Numerische Methoden mittels eigentlicher Bewegung in der Geometrischen Algebra

Von der Fakultät Energie-, Verfahrens- und Biotechnik der Universität Stuttgart zur Erlangung der Würde eines Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.) genehmigte Abhandlung

Vorgelegt von
Dipl.-Ing. Florian S. H. Seybold
aus Crailsheim

Hauptberichter: Prof. Dr.-Ing. Dr. h.c. Dr. h.c. Michael M. Resch
Mitberichter: Prof. Dr. rer. nat. Siegfried Schmauder
Tag der mündlichen Prüfung: 31. Juli 2015
Höchstleistungsrechenzentrum Stuttgart
Universität Stuttgart
2015

Inhaltsverzeichnis

I. Geometrische Algebra **23**

1. Konstruktion **25**
1.1. Einleitung 25
1.2. Mengensystem 25
1.3. Raum 26
1.4. Vorzeichenfunktion 28
1.5. Geometrisches Produkt 32

2. Graduierung **35**
2.1. Graduierte Untervektorräume 35
2.2. Gerade Unteralgebra 37
2.3. Dimension 38
2.4. Gradoperator 39
2.5. Skalar 40
2.6. Basen 41

3. Teilprodukte **43**
3.1. Äußeres Produkt 43
3.2. Kontraktion 45
3.3. Inneres Produkt 48

4. Weitere Produkte **51**
4.1. Kommutatorprodukt 51
4.2. Skalarprodukt 53

5. Multivektoranalysis **55**
5.1. Differentialrechnung 55
5.2. Lineare Abbildungen 57
5.3. Exponentialfunktion 60

6. Dualität **61**
6.1. Hodge-Dualoperator 61
6.2. Metrisch neutraler Dualoperator 63
6.3. Durchschnittsoperator 65

7. Vektor, Versor und Spat **67**
7.1. Vektor . . . 67
7.1.1. Äußeres Produkt . . . 67
7.1.2. Kontraktion und inneres Produkt . . . 67
7.1.3. Geometrisches Produkt . . . 69
7.2. Versor . . . 71
7.3. Spat . . . 76

8. Vektorraum **83**
8.1. Untervektorraum . . . 83
8.2. Orthogonale Projektion . . . 87
8.3. Sandwichprodukt . . . 90
8.4. Orthogonale Spiegelung . . . 91

9. Konformes Modell **93**
9.1. Horosphäre . . . 93
9.2. Homöomorphismus . . . 94
9.3. Transformationen . . . 98

II. Implementierung **101**

10. Multivektor **103**
10.1. Darstellung von Mengen . . . 103
10.2. Ablage im Speicher . . . 104

11. Vorzeichenfunktion **107**
11.1. Einleitung . . . 107
11.2. Homomorphismus . . . 107
11.3. Implementierung nach Definition der Vorzeichenfunktion . . . 108
11.4. Implementierung nach Axiomen des Geometrischen Produktes . . . 108
11.5. Implementierung nach Axiomen der Vorzeichenfunktion . . . 110
11.6. Laufzeitvergleiche . . . 111

12. Geometrisches Produkt **115**
12.1. Serielle Implementierung . . . 115
12.2. Vektorisierung des Geometrischen Produktes . . . 116
12.2.1. Einleitung . . . 116
12.2.2. Vektorregisteroperationen . . . 116
12.2.3. Geometrisches Produkt und Koordinatenpermutation . . . 117
12.2.4. Algorithmus . . . 119
12.2.5. Gerade Geometrische Algebra . . . 122
12.2.6. Nullvektor . . . 122
12.2.7. Laufzeitvergleich . . . 123

III. Anwendung in der Robotik **127**

13. Eigentliche Bewegung **129**
13.1. Einleitung . . . 129
13.2. Matrizenalgebra . . . 129
13.2.1. Transformationen . . . 129
13.2.2. Schraubenmechanik . . . 130
13.3. Versoralgebra . . . 132
13.3.1. Transformationen . . . 132
13.3.2. Schraubenmechanik . . . 133

14. Schraubenmechanik in der Robotik **135**
14.1. Einleitung . . . 135
14.2. Denavit-Hartenberg-Parametrisierung . . . 135
14.3. Schrauben-Jacobi-Matrix einer seriellen Kinematik . . . 137

15. Laufzeitvergleich **139**
15.1. Inverse Kinematik Algorithmen . . . 139
15.2. Implementierung . . . 141
15.3. Testumgebung . . . 142
15.4. Ergebnisse . . . 142
15.4.1. Numerische Eigenschaft . . . 142
15.4.2. Laufzeitvergleich . . . 142

16. Zusammenfassung und Ausblick **145**

A. Weitere Eigenschaften der Geometrischen Algebra **151**
A.1. Gerade Unteralgebra Isomorphismus . . . 151
A.2. Formalisierung der „index set method“ . . . 153
A.3. Nützliche Identitäten . . . 154

B. Weitere Modelle der Geometrischen Algebra **159**
B.1. Komplexe Geometrische Algebra . . . 159
B.2. Standardraummodell . . . 160
B.3. Homogenes Modell . . . 162

C. Implementierung der dualen Quaternionen mit AVX-Operationen **167**

Symbolverzeichnis

α	Vorzeichenfunktion
$*$	Skalarprodukt
$\cap$	Durchschnitt.
$\cdot$	Inneres Produkt
det	Determinante.
$\emptyset$	Leere Menge
exp	Exponentialfunktion.
$\frac{\partial}{\partial X_U}$	Partielle Ableitung nach X_U.
$\langle\ \rangle_k$	Gradoperator auf graduierten Untervektorraum des Grades k
$\rfloor$	Linkskontraktion
∇	Nabla-Operator.
∂_A	Ableitung in Richtung A.
$\lfloor$	Rechtskontraktion
$\star$	Hodge-Dualoperator.
$\times$	Kommutatorprodukt
$\triangle$	Symmetrische Differenz
$\vee$	Durchschnittsoperator.
$\wedge$	Konjunktion in der Logik
$\wedge$	Äußeres Produkt
*	Metrisch neutraler Dualoperator.
†	Reverse.
$^\perp$	Senkrechtes Komplement.

P_A	Zu Spat A orthogonale Projektion.
S_A	Zu Spat A orthogonale Spiegelung.
e_U	Standardbasismultivektor mit Index $U \in \mathcal{P}(N)$
$\mathcal{G}$	Geometrische Algebra
$\mathcal{G}^k$	Graduierter Untervektorraum des Grades k einer Geometrischen Algebra $\mathcal{G}$
$\mathcal{G}_{p,q}$	Geometrischen Algebra mit Signatur (p, q)
λ	Reelle Zahl (Skalar)
$\mathcal{L}(B)$	Lineare Hülle von B.
N	Grundmenge
n	Grunddimension
$\mathcal{P}$	Potenzmenge
$\mathcal{P}^k$	Graduierte Potenzmenge des Grades k
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen

Zusammenfassung

Deutsch

In der Modellierung und Simulation von Maschinen, zum Beispiel für eine numerische Steuerung von Industrierobotern, ist ein wichtiger Aspekt die Parametrisierung von eigentlicher Bewegung, sowie deren effiziente Verknüpfung auf heutigen Prozessorarchitekturen. Ein vielversprechendes Werkzeug zur Parametrisierung von Bewegung scheint die Geometrische Algebra zu sein. Übliche Definitionen der Geometrischen Algebra basieren auf einem Axiomensystem für das Geometrische Produkt. Ohne Weiteres ist eine Herleitung von diesem Axiomensystem zu einer expliziten Definition des Produktes als Summe von Koordinatenmultiplikationen nur teilweise möglich. Übliche Implementierungen des Geometrischen Produktes basieren auf solchen teilweise expliziten Definitionen; sie beachten die Struktur des Geometrischen Produktes nicht vollständig.
Im ersten Teil dieser Arbeit wird die Geometrische Algebra anhand einer neuartigen Konstruktion eingeführt, die das Geometrische Produkt vollständig explizit definiert. Es werden die Eigenschaften der Geometrischen Algebra diskutiert, mit dem Ziel, Bewegung in der Geometrischen Algebra parametrisieren und verknüpfen zu können.
Im zweiten Teil wird aus der neuartigen Konstruktion der Geometrischen Algebra eine Vektorisierungsstragie entwickelt, die bei Verwendung bestimmter Koordinatenpermutationen auf heutigen SIMD-Prozessorarchitekturen implementiert werden kann. Ferner wird eine effiziente Möglichkeit der Vorzeichenauswertung von Basisvektorprodukten beschrieben.
Der dritte Teil behandelt als Anwendungsbeispiel das Lösen der inversen Kinematik bei Industrierobotern. Es werden Vorteile bezüglich des Laufzeitverhaltens auf modernen SIMD-Prozessorarchitekturen bei der Verwendung der hier beschriebenen Vektorisierungsstrategie des Geometrischen Produktes gegenüber der Matrizenalgebra gezeigt.

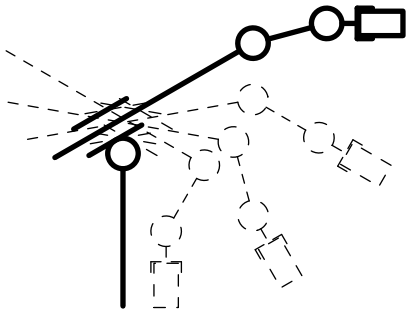
English

When modelling or simulating machines, e.g. for a numerical control of industrial robots, there is the important aspect of parametrising rigid motions, as well as composing them efficiently on modern processor architectures. Geometric Algebra seems to be a promising tool for parametrising motion. Common definitions of Geometric Algebra are based on an axiomatic system for the Geometric Product. Just like that, the derivation from this axiomatic system to an explicit definition of the product as a sum of coordinate multiplications is only partially possible. Common implementations of the geometric product are based on such partially explicit definitions; they do not fully consider the structure of the Geometric Product.
In the first part of this thesis, Geometric Algebra will be introduced by a novel construction, which defines the Geometric Product in a totally explicit manner. Properties of the Geometirc Algebra are discussed, with the aim of parametrising and composing motion within Geometric Algebra.
In the second part, a vectorisation strategy is developed from the novel construction of the Geometric Algebra, which can be implemented on modern SIMD processor architectures by applying certain coordinate permutations. Furthermore, an efficient alternative for evaluating the sign of base vector products is described.
The third part covers as a sample application the solution of inverse kinematics for industrial robots. Concerning runtime behaviour on modern SIMD processor architectures, advantages of using the vectorisation strategy for the Geometric Product described here as opposed to matrix algebra will be shown.

Motivation

Bewegung

Beispiel Industrieroboter



Der folgende Abschnitt gibt eine Einführung in die Darstellung und Verknüpfung von Bewegung. Begleitend dazu zeigt die Illustration auf der rechten Seite als Beispiel einen praxisfernen, aber einfachen Industrieroboter. Dieser Roboter bewegt sich im zweidimensionalen Anschauungsraum und besteht aus einem Verbund von starren Gliedern und beweglichen Gelenken, die hintereinander angeordnet sind.
In diesem Beispiel sind drei Gelenke rotatorisch, ein Gelenk ist translatorisch. Ändert sich die Stellung eines Gelenks, bewegt sich also ein Gelenk, überträgt sich diese Bewegung auf alle Glieder und Gelenke dahinter. Die Bewegungen der Gelenke müssen also verknüpft werden.
Die Stellung eines Gelenks kann in diesem Beispiel mit jeweils einer Veränderlichen beschrieben werden. Dadurch besitzt die Kinematik dieses Roboters vier Freiheitsgrade. Die allgemeine Bewegung im zweidimensionalen Raum besitzt drei Freiheitsgrade; zwei translatorische und einen rotatorischen. Also ist die Kinematik dieses Roboters redundant. Das bedeutet im Allgemeinen, dass die Bewegung des letzten Gliedes, also des Greifers in diesem Beispiel, durch unendliche viele verschiedene Stellungen der vier Gelenke erreicht werden kann.
Roboter kommen in der Industrie in verschiedenen Bereichen zum Einsatz, sei es als Schweiß-, Klebe-, Lackier-, Montage- oder Handhabungsroboter. Typische Industrieroboter arbeiten im dreidimensionalen Raum und bestehen aus sechs Gelenken; ihre Kinematiken sind nicht redundant. Ihre Konstruktion lässt in der Praxis oft eine geschlossene Lösung der inversen Kinematik zu [23]. Das heißt, dass Steuerungen von Industrierobotern die nötigen Gelenkstellungen direkt bestimmen können, also ohne den Einsatz iterativer Näherungsverfahren, um eine vorgegebene Bewegung des Roboters durchzuführen.
Ein aktueller Trend sind kinematisch redundante Roboter [23]. Für allgemeine Lösungsansätze inverser Kinematik bei solchen Robotern bieten sich numerische Algorithmen an, die sich der Lösung iterativ nähern. Mit zunehmender Redundanz der Kinematik erhöht sich jedoch auch der rechnerische Aufwand dieser numerischen Algorithmen. Dies wirkt sich hinderlich auf die Redundanz der Kinematik von Robotern aus, besonders in Echtzeitanwendungen [29], [9].

Numerische Algorithmen zur Lösung inverser Kinematik basieren auf der Modellierung der Kinematik des Roboters. Ein Modell einer Kinematik ist aus der Darstellung und Verknüpfung von Bewegungen aufgebaut.

Bezüglich der mathematischen Beschreibung und numerischen Steuerung von Robotern sind unter anderen folgende drei Aspekte interessant:

- Die mathematische Darstellung und Verknüpfung von Bewegung,
- die effiziente Implementierung der Verknüpfung,
- die Anwendung der Bewegung in numerischen Algorithmen.

In diese drei Aspekte ist auch die vorliegende Arbeit gegliedert. Auf den Aufbau der Arbeit wird in einem späteren Abschnitt in diesem Kapitel näher eingegangen.

Die oben gelisteten Aspekte bezüglich der Bewegung sind prinzipiell für jede Maschine interessant, die durch Darstellung und Verknüpfung von Bewegungen modelliert und berechnet wird; der Industrieroboter reiht sich in die Liste solcher Maschinen ein.
Weiter wird die Bewegung nicht nur zur Modellierung von Maschinen verwendet, sondern auch von wesentlich anderen Systemen. So wird die Darstellung und Verknüpfung von Bewegung zur Modellierung von Systemen in der Simulation eingesetzt, zum Beispiel in der Mehrkörpersimulation, der Partikelsimulation oder der Molekulardynamiksimulation. Bei Simulationen ist neben der Betrachtung der Laufzeit auch der Energieverbrauch der Simulation interessant.

Mathematische Definition der Bewegung

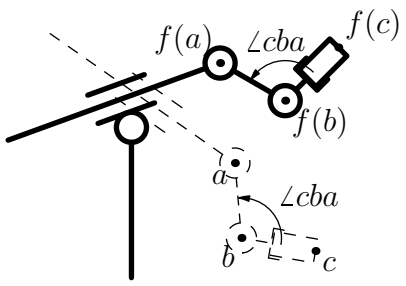
In diesem Kapitel werden die Begriffe Koordinatenraum, Anschauungsraum oder auch euklidischer Vektorraum synonym verwendet.
Sei mit der Dimension $n \in \mathbb{N}$ der euklidische Vektorraum $\mathbb{R}^n$ erklärt. Sei zwischen zwei Vektoren $x = (x_i)_{1 \leq i \leq n}, y = (y_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^n$ das Standardskalarprodukt

$$\begin{aligned} &\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \\ &(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \end{aligned}$$

erklärt und damit der Abstand

$$\begin{aligned} &\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \\ &(x, y) \mapsto \overline{xy} = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle}. \end{aligned}$$

Die *eigentliche Bewegung* im euklidischen Vektorraum $\mathbb{R}^n$ ist als bijektive Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definiert, die abstandserhaltend und orientierungserhaltend ist, also



1. $\overline{f(x)f(y)} = \overline{xy}\ \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n$,
2. $\det f = +1$

erfüllt. Aus dieser Definition lässt sich noch die Eigenschaft der Winkeltreue für die *eigentlichen Bewegung* ableiten.
Diese Eigenschaften sind rechts am schon oben eingeführten Beispiel des Industrieroboters illustriert, der im zweidimensionalen Anschauungsraum arbeitet. In der Illustration bewegt sich nur das rotatorische Gelenk, das auf dem unteren senkrechten Glied des Roboters sitzt.

Die Menge der *eigentlichen Bewegungen* ist ein Teil der Menge der *Bewegungen*. Eine *Bewegung* kann auch eine Spiegelung sein; bei der Definition der *Bewegung* als Funktion $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ wird nur $\overline{g(x)g(y)} = \overline{xy}\ \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n$ verlangt. Eine *Bewegung* ist im Allgemeinen nicht orientierungserhaltend.

Parametrisierung eigentlicher Bewegung

Unter Parametrisierung eigentlicher Bewegung ist hier die Erklärung einer Menge $\mathcal{M}$ gemeint, aus der ein Element $M \in \mathcal{M}$ in einem $\mathbb{N} \ni n$-dimensionalen euklidischen Raum die parametrisierte eigentliche Bewegung $f_M : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definiert, nämlich mit einer Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n \times \mathcal{M} &\to \mathbb{R}^n, \\ (x, M) &\mapsto f_M(x). \end{aligned}$$

Eigentliche Bewegung kann in der Mathematik auf viele Arten parametrisiert werden. Dabei ist ein wichtiger Aspekt die Möglichkeit der Verknüpfung von Bewegung durch Verknüpfung der entsprechenden Parameter in einer dazu geeigneten Algebra. Nicht alle übliche Arten der Parametrisierung von Bewegung sind Teil einer geeigneten Algebra.
Im Folgenden werden mögliche Parametrisierungen eigentlicher Bewegung im dreidimensionalen Anschauungsraum gezeigt. Dies dient einem Überblick, die folgenden Einführungen der verschiedenen Parametrisierungen sind im Allgemeinen jedoch nicht vollständig.

Ortsvektor-Winkel-Paar Der Ortsvektor $t \in \mathbb{R}^3$ parametrisiert eine Translation, die Winkel $(\alpha_i)_{i=1}^3 \in \mathbb{R}^3$ parametrisieren eine Rotation. Zusammen parametrisiert das Paar

$$M = \left(t, (\alpha_i)_{i=1}^3\right) \in \mathcal{M} = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$$

eine Bewegung.
Die Winkel $(\alpha_i)_{i=1}^3$ beschreiben anhand einer bestimmten Konvention die Drehung um bestimmte Achsen in einer bestimmten Reihenfolge. Beispiele solcher Winkel mit unterschiedlichen Konventionen sind die „Euler-Winkel“ oder die „Kardan-Winkel“.
Am Beispiel mit Kardan-Winkel nach Schiehlen und Eberhard [24] ist die parametrisierte Bewegung mit den Gleichungen $s_i = \sin\alpha_i, c_i = \cos\alpha_i \; \forall\, i \in \{1,2,3\}$ als

$$\begin{aligned} f_M \colon \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^3, \\ x &\mapsto \begin{bmatrix} c_2c_3 & -c_2s_3 & s_2 \\ c_1s_3 + s_1s_2c_3 & c_1c_3 - s_1s_2s_3 & -s_1c_2 \\ s_1s_3 - c_1s_2c_3 & s_1c_3 + c_1s_2s_3 & c_1c_2 \end{bmatrix} x + t \end{aligned}$$

definiert.
Die Winkel sind in keiner Algebra definiert, das Ortsvektor-Winkel-Paar zur Parametrisierung von Bewegung kann nicht direkt verknüpft werden.

Schraube Laut Michel Chasles [3] ist jede Bewegung eines starren Körpers durch die Translation entlang einer Geraden und der gleichzeitigen Rotation um diese Gerade darstellbar. Anschaulich entspricht diese Darstellung der Bewegung einer Schraube.
Zur Parametrisierung einer Gerade im dreidimensionalen Raum reichen vier reelle Zahlen aus. Für die Parametrisierung der Schraubenbewegung werden noch zusätzlich ein Abstand und ein Winkel benötigt, also insgesamt sechs reelle Zahlen. Die Parametrisierung von Schrauben kann in Elemente einer Algebra eingebettet werden, um entsprechende Operationen darauf ausführen zu können.
Auf die Schraubenbewegung und ihre Parametrisierung durch Elemente der Matrizenalgebra oder Geometrischen Algebra wird später in dieser Arbeit näher eingegangen. Auf beiden Algebren ist aber eine direkte Verknüpfung von Schrauben als Parametrisierung von Bewegung durch Operationen der Algebra nicht möglich.

Ortsvektor-Drehmatrix-Paar Eine Translation wird durch den Ortsvektor $t \in \mathbb{R}^3$ parametrisiert, eine Drehung durch die Rotationsmatrix $R \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, die bestimmte Eigenschaften besitzt. Damit parametrisiert das Ortsvektor-Drehmatrix-Paar

$$M = (t, R) \in \mathcal{M} \subset \left(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^{3\times 3}\right)$$

eine Bewegung, die durch

$$\begin{aligned} f_M \colon \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^3, \\ x &\mapsto Rx + t \end{aligned}$$

definiert ist. Wegen

$$R_1(R_2x + t_2) + t_1 = (R_1R_2)x + (R_1t_2 + t_1) \;\forall\, (t_1, R_1), (t_2, R_2) \in \left(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^{3\times 3}\right), x \in \mathbb{R}^3$$

verknüpft die Abbildung

$$\begin{aligned}\left(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^{3\times 3}\right) \times \left(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^{3\times 3}\right) &\to \left(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^{3\times 3}\right), \\ ((t_1, R_1), (t_2, R_2)) &\mapsto (t_1 + R_1 t_2, R_1 R_2)\end{aligned}$$

zwei Ortsvektor-Drehmatrix-Paare. Die verknüpfende Abbildung ist durch die Anwendung von Vektoraddition und Matrizenmultiplikation definiert.

Ortsvektor-Quaternion-Paar Wie in der Darstellung von Bewegung durch ein Ortsvektor-Drehmatrix-Paar beschreibt in der Darstellung durch ein Ortsvektor-Quaternion-Paar der Ortsvektor $t \in \mathbb{R}^3$ eine Translation. Zur Beschreibung einer Rotation wird eine Quaternion $q \in \mathbb{H}$ aus der Quaternionenalgebra $\mathbb{H}$ verwendet. Somit beschreibt das Ortsvektor-Quaternion-Paar

$$M = (t, q) \in \mathcal{M} \subset \left(\mathbb{R}^3, \mathbb{H}\right)$$

eine Bewegung. Mit der Einbettung

$$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{H}, x \mapsto (0, x),$$

dem Quaternionenprodukt und der Konjugierten $\bar{q}$ des Quaternions $q \in \mathbb{H}$ ist die Bewegung durch

$$\begin{aligned}f_M \colon \mathbb{H} &\to \mathbb{H}, \\ x &\mapsto q x \bar{q} + t.\end{aligned}$$

definiert. Wegen

$$\begin{aligned}q_1(q_2 x \bar{q}_2 + t_2)\bar{q}_1 + t_1 &= q_1 q_2 x \bar{q}_2 \bar{q}_1 + q_1 t_2 \bar{q}_1 + t_1 \\ &= q_1 q_2 x \overline{q_1 q_2} + q_1 t_2 \bar{q}_1 + t_1 \ \forall\, (t_1, q_1), (t_2, q_2) \in \left(\mathbb{R}^3, \mathbb{H}\right), x \in \mathbb{R}^3\end{aligned}$$

können zwei Ortsvektor-Quaternion-Paare durch

$$\begin{aligned}\left(\mathbb{R}^3, \mathbb{H}\right) \times \left(\mathbb{R}^3, \mathbb{H}\right) &\to \left(\mathbb{R}^3, \mathbb{H}\right), \\ ((t_1, q_1), (t_2, q_2)) &\mapsto (t_1 + q_1 t_2 \bar{q}_1, q_1 q_2)\end{aligned}$$

verknüpft werden. Die verknüpfende Abbildung ist durch die Anwendung von Vektoraddition und Quaternionenmultiplikation definiert.
Die Menge der Quaternionen $\mathbb{H}$ bildet mit der Quaternionenmultiplikation die Quaternionenalgebra. Die Quaternionenalgebra $\mathbb{H}$ ist isomorph zu der positiven Unteralgebra der Geometrischen Algebra $\mathcal{G}^+_{3,0}$, die wir später erklären.

Abbildungsmatrix homogener Koordinaten Mit dem Ortsvektor $t \in \mathbb{R}^3$ zur Beschreibung einer Translation und der Drehmatrix $\mathbb{R}^{3\times 3}$ zur Beschreibung einer Rotation kann die Abbildungsmatrix homogener Koordinaten

$$M = \begin{bmatrix} R & t \\ (0,0,0)^T & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M} \subset \mathbb{R}^{4\times 4}$$

zur Parametrisierung von Bewegung konstruiert werden. Zur Definition der Bewegung führt man die homogenen Koordinaten als Untermenge des Vektorraums $\mathbb{R}^4$ ein und erklärt die Einbettung

$$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4, x \mapsto (x, 1)$$

der Punkte im $\mathbb{R}^3$ in die homogenen Koordinaten. Die Bewegung ist damit als Matrix-Vektor-Multiplikation

$$f_M \colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4, x \mapsto Mx$$

definiert. Die Matrizenmultiplikation

$$\mathbb{R}^{4\times 4} \times \mathbb{R}^{4\times 4} \to \mathbb{R}^{4\times 4}, (M_1, M_2) \mapsto M_1 M_2$$

verknüpft zwei Abbildungsmatrizen homogener Koordinaten.

Duale Quaternion Eine duale Quaternion ist ein Paar aus Quaternionen

$$M = (q, r) \in \mathcal{M} \subset \mathbb{H}^2.$$

Mit dem Produkt

$$\begin{gathered} \mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2 \to \mathbb{H}^2, \\ (Q_1, Q_2) = ((q_1, r_1), (q_2, r_2)) \mapsto Q_1 Q_2 = (q_1 q_2, q_1 r_2 + r_1 q_2) \end{gathered}$$

werden die dualen Quaternionen zur Algebra. Mit der Einbettung der Punkte im $\mathbb{R}^3$ in die dualen Quaternionen

$$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{H}^2, x \mapsto ((1,0,0,0), (x, 0))$$

ist die parametrisierte Bewegung mit der Konjugierten $\bar{Q} = (\bar{q}, -\bar{r})$ der dualen Quaternion $Q = (q, r) \in \mathbb{H}^2$ als

$$f_M \colon \mathbb{H}^2 \to \mathbb{H}^2, x \mapsto Qx\bar{Q}$$

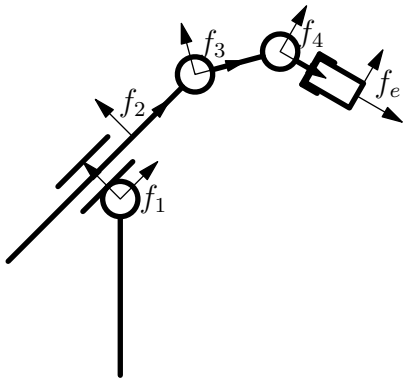
definiert. Wegen $\overline{Q_1 Q_2} = \bar{Q}_2 \bar{Q}_1 \; \forall\, Q_1, Q_2 \in \mathbb{H}^2$ verknüpft das Produkt

$$\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2 \to \mathbb{H}^2, (Q_1, Q_2) \mapsto Q_1 Q_2$$

zwei duale Quaternionen.
Die Algebra der dualen Quaternionen ist isomorph zur Unteralgebra der Geometrischen Algebra $\mathcal{H}$, die später in dieser Arbeit vorgestellt wird.

Verknüpfung am Beispiel Industrieroboter

Die Illustration auf der rechten Seite zeigt das von oben bekannte Beispiel eines Industrieroboters, dessen Parametrisierung und Verknüpfung von Bewegung im Folgenden beschrieben wird. Der Roboter besteht aus einem translatorischen und drei rotatorischen Gelenken und arbeitet im euklidischen Raum $\mathbb{R}^2$.
Seien die Stellungen der vier Gelenke $w_1, \ldots, w_4 \in \mathbb{R}$ erklärt. Die lokalen Bewegungen



$$\begin{aligned} f_i &: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \\ &(x, w_i) \mapsto f_i(x) \; \forall\, i \in \{1, \ldots, 4\} \end{aligned}$$

seien von der jeweiligen Gelenkstellung abhängig und beschreiben jeweils die Bewegung der entsprechend als starr angenommenen Kette der Glieder und Gelenke dahinter.
Die Bewegung des Endeffektors $f_e : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ kann als Verknüpfung der Bewegungen definiert werden, die von der jeweiligen Gelenkstellung abhängen, und hängt damit von allen vier Gelenkstellungen ab:

$$f_e(w_1, \ldots, w_4) = f_1(w_1) \circ \ldots \circ f_4(w_4).$$

Sei $\mathcal{M}$ eine Gruppe, deren Elemente Bewegungen im euklidischen Raum $\mathbb{R}^2$ parametrisieren und durch Multiplikation der Gruppe verknüpft sind. Beispiele solcher Gruppen sind im euklidischen Raum $\mathbb{R}^3$ die Abbildungsmatrizen homogener Koordinaten $\mathbb{R}^{4\times 4}$ oder die dualen Quaternionen $\mathbb{H}^2$ zur Parametrisierung von Bewegung.
Parametrisiere das Element $M_i(w_i) \in \mathcal{M}$ die Bewegung an dem jeweiligen Gelenk in Abhängigkeit von der jeweiligen Stellung w_i für $i \in \{1, \ldots, 4\}$. Dann parametrisiert das Element

$$M_e(w_1, \ldots, w_4) = M_1(w_1) \ldots M_4(w_4)$$

die Bewegung des Endeffektors in Abhängigkeit aller Gelenkstellungen $w_1, \ldots, w_4$.

Implementierung der Verknüpfung von Bewegung

Die effiziente Implementierung der Verknüpfung von Bewegung in einem Rechnerprogramm unter Verwendung einer geeigneten Parametrisierung ist im Allgemeinen für jede Anwendung nützlich, die numerische Algorithmen auf der Basis der Beschreibung von Bewegung einsetzen.
In der vorliegenden Arbeit wird die Geometrische Algebra zur Beschreibung von Bewegung ausgewählt. Im Anwendungsteil der vorliegenden Arbeit werden Matrizenalgebra und Geometrische Algebra bezüglich der Laufzeit auf modernen Prozessorarchitekturen verglichen.

Geometrische Algebra

Einleitung

Die Verwandtschaft von Algebren wie den komplexen Zahlen, den Quaternionen oder den dualen Quaternionen zur Clifford-Algebra [4] ist lange, aber nicht sonderlich bekannt. In neuer Zeit findet die Verwendung der Geometrischen Algebra, einer Clifford-Algebra über den reellen Zahlen, in ingenieurwissenschaftlichen Bereichen Aufmerksamkeit, nicht zuletzt wegen den Bemühungen von David Hestenes [18], [15] und seinen Mitstreitern.
Als Beispiele für moderne Einführungen in die Geometrischen Algebra seien die Standardwerke von David Hestenes und Garret Sobczyk [18] und [15] genannt. Für einen einfacheren Einstieg könnte ein Buch von Alan Macdonald [21] geeignet sein. Physiker könnten an der Einführung von Chris Doran und Anthony Lasenby [6] interessiert sein; in Computertechnik und Informatik versierte Leser vielleicht an Leo Dorst's, Daniel Fontijne's und Stephen Mann's [8] Werk. Weiter seien die Bücher von Christian Perwass [22] und Pertti Lounesto [20] erwähnt. Einführungen zur Infinitesimalrechnung und Differentialgeometrie in der Geometrischen Algebra geben Alan Macdonald [21] und John Snygg [28].

Im Folgenden wird die Geometrische Algebra auf eine Weise definiert, wie man sie in modernen Einführungen für Ingenieure, Informatiker und Physiker liest. Das heißt, dass das Geometrische Produkt durch ein Axiomensystem eingeführt wird. Weiter wird im Folgenden die Darstellung des Geometrischen Produktes als Summe von Koordinaten- und Basisvektormultiplikation gezeigt, die sich aus diesem Axiomensystem herleiten lässt.
Moderne Einführungen der Geometrischen Algebra geben zum Beispiel Hestenes und Sobczyk [18], Doran und Lasenby [6] oder Leo Dorst et al. [8].

Vektorraum

Sei das Paar $(p, q) \in {\mathbb{N}_0}^2$ definiert. Wir nennen das Paar (p, q) die Signatur der Geometrischen Algebra. Mit der Signatur ist die Grunddimension $n = p + q$ erklärt, sowie der Vektorraum $\mathbb{R}^n$. Anhand der Signatur sei das innere Produkt

$$\cdot : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},$$
$$(x, y) = ((x_i)_{i=1}^n, (y_i)_{i=1}^n) \mapsto x \cdot y = \sum_{i=1}^{n} \begin{cases} +x_i y_i & : i \leq p, \\ -x_i y_i & : i > p \end{cases}$$

definiert.

Seien die Tensorprodukte

$$T^k = \bigotimes_{i=1}^{k} \mathbb{R}^n \; \forall\, k \in \{1, \ldots, n\},$$

sowie $T^0 = \mathbb{R}$ erklärt, weiter die Tensorräume

$$J^k = \mathcal{L}\{v_1 \otimes \ldots \otimes v_k \mid \exists\, i, j \in \{1, \ldots, k\} \colon i \neq j \wedge v_i = v_j\} \;\forall\, k \in \{0, \ldots, n\},$$

wobei $J^k \subseteq T^k \;\forall\, k \in \{0, \ldots, n\}$.
Der k-graduierte Vektorraum ist als Quotientenraum

$$\bigwedge^k \mathbb{R}^n = T^k / J^k \;\forall\, k \in \{0, \ldots, n\}$$

definiert.
Der Vektorraum der Geometrischen Algebra ist die direkte Summe

$$\mathcal{G}_{p,q} = \bigoplus_{k=0}^{n} \bigwedge^k \mathbb{R}^n.$$

Axiomatische Definition des Geometrischen Produktes

Nach der Definition des Vektorraums der Geometrischen Algebra fehlt noch die Einführung eines Produktes darauf, damit die Geometrische Algebra ihrem Namen gerecht wird. Dieses Produkt wird Geometrisches Produkt genannt und üblicherweise durch folgendes Axiomensystem auf dem Vektorraum der Geometrischen Algebra $\mathcal{G}_{p,q}$ eingeführt:

1. $xx = x \cdot x \;\forall\, x \in \bigwedge^1 \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$,
2. $A(B + C) = AB + AC \;\forall A, B, C \in \mathcal{G}_{p,q}$,
3. $A(BC) = A(BC) \;\forall A, B, C \in \mathcal{G}_{p,q}$.

Um die Geometrische Algebra vollständig zu definieren, fehlt noch eine Verknüpfung des Geometrischen Produktes mit den graduierten Vektorräumen der Geometrischen Algebra. Dazu führen wir eine Basis $\{e_1, \ldots, e_n\}$ des Vektorraums $\mathbb{R}^n$ ein. Damit erklären wir

$$e_{i_1} \ldots e_{i_l} = e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_l} \;\forall\, l \in \{1, \ldots, n\} : 1 \leq i_1 < \ldots < i_l \leq n.$$

Koordinatenmultiplikation des Geometrischen Produktes

Sei $\{e_1, \ldots, e_n\}$ eine kanonische Basis des Vektorraums $\mathbb{R}^n$, so dass

$$e_i \cdot e_j = e_i e_j = 0 \;\forall i, j \in \{1, \ldots, n\} \colon i \neq j.$$

Mit den Elementen dieser Basis sei die kanonische Basis

$$B = \{e_{i_1} \ldots e_{i_l} \mid 1 \leq i_1 < \ldots < i_l \leq n \;\forall\, 0 \leq l \leq n\}$$

der Geometrischen Algebra $\mathcal{G}_{p,q}$ erklärt.
Durch die Polarisationsformel

$$x \cdot y = \frac{1}{2}\left((x+y)\cdot(x+y) - x\cdot x - y\cdot y\right) \;\; \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n$$

und dem Axiom $xx = x \cdot x \;\forall\, x \in \mathbb{R}^n$ gilt für alle kanonischen Basisvektoren e_i und e_j mit den Indize $i, j \in \{1, \ldots, n\} \colon i \neq j$

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2}\left((e_i + e_j)(e_i + e_j) - e_i e_i - e_j e_j\right) \\ &= e_i e_j + e_j e_i. \end{aligned}$$

Mit dem oben eingeführten Axiomensystem des Geometrischen Produktes können wir also das Geometrische Produkt auf der Basis $B \times B \to \pm B$ durch folgende Eigenschaften erklären:

1. $(e_i e_j) e_k = e_i (e_j e_k) = e_i e_j e_k$,
2. $e_i e_j = -e_j e_i \;\forall\, i, j \in \{1, \ldots, n\} \colon i \neq j$,
3. $e_i e_i = \begin{cases} +1 & : i \leq p \\ -1 & : i > p \end{cases} \;\forall\, i \in \{1, \ldots, n\}$.

Ein Vektor $A \in \mathcal{G}_{p,q}$ der Geometrischen Algebra $\mathcal{G}_{p,q}$ kann bezüglich der kanonischen Basis B als Koordinatenvektor

$$A = \left(A_{(i_1,\ldots,i_l)}\right)_{i_1<\ldots<i_l}^{0\leq l\leq n} = \sum_{i_1<\ldots<i_l}^{0\leq l\leq n} A_{(i_1,\ldots,i_l)} e_{i_1} \ldots e_{i_l}$$

erklärt werden.
Das allgemeine Geometrische Produkt kann damit als Summe von Koordinatenmultiplikationen

$$\begin{aligned} &\mathcal{G}_{p,q} \times \mathcal{G}_{p,q} \to \mathcal{G}_{p,q}, \\ &\quad (A, B) \mapsto AB = \sum_{i_1<\ldots<i_l}^{0\leq l\leq n} \sum_{j_1<\ldots<j_m}^{0\leq m\leq n} A_{(i_1,\ldots,i_l)} A_{(j_1,\ldots,j_m)}\, e_{i_1} \ldots e_{i_l} e_{j_1} \ldots e_{j_m} \end{aligned}$$

dargestellt werden.

Diese Darstellung des Geometrischen Produktes dient üblicherweise dessen Implementierung auf Rechnerarchitekturen. Arbeiten dazu gibt es von Leo Dorst [8] oder Dietmar Hildenbrand [19].
Ein Mangel dieser Darstellung ist dabei die implizite Beschreibung des Basisvektorproduktes anhand der oben gelisteten Eigenschaften. Dies führt auf die Idee einer vollständig expliziten Beschreibung des Basisvektorproduktes, wie er in der hier eingeführten neuartigen Konstruktion der Geometrischen Algebra umgesetzt wird. Vorteile dieser neuartigen Konstruktion bezüglich der effizienten Implementierung werden später in dieser Arbeit bei der Vorstellung einer Vektorisierungsstrategie für moderne Prozessorarchitekturen gezeigt.

Aufbau

Im ersten Teil dieser Arbeit wird die Geometrische Algebra ausführlich besprochen.
Die im ersten Kapitel eingeführte neuartige Konstruktion der Geometrischen Algebra definiert das Geometrische Produkt explizit als Summe von Koordinatenmultiplikationen und den entsprechenden Basisvektorprodukten. Die Konstruktion nützt die isomorphen Eigenschaften zwischen Geometrischen Algebren mit dem Geometrischen Produkt und Potenzmengen mit der symmetrischen Differenz aus.
Diese Definition und Besprechung der Geometrischen Algebra steht im Kontrast zu der von Hestenes propagierten koordinatenfreien Behandlung der Geometrischen Algebra. Für die Verwendung von Koordinaten benutzt Hestenes auch den Begriff „Coordinitis“ in seiner Publikation „Mathematical Viruses“ [14]. Jedoch wir in dieser Arbeit die Struktur der Summe von Koordinatenmultiplikationen innerhalb eines Geometrische Produktes diskutiert, um Erkenntnisse daraus bezüglich der Implementierung des Geometrischen Produktes zu verwenden.
In den darauf folgenden Kapiteln des ersten Teils wird die Graduierung der Geometrischen Algebra beschrieben, sowie weitere Produkte zu dem Geometrischen und es wird auf die Analysis eingegangen. Mit der Einführung von Vektor, Versor und Spaten als ausgezeichnete Elemente der Geometrischen Algebra wird auf die Beschreibung der Translation und Rotation von Punkten hingearbeitet, basierend auf Spiegelungen.
Zum Schluss des ersten Teils wird die konforme Geometrische Algebra besprochen, die die eigentlichen Bewegungen durch Versoren als Gruppe parametrisiert, mit dem Geometrischen Produkt als Gruppenoperation.

