Suchov, Vladimir Grigor'evič

Berechnung von Dreigelenksbindern[1]

Deutsche Vollübersetzung aus:
Šuchov, V. G.: Izbrannye trudy. Stroitel'naja mechanika. Pod red. A. Ju. Išlinskogo. <Ausgewählte Schriften. Baumechanik; russ.> Moskva: Nauka, 1977, S. 159 – 169
Russ.: Расчет трехшарнирных ферм
Rasčet trechšarnirnych ferm

[1] Archiv der Akademie der Wissenschaften der UdSSR, Bestand 1508 – Teil 1 – Mappe 47 – Blätter Nr 14 – 18 (Anm.d.Red.).

Die Spannweite des Trägers ist 2*l*, die Wandhöhe *h*, der Dachanstieg unter den Stützen *h* + *f*, die Trägergelenke befinden sich in den Punkten *A, C, B*.

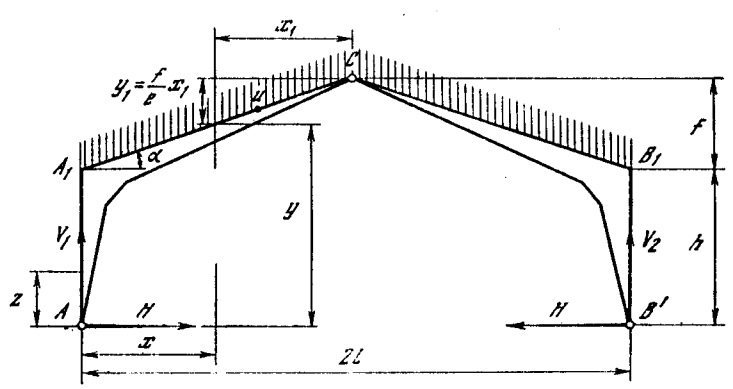


Abb. 1

1. Der Träger ist der gleichmäßigen Last *q* auf die laufende Spannweiteneinheit ausgesetzt (Abb. 1). Reaktionen der Stützen: vertikale

$$V_1 = V_2 = ql, \tag{1}$$

der horizontale Schub *H* wird aus der Gleichheitsbedingung der Momente bezüglich des Punktes *C* $V_1 l - qll/2 - H(f + h) = 0$ bestimmt, woraus für den Horizontalschub folgt:

$$H = ql^2/2\,(f + h). \tag{2}$$

In einem beliebigen Querschnitt *xy* der Trägerteile A_1C und CB_1 ist das Moment der Außenkräfte

$$M_{xy} = qlx - q\frac{x^2}{2} - q\frac{l^2}{2(f+h)}y\,,$$

wobei

$$y = h + \frac{f}{l}x$$

bzw.

$$M_{xy} = \frac{ql^2}{2}\left(2\frac{x}{l} - \frac{x^2}{l^2} - \frac{h}{f+h} - \frac{f}{f+h}\frac{x}{l}\right)$$

und schließlich

$$M_{xy} = q\frac{l^2}{2}\left(1 - \frac{x}{l}\right)\left(\frac{x}{l} - \frac{h}{f+h}\right)$$

bzw.

$$M_{x_1} = H\frac{f}{l}x_1 - q\frac{x^2}{2} = q\frac{qlx_1}{2}\frac{f}{f+h} - q\frac{x_1^2}{2}\,. \tag{3}$$

Bei einseitiger Belastung ist

$$V_1 = \tfrac{3}{4}\,ql, \qquad V_2 = \tfrac{1}{4}\,ql. \tag{1.a}$$

Der Horizontalschub ist

$$H = ql^2/4(f + h). \tag{2.a}$$

Das Moment in einem beliebigen Querschnitt *xy* ist

$$M_{xy} = \tfrac{3}{4}\,qlx - q\frac{x^2}{2} - q\frac{l^2}{4(f+h)}\left(h + \frac{fx}{l}\right)$$

bzw.

$$M_{x_1} = ¼ql^2\left[\frac{x_1}{l}\left(1+\frac{f}{f+h}\right)-2\frac{x_1^3}{l^2}\right]. \tag{3.a}$$

Auf der unbelasteten Seite ist $M_x = ¼plx - H(h + fx/l)$ bzw. $M_{x_1} = Hfx_1 / l - \frac{1}{4}qlx_1$. Die Momente AA_1 und BB_1 sind gleich Hy.

