale Gerade ist das Ergebnis nach [DIN3990] für eine Ersatz-Zylinderverzahnung der Beveloidradpaarung mit konstanter Lastverteilung dargestellt. Das Ergebnis zeigt deutlich geringere Werte, was eine Unterdimensionierung bedeuten kann.

Tragbilder dienen der Kontrolle der Feingeometrie und der korrekt eingestellten Achslage. Die Gleitbewegung zwischen den im Experiment aufeinander abwälzenden Zahnflanken reibt die Farbe ab, sodass der tragende Teil deutlich sichtbar ist. In den FE-Ergebnissen sind die Flankenbereiche, in denen Kräfte zwischen den Zähnen übertragen werden, rot eingefärbt. Andernfalls ist der Kontaktabstand gelb, beziehungsweise bei größeren Werten blau dargestellt. Die FE-Simulation berechnet diskrete Wälzstellungen. In Bild 8.4 ist das Ergebnis einer Wälzstellung dargestellt, seine Ausdehnung in Zahnhöhenrichtung ist daher sehr klein. Die tragenden Bereiche beider Tragbilder stimmen in ihrer Breitenausdehnung und Orientierung gut überein. Der Beanspruchungsverlauf am Zahnfuß erreicht in diesen Stirnschnitten den Höchstwert. Die Beanspruchungskonzentration resultiert daher wesentlich aus der punktförmigen Berührung und der damit verbundenen ungleichmäßigen Lastverteilung.

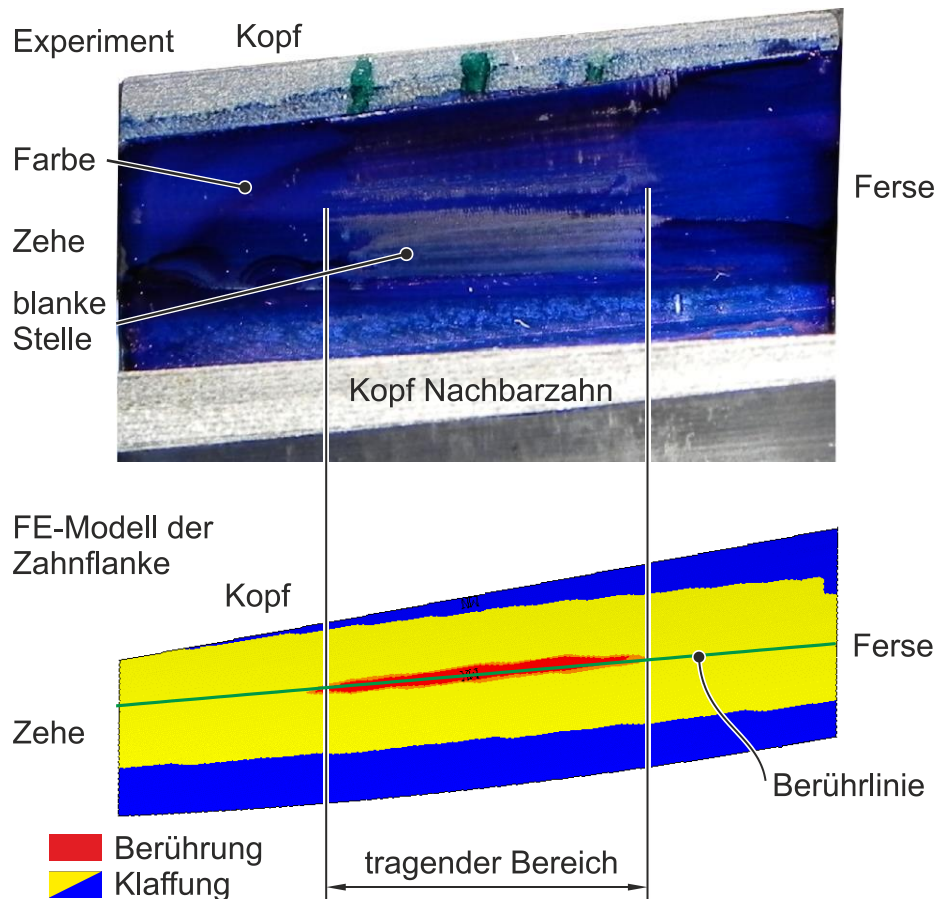


Bild 8.4: Experimentelles und numerisches Tragbild der Paarung 13, Verlauf der Berührlinie nach Gleichung (6.2)

Zusätzlich ist im Bild 8.4 der Verlauf der nach Gleichung (6.2) berechneten Berührlinie in das FE-Ergebnis eingezeichnet. Hierbei zeigt sich ebenfalls eine gute Übereinstimmung zwischen dem Simulationsergebnis und der theoretischen Erwartung.

8.2.2 Variation des Achswinkels

Die geradverzahnten Räder nach Tabelle 7.1 können drei Paarungen mit den Achswinkeln 5° , 10° und 15° bilden. Die beschriebenen Messungen und Rechnungen werden zusätzlich zur Paarung 13 auch für die Paarungen 12 und 23 durchgeführt. Sie bilden die Achswinkel von 5° bzw. 15° , woraus sich unterschiedliche Berührungsbereiche der Zahnflanken ergeben. Die Ergebnisse der Fußspannungen sind in Bild 8.5 dargestellt. Die Beanspruchungen steigen mit größerem Achswinkel, da sich dabei die Lastkonzentration verstärkt und das Tragbild kleiner wird.

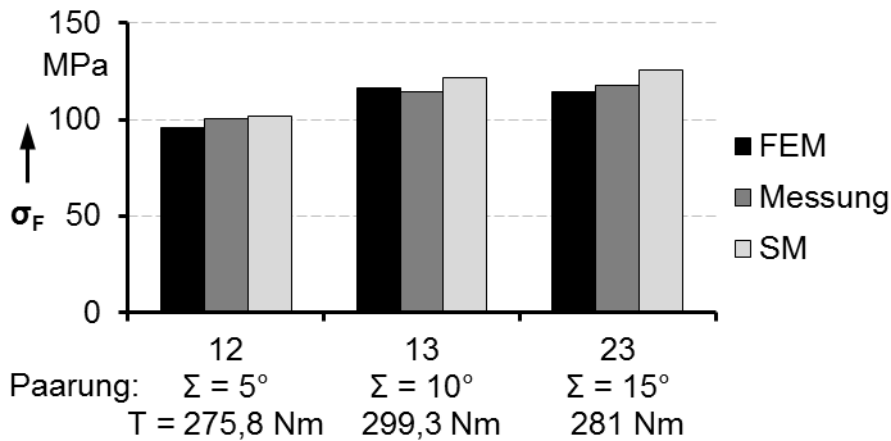


Bild 8.5: Fußspannungen der Paarungen mit Achswinkeln von 5° , 10° und 15°

Die Unterschiede der FE- und SM-Ergebnisse bezüglich der Messwerte sind in Bild 8.6 dargestellt. Es zeigt sich eine gute Übereinstimmung. Die Abweichungen des Scheibenmodells betragen maximal 7 %, die der FEM maximal 5 %. Das applizierte Lastmoment ist für jede Paarung unterschiedlich, da es gravimetrisch durch Portionierung der Massstücke erzeugt wird. Aufgrund der unterschiedlichen Verzahnungsdaten, beispielsweise der Grundkreisdurchmesser, Übersetzung oder Einbaulage, muss das Lastmoment einer Paarungen angepasst werden, siehe auch Kapitel 7.7.

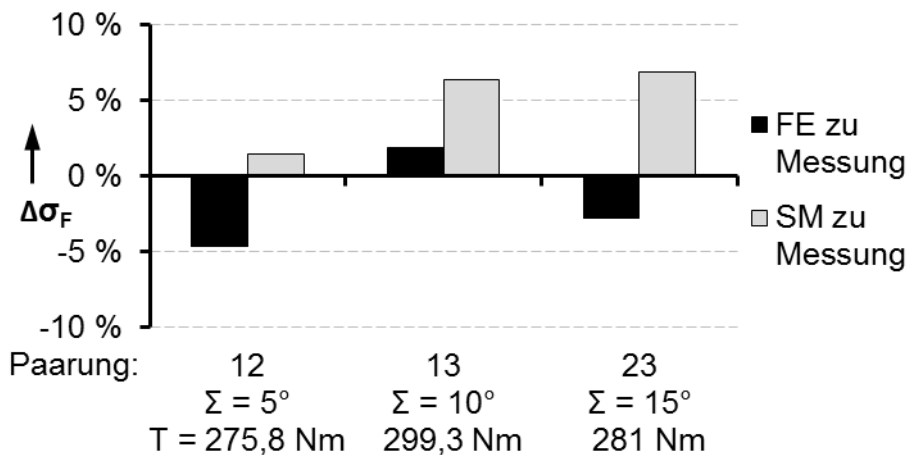


Bild 8.6: Vergleich der Spannungen bezüglich der Messergebnisse, Paarungen mit Achswinkeln von 5° , 10° und 15°

8.2.3 Variation der Last

An den Paarungen 13 und 23 werden die Auswirkungen einer Variation der Last untersucht. Für die Messungen wird die Last durch Massstücke erhöht und die analytischen und numerischen Rechnungen mit geänderten Randbedingungen wiederholt. Damit kann die korrekte Berücksichtigung des Verformungsverhaltens unter Last in den FE-

Analysen und in der Berechnung der Lastverteilung des Scheibenmodells gezeigt werden. Die Ergebnisse sind im Bild 8.7 dargestellt.

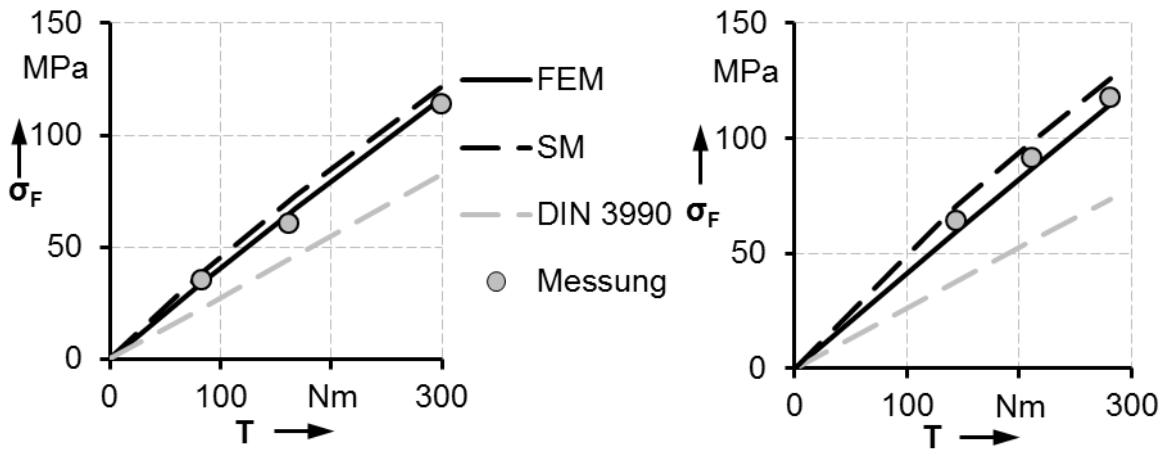


Bild 8.7: Ergebnisse der Lastvariationen an den Paarungen 13 (links, Achswinkel 10°) und 23 (rechts, Achswinkel 15°)

Die Werte der FE-Analyse stimmen sehr gut mit den Messwerten überein. Das Scheibenmodell berechnet größere Werte als die Messungen ergeben. Die Unterschiede sind für einen Achswinkel von 15° größer als für 10° , sind jedoch stets kleiner 10 %. Die Kurven verlaufen nahezu parallel. Zudem sind die Ergebnisse einer Ersatz-Zylinderradverzahnung nach [DIN3990] mit konstanter Lastverteilung dargestellt. Für sie ergeben sich wiederum deutlich geringere Werte.

8.2.4 Variation der Tragbildlage

Fertigungsabweichungen, Montagefehler und Verformungen unter Last ergeben eine Veränderung der Achslage im Getriebe und damit eine Fehlstellung der Zahnflanken. Dies wirkt sich durch eine Verlagerung des Tragbilds weg von der Sollposition aus. In der Folge kommt es zu einer anderen Beanspruchungsverteilung. Im Extremfall entsteht ein Kantentragen, bei dem die Last hauptsächlich an einer Stirnseite übertragen wird, wodurch ein vorzeitiger Schaden aufgrund der Überbeanspruchung droht.

Analyseverfahren der Beanspruchung müssen die Folgen einer nicht optimalen Tragbildlage abbilden können. Um die korrekte Berücksichtigung von Achslagefehlern in den Modellen darzustellen, wird der Achswinkel der Paarung 23 variiert. Es soll eine Verlagerung des Tragbilds von der Mitte weg Richtung Zehe und Ferse erreicht werden. Die eingestellte Last bei den Untersuchungen beträgt einheitlich 281 Nm. Die Fußspannungsergebnisse der FE-Simulationen und Messungen sind in Bild 8.8 dargestellt.