Im zweiten Teil wird auf bestehende Methoden der Implementierung der Geometrischen Algebra eingegangen. Dabei ist meist die Reduzierung der Koordinaten (dünnbesetzte Multivektoren) und damit die Minderung der Fließkommaoperationen ein Thema. Es werden Möglichkeiten der Implementierung der Vorzeichenfunktion gezeigt, auf welcher die Definition des Geometrischen Produktes basiert.
Weiter hinten im zweiten Teil wird eine Vektorisierungsstrategie des Geometrischen Produktes für heutige Prozessorarchitekturen vorgestellt. Die Vektorisierungsstrategie bedient sich dabei der Struktur der in dieser Arbeit eingeführten neuartigen Konstruktion der Geometrischen Algebra und basiert auf ausgezeichneten Permutationen von Koordinaten.

Im dritten Teil wird die Anwendung der Geometrischen Algebra in der inversen Kinematik mit der Anwendung der Matrizenalgebra verglichen. Dazu wird die in der Robotik verwendete Schraubenmechanik in der Matrizenalgebra und der Geometrischen Algebra eingeführt.
Dies wird zur Konstruktion einer Schrauben-Jacobi-Matrix benutzt, auf deren Basis ein numerisches Verfahren zur Bestimmung der inversen Kinematik vorgestellt wird. Es werden Implementierungen dieses numerischen Verfahrens mit Matrizenalgebra und Geometrischer Algebra, standardmäßig als auch mit der hier vorgestellten Vektorisierungsstrategie, bezüglich der Laufzeit und Rechenleistung verglichen.

Teil I.

Geometrische Algebra

1. Konstruktion

1.1. Einleitung

In diesem Kapitel wird zuerst eine Algebra über den reellen Zahlen definiert, nämlich die *Geometrische Algebra*, wie David Hestenes und Garret Sobczyk [18] sie getauft haben. Der Vektorraum der Geometrischen Algebra wird anhand einer Potenzmenge erklärt um auf die Struktur der multiplikativen Verknüpfung in der Geometrischen Algebra hinzuarbeiten, welche *Geometrisches Produkt* genannt wird. Anders als in modernen Einführungen wird hier die Geometrischen Algebra konstruiert, nicht durch Auflistung von Axiomen definiert. Dadurch liegt von Anfang an ein Augenmerk auf der Implementierung der Geometrischen Algebra, die anhand der hier vorgestellten Konstruktion gemacht werden kann. Dabei ist die Einführung einer *Vorzeichenfunktion* ein Merkmal der vorliegenden Arbeit.

1.2. Mengensystem

Definition 1.2.1 (Grunddimension)**.** Eine *Grunddimension* ist eine nichtnegative ganze Zahl $n \in \mathbb{N}_0$.

Definition 1.2.2 (Grundmenge)**.** Sei die Grunddimension $n \in \mathbb{N}_0$ erklärt.
Wir nennen $N = \{1, \ldots, n\}$ die *Grundmenge* bezüglich der Grunddimension n.

Definition 1.2.3 (Potenzmenge)**.** Ausgehend von der Grunddimension $n \in \mathbb{N}_0$ und der Grundmenge $N = \{1, \ldots, n\}$ ist die *Potenzmenge* als

$$\mathcal{P}(N) = \{U \mid U \subseteq N\}$$

definiert.

Korollar 1.2.1. *Die Potenzmenge $\mathcal{P}(N)$ ist endlich und besteht aus $|\mathcal{P}(N)| = 2^n$ Elementen.*

Definition 1.2.4 (Symmetrische Differenz)**.** Mit der Grunddimension $n \in \mathbb{N}_0$, der Grundmenge $N = \{1, \ldots, n\}$ und der Potenzmenge $\mathcal{P}(N)$ ist die *symmetrische Differenz* als

$$\begin{aligned} \triangle \colon \mathcal{P}(N) \times \mathcal{P}(N) &\to \mathcal{P}(N), \\ (U, V) &\mapsto (U \setminus V) \cup (V \setminus U) \end{aligned} \tag{1.1}$$

definiert.

Korollar 1.2.2 (Kommutative Gruppe)**.** *Das Paar* $(\mathcal{P}(N), \triangle)$ *bildet eine kommutative Gruppe mit der leeren Menge* $\emptyset$ *als neutralem Element.*

Korollar 1.2.3 (Assoziativität)**.** *Die symmetrische Differenz ist assoziativ:*

$$(U \triangle V) \triangle W = U \triangle (V \triangle W) \ \forall U, V, W \in \mathcal{P}(N).$$

Korollar 1.2.4 (Involution)**.** *Alle Elemente in* $\mathcal{P}(N)$ *sind selbstinvers bezüglich der symmetrischen Differenz, es gilt also* $U \triangle U = \emptyset \ \forall U \in \mathcal{P}(N)$.

Beispiel 1.2.1. Seien die Grunddimension $n = 3$ und die Grundmenge $N = \{1, 2, 3\}$. Daraus lässt sich die Potenzmenge

$$\mathcal{P}(N) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

bilden. Folgende Tabelle zeigt die symmetrische Differenz zwischen allen Elementen der Potenzmenge:

$\triangle$	$\emptyset$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	$\{1,2,3\}$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	$\{1,2,3\}$
$\{1\}$	$\{1\}$	$\emptyset$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2,3\}$	$\{2,3\}$
$\{2\}$	$\{2\}$	$\{1,2\}$	$\emptyset$	$\{2,3\}$	$\{1\}$	$\{1,2,3\}$	$\{3\}$	$\{1,3\}$
$\{3\}$	$\{3\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	$\emptyset$	$\{1,2,3\}$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{1,2\}$
$\{1,2\}$	$\{1,2\}$	$\{2\}$	$\{1\}$	$\{1,2,3\}$	$\emptyset$	$\{2,3\}$	$\{1,3\}$	$\{3\}$
$\{1,3\}$	$\{1,3\}$	$\{3\}$	$\{1,2,3\}$	$\{1\}$	$\{2,3\}$	$\emptyset$	$\{1,2\}$	$\{2\}$
$\{2,3\}$	$\{2,3\}$	$\{1,2,3\}$	$\{3\}$	$\{2\}$	$\{1,3\}$	$\{1,2\}$	$\emptyset$	$\{1\}$
$\{1,2,3\}$	$\{1,2,3\}$	$\{2,3\}$	$\{1,3\}$	$\{1,2\}$	$\{3\}$	$\{2\}$	$\{1\}$	$\emptyset$

1.3. Raum

Definition 1.3.1 (Koordinatenraum)**.** Seien die Grunddimension $n \in \mathbb{N}_0$ und die Grundmenge $N = \{1, \ldots, n\}$ erklärt.
Wir definieren den *Koordinatenraum*

$$\mathcal{G} = \{(A_U)_{U \in \mathcal{P}(N)} \mid A_U \in \mathbb{R} \ \forall U \in \mathcal{P}(N)\} = \mathbb{R}^{2^n}$$

als die Menge aller 2^n-Tupel mit Komponenten aus $\mathbb{R}$.

Korollar 1.3.1 (Vektorraum)**.** *Der Koordinatenraum* $\mathcal{G} = \mathbb{R}^{2^n}$ *ist ein Vektorraum.*

Definition 1.3.2 (Multivektor)**.** Ein Element im Vektorraum $\mathcal{G} = \mathbb{R}^{2^n}$ mit der Grunddimension $n \in \mathbb{N}_0$ nennen wir *Multivektor.*

Anmerkung. Im Kontext der Geometrischen Algebra wird der Begriff *Vektor* für Elemente eines ausgezeichneten Untervektorraumes von $\mathcal{G}$ benützt und hier später eingeführt.

Definition 1.3.3 (Koordinate)**.** Seien die Grunddimension $n \in \mathbb{N}_0$ und die Grundmenge $N = \{1, \ldots, n\}$ erklärt, sowie der Multivektor $(A_U)_{U \in \mathcal{P}(N)} \in \mathcal{G}$ mit $\mathcal{G} = \mathbb{R}^{2^n}$.
Wir nennen die reelle Zahlen $A_U \in \mathbb{R} \ \forall U \in \mathcal{P}(N)$ *Koordinaten.*

Definition 1.3.4 (Standardbasis)**.** Seien die Grunddimension $n \in \mathbb{N}_0$ und die Grundmenge $N = \{1, \ldots, n\}$ erklärt.
Wir definieren die *Standardbasis* des Vektorraumes $\mathcal{G} = \mathbb{R}^{2^n}$ als Familie von Multivektoren $(e_U)_{U \in \mathcal{P}(N)} \in \mathcal{G}^{2^n}$, so daß die Koordinaten

$$(e_U)_V = \begin{cases} 1 & \text{für } U = V \\ 0 & \text{für } U \neq V \end{cases} \quad \forall\, U, V \in \mathcal{P}(N). \tag{1.2}$$

Korollar 1.3.2 (Lineare Unabhängigkeit der Standardbasis)**.** *Bezüglich der Linearkombination der Koordinaten und der Standardbasismultivektoren gilt*

$$\forall\, A \in \mathcal{G} : \sum_{U \in \mathcal{P}(N)} A_U e_U = 0 \leftrightarrow A_U = 0 \;\forall\, U \in \mathcal{P}(N).$$

Anmerkung. Die Familienschreibweise der Standardbasis in 1.2 wird der Einführung der Basis durch eine Menge

$$\{e_U \mid U \in \mathcal{P}(N)\}$$

bevorzugt, da die Eigenschaft der Ungleichheit der Elemente in einer Menge in der Forderung der linearen Unabhängigkeit der Basisvektoren enthalten ist und nicht betont werden muss.

Korollar 1.3.3 (Linearkombination)**.** *Ein Multivektor $A = (A_U)_{U \in \mathcal{P}(N)} \in \mathcal{G}$ kann als Linearkombination*

$$A = \sum_{U \in \mathcal{P}(N)} A_U e_U \tag{1.3}$$

mit den Koordinaten A_U und den Standardbasismultivektoren e_U für alle $U \in \mathcal{P}(N)$ dargestellt werden.

Beispiel 1.3.1. Seien die Grunddimension $n = 3$, die Grundmenge $N = \{1, 2, 3\}$ und der Vektorraum $\mathcal{G} = \mathbb{R}^{|\mathcal{P}(N)|} = \mathbb{R}^8$.
Damit lässt sich ein Multivektor

$$\begin{aligned} A =& A_\emptyset + A_{\{1\}} e_{\{1\}} + A_{\{2\}} e_{\{2\}} + A_{\{3\}} e_{\{3\}} \\ &+ A_{\{1,2\}} e_{\{1,2\}} + A_{\{1,3\}} e_{\{1,3\}} + A_{\{2,3\}} e_{\{2,3\}} + A_{\{1,2,3\}} e_{\{1,2,3\}} \end{aligned}$$

mit $A \in \mathcal{G}$ als Linearkombination mit den Koordinaten und den Standardbasismultivektoren definieren.
Wird für alle $U \in \mathcal{P}(N)$ eine Reihenfolge festgelegt, kann der Multivektor mit Klammern zum Beispiel als

$$A = \begin{bmatrix} A_\emptyset & A_{\{1\}} & A_{\{2\}} & A_{\{3\}} & A_{\{1,2\}} & A_{\{1,3\}} & A_{\{2,3\}} & A_{\{1,2,3\}} \end{bmatrix}^T$$

notiert werden, wie aus der linearen Algebra bekannt.

1.4. Vorzeichenfunktion

Definition 1.4.1 (Vorzeichenfunktion)**.** Die Vorzeichenfunktion

$$\begin{aligned} \alpha : N \times N &\to \{-1, +1\}, \\ (i, j) &\mapsto \alpha(\{i\}, \{j\}) \end{aligned} \tag{1.4}$$

sei unter der Antisymmetriebedingung

$$\alpha(\{i\}, \{j\}) = -\alpha(\{j\}, \{i\}) \; \forall\, i, j \in N : i \neq j \tag{1.5}$$

frei gewählt.
Die Vorzeichenfunktion wird auf $\mathcal{P}(N)$ durch

$$\begin{aligned} \alpha : \mathcal{P}(N) \times \mathcal{P}(N) &\to \{-1, +1\}, \\ (U, V) &\mapsto \prod_{i \in U} \prod_{j \in V} \alpha(\{i\}, \{j\}) \end{aligned} \tag{1.6}$$

fortgesetzt, wobei

$$\alpha(U, \emptyset) = \alpha(\emptyset, U) = +1 \; \forall\, U \in \mathcal{P}(N). \tag{1.7}$$

Für einelementige Mengen reduziert sich das auf 1.4.

Beispiel 1.4.1. Seien die Grundmenge $N = \{1, 2, 3\}$ und die Vorzeichenfunktion für

$$\begin{aligned} &\alpha(\{1\}, \{1\}) = +1, && \alpha(\{2\}, \{2\}) = +1, && \alpha(\{3\}, \{3\}) = +1, \\ &\alpha(\{2\}, \{3\}) = +1, && \alpha(\{3\}, \{1\}) = +1, && \alpha(\{1\}, \{2\}) = +1. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Daraus lässt sich folgende Vorzeichenfunktionstabelle erstellen:

α	$\emptyset$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	$\{1,2,3\}$
$\emptyset$	$+1$	$+1$	$+1$	$+1$	$+1$	$+1$	$+1$	$+1$
$\{1\}$	$+1$	$+1$	$+1$	-1	$+1$	-1	-1	-1
$\{2\}$	$+1$	-1	$+1$	$+1$	-1	-1	$+1$	-1
$\{3\}$	$+1$	$+1$	-1	$+1$	-1	$+1$	-1	-1
$\{1,2\}$	$+1$	-1	$+1$	-1	-1	$+1$	-1	$+1$
$\{1,3\}$	$+1$	$+1$	-1	-1	-1	-1	$+1$	$+1$
$\{2,3\}$	$+1$	-1	-1	$+1$	$+1$	-1	-1	$+1$
$\{1,2,3\}$	$+1$	-1	-1	-1	$+1$	$+1$	$+1$	-1

Lemma 1.4.1 (Involutorische Eigenschaft)**.** *Seien die Grunddimension $n \in \mathbb{N}_0$ und die Grundmenge $N = \{1, \ldots, n\}$ erklärt.*
Bezüglich der Vorzeichenfunktion in 1.6 gilt

$$\alpha(U, V)\, \alpha(U, V) = 1 \; \forall\, U, V \in \mathcal{P}(N). \tag{1.9}$$

Beweis. Jedes Element in der Zielmenge $\{-1, +1\}$ der Vorzeichenfunktion ist selbstinvers. □

Lemma 1.4.2 (Distributive Eigenschaft)**.** *Seien die Grunddimension $n \in \mathbb{N}_0$ und die Grundmenge $N = \{1, \ldots, n\}$ erklärt.*
Es gilt

$$\alpha(U \triangle V, W) = \alpha(U, W)\, \alpha(V, W) \tag{1.10}$$

und

$$\alpha(U, V \triangle W) = \alpha(U, V)\, \alpha(U, W)$$

für alle $U, V, W \in \mathcal{P}(N)$.

Beweis. Wir stellen zunächst fest, dass das endliche Produkt

$$\begin{aligned} & \prod_{i \in U \cup V} \prod_{k \in W} \alpha(\{i\}, \{k\}) \\ = \quad & \left(\prod_{i \in U} \prod_{k \in W} \alpha(\{i\}, \{k\}) \right) \left(\prod_{j \in V} \prod_{k \in W} \alpha(\{j\}, \{k\}) \right) \end{aligned} \tag{1.11}$$

für alle $U, V \in \mathcal{P}(N) : U \cap V = \emptyset$ und $W \in \mathcal{P}(N)$ zerlegt werden kann.
Für beliebige $U, V, W \subseteq \mathcal{P}(N)$ gilt dann

$$\begin{aligned} & \alpha(U \triangle V, W) \\ \overset{1.6}{=} \quad & \prod_{i \in U \triangle V} \prod_{j \in W} \alpha(\{i\}, \{j\}) \\ \overset{1.1}{=} \quad & \prod_{i \in U \setminus V \cup V \setminus U} \prod_{j \in W} \alpha(\{i\}, \{j\}) \\ \overset{1.11}{=} \quad & \left(\prod_{i \in U \setminus V} \prod_{j \in W} \alpha(\{i\}, \{j\}) \right) \left(\prod_{i \in V \setminus U} \prod_{j \in W} \alpha(\{i\}, \{j\}) \right) \\ \overset{1.9}{=} \quad & \left(\prod_{i \in U \setminus V} \prod_{j \in W} \alpha(\{i\}, \{j\}) \right) \left(\prod_{i \in V \setminus U} \prod_{j \in W} \alpha(\{i\}, \{j\}) \right) \left(\prod_{i \in V \cap U} \prod_{j \in W} \alpha(\{i\}, \{j\}) \right)^2 \\ \overset{1.11}{=} \quad & \left(\prod_{i \in U} \prod_{j \in W} \alpha(\{i\}, \{j\}) \right) \left(\prod_{i \in V} \prod_{j \in W} \alpha(\{i\}, \{j\}) \right) \\ \overset{1.6}{=} \quad & \alpha(U, W)\, \alpha(V, W) \end{aligned}$$

und auf ähnliche Weise

$$\alpha(U, V \triangle W) = \alpha(U, V)\, \alpha(U, W).$$

□

Lemma 1.4.3 ((Anti-)symmetrie)**.** *Seien die Grunddimension $n \in \mathbb{N}_0$ und die Grundmenge $N = \{1, \ldots, n\}$ erklärt.*
Es gilt

$$\alpha(U, V) = (-1)^{(|U||V| + |U \cap V|)} \alpha(V, U) \;\forall\, U, V \in \mathcal{P}(N). \tag{1.12}$$

Beweis. Zunächst wird für disjunkte Mengen $U, V \in \mathcal{P}(N) : U \cap V = \emptyset$ die Symmetrieeigenschaft

$$\begin{aligned}\alpha(U,V) &\overset{1.6}{=} \prod_{i\in U}\prod_{j\in V}\alpha(\{i\},\{j\}) \\ &\overset{1.5}{=} \prod_{i\in U}\prod_{j\in V}(-1)^{|U||V|}\alpha(\{j\},\{i\}) \\ &\overset{1.6}{=} (-1)^{|U||V|}\alpha(V,U) \end{aligned} \tag{1.13}$$

festgestellt.
Wegen der Erhaltung der Parität bei Quadratur von nichtnegativen ganzen Zahlen gilt

$$(-1)^{kk} = (-1)^k \;\forall\, k \in \mathbb{N}_0. \tag{1.14}$$

Es kann dann für alle $U, V \in \mathcal{P}(N)$ die Symmetrieeigenschaft

$$\begin{aligned}
& \alpha(U,V) \\
\overset{1.10}{=}\; & \alpha(U\setminus V, V)\,\alpha(U\cap V, V) \\
\overset{1.10}{=}\; & \alpha(U\setminus V, V\setminus U)\,\alpha(U\setminus V, U\cap V)\,\alpha(U\cap V, V\setminus U)\,\alpha(U\cap V, U\cap V) \\
\overset{1.13}{=}\; & (-1)^{(|U\setminus V||V\setminus U|+|U\setminus V||U\cap V|+|U\cap V||V\setminus U|)} \\
& \alpha(V\setminus U, U\setminus V)\,\alpha(U\cap V, U\setminus V)\,\alpha(V\setminus U, U\cap V)\,\alpha(U\cap V, U\cap V) \\
\overset{1.10}{=}\; & (-1)^{(|U\setminus V||V\setminus U|+|U\setminus V||U\cap V|+|U\cap V||V\setminus U|+|U\cap V||U\cap V|-|U\cap V||U\cap V|)} \\
& \alpha(V, U\setminus V)\,\alpha(V, U\cap V) \\
\overset{1.10}{=}\; & (-1)^{(|U||V|-|U\cap V||U\cap V|)}\alpha(V,U) \\
\overset{1.14}{=}\; & (-1)^{(|U||V|+|U\cap V|)}\alpha(V,U)
\end{aligned}$$

gezeigt werden. □

Definition 1.4.2 (Signatur)**.** Es wird ein Zahlentupel $(p,q) \in {\mathbb{N}_0}^2$ eingeführt, welches die Grunddimension $n = p+q$ und die Grundmenge $N = \{1,\ldots,n\}$ einer Geometrischen Algebra $\mathcal{G} = \mathbb{R}^{2^n}$, sowie die Vorzeichenfunktion über N in 1.4 für gleiche Operanden als

$$\alpha(\{i\},\{i\}) = \begin{cases} +1 & \text{für } i \le p \\ -1 & \text{für } i > p \end{cases} \tag{1.15}$$

definiert und damit die fortgesetzte Vorzeichenfunktion über $\mathcal{P}(N)$ in 1.6.
Das Zahlentupel (p,q) wird *Signatur* der Geometrischen Algebra genannt und als Subskript am Symbol der Geometrischen Algebra $\mathcal{G}_{p,q}$ geschrieben.

Definition 1.4.3 (Pseudometrischen Tensor)**.** Sei die Geometrische Algebra $\mathcal{G}_{p,q}$ mit der Signatur $(p,q) \in {\mathbb{N}_0}^2$ und die Grundmenge $N = \{1, \ldots, p+q\}$ erklärt.
Wir bezeichnen die Funktion

$$\begin{aligned} g\colon \mathcal{P}(N) &\to \{-1,+1\}, \\ U &\mapsto \prod_{i \in U} \alpha(\{i\},\{i\}) \end{aligned} \tag{1.16}$$

als *pseudometrischen Tensor.*

Korollar 1.4.4. *Für alle $U \in \mathcal{P}(N)$ gilt*

$$g(U) = \prod_{i \in U} \begin{cases} +1 & \text{für } i \leq p \\ -1 & \text{für } i > p \end{cases}.$$

Lemma 1.4.5 (Involutorische Eigenschaft des pseudometrischen Tensors)**.** *Seien die Grunddimension $n \in \mathbb{N}_0$ und die Grundmenge $N = \{1, \ldots, n\}$ erklärt.*
Für alle $U \in \mathcal{P}(N)$ gilt

$$g(U)\, g(U) = 1. \tag{1.17}$$

Beweis. Jedes Element in der Zielmenge $\{-1,+1\}$ der Vorzeichenfunktion ist selbstinvers. □

Lemma 1.4.6 (Distributivität des pseudometrischen Tensors)**.** *Seien die Grunddimension $n \in \mathbb{N}_0$ und die Grundmenge $N = \{1, \ldots, n\}$ erklärt.*
Für alle $U, V \in \mathcal{P}(N)$ gilt

$$g(U)\, g(V) = g(U \triangle V). \tag{1.18}$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} g(U)\, g(V) &\overset{1.16}{=} \prod_{i \in U} \alpha(\{i\},\{i\}) \prod_{j \in V} \alpha(\{j\},\{j\}) \\ &\overset{1.17}{=} \prod_{i \in U \setminus V} \alpha(\{i\},\{i\}) \prod_{j \in V \setminus U} \alpha(\{j\},\{j\}) \\ &= \prod_{i \in U \triangle V} \alpha(\{i\},\{i\}) \\ &\overset{1.16}{=} g(U \triangle V). \end{aligned}$$

□

Lemma 1.4.7 (Vorzeichenfunktion gleicher Operanden)**.** *Mit der Grunddimension $n \in \mathbb{N}_0$ und der Grundmenge $N = \{1, \ldots, n\}$ ist die Vorzeichenfunktion*

$$\alpha(U,U) = (-1)^{\frac{1}{2}|U|(|U|-1)}\, g(U) \tag{1.19}$$

für alle $U \in \mathcal{P}(N)$.

Beweis. Bezüglich dem endlichen Produkt von Vorzeichenfunktionen kann

$$\prod_{i,j\in U:i\neq j} \alpha(\{i\},\{j\}) = \prod_{i,j\in U:i<j} \alpha(\{i\},\{j\})\,\alpha(\{j\},\{i\}) \tag{1.20}$$

für alle $U \in \mathcal{P}(N)$ entwickelt werden.
Es gilt

$$\begin{aligned}
\alpha(U,U) &\overset{1.6}{=} \prod_{i\in U}\prod_{j\in U} \alpha(\{i\},\{j\}) \\
&\overset{1.11}{=} \left(\prod_{i,j\in U:i\neq j} \alpha(\{i\},\{j\})\right)\left(\prod_{i\in U} \alpha(\{i\},\{i\})\right) \\
&\overset{1.20}{=} \left(\prod_{i,j\in U:i<j} \alpha(\{i\},\{j\})\,\alpha(\{j\},\{i\})\right)\left(\prod_{i\in U} \alpha(\{i\},\{i\})\right) \\
&\overset{1.12}{=} (-1)^{\frac{1}{2}(|U||U|-|U|)}\left(\prod_{i,j\in U:i<j} \alpha(\{i\},\{j\})\,\alpha(\{i\},\{j\})\right)\left(\prod_{i\in U} \alpha(\{i\},\{i\})\right) \\
&\underset{1.16}{\overset{1.9}{=}} (-1)^{\frac{1}{2}|U|(|U|-1)}\, g(U)
\end{aligned}$$

für alle $U \in \mathcal{P}(N)$. □

1.5. Geometrisches Produkt

Definition 1.5.1 (Geometrisches Produkt zwischen Basisvektoren)**.** Seien die Grunddimension $n \in \mathbb{N}_0$, die Grundmenge $N = \{1,\dots,n\}$ und der Vektorraum $\mathcal{G} = \mathbb{R}^{2^n}$ erklärt. Mit der Vorzeichenfunktion α in 1.6 ist das *Geometrische Produkt* zwischen zwei Multivektoren der Standardbasis in 1.2 als

$$\begin{aligned}
\{e_U \mid U \in \mathcal{P}(N)\} \times \{e_V \mid V \in \mathcal{P}(N)\} &\to \{\pm e_W \mid W \in \mathcal{P}(N)\}, \\
(e_U, e_V) &\mapsto e_U e_V = \alpha\,(U,V)\, e_{U\triangle V}
\end{aligned} \tag{1.21}$$

definiert.

Anmerkung. Das Geometrische Produkt wird ohne Symbol notiert.

Korollar 1.5.1 (Geometrisches Produkt zwischen Multivektoren)**.** *Die Definition des Geometrischen Produktes zwischen zwei Multivektoren der Standardbasis induziert ein Produkt zwischen Multivektoren in $\mathcal{G}$:*

$$\begin{aligned}
\mathcal{G} \times \mathcal{G} &\to \mathcal{G} \\
AB &\mapsto \sum_{(U,V)\in\mathcal{P}(N)^2} A_U B_V e_U e_V \\
&= \sum_{(U,V)\in\mathcal{P}(N)^2} A_U B_V\, \alpha\,(U,V)\, e_{U\triangle V},
\end{aligned} \tag{1.22}$$

wobei wir unter $\mathcal{P}(N)^2 = \mathcal{P}(N) \times \mathcal{P}(N)$ verstehen.

Anmerkung. Mit dem *Geometrischen Produkt* wird der Vektorraum $\mathcal{G}$ zu einer Algebra über die reellen Zahlen erweitert, nämlich der *Geometrischen Algebra*, wie sie von David Hestenes und Garret Sobczyk [18] getauft wurde.

Beispiel 1.5.1. Sei die Grundmenge $N = \{1, 2, 3\}$ und die Vorzeichenfunktion wie in Beispiel 1.4.1 erklärt. Die entsprechende Geometrische Algebra ist $\mathcal{G} = \mathbb{R}^8$ mit einer Standardbasis $(e_U)_{U \in \mathcal{P}(N)}$. Folgende Tabelle zeigt das Geometrische Produkt zwischen den Basisvektoren:

	$e_\emptyset$	$e_{\{1\}}$	$e_{\{2\}}$	$e_{\{3\}}$	$e_{\{1,2\}}$	$e_{\{1,3\}}$	$e_{\{2,3\}}$	$e_{\{1,2,3\}}$
$e_\emptyset$	$+e_\emptyset$	$+e_{\{1\}}$	$+e_{\{2\}}$	$+e_{\{3\}}$	$+e_{\{1,2\}}$	$+e_{\{1,3\}}$	$+e_{\{2,3\}}$	$+e_{\{1,2,3\}}$
$e_{\{1\}}$	$+e_{\{1\}}$	$+e_\emptyset$	$+e_{\{1,2\}}$	$-e_{\{1,3\}}$	$+e_{\{2\}}$	$-e_{\{3\}}$	$-e_{\{1,2,3\}}$	$-e_{\{2,3\}}$
$e_{\{2\}}$	$+e_{\{2\}}$	$-e_{\{1,2\}}$	$+e_\emptyset$	$+e_{\{2,3\}}$	$-e_{\{1\}}$	$-e_{\{1,2,3\}}$	$+e_{\{3\}}$	$-e_{\{1,3\}}$
$e_{\{3\}}$	$+e_{\{3\}}$	$+e_{\{1,3\}}$	$-e_{\{2,3\}}$	$+e_\emptyset$	$-e_{\{1,2,3\}}$	$+e_{\{1\}}$	$-e_{\{2\}}$	$-e_{\{1,2\}}$
$e_{\{1,2\}}$	$+e_{\{1,2\}}$	$-e_{\{2\}}$	$+e_{\{1\}}$	$-e_{\{1,2,3\}}$	$-e_\emptyset$	$+e_{\{2,3\}}$	$-e_{\{1,3\}}$	$+e_{\{3\}}$
$e_{\{1,3\}}$	$+e_{\{1,3\}}$	$+e_{\{3\}}$	$-e_{\{1,2,3\}}$	$-e_{\{1\}}$	$-e_{\{2,3\}}$	$-e_\emptyset$	$+e_{\{1,2\}}$	$+e_{\{2\}}$
$e_{\{2,3\}}$	$+e_{\{2,3\}}$	$-e_{\{1,2,3\}}$	$-e_{\{3\}}$	$+e_{\{2\}}$	$+e_{\{1,3\}}$	$-e_{\{1,2\}}$	$-e_\emptyset$	$+e_{\{1\}}$
$e_{\{1,2,3\}}$	$+e_{\{1,2,3\}}$	$-e_{\{2,3\}}$	$-e_{\{1,3\}}$	$-e_{\{1,2\}}$	$+e_{\{3\}}$	$+e_{\{2\}}$	$+e_{\{1\}}$	$-e_\emptyset$

Das Geometrische Produkt zwischen den Multivektoren $A, B \in \mathcal{G}$ mit $A = (A_U)_{U \in \mathcal{P}(N)}$ und $B = (B_U)_{U \in \mathcal{P}(N)}$, sowie $A_U, B_U \in \mathbb{R}\ \forall\, U \in \mathcal{P}(N)$ ergibt

$$\begin{aligned}
AB = &\left(-A_{\{1,2,3\}}B_{\{1,2,3\}} - A_{\{2,3\}}B_{\{2,3\}} - A_{\{1,3\}}B_{\{1,3\}} + A_{\{3\}}B_{\{3\}} - A_{\{1,2\}}B_{\{1,2\}} + A_{\{2\}}B_{\{2\}} + A_{\{1\}}B_{\{1\}} + A_\emptyset B_\emptyset\right) e_\emptyset \\
&+ \left(-A_{\{2,3\}}B_{\{1,2,3\}} - A_{\{1,2,3\}}B_{\{2,3\}} + A_{\{3\}}B_{\{1,3\}} - A_{\{1,3\}}B_{\{3\}} - A_{\{2\}}B_{\{1,2\}} + A_{\{1,2\}}B_{\{2\}} + A_\emptyset B_{\{1\}} + A_{\{1\}}B_\emptyset\right) e_{\{1\}} \\
&+ \left(-A_{\{1,3\}}B_{\{1,2,3\}} - A_{\{3\}}B_{\{2,3\}} - A_{\{1,2,3\}}B_{\{1,3\}} + A_{\{2,3\}}B_{\{3\}} + A_{\{1\}}B_{\{1,2\}} + A_\emptyset B_{\{2\}} - A_{\{1,2\}}B_{\{1\}} + A_{\{2\}}B_\emptyset\right) e_{\{2\}} \\
&+ \left(-A_{\{1,2\}}B_{\{1,2,3\}} + A_{\{2\}}B_{\{2,3\}} - A_{\{1\}}B_{\{1,3\}} + A_\emptyset B_{\{3\}} - A_{\{1,2,3\}}B_{\{1,2\}} - A_{\{2,3\}}B_{\{2\}} + A_{\{1,3\}}B_{\{1\}} + A_{\{3\}}B_\emptyset\right) e_{\{3\}} \\
&+ \left(A_{\{3\}}B_{\{1,2,3\}} + A_{\{1,3\}}B_{\{2,3\}} - A_{\{2,3\}}B_{\{1,3\}} + A_{\{1,2,3\}}B_{\{3\}} + A_\emptyset B_{\{1,2\}} + A_{\{1\}}B_{\{2\}} - A_{\{2\}}B_{\{1\}} + A_{\{1,2\}}B_\emptyset\right) e_{\{1,2\}} \\
&+ \left(-A_{\{2\}}B_{\{1,2,3\}} + A_{\{1,2\}}B_{\{2,3\}} - A_\emptyset B_{\{1,3\}} + A_{\{1\}}B_{\{3\}} - A_{\{2,3\}}B_{\{1,2\}} - A_{\{1,2,3\}}B_{\{2\}} - A_{\{3\}}B_{\{1\}} - A_{\{1,3\}}B_\emptyset\right) e_{\{1,3\}} \\
&+ \left(A_{\{1\}}B_{\{1,2,3\}} + A_\emptyset B_{\{2,3\}} + A_{\{1,2\}}B_{\{1,3\}} + A_{\{2\}}B_{\{3\}} - A_{\{1,3\}}B_{\{1,2\}} - A_{\{3\}}B_{\{2\}} + A_{\{1,2,3\}}B_{\{1\}} + A_{\{2,3\}}B_\emptyset\right) e_{\{2,3\}} \\
&+ \left(A_\emptyset B_{\{1,2,3\}} + A_{\{1\}}B_{\{2,3\}} + A_{\{2\}}B_{\{1,3\}} + A_{\{1,2\}}B_{\{3\}} + A_{\{3\}}B_{\{1,2\}} + A_{\{1,3\}}B_{\{2\}} + A_{\{2,3\}}B_{\{1\}} + A_{\{1,2,3\}}B_\emptyset\right) e_{\{1,2,3\}}.
\end{aligned}$$

Satz 1.5.2 (Rechenregel zum Geometrischen Produkt)**.** *Das Geometrische Produkt in einer Geometrischen Algebra $\mathcal{G} = \mathbb{R}^{2^n}$ mit der Grunddimension $n \in \mathbb{N}_0$ und der Grundmenge $N = \{1, \ldots, n\}$ ist*

1. *distributiv,*

2. *assoziativ und*

3. *im Allgemeinen nicht kommutativ.*

Beweis der Distributivität. Seien die Multivektoren $A = (A_U)_{U \in \mathcal{P}(N)}, B = (B_U)_{U \in \mathcal{P}(N)}$, $C = (C_U)_{U \in \mathcal{P}(N)} \in \mathcal{G}$ erklärt.

Es gilt

$$\begin{aligned} A(B+C) &\overset{1.22}{=} \sum_{(U,V)\in\mathcal{P}(N)^2} A_U(B_V + C_V)\, e_U e_V \\ &= \sum_{(U,V)\in\mathcal{P}(N)^2} (A_U B_V + A_U C_V)\, e_U e_V \\ &= \sum_{(U,V)\in\mathcal{P}(N)^2} (A_U B_V\, e_U e_V + A_U C_V\, e_U e_V) \\ &\overset{1.22}{=} AB + AC \end{aligned} \tag{1.23}$$

und in gleicher Weise

$$(A+B)C = AC + BC.$$

□

Beweis der Assoziativität. Es kann

$$\begin{aligned} (e_U e_V) e_W &\overset{1.21}{=} \alpha(U,V)\, e_{U\triangle V}\, e_W \\ &\overset{1.21}{=} \alpha(U,V)\, \alpha(U\triangle V, W)\, e_{U\triangle V\triangle W} \\ &\overset{1.21}{=} \alpha(U,V)\, \alpha(U\triangle V, W)\, \alpha(U, V\triangle W)\, e_U\, e_{V\triangle W} \\ &\overset{1.21}{=} \alpha(U,V)\, \alpha(U\triangle V, W)\, \alpha(U, V\triangle W)\, \alpha(V,W)\, e_U\, (e_V e_W) \\ &\overset{1.10}{=} \alpha(U,V)\, \alpha(U,W)\, \alpha(V,W)\, \alpha(U,V)\, \alpha(U,W)\, \alpha(V,W)\, e_U\, (e_V\, e_W) \\ &\overset{1.9}{=} e_U\, (e_V\, e_W) \end{aligned}$$

für alle $U, V, W \in \mathcal{P}(N)$ bezüglich dem Geometrischen Produkt zwischen Multivektoren der Standardbasis entwickelt werden.
Das Geometrische Produkt zwischen Multivektoren der Standardbasis kann auf das Geometrische Produkt zwischen Multivektoren $A, B, C \in \mathcal{G}$ fortgeführt werden, so dass

$$(AB)C = A(BC) = ABC \tag{1.24}$$

gilt. □

Beispiel 1.5.2 (Fehlende Kommutativität)**.** Das Geometrische Produkt ist im Allgemeinen *nicht kommutativ*. Zum Beispiel gilt

$$e_{\{i\}} e_{\{j\}} = -e_{\{j\}} e_{\{i\}}\ \forall\, i, j \in N : i \neq j$$

für die Standardbasisvektoren $(e_{\{i\}})_{i\in N}$ der Geometrischen Algebra $\mathcal{G} = \mathbb{R}^{2^n}$ mit der Grunddimension $n \in \mathbb{N} : n \geq 2$ und der Grundmenge $N = \{1, \ldots, n\}$.

2. Graduierung

2.1. Graduierte Untervektorräume

Definition 2.1.1 (Graduierte Potenzmenge)**.** Mit der Grunddimension $n \in \mathbb{N}_0$, der Grundmenge $N = \{1, \ldots, n\}$ und dem *Grad* $k \in \mathbb{N}_0$ ist die *graduierte Potenzmenge*

$$\mathcal{P}^k(N) = \{U \mid U \in \mathcal{P}(N) : |U| = k\} \tag{2.1}$$

als die Teilmenge der Potenzmenge $\mathcal{P}(N)$ definiert, deren Elemente die Kardinalität des Grades k haben.

Korollar 2.1.1 (Paarweise Disjunktheit)**.** *Es gilt*

$$\mathcal{P}^k(N) \cap \mathcal{P}^l(N) = \emptyset \; \forall\, k, l \in \{0, \ldots, n\} : k \neq l.$$

Korollar 2.1.2 (Disjunkte Vereinigung)**.** *Es gilt*

$$\mathcal{P}(N) = \dot{\bigcup_{k \in \{0,\ldots,n\}}} \mathcal{P}^k(N).$$

Definition 2.1.2 (Graduierter Untervektorraum)**.** Seien die Grunddimension $n \in \mathbb{N}_0$, die Grundmenge $N = \{1, \ldots, n\}$, die Geometrische Algebra $\mathcal{G} = \mathbb{R}^{2^n}$ und der Grad $k \in \{0, \ldots, n\}$ erklärt.
Wir definieren einen *graduierten Untervektorraum*

$$\mathcal{G}^k = \mathcal{L}(e_U)_{U \in \mathcal{P}^k(N)} \tag{2.2}$$

als die linearen Hülle der Multivektoren einer Standardbasis, deren Indexkardinalitäten dem Grad des Untervektorraumes entsprechen.

Korollar 2.1.3 (Paarweise Disjunktheit)**.** *Es gilt*

$$\mathcal{G}^k \cap \mathcal{G}^l = \{0\} \; \forall\, k, l \in \{0, \ldots, n\} : k \neq l.$$

Korollar 2.1.4 (Direkte Summe)**.** *Wir können ein System von graduierten Untervektorräumen $(\mathcal{G}^k)_{k \in \{0,\ldots,n\}}$ einführen, so dass deren direkte Summe die Geometrischen Algebra*

$$\mathcal{G} = \bigoplus_{k \in \{0,\ldots,n\}} \mathcal{G}^k$$

ergibt.

Anmerkung. Analog zur Graduierung der Untervektorräume $\mathcal{G}^k$ mit Grad $k \in \{0, \ldots, n\}$ werden deren Elemente k-Vektoren genannt.
0-, 1- und 2-Vektoren werden auch entsprechend Skalare, Vektoren und Bivektoren genannt.