Am Verlauf des oberen Trägergurtes haben die Gleichungen nach der Parabel die Gestalt

$$y = \frac{f}{l^2}(2lx - x^2) + h \tag{4}$$

$$M_{xy} = -\frac{qh(l - x^2)}{2(f+h)}. \tag{5}$$

In einem beliebigen Querschnitt des Abschnitts A_1A und B_1B des Trägers ist das Moment

$$M_z = -\frac{ql^2}{2}\frac{z}{f+h}, \tag{6}$$

wobei z von 0 bis h variiert.

Aus den Gleichungen (3) und (6) ist ersichtlich, daß die größten Werte von M bei $x = 0$ vorkommen, d.h. im Punkt A_1, wobei

$$M_{A_1} = -\frac{ql^2}{2}\frac{h}{f+h}. \tag{7}$$

In den Punkten A, C und u (bestimmt aus der Bedingung $x/l = h/(f + h)$) sind die Werte der Momente gleich 0. Von Punkt A bis Punkt A_1 nimmt das Moment bis auf den größten Wert in A_1 zu und hat negatives Vorzeichen. Vom Punkt A_1 bis zum Punkt u nimmt das Moment weiterhin negativ bis auf Null ab. Vom Punkt u nimmt das Moment positives Vorzeichen an und erreicht sein max in dem aus $dM_{xy}/dx = 0$ bestimmten Punkt, woraus $x/l = (f + 2h)/2(f + h)$, und von diesem Punkt an nimmt sein größtes positives Moment ab und wird im Punkt C gleich Null. Der größte Wert des positiven Moments ist bei $x = \frac{f+2h}{2(f+h)}l$

$$M_{\max} = \frac{ql^2}{8}\frac{f^2}{(h+f)^2}. \tag{8}$$

Die numerische Größe des negativen Moments zwischen den Punkten A_1 und u ist gleich dem numerischen Wert des maximalen positiven Moemnts $+M_{\max}$ in dem Punkt, der aus der Gleichung $-M_{xy} = +M_{\max}$ bestimmt wird, wobei $x / l = (f + 2h - f\sqrt{2} / 2(f + h)$ erhalten wird.

2. Der Binder ist einer einseitigen Belastung aufgrund Windeinwirkung ausgesetzt (Abb. 2). Der Winddruck auf die senkrechte Wand ist gleich p. Die Normalkomponente des Winddrucks auf die unter dem Winkel α zur Waagrechten schräge Fläche ist $p \sin \alpha$. Die auf AA_1 wirkende Kraft ist gleich ph, ihr Kraftarm $h/2$.

Die auf A_1C wirkende Kraft ist $(p \sin \alpha/\cos \alpha)l$, ihr Kraftarm $hA_1 + l/2 \cos \alpha = h \sin \alpha + l/2 \cos \alpha$. Die Reaktion der Stütze ist T, ihr Kraftarm $Am = 2l \sin \beta$.