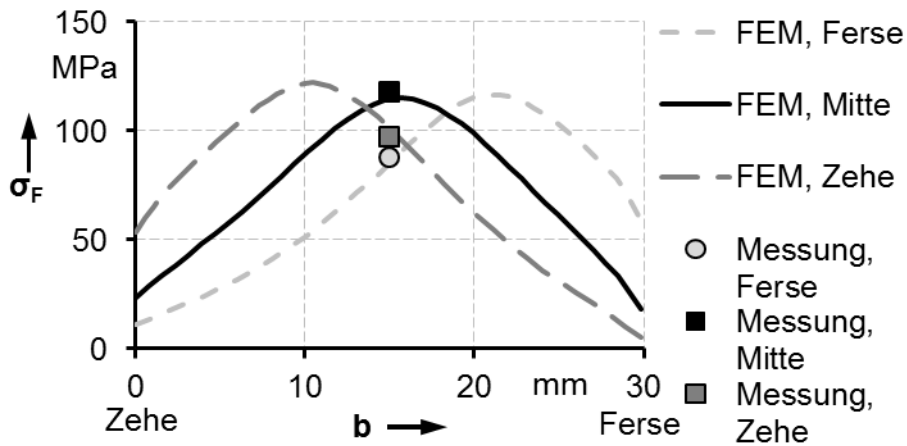


Bild 8.8: FE-Ergebnisse und Messwerte unterschiedlicher Tragbildlagen, Paarung 23

Aus den FE-Ergebnissen ist ersichtlich, dass der Bereich der höchsten Fußbeanspruchung entsprechend der Tragbildlage verlagert ist. Der Hochpunkt liegt nur bei mittiger Tragbildlage in der Zahnmitte. Die Messwerte werden an der einheitlichen Messstelle in Breitenmitte aufgenommen und unterscheiden sich in den verschiedenen Tragbildlagen deutlich. Ein Vergleich mit den am gleichen Ort bestimmten FE-Werten der verschiedenen Achslagen zeigt eine gute Übereinstimmung. Der Unterschied beträgt weniger als 4 %. Die bei den Versuchen aufgenommenen Tragbilder sind in Bild 8.9 veranschaulicht.

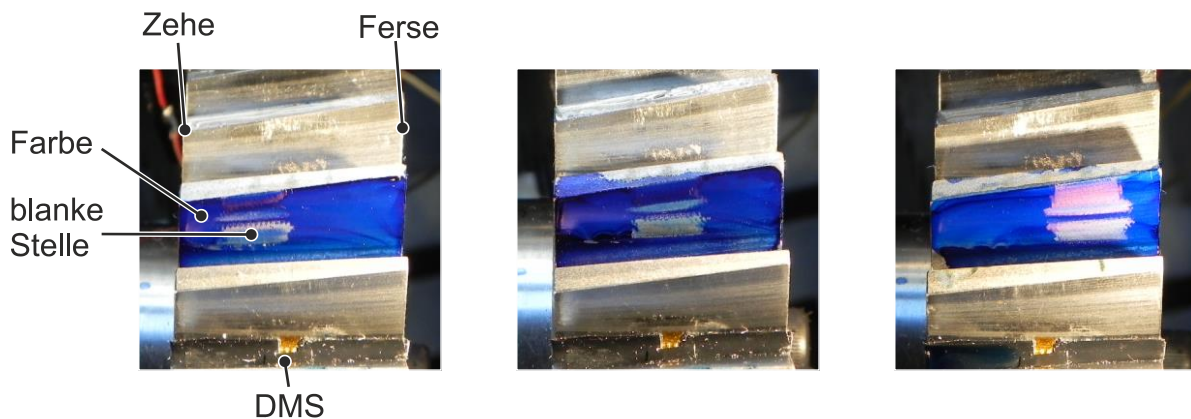


Bild 8.9: Unterschiedlich orientierte Tragbilder an Paarung 23, von der Zehe (links) zur Ferse (rechts)

Da das Scheibenmodell nach Gleichung (6.17) die höchste Beanspruchung im Fußbereich bestimmt, können die Ergebnisse mit den Höchstwerten aus der FE-Simulation verglichen werden. Im Bild 8.10 sind die Fußspannungsergebnisse aus dem Scheibenmodell denen der FE-Simulation gegenübergestellt. Die Werte des Scheibenmodells liegen höchstens 9 % oberhalb der FE-Simulation, wie der Vergleich in Bild 8.11 zeigt.

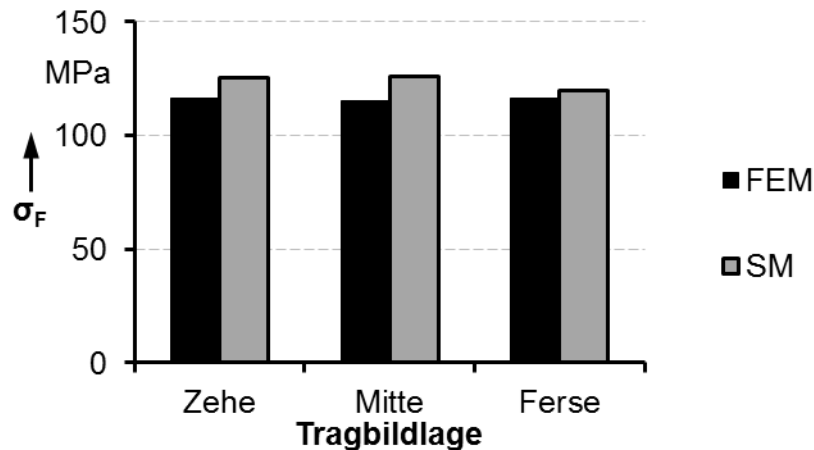


Bild 8.10: Fußspannungen an Paarung 23 bei unterschiedlichen Tragbildlagen

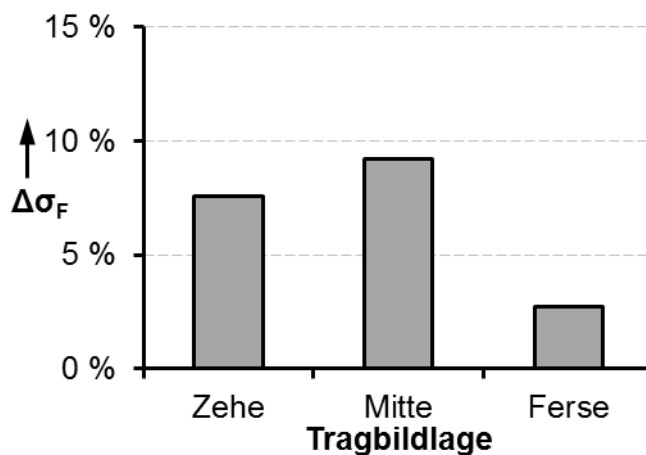


Bild 8.11: Unterschiede der Fußspannungsergebnisse zwischen FEM und SM bei unterschiedlichen Tragbildlagen

Im Scheibenmodell erfolgt keine lokale Beanspruchungsanalyse und die Messung mittels DMS erfasst bei nicht mittiger Tragbildlage nicht den Höchstwert der Beanspruchungsverteilung. Ein Vergleich der Scheibenmodellergebnisse mit den Messwerten ist daher nicht möglich.

Die experimentell bestimmten Tragbilder werden vermessen, siehe Bild 8.9, und die Breitenkoordinate des Flächenschwerpunkts bestimmt. Der Schwerpunkt wird als kritischer Stirnschnitt angenommen und in Bild 8.12 mit den Tragbildschwerpunkten aus der FE-Analyse und dem Scheibenmodell gegenübergestellt. Die Werte differieren wenig, einzig das Ergebnis des Scheibenmodells weicht bei fersenseitiger Orientierung des Tragbilds um ca. 2 mm ab.

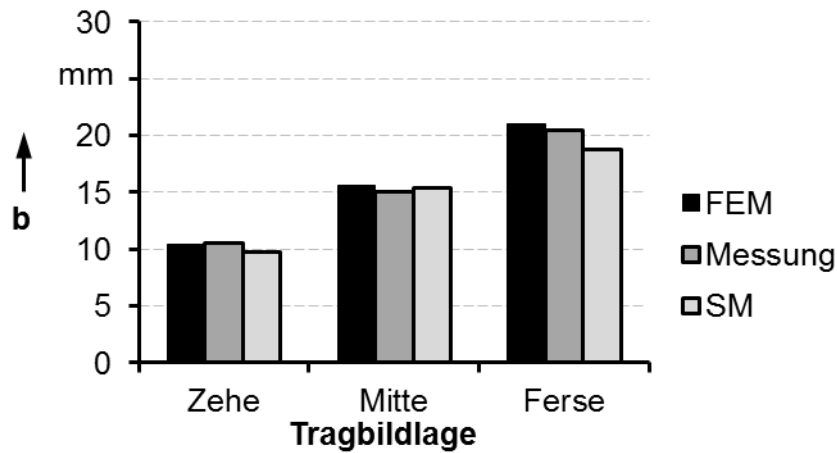


Bild 8.12: Tragbildschwerpunkte in FE-Simulation, Messung und Scheibenmodell

8.2.5 Variation der Verzahnungskorrektur

Eine punktförmige Berührung der Beveloidflanken führt zu einer starken Lastkonzentration und erhöhten Beanspruchung. Wie die Untersuchungen in Bild 8.5 zeigen, nimmt die Beanspruchung mit steigendem Profilverschiebungswinkel zu. Um eine erhöhte Beanspruchung zu verringern und das Tragbild zu verbreitern, sind Flankenmodifikationen wie beispielsweise eine Hohlballigkeit erforderlich. Die optimale Wahl und Ausführung der Flankenmodifikationen von Beveloidrädern ist Gegenstand zahlreicher Untersuchungen, beispielsweise in [WINKLER02] und [TRAUT11A].

Analyseverfahren der Beanspruchungen müssen die Auswirkungen von Flankenmodifikationen abbilden können. Um die korrekte Berücksichtigung von Flankenmodifikationen in der Simulation und im Scheibenmodell darzustellen, werden Untersuchungen mit den korrigierten und unkorrigierten Paarungen 13 und 23 durchgeführt, siehe Tabelle 7.1. Die Verzahnungen sind mit einer Profilverschiebungskorrektur nach Traut versehen [TRAUT11A, S. 219]. Die Korrektur verbreitert die Zahndickenseiten und reduziert damit die Klaffungen, siehe Bild 8.13.

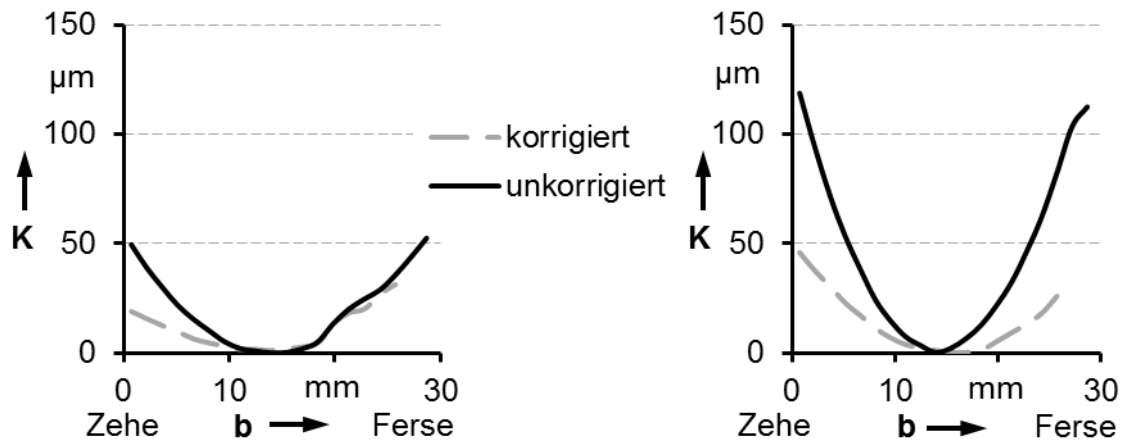


Bild 8.13: Klaffungsverlauf entlang der Zahnbreite der Paarung 13 (links, Achswinkel 10°) und 23 (rechts, Achswinkel 15°)

Die Mess- und Berechnungsergebnisse sind in Bild 8.14 dargestellt.

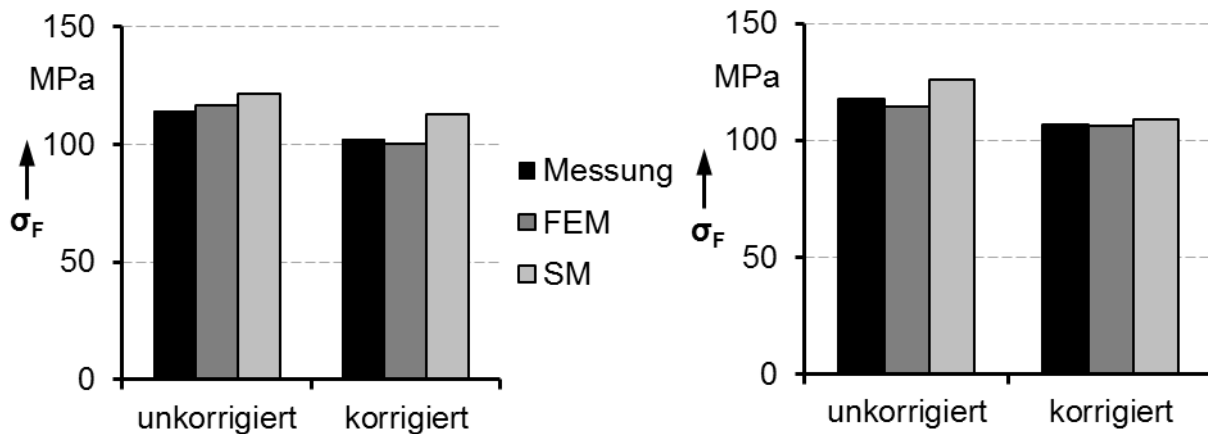


Bild 8.14: Fußspannungen der korrigierten und unkorrigierten Paarungen 13 (links, Achswinkel 10°) und 23 (rechts, Achswinkel 15°)

Wie theoretische Überlegungen erwarten lassen, führt die Korrektur zu einer Reduktion der Beanspruchungen. Die Absenkung ist in den Messungen und Berechnungen erkennbar. Die relativen Unterschiede der Ergebnisse aus Messungen und Berechnungen zwischen den korrigierten und unkorrigierten Verzahnungen sind vergleichbar.

8.3 Messungen an der Schrägverzahnung

Im Berechnungsansatz nach [DIN3990], der die Grundlage für das Scheibenmodell bildet, werden Schrägverzahnungen durch eine Ersatz-Geradverzahnung mit der Ersatzzähnezahl nach Gleichung (2.5) angenähert. Die Näherung wird im Scheibenmodell auf Beveloidräder übertragen. Mit den Messungen an schrägverzahnnten Beveloidrädern und dem Vergleich mit Berechnungsergebnissen soll dieses Vorgehen validiert werden.