Definition 2.1.3 ((Un-)gerader Potenzmenge)**.** Seien die Grunddimension $n \in \mathbb{N}_0$ und die Grundmenge $N = \{1, \ldots, n\}$ erklärt.
Bezüglich der Potenzmenge $\mathcal{P}(N)$ definieren wir die *gerade Potenzmenge*

$$\mathcal{P}^+(N) = \dot{\bigcup_{\substack{k \in \{0,\ldots,n\} \\ :\ k \text{ gerade}}}} \mathcal{P}^k(N)$$

und die *ungerade Potenzmenge*

$$\mathcal{P}^-(N) = \dot{\bigcup_{\substack{k \in \{0,\ldots,n\} \\ :\ k \text{ ungerade}}}} \mathcal{G}^k.$$

Wenn keine Gefahr der Verwechselung mit der Graduierung besteht, können wir eine Parität $P \in \{0, 1\}$ definieren und schreiben auch

$$\mathcal{P}^P(N) = \begin{cases} \mathcal{P}^+(N) & \text{für } P = 0 \\ \mathcal{P}^-(N) & \text{für } P = 1 \end{cases}.$$

Definition 2.1.4 ((Un-)gerader Untervektorraum)**.** Seien die Grunddimension $n \in \mathbb{N}_0$ und die Geometrische Algebra $\mathcal{G}$ erklärt.
Bezüglich der Geometrischen Algebra $\mathcal{G}$ definieren wir den *geraden Untervektorraum*

$$\mathcal{G}^+ = \bigoplus_{\substack{k \in \{0,\ldots,n\} \\ :\ k \text{ gerade}}} \mathcal{G}^k$$

und den *ungeraden Untervektorraum*

$$\mathcal{G}^- = \bigoplus_{\substack{k \in \{0,\ldots,n\} \\ :\ k \text{ ungerade}}} \mathcal{G}^k.$$

Wenn keine Gefahr der Verwechselung mit der Graduierung besteht, können wir eine Parität $P \in \{0, 1\}$ definieren und schreiben auch

$$\mathcal{G}^P = \begin{cases} \mathcal{G}^+ & \text{für } P = 0 \\ \mathcal{G}^- & \text{für } P = 1 \end{cases}.$$

Korollar 2.1.5 (Gerade(r)/ungerade(r) Potenzmenge/Untervektorraum)**.** *Es gilt*

$$\mathcal{G}^+ = \mathcal{L}(e_U)_{U \in \mathcal{P}^+(N)}$$

und

$$\mathcal{G}^- = \mathcal{L}(e_U)_{U \in \mathcal{P}^-(N)}.$$

Beispiel 2.1.1. Seien die Grundmenge $N = \{1, 2, 3\}$ und die Geometrische Algebra $\mathcal{G} = \mathbb{R}^8$ erklärt. Daraus lassen sich die Mengen

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}^0(N) &= \{\emptyset\} \\
\mathcal{P}^1(N) &= \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\} \\
\mathcal{P}^2(N) &= \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\} \\
\mathcal{P}^3(N) &= \{\{1, 2, 3\}\},
\end{aligned}$$

die graduierten Untervektorräume

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}^0 &= \mathcal{L}(e_\emptyset) \\
\mathcal{G}^1 &= \mathcal{L}(e_{\{1\}}, e_{\{2\}}, e_{\{3\}}) \\
\mathcal{G}^2 &= \mathcal{L}(e_{\{1,2\}}, e_{\{1,3\}}, e_{\{2,3\}}) \\
\mathcal{G}^3 &= \mathcal{L}(e_{\{1,2,3\}}),
\end{aligned}$$

sowie der gerade Untervektorraum

$$\mathcal{G}^+ = \mathcal{G}^0 \oplus \mathcal{G}^2 = \mathcal{L}(e_\emptyset, e_{\{1,2\}}, e_{\{1,3\}}, e_{\{2,3\}})$$

und ungerade Untervektorraum

$$\mathcal{G}^- = \mathcal{G}^1 \oplus \mathcal{G}^3 = \mathcal{L}(e_{\{1\}}, e_{\{2\}}, e_{\{3\}}, e_{\{1,2,3\}})$$

bilden.

2.2. Gerade Unteralgebra

Lemma 2.2.1 (Gerade Unteralgebra)**.** *Sei die Geometrische Algebra $\mathcal{G}$ erklärt. Der gerade Untervektorraum $\mathcal{G}^+$ ist eine Unteralgebra der Geometrischen Algebra $\mathcal{G}$.*

Beweis. Seien die Grunddimension $n \in \mathbb{N}_0$ und die Grundmenge $N = \{1, \ldots, n\}$ so erklärt, dass $\mathcal{G} = \mathbb{R}^{2^n}$.
Die gerade Potenzmenge $\mathcal{P}^+(N) = \{U \mid U \in \mathcal{P}(N) : |U| \text{ ist gerade}\}$ ist abgeschlossen unter der symmetrischen Differenz, für alle $U, V \in \mathcal{P}^+(N)$ gilt

$$U \triangle V \in \mathcal{P}^+(N).$$

Daraus folgt die Abgeschlossenheit der Produkte der Basismultivektoren $(e_U)_{U \in \mathcal{P}^+(N)}$ mit Indize aus der geraden Potenzmenge $\mathcal{P}^+(N)$. Es gilt also

$$e_U e_V \overset{1.21}{=} \alpha(U, V)\, e_{U \triangle V} \in \{e_W \mid W \in \mathcal{P}^+(N)\}$$

für alle $U, V \in \mathcal{P}^+(N)$ und weiter

$$AB \overset{1.22}{=} \sum_{U,V \in \mathcal{P}^+(N)} A_U B_V\, \alpha(U, V)\, e_{U \triangle V} \in \mathcal{G}^+$$

für alle $A, B \in \mathcal{G}^+$. □

2.3. Dimension

Satz 2.3.1 (Dimension eines graduierten Untervektorraumes)**.** *Ein graduierter Untervektorraum $\mathcal{G}^k \subseteq \mathcal{G}$ einer Geometrischen Algebra $\mathcal{G} = \mathbb{R}^{2^n}$ mit der Grunddimension $n \in \mathbb{N}_0$, dem Grad $k \in \{0, \ldots, n\}$ und der Grundmenge $N = \{1, \ldots, n\}$ hat die Dimension*

$$\dim \mathcal{G}^k = |\mathcal{P}^k(N)| = \frac{n!}{k!\ (n-k)!} = \binom{n}{k}.$$

Beweis. Der graduierte Untervektorraum $\mathcal{G}^k$ wird nach 2.2 durch $|\mathcal{P}^k(N)|$ Multivektoren der Standardbasis, also laut Korollar 1.3.2 linear unabhängigen Multivektoren, aufgespannt. Deshalb ist $\dim \mathcal{G}^k = |\mathcal{P}^k(N)|$.
Laut Definition 2.1.1 besteht die Menge $\mathcal{P}^k(N)$ aus den Teilmengen von N, deren Kardinalität gleich dem Grad k ist. Also entspricht die Bestimmung der Anzahl $|\mathcal{P}^k(N)|$ dem Problem aus der Kombinatorik, wieviele Möglichkeiten es gibt, k aus n Elementen auszuwählen, also dem Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$.
Genauer gesagt, können wir

$$\prod_{i=0}^{k-1}(n-i) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

k-Tupel in N^k ohne Wiederholung der Elemente auswählen. Die Elemente in einem k-Tupel ohne Wiederholung können

$$\prod_{i=0}^{k-1}(k-i) = k!$$

mal permutiert werden. Also gibt es

$$|\mathcal{P}^k(N)| = \frac{n!}{k!\ (n-k)!} = \binom{n}{k}$$

Teilmengen aus N zur Auswahl, deren Kardinalität dem Grad k entspricht. □

Korollar 2.3.2. *Es gilt*

$$\dim \mathcal{G} = |\mathcal{P}(N)| = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

Korollar 2.3.3 (Mächtigkeit der symmetrischen Differenz)**.** *Seien die Grunddimension $n \in \mathbb{N}_0$ und die Grundmenge $N = \{1, \ldots, n\}$ erklärt.*
Für alle $U, V \in \mathcal{P}(N)$ gilt

$$|U \triangle V| = |U| + |V| - 2|U \cap V|. \tag{2.3}$$

n \ $\dim \mathcal{G}^k$	k							$n-k$
0			1	1	1			
1		2	1	1	2			
2	3	1	2	1	3			
3	4	1	3	3	1	4		
4	5	1	4	6	4	1	5	
5	1	5	10	10	5	1		

Abbildung 2.1.: Dimension eines Unterraumes abhängig von dessen Grad k und der Grunddimension n, dargestellt als Pascalsches Dreieck.

Beispiel 2.3.1. Abbildung 2.1 zeigt die Dimension $\dim \mathcal{G}^k$ eines graduierten Untervektorraumes $\mathcal{G}^k$ abhängig von dessen Grad $k \in \{0, \ldots, 5\}$ und der Grunddimension $n \in \{1, \ldots, 5\}$ als *Pascalsches Dreieck* dargestellt.

Beispiel 2.3.2. Sei die Grunddimension $n = 3$ und die Grundmenge $N = \{1, 2, 3\}$. Die entsprechende Geometrische Algebra $\mathcal{G} = \mathbb{R}^{2^n}$ setzt sich aus den Unterräumen

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}^0 \oplus \mathcal{G}^1 \oplus \mathcal{G}^2 \oplus \mathcal{G}^3$$

zusammen. Für die Dimensionen der Unterräume gilt

$$\dim \mathcal{G}^0 = 1, \ \dim \mathcal{G}^1 = 3, \ \dim \mathcal{G}^2 = 3, \ \dim \mathcal{G}^3 = 1.$$

Die Dimension der gesamten Geometrischen Algebra beträgt

$$\dim \mathcal{G} = \dim \mathcal{G}^0 + \dim \mathcal{G}^1 + \dim \mathcal{G}^2 + \dim \mathcal{G}^3 = 8.$$

2.4. Gradoperator

Definition 2.4.1 (Gradoperator)**.** Seien die Grunddimension $n \in \mathbb{N}_0$, die Grundmenge $N = \{1, \ldots, n\}$ und die Geometrische Algebra $\mathcal{G} = \mathbb{R}^{2^n}$ erklärt, sowie der Grad $k \in \mathbb{N}_0$ und der Multivektor $A = (A_U)_{U \in \mathcal{P}(N)} \in \mathcal{G}$.
Der Gradoperator

$$\begin{aligned} \langle\ \rangle_k &: \mathcal{G} \to \mathcal{G}^k, \\ A = \sum_{U \in \mathcal{P}(N)} A_U e_U &\mapsto \sum_{U \in \mathcal{P}^k(N)} A_U e_U = \langle A \rangle_k \end{aligned} \tag{2.4}$$

projiziert einen Multivektor in den graduierten Untervektorraum $\mathcal{G}^k$.

Korollar 2.4.1 (Idempotenz)**.** *Es gilt*

$$A = \langle A \rangle_k \ \forall\, A \in \mathcal{G}^k \ \forall\, k \in \{0, \ldots, n\}. \tag{2.5}$$

Korollar 2.4.2 (Linearität)**.** *Es gilt*

$$\langle \lambda A + B \rangle_k = \lambda \langle A \rangle_k + \langle B \rangle_k \; \forall\, k \in \{0, \ldots, n\} \; \forall\, A, B \in \mathcal{G} \; \forall\, \lambda \in \mathbb{R}. \tag{2.6}$$

Korollar 2.4.3 (Graduierte Summenzerlegung)**.** *Es gilt*

$$A = \sum_{k \in \{0,\ldots,n\}} \langle A \rangle_k \tag{2.7}$$

für alle $A \in \mathcal{G}$.

Korollar 2.4.4 (Lineare Unabhängigkeit graduierter Untervektorräume)**.** *Es gilt*

$$\forall\, A \in \mathcal{G} : \left(A = \sum_{k=0}^{n} \langle A \rangle_k = 0 \right) \leftrightarrow \left(\forall\, k \in \{0, \ldots, n\} : \langle A \rangle_k = 0 \right). \tag{2.8}$$

Beispiel 2.4.1. Seien die Grunddimension $n = 3$, die Grundmenge $N = \{1, 2, 3\}$ und die Geometrische Algebra $\mathcal{G} = \mathbb{R}^8$. Weiter sei der Multivektor $A = (A_U)_{U \in \mathcal{P}(N)} \in \mathcal{G}$ gegeben.
Auf den Multivektor A angewandt ergibt der Gradoperator des Grades 2

$$\langle A \rangle_2 = A_{\{1,2\}} e_{\{1,2\}} + A_{\{1,3\}} e_{\{1,3\}} + A_{\{2,3\}} e_{\{2,3\}}.$$

2.5. Skalar

Satz 2.5.1 (Skalar)**.** *Der Untervektorraum*

$$\mathcal{G}^0 = \mathbb{R} \tag{2.9}$$

des Grades 0 *einer beliebigen Geometrische Algebra* $\mathcal{G}$ *hat alle Eigenschaften eines Körpers. Deshalb wird ein* 0*-Vektor auch Skalar genannt.*

Beweis. Es wird die Multiplikation mit einem 0-Vektor $s \in \mathcal{G}^0$ betrachtet. Laut 1.7 gilt für die Vorzeichenfunktion

$$\alpha(U, \emptyset) = \alpha(\emptyset, U) = 1 \; \forall\, U \in \mathcal{P}(N).$$

Damit ergibt das Geometrische Produkt laut Definition 1.21 zwischen dem Basisvektor $e_\emptyset \in \mathcal{G}^0$ und einem beliebigen Basisvektor

$$e_U e_\emptyset = e_\emptyset e_U = e_U \; \forall\, U \in \mathcal{P}(N).$$

Also kann der Basisvektor $e_\emptyset = 1$ mit dem neutralen Element der Geometrischen Algebra bezüglich dem Geometrischen Produkt identifiziert werden.
Mit dem Multivektor $A \in \mathcal{G}$ mit Koordinaten $(A_U)_{U \in \mathcal{G}}$ und dem 0-Vektor $s \in \mathcal{G}^0$ mit Koordinate $s = s_\emptyset = s_\emptyset e_\emptyset$ ergibt das Geometrische Produkt für allgemeine Multivektoren laut Definition 1.22

$$sA = As = s \left(\sum_{U \in \mathcal{P}(N)} A_U e_U \right) = \sum_{U \in \mathcal{P}(N)} s A_U e_U.$$

Also kann ein 0-Vektor als Skalar identifiziert werden. □

2.6. Basen

Definition 2.6.1 (Symmetrische Gruppe)**.** Seien eine Grunddimension $n \in \mathbb{N}_0$ und eine Grundmenge $N = \{1, \ldots, n\}$ erklärt.
Wir definieren die *symmetrische Gruppe* $\mathcal{S}_U$ bezüglich der Teilmenge $U \subseteq N$ als die Gruppe aller möglichen Permutationen der Element in U. Die Gruppenoperation ist die Komposition. Die Permutationen referenzieren auf die natürliche Ordnung der Zahlen in U, das neutrale Element sei also die identische Permutation

$$\left(i_1, \ldots, i_{|U|}\right) \in U^{|U|} : i_1 < \ldots < i_{|U|}.$$

Korollar 2.6.1 (Endliches Produkt verschiedener Standardbasisvektoren)**.** *Seien die Grunddimension $n \in \mathbb{N}_0$, die Grundmenge $N = \{1, \ldots, n\}$ und die Geometrische Algebra $\mathcal{G} = \mathbb{R}^{2^n}$ erklärt, sowie die Teilmenge $U \subseteq N$ und eine Permutation $\sigma \in \mathcal{S}_U$. Es gilt*

$$\prod_{i \in U} e_{\{\sigma(i)\}} \overset{1.21}{\underset{1.10}{=}} \prod_{\substack{i,j \in U \\ : \ i<j}} \alpha(\{\sigma(i)\}, \{\sigma(j)\})\, e_U, \tag{2.10}$$

wobei sich das endliche Produkt $\prod_{i \in U}$ in der natürlichen Reihenfolge der Zahlen in U versteht.

Definition 2.6.2 (Vorzeichen einer Permutation)**.** Seien die Grunddimension $n \in \mathbb{N}_0$ und die Grundmenge $N = \{1, \ldots, n\}$ erklärt.
Wir definieren das *Vorzeichen*, oder Signum, einer Permutation bezüglich einer symmetrischen Gruppe $\mathcal{S}_U$ mit Teilmenge $U \subseteq N$ als

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn} \colon \mathcal{S}_U &\to \{-1, +1\} \\ \sigma &\mapsto (-1)^{|\operatorname{inv}(\sigma)|}. \end{aligned} \tag{2.11}$$

mit der Menge der Fehlstände

$$\operatorname{inv}(\sigma) = \{(i, j) \in U \times U \mid i < j, \sigma(i) > \sigma(j)\}. \tag{2.12}$$

Anmerkung. Eine Permutation $\sigma \in \mathcal{S}_U$ nennen wir für $\operatorname{sgn}(\sigma) = +1$ *gerade*, für $\operatorname{sgn}(\sigma) = -1$ *ungerade*.

Lemma 2.6.2 (Permutation des endlichen Basisvektorproduktes)**.** *Seien die Grunddimension $n \in \mathbb{N}_0$, die Grundmenge $N = \{1, \ldots, n\}$ und die Geometrische Algebra $\mathcal{G} = \mathbb{R}^{2^n}$ erklärt, sowie die Teilmenge $U \subseteq N$ und eine Permutation $\sigma \in \mathcal{S}_U$.*
Es gilt

$$\prod_{i \in U} e_{\{\sigma(i)\}} = \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i \in U} e_{\{i\}} \tag{2.13}$$

wobei sich das endliche Produkt $\prod_{i \in U}$ in der natürlichen Reihenfolge der Zahlen in U versteht.

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned}\prod_{i\in U} e_{\{\sigma(i)\}} &\overset{2.10}{=} \prod_{\substack{i,j\in U\\ :\ i<j}} \alpha(\{\sigma(i)\},\{\sigma(j)\})\, e_U \\ &\overset{2.10}{=} \left(\prod_{\substack{i,j\in U\\ :\ i<j}} \alpha(\{\sigma(i)\},\{\sigma(j)\})\, \alpha(\{i\},\{j\})\right)\left(\prod_{i\in U} e_{\{i\}}\right) \\ &\overset{2.11}{=} \operatorname{sgn}(\sigma)\prod_{i\in U} e_{\{i\}}.\end{aligned}$$

Vergleiche für den letzten Schritt die Indize, über die das endliche Produkt $\prod_{i,j\in U:\ i<j}$ läuft, mit der Definition der Menge der Fehlstände in 2.12 und berücksichtige dabei die Eigenschaft $\alpha(\{i\},\{j\})\,\alpha(\{j\},\{i\}) = -1$, die sich aus der Symmetrieeigenschaft der Vorzeichenfunktion in 1.12 ergibt. □

Satz 2.6.3 (Generierung von Basen)**.** *Seien die Grunddimension $n \in \mathbb{N}_0$, die Grundmenge $N = \{1,\dots,n\}$ und die Geometrische Algebra $\mathcal{G} = \mathbb{R}^{2^n}$ erklärt.*
Wir können die Standardbasis aller Untervektorräume des Grades $k \in \{1,\dots,n\}$ durch eine Familie endlicher Geometrische Produkte von k Standardbasisvektoren des graduierten Untervektorraumes des Grades 1 bilden. Für alle $k \in \{1,\dots,n\}$ gilt also

$$\mathcal{G}^k = \mathcal{L}\left(\prod_{i\in U} e_{\{i\}}\right)_{U\in\mathcal{P}^k(N)}.$$

Beweis. Für alle $U \in \mathcal{P}^k(N)$ mit Grad $k \in \{1,\dots,n\}$ gilt

$$\begin{aligned}e_U &\overset{2.10}{=} \left(\prod_{\substack{i,j\in U\\ :\ i<j}} \alpha(\{i\},\{j\})\right)\left(\prod_{i\in U} e_{\{i\}}\right) \\ &= \pm\prod_{i\in U} e_{\{i\}}.\end{aligned}$$

Daraus folgern wir

$$\begin{aligned}\mathcal{G}^k &\overset{2.2}{=} \mathcal{L}\left(e_U\right)_{U\in\mathcal{P}^k(N)} \\ &= \mathcal{L}\left(\prod_{i\in U} e_{\{i\}}\right)_{U\in\mathcal{P}^k(N)}.\end{aligned}$$

□

3. Teilprodukte

3.1. Äußeres Produkt

Definition 3.1.1 (Äußeres Produkt)**.** Seien die Grunddimension $n \in \mathbb{N}_0$, die Grundmenge $N = \{1, \ldots, n\}$ und die Geometrische Algebra $\mathcal{G} = \mathbb{R}^{2^n}$ erklärt.
Wir definieren das *äußere Produkt* nach Graßmann [12] als

$$\begin{aligned} \wedge : \mathcal{G} \times \mathcal{G} &\to \mathcal{G} \\ (A, B) &\mapsto A \wedge B = \sum_{\substack{(U,V) \in \mathcal{P}(N)^2 \\ : \, U \cap V = \emptyset}} A_U B_V e_U e_V. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Korollar 3.1.1. *Es gilt*

$$\forall U, V \in \mathcal{P}(N) : U \cap V = \emptyset \leftrightarrow U \triangle V = U \cup V.$$

Satz 3.1.2 (Gradhebende Eigenschaft)**.** *Seien die Grunddimension $n \in \mathbb{N}_0$ und die Geometrische Algebra $\mathcal{G} = \mathbb{R}^{2^n}$, sowie der k-Vektor $A \in \mathcal{G}^k$ und der l-Vektor $B \in \mathcal{G}^l$ mit den Graden $k, l \in \{0, \ldots, n\}$ erklärt.*
Es gilt

$$A \wedge B = \langle AB \rangle_{k+l}. \tag{3.2}$$

Beweis. Sei die Grundmenge $N = \{1, \ldots, n\}$.
Wir folgern

$$\begin{aligned} & U \cap V = \emptyset \\ \Leftrightarrow \quad & U \cup V = U \triangle V \\ \Leftrightarrow \quad & |U \triangle V| = |U| + |V| \\ \Leftrightarrow \quad & |U \triangle V| = k + l \end{aligned}$$

für alle $U \in \mathcal{P}^k(N)$ und alle $V \in \mathcal{P}^l(N)$. Per Definition des äußeren Produktes in 3.1 gilt dann

$$\begin{aligned} A \wedge B &\overset{3.1}{=} \sum_{\substack{(U,V) \in \mathcal{P}^k(N) \times \mathcal{P}^l(N) \\ : \, U \cap V = \emptyset}} A_U B_V \, e_U e_V \\ &\overset{1.22}{=} \sum_{\substack{(U,V) \in \mathcal{P}^k(N) \times \mathcal{P}^l(N) \\ : \, |U \triangle V| = k+l}} A_U B_V \, \alpha(U, V) \, e_{U \triangle V} \\ &\underset{2.4}{\overset{1.22}{=}} \langle AB \rangle_{k+l}. \end{aligned}$$

□

Korollar 3.1.3. *Es gilt*

$$\langle A\rangle_k \wedge \langle B\rangle_l = \langle\langle A\rangle_k\langle B\rangle_l\rangle_{k+l} \tag{3.3}$$

für alle $k, l \in \{0, \ldots, n\}$ *und alle* $A, B \in \mathcal{G}$.

Satz 3.1.4 (Rechenregel zum äußeren Produkt)**.** *Seien die Grunddimension* $n \in \mathbb{N}_0$, *die Grundmenge* $N = \{1, \ldots, n\}$ *und die Geometrische Algebra* $\mathcal{G} = \mathbb{R}^{2^n}$ *erklärt.*
Das äußere Produkt ist

1. *distributiv,*
2. *assoziativ und*
3. *entweder kommutativ oder antikommutativ, nach der Vorschrift*

$$A \wedge B = (-1)^{kl} B \wedge A \tag{3.4}$$

für alle k*-Vektoren* $A \in \mathcal{G}^k$ *und* l*-Vektoren* $B \in \mathcal{G}^l$ *mit* $k, l \in \{0, \ldots, n\}$.

Beweis der Distributivität. Für die Multivektoren $A = (A_U)_{U\in\mathcal{P}(N)}, B = (B_U)_{U\in\mathcal{P}(N)}$, $C = (C_U)_{U\in\mathcal{P}(N)} \in \mathcal{G}$ gilt

$$\begin{aligned} A \wedge (B + C) &\overset{3.1}{=} \sum_{\substack{(U,V)\in\mathcal{P}(N)^2 \\ :\ U\cap V=\emptyset}} A_U(B_V + C_V)e_U e_V \\ &= \sum_{\substack{(U,V)\in\mathcal{P}(N)^2 \\ :\ U\cap V=\emptyset}} A_U B_V e_U e_V + \sum_{\substack{(U,V)\in\mathcal{P}(N)^2 \\ :\ U\cap V=\emptyset}} A_U C_V e_U e_V \\ &\overset{3.1}{=} A \wedge B + A \wedge C. \end{aligned} \tag{3.5}$$

□

Beweis der Assoziativität. Wir folgern

$$\begin{aligned} & V \cap W = \emptyset \wedge U \cap (V \cup W) = \emptyset \\ \Leftrightarrow\quad & V \cap W = \emptyset \wedge (U \cap V) \cup (U \cap W) = \emptyset \\ \Leftrightarrow\quad & (V \cap W) \cup (U \cap V) \cup (U \cap W) = \emptyset \\ \Leftrightarrow\quad & (V \cap W) \cup (U \cap W) = \emptyset \wedge (U \cap V) = \emptyset \\ \Leftrightarrow\quad & (U \cup V) \cap W = \emptyset \wedge U \cap V = \emptyset \end{aligned}$$

für alle $U, V, W \in \mathcal{P}(N)$ und schließen daraus

$$\begin{aligned} A \wedge (B \wedge C) &\overset{3.1}{=} \sum_{\substack{(U,V,W)\in\mathcal{P}(N)^3 \\ :\ V\cap W=\emptyset\wedge U\cap(V\cup W)=\emptyset}} A_U B_V C_W e_U e_V e_W \\ &= \sum_{\substack{(U,V,W)\in\mathcal{P}(N)^3 \\ :\ (U\cup V)\cap W=\emptyset\wedge U\cap V=\emptyset}} A_U B_V C_W e_U e_V e_W \\ &\overset{3.1}{=} (A \wedge B) \wedge C. \end{aligned}$$

□

Beweis der kommutativen Eigenschaft. Seien die k- und l-Vektoren $A = (A_U)_{U \in \mathcal{P}^k(N)} \in \mathcal{G}^k$ und $B = (B_U)_{U \in \mathcal{P}^l(N)} \in \mathcal{G}^l$ mit $k, l \in \{0, \ldots, n\}$ gegeben.
Es gilt

$$\begin{aligned}
A \wedge B &\overset{3.1}{=} \sum_{\substack{(U,V) \in \mathcal{P}^k(N) \times \mathcal{P}^l(N) \\ :\ U \cap V = \emptyset}} A_U B_V e_U e_V \\
&\overset{1.21}{=} \sum_{\substack{(U,V) \in \mathcal{P}^k(N) \times \mathcal{P}^l(N) \\ :\ U \cap V = \emptyset}} \alpha(U,V) A_U B_V e_{U \triangle V} \\
&\overset{1.13}{=} \sum_{\substack{(U,V) \in \mathcal{P}^k(N) \times \mathcal{P}^l(N) \\ :\ U \cap V = \emptyset}} (-1)^{|U||V|} \alpha(V,U) A_U B_V e_{U \triangle V} \\
&\overset{1.21}{=} \sum_{\substack{(U,V) \in \mathcal{P}^k(N) \times \mathcal{P}^l(N) \\ :\ U \cap V = \emptyset}} (-1)^{|U||V|} A_U B_V e_V e_U \\
&\overset{3.1}{=} (-1)^{|U||V|} B \wedge A \\
&\overset{2.1}{=} (-1)^{kl} B \wedge A.
\end{aligned}$$

□

3.2. Kontraktion

Definition 3.2.1 (Links- und Rechtskontraktion)**.** Seien die Grunddimension $n \in \mathbb{N}_0$, die Grundmenge $N = \{1, \ldots, n\}$ und die Geometrische Algebra $\mathcal{G} = \mathbb{R}^{2^n}$ erklärt.
Wir definieren die *Linkskontraktion* nach Pertti Lounesto [20] als

$$\begin{aligned}
\rfloor &: \mathcal{G} \times \mathcal{G} \to \mathcal{G}, \\
(A, B) &\mapsto A \rfloor B = \sum_{\substack{(U,V) \in \mathcal{P}(N)^2 \\ :\ U \setminus V = \emptyset}} A_U B_V e_U e_V
\end{aligned} \tag{3.6}$$

und die *Rechtskontraktion* als

$$\begin{aligned}
\lfloor &: \mathcal{G} \times \mathcal{G} \to \mathcal{G}, \\
(A, B) &\mapsto A \lfloor B = \sum_{\substack{(U,V) \in \mathcal{P}(N)^2 \\ :\ V \setminus U = \emptyset}} A_U B_V e_U e_V.
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Korollar 3.2.1. *Es gilt*

$$\forall\, U, V \in \mathcal{P}(N) : U \setminus V = \emptyset \leftrightarrow U \triangle V = V \setminus U$$

und

$$\forall\, U, V \in \mathcal{P}(N) : V \setminus U = \emptyset \leftrightarrow U \triangle V = U \setminus V.$$

Korollar 3.2.2. *Es gilt*

$$\forall\, A, B \in \mathcal{G} : (AB = A \rfloor B) \leftrightarrow (BA = B \lfloor A).$$

Satz 3.2.3 (Gradsenkende Eigenschaft)**.** *Seien die Grunddimension $n \in \mathbb{N}_0$ und die Geometrische Algebra $\mathcal{G} = \mathbb{R}^{2^n}$, sowie der k-Vektor $A \in \mathcal{G}^k$ und der l-Vektor $B \in \mathcal{G}^l$ mit den Graden $k, l \in \{0, \ldots, n\}$ erklärt.*
Für $k \leq l$ gilt

$$A \rfloor B = \langle AB \rangle_{l-k} \tag{3.8}$$

und für $l \leq k$

$$A \lfloor B = \langle AB \rangle_{k-l}.$$

Beweis. Sei die Grundmenge $N = \{1, \ldots, n\}$.
Wir folgern

$$\begin{aligned} & U \setminus V = \emptyset \\ \Leftrightarrow \quad & V \setminus U = U \triangle V \\ \Leftrightarrow \quad & |U \triangle V| = |V| - |U| \\ \Leftrightarrow \quad & |U \triangle V| = l - k \end{aligned}$$

für alle $U \in \mathcal{P}^k(N)$ und alle $V \in \mathcal{P}^l(N)$. Per Definition der Kontraktion in 3.6 gilt dann

$$\begin{aligned} A \rfloor B &\overset{3.13}{=} \sum_{\substack{(U,V) \in \mathcal{P}^k(N) \times \mathcal{P}^l(N) \\ :\, U \setminus V = \emptyset}} A_U B_V \, e_U e_V \\ &\overset{1.22}{=} \sum_{\substack{(U,V) \in \mathcal{P}^k(N) \times \mathcal{P}^l(N) \\ :\, |U \triangle V| = l-k}} A_U B_V \, \alpha(U,V) \, e_{U \triangle V} \\ &\underset{2.4}{\overset{1.22}{=}} \langle AB \rangle_{l-k}. \end{aligned}$$

Der Beweis für $A \lfloor B = \langle AB \rangle_{k-l}$ kann in ähnlicher Weise geführt werden. □

Korollar 3.2.4. *Es gilt*

$$\langle A \rangle_k \rfloor \langle B \rangle_l = \langle \langle A \rangle_k \langle B \rangle_l \rangle_{l-k} \tag{3.9}$$

und

$$\langle A \rangle_k \lfloor \langle B \rangle_l = \langle \langle A \rangle_k \langle B \rangle_l \rangle_{k-l} \tag{3.10}$$

für alle $k, l \in \{1, \ldots, n\}$ und alle $A, B \in \mathcal{G}$.

Satz 3.2.5 (Rechenregel zur Kontraktion)**.** *Sei die Geometrische Algebra $\mathcal{G} = \mathbb{R}^{2^n}$ mit der Grunddimension $n \in \mathbb{N}_0$ und der Grundmenge $N = \{1, \ldots, n\}$ definiert.*
Die Kontraktion ist

1. *distributiv,*
2. *im Allgemeinen nicht assoziativ und*
3. *kommutativ für k-Vektoren mit gleichem Grad $k \in \{0, \dots, n\}$, ansonsten im Allgemeinen nicht kommutativ.*

Beweis der Distributivität. Seien die Multivektoren $A = (A_U)_{U \in \mathcal{P}(N)}, B = (B_U)_{U \in \mathcal{P}(N)}$, $C = (C_U)_{U \in \mathcal{P}(N)} \in \mathcal{G}$ erklärt.
Es gilt

$$\begin{aligned} A \rfloor (B + C) &\overset{3.6}{=} \sum_{\substack{(U,V) \in \mathcal{P}(N)^2 \\ : U \setminus V = \emptyset}} A_U (B_V + C_V) e_U e_V \\ &= \sum_{\substack{(U,V) \in \mathcal{P}(N)^2 \\ : U \setminus V = \emptyset}} (A_U B_V e_U e_V + A_U C_V e_U e_V) \\ &\overset{3.13}{=} A \rfloor B + A \rfloor C \end{aligned} \tag{3.11}$$

und in ähnlicher Weise $A \lfloor (B + C) = A \lfloor B + A \lfloor C$. □

Beweis der kommutativen Eigenschaft bei gleichen Graden. Seien die k-Vektoren $A = (A_U)_{U \in \mathcal{P}^k(N)} \in \mathcal{G}^k$ und $B = (B_U)_{U \in \mathcal{P}^k(N)} \in \mathcal{G}^k$ erklärt.
Es gilt

$$\begin{aligned} A \rfloor B &\overset{3.6}{=} \sum_{\substack{(U,V) \in \mathcal{P}(N)^2 \\ : U \setminus V = \emptyset}} A_U B_V \, e_U e_V \\ &\overset{1.21}{=} \sum_{\substack{(U,V) \in \mathcal{P}(N)^2 \\ : U \setminus V = \emptyset}} \alpha(U, V) \, A_U B_V \, e_{U \triangle V} \\ &\overset{1.12}{=} \sum_{\substack{(U,V) \in \mathcal{P}(N)^2 \\ : U \setminus V = \emptyset}} (-1)^{|U||V| + |U \cap V|} \, \alpha(V, U) \, A_U B_V \, e_{U \triangle V} \\ &\overset{1.21}{=} \sum_{\substack{(U,V) \in \mathcal{P}(N)^2 \\ : U \setminus V = \emptyset}} (-1)^{|U||V| + |U \cap V|} \, A_U B_V \, e_V e_U \\ &\overset{3.6}{=} (-1)^{kk+k} B \rfloor A \\ &= B \rfloor A \end{aligned} \tag{3.12}$$

und in ähnlicher Weise $A \lfloor B = B \lfloor A$. □

Beispiel 3.2.1 (Fehlende Assoziativität)**.** Sei die Geometrische Algebra $\mathcal{G} = \mathbb{R}^8$ erklärt. Für alle $A \in \mathcal{G}^1$, $B \in \mathcal{G}^2$ und $C \in \mathcal{G}^3$ gilt

$$A \rfloor (B \rfloor C) \in \mathcal{G}^0,$$

aber

$$(A \rfloor B) \rfloor C \in \mathcal{G}^2.$$

Beispiel 3.2.2 (Fehlende Kommutativität)**.** Sei die Geometrische Algebra $\mathcal{G} = \mathbb{R}^4$ erklärt.
Für alle $A \in \mathcal{G}^1$ und $B \in \mathcal{G}^2$ gilt

$$A \rfloor B \in \mathcal{G}^1,$$

aber

$$B \rfloor A = 0.$$

3.3. Inneres Produkt

Definition 3.3.1 (Inneres Produkt)**.** Seien die Grunddimension $n \in \mathbb{N}_0$, die Grundmenge $N = \{1, \ldots, n\}$ und die Geometrische Algebra $\mathcal{G} = \mathbb{R}^{2^n}$ erklärt.
Wir definieren das *innere Produkt* nach Hestenes und Sobczyk [18] als

$$\begin{aligned} \cdot : \mathcal{G} \times \mathcal{G} &\to \mathcal{G}, \\ (A, B) &\mapsto A \cdot B = \sum_{\substack{(U,V) \in (\mathcal{P}(N) \setminus \{\emptyset\})^2 \\ : U \setminus V = \emptyset \vee V \setminus U = \emptyset}} A_U B_V e_U e_V. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Korollar 3.3.1. *Es gilt*

$$\forall U, V \in \mathcal{P}(N) : U \setminus V = \emptyset \vee V \setminus U = \emptyset \leftrightarrow U \triangle V = V \setminus U \vee U \triangle V = U \setminus V.$$

Satz 3.3.2 (Gradsenkende Eigenschaft)**.** *Seien die Grunddimension $n \in \mathbb{N}$ und die Geometrische Algebra $\mathcal{G} = \mathbb{R}^{2^n}$, sowie der k-Vektor $A \in \mathcal{G}^k$ und der l-Vektor $B \in \mathcal{G}^l$ mit den Graden $k, l \in \{1, \ldots, n\}$ erklärt.*
Es gilt

$$A \cdot B = \langle AB \rangle_{|k-l|}. \tag{3.14}$$

Beweis. Sei die Grundmenge $N = \{1, \ldots, n\}$.
Wir folgern

$$\begin{aligned} & U \setminus V = \emptyset \vee V \setminus U = \emptyset \\ \Leftrightarrow \quad & V \setminus U = U \triangle V \vee U \setminus V = U \triangle V \\ \Leftrightarrow \quad & |U \triangle V| = |V| - |U| \vee |U \triangle V| = |U| - |V| \\ \Leftrightarrow \quad & |U \triangle V| = |(|V| - |U|)| \\ \Leftrightarrow \quad & |U \triangle V| = |k - l| \end{aligned}$$

für alle $U \in \mathcal{P}^k(N)$ und alle $V \in \mathcal{P}^l(N)$. Per Definition des inneren Produktes in 3.13 gilt dann

$$\begin{aligned} A \cdot B &\overset{3.13}{=} \sum_{\substack{(U,V)\in\mathcal{P}^k(N)\times\mathcal{P}^l(N) \\ :\ V\setminus U=U\triangle V \vee U\setminus V=U\triangle V}} A_U B_V \, e_U e_V \\ &\overset{1.22}{=} \sum_{\substack{(U,V)\in\mathcal{P}^k(N)\times\mathcal{P}^l(N) \\ :\ |U\triangle V|=|k-l|}} A_U B_V \, \alpha(U,V) \, e_{U\triangle V} \\ &\underset{2.4}{\overset{1.22}{=}} \langle AB \rangle_{|k-l|}. \end{aligned}$$

□

Korollar 3.3.3. *Es gilt*

$$\langle A \rangle_k \cdot \langle B \rangle_l = \langle \langle A \rangle_k \langle B \rangle_l \rangle_{|k-l|} \tag{3.15}$$

für alle $k, l \in \{1, \ldots, n\}$ und alle $A, B \in \mathcal{G}$.

Satz 3.3.4 (Rechenregel zum inneren Produkt)**.** *Sei die Geometrische Algebra $\mathcal{G} = \mathbb{R}^{2^n}$ mit der Grunddimension $n \in \mathbb{N}_0$ und der Grundmenge $N = \{1, \ldots, n\}$ definiert.*
Das innere Produkt ist

1. *distributiv,*
2. *im Allgemeinen nicht assoziativ und*
3. *entweder kommutativ oder antikommutativ, nach der Vorschrift*

$$A \cdot B = \begin{cases} (-1)^{k(l+1)} B \cdot A & \text{für } k \leq l \\ (-1)^{l(k+1)} B \cdot A & \text{für } k \geq l \end{cases} \tag{3.16}$$

für alle k-Vektoren $A \in \mathcal{G}^k$ und l-Vektoren $B \in \mathcal{G}^l$ mit $k, l \in \{0, \ldots, n\}$.