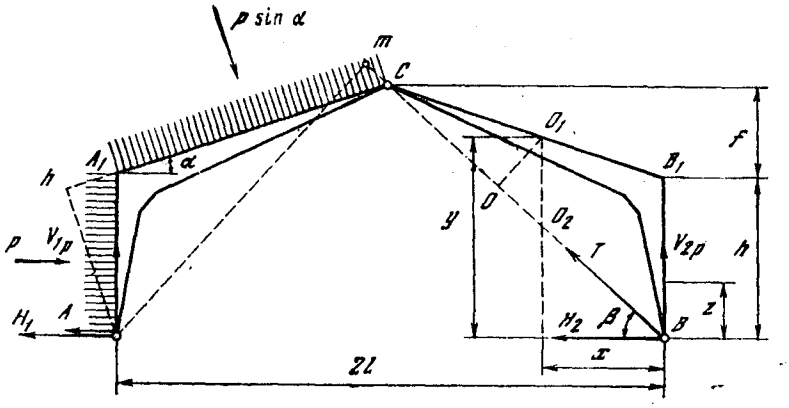


Abb. 2

Die Gleichgewichtsbedingung für den Punkt *A* ergibt

$$p\frac{h^2}{2}+\frac{p\sin\alpha l}{\cos\alpha}\left(\frac{l}{2\cos\alpha}+h\sin\alpha\right)=T2l\sin\beta\,,$$

und wenn wir tg $\alpha = f/l$ einsetzen, erhalten wir

$$\frac{p}{2}\left[h^2+l^2\sin\alpha+f^2\sin\alpha+2fh\sin\alpha\right]=T2l\sin\beta\,.$$

Die Horizontalreaktion der Stütze *B* durch H_2 wird nach *T* so bestimmt: $H_2 = T\cos\beta$; tg $\beta = (f + h)/l$, und folglich ist

$$H_2=\frac{p}{4(f+h)}\left[h^2+l^2\sin\alpha+f^2\sin\alpha+2fh\sin\alpha\right]. \tag{9}$$

Das Moment der äußeren Kräfte im Trägerquerschnitt CB_1B ist für einen beliebigen Punkt *xy* $M = -T \times 00_1$; $00_1 = 0_10_2\cos\beta = \{y - [(f + h)/l]x\}\cos\beta = h\,(1 - x/l)\cos\beta$; $T = H_2/\cos\beta$, und folglich ist

$$M_1=-H_2h(1-x/l)\,. \tag{10}$$

Der Wert des Moments muß negativ sein, deshalb steht auch das Zeichen „–". Dieser Ausdruck bestimmt das Moment für alle Punkte des Trägers von *C* bis B_1; von B_1 bis *B* erhält man für das Moment den Ausdruck

$$M_{1z}=-H_2z\,, \tag{11}$$

wobei *z* von *h* in Punkt B_1 bis 0 in Punkt *B* variiert.

Der Druck auf die Stütze des Gelenks *B* ist

$$V_{2p}=T\sin\beta=\frac{p}{4l}\left[h^2+l^2\sin\alpha+f^2\sin\alpha+2fh\sin\alpha\right]. \tag{12}$$

Bei $f/l = {}^1/_3$ ist

$$V_{2p}=pH^2/4l+pf\cos\alpha+pf\sin\alpha(h+f/2)/2l\cong ph^2/4l+pf/4\,.$$

Der Vertikaldruck V_{1p} und der Horizontalschub H_1 der Stütze *A* werden bestimmt aus den Bedingungen

$$V_{1p}+V_{2p}=p\sin\alpha l\cos\alpha/\cos\alpha=pf\cos\alpha, \tag{13}$$

$H_1 + H_2 = p[h + \sin^2 \alpha l/\cos \alpha] = p[h + f \sin \alpha]$. (14)

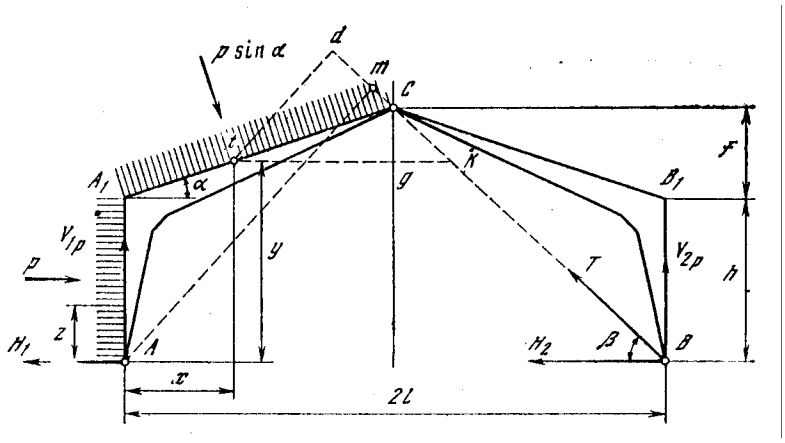


Abb. 3

3. Die Momente im Trägerabschnitt AA_1C, auf den Wind einwirkt. Im Punkt t mit den Koordinaten xy (Abb. 3) ist

$M_2 = Ttd - ((l - x)/\cos \alpha)^2 \, ½p \sin \alpha$, $\quad td = tk \sin \beta$,