Die Prüfverzahnung besitzt dazu eine Kombination aus großen Schrägungs- und Profilver-schiebungswinkeln, siehe Tabelle 7.1.

Bei Schrägverzahnungen wandert die Berührlinie während des Abwälzens schräg über die Zahnflanke. Der Stirnschnitt mit der höchsten Beanspruchung liegt bei Zylinderrädern außermittig und kann mit Gleichung (2.7) bestimmt werden. Dies ist bei Beveloidrädern mit großen Klaffungen weniger der Fall. Die Verzahnungsdaten und Einbaulage der Verzahnung sind so gewählt, dass die Flankenberührung in der Radmit-te auftritt. In der Folge ist das Tragbild der schrägverzahnten Prüfräder in der Mitte der Zahnbreite konzentriert, wie es ebenso bei Geradverzahnungen der Fall ist. In der Zahnbreitenmitte ist der Dehnungsmessstreifen appliziert.

Die Ergebnisse der ermittelten Fußspannungen sowie die Abweichungen bezüglich der Messwerte sind im Bild 8.15 dargestellt.

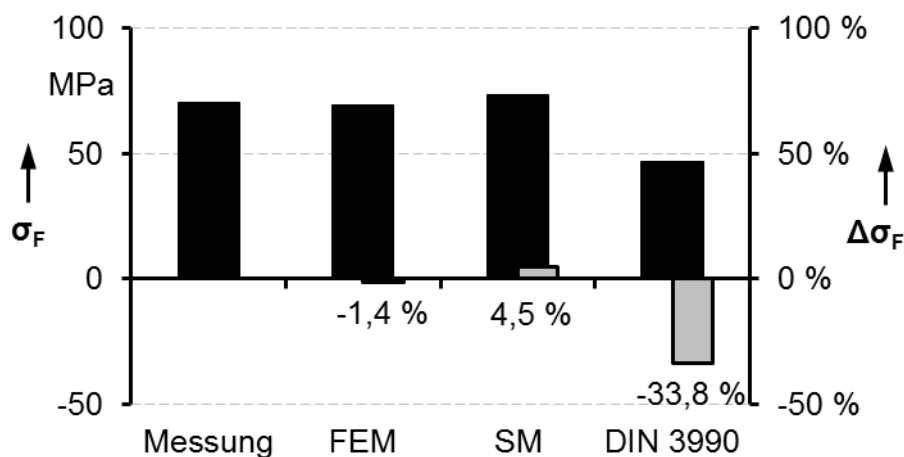


Bild 8.15: Vergleich der ermittelten Fußspannungen an der Schrägverzahnung 48

FE-Simulation und Scheibenmodell zeigen eine gute Übereinstimmung mit den Messwerten. Die Ergebnisrelationen sind mit denen von Geradverzahnungen vergleichbar. Das Ergebnis einer Vergleichsrechnung nach [DIN3990] für eine Ersatz-Zylinderradverzahnung mit den Verzahnungsdaten in der Breitenmitte ist ebenfalls aufgetragen. Die Vergleichsrechnung ergibt wesentlich höhere Abweichungen zu den gemessenen Werten.

8.4 Screening-Simulationen

Experimentelle Validierungen sind mit erheblichem Aufwand verbunden, weshalb weiterführende Untersuchungen mithilfe der FEM durchgeführt werden. Die notwendige Rechendauer und Speicherkapazität schränken hierbei ebenfalls den möglichen Para-

meterraum ein. Deshalb erfolgt eine effiziente Untersuchung der wesentlichen Verzahnungsparameter mit einem vollständigen faktoriellen Screening-Versuchsplan, analog zu den Analysen an Zylinder- und Beveloidrädern in Kapitel 4.5 und 6.8.

8.4.1 Untersuchungsraum

Für die Screening-Versuche wird das im Kapitel 6.8 dargestellte Screening ergänzt, indem der Schrägungswinkel als zusätzlicher Faktor eingeführt wird. Als Faktorstufe des Schrägungswinkels wird ein Wert von 10° gewählt. Der Untersuchungsraum enthält nun zusammen mit dem Schrägungswinkel die wesentlichen Verzahnungsparameter einer Beveloidverzahnung, die einen Einfluss auf die Stirnschnittgestalt und Beanspruchung besitzen. Der Versuchsplan ist vollständig faktoriell mit vier Faktoren auf zwei Stufen mit 16 Faktorstufenkombinationen, sodass die Auflösung größer V ist und keine Faktorenwechselwirkung stattfindet [KLEPPMANN13, S. 145]. Es besteht somit kein Risiko einer Fehlinterpretation der Ergebnisse aufgrund einer Effektvermischung. Die untersuchten Verzahnungsdaten sind in Tabelle 6.1 aufgeführt, die Faktorstufen in Tabelle 8.1.

| Faktor | Benennung: | | Stufe - | Stufe + |
|----------|-------------------|-------------------|---------|---------|
| | | | „_“ | Faktor |
| A | Achswinkel | $\Sigma [^\circ]$ | 3 | 10 |
| B | Schrägungswinkel | $\beta [^\circ]$ | 0 | 10 |
| C | Übersetzung | $i [-]$ | 1 | 4 |
| D | Fußrundungsradius | $\rho_{fP} [-]$ | 0,25 | 0,38 |

Tabelle 8.1: Untersuchte Faktoren und Faktorstufen schrägverzahnter Beveloidräder

8.4.2 Effektergebnisse des vollständigen faktoriellen Versuchsplans

In den Versuchen werden die Fußspannungen sowohl mit der FEM als auch mit dem Scheibenmodell berechnet. Bei den untersuchten Ergebnissen handelt es sich jeweils um den Maximalwert der Fußspannung entlang der Zahnbreite. Die Ergebnisse sind in Bild 8.16 dargestellt.

Die mit dem Scheibenmodell berechneten Fußspannungen liegen stets über den Ergebnissen der FE-Analyse und damit auf der konservativen, sicheren Seite.

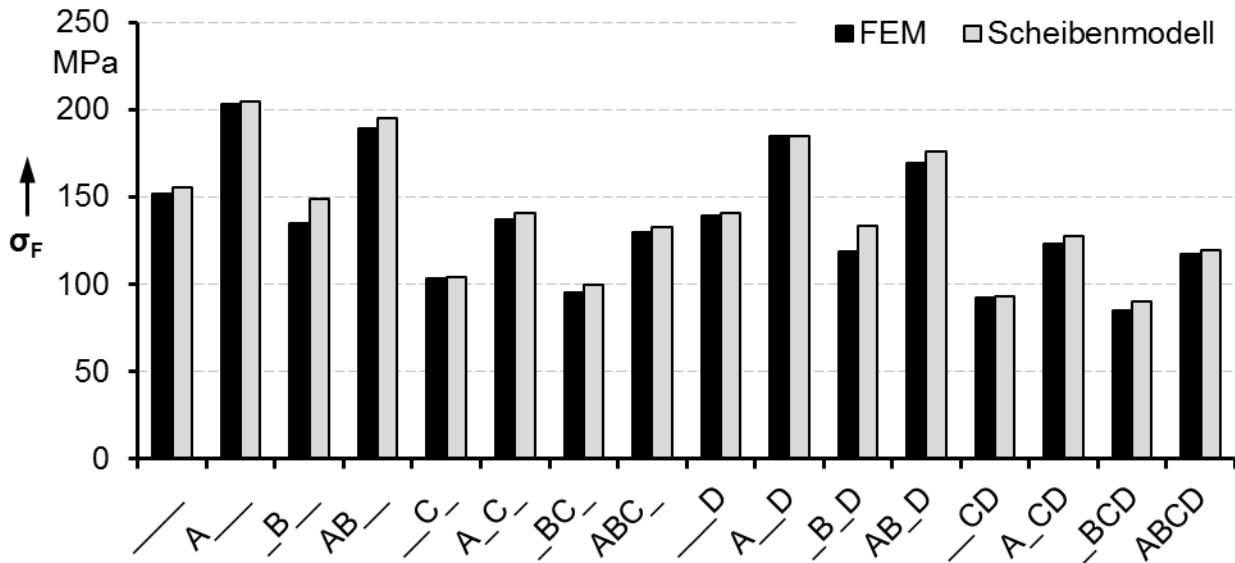


Bild 8.16: FE- und Scheibenmodell-Ergebnisse der Fußspannungen des Screening-Versuchsplans

Die Differenzen $\Delta\sigma_F$ zwischen den Ergebnissen der FE-Simulation und des Scheibenmodells ergeben sich zu:

$$\Delta\sigma_F = \frac{\sigma_{F,SM} - \sigma_{F,FEM}}{\sigma_{F,FEM}} \cdot 100\% \quad (8.2)$$

Die berechneten Differenzen sind in Bild 8.17 links aufgetragen. Die Differenz beträgt im Mittel aller Verzahnungen des Screenings 3,4 %. Die mittlere Differenz der Ergebnisse in Abhängigkeit des Schrägungswinkels wird nach Gleichung (8.3) bestimmt:

$$\Delta_{Mw}(\beta) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \left(\frac{\sigma_{F,SM,i} - \sigma_{F,FEM,i}}{\sigma_{F,FEM,i}} \cdot 100\% \right)_{\beta=konst} \quad (8.3)$$

Gruppirt nach dem Schrägungswinkel ergibt sich die mittlere Differenz der Geradverzahnungen zu 1,3 % und der Schrägverzahnungen von 5,4 %. Die Verzahnungen „_B_“ und „_B_D“ zeigen deutlich größere Differenzen als die restlichen Berechnungen. Erklärt werden kann dies, da in der FE-Simulation die Lastaufteilung an diesen Verzahnungen auf drei Zähne erfolgt. Der dritte Zahn gerät aufgrund der Überdeckung und Zahnverformung unter der Lasteinwirkung verstärkt in Eingriff. Die FE-Simulation berücksichtigt die Lastaufteilung und Stützwirkung detaillierter als der analytische Ansatz des Scheibenmodells. Dadurch ist die mit der FE-Simulation bestimmte Belastung und Beanspruchung des Untersuchungszahns geringer als die mit dem analytischen Modell ermittelte und die Differenz der Ergebnisse somit vergrößert. Diese

Beobachtung stimmt mit der in der Literatur beschriebenen Tatsache überein, wonach insbesondere bei großen Überdeckungen höherwertige Rechenverfahren von DIN 3990 abweichende Ergebnisse erzielen [SCHINAGL02, S. 110], [LINKE10, S. 315].

Aus den Differenzen werden nach Gleichung (4.9) mit $m = 16$ die Effekte berechnet. Sie sind in Bild 8.17 rechts aufgetragen.

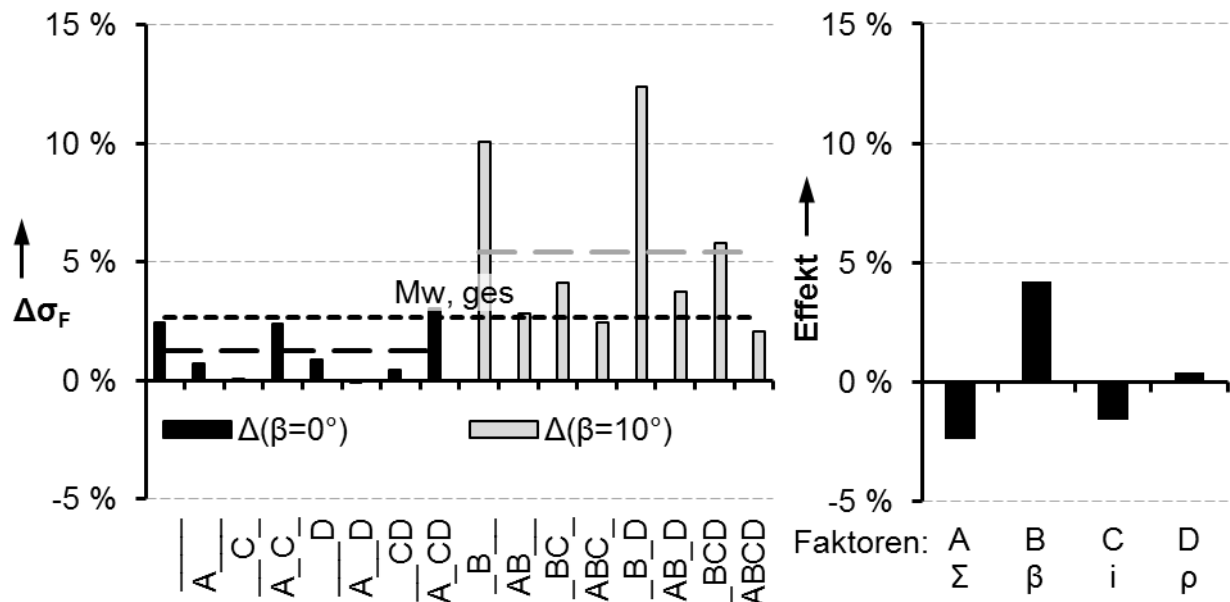


Bild 8.17: Differenzen zwischen FE- und SM-Ergebnissen (links), Effekte der Faktoren auf die Ergebnisunterschiede (rechts)

Das Effektdiagramm zeigt, dass kein untersuchter Faktor einen größeren Effekt auf die Differenz der FE- und Scheibenmodellerngebnisse als 4 % besitzt. Insbesondere die Berücksichtigung des Achswinkels von bis zu 10° führt im Scheibenmodell nur zu einer Vergrößerung der Abweichungen um ca. 3 %.