Beweis der Distributivität. Seien die Multivektoren $A = (A_U)_{U\in\mathcal{P}(N)}, B = (B_U)_{U\in\mathcal{P}(N)}$, $C = (C_U)_{U\in\mathcal{P}(N)} \in \mathcal{G}$ erklärt.
Es gilt

$$\begin{aligned} A \cdot (B + C) &\overset{3.13}{=} \sum_{\substack{(U,V)\in(\mathcal{P}(N)\setminus\{\emptyset\})^2 \\ :\ U\setminus V=\emptyset \vee V\setminus U=\emptyset}} A_U (B_V + C_V) e_U e_V \\ &= \sum_{\substack{(U,V)\in(\mathcal{P}(N)\setminus\{\emptyset\})^2 \\ :\ U\setminus V=\emptyset \vee V\setminus U=\emptyset}} (A_U B_V e_U e_V + A_U C_V e_U e_V) \\ &\overset{3.13}{=} A \cdot B + A \cdot C. \end{aligned} \tag{3.17}$$

□

Beweis der kommutativen Eigenschaft. Seien die k- und l-Vektoren $A = (A_U)_{U \in \mathcal{P}^k(N)} \in \mathcal{G}^k$ und $B = (B_U)_{U \in \mathcal{P}^l(N)} \in \mathcal{G}^l$ erklärt.
Es gilt

$$\begin{aligned}
A \cdot B &\overset{3.13}{=} \sum_{\substack{(U,V) \in (\mathcal{P}^k(N) \setminus \{\emptyset\}) \times (\mathcal{P}^l(N) \setminus \{\emptyset\}) \\ :\ U \setminus V = \emptyset \vee V \setminus U = \emptyset}} A_U B_V \, e_U e_V \\
&\overset{1.21}{=} \sum_{\substack{(U,V) \in (\mathcal{P}^k(N) \setminus \{\emptyset\}) \times (\mathcal{P}^l(N) \setminus \{\emptyset\}) \\ :\ U \setminus V = \emptyset \vee V \setminus U = \emptyset}} \alpha(U,V) \, A_U B_V \, e_{U \triangle V} \\
&\overset{1.12}{=} \sum_{\substack{(U,V) \in (\mathcal{P}^k(N) \setminus \{\emptyset\}) \times (\mathcal{P}^l(N) \setminus \{\emptyset\}) \\ :\ U \setminus V = \emptyset \vee V \setminus U = \emptyset}} (-1)^{|U||V| + |U \cap V|} \, \alpha(V,U) \, A_U B_V \, e_{U \triangle V} \\
&\overset{1.21}{=} \sum_{\substack{(U,V) \in (\mathcal{P}^k(N) \setminus \{\emptyset\}) \times (\mathcal{P}^l(N) \setminus \{\emptyset\}) \\ :\ U \setminus V = \emptyset \vee V \setminus U = \emptyset}} (-1)^{|U||V| + |U \cap V|} \, A_U B_V \, e_V e_U \\
&\overset{3.13}{=} \begin{cases} (-1)^{k(l+1)} B \cdot A & \text{für } k \leq l \\ (-1)^{l(k+1)} B \cdot A & \text{für } k \geq l \end{cases} .
\end{aligned}$$

□

Beispiel 3.3.1 (Fehlende Assoziativität)**.** Sei die Geometrische Algebra $\mathcal{G} = \mathbb{R}^8$ erklärt. Für alle $A \in \mathcal{G}^1$, $B \in \mathcal{G}^2$ und $C \in \mathcal{G}^3$ gilt

$$A \cdot (B \cdot C) \in \mathcal{G}^0,$$

aber

$$(A \cdot B) \cdot C \in \mathcal{G}^2.$$

4. Weitere Produkte

4.1. Kommutatorprodukt

Definition 4.1.1 (Kommutatorprodukt)**.** Seien die Grunddimension $n \in \mathbb{N}_0$ und die Geometrische Algebra $\mathcal{G} = \mathbb{R}^{2^n}$ erklärt.
Wir definieren das *Kommutatorprodukt*

$$\begin{aligned} \times : \mathcal{G} \times \mathcal{G} &\to \mathcal{G}, \\ (A, B) &\mapsto A \times B = \frac{1}{2}(AB - BA) \end{aligned} \tag{4.1}$$

als den antikommutativen Teil des Geometrischen Produktes.

Anmerkung. Die Notation des *Kommutatorproduktes* sollte nicht mit dem *Kreuzprodukt* aus der linearen Algebra verwechselt werden.

Satz 4.1.1 (Rechenregel zum Kommutatorprodukt)**.** *Seien die Grunddimension $n \in \mathbb{N}_0$ und die Geometrische Algebra $\mathcal{G} = \mathbb{R}^{2^n}$ erklärt.*
Das Kommutatorprodukt ist

1. *antikommutativ,*
2. *distributiv,*
3. *alternierend, es gilt also $A \times A = 0 \; \forall \, A \in \mathcal{G}$,*
4. *und genügt der Jakobi-Identität*

$$A \times (B \times C) + B \times (C \times A) + C \times (A \times B) = 0 \; \forall \, A, B, C \in \mathcal{G}.$$

Beweis der Antikommutativität. Das Kommutatorprodukt ist per Definition antikommutativ, es gilt

$$\begin{aligned} A \times B &\overset{4.1}{=} \frac{1}{2}(AB - BA) \\ &= -\frac{1}{2}(BA - AB) \\ &\overset{4.1}{=} -B \times A \end{aligned}$$

für alle $A, B \in \mathcal{G}$. □

Beweis der Distributivität. Es gilt

$$\begin{aligned} A \times (B + C) &\overset{4.1}{=} \frac{1}{2}\left(A(B + C) - (B + C)A\right) \\ &\overset{1.23}{=} \frac{1}{2}(AB + AC - BA - CA) \\ &= \frac{1}{2}(AB - BA) + \frac{1}{2}(AC - CA) \\ &\overset{1.23}{=} A \times B + A \times C \end{aligned} \tag{4.2}$$

für alle $A, B, C \in \mathcal{G}$. □

Beweis der alternierenden Eigenschaft. Es gilt

$$\begin{aligned} A \times A &\overset{4.1}{=} \frac{1}{2}(AA - AA) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{4.3}$$

für alle $A \in \mathcal{G}$. □

Beweis der Jakobi-Identität. Es gilt

$$\begin{aligned} & A \times (B \times C) + B \times (C \times A) + C \times (A \times B) \\ \overset{4.1}{=} \quad & \frac{1}{4}(A(BC - CB) - (BC - CB)A + B(CA - AC) \\ & - (CA - AC)B + C(AB - BA) - (AB - BA)C) \\ \overset{4.1}{=} \quad & \frac{1}{4}(ABC - ACB - BCA + CBA + BCA - BAC \\ & - CAB + ACB + CAB - CBA - ABC + BAC) \\ = 0 & \end{aligned}$$

für alle $A, B, C \in \mathcal{G}$. □

Anmerkung. Aus der Distributivität und der alternierenden Eigenschaft des Kommutatorproduktes kann die Antikommutativität gefolgert werden, da

$$\begin{aligned} A \times B &= A \times B + B \times A - B \times A \\ &\overset{4.3}{=} A \times B + A \times A + B \times A + B \times B - B \times A \\ &\overset{4.2}{=} A \times (B + A) + B \times (A + B) - B \times A \\ &\overset{4.2}{=} (A + B) \times (A + B) - B \times A \\ &\overset{4.3}{=} -B \times A \end{aligned}$$

für alle $A, B \in \mathcal{G}$.

Satz 4.1.2 (Lie-Algebra)**.** *Seien die Grunddimension $n \in \mathbb{N}_0$ und die Geometrischen Algebra $\mathcal{G} = \mathbb{R}^{2^n}$ erklärt.*
Der graduierte Untervektorraum $\mathcal{G}^2$ bildet eine Lie-Algebra mit dem Kommutatorprodukt als Lie-Klammer.

Anmerkung. Wir nennen ein Element im graduierten Untervektorraum $\mathcal{G}^2$ auch *Bivektor*.

Beweis. Zunächst stellen wir

$$\begin{aligned}
\langle A \times B \rangle_0 &\overset{4.1}{=} \frac{1}{2} \left(\langle AB \rangle_0 - \langle BA \rangle_0 \right) \\
&\overset{1.22}{=} \frac{1}{2} \sum_{U \in \mathcal{P}(N)} \left(A_U B_U \, \alpha(U,U) \, e_\emptyset - A_U B_U \, \alpha(U,U) \, e_\emptyset \right) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle A \times B \rangle_2 &\overset{4.1}{=} \frac{1}{2} \left(\langle AB \rangle_2 - \langle BA \rangle_2 \right) \\
&\overset{1.12}{=} \frac{1}{2} \left(\langle AB \rangle_2 + \langle AB \rangle_2 \right) \\
&= \langle AB \rangle_2
\end{aligned} \tag{4.4}$$

und

$$\begin{aligned}
\langle A \times B \rangle_4 &\overset{4.1}{=} \frac{1}{2} \left(\langle AB \rangle_4 - \langle BA \rangle_4 \right) \\
&\overset{3.2}{=} \frac{1}{2} \left(A \wedge B - B \wedge A \right) \\
&\overset{3.4}{=} \frac{1}{2} \left(A \wedge B - A \wedge B \right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

für alle $A, B \in \mathcal{G}^2$ fest.
Der Bivektorraum $\mathcal{G}^2$ ist stabil unter dem Kommutatorprodukt, da

$$\begin{aligned}
A \times B &\overset{4.1}{=} \langle A \times B \rangle_0 + \langle A \times B \rangle_2 + \langle A \times B \rangle_4 \\
&\overset{4.4}{=} \langle AB \rangle_2
\end{aligned}$$

für alle $A, B \in \mathcal{G}^2$.
Laut Satz 4.1.1 ist das Kommutatorprodukt distributiv, alternierend und genügt der Jakobi-Identität. Aus der Distributivität des Kommutatorproduktes folgt die Bilinearität. Damit genügt das Kommutatorprodukt zweier Bivektoren hinreichend den Bedingungen für die übliche Definition einer Lie-Klammer. □

4.2. Skalarprodukt

Definition 4.2.1 (Skalarprodukt)**.** Seien die Grunddimension $n \in \mathbb{N}_0$, die Grundmenge $N = \{1, \ldots, n\}$ und die Geometrische Algebra $\mathcal{G} = \mathbb{R}^{2^n}$ erklärt.

Das *Skalarprodukt* ist als

$$\begin{aligned} * : \mathcal{G} \times \mathcal{G} &\to \mathbb{R} \\ (A, B) &\mapsto A * B = \sum_{U \in \mathcal{P}(N)} A_U B_U \end{aligned} \tag{4.5}$$

definiert. Es entspricht dem Standardskalarprodukt im Vektorraum $\mathbb{R}^{2^n}$.

Korollar 4.2.1 (Positive Definitheit)**.** *Das Skalarprodukt ist positiv definit, es gilt*

$$A * A > 0 \ \forall A \in \mathcal{G} \setminus \{0\}. \tag{4.6}$$

Satz 4.2.2 (Rechenregel zum Skalarprodukt)**.** *Seien die Grunddimension $n \in \mathbb{N}_0$, die Grundmenge $N = \{1, \ldots, n\}$ und die Geometrische Algebra $\mathcal{G} = \mathbb{R}^{2^n}$ erklärt.*
Das Skalarprodukt ist

1. *distributiv,*
2. *und kommutativ*
3. *und im Allgemeinen nicht assoziativ.*

Beweis der Distributivität. Für alle $A, B, C \in \mathcal{G}$ gilt

$$\begin{aligned} A * (B + C) &\overset{4.5}{=} \sum_{U \in \mathcal{P}(N)} A_U (B_U + C_U) \\ &= \sum_{U \in \mathcal{P}(N)} (A_U B_U + A_U C_U) \\ &\overset{4.5}{=} A * B + A * C \end{aligned}$$

und auf gleiche Weise

$$(A + B) * C = A * C + B * C. \qquad \square$$

Beweis der Kommutativität. Es gilt

$$\begin{aligned} A * B &\overset{4.5}{=} \sum_{U \in \mathcal{P}(N)} A_U B_U \\ &= \sum_{U \in \mathcal{P}(N)} B_U A_U \\ &\overset{4.5}{=} B * A \end{aligned}$$

für alle $A, B \in \mathcal{G}$. $\square$

Beispiel 4.2.1 (Fehlende Assoziativität)**.** Sei die Geometrische Algebra $\mathcal{G} = \mathbb{R}^2$ erklärt. Für alle $A, B \in \mathcal{G}^1 \setminus \{0\}$ und $C \in \mathcal{G}^0 \setminus \{0\}$ gilt

$$(A * B) * C \neq 0,$$

aber

$$A * (B * C) = 0.$$

5. Multivektoranalysis

5.1. Differentialrechnung

Definition 5.1.1 (Richtungsableitung)**.** Sei die Geometrische Algebra $\mathcal{G}$ erklärt.
Wir definieren die *Richtungsableitung* einer Funktion $F : \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ im Punkt $X \in \mathcal{G}$ in Richtung des Multivektors $A \in \mathcal{G}$ als

$$\partial_A F(X) = \lim_{\tau \to 0} \frac{1}{\tau} \left(F(X + \tau A) - F(X) \right). \tag{5.1}$$

Definition 5.1.2 (Partielle Ableitung)**.** Seien die Grunddimension $n \in \mathbb{N}_0$, die Grundmenge $N = \{1, \ldots, n\}$ und die Geometrische Algebra $\mathcal{G} = \mathbb{R}^{2^n}$ erklärt.
Wir definieren die *partielle Ableitung* einer Funktion $F : \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ im Punkt $X \in \mathcal{G}$ nach dem Index $U \in \mathcal{P}(N)$ als

$$\frac{\partial}{\partial X_U} F(X) = \frac{\partial F}{\partial X_U}(X) = \partial_{e_U} F(X) = \lim_{\tau \to 0} \frac{1}{\tau} \left(F(X + \tau e_U) - F(X) \right). \tag{5.2}$$

Anmerkung. Das Symbol $\frac{\partial}{\partial X_U}$ verstehen wir als Ableitungsoperator nach der Koordinate des Operanden mit Index U der Funktion, auf der der Ableitungsoperator angewandt wird.

Definition 5.1.3 (Totale Differenzierbarkeit)**.** Seien die Geometrische Algebra $\mathcal{G}$ erklärt.
Wir nennen eine Funktion $F : \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ im Punkt $X \in \mathcal{G}$ *total differenzierbar*, falls eine lineare Funktion $L : \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ existiert, so dass

$$\forall\, A \in \mathcal{G} : \lim_{\tau \to 0} \frac{1}{\tau} \left(F(X + \tau A) - F(X) - L(\tau A) \right) = 0. \tag{5.3}$$

Korollar 5.1.1 (Totales Differential)**.** *Existiert eine solche lineare Funktion L, dann ist sie eindeutig bestimmt und wir nennen sie das totale Differential. Sie entspricht der Richtungsableitung*

$$\partial_A F(X) = L(A) \;\forall\, A \in \mathcal{G}. \tag{5.4}$$

Definition 5.1.4 (Nabla-Operator)**.** Seien die Grunddimension $n \in \mathbb{N}_0$, die Grundmenge $N = \{1, \ldots, n\}$ und die Geometrische Algebra $\mathcal{G} = \mathbb{R}^{2^n}$ erklärt.
Wir definieren den *Nabla-Operator* $\nabla \in \mathcal{G}$ als

$$\nabla = \sum_{U \in \mathcal{P}(N)} \frac{\partial}{\partial X_U} {e_U}^{-1}. \tag{5.5}$$

Anmerkung. Der Nabla-Operator hat alle algebraischen Eigenschaften eines Multivektors.

Lemma 5.1.2 (Totales Differential und Nabla-Operator)**.** *Seien die Geometrische Algebra $\mathcal{G}$ erklärt, sowie die Funktion $F : \mathcal{G} \to \mathcal{G}$, die im Punkt $X \in \mathcal{G}$ total differenzierbar ist.*
Es gilt

$$\forall\, A \in \mathcal{G} : \partial_A F(X) = \langle A\nabla \rangle_0 F(X).$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned}
\partial_A F &\overset{2.7}{=} \partial_{\left(\sum_{U\in\mathcal{P}(N)} A_U e_U\right)} F \\
&\overset{5.4}{=} \left(\sum_{U\in\mathcal{P}(N)} A_U \partial_{e_U}\right) F \\
&\overset{5.2}{=} \left(\sum_{U\in\mathcal{P}(N)} A_U \frac{\partial}{\partial X_U}\right) F \\
&\overset{4.5}{=} \left(A * \left(\sum_{U\in\mathcal{P}(N)} \frac{\partial}{\partial X_U} e_U\right)\right) F \\
&\overset{5.5}{=} \langle A\nabla \rangle_0 F.
\end{aligned}$$

□

Satz 5.1.3 (Ableitungsregel)**.** *Seien die Geometrische Algebra $\mathcal{G}$ erklärt, sowie die Funktionen $F, G : \mathcal{G} \to \mathcal{G}$, die im Punkt $X \in \mathcal{G}$ total differenzierbar sind.*
Am Punkt X gilt für alle $A \in \mathcal{G}$

1. $\langle A\nabla \rangle_0 (F + G) = \langle A\nabla \rangle_0 F + \langle A\nabla \rangle_0 G,$ *(Summenregel)*
2. $\langle A\nabla \rangle_0 (FG) = \left\langle A\dot{\nabla} \right\rangle_0 \dot{F}G + \left\langle A\dot{\nabla} \right\rangle_0 F\dot{G},$ *(Produktregel)*
3. $\langle A\nabla \rangle_0 (F \circ G) = \left\langle \langle A\dot{\nabla} \rangle_0 \dot{G}\, \ddot{\nabla} \right\rangle_0 \ddot{F} \circ G.$ *(Kettenregel)*

Anmerkung (Punkt-Notation)*.* Der Punkt, wie bei $\dot{\nabla}$ und $\dot{F}$, kennzeichnet innerhalb eines Produkttermes den Differentialoperator und die Funktion, auf die der Differentialoperator angewandt wird. Bezüglich der Produktregel gilt zum Beispiel

$$\left\langle A\dot{\nabla} \right\rangle_0 \dot{F}G + \left\langle A\dot{\nabla} \right\rangle_0 F\dot{G} = \left(\langle A\nabla \rangle_0 F\right) G + F \left(\langle A\nabla \rangle_0 G\right).$$

Diese Notation ist bei einer nicht-kommutativen Algebra wie der Geometrischen nützlich.

Beweis der Summenregel. Es gilt

$$\begin{aligned}
&\langle A\nabla\rangle_0 (F+G)(X) \\
&\overset{5.1}{=} \lim_{\tau\to 0} \frac{1}{\tau} \left((F+G)(X+\tau A) - (F+G)(X)\right) \\
&= \lim_{\tau\to 0} \frac{1}{\tau} \left(F(X+\tau A) + G(X+\tau A) - F(X) - G(X)\right) \\
&= \lim_{\tau\to 0} \frac{1}{\tau} \left(F(X+\tau A) - F(X)\right) + \lim_{\tau\to 0} \frac{1}{\tau} \left(G(X+\tau A) - G(X)\right) \\
&\overset{5.1}{=} \langle A\nabla\rangle_0 F(X) + \langle A\nabla\rangle_0 G(X).
\end{aligned}$$

□

Beweis der Produktregel. Es gilt

$$\begin{aligned}
&\langle A\nabla\rangle_0 (F(X)G(X)) \\
&\overset{5.1}{=} \lim_{\tau\to 0} \frac{1}{\tau} \left(F(X+\tau A)G(X+\tau A) - F(X)G(X)\right) \\
&= \lim_{\tau\to 0} \frac{1}{\tau} \left(\left(F(X+\tau A) - F(X)\right) G(X+\tau A) + F(X) \left(G(X+\tau A) - G(X)\right)\right) \\
&= \lim_{\tau\to 0} \frac{1}{\tau} \left(F(X+\tau A) - F(X)\right) G(X) + \lim_{\tau\to 0} \frac{1}{\tau} F(X) \left(G(X+\tau A) - G(X)\right) \\
&= \left(\langle A\nabla\rangle_0 F(X)\right) G(X) + F(X) \left(\langle A\nabla\rangle_0 G(X)\right) \\
&= \left\langle A\dot{\nabla}\right\rangle_0 \dot{F}(X)G(X) + \left\langle A\dot{\nabla}\right\rangle_0 F(X)\dot{G}(X).
\end{aligned}$$

□

Beweis der Kettenregel. Es gilt

$$\begin{aligned}
&\langle A\nabla\rangle_0 (F\circ G)(X) \\
&\overset{5.1}{=} \lim_{\tau\to 0} \frac{1}{\tau} \left((F\circ G)(X+\tau A) - (F\circ G)(X)\right) \\
&= \lim_{\tau\to 0} \frac{1}{\tau} \left(F(G(X+\tau A)) - F(G(X))\right) \\
&= \lim_{\tau\to 0} \frac{1}{\tau} \left(F\left(G(X) + G(X+\tau A) - G(X)\right) - F(G(X))\right) \\
&= \lim_{\tau\to 0} \frac{1}{\tau} \left(F\left(G(X) + \frac{\tau}{\tau}\left(G(X+\tau A) - G(X)\right)\right) - F(G(X))\right) \\
&= \lim_{\tau_F\to 0} \frac{1}{\tau_F} \left(F\left(G(X) + \tau_F \left(\lim_{\tau_G\to 0} \frac{1}{\tau_G} \left(G(X+\tau_G A) - G(X)\right)\right)\right) - F(G(X))\right) \\
&\overset{5.1}{=} \left\langle \langle A\dot{\nabla}\rangle_0 \dot{G}(X)\ddot{\nabla}\right\rangle_0 \ddot{F}(G(X)) \\
&= \left(\left\langle \langle A\dot{\nabla}\rangle_0 \dot{G}\,\ddot{\nabla}\right\rangle_0 \ddot{F}\circ G\right)(X).
\end{aligned}$$

□

5.2. Lineare Abbildungen

Definition 5.2.1 (Outermorphismus)**.** Sei die Geometrische Algebra $\mathcal{G}$ erklärt, sowie die lineare Funktion $f : \mathcal{G}^1 \to \mathcal{G}^1$.

Wir nennen die Funktion

$$\underline{f} : \mathcal{G} \to \mathcal{G}$$

den *Outermorphismus* der Funktion f, wenn sie folgenden Eigenschaften genügt:

$$\begin{aligned}
&1. && \underline{f}(a) = f(a)\ \forall\, a \in \mathcal{G}^1, && (5.6)\\
&2. && \underline{f}(B + C) = \underline{f}(B) + \underline{f}(C)\ \forall\, A, B \in \mathcal{G}, \\
&3. && \underline{f}(B \wedge C) = \underline{f}(B) \wedge \underline{f}(C)\ \forall\, A, B \in \mathcal{G}, \\
&4. && \underline{f}(\lambda) = \lambda\ \forall\, \lambda \in \mathcal{G}^0
\end{aligned}$$

Korollar 5.2.1 (Endomorphismus bezüglich äußerem Produkt)**.** *Seien die Geometrische Algebra $\mathcal{G}$ und der Outermorphismus $\underline{f} : \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ erklärt.*
Die Funktion $\underline{f}$ ist ein Endomorphismus bezüglich dem äußeren Produkt, es gilt

$$\underline{f}(A \wedge B) = \underline{f}(A) \wedge \underline{f}(B)$$

für alle $A, B \in \mathcal{G}$.

Definition 5.2.2 (Einheitspseudoskalar)**.** Seien die Grunddimension $n \in \mathbb{N}$, die Grundmenge $N = \{1, \ldots, n\}$ und die Geometrischen Algebra $\mathcal{G} = \mathbb{R}^{2^n}$ erklärt.
Wir nennen den Basismultivektor

$$e_N \tag{5.7}$$

den *Einheitspseudoskalar* der Geometrischen Algebra $\mathcal{G}$.

Lemma 5.2.2 (Inverses Einheitspseudoskalar)**.** *Seien eine Geometrische Algebra $\mathcal{G}_{p,q}$ mit Signatur $p, q \in \mathbb{N}$ und Grunddimension $n = p + q \in \mathbb{N}$ erklärt.*
Es gilt

$$(e_N)^{-1} = (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)+q}\, e_N. \tag{5.8}$$

Beweis. Zunächst stellen wir fest, dass

$$\prod_{i \in N} \alpha(\{i\}, \{i\}) \overset{1.15}{=} (-1)^q. \tag{5.9}$$

Wir können

$$\begin{aligned}
e_N (e_N)^{-1} &\overset{5.8}{=} e_N e_N (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)+q} \\
&\overset{1.21}{=} \alpha(N, N)(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)+q} \\
&\overset{1.19}{=} (-1)^{\frac{1}{2}|N|(|N|-1)} \left(\prod_{i \in N} \alpha(\{i\}, \{i\}) \right) (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)+q} \\
&\overset{5.9}{=} (-1)^{\frac{1}{2}|N|(|N|-1)} (-1)^q (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)+q} \\
&\overset{1.9}{=} 1
\end{aligned}$$

zeigen. □

Definition 5.2.3 (Determinante)**.** Seien die Geometrische Algebra $\mathcal{G}$, die lineare Funktion $f : \mathcal{G}^1 \to \mathcal{G}^1$ und der entsprechende Outermorphismus $\underline{f} : \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ erklärt, so dass

$$f(x) = \underline{f}(x) \; \forall \, x \in \mathcal{G}^1.$$

Wir definieren die Determinante der Funktion f als

$$\det f = \underline{f}(e_N) \, (e_N)^{-1}. \tag{5.10}$$

Lemma 5.2.3 (Zusammenhang mit Abbildungsmatrix)**.** *Seien die Grunddimension $n \in \mathbb{N}_0$, die Grundmenge $N = \{1, \ldots, n\}$ und die Geometrische Algebra $\mathcal{G} = \mathbb{R}^{2^n}$ erklärt, sowie die lineare Funktion $f : \mathcal{G}^1 \to \mathcal{G}^1$, der entsprechende Outermorphismus $\underline{f} : \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ und die entsprechende Abbildungsmatrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ so, dass $f(x) = Ax \; \forall \, x \in \mathcal{G}^1$.*
Es gilt

$$\det f = \det A.$$

Beweis. Seien die Vektoren $a_j = (A_{i,j})_{i \in N} \in \mathcal{G}^1 \; \forall \, j \in N$ die Spalten der Matrix A. Wegen $f(x) = Ax \; \forall \, x \in \mathcal{G}^1$ ist

$$a_j = f(e_{\{j\}}) \; \forall \, j \in N.$$

Sei $\lambda = \prod_{i,j \in N : i<j} \alpha(\{i\}, \{j\})$, so dass $e_N \overset{2.10}{=} \lambda \prod_{i \in N} e_{\{i\}} = \lambda \, e_{\{1\}} \wedge \ldots \wedge e_{\{n\}}$. Es gilt

$$\begin{aligned}
(\det f) \, e_N &\overset{5.10}{=} \underline{f}(e_N) \\
&= \lambda \, \underline{f} \left(e_{\{1\}} \wedge \ldots \wedge e_{\{n\}} \right) \\
&\overset{5.6}{=} \lambda \, f \left(e_{\{1\}} \right) \wedge \ldots \wedge f \left(e_{\{n\}} \right) \\
&= \lambda \, a_1 \wedge \ldots \wedge a_n \\
&\overset{3.1}{=} \lambda \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_N} (a_1)_{\{\sigma(1)\}} \ldots (a_n)_{\{\sigma(n)\}} \, e_{\{\sigma(1)\}} \ldots e_{\{\sigma(n)\}} \\
&\overset{2.13}{=} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_N} (a_1)_{\{\sigma(1)\}} \ldots (a_n)_{\{\sigma(n)\}} \, \operatorname{sgn}(\sigma) \, \lambda \, e_{\{1\}} \ldots e_{\{n\}} \\
&= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_N} (a_1)_{\{\sigma(1)\}} \ldots (a_n)_{\{\sigma(n)\}} \, \operatorname{sgn}(\sigma) \, e_N \\
&= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_N} \left(\operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{j=1}^{n} (a_j)_{\{\sigma(j)\}} \right) e_N \\
&= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_N} \left(\operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{j=1}^{n} A_{(\sigma(j),j)} \right) e_N \\
&= (\det A) \, e_N,
\end{aligned}$$

wobei letztere Äquivalenz die *Leibniz-Formel* für Determinanten ist. □

5.3. Exponentialfunktion

Definition 5.3.1. Sei eine Geometrische Algebra $\mathcal{G}$ erklärt.
Wir definieren die Multivektor-Exponentialfunktion als

$$\begin{aligned} \exp : \mathcal{G} &\to \mathcal{G}, \\ X &\mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} X^k. \end{aligned}$$

6. Dualität

6.1. Hodge-Dualoperator

Definition 6.1.1 (Hodge-Dualoperator)**.** Seien die Grunddimension $n \in \mathbb{N}_0$, die Grundmenge $N = \{1, \ldots, n\}$ und die Geometrische Algebra $\mathcal{G} = \mathbb{R}^{2^n}$ erklärt.
Wir definieren den *Hodge-Dualoperator* als

$$\begin{aligned} \star\colon \mathcal{G} &\to \mathcal{G}, \\ A &\mapsto \star A = \sum_{U \in \mathcal{P}(N)} A_U \, \alpha(U, N) \, e_{(U^C)} = \sum_{U \in \mathcal{P}(N)} A_{(U^C)} \, \alpha(N, U) \, e_U. \end{aligned} \tag{6.1}$$

Dabei versteht sich das Komplement $U^C = N \setminus U \ \forall U \in \mathcal{P}(N)$ bezüglich der Grundmenge N.

Korollar 6.1.1. *Wegen $U^C = N \setminus U = U \triangle N \ \forall U \in \mathcal{P}(N)$ gilt*

$$\star A \overset{6.1}{=} \sum_{U \in \mathcal{P}(N)} A_U \, \alpha(U, N) \, e_{(U^C)} \overset{1.21}{=} \sum_{U \in \mathcal{P}(N)} A_U \, \alpha(U, N) \alpha(U, N) \, e_U e_N \underset{1.3}{\overset{1.9}{=}} A \, e_N$$

für alle $A \in \mathcal{G}$.

Lemma 6.1.2 (Zweimalige Anwendung des Hodge-Dualoperators)**.** *Seien die Grunddimension $n \in \mathbb{N}_0$ und die Geometrische Algebra $\mathcal{G} = \mathbb{R}^{2^n}$ erklärt.*
Für alle $A \in \mathcal{G}$ gilt

$$\star(\star A) = \alpha(N, N) \, A \tag{6.2}$$

Beweis. Sei die Grundmenge $N = \{1, \ldots, n\}$.
Für alle $A \in \mathcal{G}$ gilt

$$\begin{aligned} \star(\star A) &\overset{6.1}{=} \sum_{U \in \mathcal{P}(N)} A_U e_U \, \alpha(U, N) \alpha(U^C, N) \\ &\overset{1.10}{=} \sum_{U \in \mathcal{P}(N)} A_U e_U \, \alpha(N, N) \\ &\overset{1.3}{=} \alpha(N, N) \, A. \end{aligned}$$

□

Lemma 6.1.3 (Äußeres Produkt als Kontraktion)**.** *Seien die Grunddimension $n \in \mathbb{N}_0$ und die Geometrische Algebra $\mathcal{G} = \mathbb{R}^{2^n}$ erklärt.*
Für alle $A, B \in \mathcal{G}$ gilt

$$\star(A \wedge B) = A \rfloor (\star B) \tag{6.3}$$

und

$$\star(A \rfloor B) = A \wedge (\star B).$$

Beweis. Sei die Grundmenge $N = \{1, \ldots, n\}$.
Für alle $U, V \in \mathcal{P}(N)$ gilt

$$(U \triangle V)^C = U \triangle V^C, \tag{6.4}$$

und

$$U \cap V = U \setminus V^C.$$

Daraus folgern wir

$$\begin{aligned}
\star(A \wedge B) &\overset{3.1}{\underset{6.1}{=}} \sum_{\substack{(U,V) \in \mathcal{P}(N)^2 \\ :\, U \cap V = \emptyset}} A_U B_V \, \alpha(U,V) \alpha(U \triangle V, N) \, e_{(U \triangle V)^C} \\
&\overset{6.4}{=} \sum_{\substack{(U,V) \in \mathcal{P}(N)^2 \\ :\, U \setminus V^C = \emptyset}} A_U B_V \, \alpha(U,V) \alpha(U \triangle V, N) \alpha(U, V^C) \, e_U e_{V^C} \\
&\overset{1.10}{=} \sum_{\substack{(U,V) \in \mathcal{P}(N)^2 \\ :\, U \setminus V^C = \emptyset}} A_U B_V \, \alpha(V, N) \, e_U e_{V^C} \\
&\overset{3.6}{\underset{6.1}{=}} A \rfloor (\star B)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\star(A \rfloor B) &\overset{3.6}{\underset{6.1}{=}} \sum_{\substack{(U,V) \in \mathcal{P}(N)^2 \\ :\, U \setminus V = \emptyset}} A_U B_V \, \alpha(U,V) \alpha(U \triangle V, N) \, e_{(U \triangle V)^C} \\
&\overset{6.4}{=} \sum_{\substack{(U,V) \in \mathcal{P}(N)^2 \\ :\, U \cap V^C = \emptyset}} A_U B_V \, \alpha(U,V) \alpha(U \triangle V, N) \alpha(U, V^C) \, e_U e_{V^C} \\
&\overset{1.10}{=} \sum_{\substack{(U,V) \in \mathcal{P}(N)^2 \\ :\, U \cap V^C = \emptyset}} A_U B_V \, \alpha(V, N) \, e_U e_{V^C} \\
&\overset{3.1}{\underset{6.1}{=}} A \wedge (\star B)
\end{aligned}$$

für alle $A, B \in \mathcal{G}$. □

Lemma 6.1.4 (Typische Eigenschaft des Hodge-Dualoperators)**.** *Seien die Grunddimension $n \in \mathbb{N}_0$ und die Geometrische Algebra $\mathcal{G} = \mathbb{R}^{2^n}$ erklärt, sowie der Grad $k \in \{0, \dots, n\}$.*
Für alle $A, B \in \mathcal{G}^k$ gilt

$$A \wedge (\star B) = (A \rfloor B)\, e_N = (A \lfloor B)\, e_N$$

Beweis. Sei die Grundmenge $N = \{1, \dots, n\}$. Wegen

$$\begin{aligned} \forall\, U, V \in \mathcal{P}^k(N) : \quad & U \cap V^C = U \setminus V = \emptyset \wedge |U| = |V| \\ \leftrightarrow \quad & U = V \\ \leftrightarrow \quad & V \setminus U = \emptyset \wedge |U| = |V| \end{aligned}$$

gilt

$$\begin{aligned} A \wedge (\star B) &\overset{3.1}{\underset{6.1}{=}} \sum_{\substack{(U,V) \in \mathcal{P}^k(N)^2 \\ :\, U \cap V^C = \emptyset}} A_U B_V\, \alpha(V, N)\, e_U e_{(V^C)} \\ &= \sum_{U \in \mathcal{P}^k(N)} A_U B_U\, \alpha(U, N) \alpha(U, U^C)\, e_{U \triangle U^C} \\ &= \sum_{U \in \mathcal{P}^k(N)} A_U B_U\, \alpha(U, U)\, e_N, \\ (A \rfloor B)\, e_N &\overset{3.6}{=} \sum_{\substack{(U,V) \in \mathcal{P}^k(N)^2 \\ :\, U \setminus V = \emptyset}} A_U B_V\, \alpha(U, V)\, e_{U \triangle V} e_N \\ &= \sum_{U \in \mathcal{P}^k(N)} A_U B_U\, \alpha(U, U)\, e_N, \\ (A \lfloor B)\, e_N &\overset{3.7}{=} \sum_{\substack{(U,V) \in \mathcal{P}^k(N)^2 \\ :\, V \setminus U = \emptyset}} A_U B_V\, \alpha(U, V)\, e_{U \triangle V} e_N \\ &= \sum_{U \in \mathcal{P}^k(N)} A_U B_U\, \alpha(U, U)\, e_N \end{aligned}$$

für alle $A, B \in \mathcal{G}^k$. □

6.2. Metrisch neutraler Dualoperator

Definition 6.2.1 (Metrisch neutraler Dualoperator)**.** Seien die Grunddimension $n \in \mathbb{N}_0$, die Grundmenge $N = \{1, \dots, n\}$ und die Geometrische Algebra $\mathcal{G} = \mathbb{R}^{2^n}$ erklärt.
Wir definieren den *metrisch neutralen Dualoperator* als

$$\begin{aligned} &{}^*\colon \mathcal{G} \to \mathcal{G}, \\ &A \mapsto A^* = \sum_{U \in \mathcal{P}(N)} A_U\, \alpha(U, U^C)\, e_{(U^C)} = \sum_{U \in \mathcal{P}(N)} A_{(U^C)}\, \alpha(U^C, U)\, e_U. \end{aligned} \tag{6.5}$$

Lemma 6.2.1 (Zweimalige Anwendung des metrisch neutralen Dualoperators)**.** *Seien eine Grunddimension $n \in \mathbb{N}_0$ und eine Geometrische Algebra $\mathcal{G}$ erklärt, sowie der k-Vektor $A \in \mathcal{G}^k$ mit Grad $k \in \{0, \dots, n\}$.*
Es gilt

$$(A^*)^* = (-1)^{k(n-k)} A. \tag{6.6}$$

Beweis. Sei die Grundmenge $N = \{1, \dots, n\}$.
Es gilt

$$\begin{aligned}(A^*)^* &\overset{6.5}{=} \sum_{U \in \mathcal{P}^k(N)} A_U \, \alpha(U, U^C) \alpha(U^C, U) \, e_U \\ &\overset{1.12}{=} (-1)^{k(n-k)} A.\end{aligned}$$

□

Lemma 6.2.2 (Äußeres Produkt als Skalarprodukt)**.** *Seien die Grunddimension $n \in \mathbb{N}_0$ und die Geometrische Algebra $\mathcal{G} = \mathbb{R}^{2^n}$ erklärt.*
Für alle $A, B \in \mathcal{G}$ gilt

$$\langle A \, B^* \rangle_n = (A * B) \, e_N. \tag{6.7}$$

Beweis. Wegen $U \triangle V^C = N \leftrightarrow U = V \;\forall U, V \in \mathcal{P}(N)$ gilt

$$\begin{aligned}\langle A \, B^* \rangle_n &\underset{6.5}{\overset{2.4}{=}} \sum_{\substack{(U,V) \in \mathcal{P}(N)^2 \\ : \, U \triangle V^C = N}} A_U B_V \, \alpha(V, V^C) \alpha(U, V^C) \, e_{U \triangle V^C} \\ &= \sum_{U \in \mathcal{P}(N)} A_U B_U \, \alpha(U, U^C) \alpha(U, U^C) \, e_{U \triangle U^C} \\ &\underset{4.5}{\overset{1.9}{=}} (A * B) \, e_N.\end{aligned}$$

□

für alle $A, B \in \mathcal{G}$.

Definition 6.2.2 (Neutralisator)**.** Seien die Grunddimension $n \in \mathbb{N}_0$, die Grundmenge $N = \{1, \dots, n\}$ und die Geometrische Algebra $\mathcal{G} = \mathbb{R}^{2^n}$ erklärt.
Wir definieren den *Neutralisator* als

$$\begin{aligned}\widetilde{} : \mathcal{G} \times \mathcal{G} &\to \mathcal{G}, \\ A &\mapsto \widetilde{A} = \sum_{U \in \mathcal{P}(N)} A_U \, \alpha(U, U) \, e_U.\end{aligned} \tag{6.8}$$

Lemma 6.2.3 (Zusammenhang Hodge- und metrisch neutraler Dualoperator)**.** *Sei eine Geometrische Algebra $\mathcal{G}$ erklärt.*
Für alle $A \in \mathcal{G}$ gilt

$$\star(\widetilde{A}) = A^*$$

und

$$\star A = (\widetilde{A})^*.$$

Beweis. Seien die Grunddimension $n \in \mathbb{N}_0$ und die Grundmenge $N = \{1, \ldots, n\}$ erklärt, so dass $\mathcal{G} = \mathbb{R}^{2^n}$.
Für alle $A \in \mathcal{G}$ gilt

$$\begin{aligned}
\star(\widetilde{A}) &\overset{6.8}{\underset{6.1}{=}} \sum_{U \in \mathcal{P}(N)} A_U \, \alpha(U,U)\alpha(U,N) \, e_{U^C} \\
&\overset{1.10}{=} \sum_{U \in \mathcal{P}(N)} A_U \, \alpha(U,U^C) \, e_{U^C} \\
&\overset{6.5}{=} A^*
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\star A &\overset{6.1}{=} \sum_{U \in \mathcal{P}(N)} A_U \, \alpha(U,N) \, e_{U^C} \\
&\overset{1.10}{=} \sum_{U \in \mathcal{P}(N)} A_U \, \alpha(U,U)\alpha(U,U^C) \, e_{U^C} \\
&\overset{6.8}{\underset{6.5}{=}} (\widetilde{A})^*.
\end{aligned}$$

□

6.3. Durchschnittsoperator

Definition 6.3.1 (Durchschnittsoperator)**.** Seien die Grunddimension $n \in \mathbb{N}_0$, die Grundmenge $N = \{1, \ldots, n\}$ und die Geometrische Algebra $\mathcal{G} = \mathbb{R}^{2^n}$ erklärt.
Wir definieren den *Durchschnittsoperator* als

$$\begin{aligned}
&\vee : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \to \mathcal{G}, \\
&\quad (A,B) \mapsto A \vee B = \sum_{\substack{(U,V) \in \mathcal{P}(N)^2 \\ : \, U^C \cap V^C = \emptyset}} A_U B_V \, \alpha(V^C, U^C) \, e_{(U \triangle V)^C}.
\end{aligned} \tag{6.9}$$

Satz 6.3.1 (Dualität zwischen äußerem Produkt und Durchschnittsoperator)**.** *Sei eine Geometrische Algebra $\mathcal{G}$ erklärt.*
Für alle $A, B \in \mathcal{G}$ gilt

$$A^* \wedge B^* = (A \vee B)^* \tag{6.10}$$

und

$$A^* \vee B^* = (A \wedge B)^*.$$

Beweis. Seien die Grunddimension $n \in \mathbb{N}_0$ und die Grundmenge $N = \{1, \ldots, n\}$ erklärt, so dass $\mathcal{G} = \mathbb{R}^{2^n}$.