$tk = tg + gk = (l - x) + (l - x)f/(f + h) = (l - x)(2f + h)/(f + h)$,

$$Ttd = \frac{H_2}{\cos\beta}(l - x)\frac{2f + h}{f + h}\sin\beta = H_2\frac{(l - x)}{l}(2f + h).$$

Folglich ist das Moment

$$M_2 = H_2\frac{(l - x)}{l}(2f + h) - p\frac{(l - x)^2}{2\cos^2\alpha}\sin\alpha. \tag{15}$$

M_{2max} ist bei 1 x/l.

$M_{2max} = H_2(2f + h) \cos^2 \alpha/p \sin \alpha$.

Die Größe M_2 ist stets positiv, und nach ihr wird der Wert der Momente vom Punkt A_1 bis C berechnet. Für die Senkrechte AA_1 ist

$$M_{2z} = -H_1 z - pz^2/2, \tag{16}$$

wobei z von h bis 0 variiert. Das Moment M_2 behält seinen positiven Wert bei allen Punkten von A bis C bei. $M_2 = 0$ bei $x = l$ (Punkt C) und $z = 0$ (Punkt A). Den größten Wert hat M_2 bei $x = 0$ und bei $z = h$ (Punkt A_1), wobei

$$M_{2A_1} = -H_2(2f + h) - \frac{pl^2}{2\cos^2\alpha}\sin\alpha = H_1 h - p\frac{h^2}{2} =$$

$$= \frac{p}{4(f + h)}\left[h^3 + 2fh^2 \sin\alpha + 3f^2 h \sin\alpha + 2fh^2 - l^2 h \sin\alpha\right], \tag{17}$$

4. Druckkräfte. In einem beliebigen Querschnitt (x, y) von der konstanten Last ist

$S = ql \sin \alpha + H \cos \alpha - qx \sin \alpha$ (von A bis C); (18)

von A bis A_1. wobei $\alpha = 90°$ und $x = 0$, gilt

$S = ql$. (19)

Aus einer einseitigen Belastung ergibt die Kraft T

$$S_p = T\cos(\beta - \alpha) = H_2(\cos\alpha + \operatorname{tg}\beta\sin\alpha \text{ (von } A_1 \text{ bis } C); \tag{20}$$

$$S_p = T\sin\beta = H_2\operatorname{tg}\beta \text{ (von } A \text{ bis } A_1). \tag{21}$$

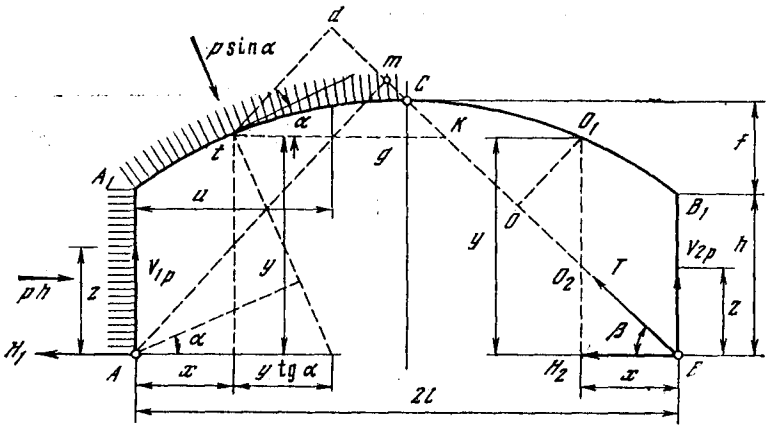


Abb. 4

5. Der Fall eines parabolischen Umrisses (Abb. 4). Die einseitige Belastung ist gleich $p\sin\alpha$ bis $\alpha = 45°$. Das Grundmoment ist