8.4.3 Erweiterter Untersuchungsraum

Wie in Kapitel 8.4.2 dargestellt ist, sind die Differenzen zwischen FE- und Scheibenmodell-Ergebnissen bei Verzahnungen mit Schrägungswinkel vergrößert. Zur genaueren Untersuchung werden die Screening-Versuche mit einem auf 20° vergrößerten Schrägungswinkel wiederholt. Der erweiterte Untersuchungsraum ist in Tabelle 8.2 aufgeführt. Die weiteren Verzahnungsparameter sowie das Vorgehen zur Berechnung bleiben unverändert.

| Faktor | Benennung: | | Stufe - | Stufe + |
|--------|-------------------|-----------------|---------|---------|
| | | | „_“ | Faktor |
| A | Achswinkel | Σ [°] | 3 | 10 |
| B | Schrägungswinkel | β [°] | 0 | 20 |
| C | Übersetzung | i [-] | 1 | 4 |
| D | Fußrundungsradius | ρ_{fP} [-] | 0,25 | 0,38 |

Tabelle 8.2: Erweiterte Faktorstufen schrägverzahnter Beveloidräder mit $\beta = 20^\circ$

Aus den Ergebnissen des erweiterten Untersuchungsraums ergibt sich nach Gleichung (8.3) eine mittlere Differenz für alle Verzahnungen mit einem Schrägungswinkel von 20° . Die mittleren Differenzen für die Geradverzahnungen und die Verzahnungen mit einem Schrägungswinkel von 10° und 20° sind im Bild 8.18 gegenübergestellt.

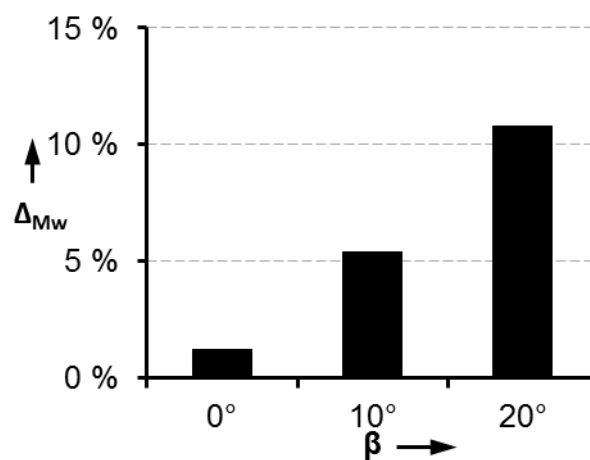


Bild 8.18: Mittlere Differenzen in Abhängigkeit der untersuchten Schrägungswinkel

Die mittlere Differenz zwischen den Ergebnissen der FE-Simulationen und des Scheibenmodells beträgt bei Verzahnungen mit Schrägungswinkeln kleiner 10° weniger als ca. 6 %. Bei verdoppeltem Schrägungswinkel liegt die mittlere Differenz bei ca. 11 %. Die mittlere Differenz steigt also in Abhängigkeit des untersuchten Schrägungswinkels.

8.5 Diskussion der Ergebnisse

Das Ziel der Untersuchungen ist die Validierung der numerischen und analytischen Berechnungsmöglichkeiten für die Lastverteilung und Beanspruchung von Beveloidrädern in kreuzender Achslage. Dazu werden theoretische Zylinder- und Beveloidverzahnungen berechnet und die Ergebnisse mit experimentellen Messungen verglichen.

Die korrekte Übertragung des analytischen Berechnungsansatzes nach [DIN3990] in das Scheibenmodell wird anhand eines Screening-Versuchsplans für Zylinderräder überprüft. Der Vergleich der Ergebnisse des Scheibenmodells mit den nach Norm

bestimmten Ergebnissen zeigt vernachlässigbare Abweichungen. Es ist somit davon auszugehen, dass der Rechengang nach DIN 3990 richtig im Scheibenmodell abgebildet ist.

Die experimentelle Überprüfung der numerischen und analytischen Berechnungen erfolgt mit Gerad- und Schrägverzahnungen. Bei den Messungen ergeben sich sehr gute Übereinstimmungen für die maximalen Beanspruchungen am Fuß und die Tragbildschwerpunkte. In den Versuchen werden die Achswinkel der Paarungen, die Last, die Tragbildlage und die Flankenmodifikation variiert. Die Fußspannungsergebnisse des Scheibenmodells sind stets größer als die experimentellen Messwerte, das Scheibenmodell ist daher konservativ. Die Abweichungen der experimentellen Ergebnisse steigen tendenziell für größer werdende Achswinkel, geringere Last und größere Klaffungen.

Ein Vergleich der Spannungsverläufe des Scheibenmodells, also die Ergebnisse einzelner Scheiben, mit den FE-Ergebnissen entlang der Zahnbreite kann nicht durchgeführt werden. Das Scheibenmodell berechnet die Verzahnung nicht im gesamten Eingriffsfeld und es werden auch keine örtlichen Spannungen bestimmt. Es zeigt sich allerdings eine gute Übereinstimmung des ermittelten Tragbildschwerpunkts.

In den Simulationen theoretischer Beveloidverzahnungen ist ein großes Parameterspektrum berücksichtigt. Auch hierin ergibt das Scheibenmodell stets konservative Werte. Versuche mit Screening-Versuchsplänen zeigen die Abhängigkeit der mittleren Differenz zwischen den FE- und Scheibenmodell-Ergebnissen vom Schrägungswinkel. Bis zu einem Schrägungswinkel von 20° liegt die mittlere Differenz unter 11 %. Der Achswinkel, der die wesentlichen geometrischen Besonderheiten und Vorteile von Beveloidrädern in einem Wert umschreibt, hat im Scheibenmodell nur einen geringen Einfluss auf den mittleren Unterschied zur FEM.

Aus den Untersuchungen zur Validierung ergibt sich ein bevorzugter Einsatzbereich des Scheibenmodells. Das Modell ergibt eine optimale Übereinstimmung entsprechend Tabelle 8.3.

| | | |
|--------------------|------------------------|---------|
| Achswinkel | Σ [°] | < 10 |
| Übersetzung | i [-] | < 2 |
| Profilverschiebung | x_{Mitte} [-] | 0...0,2 |
| Schrägungswinkel | β [°] | < 10 |

Tabelle 8.3: Optimale Bereiche der Verzahnungsparameter für die Anwendung des Scheibenmodells

Zur genaueren Eingrenzung des optimalen Einsatzbereichs und der Erweiterung der Validierung ist die Untersuchung erweiterter und umfangreicherer Versuchspläne sinnvoll.

Die Durchführung einer Simulation mit der FEM ist trotz der Automatisierung sehr zeitaufwändig. Für die Modellierung, Berechnung der Abwälzsimulation und die Ergebnisauswertung einer Verzahnung ist auch auf leistungsfähigen Computersystemen ungefähr ein Tag erforderlich. Das analytische Vorgehen, bestehend aus der Ermittlung der lastfreien Klaffung mit SimKoS und der Berechnung der Beanspruchungen mit dem Scheibenmodell, unterstützt durch ein Tabellenkalkulationsprogramm, benötigt dagegen ca. 10 Minuten. Die Durchführung einer Lastvariation mithilfe der FEM benötigt pro Lastpunkt ca. 2 Stunden Zeit, die Berechnung mit dem Scheibenmodell erfolgt innerhalb von Sekunden. Das analytische Scheibenmodell ist daher ein sehr effizientes Verfahren.

Mit dem dargestellten Vorgehen ist die Beanspruchungsermittlung und Lastverteilungsberechnung für Beveloidräder in kreuzender Achslage mit einem hochwertigen numerischen FE-Ansatz und einem effizienten, analytischen Ansatz erstmals durchführbar. Das Scheibenmodell ermöglicht die Ermittlung der Fußbeanspruchung für eine Auslegung vergleichbar zum Vorgehen für Zylinderräder nach [DIN3990]. Fehleranfällige Abschätzungen der beanspruchungserhöhenden Effekte aufgrund der Zahnform sind nicht mehr erforderlich. Die Ergebnisunterschiede im Vergleich zu höherwertigen Analysemethoden sind ähnlich zu denen von Normauslegungen von Zylinderrädern. Damit eignet sich das Scheibenmodell unter anderem zur Auslegung von Industriegetrieben mit höheren Anforderungen an das Lastmoment als an die Umfangsgeschwindigkeiten, wie dies beispielsweise bei Stellantrieben der Fall ist. Mit dem Kriterium der ermittelten Fußbeanspruchung wird außerdem die Vorauslegung von Verzahnungen mit zusätzlichen Anforderungen an Drehzahl und Schwingungsanregung unterstützt, wie beispielsweise Kfz-Getriebe.

Bisherige Anwendungen von Beveloidverzahnungen, bei denen die Momentübertragung und ein zu realisierender Achswinkel die wesentlichen Anforderungen darstellen, sind häufig mit den in Tabelle 8.3 aufgeführten Parametern versehen. Ein Beispiel dafür ist die von Schimpf [SCHIMPF96A] ausgelegte und von Winkler [WINKLER02] optimierte Beveloidverzahnung eines Schiffsgetriebes mittlerer Leistung. Das Vorgehen des Scheibenmodells ist dadurch zusätzlich indirekt und qualitativ bestätigt.

9 Zusammenfassung

In dieser Arbeit wurden neue numerische und analytische Methoden für die Ermittlung der Lastverteilung und Beanspruchung von Beveloidrädern in kreuzender Achslage entwickelt und vorgestellt.

Beveloidräder gehören, ebenso wie die bekannten Stirnräder, zur Gruppe evolventischer Zahnräder, da sie mit den gleichen zahnstangenartigen Werkzeugen gefertigt werden können. Die Zahnform ist aufgrund der über der Breite veränderlichen Profilver-schiebung variabel. Im Gegensatz zu Stirnrädern ermöglichen Beveloidräder eine kreuzende Achsanordnung. Abhängig von der gewählten Zahnbreite und den Profilver-schiebungswinkeln kann ein Achswinkel von bis zu 20° realisiert werden. Die kämmenden Zahnflanken berühren sich in der Regel punktförmig, woraus eine Kon-zentration der Belastung und Beanspruchung resultiert. Aus diesen Gründen sind Auslegungsmethoden und Simulationsprogramme anderer Zahnradformen nicht ohne Weiteres auf Beveloidräder anwendbar. Nicht zuletzt deshalb ist der Einsatz von Be-veloidrädern im Maschinenbau deutlich weniger verbreitet als der von Stirn- oder Kegelrädern.

Abwandlungen von Auslegungsprogrammen anderer Zahnformen, welche die geomet-rischen Besonderheiten von Beveloidrädern berücksichtigen sollen, befinden sich in der Entwicklung. Die darin enthaltenen Berechnungsmodelle, wie beispielsweise die FEM, erfordern für ihre Anwendung verschiedene Formen von Aufwand, etwa Rechenzeitbe-darf, Kosten für die Lizenz der Software und Nutzerkenntnisse. Für eine breite Anwendung von Beveloidverzahnungen in unterschiedlichsten Einsatzbereichen ist daher eine analytische Methode besonders vorteilhaft, mit der die Beanspruchung einer Verzahnung ohne Computersimulationen bestimmt werden kann.

Zur detaillierten strukturmechanischen Analyse der Beanspruchungen von Beveloidver-zahnungen und zur Überprüfung eines analytischen Ansatzes wurde im Rahmen dieser Arbeit eine Simulation mithilfe der Finiten-Elemente-Methode entwickelt. Dazu wurde das „Simulationsprogramm für Konische Stirnräder SimKoS“ des Instituts für Konstruk-tionstechnik und Technisches Design der Universität Stuttgart um eine Daten- und Steuerungsschnittstelle zum kommerziellen FE-Programm „ANSYS“ erweitert. Mit der Skriptsprache „APDL“ konnte das Vorgehen automatisiert und dadurch der Zeitbedarf zur Modellerzeugung und Ergebnisauswertung von mehreren Tagen auf wenige Se-kunden reduziert werden. Das Vorgehen wurde an Stirnrädern getestet und die

Ergebnisse mit analytischen Rechnungen nach [DIN3990] verglichen. Innerhalb von Screening-Versuchen für eine Vielzahl von Verzahnungen zeigte sich eine gute Übereinstimmung der Ergebnisse.

Mittels FE-Analysen konnte die Steifigkeit von Beveloidrädern systematisch untersucht werden. Aufgrund der Stirnschnittform ergeben sich zu Stirnrädern abweichende Steifigkeiten. Zur vereinfachten Ermittlung der Steifigkeit von Beveloidradstirnschnitten wurden Korrekturwerte definiert, welche die für Stirnräder in [DIN3990] enthaltenen Berechnungsgleichungen für Beveloidräder anpassen.

Für die analytische Berechnung der Breitenlastverteilung und Fußbeanspruchung von Beveloidrädern in kreuzender Achslage wurde ein Rechenmodell vorgestellt. Das Modell vereinfacht die räumliche Beveloidradgeometrie durch eine Diskretisierung auf eine Reihung scheibenförmiger, ebener Stirnradpaarungen. Aufgrund der charakteristischen Diskretisierung wird das Modell als Scheibenmodell bezeichnet. Die Berechnung der Lastverteilung erfolgt innerhalb des Scheibenmodells mithilfe einer Analogie zu Druckfedern und den für Beveloidräder angepassten Steifigkeitswerten. Für die Bestimmung der Fußspannung wird der Berechnungsansatz nach [DIN3990] und die ermittelten Breitenlastfaktoren verwendet. Ein Einsatz von Computerprogrammen ist dazu nicht erforderlich. Das Scheibenmodell bestimmt die höchste Fußbeanspruchung der Verzahnung, führt aber keine lokale Beanspruchungsanalyse wie etwa höherwertige Rechenverfahren durch.

Die Ergebnisse des Scheibenmodells wurden durch Messungen an Beveloidrädern überprüft. Anhand von sechs verschiedenen Verzahnungen wurden die Ergebnisabweichungen zwischen den numerischen und analytischen Berechnungen bestimmt. Variiert wurden der Achswinkel, die Belastung, die aufgebrachten Flankenmodifikationen, die Tragbildlage und der Schrägungswinkel. Das Scheibenmodell ergab im Vergleich zu den Messungen ein um höchstens 9 % abweichendes Ergebnis und ist damit konservativ. Die Abweichung der FE-Simulation zu den Messungen war stets geringer. Damit sind die numerischen und analytischen Berechnungen anhand von Messungen bestätigt.