Für alle $A, B \in \mathcal{G}$ gilt

$$\begin{aligned}
A^* \wedge B^* &\overset{6.5}{\underset{3.1}{=}} \sum_{\substack{(U,V)\in\mathcal{P}(N)^2 \\ :\ U^C\cap V^C=\emptyset}} A_U B_V\, \alpha(U,U^C)\alpha(V,V^C)\alpha(U^C,V^C)\, e_{U\triangle V} \\
&\overset{1.10}{\underset{1.9}{=}} \sum_{\substack{(U,V)\in\mathcal{P}(N)^2 \\ :\ U^C\cap V^C=\emptyset}} A_U B_V\, \alpha(U,U^C)\alpha((U\triangle V)^C,V^C)\alpha(V^C,U^C)\alpha(V^C,U^C)\, e_{U\triangle V} \\
&\overset{1.10}{=} \sum_{\substack{(U,V)\in\mathcal{P}(N)^2 \\ :\ U^C\cap V^C=\emptyset}} A_U B_V\, \alpha((U\triangle V)^C,U\triangle V)\alpha(V^C,U^C)\, e_{U\triangle V} \\
&\overset{6.5}{\underset{6.9}{=}} (A\vee B)^*
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
A^* \vee B^* &\overset{6.5}{\underset{6.9}{=}} \sum_{\substack{(U,V)\in\mathcal{P}(N)^2 \\ :\ U^C\cap V^C=\emptyset}} A_U B_V\, \alpha(U,U^C)\alpha(V,V^C)\alpha(V,U)\, e_{(U\triangle V)^C} \\
&\overset{1.10}{\underset{1.9}{=}} \sum_{\substack{(U,V)\in\mathcal{P}(N)^2 \\ :\ U^C\cap V^C=\emptyset}} A_U B_V\, \alpha(U,U^C)\alpha(V,(U\triangle V)^C)\alpha(U,V)\alpha(U,V)\, e_{(U\triangle V)^C} \\
&\overset{1.10}{=} \sum_{\substack{(U,V)\in\mathcal{P}(N)^2 \\ :\ U^C\cap V^C=\emptyset}} A_U B_V\, \alpha(U\triangle V,(U\triangle V)^C)\alpha(U,V)\, e_{(U\triangle V)^C} \\
&\overset{6.5}{\underset{6.9}{=}} (A\wedge B)^*. \qquad \square
\end{aligned}$$

7. Vektor, Versor und Spat

7.1. Vektor

7.1.1. Äußeres Produkt

Korollar 7.1.1 (Äußeres Produkt von Vektoren)**.** *Sei die Geometrische Algebra $\mathcal{G}$ erklärt.*
Bezüglich dem äußeren Produkt von Vektoren in $\mathcal{G}^1$ gilt

$$a \wedge b \overset{3.2}{=} \langle ab \rangle_2 \in \mathcal{G}^2 \tag{7.1}$$

für alle $a, b \in \mathcal{G}^1$.

Korollar 7.1.2 (Antikommutativität)**.** *Das äußere Produkt von Vektoren ist antikommutativ, es gilt*

$$a \wedge b \overset{3.4}{=} -b \wedge a \tag{7.2}$$

für alle $a, b \in \mathcal{G}^1$.

Lemma 7.1.3 (Äußeres Produkt gleicher Vektoren)**.** *Sei die Geometrische Algebra $\mathcal{G}$ erklärt.*
Es gilt

$$a \wedge a = 0 \tag{7.3}$$

für alle $a \in \mathcal{G}^1$.

Beweis. Aus

$$a \wedge a \overset{7.2}{=} -a \wedge a$$

folgt $a \wedge a = 0$ für alle $a \in \mathcal{G}^1$. □

7.1.2. Kontraktion und inneres Produkt

Korollar 7.1.4 (Kontraktion und inneres Produkt von Vektoren)**.** *Sei die Geometrische Algebra $\mathcal{G}$ erklärt.*
Bezüglich der Kontraktion und dem inneren Produkt von Vektoren in $\mathcal{G}^1$ gilt

$$a \rfloor b \overset{3.8}{=} a \lfloor b \overset{3.8}{=} a \cdot b \overset{3.14}{=} \langle ab \rangle_0 \in \mathcal{G}^0 \overset{2.9}{=} \mathbb{R} \tag{7.4}$$

für alle $a, b \in \mathcal{G}^1$.

Anmerkung. Alle folgende Eigenschaften von Vektoren bezüglich dem inneren Produkt gelten auch bezüglich der Kontraktion.

Korollar 7.1.5 (Kommutativität)**.** *Die Kontraktion und das innere Produkt von Vektoren ist kommutativ, es gilt*

$$a \cdot b \overset{3.16}{=} b \cdot a \tag{7.5}$$

für alle $a, b \in \mathcal{G}^1$.

Lemma 7.1.6 (Nicht-Entartung)**.** *Sei die Geometrische Algebra* $\mathcal{G}$ *erklärt.*
Es gilt

$$\forall\, a \in \mathcal{G}^1 \setminus \{0\}\ \exists\, b \in \mathcal{G}^1 : a \cdot b \neq 0.$$

Beweis. Seien $n \in \mathbb{N}_0$ die Grunddimension und $N = \{1, \ldots, n\}$ die Grundmenge der Geometrischen Algebra $\mathcal{G} = \mathbb{R}^{2^n}$.
Wir stellen fest, dass für einen Vektor $a = (a_U)_{U \in \mathcal{P}^1(N)} \in \mathcal{G}^1 \setminus \{0\}$ immer ein Index $U \in \mathcal{P}^1(N) : a_U \neq 0$ existiert, so dass $a \cdot e_U \neq 0$ gilt. □

Definition 7.1.1 (Orthogonalität)**.** Sei die Geometrische Algebra $\mathcal{G}$ erklärt.
Wir nennen zwei Vektoren $a, b \in \mathcal{G}^1 : a \cdot b = 0$ *orthogonal.*

Anmerkung. Der Begriff wir hier als Erweiterung des Begriffes der Orthogonalität aus der lineare Algebra verwendet. Insbesondere folgt aus der Orthogonalität zweier Vektoren im Allgemeinen *nicht* die lineare Unabhängigkeit der Vektoren.

Korollar 7.1.7 (Positive Definitheit)**.** *In einer Geometrische Algebra* $\mathcal{G}_{n,0}$ *mit Signatur* $(n, 0)$ *und Grunddimension* $n \in \mathbb{N}_0$ *ist das innere Produkt zwischen Vektoren positiv definit, es gilt*

$$a \cdot a > 0\ \forall\, a \in \mathcal{G}^1_{n,0} \setminus \{0\}.$$

Korollar 7.1.8 (Negative Definitheit)**.** *In einer Geometrische Algebra* $\mathcal{G}_{0,n}$ *mit Signatur* $(0, n)$ *und Grunddimension* $n \in \mathbb{N}_0$ *ist das innere Produkt zwischen Vektoren negativ definit, es gilt*

$$a \cdot a < 0\ \forall\, a \in \mathcal{G}^1_{0,n} \setminus \{0\}.$$

Lemma 7.1.9 (Orthogonalität und lineare Unabhängigkeit)**.** *Seien die Grunddimension* $n \in \mathbb{N}_0$*, die Signatur entweder als* $S = (n, 0)$ *oder als* $S = (0, n)$ *und die Geometrische Algebra* $\mathcal{G}_S = \mathbb{R}^{2^n}$ *erklärt.*
Orthogonale Vektoren $a, b \in \mathcal{G}^1_S \setminus \{0\} : a \cdot b = 0$ *sind linear unabhängig.*

Beweis. Das innere Produkt in der Geometrischen Algebra $\mathcal{G}_{n,0}$ ist positiv definit, es gilt

$$\begin{aligned} c \cdot c &> 0\ \forall\, c \in \mathcal{G}^1_{n,0} \setminus \{0\} \\ \Rightarrow c \cdot (\lambda c) &\neq 0\ \forall\, c \in \mathcal{G}^1_{n,0} \setminus \{0\}\ \forall\, \lambda \in \mathbb{R} \setminus 0. \end{aligned}$$

Da nur die Vektoren $\{\lambda c \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ von $c \in \mathcal{G}^1_{n,0} \setminus \{0\}$ linear abhängig sind, müssen zwei Vektoren $a, b \in \mathcal{G}^1 \setminus \{0\} : a \cdot b = 0$ linear unabhängig sein.
Der Beweis zur Geometrischen Algebra $\mathcal{G}_{0,n}$ mit einem negativ definiten inneren Produkt wird in ähnlicher Weise geführt. □

Beispiel 7.1.1 (Selbstorthogonaler Vektor)**.** Seien die Geometrischen Algebra $\mathcal{G}_{1,1}$ definiert, sowie der Vektor $a = (\lambda, \lambda) \in \mathcal{G}^1_{1,1}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ erklärt.
Es gilt

$$\begin{aligned} a \cdot a &= \lambda^2 \, e_{\{1\}} e_{\{1\}} + \lambda^2 \, e_{\{2\}} e_{\{2\}} \\ &= \lambda^2 - \lambda^2 \\ &= 0. \end{aligned}$$

7.1.3. Geometrisches Produkt

Lemma 7.1.10 (Geometrisches Produkt von Vektoren)**.** *Sei die Geometrische Algebra $\mathcal{G} = \mathbb{R}^{2^n}$ erklärt.*
Bezüglich dem Geometrischen Produkt von Vektoren gilt

$$ab = a \cdot b + a \wedge b \in \mathcal{G}^0 \oplus \mathcal{G}^2. \tag{7.6}$$

für alle $a, b \in \mathcal{G}^1$.

Beweis. Seien $n \in \mathbb{N}_0$ die Grunddimension und $N = \{1, \ldots, n\}$ die Grundmenge der Geometrischen Algebra $\mathcal{G}$, sowie die Vektoren $a = (a_U)_{U \in \mathcal{P}^1(N)}, b = (b_U)_{U \in \mathcal{P}^1(N)} \in \mathcal{G}^1$ erklärt.
Es gilt

$$\begin{aligned} ab &\overset{1.22}{=} \sum_{U,V \in \mathcal{P}^1(N)} a_U b_V e_U e_V \\ &= \sum_{U,V \in \mathcal{P}^1(N) : U = V} a_U b_V e_U e_V + \sum_{U,V \in \mathcal{P}^1(N) : U \cap V = \emptyset} a_U b_V e_U e_V \\ &\underset{3.13}{\overset{3.1}{=}} a \cdot b + a \wedge b \in \mathcal{G}^0 \oplus \mathcal{G}^2. \end{aligned}$$

□

Korollar 7.1.11 (Geometrisches Produkt gleicher Vektoren)**.** *Es gilt*

$$aa \overset{7.3}{=} a \cdot a \tag{7.7}$$

für alle $a \in \mathcal{G}^1$.

Lemma 7.1.12 (Anti-/symmetrischer Teil)**.** *Sei die Geometrische Algebra $\mathcal{G}$ erklärt.*
Es gilt

$$a \cdot b = \frac{1}{2}(ab + ba)$$

und

$$a \wedge b = \frac{1}{2}(ab - ba) \tag{7.8}$$

für alle $a, b \in \mathcal{G}^1$.

Beweis. Wir können

$$\begin{aligned} a \cdot b &\overset{7.6}{=} ab - a \wedge b \\ &\overset{7.2}{=} ab + b \wedge a \\ &\overset{7.6}{=} ab + ba - b \cdot a \\ &\overset{7.5}{=} ab + ba - a \cdot b \\ &= \frac{1}{2}(ab + ba) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} a \wedge b &\overset{7.6}{=} ab - a \cdot b \\ &\overset{7.5}{=} ab - b \cdot a \\ &\overset{7.6}{=} ab - ba + b \wedge a \\ &\overset{7.2}{=} ab - ba - a \wedge b \\ &= \frac{1}{2}(ab - ba) \end{aligned}$$

für alle $a, b \in \mathcal{G}^1$ entwickeln. □

Anmerkung. Diese Gleichungen in Gleichung 7.6 eingesetzt ergibt

$$\begin{aligned} ab &= a \cdot b + a \wedge b \\ &= \frac{1}{2}(ab + ba) + \frac{1}{2}(ab - ba) \\ &= \frac{1}{2}(ab + ba + ab - ba) \\ &= \frac{1}{2}(ab + ab) \\ &= ab. \end{aligned}$$

Satz 7.1.13 (Inverse)**.** *Für jeden Vektor $a \in \mathcal{G}^1 : aa \neq 0$ ist eine Inverse*

$$\begin{aligned} &\mathcal{G}^1 \to \mathcal{G}^1, \\ &a \mapsto a^{-1} = \frac{1}{a \cdot a} a \end{aligned} \tag{7.9}$$

erklärt.

Beweis. Das neutrale Element der Geometrische Algebra $\mathcal{G}$ bezüglich des Geometrischen Produktes ist $e_\emptyset = 1$. Es gilt

$$aa^{-1} = \frac{1}{a \cdot a} aa = \frac{a \cdot a}{a \cdot a} = 1 \; \forall \, a \in \mathcal{G}^1 : aa \neq 0.$$

□

Korollar 7.1.14. *Jede Inverse eines Vektors ist ein Vektor.*

Korollar 7.1.15 (Vektorinverse bei definitem inneren Produkt)**.** *In einer Geometrische Algebra $\mathcal{G}_S$ mit Signatur $S = (n, 0)$ oder $S = (0, n)$ und Grunddimension $n \in \mathbb{N}_0$ ist für jeden Vektor in $\mathcal{G}_S^1 \setminus \{0\}$ eine Inverse definiert, da das innere Produkt zwischen Vektoren definit ist.*

Beispiel 7.1.2. Seien die Grundmenge $N = \{1, 2, 3\}$ und die Geometrischen Algebra $\mathcal{G}_{2,1} = \mathbb{R}^{|\mathcal{P}(N)|} = \mathbb{R}^8$ definiert, sowie die Vektoren

$$\begin{aligned} a &= a_{\{1\}}e_{\{1\}} + a_{\{2\}}e_{\{2\}} + a_{\{3\}}e_{\{3\}}, \\ b &= b_{\{1\}}e_{\{1\}} + b_{\{2\}}e_{\{2\}} + b_{\{3\}}e_{\{3\}} \end{aligned}$$

mit $a, b \in \mathcal{G}^1$. Damit gilt

1. $$\begin{aligned} a \cdot b =& a_{\{1\}}b_{\{1\}}e_{\{1\}}e_{\{1\}} + a_{\{2\}}b_{\{2\}}e_{\{2\}}e_{\{2\}} + a_{\{3\}}b_{\{3\}}e_{\{3\}}e_{\{3\}} \\ =& g(\{1\})a_{\{1\}}b_{\{1\}} + g(\{2\})a_{\{2\}}b_{\{2\}} + g(\{3\})a_{\{3\}}b_{\{3\}} \\ =& a_{\{1\}}b_{\{1\}} + a_{\{2\}}b_{\{2\}} - a_{\{3\}}b_{\{3\}}, \end{aligned}$$
2. $$\begin{aligned} a \wedge b =& (a_{\{2\}}b_{\{3\}} - a_{\{3\}}b_{\{2\}})e_{\{2\}}e_{\{3\}} + (a_{\{3\}}b_{\{1\}} - a_{\{1\}}b_{\{3\}})e_{\{3\}}e_{\{1\}} \\ &+ (a_{\{1\}}b_{\{2\}} - a_{\{2\}}b_{\{1\}})e_{\{1\}}e_{\{2\}}, \end{aligned}$$
3. $$a^{-1} = \frac{1}{a_{\{1\}}a_{\{1\}} + a_{\{2\}}a_{\{2\}} - a_{\{3\}}a_{\{3\}}}(a_{\{1\}}e_{\{1\}} + a_{\{2\}}e_{\{2\}} + a_{\{3\}}e_{\{3\}}),$$

wobei für $a_{\{1\}}a_{\{1\}} + a_{\{2\}}a_{\{2\}} = a_{\{3\}}a_{\{3\}}$ die Inverse a^{-1} undefiniert bleibt.

7.2. Versor

Definition 7.2.1 (Versor)**.** Seien die Grunddimension $n \in \mathbb{N}_0$, die Grundmenge $N = \{1, \ldots, n\}$ und die Geometrischen Algebra $\mathcal{G} = \mathbb{R}^{2^n}$ gegeben, sowie $k \in \mathbb{N}$ Vektoren $a_i \in \mathcal{G}^1 \ \forall\, i \in \{1, \ldots, k\}$.
Wir nennen das endliche Geometrische Produkt von k Vektoren

$$\prod_{i \in \{1,\ldots,k\}} a_i = a_1 a_2 \ldots a_k$$

einen *Versor*.

Lemma 7.2.1 ((Un-)gerader Versor)**.** *Seien die Geometrische Algebra $\mathcal{G}$ erklärt, sowie der Versor $A \in \mathcal{G}$, der aus dem endlichen Geometrischen Produkt von $k \in \mathbb{N}_0$ Vektoren besteht.*
In Abhängigkeit von der Parität der Anzahl k kann der Versor A in eine Summe von Elementen entweder gerader oder ungerader graduierter Untervektorräume zerlegt werden,

also

$$A = \begin{cases} \left(\sum_{i \in \{0,2,\ldots,k\}} \langle A \rangle_i \right) \in \mathcal{G}^+ & \textit{falls } k \textit{ gerade} \\ \left(\sum_{i \in \{1,3,\ldots,k\}} \langle A \rangle_i \right) \in \mathcal{G}^- & \textit{falls } k \textit{ ungerade} \end{cases} . \tag{7.10}$$

Anmerkung. Entsprechend der Parität der Anzahl der 1-Vektoren im endlichen Geometrischen Produkt wird der Versor als *gerade* oder *ungerade* bezeichnet.

Beweis. Seien $n \in \mathbb{N}$ die Grunddimension und $N = \{1, \ldots, n\}$ die Grundmenge der Geometrische Algebra $\mathcal{G} = \mathbb{R}^{2^n}$. Sei ein $k \in \{0, \ldots, n\}$-Vektor $A = (A_U)_{U \in \mathcal{P}^k(N)} \in \mathcal{G}^k$ und ein 1-Vektor $a = (a_{\{i\}})_{i \in N} \in \mathcal{G}^1$ gegeben.
Es gilt

$$|U \triangle \{i\}| \overset{2.3}{=} \begin{cases} k-1 & \text{falls } i \in U \\ k+1 & \text{falls } i \in N \setminus U \end{cases} \tag{7.11}$$

für alle $U \in \mathcal{P}^k(N)$ und für alle $i \in N$.
Für das Geometrische Produkt des k-Vektors A und des 1-Vektors a können wir

$$\begin{aligned} Aa &\overset{1.22}{=} \sum_{U \in \mathcal{P}^k(N)} \sum_{i \in N} A_U a_{\{i\}} \, \alpha(U, \{i\}) \, e_{U \triangle \{i\}} \\ &= \sum_{U \in \mathcal{P}^k(N)} \sum_{i \in U} A_U a_{\{i\}} \, \alpha(U, \{i\}) \, e_{U \triangle \{i\}} \\ &+ \sum_{U \in \mathcal{P}^k(N)} \sum_{i \in N \setminus U} A_U a_{\{i\}} \, \alpha(U, \{i\}) \, e_{U \triangle \{i\}} \\ &\overset{7.11}{=} \left\langle \sum_{U \in \mathcal{P}^k(N)} \sum_{i \in U} A_U a_{\{i\}} \, \alpha(U, \{i\}) \, e_{U \triangle \{i\}} \right\rangle_{k-1} \\ &+ \left\langle \sum_{U \in \mathcal{P}^k(N)} \sum_{i \in N \setminus U} A_U a_{\{i\}} \, \alpha(U, \{i\}) \, e_{U \triangle \{i\}} \right\rangle_{k+1} \end{aligned}$$

entwickeln, es gilt $Aa \in \mathcal{G}^{k-1} \oplus \mathcal{G}^{k+1}$. (Falls $\mathcal{G}^{k-1}$ nicht definiert ist, verstehen wir darunter einen Nullvektorraum; entsprechend für $\mathcal{G}^{k+1}$.)

Seien $l \in \mathbb{N}_0$ Vektoren $b_i \in \mathcal{G}^1 \; \forall\, i \in \{1, \dots, l\}$ erklärt. Daraus folgern wir

$$\begin{aligned} b_1 &\in \mathcal{G}^1, \\ b_1 b_2 &\in \mathcal{G}^0 \oplus \mathcal{G}^2, \\ b_1 b_2 b_3 &\in \mathcal{G}^1 \oplus \mathcal{G}^3 \oplus \mathcal{G}^5, \\ &\vdots \\ b_1 b_2 b_3 \dots b_l &\in \begin{cases} \mathcal{G}^+ & \text{falls } l \text{ gerade} \\ \mathcal{G}^- & \text{falls } l \text{ ungerade} \end{cases}. \end{aligned}$$

□

Lemma 7.2.2 (Inneres Vektor-Versor-Produkt)**.** *Seien die Grunddimension $n \in \mathbb{N}$, die Grundmenge $N = \{1, \dots, n\}$ und die Geometrischen Algebra $\mathcal{G} = \mathbb{R}^{2^n}$ erklärt, sowie die Vektoren $x, a_i \in \mathcal{G}^1 \; \forall\, i \in \{1, \dots, k\}$ mit $k \in \mathbb{N}_0$.*
Es gilt

$$x \cdot (a_1 \dots a_k) = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} \, (x \cdot a_i) \, a_1 \dots a_{i-1} a_{i+1} \dots a_k. \tag{7.12}$$

Beweis. Zunächst stellen wir fest, dass

$$\begin{aligned} x a_i &= x a_i + a_i x - a_i x \\ &\overset{7.6}{=} x \cdot a_i + x \wedge a_i + a_i \cdot x + a_i \wedge x - a_i x \\ &\underset{7.2}{\overset{7.5}{=}} x \cdot a_i + x \wedge a_i + x \cdot a_i - x \wedge a_i - a_i x \\ &= 2x \cdot a_i - a_i x \end{aligned} \tag{7.13}$$

für alle $i \in N$ entwickelt werden kann. Es gilt

$$\begin{aligned} x a_1 \dots a_k &\overset{7.13}{=} 2(x \cdot a_1) a_2 \dots a_k - a_1 x a_2 \dots a_k \\ &\overset{7.13}{=} 2(x \cdot a_1) a_2 \dots a_k - 2(x \cdot a_2) a_1 a_3 \dots a_k + a_1 a_2 x a_3 \dots a_k \\ &\overset{7.13}{=} \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} \, 2(x \cdot a_i) \, a_1 \dots a_{i-1} a_{i+1} \dots a_k + (-1)^k a_1 \dots a_k x. \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} & x a_1 \dots a_k + (-1)^{k-1} a_1 \dots a_k x \\ &= \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} \, 2(x \cdot a_i) \, a_1 \dots a_{i-1} a_{i+1} \dots a_k. \end{aligned} \tag{7.14}$$

Weiter stellen wir fest, dass

$$\begin{aligned}
&xa_1 \dots a_k + (-1)^{k-1} a_1 \dots a_k x \\
&\overset{7.10}{=} x \left(\langle a_1 \dots a_k \rangle_k + \langle a_1 \dots a_k \rangle_{k-2} + \dots \right) \\
&+ \left((-1)^{k-1} \langle a_1 \dots a_k \rangle_k + (-1)^{k-1} \langle a_1 \dots a_k \rangle_{k-2} + \dots \right) x \\
&\overset{1.23}{=} x \langle a_1 \dots a_k \rangle_k + (-1)^{k-1} \langle a_1 \dots a_k \rangle_k \, x \\
&+ x \langle a_1 \dots a_k \rangle_{k-2} + (-1)^{k-1} \langle a_1 \dots a_k \rangle_{k-2} \, x \\
&+ \dots \\
&\overset{3.16}{=} 2x \cdot \langle a_1 \dots a_k \rangle_k + 2x \cdot \langle a_1 \dots a_k \rangle_{k-2} + \dots \\
&\overset{3.17}{=} 2x \cdot \left(\langle a_1 \dots a_k \rangle_k + \langle a_1 \dots a_k \rangle_{k-2} + \dots \right) \\
&\overset{7.10}{=} 2x \cdot (a_1 \dots a_k).
\end{aligned} \tag{7.15}$$

Aus 7.14 und 7.15 folgern wir

$$x \cdot (a_1 \dots a_k) = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} \left(x \cdot a_i \right) a_1 \dots a_{i-1} a_{i+1} \dots a_k. \qquad \square$$

Definition 7.2.2 (Reverse)**.** Seien die Grunddimension $n \in \mathbb{N}_0$ und die Geometrische Algebra $\mathcal{G} = \mathbb{R}^{2^n}$ erklärt.
Der Operator

$$\begin{aligned}
{}^\dagger : \mathcal{G} &\to \mathcal{G}, \\
A &\mapsto A^\dagger = \sum_{U \in \mathcal{P}(N)} \alpha(U,U) \, g(U) \, A_U e_U
\end{aligned} \tag{7.16}$$

wird als *Reverse* bezeichnet.

Korollar 7.2.3. *Es gilt*

$$A^\dagger \underset{2.4}{\overset{1.19}{=}} \sum_{k=0}^{n} (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} \langle A \rangle_k.$$

Satz 7.2.4 (Reverse des Geometrischen Produktes)**.** *Seien die Geometrische Algebra $\mathcal{G}$, sowie die Multivektoren $A, B \in \mathcal{G}$ erklärt.*
Es gilt

$$(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger. \tag{7.17}$$

Beweis. Seien $n \in \mathbb{N}_0$ die Grunddimension und $N = \{1, \dots, n\}$ die Grundmenge der Geometrischen Algebra $\mathcal{G} = \mathbb{R}^{2^n}$.

Es gilt

$$
\begin{aligned}
(AB)^\dagger &\overset{1.22}{\underset{7.16}{=}} \sum_{U,V\in\mathcal{P}(N)} A_U B_V\, \alpha(U,V)\, \alpha(U\triangle V, U\triangle V)\, g(U\triangle V)\, e_{U\triangle V} \\
&\overset{1.10}{=} \sum_{U,V\in\mathcal{P}(N)} A_U B_V\, \alpha(U,V)\, \alpha(U, U\triangle V)\, \alpha(V, U\triangle V)\, g(U\triangle V)\, e_{U\triangle V} \\
&\overset{1.10}{=} \sum_{U,V\in\mathcal{P}(N)} A_U B_V\, \alpha(U,U)\, \alpha(V,U)\, \alpha(V,V)\, g(U\triangle V)\, e_{U\triangle V} \\
&\overset{1.18}{=} \sum_{U,V\in\mathcal{P}(N)} A_U B_V\, \alpha(U,U)\, \alpha(V,U)\, \alpha(V,V)\, g(U)\, g(V)\, e_{U\triangle V} \\
&\overset{1.21}{=} \sum_{U,V\in\mathcal{P}(N)} A_U B_V\, \alpha(V,V)\, g(V)\, \alpha(U,U)\, g(U)\, e_V e_U \\
&\overset{1.22}{\underset{7.16}{=}} B^\dagger A^\dagger.
\end{aligned}
$$

□

Korollar 7.2.5. *Sei die Geometrische Algebra $\mathcal{G}$ erklärt.*
Die Reverse in 7.16 ist bezüglich Vektoren eine identische Abbildung, es gilt

$$a^\dagger \overset{7.16}{=} a \;\forall\, a \in \mathcal{G}^1. \tag{7.18}$$

Satz 7.2.6 (Reverse eines Versors)**.** *Seien die Geometrische Algebra $\mathcal{G}$, sowie $k \in \mathbb{N}$ Vektoren $a_i \in \mathcal{G}^1\ \forall\, i \in \{1,\dots,k\}$ gegeben.*
Es gilt

$$(a_1 a_2 \dots a_k)^\dagger = a_k a_{k-1} \dots a_1. \tag{7.19}$$

Beweis. Wir können

$$
\begin{aligned}
(a_1 a_2 \dots a_k)^\dagger &\overset{7.17}{=} (a_2 \dots a_k)^\dagger {a_1}^\dagger \\
&\overset{7.18}{=} (a_2 \dots a_k)^\dagger a_1 \\
&\overset{7.17}{\underset{7.18}{=}} (a_3 \dots a_k)^\dagger a_2 a_1 \\
&\;\vdots \\
&\overset{7.17}{\underset{7.18}{=}} a_k a_{k-1} \dots a_1
\end{aligned}
$$

zeigen. □

Satz 7.2.7 (Inverse eines Versors)**.** *Seien die Geometrische Algebra $\mathcal{G}$, sowie $k \in \mathbb{N}$ Vektoren $a_i \in \mathcal{G}^1\ \forall\, i \in \{1,\dots,k\}$ und der Versor $A = a_1 a_2 \dots a_k$ erklärt.*
Es existiert eine Inverse

$$A^{-1} = A^\dagger \frac{1}{AA^\dagger}, \tag{7.20}$$

falls $a_i a_i \neq 0$ für alle $i \in \{1,\dots,k\}$ gilt.

Beweis. Zunächst stellen wir fest, dass

$$\begin{aligned} AA^\dagger &\overset{7.19}{=} a_1 a_2 \dots a_k a_k a_{k-1} \dots a_1 \\ &= \prod_{i \in \{1,\dots,k\}} a_i a_i. \end{aligned}$$

Also gilt

$$\begin{aligned} AA^{-1} &= AA^\dagger \frac{1}{AA^\dagger} \\ &= 1 \end{aligned}$$

falls $a_i a_i \neq 0$ für alle $i \in \{1, \dots, k\}$. □

Korollar 7.2.8. *Falls A^{-1} existiert, gilt*

$$A^{-1} = (a_1 a_2 \dots a_k)^{-1} = {a_k}^{-1} {a_{k-1}}^{-1} \dots {a_1}^{-1}. \tag{7.21}$$

Korollar 7.2.9. *Die Inverse eines Versors ist ein Versor.*

Definition 7.2.3 (Spinor)**.** Sei eine Geometrischen Algebra $\mathcal{G}$ erklärt.
Wir nennen einen Versor $A \in \mathcal{G}$ einen *Spinor*, wenn $AA^\dagger = 1$ gilt.

Korollar 7.2.10. *Sei $A \in \mathcal{G}$ ein Spinor.*
Es gilt

$$A^{-1} = A^\dagger,$$

die Inverse des Spinors entspricht also seiner Reversen.

7.3. Spat

Definition 7.3.1 (Spat)**.** Seien die Grunddimension $n \in \mathbb{N}_0$, die Grundmenge $N = \{1, \dots, n\}$ und damit die Geometrische Algebra $\mathcal{G} = \mathbb{R}^{2^n}$ erklärt. Weiter seien $k \in N$ Vektoren $a_i \in \mathcal{G}^1 \; \forall\, i \in \{1, \dots, k\}$ gegeben.
Wir nennen das endliche äußere Produkt

$$\bigwedge_{i \in \{1,\dots,k\}} a_i = a_1 \wedge \dots \wedge a_k \in \mathcal{G}^k \tag{7.22}$$

einen *k-Spat* und allgemein einen *Spat*.
Wir definieren das leere äußere Produkt, also den 0-Spat, als einen Skalar in $\mathcal{G}^0$.

Definition 7.3.2 (Lineare Unabhängigkeit von Vektoren)**.** Sei die Geometrische Algebra $\mathcal{G}$ erklärt.
Wie üblich nennen wir $k \in \mathbb{N}$ Vektoren $(a_i)_{i \in \{1,\dots,k\}} \in (\mathcal{G}^1)^k$ *linear unabhängig*, falls

$$\forall\, (\lambda_i)_{i \in \{1,\dots,k\}} \in \mathbb{R}^k : \sum_{i \in \{1,\dots,k\}} \lambda_i a_i = 0 \leftrightarrow (\lambda_i)_{i \in \{1,\dots,k\}} = 0.$$

Korollar 7.3.1 (Linearkombination abhängiger Vektoren)**.** *Seien die Geometrische Algebra $\mathcal{G}$ erklärt, sowie $k \in \mathbb{N}$ linear abhängige Vektoren $(a_i)_{i\in\{1,\ldots,k\}} \in (\mathcal{G}^1)^k$.*
Ein Vektor aus $(a_i)_{i\in\{1,\ldots,k\}}$ kann als Linearkombination der anderen Vektoren dargestellt werden, für alle $i \in \{1,\ldots,k\}$ gilt also

$$\exists\,(\lambda_j)_{j\in\{1,\ldots,k\}\setminus i} : a_i = \sum_{j\in\{1,\ldots,k\}\setminus i} \lambda_j a_j.$$

Satz 7.3.2 (Äußeres Produkt und lineare Unabhängigkeit mehrer Vektoren)**.** *Seien die Grunddimension $n \in \mathbb{N}$, die Grundmenge $N = \{1,\ldots,n\}$ und damit die Geometrische Algebra $\mathcal{G} = \mathbb{R}^{2^n}$ erklärt, sowie $k \in N$ Vektoren $(a_i)_{i\in\{1,\ldots,k\}} \in (\mathcal{G}^1)^k$.*
Die Vektoren $(a_i)_{i\in\{1,\ldots,k\}}$ sind genau dann linear unabhängig, wenn der Spat

$$a_1 \wedge \ldots \wedge a_k \neq 0.$$

Beweis. Seien für alle $U \in \mathcal{P}(N)$ die bijektiven Abbildungen

$$\begin{aligned} \rho_U : \{1,\ldots,|U|\} &\to U = \{j_i \mid j_i \in U : j_1 < \ldots < j_{|U|}\}, \\ i &\mapsto j_i \end{aligned}$$

definiert, die die Zahlen von 1 bis $|U|$ auf die Zahlen in U in der natürlichen Reihenfolge abbilden.
Sei $\mathcal{S}_U$ die symmetrische Gruppe bezüglich einer Teilmenge $U \subseteq N$. Sei weiter bezüglich einer Teilmenge $U \subseteq N$ die verschobene symmetrische Gruppe

$$\bar{\mathcal{S}}_U = \{\sigma \circ \rho_U \mid \sigma \in \mathcal{S}_U\}.$$

Für alle $U \in \mathcal{P}(N)$ erweitern wir das Vorzeichen einer Permutation in $\mathcal{S}_U$ wie in Definition 2.6.2 um das Vorzeichen einer Permutation in $\bar{\mathcal{S}}_U$ als

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn} : \bar{\mathcal{S}}_U &\to \{-1,+1\}, \\ \bar{\sigma} &\mapsto (-1)^{|\operatorname{inv}(\bar{\sigma})|}, \end{aligned}$$

da $\forall\, U \in \mathcal{P}(N) : \forall\, \sigma \in \mathcal{S}_U : \operatorname{inv}(\sigma \circ \rho_U) = \operatorname{inv}(\sigma)$ gilt.
Seien die Zeilen der Matrizen $A_U \in \mathbb{R}^{k\times k}$ $\forall\, U \in \mathcal{P}^k(N)$ Teile der Vektoren $(a_i)_{i\in\{1,\ldots,k\}}$, so dass

$$\forall\, U \in \mathcal{P}(N) : \forall\, i,j \in \{1,\ldots,k\} : (A_U)_{i,j} = (a_i)_{\rho_U(j)}$$

gilt. Wir stellen fest, dass

$$
\begin{aligned}
& a_1 \wedge \ldots \wedge a_k \\
&= \sum_{U \in \mathcal{P}^k(N)} \sum_{\bar{\sigma} \in \bar{\mathcal{S}}_U} \prod_{i \in \{1,\ldots,k\}} (a_i)_{\{\bar{\sigma}(i)\}}\, e_{\{\bar{\sigma}(i)\}} \\
&\overset{2.13}{=} \sum_{U \in \mathcal{P}^k(N)} \sum_{\bar{\sigma} \in \bar{\mathcal{S}}_U} \prod_{i \in \{1,\ldots,k\}} (a_i)_{\{\bar{\sigma}(i)\}}\, \operatorname{sgn}(\bar{\sigma})\, e_{\{\rho_U(i)\}} \\
&= \sum_{U \in \mathcal{P}^k(N)} \left(\sum_{\bar{\sigma} \in \bar{\mathcal{S}}_U} \prod_{i \in \{1,\ldots,k\}} (a_i)_{\{\bar{\sigma}(i)\}}\, \operatorname{sgn}(\bar{\sigma}) \right) \prod_{i \in U} e_{\{i\}} \\
&= \sum_{U \in \mathcal{P}^k(N)} (\det A_U) \prod_{i \in U} e_{\{i\}},
\end{aligned}
\tag{7.23}
$$

wobei letztere Equivalenz der *Leibniz-Formel* für Determinanten entspricht und das endliche Produkt über die Indize $i \in U$ in der natürlichen Reihenfolge der Zahlen erfolgt. Da die Determinante einer Matrix genau dann null ist, wenn die Spaltenvektoren der Matrix linear abhängig sind, können wir

$$a_1 \wedge \ldots \wedge a_k = 0 \leftrightarrow \forall\, U \in \mathcal{P}^k(N) : \det A_U = 0 \leftrightarrow (a_i)_{i \in \{1,\ldots,k\}} \text{ linear abhängig}$$

folgern, sowie den Umkehrschluss

$$a_1 \wedge \ldots \wedge a_k \neq 0 \leftrightarrow (a_i)_{i \in \{1,\ldots,k\}} \text{ linear unabhängig.}$$

□

Lemma 7.3.3 (Inneres Vektor-Spat-Produkt)**.** *Seien die Grunddimension $n \in \mathbb{N}$, die Grundmenge $N = \{1, \ldots, n\}$ und die Geometrischen Algebra $\mathcal{G} = \mathbb{R}^{2^n}$ erklärt, sowie die Vektoren $x, a_i \in \mathcal{G}^1\ \forall\, i \in \{1, \ldots, k\}$ mit $k \in N$.*
Es gilt

$$x \cdot (a_1 \wedge \ldots \wedge a_k) = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} (x \cdot a_i)\, (a_1 \wedge \ldots \wedge a_{i-1} \wedge a_{i+1} \wedge \ldots \wedge a_k) \tag{7.24}$$

Beweis. Wird der Klammeroperator auf 7.12 angewandt, bekommt man

$$\begin{aligned}
&x \cdot (a_1 \wedge \ldots \wedge a_k) \\
&\overset{3.15}{=} \langle x \cdot (a_1 \wedge \ldots \wedge a_k) \rangle_{k-1} \\
&\underset{2.5}{\overset{7.22}{=}} \langle x \cdot (a_1 a_2 \ldots a_k) \rangle_{k-1} \\
&\overset{7.12}{=} \left\langle \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} (x \cdot a_i)\, a_1 \ldots a_{i-1} a_{i+1} \ldots a_k \right\rangle_{k-1} \\
&\overset{2.6}{=} \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} (x \cdot a_i)\, \langle a_1 \ldots a_{i-1} a_{i+1} \ldots a_k \rangle_{k-1} \\
&\underset{2.5}{\overset{7.22}{=}} \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} (x \cdot a_i)\, (a_1 \wedge \ldots \wedge a_{i-1} \wedge a_{i+1} \wedge \ldots \wedge a_k).
\end{aligned}$$

□

Satz 7.3.4 (Orthogonaler Spat)**.** *Seien die Grunddimension $n \in \mathbb{N}$, die Grundmenge $N = \{1, \ldots, n\}$ und die Geometrischen Algebra $\mathcal{G} = \mathbb{R}^{2^n}$ erklärt, sowie die 1-Vektoren $x, a_i \in \mathcal{G}^1 \; \forall\, i \in \{1, \ldots, k\} : a_1 \wedge \ldots \wedge a_k \neq 0$ mit $k \in N$.*
Es gilt

$$x \cdot (a_1 \wedge \ldots \wedge a_k) = 0 \leftrightarrow x \cdot a_i = 0 \; \forall\, i \in \{1, \ldots, k\}. \tag{7.25}$$

Anmerkung. Wir nennen den Vektor x und den Spat $a_1 \wedge \ldots \wedge a_k$ mit der Eigenschaft in 7.25 *orthogonal* zueinander.