$$dm = p\sin\alpha\frac{dx}{\cos\alpha}(x + y\operatorname{tg}\alpha)\cos\alpha,$$

$$y = h + f\left(2\frac{x}{l} - \frac{x^2}{l^2}\right) = h + f\left[1 - \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2\right],$$

$$\operatorname{tg}\alpha = 2\frac{f}{l}\left(1 - \frac{x}{l}\right).$$

Wir nehmen $\sin\alpha = \operatorname{tg}\alpha$ an.

$$dm = x\operatorname{tg}\alpha dx + y\operatorname{tg}^2\alpha dx = 2\frac{f}{l}\left(x - \frac{x^2}{l}\right)dx + \left[h + f\left(2\frac{x}{l} - \frac{x^2}{l^2}\right)\right]4\frac{f^2}{l^2}\left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 dx =$$

$$= 2\frac{f}{l}\left(x - \frac{x^2}{l}\right)dx + \left[h + f(1 - \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2\right]x4\frac{f^2}{l^2}\left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 dx =$$

$$= 2\frac{f}{l}\left(x - \frac{x^2}{l}\right)dx + (h + f)4\frac{f^2}{l^2}\left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 dx - 4\frac{f^3}{l^2}\left(1 - \frac{x}{l}\right)^4 dx,$$

$$\frac{M}{P} = 2\frac{f}{l}\int_0^l \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3l} - \frac{2}{3}(h + f)f\left(1 - \frac{x}{l}\right)^3 + \frac{2}{5}f^2\left(1 - \frac{x}{l}\right)^5,$$

$$\frac{M}{P} = 2\frac{f}{l}\left[\frac{1}{6}l^3 + \frac{2}{3}hf + \frac{4}{15}f^2\right].$$

Der Winddruck auf den Trägerabschnitt A_1C erzeugt im Gelenk B die Reaktion T_1, deren Moment gleich

$T_1A_m = T_1 2l \sin\beta = H'_1 2l \operatorname{tg}\beta = H'_1\, 2(h + f)$,
und folglich ist

$$M = p\frac{2f}{l}\left[\frac{1}{6}l^2 + \frac{2}{3}hf + \frac{4}{15}f^2\right] = H'_1 2(h+f),$$

woraus $H'_1 = \dfrac{p}{(h+f)}\left[\tfrac{1}{6}fl + \tfrac{2}{3}\dfrac{hf^2}{l} + \tfrac{4}{15}\dfrac{f^3}{l}\right]$.

Das Moment aus dem Winddruck auf den senkrechten Trägerabschnitt AA_1 ist gleich $ph^2/2 = H'_2\, 2l \operatorname{tg}\beta = H'_2\, 2(h + f)$, woraus $H'_2 = ph^2/4(h + f) = [p/(h + f)](h^2/4)$.

Die Horizontalreaktion der Stütze B ist

$$H_2 = H'_1 + H'_2 = \frac{p}{h+1}\left(\tfrac{1}{4}h^2 + \tfrac{1}{6}fl + \tfrac{2}{3}h\frac{f^2}{l} + \tfrac{4}{15}\frac{f^3}{l}\right). \tag{22}$$

Das Moment der äußeren Kräfte im Trägerabschnitt CB_1 ist gleich $T \times 00_1$, wobei $00_1 = 0_10_2 \cos\beta = (y - x(f + h)/l) \cos\beta$ und $T = H_2/\cos\beta$. Wir setzen anstelle von T und 00_1 deren Werte in den Ausdruck des Moments ein und erhalten das Moment des unbelasteten Trägerabschnitts von B bis C

$$M_1 = -H_2\left(y - \frac{f+h}{l}x\right) = -H_2\left(h + f\left(2\frac{x}{l} - \frac{x^2}{l^2}\right) - \frac{f+h}{l}x\right)$$

und schließlich

$$M_1 = -H_2\,(h + fx/l)(1 - x/l). \tag{23}$$

Das Moment des senkrechten Trägerabschnitts B_1B ist $M_{1z} = -H_{2z}$, wobei z von 0 (Punkt B) bis h (Punkt B_1) variiert.