Die Überprüfung des analytischen Scheibenmodells wurde durch die Simulation weiterer Beveloidverzahnungen in Screening-Versuchen systematisch ergänzt. Dabei zeigte sich, dass ein Achswinkel bis 10° im vorgestellten Rechenansatz keinen wesentlichen Einfluss auf die Ergebnisgüte besitzt. Für Schrägungswinkel von 10° betragen die

Abweichungen zwischen den analytisch und numerisch bestimmten Werten im Mittel ca. 6 % und bei einem Schrägungswinkel von 20° ca. 11 %.

Die vorgestellten numerischen und analytischen Berechnungsverfahren unterstützen den Konstrukteur bei der Verzahnungsauslegung direkt und methodisch. Mit dem analytischen Ansatz ist die Berechnung wesentlicher Kenngrößen wie der Steifigkeit im Stirnschnitt, die Breitenlastverteilung und die Fußbeanspruchung möglich. Bisher nötige Abschätzungen von Kenngrößen sind bei der Berechnung nicht mehr erforderlich. Die Größenordnung der Ergebnisunterschiede im Vergleich zu höherwertigeren Rechenverfahren ist vergleichbar zur analytischen Auslegung von Stirnrädern nach DIN 3990.

Die erzielten Ergebnisse können im Rahmen der Verzahnungsauslegung in einen nachfolgenden Tragfähigkeitsnachweis einfließen, beispielsweise für Anwendungsfelder, bei denen die Momentübertragung im Vordergrund steht, wie etwa Stellantriebe. Für Anwendungen mit weiteren Anforderungen, wie etwa geräuschreduzierte Verzahnungen, steht mit dem Scheibenmodell ein zusätzliches Auswahlkriterium möglicher Auslegungsvarianten im Vorfeld weiterführender Untersuchungen zur Verfügung. Das Vorgehen zur Auslegung ist mithilfe des Scheibenmodells deutlich strukturierter, methodisch fundiert, eindeutig dokumentiert und weniger aufwändig.

10 Ausblick

Beveloidverzahnungen werden derzeit in einem weniger breiten Spektrum als Stirn- oder Kegelräder verwendet. Dies liegt aus Sicht eines Konstrukteurs an einer Vielzahl ungeklärter Fragen, zum Beispiel in den Schwierigkeiten bei der Übertragung vorhandener Auslegungswerkzeuge von Stirnrädern auf Beveloidräder.

In dieser Arbeit wurden die Belastung und Beanspruchung von Beveloidverzahnungen in kreuzender Achslage numerisch und analytisch untersucht. Für beide Untersuchungsmethoden ergeben sich weitere Verbesserungspotenziale. Die vorgestellte simulative Beanspruchungsberechnung bedarf stets der kritischen Überprüfung durch den Anwender, insbesondere bei der Geometrievernetzung. Eine weiter optimierte und automatisierte Vernetzung und Modellerstellung könnte Fehlerquellen durch Fehlbedingungen ausschließen. Zudem sind die bisher verwendeten Modelle nicht zur Bestimmung der Flankenpressung oder des Drehfehlers unter Last optimiert. Die Gestaltung des Antriebsstrangs wird derzeit vernachlässigt. Eine Modellerweiterung auf diese Gesichtspunkte ermöglicht weiterführende Untersuchungen an Beveloidverzahnungen und ihrem Umfeld im Getriebe. Somit werden beispielweise Untersuchungen zur Radkörpergestaltung, Welle-Nabe-Verbindung und Axialkomponente der Zahnkraft möglich. Durch FE-Reihenuntersuchungen können damit Gestaltungsempfehlungen abgeleitet werden.

Die Ergebnisgüte des vorgestellten analytischen Ansatzes kann mit weiteren Untersuchungen gesteigert werden. Eine Übertragung detaillierter Berechnungsmethoden der Zahnfedersteifigkeit, beispielweise der Ansatz nach Weber und Banaschek ohne die Verwendung des Näherungspolynoms, ist eine schlüssige Ergänzung. Die asymmetrische Stirnschnittgestalt ist im Scheibenmodell durch einen Stirnradstirnschnitt angenähert. Eine genauere Berechnung der Spannungskorrekturfaktoren Y_F und Y_S unter Berücksichtigung der tatsächlichen Stirnschnittgestalt erfordert höherwertige Rechenverfahren, beispielsweise die BEM. Daraus können anschließend speziell für Beveloidräder angepasste Spannungsfaktoren abgeleitet werden.

Die analytischen Untersuchungen im Rahmen dieser Arbeit verfolgten das Ziel der Beanspruchungsberechnung am Zahnfuß. Die vorgeschlagene Berechnung der Flankenpressung kann in nachfolgenden Arbeiten mit weiterentwickelten numerischen Modellen validiert werden. Ebenso ist eine Erweiterung des Scheibenmodells auf den allgemeinen Fall einer windschiefen Achslage erstrebenswert. Für eine Berücksichti-

gung des Getriebeumfelds bei der Beanspruchungsrechnung der Verzahnung sollten die Wellen- und Lager-Nachgiebigkeit integriert werden. Mit einer derart erweiterten Modellierung können dann die mithilfe der FE-Simulation ermittelten Gestaltungsempfehlungen des Maschinenelements Beveloidrad in analytische Gleichungen überführt werden.

Untersuchungen zur Beanspruchbarkeit der Beveloidräder oder zum dynamischen Verhalten unter Last fanden bisher nur in geringem Umfang statt. Die bei ungünstiger Auslegung häufig auftretenden Drehfehler und Schwingungsanregungen an Beveloidrädern werden bislang mit den an Stirnrädern empirisch ermittelten Faktoren angenähert berücksichtigt. Die Übertragbarkeit der Faktoren und auch die der Werkstoffkennwerte auf Beveloidräder ist bislang nicht untersucht und stellt weiteres Forschungspotenzial dar.

Literaturverzeichnis

- AGMA01 AGMA 2001: Fundamental Rating Factors and Calculation Methods for Involute Spur and Helical Gear Teeth, 2004
- ALBER12 Alber, C.: Untersuchung der Zahnfedersteifigkeit von konischen Stirnrädern. Unveröffentlichte Bachelorarbeit am IKTD, Universität Stuttgart, 2012
- ALXNEIT10 Alxneit, H.: Optimierung des Übertragungsverhaltens konischer Außenstirnräder mit kreuzenden Achsen. Stuttgart, Universität, IKTD, Dissertation, 2010
- ANSYS09A ANSYS Inc. (Hrsg.): ANSYS Parametric Design Language Guide, ANSYS Release 12. 2009
- ANSYS09B ANSYS Inc. (Hrsg.): ANSYS Command Reference, ANSYS Release 12. 2009
- ANSYS09C ANSYS Inc. (Hrsg.): Programmer's Manual for Mechanical APDL, ANSYS Release 12. 2009
- BACHMANN07 Bachmann, M. ; Binz, H.: Beitrag zur geometrischen Auslegung von Beveloid-Hohlrad-Zahnradpaarungen. Dresdner Maschinenelemente Kolloquium 2007, TUDpress, Dresden, 2007, S. 135-146
- BACHMANN09 Bachmann, M. ; Binz, H.: Geometrical Design of Beveloid Gears Considering Gear Limits and Meshing Interference. In: BAPT 3rd International Conference Power Transmission '09. Kallithea, Greece, 2009, S. 9-14
- BACHMANN13A Bachmann, M.: Anwendung der experimentellen Lastverteilungsmessung bei der Firma PIV, Gesprächsprotokoll, 22.11.2013
- BACHMANN13B Bachmann, M. ; Binz, H. ; Traut, C.: Vermessung und Beurteilung von Abweichungen an Beveloidverzahnungen. In: Dresdner Maschinenelemente Kolloquium 03./04.12.2013. Dresden, 2013, S. 111-120
- BECK10 Beck, M. ; Binz, H. ; Bachmann, M.: Simulation von Beveloidrädern unter Last mithilfe der FEM. In: 8. Gemeinsames Kolloquium Konstruktionstechnik 2010. Magdeburg, 2010, S. 35-40. - ISBN 978-3-86912-040-0
- BECK11A Beck, M. ; Binz, H. ; Bachmann, M.: Zahnkontaktanalyse an Beveloidrädern. In: SIMPEP - Kongress für Simulation im Produktentwicklungsprozess, FVA Forschungsvereinigung Antriebstechnik. Veitshöchheim, 2011, S. 395-420
- BECK11B Beck, M. ; Binz, H. ; Bachmann, M.: FEM-Untersuchung der Zahnfuß-Spannung an Beveloidrädern. In: 9. Gemeinsames Kolloquium Konstruktionstechnik 2011. Rostock, 2011, S. 221-229. - ISBN 978-3-8440-0381-9

- BECK11C Beck, M. ; Bachmann, M. ; Traut, C. ; Binz, H.: Auslegung von Beveloidverzahnungen mit Simulation und Experiment. In: Spath, D.; Binz, H.; Bertsche, B. (Hrsg.): Engineering - Eine Herausforderung für die Zukunft. Stuttgarter Symposium für Produktentwicklung 2011. Stuttgart: Fraunhofer, 2011, S. 99-100. - ISBN 978-3-8396-0348-2
- BECK12A Beck, M. ; Binz, H. ; Bachmann, M.: Untersuchung von konischen Stirnrädern mit dem Scheibenmodell. Bericht Nr. 600 des Instituts für Konstruktionstechnik und Technisches Design der Universität Stuttgart, 2012
- BECK12B Beck, M. ; Binz, H. ; Bachmann, M.: Analytisches Rechenmodell für Beveloidräder unter Last. In: Schweizer Maschinenelemente Kolloquium 20. und 21. November 2012. Rapperswil, 2012, S. 113-126. – ISBN 978-3-942710-90-9
- BECK13 Beck, M. ; Binz, H. ; Bachmann, M.: Analytical calculation of the load distribution of beveloid gears, Investigation into stiffness calculation methods. In: International Conference on Gears. Garching, 2013, S. 1501-1504. - ISBN 978-3-18-092199-0
- BERNHARD12 Bernhard, A.: Experimentelle Bestimmung der Zahnfußspannung von Beveloidverzahnungen mit dem Verspannungsprüfstand. Unveröffentlichte Bachelorarbeit am IKTD, Universität Stuttgart, 2012
- BÖRNER05A Börner, J.: Dresdner Berechnungsmethoden für die Zahnkontaktanalyse – Grundlagen und Anwendung auf spezielle Verzahnungen. Dresdner Maschinenelemente Kolloquium 2005, TUDpress, Dresden, 2005, S. 149-163
- BÖRNER05B Börner, J. ; Humm, K. ; Joachim, F.: Development Of Conical Involute Gears (Beveloids) For Vehicle Transmissions. In: Gear Technology (2005), Nr. 6, S. 28-35
- BÖRNER95 Börner, J. ; Senf, M.: Verzahnungsbeanspruchung im Eingriffsfeld – effektiv berechnet. In: Antriebstechnik 34 (1995), Nr. 1, S. 59 - 63
- BOSCH65 Bosch, M.: Über das Dynamische Verhalten von Stirnrad-Getrieben unter Besonderer Berücksichtigung der Verzahnungsgenauigkeit. Aachen, RWTH, Dissertation 1965
- BRAUER02 Brauer, J.: Analytical geometry of straight conical involute gears. In: Mechanism and Machine Theory (2002), Nr. 37, S. 127-141
- BRAUER04 Brauer, J.: A general finite element model of involute gears. In: Finite Elements in Analysis and Design (2004), Nr. 40, S. 1857-1872
- BRAUER05 Brauer, J.: Transmission error in anti-backlash conical involute gear transmissions: a global–local FE approach. In: Finite Elements in Analysis and Design (2005), Nr. 5, S. 431-457

- BRECHER10 Brecher, C. ; Gorgels, C. ; Ingeli, J.: Verwendung der FE-basierten Zahnkontaktanalyse zur Analyse asymmetrischer Verzahnungen. In: 8. Gemeinsames Kolloquium Konstruktions-technik 2010. Magdeburg, 2010, S. 41 – 46. – ISBN 978-3-86912-040-0
- BRECHER11A Brecher, C. ; Gorgels, C. ; Ingeli, J.: Gewichtsreduzierung von Windkraftgetrieben durch asymmetrische Verzahnungen. In: 9. Gemeinsames Kolloquium Konstruktionstechnik 2011. Rostock, 2011, S. 123-130. – ISBN 978-3-8440-0381-9
- BRECHER11B Brecher, C. ; Gorgels, C. ; Röthlingshöfer, T. ; Henser, J.: Berücksichtigung von Fertigungseinflüssen bei der Auslegung von Beveloidzahnradern. In: 9. Gemeinsames Kolloquium Konstruktionstechnik 2011. Rostock, 2011, S. 296-303. – ISBN 978-3-8440-0381-9
- BRECHER11C Brecher, C. ; Brumm, M. ; Henser, J.: Simulation von Beveloidverzahnungen – Berechnung der Zahnfußspannungen. In: Dresdner Maschinenelemente Kolloquium 29./30.11.2011. Dresden, 2011, S. 227-226
- BRECHER11D Brecher, C. ; Röthlingshöfer, T. ; Henser, J.: Auslegung von Beveloidzahnradern unter Zuhilfenahme von Fertigungs-simulation und FE-basierter Zahnkontaktanalyse. In: SIMPEP-Kongress 29./30.09.2011. Veitshöchheim, 2011, S. 595-613
- BRECHER13A Brecher, C. ; Brumm, M. ; Henser, J.: Calculation of the Tooth Root Load Carrying Capacity of Beveloid Gears. In: AGMA Technical Paper 13FTM10, American Gear Manufacturers Association Alexandria/USA 2013, ISBN 978-1-61481-067-4
- BRECHER13B Brecher, C. ; Brumm, M. ; Henser, J.: Comparison of Local Approaches for the Evaluation of Tooth Root Load Carrying Capacity of Beveloid Gears. In: International Conference on Gears. Garching, 2013, S. 1403-1414. - ISBN 978-3-18-092199-0
- BRECHER13C Brecher, C. ; Brumm, M. ; Ingeli, J.: Untersuchung des Einflusses von asymmetrischen Zahnlückengeometrien auf das Laufverhalten von Stirnrad-Verzahnungen. In: Forschungsvereinigung Antriebstechnik (Hrsg.): Forschungsreport 2013
- DIN3960 DIN 3960: Begriffe und Bestimmungsgrößen für Stirnräder und Stirnradpaare mit Evolventenverzahnung. Berlin: Beuth Verlag, 1987
- DIN3961 DIN 3961: Toleranzen für Stirnradverzahnungen, Grundlagen. Berlin: Beuth Verlag, 1978
- DIN3971 DIN 3971: Begriffe und Bestimmungsgrößen für Kegelräder und Kegelradpaare. Berlin: Beuth Verlag, 1980
- DIN3990 DIN 3990: Tragfähigkeitsberechnung von Stirnrädern. Berlin: Beuth Verlag, 1987
- DIN3991 DIN 3991: Tragfähigkeitsberechnung von Kegelrädern ohne Achsversetzung. Berlin: Beuth Verlag, 1988