Beweis. Wir stellen fest, dass für $a_1 \wedge \ldots \wedge a_k \neq 0$ laut Satz 7.3.2 $a_i \wedge a_j \neq 0 \; \forall\, i, j \in \{1, \ldots, k\} : i \neq j$ und damit die Spate

$$a_1 \wedge \ldots \wedge a_{i-1} \wedge a_{i+1} \wedge \ldots \wedge a_k \; \forall\, i \in \{1, \ldots, k\}$$

linear unabhängig sind. Deswegen gilt

$$\begin{aligned}
&x \cdot (a_1 \wedge \ldots \wedge a_k) \\
&\overset{7.24}{=} \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} (x \cdot a_i)\, (a_1 \wedge \ldots \wedge a_{i-1} \wedge a_{i+1} \wedge \ldots \wedge a_k) = 0
\end{aligned}$$

genau dann, wenn $x \cdot a_i = 0 \; \forall\, i \in \{1, \ldots, k\}$. □

Lemma 7.3.5 (Spat als Versor)**.** *Seien die Grunddimension $n \in \mathbb{N}$, die Grundmenge $N = \{1, \ldots, n\}$ und die Geometrische Algebra $\mathcal{G} = \mathbb{R}^{2^n}$ erklärt, sowie ein Spat $A \in \mathcal{G}^k$ mit Grad $k \in N$.*
Der Spat A kann in das endliche Geometrische Produkt von k Vektoren faktorisiert werden, also

$$\exists\, (a_i)_{i \in \{1, \ldots, k\}} \in \left(\mathcal{G}^1\right)^k : A = a_1 a_2 \ldots a_k.$$

Beweis. Wir können k Vektoren $a_i \in \mathcal{G}^1 \; \forall\, i \in \{1, \ldots, k\}$ so wählen, dass

$$A = a_1 \wedge \ldots \wedge a_k \text{ und } a_i \cdot a_j = 0 \; \forall\, i, j \in \{1, \ldots, k\} : i \neq j, \tag{7.26}$$

da das innere Produkt zwischen Vektoren eine nicht-ausgeartete Billinearform ist, also

$$\forall\, b \in \mathcal{G}^1 \; \exists\, c \in \mathcal{G}^1 : b \wedge c \neq 0 \wedge b \cdot c = 0.$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
a_1 a_2 \ldots a_k &\overset{3.15}{\underset{3.3}{=}} a_1 \cdot (a_2 a_3 \ldots a_k) + a_1 \wedge (a_2 a_3 \ldots a_k) \\
&\overset{7.25}{\underset{7.26}{=}} a_1 \wedge (a_2 a_3 \ldots a_k) \\
&\overset{3.15}{\underset{3.3}{=}} a_1 \wedge (a_2 \cdot (a_3 a_4 \ldots a_k) + a_2 \wedge (a_3 a_4 \ldots a_k)) \\
&\overset{7.25}{\underset{7.26}{=}} a_1 \wedge a_2 \wedge (a_3 a_4 \ldots a_k) \\
&\vdots \\
&= a_1 \wedge \ldots \wedge a_k.
\end{aligned}$$

□

Satz 7.3.6 (Reverse eines Spats)**.** *Seien $k \in N$ Vektoren $a_i \in \mathcal{G}^1 \; \forall\, i \in \{1, \ldots, k\}$ gegeben. Es gilt*

$$(a_1 \wedge \ldots \wedge a_k)^\dagger = a_k \wedge \ldots \wedge a_1,$$

also entspricht die Reverse eines Spats der Umkehrung seiner Darstellung als endliches äußeres Produkt von Vektoren.

Beweis. Da das äußere Produkt zwischen Vektoren antikommutiert, gilt

$$\begin{aligned}
a_1 \wedge \ldots \wedge a_k &= (-1)^{k-1} a_k \wedge a_1 \wedge \ldots \wedge a_{k-1} \\
&= (-1)^{k-1} (-1)^{k-2} a_k \wedge a_{k-1} \wedge \ldots \wedge a_{k-2} \\
&= (-1)^{k-1} (-1)^{k-2} \ldots (-1)^{k-(k-1)} a_k \wedge a_{k-1} \wedge \ldots \wedge a_1 \\
&= (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} a_k \wedge a_{k-1} \wedge \ldots \wedge a_1.
\end{aligned}$$

□

Definition 7.3.3 (Spatinhalt)**.** Seien die Grunddimension $n \in \mathbb{N}_0$ und die Geometrische Algebra $\mathcal{G} = \mathbb{R}^{2^n}$ erklärt, sowie der k-Spat $A \in \mathcal{G}^k$ mit Grad $k \in \{0, \ldots, n\}$.
Wir nennen die Norm

$$\begin{aligned}
&\mathcal{G}^k \to \mathbb{R}, \\
&A \mapsto ||A|| = \sqrt{A * A}
\end{aligned} \tag{7.27}$$

anhand dem Skalarprodukt in 4.5 den *Inhalt* des Spates A.

Korollar 7.3.7. *Der Spatinhalt ist unabhängig von der Wahl der Signatur einer Geometrischen Algebra.*

Satz 7.3.8 (Skalarprodukt von Spaten)**.** *Seien die Grunddimension $n \in \mathbb{N}$, die Grundmenge $N = \{1, \ldots, n\}$ und damit die Geometrische Algebra $\mathcal{G} = \mathbb{R}^{2^n}$ erklärt, sowie mit $k \in N$ die Vektorfamilien $(a_i)_{i\in\{1,\ldots,k\}}, (b_i)_{i\in\{1,\ldots,k\}} \in (\mathcal{G}^1)^k$.*
Es gilt

$$(a_1 \wedge \ldots \wedge a_k) * (b_1 \wedge \ldots \wedge b_k) = \det\left((a_i * b_j)_{i,j\in\{1,\ldots,k\}}\right)$$

Beweis. Seien die Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{k\times n}$ so definiert, dass

$$\forall\, i \in \{1, \ldots, k\} : \forall\, j \in N : A_{i,j} = (a_i)_j \wedge B_{i,j} = (b_i)_j.$$

Seien die Submatrizen $A_U, B_U \in \mathbb{R}^{k\times k}$ $\forall\, U \in \mathcal{P}^k(N)$ wie im Beweis des Satzes 7.3.2 definiert, so dass

$$\forall\, U \in \mathcal{P}(N) : \forall\, i, j \in \{1, \ldots, k\} : (A_U)_{i,j} = A_{i,\rho_U(j)} \wedge (B_U)_{i,j} = B_{i,\rho_U(j)}.$$

Mit der *Leibniz-Formel* und dem *Satz von Binet-Cauchy* gilt

$$\begin{aligned}
&(a_1 \wedge \ldots \wedge a_k) * (b_1 \wedge \ldots \wedge b_k)\\
&\overset{7.23}{=} \left(\sum_{U\in\mathcal{P}^k(N)} (\det A_U) \prod_{i\in U} e_{\{i\}}\right) * \left(\sum_{U\in\mathcal{P}^k(N)} (\det B_U) \prod_{i\in U} e_{\{i\}}\right)\\
&\overset{4.5}{=} \sum_{U\in\mathcal{P}^k(N)} (\det A_U)(\det B_U)\\
&= \sum_{U\in\mathcal{P}^k(N)} (\det A_U)(\det {B_U}^T)\\
&= \det(A \cdot B^T)\\
&= \det\left((a_i * b_j)_{i,j\in\{1,\ldots,k\}}\right).
\end{aligned}$$

□

Lemma 7.3.9 (Dualer Spat)**.** *Seien die Grunddimension $n \in \mathbb{N}$ und die Geometrische Algebra $\mathcal{G} = \mathbb{R}^{2^n}$ erklärt, sowie der k-Spat $A \in \mathcal{G}^k$ mit Grad $k \in \{0, \ldots, n\}$.*
Die Anwendung des metrischen neutralen Dualoperators auf den k-Spat ergibt einen $(n-k)$-Spat, es gilt

$$A^* \in \mathcal{G}^{n-k}. \tag{7.28}$$

Beweis. Es kann eine Familie linear unabhängiger Vektoren $(a_i)_{i\in N} \in (\mathcal{G}^1)^n$ so definiert werden, dass

$$\forall\, i \in N : a_i = (a_1 \wedge \ldots \wedge a_{i-1} \wedge a_{i+1} \wedge \ldots \wedge a_n)^*$$

und

$$A = a_1 \wedge \ldots \wedge a_k$$

gilt. Dann gilt auch

$$A^* = (a_1 \wedge \ldots \wedge a_k)^* = \pm a_{k+1} \wedge \ldots \wedge a_n.$$

□

Definition 7.3.4 (Senkrechte Spate)**.** Seien die Grunddimension $n \in \mathbb{N}_0$ und die Geometrische Algebra $\mathcal{G} = \mathbb{R}^{2^n}$ erklärt, sowie die Spate $A \in \mathcal{G}^k$ und $B \in \mathcal{G}^l$ mit den Graden $k, l \in \{0, \ldots, n\}$.
Wir nennen die Spate A und B zueinander *senkrecht*, falls

$$||A \wedge B|| = ||A||\,||B||.$$

Korollar 7.3.10 (Senkrecht dualer Spat)**.** *Der duale Spat A^* ist senkrecht zu dem Spat A, es gilt*

$$||A \wedge A^*|| \overset{6.7}{=} ||A * A|| \underset{7.27}{\overset{4.5}{=}} ||A||\,||A||.$$

Lemma 7.3.11. *Seien die Grunddimension $n \in \mathbb{N}$ und die Geometrische Algebra $\mathcal{G} = \mathbb{R}^{2^n}$ erklärt, sowie der k-Spat $A \in \mathcal{G}^k \setminus \{0\}$ mit Grad $k \in \{0, \ldots, n\}$.*
Es gilt

$$\forall\, x \in \mathcal{G}^1 \setminus 0 : (x \wedge A = 0) \leftrightarrow (x \wedge A^* \neq 0). \tag{7.29}$$

Beweis. Seien n Vektoren $(a_i)_{i \in N} \in (\mathcal{G}^1)^n$ so erklärt, dass

$$A = a_1 \wedge \ldots \wedge a_k$$

und

$$A^* = a_{k+1} \wedge \ldots \wedge a_n,$$

es gilt also $A \wedge A^* = a_1 \wedge \ldots \wedge a_n \overset{6.7}{=} (A * A)\, e_N \neq 0$, die Vektoren $(a_i)_{i \in N} \in (\mathcal{G}^1)^n$ sind linear unabhängig.
Falls der Vektor $x \in \mathcal{G}^1$ als Linearkombination von der Vektorfamilie $(a_i)_{i \in \{1,\ldots,k\}}$ dargestellt werden kann, ist er nicht mit der komplementären Vektorfamilie $(a_i)_{i \in \{k+1,\ldots,n\}}$ darstellbar. □

8. Vektorraum

8.1. Untervektorraum

Definition 8.1.1 (Vektorraum)**.** Seien die Grunddimension $n \in \mathbb{N}_0$ und die Grundmenge $N = \{1, \ldots, n\}$ gegeben und damit die Geometrische Algebra $\mathcal{G} = \mathbb{R}^{2^n}$ definiert.
Wir nennen den graduierten Untervektorraum $\mathcal{G}^1$ auch *Vektorraum* der Geometrischen Algebra, wenn keine Gefahr der Verwechslung besteht. Er entspricht einem n-dimensionalen Vektorraum über den reellen Zahlen, es gilt

$$\mathcal{G}^1 = \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{|N|}.$$

Anmerkung. Wir nennen 1-Vektoren auch *Vektoren*, wenn keine Gefahr der Verwechslung besteht.

Definition 8.1.2 (Untervektorraum)**.** Sei die Geometrische Algebra $\mathcal{G}$ erklärt.
Ein *Untervektorraum* $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{G}^1$ ist wie üblich als Teilraum des Vektorraumes erklärt, der folgende Eigenschaften besitzt:

$$\begin{aligned} &1. && \mathcal{A} \neq \emptyset, \\ &2. && \forall\, x_1, x_2 \in \mathcal{A} : x_1 + x_2 \in \mathcal{A}, \\ &3. && \forall\, x \in \mathcal{A} : \forall\, \lambda \in \mathbb{R} : \lambda x \in \mathcal{A}\ . \end{aligned} \tag{8.1}$$

Korollar 8.1.1 (Basis)**.** *Für jeden Untervektorraum $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{G}^1$ existiert eine Basis $(a_i)_{i\in\{1,\ldots,k\}} \in (\mathcal{G}^1)^k$ mit $k = \dim \mathcal{A}$, so dass*

$$\mathcal{A} = \mathcal{L}(a_i)_{i\in\{1,\ldots,k\}}. \tag{8.2}$$

Satz 8.1.2 (Darstellung eines Untervektorraumes durch äußeres Produkt der Basisvektoren)**.** *Seien die Grunddimension $n \in \mathbb{N}$ und die Geometrische Algebra $\mathcal{G} = \mathbb{R}^{2^n}$ erklärt, sowie mit $k \in \{1, \ldots, n\}$ die Basis $(a_i)_{i\in\{1,\ldots,k\}} \in (\mathcal{G}^1)^k$ eines k-dimensionalen Untervektorraumes in $\mathcal{G}^1$, also die linearen Hülle $\mathcal{L}(a_i)_{i\in\{1,\ldots,k\}}$.*
Es gilt

$$\mathcal{L}(a_i)_{i\in\{1,\ldots,k\}} = \{x \in \mathcal{G}^1 \mid x \wedge a_1 \wedge \ldots \wedge a_k = 0\}. \tag{8.3}$$

Anmerkung. Das endliche äußere Produkt $a_1 \wedge \ldots \wedge a_k$ ist ein Spat.

Beweis. Ein Vektor $x \in \mathcal{L}(a_i)_{i\in\{1,\ldots,k\}}$ ist von den Basisvektoren $(a_i)_{i\in\{1,\ldots,k\}}$ linear abhängig. Laut Satz 7.3.2 gilt

$$\forall\, x \in \mathcal{G}^1 : x \in \mathcal{L}(a_i)_{i\in\{1,\ldots,k\}} \leftrightarrow x \wedge a_1 \wedge \ldots \wedge a_k = 0\ . \qquad \square$$

Definition 8.1.3 (Summe)**.** Sei die Geometrische Algebra $\mathcal{G}$ erklärt.
Die Summe zweier Untervektorräume $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \mathcal{G}^1$ ist

$$\mathcal{A} + \mathcal{B} = \{x_A + x_B \mid x_A \in \mathcal{A}, x_B \in \mathcal{B}\}. \tag{8.4}$$

Sie ist der kleinste Untervektorraum, in dem beide Untervektorräume $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ vollständig enthalten sind.

Definition 8.1.4 (Durchschnitt)**.** Sei die Geometrische Algebra $\mathcal{G}$ erklärt.
Der Durchschnitt zweier Untervektorräume $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \mathcal{G}^1$ ist

$$\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \{x \in \mathcal{G}^1 \mid (x \in \mathcal{A}) \wedge (x \in \mathcal{B})\}. \tag{8.5}$$

Er ist der größte Untervektorraum, der vollständig sowohl im Untervektorraum $\mathcal{A}$ als auch im Untervektorraum $\mathcal{B}$ enthalten ist.

Definition 8.1.5 (Senkrechtes Komplement)**.** Seien die Geometrische Algebra $\mathcal{G}$ erklärt, sowie der Untervektorraum $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{G}^1$.
Wir definieren das *senkrechte Komplement* anhand des Skalarproduktes als

$$\mathcal{A}^\perp = \{x \in \mathcal{G}^1 \mid \forall\, a \in \mathcal{A} : a * x = 0\}. \tag{8.6}$$

Lemma 8.1.3 (Senkrechtes Komplement ist komplementär)**.** *Seien die Geometrische Algebra $\mathcal{G}$ erklärt, sowie der Untervektorraum $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{G}^1$.*
Das senkrechte Komplement $\mathcal{A}^\perp$ ist komplementär zu $\mathcal{A}$, es gilt

$$\mathcal{A} \cap \mathcal{A}^\perp = \{0\}$$

und

$$\mathcal{A} + \mathcal{A}^\perp = \mathcal{G}^1.$$

Beweis. Es gilt

$$\mathcal{A} \cap \mathcal{A}^\perp \underset{8.5}{\overset{8.6}{=}} \{x \in \mathcal{G}^1 \mid (x \in \mathcal{A}) \wedge (\forall\, a \in \mathcal{A} : a * x = 0)\} = \{0\},$$

da das Skalarprodukt in 4.5 positiv definit ist, und deshalb kein $x \in \mathcal{G}^1 \setminus \{0\} : x * x = 0$ existiert.
Aus gleichem Grunde gilt

$$\mathcal{A} + \mathcal{A}^\perp \underset{8.4}{\overset{8.6}{=}} \{x + x_\perp \mid x \in \mathcal{A} \wedge x_\perp \in \mathcal{G}^1 \wedge \forall\, a \in \mathcal{A} : a * x_\perp = 0\} = \mathcal{G}^1. \qquad \square$$

Satz 8.1.4 (Senkrecht komplementärer Zusammenhang von Summe und Durchschnitt)**.** *Sei die Geometrische Algebra $\mathcal{G}$ erklärt.*
Es gilt

$$\forall\, \mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \mathcal{G}^1 : \mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \{0\} \to (\mathcal{A} + \mathcal{B})^\perp = \mathcal{A}^\perp \cap \mathcal{B}^\perp$$

und

$$\forall\, \mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \mathcal{G}^1 : \mathcal{A}^\perp \cap \mathcal{B}^\perp = \{0\} \to (\mathcal{A} \cap \mathcal{B})^\perp = \mathcal{A}^\perp + \mathcal{B}^\perp. \tag{8.7}$$

Beweis. Für alle $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \mathcal{G}^1 : \mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \{0\}$ sind alle Elementepaare aus $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ linear unabhängig, weshalb aus der positiven Definitheit des Skalarproduktes in 4.5

$$\begin{aligned}(\mathcal{A}+\mathcal{B})^\perp &\overset{8.4}{\underset{8.6}{=}} \{x \in \mathcal{G}^1 \mid \forall\, x_\mathcal{A} \in \mathcal{A} : \forall\, x_\mathcal{B} \in \mathcal{B} : (x_\mathcal{A} + x_\mathcal{B}) * x = 0\} \\ &= \{x \in \mathcal{G}^1 \mid \forall\, x_\mathcal{A} \in \mathcal{A} : \forall\, x_\mathcal{B} \in \mathcal{B} : (x_\mathcal{A} * x = 0) \wedge (x_\mathcal{B} * x = 0)\} \\ &= \{x \in \mathcal{G}^1 \mid \forall\, x_\mathcal{A} \in \mathcal{A} : (x_\mathcal{A} * x = 0) \wedge \forall\, x_\mathcal{B} \in \mathcal{B} : (x_\mathcal{B} * x = 0)\} \\ &\overset{8.6}{\underset{8.5}{=}} \mathcal{A}^\perp \cap \mathcal{B}^\perp\end{aligned}$$

folgt. Weiter gilt damit und der involutorischen Eigenschaft $(\mathcal{A}^\perp)^\perp = \mathcal{A}$ für alle $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \mathcal{G}^1 : \mathcal{A}^\perp \cap \mathcal{B}^\perp = \{0\}$

$$\mathcal{A}^\perp + \mathcal{B}^\perp = (A \cap B)^\perp. \qquad \square$$

Lemma 8.1.5 (Senkrecht komplementärer Untervektorraum mit metrisch neutralem Dualoperator)**.** *Seien die Grunddimenson $n \in \mathbb{N}_0$ und die Geometrische Algebra $\mathcal{G} = \mathbb{R}^{2^n}$ erklärt. Definiere der k-Spat $A \in \mathcal{G}^k$ mit Grad $k \in \{0, \ldots, n\}$ einen k-dimensionaler Untervektorraum*

$$\mathcal{A} = \{x \in \mathcal{G}^1 \mid x \wedge A = 0\}.$$

Mit dem metrisch neutralem Dualoperator können wir den senkrecht komplementären Untervektorraum als

$$\mathcal{A}^\perp = \{x \in \mathcal{G}^1 \mid x \wedge A^* = 0\}. \tag{8.8}$$

bestimmen.

Beweis. Sei die Grundmenge $N = \{1, \ldots, n\}$. Seien n Vektoren $(a_i)_{i \in N} \in \mathcal{G}^1$ so erklärt, dass $A = a_1 \wedge \ldots \wedge a_k$ und $A^* = a_{k+1} \wedge \ldots \wedge a_n$.
Es gilt

$$\forall\, i \in \{1, \ldots, k\} : \forall\, j \in \{k+1, \ldots, n\} : a_i * a_j = 0,$$

woraus

$$\forall\, x \in \mathcal{L}(a_i)_{i \in \{1,\ldots,k\}} : \forall\, y \in \mathcal{L}(a_j)_{j \in \{k+1,\ldots,n\}} : x * y = 0$$

folgt. Mit $\mathcal{L}(a_i)_{i \in \{1,\ldots,k\}} = \{x \in \mathcal{G}^1 \mid x \wedge A = 0\}$ und $\mathcal{L}(a_i)_{i \in \{k+1,\ldots,n\}} = \{x \in \mathcal{G}^1 \mid x \wedge A^* = 0\}$ schließen wir

$$\mathcal{A}^\perp = \{x \in \mathcal{G}^1 \mid x \wedge A^* = 0\} = \{x \in \mathcal{G}^1 \mid \forall\, a \in \mathcal{A} : a * x = 0\}. \qquad \square$$

Satz 8.1.6 (Summe mit äußerem Produkt)**.** *Seien die Grunddimension $n \in \mathbb{N}_0$ und die Geometrische Algebra $\mathcal{G} = \mathbb{R}^{2^n}$ erklärt, sowie der k-Spat $A \in \mathcal{G}^k$ und der l-Spat $B \in \mathcal{G}^l$ mit $k, l \in \{0, \ldots, n\}$ so, dass $A \wedge B \neq 0$, welche die Untervektorräume*

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \{x \in \mathcal{G}^1 \mid x \wedge A = 0\}, \\ \mathcal{B} &= \{x \in \mathcal{G}^1 \mid x \wedge B = 0\}\end{aligned}$$

mit $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \{0\}$ definieren.
Die Summe der Untervektorräume ergibt

$$\mathcal{A} + \mathcal{B} = \{x \in \mathcal{G}^1 \mid x \wedge A \wedge B = 0\}. \tag{8.9}$$

Beweis. Seien die Vektoren $(a_i)_{i\in\{1,\ldots,k\}} \in (\mathcal{G}^1)^k$ und $(b_j)_{j\in\{1,\ldots,l\}} \in (\mathcal{G}^1)^l$ so erklärt, dass

$$\begin{aligned} A &= a_1 \wedge \ldots \wedge a_k, \\ B &= b_1 \wedge \ldots \wedge b_l. \end{aligned}$$

Beide Vektorfamilien sind also eine Basis des jeweiligen Untervektorraumes, es gilt $\mathcal{A} = \mathcal{L}(a_i)_{i\in\{1,\ldots,k\}}$ und $\mathcal{B} = (b_j)_{j\in\{1,\ldots,l\}}$. Wegen $A \wedge B \neq 0$ gilt $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \{0\}$, das heißt die Vektoren $\big((a_i)_{i\in\{1,\ldots,k\}}, (b_j)_{j\in\{1,\ldots,l\}}\big)$ sind linear unabhängig und spannen die Summe

$$\mathcal{A} + \mathcal{B} = \mathcal{L}\left((a_i)_{i\in\{1,\ldots,k\}}, (b_j)_{j\in\{1,\ldots,l\}}\right) = \{x \in \mathcal{G}^1 \mid x \wedge A \wedge B = 0\}$$

auf. □

Satz 8.1.7 (Durchschnitt mit Durchschnittsoperator)**.** *Seien die Grunddimension $n \in \mathbb{N}_0$ und die Geometrische Algebra $\mathcal{G} = \mathbb{R}^{2^n}$ erklärt, sowie der k-Spat $A \in \mathcal{G}^k$ und der l-Spat $B \in \mathcal{G}^l$ mit $k, l \in \{0, \ldots, n\}$ so, dass $A^* \wedge B^* \neq 0$, welche die Untervektorräume*

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \{x \in \mathcal{G}^1 \mid x \wedge A = 0\}, \\ \mathcal{B} &= \{x \in \mathcal{G}^1 \mid x \wedge B = 0\} \end{aligned}$$

definieren.
Der Durchschnitt ist

$$\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \{x \in \mathcal{G}^1 \mid x \wedge (A \vee B) = 0\}. \tag{8.10}$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \cap \mathcal{B} &\overset{8.7}{=} \left(\mathcal{A}^\perp + \mathcal{B}^\perp\right)^\perp \\ &\underset{8.9}{\overset{6.5}{=}} \{x \in \mathcal{G}^1 \mid x \wedge (A^* \wedge B^*)^*\} \\ &\underset{6.6}{\overset{6.10}{=}} \{x \in \mathcal{G}^1 \mid x \wedge (A \vee B) = 0\}. \end{aligned}$$ □

Lemma 8.1.8 (Transformation eines Untervektorraumes)**.** *Seien die Grunddimension $n \in \mathbb{N}$ und die Geometrische Algebra $\mathcal{G} = \mathbb{R}^{2^n}$ erklärt, sowie die lineare invertierbare Funktion $f : \mathcal{G}^1 \to \mathcal{G}^1$ und der entsprechende invertierbare Outermorphismus $\underline{f} : \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ so, dass $\underline{f}(x) = f(x)\ \forall\, x \in \mathcal{G}^1$.*
Definiere der k-Spat $A \in \mathcal{G}^k$ mit dem Grad $k \in \{0, \ldots, n\}$ den Untervektorraum

$$\mathcal{A} = \{x \in \mathcal{G}^1 \mid x \wedge A = 0\}.$$

Bezüglich dem Bild des Untervektorraumes gilt

$$f(\mathcal{A}) = \{x \in \mathcal{G}^1 \mid x \wedge \underline{f}(A) = 0\}. \tag{8.11}$$

Beweis. Wegen der Linearität des Outermorphismus ist $\underline{f}(0) = 0$. Daraus und aus der Invertierbarkeit folgern wir

$$\forall\, x \in \mathcal{G}^1 : x \wedge A = 0 \leftrightarrow \underline{f}(x \wedge A) = 0. \tag{8.12}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} f(\mathcal{A}) &= \{f(x) \mid x \in \mathcal{A}\} \\ &\overset{8.3}{=} \{f(x) \mid x \in \mathcal{G}^1 \wedge (x \wedge A = 0)\} \\ &= \{x \in \mathcal{G}^1 \mid f^{-1}(x) \wedge A = 0\} \\ &\overset{8.12}{=} \{x \in \mathcal{G}^1 \mid \underline{f}(f^{-1}(x) \wedge A) = 0\} \\ &= \{x \in \mathcal{G}^1 \mid x \wedge \underline{f}(A) = 0\}. \end{aligned}$$

□

8.2. Orthogonale Projektion

Definition 8.2.1 (Orthogonale Projektion)**.** Seien die Grunddimension $n \in \mathbb{N}_0$ und die Geometrischen Algebra $\mathcal{G} = \mathbb{R}^{2^n}$ erklärt. Definiere der k-Spat $A \in \mathcal{G}^k : AA^\dagger \neq 0$ mit dem Grad $k \in \{1, \ldots, n\}$ den k-dimensionalen Untervektorraum

$$\mathcal{A} = \{x \in \mathcal{G}^1 \mid x \wedge A = 0\}.$$

Wir nennen die Abbildung

$$\begin{aligned} P_A : \mathcal{G}^1 &\to \mathcal{A}, \\ x &\mapsto (x \cdot A)A^{-1} = (x \rfloor A)A^{-1} \end{aligned} \tag{8.13}$$

eine *orthogonale Projektion* in den Untervektorraum $\mathcal{A}$.

Beweis der Zielmenge. Laut Lemma 7.3.5 können wir den k-Spat A in k Vektoren $(a_i)_{i\in\{1,\ldots,k\}} \in (\mathcal{G}^1)^k$ so faktorisieren, dass

$$A = a_1 a_2 \ldots a_k.$$

Es gilt

$$
\begin{aligned}
&(x \cdot A)A^{-1} \\
&= (x \cdot (a_1 a_2 \dots a_k))\,({a_k}^{-1}{a_{k-1}}^{-1} \dots {a_1}^{-1}) \\
&\overset{7.12}{=} \left(\sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} (x \cdot a_i)\, a_1 \dots a_{i-1} a_{i+1} \dots a_k \right) ({a_k}^{-1}{a_{k-1}}^{-1} \dots {a_1}^{-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{k} \left((x \cdot a_i)\, a_1 \dots a_{i-1} a_{i+1} \dots a_k\, {a_k}^{-1} \dots a_{i+1}^{-1} a_{i-1}^{-1} \dots {a_1}^{-1}\, {a_i}^{-1} \right) \\
&= \sum_{i=1}^{k} (x \cdot a_i){a_i}^{-1} \in \mathcal{G}^1 \qquad (8.14) \\
&\overset{7.9}{=} \sum_{i=1}^{k} \frac{x \cdot a_i}{a_i \cdot a_i}\, a_i \in \mathcal{G}^1, \qquad (8.15)
\end{aligned}
$$

die orthogonale Projektion eines Vektors resultiert also in einer Linearkombination der Vektoren $(a_i)_{i \in \{1,\dots,k\}}$ und liegt deshalb in $\mathcal{A} = \mathcal{L}(a_i)_{i \in \{1,\dots,k\}}$. □

Beweis der Orthogonalität. Die Richtung der Projektion ist $x - P_A(x)$. Da

$$
\begin{aligned}
(x - P_A(x)) \cdot A &\overset{3.17}{=} x \cdot A - P_A(x)A \\
&\overset{8.13}{=} x \cdot A - (x \cdot A)A^{-1}A \\
&= 0,
\end{aligned}
$$

ist die Projektion *orthogonal* zu dem Untervektorraum $\mathcal{A}$. □

Lemma 8.2.1 (Idempotenz)**.** *Seien die Grunddimension $n \in \mathbb{N}_0$ und die Geometrische Algebra $\mathcal{G} = \mathbb{R}^{2^n}$ erklärt. Definiere der k-Spat $A \in \mathcal{G}^1 : AA^\dagger \neq 0$ mit dem Grad $k \in \{1, \dots, n\}$ den Untervektorraum*

$$\mathcal{A} = \{x \in \mathcal{G}^1 \mid x \wedge A = 0\}.$$

Es gilt

$$\forall\, x \in \mathcal{A} : P_A(x) = x,$$

die Elemente in $\mathcal{A}$ sind also idempotent bezüglich der Projektion $P_A(x)$.

Beweis. Für alle $x \in \mathcal{A}$ gilt

$$
\begin{aligned}
P_A(x) &\overset{8.13}{=} (x \cdot A)A^{-1} \\
&\overset{8.3}{=} (x \cdot A + x \wedge A)A^{-1} \\
&= xAA^{-1} \\
&= x.
\end{aligned}
$$

□

Lemma 8.2.2 (Outermorphismus der orthogonalen Projektion)**.** *Seien die Grunddimension $n \in \mathbb{N}_0$ und die Geometrische Algebra $\mathcal{G} = \mathbb{R}^{2^n}$ erklärt. Definiere der k-Spat $A \in \mathcal{G}^1 : AA^\dagger \neq 0$ mit dem Grad $k \in \{1, \ldots, n\}$ den Untervektorraum*

$$\mathcal{A} = \{x \in \mathcal{G}^1 \mid x \wedge A = 0\}.$$

Die Abbildung

$$\begin{aligned} \underline{P_A} : \mathcal{G} &\to \mathcal{G}, \\ X &\mapsto (X \rfloor A) \rfloor A^{-1} \end{aligned}$$

ist der Outermorphismus der orthogonalen Projektion.

Beweis. Es gilt

$$\forall\, U, V \in \mathcal{P}(N) : U \triangle V = \emptyset \leftrightarrow U = V.$$

Wir stellen fest, dass für alle $A \in \mathcal{G}$

$$AA^{-1} = \sum_{\substack{(U,V) \in \mathcal{P}(N)^2 \\ :\, U \triangle V = U \triangle V}} A_U (A^{-1})_V \, e_U e_V = \sum_{\substack{(U,V) \in \mathcal{P}(N)^2 \\ :\, U \triangle V = \emptyset}} A_U (A^{-1})_V \, e_U e_V = 1. \tag{8.16}$$

gilt. Nehmen wir für $U, V, W, X, Y, Z \in \mathcal{P}(N)$ die Identitäten $V \triangle W = \emptyset$ und $V \triangle Z = \emptyset$ an, dann ist

$$\begin{aligned} ((U \cup X) \,/\, Y) \,/\, Z &= ((U \cup X) \cap Z) \cup (Y \,/\, Z) \\ &= (U \cap Z) \cup (X \cap Z) \cup (Y \,/\, Z) \\ &= (U \cap Z) \cup ((X \,/\, Y) \,/\, Z) \\ &= (U \cap W) \cup ((X \,/\, Y) \,/\, Z) \\ &= (U \cap W) \cup (V \,/\, W) \cup ((X \,/\, Y) \,/\, Z) \\ &= ((U \,/\, V) \,/\, W) \cup ((X \,/\, Y) \,/\, Z) \end{aligned} \tag{8.17}$$

Für alle $B, C \in \mathcal{G}$ gilt

$$\begin{aligned} &((B \wedge C) \rfloor A) \rfloor A^{-1} \\ &\overset{3.1}{\underset{3.6}{=}} \sum_{\substack{(U,X,Y,Z) \in \mathcal{P}(N)^2 \times \mathcal{P}^k(N)^2 \\ :\, U \triangle X \triangle Y \triangle V \triangle Z = ((U \cup X)/Y)/Z}} B_U C_X A_Y (A^{-1})_Z \, e_U e_X e_Y e_Z \\ &\overset{8.16}{=} \sum_{\substack{(U,V,W,X,Y,Z) \in \mathcal{P}(N) \times \mathcal{P}^k(N)^2 \times \mathcal{P}(N) \times \mathcal{P}^k(N)^2 \\ :\, U \triangle V \triangle W \triangle X \triangle Y \triangle V \triangle Z = ((U \cup X)/Y)/Z}} B_U A_V (A^{-1})_W C_X A_Y (A^{-1})_Z \, e_U e_V e_W e_X e_Y e_Z \\ &\overset{8.17}{=} \sum_{\substack{(U,V,W,X,Y,Z) \in \mathcal{P}(N) \times \mathcal{P}^k(N)^2 \times \mathcal{P}(N) \times \mathcal{P}^k(N)^2 \\ :\, U \triangle V \triangle W \triangle X \triangle Y \triangle V \triangle Z = ((U/V)/W) \cup ((X/Y)/Z)}} B_U A_V (A^{-1})_W C_X A_Y (A^{-1})_Z \, e_U e_V e_W e_X e_Y e_Z \\ &\overset{3.1}{\underset{3.6}{=}} \left((B \rfloor A) \rfloor A^{-1}\right) \wedge \left((C \rfloor A) \rfloor A^{-1}\right). \end{aligned}$$

und weiter für alle $\lambda \in \mathbb{R}$

$$((\lambda B + C) \rfloor A) \rfloor A^{-1} = \lambda \, (B \rfloor A) \rfloor A^{-1} + (C \rfloor A) \rfloor A^{-1}. \qquad \square$$

8.3. Sandwichprodukt

Definition 8.3.1 (Sandwichprodukt)**.** Seien die Geometrische Algebra $\mathcal{G}$, sowie der Versor $A \in \mathcal{G}^P$ mit der Parität $P \in \{0, 1\}$ erklärt.
Wir nennen ein *Sandwichprodukt* eine Abbildung in der Form

$$\begin{aligned} &\mathcal{G} \to \mathcal{G}, \\ &B \mapsto ABA^{-1}. \end{aligned} \tag{8.18}$$

Korollar 8.3.1 (Linearität des Sandwichproduktes)**.** *Es gilt*

$$A(\lambda B + C)A^{-1} \overset{1.23}{=} \lambda ABA^{-1} + ACA^{-1}$$

für alle $B, C \in \mathcal{G}$ und für alle $\lambda \in \mathbb{R}$.

Lemma 8.3.2 (Graderhaltung beim Sandwichprodukt)**.** *Seien die Grunddimension $n \in \mathbb{N}_0$ und die Geometrische Algebra $\mathcal{G} = \mathbb{R}^{2^n}$ erklärt, sowie der Versor $A \in \mathcal{G}$ und der Multivektor $B \in \mathcal{G}$.*
Das Sandwichprodukt ist graderhaltend, für alle $k \in \{0, \ldots, n\}$ gilt

$$A\langle B\rangle_k A^{-1} = \langle ABA^{-1}\rangle_k. \tag{8.19}$$

Beweis. Sei $N = \{1, \ldots, n\}$ die Grundmenge der Geometrischen Algebra $\mathcal{G}$.
Wir stellen fest, dass für alle $V \in \mathcal{P}(N)$ und alle $i, j \in N : |V \triangle \{i\} \triangle \{j\}| \neq |V|$

$$\begin{aligned} &\alpha(\{i\}, V)\,\alpha(\{i\}, \{j\})\,\alpha(V, \{j\})\,\alpha(V, \{i\})\,\alpha(\{j\}, \{i\})\,\alpha(\{j\}, V) \\ &= (-1)^{|V|+|V\cap\{i\}|}\,(-1)\,(-1)^{|V|+|V\cap\{j\}|} \\ &= (-1)^{|V\cap\{i\}|+|V\cap\{j\}|+1} \\ &= -1 \end{aligned} \tag{8.20}$$

gilt. Daraus folgern wir für alle $a \in \mathcal{G}^1$ und alle $k, l \in \{0, \ldots, n\} : k \neq l$

$$\begin{aligned} \langle a\langle B\rangle_k a\rangle_l &\overset{2.4}{=} \sum_{\substack{V\in\mathcal{P}(N) \\ :\ |V|=k}} \sum_{\substack{i,j\in N \\ :\ |V\triangle\{i\}\triangle\{j\}|=l}} a_{\{i\}} B_V a_{\{j\}}\, e_{\{i\}} e_V e_{\{j\}} \\ &= \sum_{\substack{V\in\mathcal{P}(N) \\ :\ |V|=k}} \sum_{\substack{i,j\in N \\ :\ (|V\triangle\{i\}\triangle\{j\}|=l) \\ \wedge\ (i<j)}} a_{\{i\}} B_V a_{\{j\}}\, e_{\{i\}} e_V e_{\{j\}} + a_{\{j\}} B_V a_{\{i\}}\, e_{\{j\}} e_V e_{\{i\}} \\ &\overset{8.20}{=} 0. \end{aligned}$$

Also gilt für alle $a \in \mathcal{G}^1$ und alle $k \in \{0, \ldots, n\}$

$$a\langle B\rangle_k a = \langle aBa\rangle_k.$$

Dies können wir auf einen Versor als endliches Produkt von Vektoren fortführen, als auch auf dessen Inverse. □

Satz 8.3.3 (Sandwichprodukt als Outermorphismus)**.** *Ein Sandwichprodukt wie in 8.18 hat alle Eigenschaften eines Outermorphismus.*

Beweis. Seien die Geometrische Algebra $\mathcal{G}$ erklärt, sowie der Versor $A \in \mathcal{G}^P$ mit Parität $P \in \{0, 1\}$.
Für alle $B, C \in \mathcal{G}$ gilt

$$\begin{aligned}
A(B \wedge C)A^{-1} &\overset{2.7}{\underset{3.5}{=}} \sum_{k,l \in \{0,\ldots,n\}} A\left(\langle B\rangle_k \wedge \langle C\rangle_l\right) A^{-1} \\
&\overset{3.3}{=} \sum_{k,l \in \{0,\ldots,n\}} A\left\langle \langle B\rangle_k \langle C\rangle_l \right\rangle_{k+l} A^{-1} \\
&\overset{8.19}{=} \sum_{k,l \in \{0,\ldots,n\}} \left\langle A\langle B\rangle_k \langle C\rangle_l A^{-1} \right\rangle_{k+l} \\
&= \sum_{k,l \in \{0,\ldots,n\}} \left\langle A\langle B\rangle_k A^{-1} A\langle C\rangle_l A^{-1} \right\rangle_{k+l} \\
&\overset{8.19}{=} \sum_{k,l \in \{0,\ldots,n\}} \left\langle \langle ABA^{-1}\rangle_k \langle ACA^{-1}\rangle_l \right\rangle_{k+l} \\
&\overset{3.3}{=} \sum_{k,l \in \{0,\ldots,n\}} \langle ABA^{-1}\rangle_k \wedge \langle ACA^{-1}\rangle_l \\
&\overset{2.7}{\underset{3.5}{=}} (ABA^{-1}) \wedge (ACA^{-1})
\end{aligned}$$

Das Sandwichprodukt ist also endomorph bezüglich dem äußeren Produkt und laut Korollar 8.3.1 linear, besitzt also alle Eigenschaften eines Outermorphismus. □

8.4. Orthogonale Spiegelung

Definition 8.4.1 (Orthogonale Spiegelung)**.** Seien die Grunddimension $n \in \mathbb{N}_0$ und die Geometrischen Algebra $\mathcal{G} = \mathbb{R}^{2^n}$ erklärt. Definiere ein k-Vektor $A \in \mathcal{G}^k : AA^\dagger \neq 0$ mit Grad $k \in \{0, \ldots, n\}$ den k-dimensionaler Untervektorraum $\mathcal{A} = \{x \in \mathcal{G}^1 \mid A \wedge x = 0\}$.
Wir nennen die Operation

$$\begin{aligned}
S_A : \mathcal{G}^1 &\to \mathcal{G}^1, \\
x &\mapsto (-1)^{k-1} AxA^{-1}
\end{aligned} \tag{8.21}$$

eine *Spiegelung* eines Vektors am Untervektorraum $\mathcal{A}$.