Die Horizontalkomponente der Windeinwirkung auf den oberen Trägergurt A_1C ist gleich $p \sin^2\alpha\, dx/\cos\alpha = p \operatorname{tg}^2\alpha dx$. Wir wählen das Integral aus dem Ausdruck $p \operatorname{tg}^2\alpha dx$ innerhalb von 0 bis l und erhalten die Horizontalgesamtkraft

$$\int_0^l p\operatorname{tg}^2\alpha dx = 4\frac{f^2}{l}p\int_0^l \frac{1}{l}\left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 dx = \tfrac{4}{3}p\frac{f^2}{l}.$$

Die Horizontalkraft auf die senkrechte Wand ist gleich ph. Folglich ist die Horizontalreaktion der Stütze A

$$H_1 = ph + \tfrac{1}{3}pf^2/l - H_2. \tag{24}$$

Die Vertikalreaktion der Stütze B ist $V_{2p} = T \sin\beta = H_2 \operatorname{tg}\beta$, oder nach Gleichung (22)

$$V_{2p} = \frac{p}{l}\left(\tfrac{1}{4}h^2 + \tfrac{1}{6}fl + \tfrac{2}{3}h\frac{f^2}{l} + \tfrac{4}{15}\frac{f^3}{l}\right)$$

bzw.

$$V_{2p} = H_2(h + f)/l. \tag{25}$$

Die Vertikalkomponente des Windes auf A_1C ist gleich

$$\sum p\sin\alpha\frac{dx}{\cos\alpha}\cos\alpha = \sum p\operatorname{tg}\alpha dx = \int_0^l p2\frac{f}{l}\left(1 - \frac{x}{l}\right)dx = p2f\int_0^l \frac{1}{l}\left(1 - \frac{x}{l}\right)dx = pf.$$

Die Vertikalreaktion der Stütze A ist

$$V_{1p} = pf - V_{2p}. \tag{26}$$

Das Biegemoment auf den Trägerabschnitt A_1C bezüglich des Punktes t ist

$$M_2 = Ttd - \int_x^l p \sin\alpha \frac{du}{\cos\alpha}(u - x),$$

wobei

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \mathrm{tg}\alpha = 2\frac{f}{l}\left(1 - \frac{u}{l}\right),$$

$$M^2 = Ttd - 2\frac{fp}{l}\left(\frac{1}{6}l^2 - \frac{x^3}{6l} + \frac{x^2}{2} - \frac{xl}{2}\right) = Tdt - 2\frac{f}{l}p\frac{(l-x)^2}{6l},$$

$$td = tk\sin\beta = l\left(1 - \frac{x}{l}\right)\left[1 + \frac{1}{f+h}\left(1 - \frac{x}{l}\right)\right]\sin\beta,$$

aber

$$Ttd = H_2\frac{1}{\cos\beta}td;$$

und folglich ist

$$M_2 = H_2(f+h)\left(1 - \frac{x}{l}\right)\left[1 + \frac{f}{f+h}\left(1 - \frac{x}{l}\right)\right] - 2\frac{fp}{l}\frac{(l-x)^3}{6l},$$

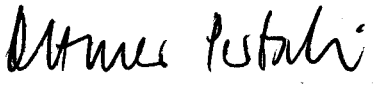
bzw.

$$M_2 = H_2(f+h)\left(1 - \frac{x}{l}\right)\left[1 + \frac{f}{f+h}\left(1 - \frac{x}{l}\right)\right] - \frac{fl}{3}p\left(1 - \frac{x}{l}\right)^3. \tag{27}$$

Die Schubgröße H_2 wird nach Gleichung (25) bestimmt.

Stuttgart, den 26. Februar 2003

Übersetzt von



(Ottmar Pertschi)
Dipl.-Übersetzer