- DIN867 DIN 867: Bezugsprofile für Evolventenverzahnungen an Stirnrädern (Zylinderrädern). Berlin: Beuth Verlag, 1986
- DIN868 DIN 868: Allgemeine Begriffe und Bestimmungsgrößen für Zahnräder, Zahnradpaare und Zahnradgetriebe. Berlin: Beuth Verlag, 1976
- DIN55350 DIN 55350: Begriffe der Qualitätssicherung und Statistik. Berlin: Beuth Verlag, 1987
- DITTERT06 Dittert, T.: Entwicklung eines Prüfstands für Verzahnungen mit kleinen Achskreuzungswinkeln. Universität Stuttgart, unveröffentlichte Studienarbeit, 2006
- EBERHARD13 Eberhard, P. ; Schurr, D.: Softwaretechnische Realisierung einer Programmumgebung zur Rädertriebsimulation. In: Forschungsvereinigung Antriebstechnik (Hrsg.): Forschungsreport 2013
- FRÜHE11 Frühe, T.: Berechnung und Minimierung der Zahnfußspannung von Standard- und LowLoss-Verzahnungen. München, TUM, FZG, Dissertation 2011
- GACKA12 Gacka, A. ; Forschungsvereinigung Antriebstechnik (Hrsg.): FE-Berechnung beliebiger evolventischer Zahnflanken mit frei wählbarer Zahnfußausrundung, FVA Forschungsheft, Nr. 1020, Forschungsvorhaben 484/I, 2012
- GÄNZLE11 Gänzle, U.: Simulationsmöglichkeiten von Beveloidrädern und Kegeln. Unveröffentlichte Studienarbeit am IKTD, Universität Stuttgart, 2011
- GWJ13 GWJ Technology GmbH (Hrsg.): Benutzerhandbuch zur webbasierten Berechnungssoftware eAssistant, 2013, Firmenschrift
- HAASE98 Haase, A. ; Hünecke, C. ; Hutschenreiter, B.: Forschungsvereinigung Antriebstechnik e.V. (Hrsg.): Kegelradbeanspruchung Grundlagen zur Ermittlung der Zahnflanken- und Zahnfußbeanspruchung bogenverzahnter Kegeln : FVA Forschungshefte, Nr. 548. Forschungsvorhaben 223/Ib, 1998
- HÄRTIG13 Härtig, F. ; Kniel, K.: Large Gear Measurements compared between Coordinate Measuring Machines, Articulated Arm Machines and Lasertrackers. In: International Conference on Gears. Garching, 2013, S. 391-401. – ISBN 978-3-18-092199-0
- HEMMELMANN07 Hemmelmann, J.: Simulation des lastfreien und belasteten Zahneingriffs zur Analyse der Drehübertragung von Zahnradgetrieben. Aachen, RWTH, WZL, Dissertation, 2007
- HERTZ81 Hertz, H.: Über die Berührung fester elastischer Körper. In: Journal für die reine und angewandte Mathematik 92 (1881), S. 156 - 171
- HOFFMANN87 Hoffmann, K.: Einführung in die Technik des Messens mit Dehnungsmessstreifen. Firmenschrift Hottinger Baldwin Messtechnik GmbH, 1987

- HÖHN11 Höhn, B.: Spielarme Getriebe. In: Antriebstechnik (2011), Nr. 5, S. 60-65
- ISO6336 ISO 6336: Calculation of load capacity of spur and helical gears, 2007
- KISSLING00 Kissling, U.: Festigkeitsberechnung von Stirnrädern – Unterschiede zwischen ISO 6336, DIN 3990 und AGMA 2001, <http://www.kisssoft.ch/deutsch/downloads/ISODINvsAGMA.pdf>, zuletzt aktualisiert 2000, zuletzt geprüft am 10.08.2011
- KLEPPMANN13 Kleppmann, W.: Versuchsplanung – Produkte und Prozesse optimieren, 8. Auflage, Hanser Verlag München 2013
- KLINGELNBERG08 Klingelberg, J.: Kegelräder, Grundlagen, Anwendungen, Springer Verlag Berlin 2008
- KRÜGER13 Krüger, D. ; Römhild, I. ; Linke, H. ; Brechling, J. ; Heß, R.: Increasing the Load Capacity of Gear Teeth by Asymmetric Gear Tooth Design. International Conference on Gears, VDI-Berichte 2199, Garching bei München, 2013, S. 1327 - 1340
- KUNERT99 Kunert, J.: Experimentell gestützte Untersuchungen zum Verformungs- und Spannungsverhalten an außenverzahnten Stirnrädern für eine verbesserte Beanspruchungsanalyse. Dresden. Technische Universität, Dissertation 1999
- KUPFER00 Kupfer, R.: Forschungsvereinigung Antriebstechnik e.V. (Hrsg.): Erprobung der technischen Vorgehensweise einer Tragbildprüfung mit Feinpapier an beliebigen Verzahnungen : FVA Forschungshefte, Nr. 597. Forschungsvorhaben 319/II, 2000
- LIN86 Lin, H. ; Huston, R.: Dynamic Loading on Parallel Shaft Gears : NASA Contractor Report 179473, 1986
- LINKE10 Linke, H.: Stirnradverzahnungen – Berechnung, Werkstoffe, Fertigung, 2. Auflage, Hanser Verlag München, 2010
- LINKE12 Linke, H. ; et al.: Tragfähigkeit von Zahnrädern mit asymmetrischem Evolventenprofil. In: Antriebstechnik (2012), Nr. 11 und 12, S. 28-31 und S. 34-37
- LIU10 Liu, C. ; Chen, Y. ; Lin, S.: Contact Stress Analysis of Straight Concave Conical Involute Gear Pairs with Small Intersected Angles, Proceedings of the International MultiConference of Engineers and Computer Scientists, Hong Kong 17.-19.03.2010
- MATTER13 Matter, S.: Messung der Zahnfußspannung von Beveloidverzahnungen. Unveröffentlichte Bachelorarbeit am IKTD, Universität Stuttgart, 2013
- MATTHECK06 Mattheck, C.: Verborgene Gestaltgesetze der Natur : Optimalformen ohne Computer. Karlsruher Institut für Technologie, 2006
- NEUPERT83 Neupert, B.: Berechnung der Zahnkräfte, Pressungen und Spannungen von Stirn- und Kegelradgetrieben. Aachen, RWTH, Werkzeugmaschinenlabor, Dissertation, 1983

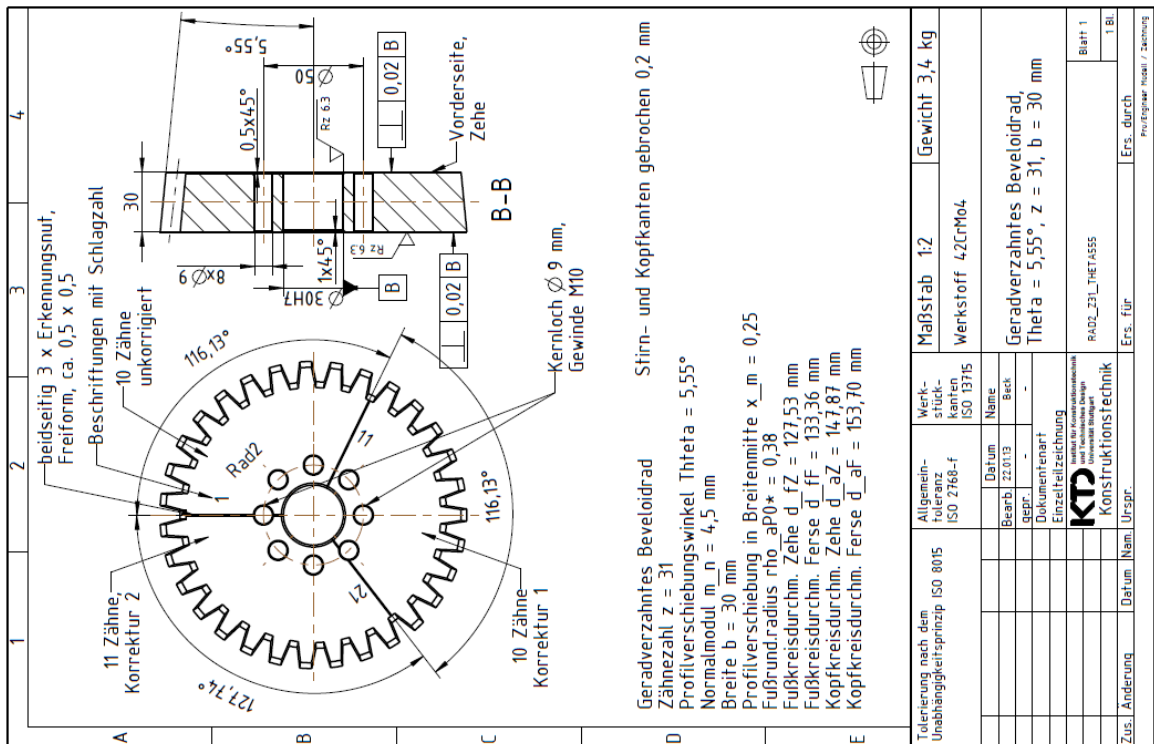
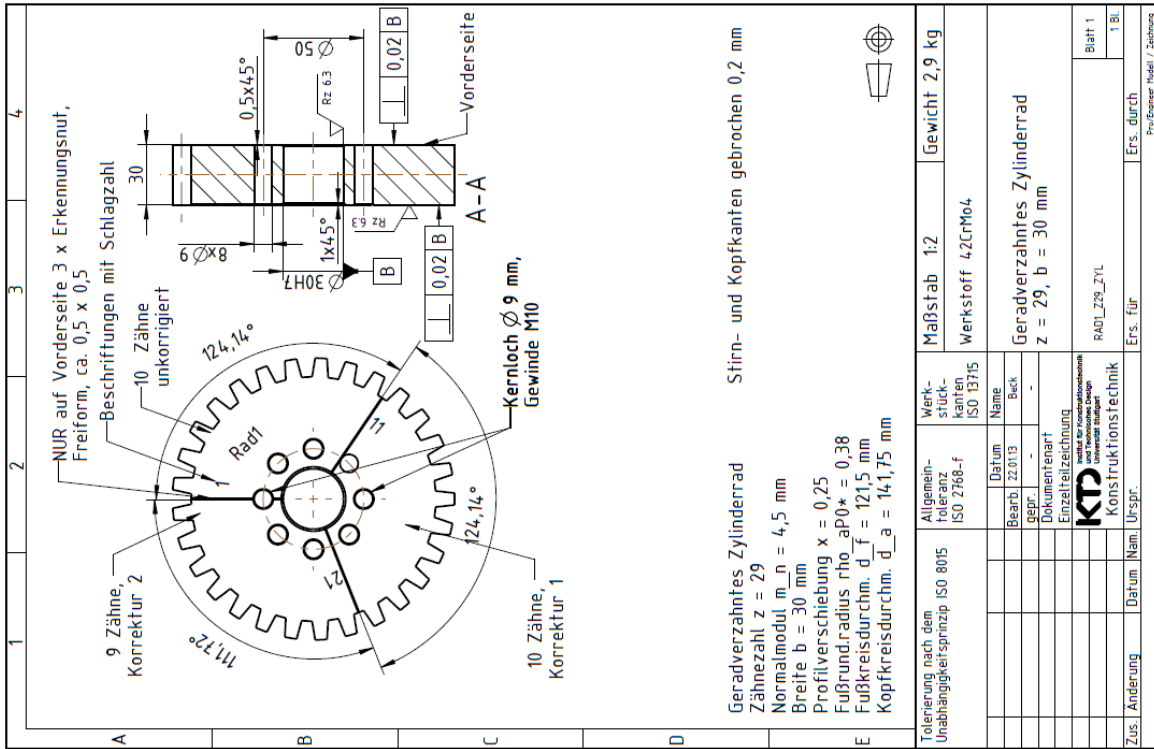
- NIEMANN03 Niemann, G. ; Winter, H. ; Höhn, B.-R.: Maschinenelemente Band 2: Getriebe allgemein, Zahnradgetriebe – Grundlagen, Stirnrad-getriebe. 2. Auflage Springer-Verlag Berlin, 2003
- OTTO07 Otto, M. ; Thoma, F. ; Weitzl, R.: Ritzelkorrektur (RIKOR H 2.0 mit LAGER2 2.0) – Benutzeranleitung : FVA Forschungshefte, Nr. 481. Forschungsvorhaben 30/V, 2007
- OTTO09 Otto, M.: Lastverteilung und Zahnradtragfähigkeit von schrägverzahnten Stirnrädern. München, Technische Universität, FZG, Dissertation, 2009
- PEDERSEN10 Pedersen, N.: Improving bending stress in spur gears using asymmetric gears and shape optimization. In: Mechanism and Machine Theory (2010), Nr. 45, S. 1707-1720
- PLACZEK88 Placzek, T.: Lastverteilung und Flankenkorrektur in gerad- und schrägverzahnten Stirnradstufen. München, Technische Universität, FZG, Dissertation, 1988.
- ROTH01 Roth, K.: Zahnradtechnik – Stirnrad-Evolventenverzahnungen. Springer Verlag Berlin, 2001
- ROTH13 Roth, M. ; Paetzold, K. ; Roth, Z.: Development and experimental investigation of a bionic tooth root contour. International Conference on Gears, VDI-Berichte 2199, Garching bei München. 2013, S. 1315 - 1326
- ROTH98 Roth, K.: Zahnradtechnik - Evolventen-Sonderverzahnungen zur Getriebeverbesserung. Springer Verlag Berlin, 1998
- RÖTHLINGSHÖFER12 Röthlingshöfer, T.: Auslegungsmethodik zur Optimierung des Einsatzverhaltens von Beveloidverzahnungen. Aachen, Universität, WZL, Dissertation, 2012
- SCHÄFER64 C.H. Schäfer Getriebe GmbH (Hrsg.): „CEHA“ Vielstufen-Zahnradgetriebe. Dresden, 1964
- SCHÄFER71 Schäfer, W.: Ein Beitrag zur Ermittlung des wirksamen Flankenrichtungsfehlers bei Stirnradgetrieben und der Lastverteilung bei Geradverzahnung. Darmstadt, Technische Universität, Lehrstuhl und Laboratorium II für Maschinenelemente, Dissertation, 1971
- SCHIMPF96A Schimpf, B. ; Langenbeck, K.: Auslegung von Beveloidradsätzen für Schiffswendegetriebe. Bericht Nr. 400 des Institutes für Maschinenkonstruktion und Getriebebau der Universität Stuttgart, 1996
- SCHIMPF96B Schimpf, B. ; Langenbeck, K.: Auslegung eines Beveloidradsatzes für ein Schiffswendegetriebe vom Typ BVS 334. Bericht Nr. 423 des Institutes für Maschinenkonstruktion und Getriebebau der Universität Stuttgart, 1996
- SCHINAGL02 Schinagl, S.: Zahnfußtragfähigkeit schrägverzahnter Stirnräder unter Berücksichtigung der Lastverteilung. München, Technische Universität, Dissertation, 2001