Beweis zur orthogonalen Spiegelung. Unter der orthogonalen Spiegelung eines Vektors $x \in \mathcal{G}^1$ an dem Untervektorraum $\mathcal{A}$ verstehen wir die zweimalige Verschiebung des

Vektors in Projektionsrichtung $P_A(x) - x$, also

$$\begin{aligned}
x + 2\left(P_A(x) - x\right) &= 2P_A(x) - x \\
&\overset{8.13}{=} 2(x \cdot A)A^{-1} - xAA^{-1} \\
&= (2x \cdot A - xA)A^{-1} \\
&\underset{3.3}{\overset{3.15}{=}} (x \cdot A - x \wedge A)A^{-1} \\
&\underset{3.4}{\overset{3.16}{=}} ((-1)^{k-1}A \cdot x + (-1)^{k-1}A \wedge x)A^{-1} \\
&\underset{3.3}{\overset{3.15}{=}} (-1)^{k-1}AxA^{-1}.
\end{aligned}$$

□

Korollar 8.4.1 (Spiegelung als Sandwichprodukt)**.** *Eine Spiegelung hat die Eigenschaften eines Sandwichproduktes.*

Lemma 8.4.2 (Invarianz bezüglich innerem Produkt)**.** *Seien die Grunddimension $n \in \mathbb{N}_0$ und die Geometrische Algebra $\mathcal{G} = \mathbb{R}^{2^n}$ erklärt, sowie der k-Spat $A \in \mathcal{G}^k : AA^\dagger \neq 0$ mit Grad $k \in \{0, \ldots, n\}$ und der Untervektorraum $\mathcal{A} = \{x \in \mathcal{G}^1 \mid x \wedge A = 0\}$.*
Es gilt

$$S_A(x)S_A(x) = xx \;\forall\, x \in \mathcal{G}^1.$$

Beweis. Für alle $x \in \mathcal{G}^1$ gilt

$$\begin{aligned}
S_A(x)S_A(x) &\overset{8.21}{=} (-1)^{k-1}(-1)^{k-1}AxA^{-1}AxA^{-1} \\
&= AxxA^{-1} \\
&\underset{7.7}{\overset{7.4}{=}} xxAA^{-1} \\
&= xx.
\end{aligned}$$

□

Lemma 8.4.3 (Involution)**.** *Seien die Grunddimension $n \in \mathbb{N}_0$ und die Geometrische Algebra $\mathcal{G} = \mathbb{R}^{2^n}$ erklärt, sowie der k-Spat $A \in \mathcal{G}^k$ mit $AA^\dagger \neq 0$ und mit Grad $k \in \{0, \ldots, n\}$ und der Untervektorraum $\mathcal{A} = \{x \in \mathcal{G}^1 \mid x \wedge A = 0\}$.*
Die Spiegelung S_A ist involutorisch, es gilt

$$(S_A \circ S_A)(x) = x.$$

Beweis. Für alle $x \in \mathcal{G}^1$ gilt

$$\begin{aligned}
(S_A \circ S_A)(x) &= S_A\left(S_A(x)\right) \\
&\overset{8.21}{=} AAxA^{-1}A^{-1} \\
&\overset{7.20}{=} AAxA^{-1}A^\dagger \frac{1}{AA^\dagger} \\
&\overset{7.16}{=} AAxA^{-1}A\,(-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} \frac{1}{AA^\dagger} \\
&\underset{7.16}{\overset{7.20}{=}} A^{-1}AxA^{-1}A \\
&= x.
\end{aligned}$$

□

9. Konformes Modell $\mathcal{G}_{n+1,1}$

9.1. Horosphäre

Definition 9.1.1 (Nullbasis)**.** Seien eine Grunddimension $n \in \mathbb{N}_0$ und die Geometrische Algebra $\mathcal{G}_{n+1,1}$ erklärt, sowie der Skalar $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Wir definieren die *Nullbasis* als $(e_\infty, e_0) \in \left(\mathcal{G}^1_{n+1,1}\right)^2$ mit den Vektoren

$$\begin{aligned} e_\infty &= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\lambda}\left(e_{\{n+1\}} + e_{\{n+2\}}\right), \\ e_0 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\lambda\left(e_{\{n+2\}} - e_{\{n+1\}}\right). \end{aligned}$$

Korollar 9.1.1 (Nullbasisaxiome)**.** *Es gilt*

$$\begin{aligned} &1. && e_\infty e_\infty = e_0 e_0 = 0, \\ &2. && e_\infty \cdot e_0 = e_0 \cdot e_\infty = -1, \\ &3. && e_\infty \wedge e_0 = e_{\{n+1\}} \wedge e_{\{n+2\}}. \end{aligned} \tag{9.1}$$

Definition 9.1.2 (Horosphäre)**.** Seien eine Grunddimension $n \in \mathbb{N}_0$ und die Geometrische Algebra $\mathcal{G}_{n+1,1}$ erklärt.
Die *projektive Hyperebene* wird als

$$\mathfrak{H}^c_{n+1} = \{x \in \mathcal{G}^1_{n+1,1} \mid x \cdot e_\infty = -1\}$$

definiert. Weiter definieren wir den *Nullkegel*

$$\mathfrak{N}_{n+1} = \{x \in \mathcal{G}^1_{n+1,1} \mid x \cdot x = 0\}.$$

Wir nennen den Durchschnitt

$$\begin{aligned} \mathfrak{K}_n &= \mathfrak{H}^c_{n+1} \cap \mathfrak{N}_{n+1} \\ &= \{x \in \mathcal{G}^1_{n+1,1} \mid x \cdot e_\infty = -1 \wedge x \cdot x = 0\} \end{aligned} \tag{9.2}$$

die *Horosphäre* des konformen Modells $\mathcal{G}_{n+1,1}$. Die Horosphäre $\mathfrak{K}_n \subset \mathcal{G}^1_{n+1,1}$ ist eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit, die in den Vektorraum $\mathcal{G}^1_{n+1,1}$ eingebettet ist.

Anmerkung. Abbildung 9.1 skizziert die Horosphäre in der Geometrischen Algebra $\mathcal{G}_{2,1}$.

Korollar 9.1.2 (Lineare Unabhängigkeit der Horosphärenpunkte)**.** *Alle Punkte in der Horosphäre $\mathfrak{K}_n$ sind linear unabhängig, da*

$$\forall\, x \in \mathfrak{K}_n : \exists!\, \lambda \in \mathbb{R} : (\lambda x) \cdot e_\infty = -1.$$

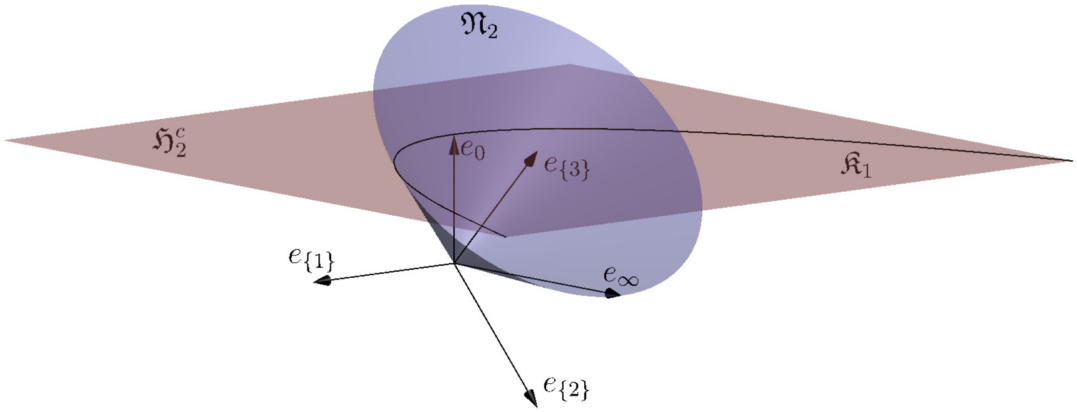


Abbildung 9.1.: Dreidimensionale Geometrische Algebra $\mathcal{G}_{2,1}$ mit projektiver Hyperebene $\mathfrak{H}_2^c$, Nullkegel $\mathfrak{N}_2$ und Horosphäre $\mathfrak{K}_1$. Die Nullbasis des konformen Modelles ist mit $e_\infty = (e_{\{2\}}+e_{\{3\}})$ und $e_0 = \frac{1}{2}(e_{\{3\}}-e_{\{2\}})$ parametrisiert.

9.2. Homöomorphismus

Lemma 9.2.1 (Homöomorphismus)**.** *Seien die Grunddimension $n \in \mathbb{N}_0$ und die Geometrische Algebra $\mathcal{G}_{n+1,1} = \mathbb{R}^{2^{n+2}}$ erklärt, sowie die Horosphäre $\mathfrak{K}_n \subset \mathcal{G}^1_{n+1,1}$ wie in Definition 9.1.2 definiert.*
Es gibt einen Homöomorphismus zwischen der Horosphäre $\mathfrak{K}_n$ und dem Vektorraum $\mathcal{G}^1_{n,0} \subset \mathcal{G}^1_{n+1,1}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}^1_{n,0} &\to \mathfrak{K}_n, y \mapsto y + \frac{1}{2}(y \cdot y)e_\infty + e_0; \\ \mathfrak{K}_n &\to \mathcal{G}^1_{n,0}, x \mapsto x + (x \cdot e_0)e_\infty - e_0. \end{aligned} \tag{9.3}$$

Beweis. Wegen $y \cdot e_\infty = y \cdot e_0 = 0 \; \forall \, y \in \mathcal{G}^1_{n,0}$ und den Nullbasisaxiomen in Korollar 9.1.1 gilt für alle $y \in \mathcal{G}^1_{n,0}$

$$\left(y + \frac{1}{2}(y \cdot y)e_\infty + e_0\right) \cdot e_\infty = -1$$

und

$$\begin{aligned} &\left(y + \frac{1}{2}(y \cdot y)e_\infty + e_0\right) \cdot \left(y + \frac{1}{2}(y \cdot y)e_\infty + e_0\right) \\ &= y \cdot y - \frac{1}{2}(y \cdot y) - \frac{1}{2}(y \cdot y) \\ &= 0, \end{aligned}$$

also $\left(y + \frac{1}{2}(y \cdot y)e_\infty + e_0\right) \in \mathfrak{K}_n$.
Wegen $x \cdot e_\infty = -1 \; \forall \, x \in \mathfrak{K}_n$ und den Nullbasisaxiomen in Korollar 9.1.1 gilt für alle $x \in \mathfrak{K}_n$

$$(x + (x \cdot e_0)e_\infty - e_0) \cdot e_\infty = -1 + 1 = 0$$

und

$$(x + (x \cdot e_0)e_\infty - e_0) \cdot e_0 = x \cdot e_0 - x \cdot e_0 = 0,$$

also $(x + (x \cdot e_0)e_\infty - e_0) \in \mathcal{G}^1_{n,0}$. □

Lemma 9.2.2 (Homöomorphie der Sphären)**.** *Seien die Grunddimension $n \in \mathbb{N}_0$ und die Geometrische Algebra $\mathcal{G}_{n+1,1} = \mathbb{R}^{2^{n+2}}$ erklärt, sowie die Horosphäre $\mathfrak{K}_n \subset \mathcal{G}^1_{n+1,1}$. Definieren $k \in \{2, \ldots, n+2\}$ Punkte $a_1, \ldots a_k \in \mathfrak{K}_n$ mit $\forall\, i, j \in \{1, \ldots, k\} : a_i \neq a_j$ den k-dimensionale Untervektorraum*

$$\mathcal{A} = \{x \in \mathcal{G}^1_{n+1,1} \mid x \wedge a_1 \wedge \ldots \wedge a_k = 0\}.$$

Der $(k-2)$-dimensionale geschnittene Unterraum

$$\mathcal{A} \cap \mathfrak{K}_n = \{x \in \mathfrak{K}_n \mid x \wedge a_1 \wedge \ldots \wedge a_k = 0\}$$

ist homöomorph zu einer $(k-2)$-Sphäre im Vektorraum $\mathcal{G}^1_{n,0}$.

Beweis. Sei $A = a_1 \wedge \ldots \wedge a_k$. Es gilt

$$\begin{aligned}
&\mathcal{A} \cap \mathfrak{K}_n \\
&= \{x \in \mathfrak{K}_n \mid x \wedge A = 0\} \\
&= \{x \in \mathfrak{K}_n \mid e_\infty e_0 (x \wedge A) = 0\} \\
&\overset{2.8}{=} \{x \in \mathfrak{K}_n \mid e_\infty \cdot (e_0 \cdot (x \wedge A) = 0\} \\
&\overset{7.24}{=} \{x \in \mathfrak{K}_n \mid e_\infty \cdot ((e_0 \cdot x)A - x \wedge (e_0 \cdot A)) = 0\} \\
&\overset{7.24}{=} \{x \in \mathfrak{K}_n \mid (e_0 \cdot x)(e_\infty \cdot A) - (e_\infty \cdot x)(e_0 \cdot A) + x \wedge (e_\infty \cdot (e_0 \cdot A)) = 0\} \\
&\underset{2.8}{\overset{9.2}{=}} \{x \in \mathfrak{K}_n \mid (e_0 \cdot x)(e_\infty \cdot A) + (e_0 \cdot A) + x \wedge ((e_\infty \wedge e_0) \cdot A) = 0\} \\
&\overset{9.3}{=} \left\{ y \in \mathcal{G}^1_{n,0} \mid -\frac{1}{2} y^2 (e_\infty \cdot A) + (e_0 \cdot A) + (y + \frac{1}{2} y^2 e_\infty + e_0) \wedge ((e_\infty \wedge e_0) \cdot A) = 0 \right\} \\
&= \Bigg\{ y \in \mathcal{G}^1_{n,0} \mid \Big(\frac{1}{2} y^2 \left(e_\infty - (e_\infty \cdot A) \left((e_\infty \wedge e_0) \cdot A \right)^{-1} \right) + y \\
&\quad + \left(e_0 + (e_0 \cdot A) \left((e_\infty \wedge e_0) \cdot A \right)^{-1} \right) \Big) \wedge ((e_\infty \wedge e_0) \cdot A) = 0 \Bigg\} \\
&= \left\{ y \in \mathcal{G}^1_{n,0} \mid \left(-\frac{1}{2} y^2 {y_0}^{-1} + y - \frac{1}{2} {y_0}^{-1} ({y_0}^2 - r^2) \right) \wedge ((e_\infty \wedge e_0) \cdot A) = 0 \right\} \\
&= \left\{ y \in \mathcal{G}^1_{n,0} \mid y \wedge ((e_\infty \wedge e_0) \cdot A) = 0 \wedge (y - y_0)^2 = r^2 \right\}
\end{aligned}$$

mit der Parametrisierung einer $(k-2)$-Sphäre, nämlich dem Mittelpunkt

$$y_0 = \left(e_\infty - (e_\infty \cdot A) \left((e_\infty \wedge e_0) \cdot A \right)^{-1} \right)^{-1} \in \mathcal{G}^1_{n,0}$$

$k = \dim \mathcal{A}$	$\dim \mathcal{A} \cap \mathfrak{K}_n$	Figur in $\mathcal{G}^1_{n,0}$	Darstellung mit $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathfrak{K}_n$
2	0	Punktepaar	$a_1 \wedge a_2$
3	1	Kreislinie	$a_1 \wedge a_2 \wedge a_3$
4	2	Kugeloberfläche	$a_1 \wedge a_2 \wedge a_3 \wedge a_4$

Tabelle 9.1.: Graduierte Untervektorräume $\mathcal{A} = \{x \in \mathfrak{K}_n \mid x \wedge a_1 \wedge \ldots \wedge a_k = 0\}$ mit Grad $k \in \{2, \ldots, 4\}$ im konformen Modell und zu $\mathcal{A} \cap \mathfrak{K}_n$ homöomorphe Figuren im Vektorraum $\mathcal{G}^1_{n,0}$ des Standardraummodells.

und dem Radius $r \in \mathbb{R}$, der der Gleichung

$$-\frac{1}{2}{y_0}^{-1}({y_0}^2 - r^2) = e_0 + (e_0 \cdot A)\left((e_\infty \wedge e_0) \cdot A\right)^{-1}$$

genügt. □

Anmerkung. Tabelle 9.1 benennt drei $(k-2)$-Sphären mit $k \in \{2, \ldots, 4\}$ als homöomorphe Figuren in $\mathcal{G}^1_{n,0}$.

Lemma 9.2.3 (Homöomorphie der Ebenen)**.** *Seien die Grunddimension $n \in \mathbb{N}_0$, die Geometrische Algebra $\mathcal{G}_{n+1,1} = \mathbb{R}^{2^{n+2}}$ und der $k \in \{2, \ldots, n+2\}$-dimensionale Untervektorraum $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{G}^1_{n+1,1}$ so erklärt, dass*

$$\dim \mathcal{A} = k \wedge \mathcal{A} \not\subseteq \mathcal{G}^1_{n,0} \wedge e_\infty \in \mathcal{A},$$

sowie die Horosphäre $\mathfrak{K}_n \subset \mathcal{G}^1_{n+1,1}$ definiert.
Der $(k-2)$-dimensionale geschnittene Unterraum

$$\mathcal{A} \cap \mathfrak{K}_n$$

ist homöomorph zu einer $(k-2)$-Ebene im Vektorraum $\mathcal{G}^1_{n,0}$.

Beweis. Definiere der k-Spat $A \in \mathcal{G}^k_{n+1,1}$ mit $(e_\infty \wedge e_0) \cdot A \neq 0$ und $e_\infty \wedge A = 0$ den k-dimensionalen Untervektorraum

$$\mathcal{A} = \{x \in \mathcal{G}^1_{n+1,1} \mid x \wedge A = 0\}.$$

Aus $(e_\infty \wedge e_0) \cdot A \neq 0$ folgt $\mathcal{A} \not\subseteq \mathcal{G}^1_{n,0}$ und aus $e_\infty \wedge A = 0$ folgt $e_\infty \in \mathcal{A}$.
Mit $e_\infty \wedge A = 0$ stellen wir fest, dass

$$\begin{aligned} e_\infty \cdot A &= e_\infty A \\ &\overset{9.1}{=} -e_\infty\left((e_0 \cdot e_\infty)A + e_\infty(e_0 \cdot A)\right) \\ &\overset{7.24}{=} -e_\infty\left(e_0 \cdot (e_\infty A)\right) \\ &\overset{2.8}{=} e_\infty\left((e_\infty \wedge e_0) \cdot A\right). \end{aligned} \tag{9.4}$$

$\dim \mathcal{A}$	$\dim \mathcal{A} \cap \mathfrak{K}_n$	Figur in $\mathcal{G}^1_{n,0}$	Darstellung mit $a_1, a_2, a_3 \in \mathfrak{K}_n$
2	0	Punkt	$a_1 \wedge e_\infty$
3	1	Linie	$a_1 \wedge a_2 \wedge e_\infty$
4	2	Ebene	$a_1 \wedge a_2 \wedge a_3 \wedge e_\infty$

Tabelle 9.2.: Graduierte Untervektorräume $\mathcal{A} = \{x \in \mathfrak{K}_n \mid x \wedge a_1 \wedge \ldots \wedge a_{k-1} \wedge e_\infty = 0\}$ mit Grad $k = \dim \mathcal{A} \in \{2, \ldots, 4\}$ im konformen Modell und zu $\mathcal{A} \cap \mathfrak{K}_n$ homöomorphe Figuren im Vektorraum $\mathcal{G}^1_{n,0}$ des Standardraummodells.

Es gilt

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{A} \cap \mathfrak{K}_n \qquad (9.5)\\
&= \{x \in \mathfrak{K}_n \mid x \wedge A = 0\}\\
&= \{x \in \mathfrak{K}_n \mid e_\infty e_0 (x \wedge A) = 0\}\\
&\overset{2.8}{=} \{x \in \mathfrak{K}_n \mid (e_\infty \wedge e_0) \cdot (x \wedge A) = 0\}\\
&\overset{2.8}{=} \{x \in \mathfrak{K}_n \mid (e_\infty \cdot (e_0 \cdot (x \wedge A)) = 0\}\\
&\overset{7.24}{=} \{x \in \mathfrak{K}_n \mid e_\infty \cdot ((e_0 \cdot x)A - x \wedge (e_0 \cdot A)) = 0\}\\
&\overset{7.24}{=} \{x \in \mathfrak{K}_n \mid (e_0 \cdot x)(e_\infty \cdot A) - (e_\infty \cdot x)(e_0 \cdot A) + x \wedge (e_\infty \cdot (e_0 \cdot A)) = 0\}\\
&\overset{2.8}{=} \{x \in \mathfrak{K}_n \mid (e_0 \cdot x)(e_\infty \cdot A) + (e_0 \cdot A) + x \wedge ((e_\infty \wedge e_0) \cdot A) = 0\}\\
&\overset{9.3}{=} \left\{ y \in \mathcal{G}^1_{n,0} \mid -\frac{1}{2} y^2 (e_\infty \cdot A) + (e_0 \cdot A) + (y + \frac{1}{2} y^2 e_\infty + e_0) \wedge ((e_\infty \wedge e_0) \cdot A) = 0 \right\}\\
&\overset{9.4}{=} \left\{ y \in \mathcal{G}^1_{n,0} \mid \left(y + e_0 + (e_0 \cdot A)\left((e_\infty \wedge e_0) \cdot A\right)^{-1}\right) \wedge ((e_\infty \wedge e_0) \cdot A) = 0 \right\}\\
&= \left\{ y \in \mathcal{G}^1_{n,0} \mid (y - y_0) \wedge ((e_\infty \wedge e_0) \cdot A) = 0 \right\}
\end{aligned}
$$

mit der Parametrisierung einer $(k-2)$-Ebene, nämlich dem Normalenvektor vom Ursprung zur Ebene

$$y_0 = -\left(e_0 + (e_0 \cdot A)\left((e_\infty \wedge e_0) \cdot A\right)^{-1}\right) \in \mathcal{G}^1_{n,0}. \qquad \square$$

Anmerkung. Tabelle 9.2 benennt drei $(k-2)$-Ebenen mit $k \in \{2, \ldots, 4\}$ als homöomorphe Figuren in $\mathcal{G}^1_{n,0}$.

Lemma 9.2.4 (Punkt-0-Ebene-Äquivalenz)**.** *Seien die Grunddimension $n \in \mathbb{N}_0$, die Geometrische Algebra $\mathcal{G}_{n+1,1} = \mathbb{R}^{2^{n+2}}$, die Horosphäre $\mathfrak{K}_n \subset \mathcal{G}^1_{n+1,1}$ und der Punkt $a \in \mathfrak{K}_n$ erklärt.*
Es gilt

$$\{x \in \mathfrak{K}_n \mid x \wedge a \wedge e_\infty = 0\} = a,$$

die 0-Ebene $\{x \in \mathfrak{K}_n \mid x \wedge a \wedge e_\infty\}$ ist also gleich dem definierenden Punkt a.

Beweis. Es gilt

$$
\begin{aligned}
&\{x \in \mathfrak{K}_n \mid x \wedge a \wedge e_\infty = 0\} \\
&\overset{9.5}{=} \{x \in \mathfrak{K}_n \mid (e_0 \cdot x)(e_\infty \cdot (a \wedge e_\infty)) + (e_0 \cdot (a \wedge e_\infty)) + x \wedge (e_\infty \cdot (e_0 \cdot (a \wedge e_\infty))) = 0\} \\
&\overset{7.24}{=} \{x \in \mathfrak{K}_n \mid -(e_0 \cdot x)e_\infty + (e_0 \cdot a)e_\infty - a + x \wedge (e_\infty \cdot ((e_0 \cdot a)e_\infty + a)) = 0\} \\
&\underset{9.3}{\overset{9.1}{=}} \{x \in \mathfrak{K}_n \mid -(e_0 \cdot x)e_\infty + (e_0 \cdot a)e_\infty - a - x = 0\} \\
&= \{x \in \mathfrak{K}_n \mid (e_0 \cdot (a - x))e_\infty - a - x = 0\} \\
&= \{x \in \mathfrak{K}_n \mid (e_0 \wedge (a - x))e_\infty = 0\} \\
&\overset{2.8}{=} \{x \in \mathfrak{K}_n \mid x - a = 0\} \\
&= a.
\end{aligned}
$$

□

9.3. Transformationen

Lemma 9.3.1 (Spiegelung an einer Ebene)**.** *Seien die Grunddimension $n \in \mathbb{N}_0$ und die Geometrische Algebra $\mathcal{G}_{n+1,1}$ erklärt, sowie die Horosphäre $\mathfrak{K}_n \subset \mathcal{G}^1_{n+1,1}$. Definiere der k-Spat $A \in \mathcal{G}^k$ mit $A \wedge e_\infty = 0$ und mit Grad $k \in \{2, \ldots, n+2\}$ einen k-dimensionalen Untervektorraum*

$$\mathcal{A} = \{x \in \mathcal{G}^1_{n+1,1} \mid x \wedge A = 0\}$$

und damit eine $(k-2)$-Ebene $\mathcal{A} \cap \mathfrak{K}_n$.
Für alle $x \in \mathfrak{K}_n$ gilt

$$(-1)^k \, S_A(x) \in \mathfrak{K}_n$$

mit der Spiegelung S_A nach Definition 8.4.1.

Beweis. Für jedes $x \in \mathfrak{K}_n$ können wir

$$
\begin{aligned}
S_A(x) \cdot e_\infty &\overset{8.21}{=} (-1)^{k+1}(AxA^{-1}) \cdot e_\infty \\
&\overset{7.12}{=} (Ax)(A^{-1} \cdot e_\infty) + (-1)^k A(x \cdot e_\infty)A^{-1} + (-1)^{k+1}(A \cdot e_\infty)xA^{-1} \\
&\overset{9.1}{=} (-1)^{k+1}(Ax)(e_\infty \cdot A^{-1}) + (-1)^{k+1} + (-1)^{k+1}(A \cdot e_\infty)xA^{-1} \\
&= (-1)^{k+1}Axe_\infty A^{-1} + (-1)^{k+1} + (-1)^{k+1}Ae_\infty xA^{-1} \\
&= 2(-1)^{k+1}A(x \cdot e_\infty)A^{-1} + (-1)^{k+1} \\
&\overset{9.1}{=} 2(-1)^k + (-1)^{k+1} \\
&= (-1)^k
\end{aligned}
$$

und

$$\begin{aligned} S_A(x) \cdot S_A(x) &\overset{8.21}{=} (AxA^{-1}) \cdot (AxA^{-1}) \\ &\overset{7.3}{=} AxA^{-1}AxA^{-1} \\ &= xx \\ &\overset{9.1}{=} 0. \end{aligned}$$

zeigen, woraus wir $(-1)^k\, S_A(x) \in \mathfrak{K}_n$ folgern. □

Definition 9.3.1 (Rotation)**.** Seien eine Grunddimension $n \in \mathbb{N}_0$ und eine Geometrische Algebra $\mathcal{G}_{n+1,1}$ erklärt, sowie die Horosphäre $\mathfrak{K}_n \subset \mathcal{G}^1_{n+1,1}$. Definieren die k-Spate $A, B \in \mathcal{G}^k$ mit ($A \wedge e_\infty = 0$ und $B \wedge e_\infty = 0$ und $A^* \wedge B^* \neq 0$) und mit Grad $k \in \{2, \ldots, n+2\}$ die k-dimensionalen Untervektorräume

$$\mathcal{A} = \{x \in \mathcal{G}^1_{n+1,1} \mid x \wedge A = 0\}$$

und

$$\mathcal{B} = \{x \in \mathcal{G}^1_{n+1,1} \mid x \wedge B = 0\}$$

und damit die $(k-2)$-Ebenen $\mathcal{A} \cap \mathfrak{K}_n$ und $\mathcal{B} \cap \mathfrak{K}_n$.
Die Abbildung

$$\mathfrak{K}_n \to \mathfrak{K}_n, x \mapsto BAxA^{-1}B^{-1}$$

beschreibt eine Rotation in dem Vektorraum $\mathcal{G}^1_{n,0}$, der homöomorph zur Horosphäre $\mathfrak{K}_n$ ist.

Definition 9.3.2 (Translation)**.** Seien eine Grunddimension $n \in \mathbb{N}_0$ und eine Geometrische Algebra $\mathcal{G}_{n+1,1}$ erklärt, sowie die Horosphäre $\mathfrak{K}_n \subset \mathcal{G}^1_{n+1,1}$. Definieren die k-Spate $A, B \in \mathcal{G}^k$ mit ($A \wedge e_\infty = 0$ und $B \wedge e_\infty = 0$ und $A^* \wedge B^* = 0$) und mit Grad $k \in \{2, \ldots, n+2\}$ die k-dimensionalen Untervektorräume

$$\mathcal{A} = \{x \in \mathcal{G}^1_{n+1,1} \mid x \wedge A = 0\}$$

und

$$\mathcal{B} = \{x \in \mathcal{G}^1_{n+1,1} \mid x \wedge B = 0\}$$

und damit die $(k-2)$-Ebenen $\mathcal{A} \cap \mathfrak{K}_n$ und $\mathcal{B} \cap \mathfrak{K}_n$.
Die Abbildung

$$\mathfrak{K}_n \to \mathfrak{K}_n, x \mapsto BAxA^{-1}B^{-1}$$

beschreibt eine Translation in dem Vektorraum $\mathcal{G}^1_{n,0}$, der homöomorph zur Horosphäre $\mathfrak{K}_n$ ist.

Definition 9.3.3 (Bewegung)**.** Seien eine Grunddimension $n \in \mathbb{N}_0$ und eine Geometrische Algebra $\mathcal{G}_{n+1,1}$ erklärt. Beschreibe der gerade Versor $R \in \mathcal{G}^+_{n+1,1}$ eine Rotation und der gerade Versor $T \in \mathcal{G}^+_{n+1,1}$ eine Translation.
Die Abbildung

$$\mathfrak{K}_n \to \mathfrak{K}_n, x \mapsto TRxR^{-1}T^{-1}$$

beschreibt eine eigentliche Bewegung im Vektorraum $\mathcal{G}^1_{n,0}$, der homöomorph zur Horosphäre $\mathfrak{K}_n$ ist.

Teil II.

Implementierung

10. Multivektor

10.1. Darstellung von Mengen

Fontijne [11] stellt eine Möglichkeit der Darstellung von Elementen einer Potenzmenge als nicht-negative ganze Zahl vor.

Definition 10.1.1 (Bitmenge)**.** Sei die Grunddimension $n \in \mathbb{N}_0$ erklärt.
Anhand der Grunddimension definieren wir die Bitmenge als zusammenhängende Teilmenge

$$\mathbb{B}_n = \{0, \ldots, 2^n - 1\} \subset \mathbb{N}_0.$$

der nicht-negativen ganzen Zahlen $\mathbb{N}_0$. Elemente der Bitmenge $\mathbb{B}_n$ werden in einem Binärsystem durch n Bits dargestellt.

Definition 10.1.2 (Stoneabbildung)**.** Seien die Grunddimension $n \in \mathbb{N}_0$ und die Grundmenge $N = \{1, \ldots, n\}$ erklärt, sowie die Bitmenge $\mathbb{B}_n$.
Wir definieren die bijektive Stoneabbildung als

$$\begin{aligned} b\colon \mathcal{P}(N) &\to \mathbb{B}_n, \\ U &\mapsto \sum_{i \in U} 2^{i-1} \end{aligned}$$

und schreiben ihre Inverse als

$$\begin{aligned} b^{-1}\colon \mathbb{B}_n &\to \mathcal{P}(N), \\ k &\mapsto \{i \in N \mid k/2^{i-1} \in \mathbb{N}^-\}. \end{aligned}$$

Definition 10.1.3 (XOR-Operation)**.** Seien eine Grunddimension $n \in \mathbb{N}_0$ erklärt, sowie die Bitmenge $\mathbb{B}_n$.
Wir nennen die zweistellige Verknüpfung

$$\begin{aligned} \mathrm{XOR}\colon \mathbb{B}_n \times \mathbb{B}_n &\to \mathbb{B}_n, \\ (i, j) &\mapsto b\left(\left(b^{-1}(i)\right) \triangle \left(b^{-1}(j)\right)\right) \end{aligned}$$

die XOR-Operation. Diese Operation ist in allen üblichen Rechenarchitekturen vorhanden.

Die Stoneabbildung ist ein Isomorphismus zwischen den Paaren $(\mathcal{P}(N), \triangle)$ und $(\mathbb{B}_n, \mathrm{XOR})$ und dient der Implementierung der symmetrischen Differenz in Mengensystemen.

$\mathcal{P}(N)$	Dez.	Binär
$\emptyset$	0	000
$\{1\}$	1	001
$\{2\}$	2	010
$\{1,2\}$	3	011
$\{3\}$	4	100
$\{1,3\}$	5	101
$\{2,3\}$	6	110
$\{1,2,3\}$	7	111

XOR	000	001	010	011	100	101	110	111
000	000	001	010	011	100	101	110	111
001	001	000	011	010	101	100	111	110
010	010	011	000	001	110	111	100	101
011	011	010	001	000	111	110	101	100
100	100	101	110	111	000	001	010	011
101	101	100	111	110	001	000	011	010
110	110	111	100	101	010	011	000	001
111	111	110	101	100	011	010	001	000

Tabelle 10.1.: Stoneabbildung von Elementen der Potenzmenge $\mathcal{P}(\{1,2,3\})$ auf Elemente der Bitmenge $\mathbb{B}_3$ in dezimaler und binärer Schreibweise, sowie Verknüpfungstabelle der XOR-Operation von Elementen der Bitmenge $\mathbb{B}_3$ binär dargestellt.

Beispiel 10.1.1 (Stoneabbildung und XOR-Operation in der Grunddimension 3)**.** Die linke Seite der Tabelle 10.1 zeigt die Stoneabbildung $b : \mathcal{P}(\{1,2,3\}) \to \mathbb{B}_3$, wobei die Elemente in $\mathbb{B}_3$ in dezimaler und binärer Schreibweise dargestellt werden.
Die rechte Seite der Tabelle zeigt eine Verknüpfungstafel der XOR-Operation mit den Elementen in $\mathbb{B}_3$ binär dargestellt.

10.2. Ablage im Speicher

In diesem Abschnitt wird die Ablage eines Multivektors im Speicher besprochen. Wir folgen dabei dem direkten Weg der Ablage der Koordinaten in ein Array, und zeigen mögliche Indizierungen der Koordinaten durch Indexabbildungen auf.

Definition 10.2.1 (Array)**.** Wir definieren ein Array der Größe $n \in \mathbb{N}_0$ und des Datentypes $\mathbb{T}$ als eine endliche Folge

$$(a_i)_{i\in\{0,\dots,n-1\}} \in \mathbb{T}^n.$$

Seien die Grunddimension $n \in \mathbb{N}_0$, die Grundmenge $N = \{1,\dots,n\}$ und die Geometrische Algebra $\mathcal{G} = \mathbb{R}^{2^n}$ erklärt, sowie der Multivektor

$$A = (A_U)_{U\in\mathcal{M}} \in \mathbb{R}^{|\mathcal{M}|} \subseteq \mathcal{G}$$

mit dem Mengensystem $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(N)$ über N erklärt.
Mit einer eindeutigen Indexabbildung

$$I\colon \{0,\dots,|\mathcal{M}|-1\} \to \mathcal{M}$$

zwischen dem Mengensystem $\mathcal{M}$ und der Indexmenge $\{0,\dots,|\mathcal{M}|-1\}$ kann der Multivektor A als Array

$$(A_{I(i)})_{i\in\{0,\dots,|\mathcal{M}|-1\}} \in \mathbb{R}^{|\mathcal{M}|}$$

im Speicher abgelegt werden.

Arithmetische Indexabbildungen Mögliche Indexabbildungen stellen die Struktur ausgezeichneter Elemente einer Geometrischen Algebra arithmetisch dar und können rechnerisch bestimmt werden. Da eine Indexabbildung eindeutig ist, wäre die rechnerische Bestimmung der Inversen ebenfalls vorstellbar.

Beispiel 10.2.1 (Stoneabbildung als arithmetische Indexabbildung)**.** Da das Bild der Potenzmenge unter der Stoneabbildung $b(\mathcal{P}(N))$ eine endliche Indexmenge ergibt, nämlich

$$b(\mathcal{P}(N)) = \{0, \ldots, 2^n - 1\},$$

kann die Stoneabbildung als Indexabbildung

$$\begin{aligned} I\colon \{0, \ldots, 2^n - 1\} &\to \mathcal{M}, \\ i &\mapsto b^{-1}(i) \end{aligned}$$

für die Indizierung von Koordinaten über $\mathcal{P}(N)$ verwendet werden.

Beispiel 10.2.2 (Arithmetische Indexabbildung der geraden Potenzmenge)**.** Seien die Grunddimension $n \in \mathbb{N}_0$ und die Grundmenge $N = \{1, \ldots, n\}$ erklärt.
Aus der Definition des Mengendifferenzisomorphismus aus Satz A.1.1 lässt sich folgende arithmetische Indexabbildung über die gerade Potenzmenge $\mathcal{P}^+(N)$ entwickeln:

$$\begin{aligned} I\colon \{0, \ldots, 2^{(n-1)} - 1\} &\to \mathcal{P}^+(N), \\ i &\mapsto \begin{cases} b^{-1}(i) & \text{für } b^{-1}(i) \text{ gerade} \\ b^{-1}(i) \cup \{n\} & \text{für } b^{-1}(i) \text{ ungerade} \end{cases}. \end{aligned}$$

Tabellarische Indexabbildung Für ein beliebiges Mengensystem $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(N)$ mit Grunddimension $n \in \mathbb{N}_0$ und Grundmenge $N = \{1, \ldots, n\}$ kann ein Indexarray

$$(k_i)_{i \in \{0, \ldots, |\mathcal{M}|-1\}} \in (\mathbb{B}_n)^{|\mathcal{M}|}$$

verwendet werden, welches die Indexabbildung

$$\begin{aligned} I\colon \{0, \ldots, |\mathcal{M}| - 1\} &\to \mathcal{M} \\ i &\mapsto b^{-1}(k_i) \end{aligned}$$

induziert.
Die inverse Indexabbildung würde in der Implementierung eine Suche in dem Indexarray beinhalten.

11. Vorzeichenfunktion

11.1. Einleitung

In diesem Kapitel wird auf die Implementierung der Vorzeichenfunktion eingegangen. Durch die Konstruktion der Geometrischen Algebra und der Definition der Vorzeichenfunktion in der vorliegenden Arbeit kann im Folgenden eine günstigere Implementierung zu den bisher bekannten vorgestellt werden.
Es sollte beachtet werden, dass die Signatur einer Geometrischen Algebra in der Anwendung schon zur Kompilierzeit einer Implementierung bekannt sein könnte. Dies sollte im Allgemeinen zur Bestimmung des Vorzeichens in der Implementierung des Geometrischen Produktes während des Kompiliervorganges ausgenützt werden.

11.2. Homomorphismus

Definition 11.2.1 (Vorzeichenpotenzfunktion)**.** Wir definieren die Vorzeichenpotenzfunktion als

$$\begin{aligned} s\colon \mathbb{N}_0 &\to \{-1,+1\}, \\ b &\mapsto (-1)^b. \end{aligned}$$

Wir nennen das Argument $b \in \mathbb{N}_0$ der Vorzeichenpotenzfunktion eine *Vorzeichensumme*.

Die Vorzeichenpotenzfunktion in 11.2.1 ist ein Homomorphismus von $(\mathbb{N}_0, +)$ in $(\{-1,+1\}, \bullet)$, es gilt

$$s(b+c) = s(b)s(c) \;\forall\, b, c \in \mathbb{N}_0.$$

Sie besitzt eine Rechtsinverse

$$\begin{aligned} s^{-1}\colon \{-1,+1\} &\to \{0,1\}, \\ a &\mapsto (1-a)/2, \end{aligned}$$

so daß

$$(s \circ s^{-1})(a) = a$$

für alle $a \in \{-1,+1\}$ gilt.

Die Vorzeichenpotenzfunktion und ihre Rechtsinverse wird im Folgenden benutzt, um Multiplikationen von Vorzeichen als Additionen durchzuführen. Auf Rechenarchitekturen kann es günstiger sein, anstatt eine Koordinate mit dem endlichen Produkt von Vorzeichen zu multiplizieren, eine Vorzeichensumme zu berechnen und das Vorzeichen der Koordinate anhand der Parität der Vorzeichensumme zu ändern.

11.3. Implementierung nach Definition der Vorzeichenfunktion

Seien die Signatur $(p,q) \in (\mathbb{N}_0)^2$, die Grunddimension $n = p + q \in \mathbb{N}_0$ und die Grundmenge $N = \{1, \ldots, n\}$ erklärt.
Unter der Verwendung der Stoneabbildung $b : \mathcal{P}(N) \to \mathbb{B}_n$ kann die Vorzeichenfunktion anhand ihrer Definition in 1.6 als Abbildung

$$\begin{aligned}
\mathbb{B}_n \times \mathbb{B}_n &\to \{-1, +1\}, \\
(k,l) &\mapsto \alpha\left(b^{-1}(k), b^{-1}(l)\right) \\
&= \prod_{i \in b^{-1}(k)} \prod_{j \in b^{-1}(l)} \alpha(\{i\},\{j\}) \\
&= s\left(\sum_{i \in b^{-1}(k)} \sum_{j \in b^{-1}(l)} s^{-1}\left(\alpha(\{i\},\{j\})\right)\right)
\end{aligned}$$

implementiert werden.
Eine mögliche Implementierung der Vorzeichenfunktion über der Grundmenge, die den Axiomen in 1.5 und 1.7 genügt, ist

$$\begin{aligned}
&N \times N \to \{-1, +1\}, \\
&(i,j) \mapsto \alpha(\{i\},\{j\}) = \begin{cases} +1 & \text{für } (i < j) \text{ oder } (i = j \text{ und } i <= p) \\ -1 & \text{für } (i > j) \text{ oder } (i = j \text{ und } i > p) \end{cases},
\end{aligned}$$

sowie die Implementierung ihrer Rechtsinversen

$$\begin{aligned}
&N \times N \to \{0, 1\}, \\
&(i,j) \mapsto s^{-1}\left(\alpha(\{i\},\{j\})\right) = \begin{cases} 0 & \text{für } (i < j) \text{ oder } (i = j \text{ und } i <= p) \\ 1 & \text{für } (i > j) \text{ oder } (i = j \text{ und } i > p) \end{cases}.
\end{aligned}$$

Algorithmus 1 zeigt eine Implementierung der Vorzeichenfunktion nach Definition in 1.6, wobei die Vorzeichenpotenzfunktion und ihre Rechtsinverse zur Berechnung einer Vorzeichensumme $b \in \mathbb{N}_0$ verwendet wird, so daß das Vorzeichen $s(b)$ ist.