- SCHLECHT11 Schlecht, B. ; Schaefer, S. ; Hutschenreiter, B. ; Senf, M.: Zahnkontaktsimulation und Tragfähigkeitsanalyse bei Kegelrädern. In: Dresdner Maschinenelemente Kolloquium 29./30.11.2011. Dresden, 2011, S. 193-212
- SCHLECHT13A Schlecht, B. ; Schumann, S. ; Senf, M.: Asymmetrische Bezugsprofile als Ausgangspunkt für die Tragfähigkeitssteigerung von Kegelradverzahnungen. In: Dresdner Maschinenelemente Kolloquium 03./04.12.2013. Dresden, 2013, S. 165-177
- SCHLECHT13B Schlecht, B. ; Schaefer, S. ; Hutschenreiter, B.: BECAL - Optimierung der Berechnungsmodelle und Erweiterung auf Beveloidverzahnungen. In: Forschungsvereinigung Antriebstechnik (Hrsg.): Forschungsreport 2013
- SCHMIDT11 Schmidt, U.: Experimentelle Bestimmung der Zahnfußspannung von Beveloidverzahnungen unter Last. Unveröffentlichte Bachelorarbeit am IKTD, Universität Stuttgart, 2011
- SCHMIDT72 Schmidt, G.: Berechnung der Wälzpressung schrägverzahnter Stirnräder unter Berücksichtigung der Lastverteilung. München, Technische Universität, FZG, Dissertation, 1972
- STAHL01 Stahl, K.: Grübchentragfähigkeit einsatzgehärteter Gerad- und Schrägverzahnungen unter besonderer Berücksichtigung der Pressungsverteilung. München, Technische Universität München, Dissertation, 2001
- STAHL11 Stahl, K. ; Otto, M. ; Zimmer, M. ; Scheurle, J.; Johann, A.; Huber, P.: Erzeugung allgemeiner Flankengeometrien. In: Forschungsvereinigung Antriebstechnik (Hrsg.): Forschungsreport 2011
- STAHL12A Stahl, K. ; Otto, M. ; Fröh, A.: Normberechnung der Geometrie und Tragfähigkeit von asymmetrischen Verzahnungen. In: Forschungsvereinigung Antriebstechnik (Hrsg.): Forschungsreport 2012
- STAHL12B Stahl, K. ; Otto, M. ; Fröh, A.: Normberechnung der Geometrie und Tragfähigkeit von asymmetrischen Verzahnungen. Tischvorlage zur Arbeitsgruppensitzung 16.10.2012, Forschungsvorhaben 241 X
- STAHL13A Stahl, K. ; Otto, M. ; Gwinner, P. ; Fromberger, M.: Erweiterung des FVA-Stirnradprogramms STplus. In: Forschungsvereinigung Antriebstechnik (Hrsg.): Forschungsreport 2013
- STAHL13B Stahl, K. ; Otto, M. ; Nitsch, C.: Weiterführende Validierung der Verformungsrechnung in RIKOR – Detaillierte Betrachtung einzelner Getriebeelemente. In: Forschungsvereinigung Antriebstechnik (Hrsg.): Forschungsreport 2013
- STAHL13C Stahl, K. ; Otto, M. ; Zimmer, M.: Anwendernahe Umsetzung der Erzeugung allgemeiner Flankengeometrien nach FVA 604/I und Adaption an bestehende FVA-Programme. In: Forschungsvereinigung Antriebstechnik (Hrsg.): Forschungsreport 2013

- TRAUT09 Traut, C.: Analyse der Stirnschnittgeometrie von konischen Zahnradern. Unveröffentlichte Diplomarbeit am IKTD, Universität Stuttgart, 2009
- TRAUT10 Traut, C. ; Binz, H. ; Bachmann, M.: The influence of manufacturing deviations on the transmission behavior of conical involute gears. International Conference on Gears, VDI-Berichte 2108, Garching bei München, 2010, S. 647-658
- TRAUT11A Traut, C. ; Binz, H. ; Bachmann, M.: Analytische Auslegung hohlballiger Flankenkorrekturen für konische Stirnräder zur Realisierung von Linienkontakt. In: Dresdner Maschinenelemente Kolloquium 29./30.11.2011. Dresden, 2011, S. 215-226
- TRAUT11B Traut, C. ; Binz, H. ; Bachmann, M.: Systematische Optimierung des Übertragungsverhaltens konischer Stirnräder mithilfe DoE. In: SIMPEP-Kongress 29./30.09.2011. Veitshöchheim, 2011, S. 529-541
- TRAUT13 Traut, C. ; Binz, H. ; Bachmann, M.: Calculation of the conjugate tooth flank geometry of conical involute gears by correction of the addendum modification. In: International Conference on Gears. Garching, 2013, S. 231-242. - ISBN 978-3-18-092199-0
- TSAI05 Tsai, S.: Experimental and Numerical Root Stress Analysis of Conical Gears. International Conference on Gears, VDI-Berichte 1904, Garching bei München, 2005, S. 1127-1142
- TSAI10 Tsai, S.: Skewed Conical Gear Drives with High Surface Durability: Design, Analysis and Validation. International Conference on Gears, VDI-Berichte 2108, Garching bei München, 2010, S. 659-670
- TSAI97 Tsai, S.: Vereinheitlichtes System evolventischer Zahnradern – Auslegung von zylindrischen, konischen, Kronen- und Torusräder. Braunschweig, Technische Universität, Institut für Konstruktionslehre Maschinen- und Feinwerkelemente, Dissertation, 1997
- UHLIG11 Uhlig, M.: Erstellung und Implementierung einer Strategie zur Vorauslegung konischer Außenstirnräder. Unveröffentlichte Studienarbeit am IKTD, Universität Stuttgart, 2011
- ULRICH12 Ulrich, D.: Untersuchung der Zahnfußspannung von Beveloidverzahnungen unter Last mithilfe der FEM. Unveröffentlichte Bachelorarbeit am IKTD, Universität Stuttgart, 2012
- VISHAY10 Vishay Measurements Group GmbH: Messwertaufnehmer – DMS und Zubehör, Catalog-No. 306A, 2010, Firmenschrift
- WAGNER93 Wagner, M.: Beitrag zur geometrischen Auslegung von Stirnradpaaren mit kleinen Achsenkreuzungswinkeln. Stuttgart, Universität, IMK, Dissertation, 1993
- WANG03 Wang, J.: Numerical and Experimental Analysis of Spur Gears in Mesh. Perth, University of Technology, Dissertation, 2003

- WEBER55 Weber, C. ; Banaschek, K.: Formänderung und Profilirücknahme bei gerad- und schrägverzahnten Rädern. Bd. 11 : Schriftenreihe Antriebstechnik. 2. Aufl.: Vieweg, 1955
- WESER11 Weser, G.: Tragfähigkeit von Stirnrädern, Unterschiede bei der Festigkeitsberechnung nach DIN und ISO. In: Antriebstechnik 50 (2011), Nr. 5, S. 50-53
- WESER13 Weser, G.: Zahnform \neq Zahnform: Korrekte Verzahnungsgeometrien zum 5-Achsfräsen und deren Einsatz in der Praxis. In: Dresdner Maschinenelemente Kolloquium 03./04.12.2013. Dresden, 2013, S. 121-134
- WINKLER02 Winkler, T.: Untersuchung zur Belastbarkeit hohlkorrigierter Beveloidgetriebe für Schiffsgetriebe mittlerer Leistung. Stuttgart, Universität, IMK, Dissertation, 2002
- WINTER83 Winter, H. ; Podlesnik, B.: Zahnfedersteifigkeit von Stirnradpaaren, Teil 1: Grundlagen und bisherige Untersuchungen; Teil 2: Einfluss von Verzahnungsdaten, Radkörperform, Linienlast und Wellen-Naben-Verbindungen; Teil 3: Einfluss der Radkörperform auf die Verteilung der Einzelfedersteifigkeit und die Zahnkraft längs der Zahnbreite. In: Antriebstechnik 22 (1983), Nr. 3, S. 39-42; Antriebstechnik 22 (1983) Nr. 5, S. 51-58; Antriebstechnik 23 (1984) Nr. 11, S. 43-49
- WU09 Wu, S.H. ; Tsai, S.-J.: Contact stress analysis of skew conical involute gear drives in approximate line contact. In: Mechanism and Machine Theory (2009), Nr. 44, S. 1658-1676
- ZIEGLER12 Ziegler, P.: Dynamische Simulation von Zahnradkontakten mit elastischen Modellen. Stuttgart, Universität, IKTD, Dissertation 2012
- ZIEGLER71 Ziegler, H.: Verzahnungssteifigkeit und Lastverteilung schrägverzahnter Stirnräder. Aachen, Rheinisch-Westfälische Technisches Hochschule Aachen, Dissertation, WZL, 1971
- ZIERAU89 Zierau, S.: Die geometrische Auslegung konischer Zahnräder und Paarungen mit parallelen Achsen. Braunschweig, Universität, Dissertation, 1989
- ZIMMER12 Zimmer, M. ; Huber, P. ; Forschungsvereinigung Antriebstechnik e.V. (Hrsg.) : Flankengenerator, Erzeugung allgemeiner Flankengeometrien : Forschungsvorhaben Nr. 604 I, Heft 1017 : FVA Forschungshefte, Nr. 1017. München, 2012

Anhang A: Technische Skizzen der Räder



Anhang B: Flankenlinienmessung der Prüfräder

Messschriebdarstellung der Untersuchungszähne

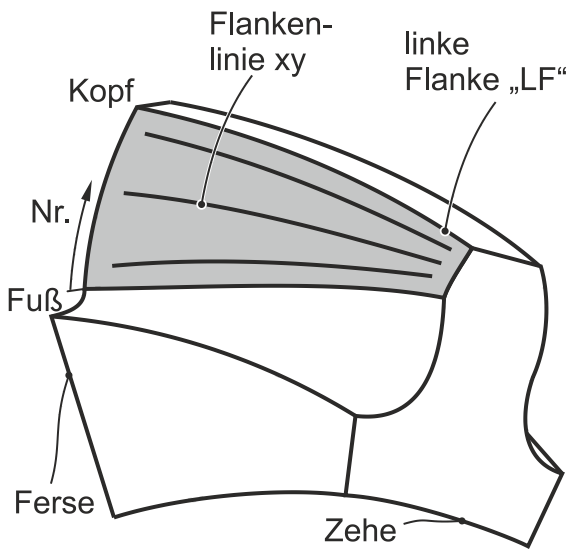
Benennungen:

LF: Linksflanke,

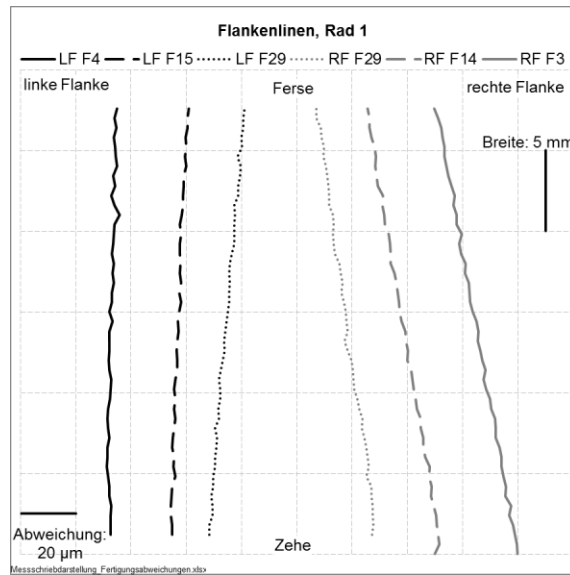
RF: Rechtsflanke,

Fxy: Flankenlinie Nr. xy

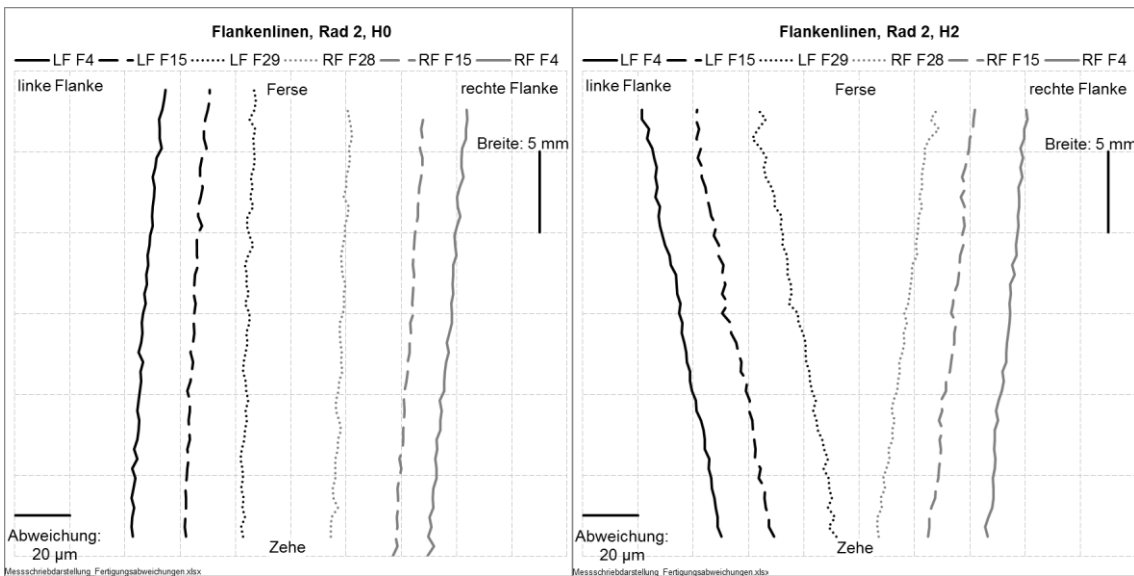
Prinzipdarstellung:



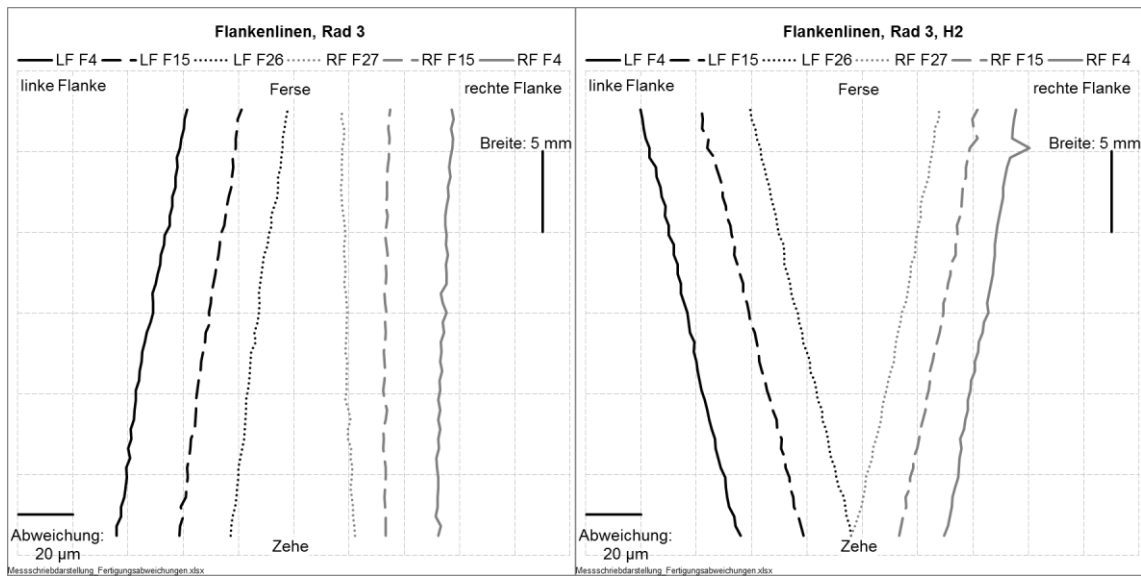
Rad 1:



Rad 2:

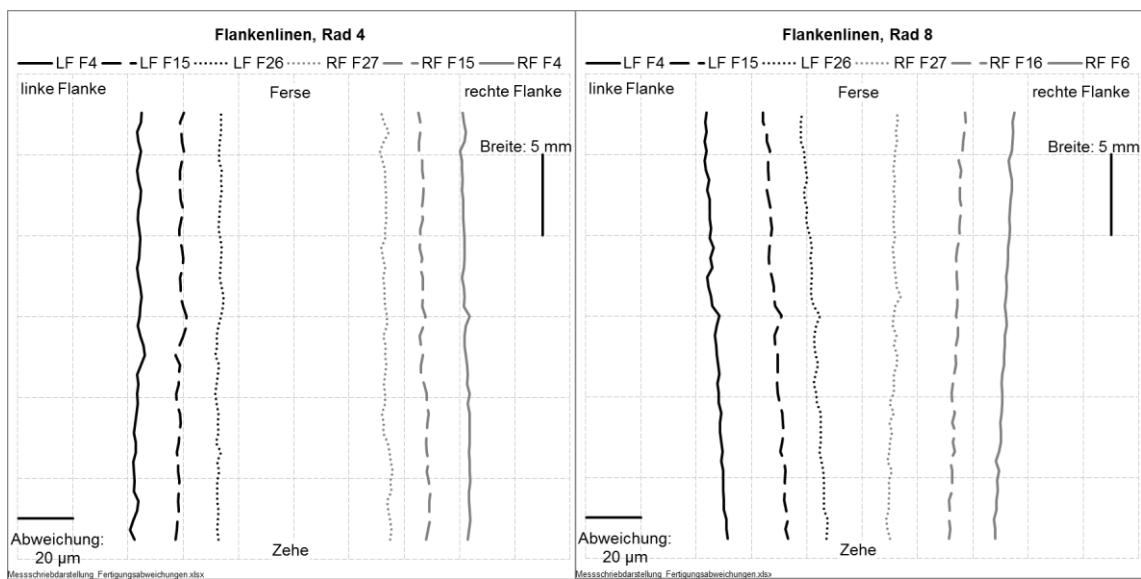


Rad 3:



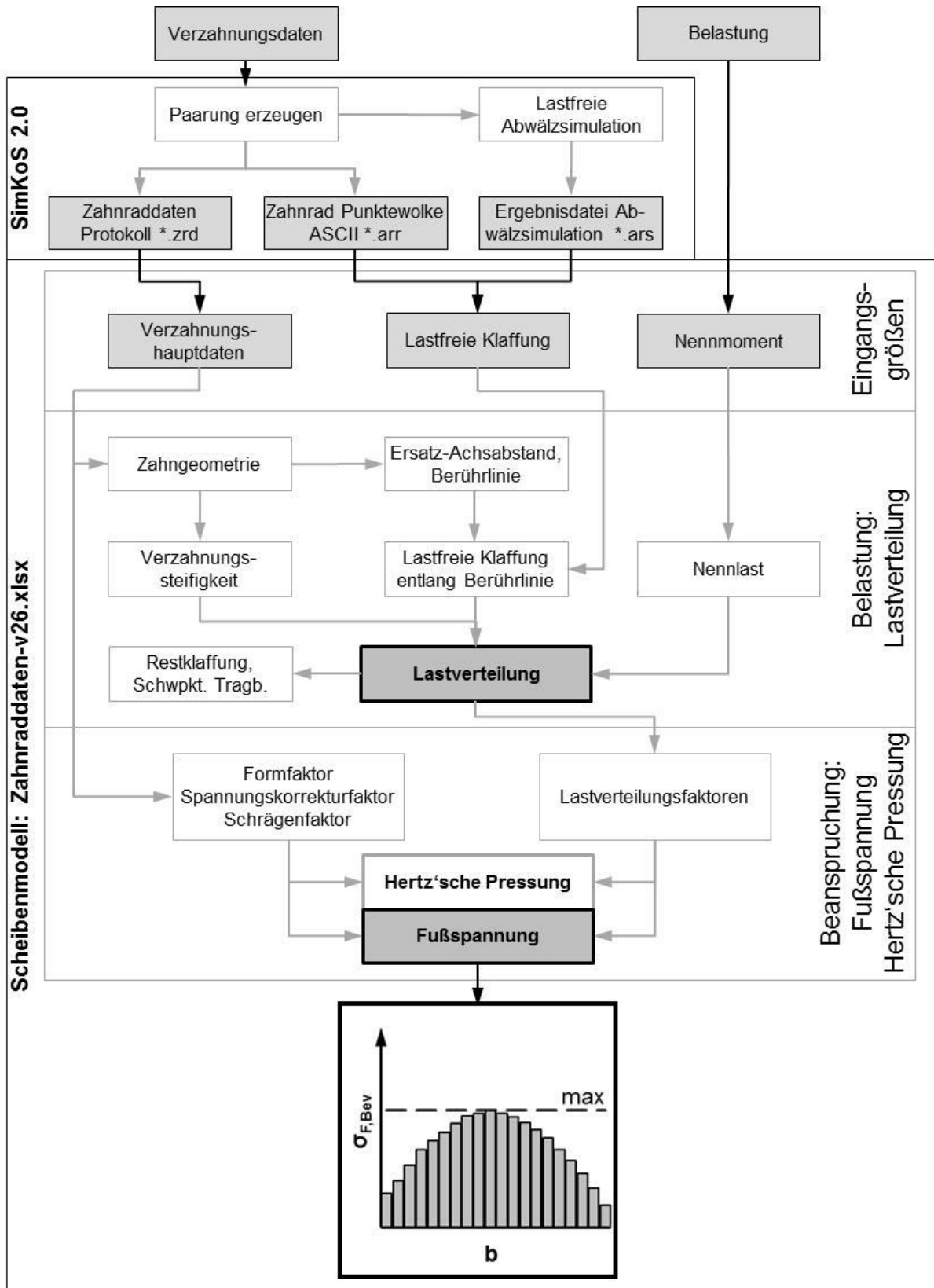
Rad 4:

Rad 8:

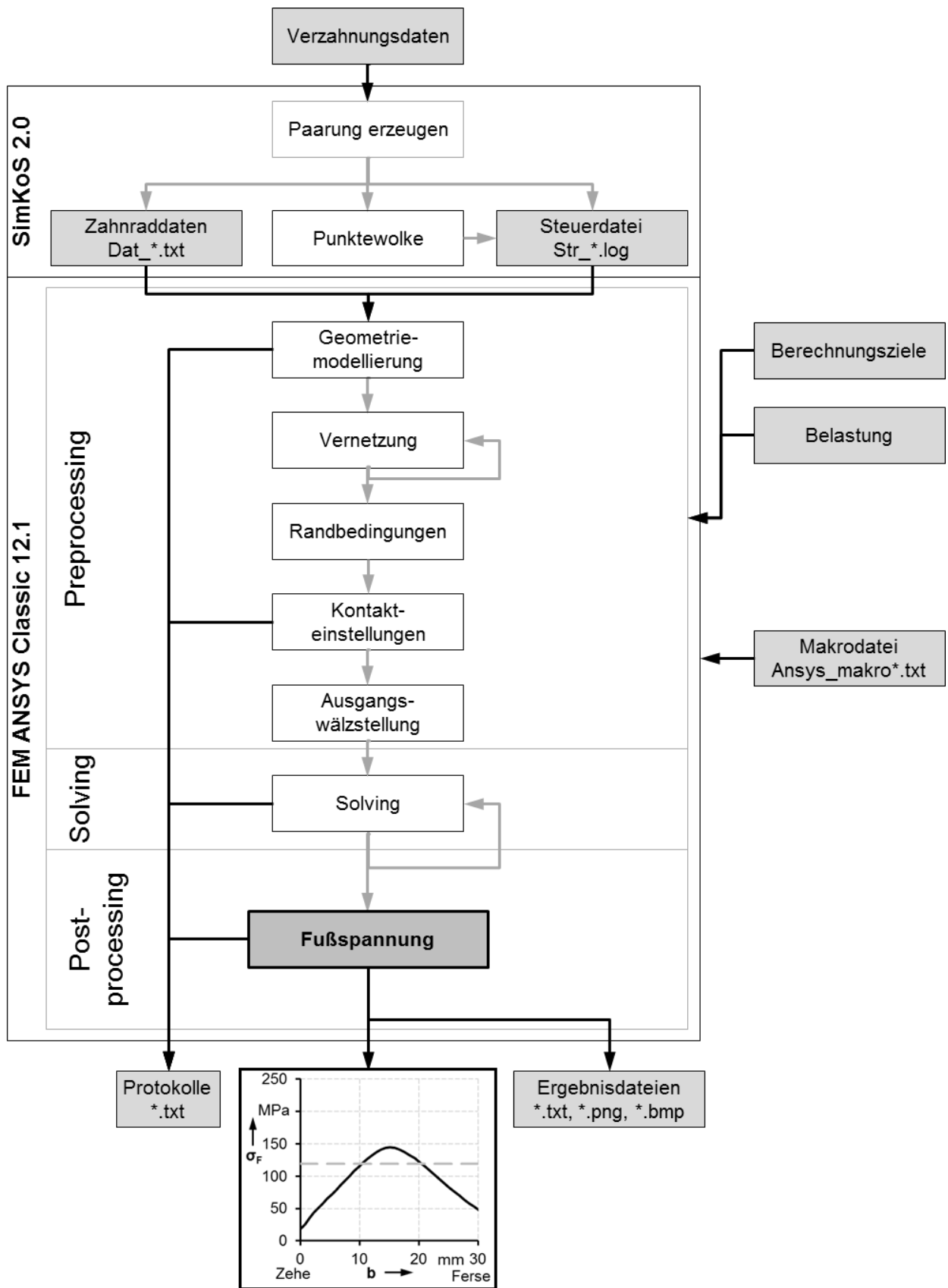


Anhang C: Flussdiagramme der Berechnungen

Vorgehen der analytischen Berechnung



Vorgehen der FE-Analyse



ISBN-13: 978-3-922823-89-6