11.4. Implementierung nach Axiomen des Geometrischen Produktes

Seien die Signatur $(p,q) \in (\mathbb{N}_0)^2$, die Grunddimension $n = p + q \in \mathbb{N}_0$, die Grundmenge $N = \{1, \ldots, n\}$ und die Geometrische Algebra $\mathcal{G}_{p,q} = \mathbb{R}^{2^n}$ erklärt.
Das Geometrische Produkt zwischen Basisvektoren ist durch folgende Axiome definiert:

1. Antikommutativität von Basisvektoren in 7.6:
   $e_{\{i\}} e_{\{j\}} = -e_{\{j\}} e_{\{i\}} \; \forall\, i, j \in N : i \neq j$.

Algorithmus 1 : Algorithmus zur Berechnung der Vorzeichenfunktion nach Definition in 1.6.

```
Daten : Endliches Indexmengenpaar (k, l) ∈ (𝔹_n)^2.
Ergebnis : Vorzeichensumme b ∈ ℕ_0, so daß das Vorzeichen s(b) ist.
Beginn
    b ← 0
    für jedes i ∈ b^{-1}(k) tue
        für jedes j ∈ b^{-1}(l) tue
            wenn (i > j) oder (i = j und i > p) dann
                b ← b + 1
            Ende
        Ende
    Ende
    zurück b
Ende
```

2. Assoziativität von Basisvektoren in 1.24:
   $(e_{\{i\}}e_{\{j\}})e_{\{k\}} = e_{\{i\}}(e_{\{j\}}e_{\{k\}})\ \forall\, i, j, k \in N.$

3. Produkt zwischen Basisvektoren in 1.21:
   $e_{\{i\}}e_{\{i\}} = \begin{cases} +1 & \text{für } i \leq p \\ -1 & \text{für } i > p \end{cases} \forall\, i \in N,$

wobei laut 2.10 jeder Basismultivektor in das endliche Produkt

$$e_U = \prod_{i,j \in U : i<j} \alpha(\{i\}, \{j\})\, e_{\{i\}}$$

von Basisvektoren zerlegt werden kann.

Definition 11.4.1 (AND-Operator)**.** Seien die Grunddimension $n \in \mathbb{N}_0$ erklärt, sowie die Bitmenge $\mathbb{B}_n$.
Wir definieren den AND-Operator als

$$\begin{aligned} \mathrm{AND}\colon \mathbb{B}_n \times \mathbb{B}_n &\to \mathbb{B}_n, \\ (k, l) &\mapsto= b^{-1}(b(k) \cap b(l)). \end{aligned}$$

Definition 11.4.2 (Rechtsschiebung)**.** Seien die Grunddimension $n \in \mathbb{N}_0$ erklärt, sowie die Bitmenge $\mathbb{B}_n$.
Wir definieren den Rechtsschieber als

$$\begin{aligned} >>\colon \mathbb{B}_n \times \mathbb{N}_0 &\to \mathbb{B}_n, \\ (k, i) &\mapsto k/(2^i). \end{aligned}$$

Definition 11.4.3 (Bitanzahl)**.** Seien die Grunddimension $n \in \mathbb{N}_0$ erklärt, sowie die Bitmenge $\mathbb{B}_n$.
Wir defineren die Bitanzahl oder das Hamming-Gewicht einer endlichen Indexmenge als

$$\begin{aligned} \mathrm{C}\colon \mathbb{B}_n &\to \mathbb{N}_0 \\ k &\mapsto |b^{-1}(U)|. \end{aligned}$$

Zur Berechnung der Bitanzahl existieren effiziente Implementierung für übliche Datentypen auf heutigen Rechenarchitekturen.

Algorithmus 2 : Algorithmus zur Berechnung der Vorzeichenfunktion nach Axiomen des Geometrischen Produktes von Basisvektoren. Der Algorithmus ist eine Erweiterung der Implementierung von Dorst, Fontijne und Mann [8].

Daten : Endliches Indexmengenpaar $(k, l) \in (\mathbb{B}_n)^2$.
Ergebnis : Vorzeichensumme $b \in \mathbb{N}_0$, so daß das Vorzeichen $s(b)$ ist.
Beginn
  $b \leftarrow 0$
  $k \leftarrow k >> 1$
  solange $k \neq 0$ **tue**
    $b \leftarrow b + \mathrm{C}(k \,\mathrm{AND}\, l)$
    $k \leftarrow k >> 1$
  Ende
  zurück b
Ende

Dorst, Fontijne und Mann [8] zeigen eine Implementierung der Vorzeichenfunktion anhand dieser Axiome, wobei sie von der Implementierung eines Standardraummodelles $\mathcal{G}_{n,0}$ ausgehen.
Algorithmus 2 zeigt eine Erweiterung der Implementierung von Dorst, Fontijne und Mann [8] zur Berechnung der Vorzeichenfunktion basierend auf den Axiomen des Geometrischen Produktes von Basisvektoren. Die Erweiterung beinhaltet die Vorzeichenbestimmung für eine Geometrische Algebra mit beliebiger Signatur.

11.5. Implementierung nach Axiomen der Vorzeichenfunktion

Seien die Signatur $(p, q) \in (\mathbb{N}_0)^2$, die Grunddimension $n = p + q \in \mathbb{N}_0$ und die Grundmenge $N = \{1, \ldots, n\}$ erklärt.
Folgende Axiome genügen einer Vorzeichenfunktion:

1. Symmetrieeigenschaft in 1.12:

$$\alpha(U,V) = (-1)^{(|U||V|+|U\cap V|)}\alpha(V,U)\ \forall\, U,V \in \mathcal{P}(N).$$

2. Vorzeichenfunktion gleicher Operanden in 1.19 und Vorzeichenfunktion aus Signatur in 1.15:

$$\alpha(U,U) = (-1)^{\frac{1}{2}|U|(|U|-1)} \prod_{i\in U} \begin{cases} +1 & \text{für } i \leq p \\ -1 & \text{für } i > p \end{cases} \quad \forall\, U \in \mathcal{P}(N).$$

Diese Axiome werden durch die Abbildung

$$\begin{aligned} &\mathcal{P}(N) \times \mathcal{P}(N) \to \{-1,1\}, \\ &\qquad (U,V) \to \alpha(U\cap V, U\cap V) \begin{cases} +1 & \text{für } b(U) \leq b(V) \\ (-1)^{|U||V|+|U\cap V|} & \text{für } b(U) > b(V) \end{cases} \end{aligned}$$

erfüllt.
Die Vorzeichenfunktion mit gleichen Argumenten kann durch die Definition einer Signaturmenge

$$A = \{i \in N \mid i > p\}$$

und unter Beachtung von 1.19 und 1.15 als

$$\alpha(U,U) = (-1)^{\frac{1}{2}|U|(|U|-1)+|U\cap A|}$$

bestimmt werden.
Damit können wir eine Vorzeichensumme

$$b = (|U\cap V|(|U\cap V|-1))/2 + |U\cap A| + \begin{cases} 0 & \text{für } b(U) \leq b(V) \\ |U||V| + |U\cap V| & \text{für } b(U) > b(V) \end{cases}$$

berechnen, so daß $\alpha(U,V) = s(b)$ gilt.
Algorithmus 3 zeigt eine entsprechende Implementierung.

11.6. Laufzeitvergleiche

Abbildung 11.1 zeigt Messungen der Evaluierungsdauer von Implementierungen der Vorzeichenfunktion über der Grunddimension $n \in \{6,\ldots,12\}$, durchgeführt wie in Algorithmus 4 dargestellt. Durchgezogene Kurven zeigen Evaluierungen mit einer Signatur $(n,0)$, gepunktete Kurven mit einer Signatur $(0,n)$. Die Messungen wurden auf einer Intel Core2 Duo T9300 CPU bei 2.50GHz durchgeführt.

Algorithmus 3 : Algorithmus zur Berechnung der Vorzeichenfunktion nach Axiomen der Vorzeichenfunktion.

Daten : Signaturbitmap $a = b(A) = \sum_{i \in \{p,\ldots,p+q-1\}} 2^i$.
Daten : Endliches Indexmengenpaar $(k, l) \in (\mathbb{B}_n)^2$.
Ergebnis : Vorzeichensumme $b \in \mathbb{N}_0$, so daß das Vorzeichen $s(b)$ ist.
Beginn

$m \leftarrow k \operatorname{AND} l$
$r \leftarrow \mathrm{C}(m)$
$$b \leftarrow ((r(r-1)) >> 1) + \mathrm{C}(m \operatorname{AND} a) + \begin{cases} 0 & \text{für } k \leq l \\ \mathrm{C}(k)\,\mathrm{C}(l) + r & \text{für } k > l \end{cases}$$
zurück b

Ende

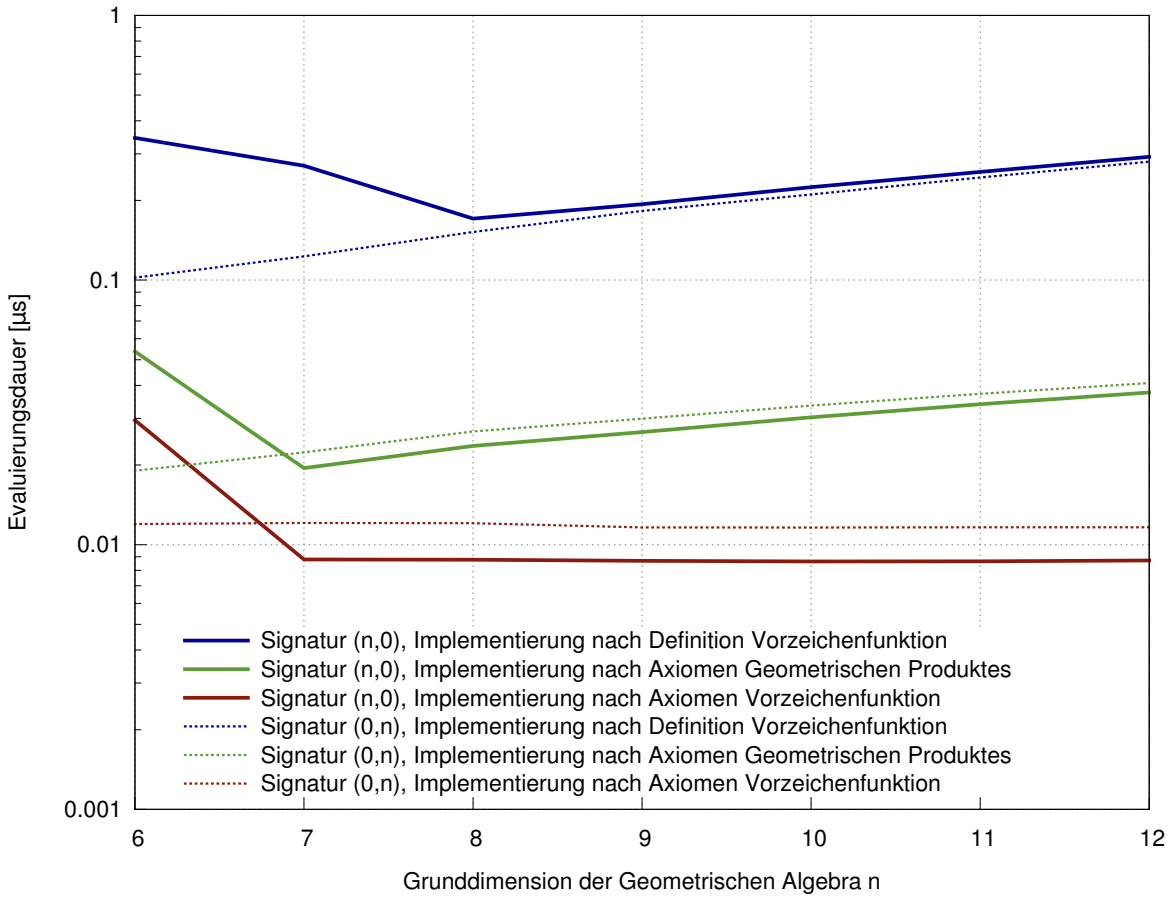


Abbildung 11.1.: Evaluierungsdauer von verschiedenen Implementierungen der Vorzeichenfunktion über der Grunddimension $n \in \{6, \ldots, 12\}$ dargestellt. Durchgezogene Kurven zeigen Evaluierungen mit einer Signatur $(n, 0)$, gepunktete Kurven mit einer Signatur $(0, n)$.

Algorithmus 4 : Messung der gemittelten Evaluierungsdauer von einer Vorzeichenfunktion α.

Daten : Signatur $(n, 0)$ oder $(0, n)$ mit Grunddimension $n \in \{6, \ldots, 12\}$.
Ergebnis : Gemittelte Evaluierungsdauer pro Vorzeichenfunktionsaufruf.

```
Beginn
    ta ← zeit()
    für k ← 0 bis 2^n − 1 tue
        für l ← 0 bis 2^n − 1 tue
            α(k, l)
        Ende
    Ende
    te ← zeit()
    zurück (te−ta)/2^(2n)
Ende
```

12. Geometrisches Produkt

12.1. Serielle Implementierung

Algorithmus 5 : Algorithmus zur Berechnung des Geometrischen Produktes als serielle Implementierung.

Daten : Multivektoren $(A_i)_{i\in\{0,\dots,|K|-1\}}$ und $(B_i)_{i\in\{0,\dots,|L|-1\}}$.
Ergebnis : Multivektor $(C_i)_{i\in\{0,\dots,|M|-1\}}$ des Geometrischen Produktes $C = AB$.

```
Beginn
    für i ← 1 bis |M| tue
        C_i ← 0
        für j ← 1 bis |K| tue
            C_i ← C_i + α (I(j), I(i)△I(j)) A_{I(j)} B_{I(i)△I(j)}
        Ende
    Ende
Ende
```

Seien die Grunddimension $n \in \mathbb{N}_0$, die Grundmenge $N = \{1, \dots, n\}$ und die Geometrische Algebra $\mathcal{G} = \mathbb{R}^{2^n}$ erklärt, sowie die Mengen $K, L, M \subseteq \mathcal{P}(N)$ so, dass

$$M = \{U \triangle V \mid U \in K \wedge V \in L\}.$$

Mit den Mengen definieren wir die Untermultivektorräume $\mathcal{A} = \mathcal{L}(e_U)_{U\in K}$, $\mathcal{B} = \mathcal{L}(e_V)_{V\in L}$ und $\mathcal{C} = \mathcal{L}(e_W)_{W\in M}$ mit $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} \subseteq \mathcal{G}$.
Das Geometrische Produkt zwischen den Untermultivektorräume ist die Abbildung

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} \times \mathcal{B} &\to \mathcal{C} \\
AB &\mapsto \sum_{U\in K} \sum_{V\in L} A_U B_V \, \alpha(U, V) \, e_{U\triangle V} \\
&= \sum_{W\in M} \sum_{U\in K} A_U B_{U\triangle W} \, \alpha(U, U\triangle W) \, e_W \\
&= \sum_{W\in M} \sum_{V\in K} A_{V\triangle W} B_V \, \alpha(V\triangle W, V) \, e_W,
\end{aligned}$$

wobei drei verschiedene Verschachtelungsmöglichkeiten der endlichen Produkte gezeigt werden.

Algorithmus 5 zeigt einen einfachen Algorithmus zur seriellen Implementierung des Geometrischen Produktes. In dem Algorithmus wird eine Vorzeichenfunktion in der Form $\alpha : \mathcal{P}(N) \times \mathcal{P}(N) \to \{-1, +1\}$ aufgerufen, also mit Teilmengen von N als Argumenten. In einer Implementierung würden sämtliche Teilmengen durch die Stoneabbildung als Bitmaps in $\mathbb{B}_n$ dargestellt werden.
In dem Algorithmus 5 wurde die verschachtelte endliche Schleife des Geometrischen Produktes so gewählt, dass über die Koordinaten des Ergebnismultivektors in der äußeren Schleife iteriert wird. Damit bleibt das Schreiben auf die jeweilige Koordinate möglichst lange lokal um Cachespeicher und Register besser ausnützen zu können.

12.2. Vektorisierung des Geometrischen Produktes

12.2.1. Einleitung

In diesem Abschnitt wird eine Vektorisierungsstrategie des Geometrischen Produktes beliebiger endlicher Geometrischen Algebren beschrieben, wie sie auf vielen heute üblichen Prozessorarchitekturen implementiert werden kann. Beabsichtigt wird dabei eine hohe Rechenleistung der Gleitkommaoperationen durch Benutzung von Vektorregisteroperationen.

12.2.2. Vektorregisteroperationen

Heute übliche Prozessorarchitekturen bieten die Möglichkeit, bestimmte Operationen auf mehreren Elementen in Vektorregister mit einer Instruktion durchzuführen.
Wir notieren ein Vektorregister mit der Breite von $w = 2^v$ Elementen und dem Exponent $v \in \mathbb{N}_0$ als Array $(a_i)_{i \in \{0,\ldots,w-1\}} \in \mathbb{T}^w$ des Datentypes $\mathbb{T}$.
In der vorliegenden Arbeit werden folgende Klassen von Vektorregisteroperationen benutzt, wobei diese Einteilung unvollständig ist:

1. Permutationsoperationen bezüglich einer Permutationsgruppe P in der Form

$$\begin{aligned} P \times \mathbb{R}^w &\to \mathbb{R}^w, \\ \big(\tau, (a_i)_{i \in \{0,\ldots,w-1\}}\big) &\mapsto (a_{\tau(i)})_{i \in \{0,\ldots,w-1\}}. \end{aligned}$$

2. Broadcastoperationen in der Form

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^w, \\ a &\mapsto (a)_{i \in \{0,\ldots,w-1\}}. \end{aligned}$$

3. Einstellige arithmetische Operationen in der Form

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^w &\to \mathbb{R}^w, \\ (a_i)_{i \in \{0,\ldots,w-1\}} &\mapsto (f(a_i))_{i \in \{0,\ldots,w-1\}}. \end{aligned}$$

4. Zweistellige arithmetische Operationen in der Form

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^w \times \mathbb{R}^w &\to \mathbb{R}^w, \\ \big((a_i)_{i\in\{0,\dots,w-1\}}, (b_i)_{i\in\{0,\dots,w-1\}}\big) &\mapsto (f(a_i, b_i))_{i\in\{0,\dots,w-1\}}. \end{aligned}$$

12.2.3. Geometrisches Produkt und Koordinatenpermutation

Definition 12.2.1 (Koordinatenpermutation)**.** Seien die Grunddimension $n \in \mathbb{N}_0$ und die Grundmenge $N = \{1, \dots, n\}$ erklärt.
Wir definieren eine *Koordinatenpermutationen* bezüglich der Teilmenge $V \in \mathcal{P}(N)$ als

$$\begin{aligned} \pi_V \colon \mathcal{P}(N) &\to \mathcal{P}(N), \\ U &\mapsto U \triangle V \end{aligned}$$

und führen damit die Familie der *Koordinatenpermutationen*

$$(\pi_V)_{V\in\mathcal{P}(N)}$$

ein.

Die Koordinatenpermutation hat für alle $U, V \in \mathcal{P}(N)$ folgende Eigenschaften, wobei die Permutation $\pi_\emptyset$ die identische ist:

1. Symmetrie bezüglich Subskript und Argument: $\pi_V(U) = \pi_U(V)$.
2. Kommutativität bezüglich ihrer Verkettung: $\pi_U \circ \pi_V = \pi_V \circ \pi_U$.
3. Die Permutation ist selbstinvers: $\pi_U \circ \pi_U = \pi_\emptyset$.
4. Für eine Verkettung gilt $\pi_U \circ \pi_V = \pi_{U\triangle V}$.

Geometrisches Produkt durch Koordinatenpermutation Wir können das Geometrische Produkt einer Geometrischen Algebra $\mathcal{G} = \mathbb{R}^{2^n}$ mit Hilfe der Koordinatenpermutationen $(\pi_V)_{V\in\mathcal{P}(N)}$ als

$$\begin{aligned} AB &= \sum_{V,W\in\mathcal{P}(N)} A_{V\triangle W} B_V \, e_{V\triangle W} e_V \\ &= \sum_{W\in\mathcal{P}(N)} \sum_{V\in\mathcal{P}(N)} A_{V\triangle W} B_V \, \alpha(V\triangle W, V) \, e_W \\ &= \left(\sum_{V\in\mathcal{P}(N)} A_{V\triangle W} B_V \, \alpha(V\triangle W, V) \right)_{W\in\mathcal{P}(N)} \\ &= \sum_{V\in\mathcal{P}(N)} \big(A_{\pi_V(W)} \, \alpha(V\triangle W, V)\big)_{W\in\mathcal{P}(N)} \, B_V \end{aligned} \tag{12.1}$$

für alle $A, B \in \mathcal{G}$ schreiben.
Der letzte Ausdruck bildet die Grundlage der Vektorisierungstrategie. Darin sehen wir:

$\pi_\emptyset$	$\pi_{\{1\}}$	$\pi_{\{2\}}$	$\pi_{\{3\}}$	$\pi_{\{1,2\}}$	$\pi_{\{1,3\}}$	$\pi_{\{2,3\}}$	$\pi_{\{1,2,3\}}$
$\emptyset$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	$\{1,2,3\}$
$\{1\}$	$\emptyset$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2,3\}$	$\{2,3\}$
$\{2\}$	$\{1,2\}$	$\emptyset$	$\{2,3\}$	$\{1\}$	$\{1,2,3\}$	$\{3\}$	$\{1,3\}$
$\{3\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	$\emptyset$	$\{1,2,3\}$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{1,2\}$
$\{1,2\}$	$\{2\}$	$\{1\}$	$\{1,2,3\}$	$\emptyset$	$\{2,3\}$	$\{1,3\}$	$\{3\}$
$\{1,3\}$	$\{3\}$	$\{1,2,3\}$	$\{1\}$	$\{2,3\}$	$\emptyset$	$\{1,2\}$	$\{2\}$
$\{2,3\}$	$\{1,2,3\}$	$\{3\}$	$\{2\}$	$\{1,3\}$	$\{1,2\}$	$\emptyset$	$\{1\}$
$\{1,2,3\}$	$\{2,3\}$	$\{1,3\}$	$\{1,2\}$	$\{3\}$	$\{2\}$	$\{1\}$	$\emptyset$

Tabelle 12.1.: Koordinatenpermutationen $(\pi_V)_{V\in\mathcal{P}(\{1,2,3\})}$.

1. Die endliche Summe iteriert über einen Index $V \in \mathcal{P}(N)$.
2. Die Summe besteht aus Vektor-Skalar-Produkten mit dem Skalar B_V.
3. Die Elemete des Vektor-Skalar-Produktes sind durch $\alpha(V \triangle W, V)$ vorzeichenbehaftet.
4. Die Permutation π_V des Vektors $(A_{\pi_V(W)})_{W\in\mathcal{P}(N)}$ hängt vom Index $V \in \mathcal{P}(N)$ ab, über den die endliche Summe läuft.

Die Strategie der Vektorisierung ist das einmalige Laden des Koordinatenvektors $(A_U)_{U\in\mathcal{P}(N)}$ in die Vektorregister eines Prozessors und dessen Permutation bei jedem weiteren Schritt der endlichen Summe über $V \in \mathcal{P}(N)$. Dazu soll im jeden Schritt $V \in \mathcal{P}(N)$ die Koordinate B_V auf ein Vektorregister verteilt (Broadcasting) und mit einem Vorzeichen behaftet werden.

Beispiel 12.2.1 (Koordinatenpermutationen in der Grunddimension $n = 3$)**.** Tabelle 12.1 zeigt spaltenweise die Koordinatenpermutationen $(\pi_V)_{V\in\mathcal{P}(\{1,2,3\})}$ bezüglich der identischen Permutation $\pi_\emptyset$.

Koordinatenpermutation unter der Stoneabbildung mit dem Gray-Code

Definition 12.2.2 (Stone-Permutationen)**.** Wir führen für alle $j \in \mathbb{B}_n$ die *Stone-Permutationen*

$$\begin{aligned}\tau_j : \mathbb{B}_n &\to \mathbb{B}_n,\\ i &\mapsto \left(b \circ \pi_{b^{-1}(j)} \circ b^{-1}\right)(i)\end{aligned}$$

als die Koordinatenpermutationen ein, die auf $\mathbb{B}_n$ arbeiten.

Für alle $i \in \mathbb{B}_n$ gilt

$$\begin{aligned}\tau_j(i) &= (b \circ \pi_{(b^{-1}(j))} \circ b^{-1})(i)\\ &= b\left(\pi_{(b^{-1}(j))}(b^{-1}(i))\right)\\ &= b\left(b^{-1}(i) \triangle b^{-1}(j)\right)\\ &= i \,\mathrm{XOR}\, j.\end{aligned}$$

$\tau_\emptyset$	τ_1	τ_2	τ_4
0	1	2	4
1	0	3	5
2	3	0	6
3	2	1	7
4	5	6	0
5	4	7	1
6	7	4	2
7	6	5	3

$\circ$	τ_1	τ_2	τ_1	τ_4	τ_1	τ_2	τ_1
$\tau_\emptyset$	τ_1	τ_3	τ_2	τ_6	τ_7	τ_5	τ_4
0	1	3	2	6	7	5	4
1	0	2	3	7	6	4	5
2	3	1	0	4	5	7	6
3	2	0	1	5	4	6	7
4	5	7	6	2	3	1	0
5	4	6	7	3	2	0	1
6	7	5	4	0	1	3	2
7	6	4	5	1	0	2	3

Tabelle 12.2.: Links: Permutationstabelle der identischen und erzeugenden Stone-Permutationen $(\tau_{\{j\}})_{j\in N}$. Rechts: Stone-Permutationen in der Folge des Gray-Codes $(0,1,3,2,6,7,5,4)$ in der zweiten Zeile notiert, darüber die Kompositionsfolge der erzeugenden Stone-Permutationen $(1,2,1,4,1,2,1)$.

Definition 12.2.3 (Gray-Code)**.** Seien die Grunddimension $n \in \mathbb{N}_0$ und die Bitmenge $\mathbb{B}_n$ erklärt.
Wir definieren den *Gray-Code* als Funktion

$$\begin{aligned} g : \mathbb{B}_n &\to \mathbb{B}_n, \\ i &\mapsto i \,\mathrm{XOR}(i >> 1). \end{aligned}$$

Der Gray-Code ist bijektiv und hat die Eigenschaft, dass sich immer nur ein Bit in der Binärdarstellung benachbarter Elemente in der Folge $(g(i))_{i\in\mathbb{B}_n}$ ändert.
Auf die Stoneabbildung bezogen gilt für alle $i \in \{0,\ldots,2^n-2\}$

$$g(i)\,\mathrm{XOR}\,g(i+1) \in \{2^0, 2^1, \ldots, 2^{(n-1)}\}.$$

Also können mit dem Gray-Code die Permutationen $(\tau_{g(j)})_{j\in\mathbb{B}_n}$ mit den Permutationen $(\tau_{2^{(k-1)}})_{k\in\{1,\ldots,n\}}$ als Erzeuger durchlaufen werden, es gilt für alle $j \in \mathbb{B}_n$

$$\tau_{g(j)} = \bigcirc_{i\in\{1,\ldots,j\}} \tau_{(g(i-1)\,\mathrm{XOR}\,g(i))}.$$

Beispiel 12.2.2 (Erzeugende Permutationen in der Grunddimension $n = 3$)**.** Tabelle 12.2 zeigt für die Grunddimension $n = 3$ die erzeugenden Stone-Permutationen $(\tau_{2^{(k-1)}})_{k\in\{1,\ldots,3\}}$ und alle Stone-Permutationen $(\tau_{g(j)})_{j\in\{0,\ldots,7\}}$ in der Folge des Gray-Codes $(g(j))_{j\in\{0,\ldots,7\}} = (0,1,3,2,6,7,5,4)$. Die Folge des Gray-Codes wird durch die Folge $(1,2,1,4,1,2,1)$ der erzeugenden Stone-Permutationen komponiert.

12.2.4. Algorithmus

Bezüglich der hier vorgestellten Vektorisierungsstrategie wird angenommen, dass die erzeugenden Permutationen $(\tau_{2^{(k-1)}})_{k\in\{1,\ldots,n\}}$ als Vektoroperationen im Befehlssatz der

Prozessorarchitektur vorhanden ist, oder durch Tauschen von ganzen Vektorregistern dargestellt werden kann, wie zum Beispiel im AVX[1]-Befehlssatz.

Algorithmus 6 : Algorithmus zur Berechnung des Geometrischen Produktes mit Vektorregisteroperationen. Es wird hier vorläufig angenommen, dass die Vektorregister mindestens so breit sind wie eine Koordinatenvektorlänge. Multivektoren sind unter der Stoneabbildung als Array gespeichert.

Daten : Multivektoren $A = (A_i)_{i\in\{0,\dots,2^n-1\}}$ und $B = (B_i)_{i\in\{0,\dots,2^n-1\}}$.
Ergebnis : Multivektor $(C_i)_{i\in\{0,\dots,2^n-1\}}$ mit $C = AB$.
Beginn
  $(a_i)_{i\in\{0,\dots,2^n-1\}} \leftarrow (A_i)_{i\in\{0,\dots,2^n-1\}}$
  $(b_i)_{i\in\{0,\dots,2^n-1\}} \leftarrow B_0$
  $(c_i)_{i\in\{0,\dots,2^n-1\}} \leftarrow (a_i\, b_i)_{i\in\{0,\dots,2^n-1\}}$
  für $j \leftarrow 1$ **bis** $2^n - 1$ **tue**
    $(a_i)_{i\in\{0,\dots,2^n-1\}} \leftarrow (a_{\tau_{(g(j-1)\,\mathrm{XOR}\,g(j))}(i)})_{i\in\{0,\dots,2^n-1\}}$
    $(b_i)_{i\in\{0,\dots,2^n-1\}} \leftarrow B_{g(j)}$
    $(b_i)_{i\in\{0,\dots,2^n-1\}} \leftarrow (\alpha(i\,\mathrm{XOR}\,g(j), g(j))\, b_i)_{i\in\{0,\dots,2^n-1\}}$
    $(b_i)_{i\in\{0,\dots,2^n-1\}} \leftarrow (a_i b_i)_{i\in\{0,\dots,2^n-1\}}$
    $(c_i)_{i\in\{0,\dots,2^n-1\}} \leftarrow (c_i + b_i)_{i\in\{0,\dots,2^n-1\}}$
  Ende
  $(C_i)_{i\in\{0,\dots,2^n-1\}} \leftarrow (c_i)_{i\in\{0,\dots,2^n-1\}}$
Ende

Seien die Grunddimension $n \in \mathbb{N}_0$, die Grundmenge $N = \{0, \dots, n\}$ und die Geometrische Algebra $\mathcal{G} = \mathbb{R}^{2^n}$ erklärt, sowie der Bitmengentyp $\mathbb{B}_n = \{0, \dots, 2^n - 1\}$.
Algorithums 6 zeigt einen Basisalgorithmus als Anwendung der hier vorgeschlagenen Vektorisierungsstrategie. Dabei wird eine Vektorregisterbreite von mindestens 2^n angenommen, die ein komplettes Array $\mathbb{R}^{2^n}$ speichern kann. Der Multivektor $A \in \mathcal{G}$ wird als Array $(A_i)_{i\in\mathbb{B}_n} \in \mathbb{R}^{2^n}$ unter der Stoneabbildung abgelegt, für alle $i \in \mathbb{B}_n$ gilt $A_i = A_{b^{-1}(i)}$. Das Geometrische Produkt wird darin für alle Multivektoren $(A_i)_{i\in\mathbb{B}_n}, (B_j)_{j\in\mathbb{B}_n} \in \mathbb{R}^{2^n}$ in der Form

$$AB = \sum_{j\in\mathbb{B}_n} \Big(A_{(\tau_{g(j)}(i))}\, \alpha(i\,\mathrm{XOR}\,g(j), g(j)) \Big)_{i\in\mathbb{B}_n} B_{g(j)}$$

durchgeführt. Vergleiche auch mit 12.1.
Im dem Algorithmus könnten in Abhängigkeit von der Rechnerarchitektur entsprechende Operationen zusammengefasst werden, zum Beispiel die aufeinander folgenden Operationen Multiplikation und Addition, durch eine Fused-Multiply-Add-Operation. Ist die Signatur der Geometrischen Algebra bekannt, kann die Vorzeichenfunktion $\alpha : \mathbb{B}_n \to \mathbb{B}_n$ zur Kompilierzeit ausgewertet und das Setzen der Vorzeichen in einem Register mit der

[1] Intel Intrinsics Guide (2014): „https://software.intel.com/sites/landingpage/IntrinsicsGuide/“

Broadcast-Operation kombiniert werden kann.

Algorithmus 7 : Algorithmus zur Berechnung des Geometrischen Produktes mit Vektorregisteroperationen durch blockweise Benutzung von Gray-Code-Permutationen.

Daten : Multivektoren $(A_i)_{i\in\{0,\ldots,2^n-1\}}$ und $(B_U)_{i\in\{0,\ldots,2^n-1\}}$.
Ergebnis : Multivektor $(C_i)_{i\in\{0,\ldots,2^n-1\}}$ mit $C = AB$.
Beginn
  für $r \leftarrow 0$ **bis** $2^{(n-v)} - 1$ **tue**
    $(c_i)_{i\in\{0,\ldots,2^v-1\}} = 0$
    für $s \leftarrow 0$ **bis** $2^{(n-v)} - 1$ **tue**
      $(a_i)_{i\in\{0,\ldots,w-1\}} \leftarrow (A_i)_{i\in\{sw,\ldots,s2^{v+1}-1\}}$
      $(b_i)_{i\in\{0,\ldots,w-1\}} \leftarrow B_{(rw)\,\mathrm{XOR}(sw+g(j))}$
      $(b_i)_{i\in\{0,\ldots,w-1\}} \leftarrow (a_i b_i)_{i\in\{0,\ldots,w-1\}}$
      $(c_i)_{i\in\{0,\ldots,w-1\}} \leftarrow (c_i + b_i)_{i\in\{0,\ldots,w-1\}}$
      für $j \leftarrow 1$ **bis** $w - 1$ **tue**
        $(a_i)_{i\in\{0,\ldots,w-1\}} \leftarrow (a_{\tau_{t(j)}(i)})_{i\in\{0,\ldots,w-1\}}$
        $(b_i)_{i\in\{0,\ldots,w-1\}} \leftarrow B_{(rw)\,\mathrm{XOR}(sw+g(j))}$
        $(b_i)_{i\in\{0,\ldots,w-1\}} \leftarrow$
        $(\alpha((rw+i)\,\mathrm{XOR}(sw+g(j)), (sw+g(j)))\, b_i)_{i\in\{0,\ldots,w-1\}}$
        $(b_i)_{i\in\{0,\ldots,w-1\}} \leftarrow (a_i b_i)_{i\in\{0,\ldots,w-1\}}$
        $(c_i)_{i\in\{0,\ldots,w-1\}} \leftarrow (c_i + b_i)_{i\in\{0,\ldots,w-1\}}$
      Ende
    Ende
    $(C_i)_{i\in\{rw,\ldots,r2^{v+1}-1\}} \leftarrow (c_i)_{i\in\{0,\ldots,w-1\}}$
  Ende
Ende

Sei $v \in \mathbb{N}$ der Exponent der Vektorregisterbreite $w = 2^v$. Wir können das Geometrische Produkt der Multivektoren $(A_i)_{i\in\mathbb{B}_n}, (B_j)_{j\in\mathbb{B}_n} \in \mathbb{R}^{2^n}$ für alle $r \in \{0, \ldots, 2^{n-v} - 1\}$ in der Form

$$
\begin{aligned}
&((AB)_i)_{i\in\{rw,\ldots,(r+1)w-1\}} \\
&= \sum_{s\in\{0,\ldots,2^{n-v}-1\}} \sum_{j\in\{0,\ldots,w-1\}} \Big(A_{(\tau_{g(j)}(sw+i))}\, \alpha((rw+i)\,\mathrm{XOR}(sw+g(j)), (sw+g(j)))\Big)_{i\in\{0,\ldots,w-1\}} \\
&\qquad\qquad B_{(rw)\,\mathrm{XOR}(sw+g(j))}
\end{aligned}
$$

durchführen, wie in Algorithmus 7 gezeigt. Für $v \geq n$ kann der Algorithmus zu dem Basisalgorithmus 6 reduziert werden.

12.2.5. Gerade Geometrische Algebra

Seien die Grunddimension $n \in \mathbb{N}$, die Grundmenge $\hat{N} = \{1, \ldots, n+1\}$ und die Geometrische Algebra $\mathcal{G} = \mathbb{R}^{2^{n+1}}$ erklärt.
Die Koordinaten des geraden Multivektors $(A_{\hat{U}})_{\hat{U} \in \mathcal{P}^+(\hat{N})} \in \mathcal{G}^+$ einer geraden Geometrischen Algebra $\mathcal{G}^+$ werden mit Elementen der geraden Unterpotenzmenge $\mathcal{P}^+(\hat{N})$ indiziert, welche abgeschlossen bezüglich der symmetrischen Differenz ist.
Sei $N = \{1, \ldots, n\}$ die Grundmenge mit der Grunddimension n.
Es gibt einen Isomorphismus

$$\begin{aligned} E : \mathcal{P}(N) \to \mathcal{P}^+(\hat{N}), U \mapsto \begin{cases} U & \text{für } |U| \text{ gerade} \\ U \cup \{n\} & \text{für } |U| \text{ ungerade} \end{cases}, \\ E^{-1} : \mathcal{P}^+(\hat{N}) \to \mathcal{P}(N), \hat{U} \mapsto \hat{U} \cap N, \end{aligned}$$

so dass wegen der Distributivität des Durchschnitts

$$E(U) \triangle E(V) = E(U \triangle V)$$

für alle $U, V \in \mathcal{P}(N)$ gilt, sowie

$$\pi_{E(U)}(E(V)) = E(U) \triangle E(V) = E(U \triangle V) = E(\pi_U(V)).$$

Damit lässt sich Gleichung 12.1 als

$$\begin{aligned} AB &= \sum_{\hat{V} \in \mathcal{P}^+(\hat{N})} \left(A_{\pi_{\hat{V}}(\hat{W})} \, \alpha(\hat{V} \triangle \hat{W}, \hat{V}) \right)_{\hat{W} \in \mathcal{P}^+(\hat{N})} B_{\hat{V}} \\ &= \sum_{V \in \mathcal{P}(N)} \left(A_{\pi_{E(V)}(E(W))} \, \alpha(E(V) \triangle E(W), E(V)) \right)_{W \in \mathcal{P}(N)} B_{E(V)} \\ &= \sum_{V \in \mathcal{P}(N)} \left(A_{E(\pi_V(W))} \, \alpha(E(V) \triangle E(W), E(V)) \right)_{W \in \mathcal{P}(N)} B_{E(V)} \end{aligned}$$

für alle geraden Multivektoren $A, B \in \mathcal{G}^+(\hat{N})$ formulieren. Also lassen sich gerade Multivektoren nach der gleichen Strategie wie allgemeine Multivektoren vektorisieren.

12.2.6. Nullvektor

In der konformen Geometrischen Algebra $\mathcal{G}_{4,1}$ mit dem Nullvektor $e_\infty \in \mathcal{G}^1_{4,1}$ mit $e_\infty e_\infty = 0$ existiert die Unteralgebra

$$\mathcal{H} = \mathcal{L}\{1, e_{\{1,2\}}, e_{\{1,3\}}, e_{\{2,3\}}, e_{\{1\}}e_\infty, e_{\{2\}}e_\infty, e_{\{3\}}e_\infty, e_{\{1,2,3\}}e_\infty\},$$

die den dualen Quaternionen entspricht. Das Geometrische Produkt kann mit der Grundmenge $N = \{1, 2, 3, \infty\}$ und der Erweiterung der Vorzeichenfunktion $\alpha(U, V) = 0 \, \forall \, U, V \in$

$\mathcal{P}(N) : (\infty \in U \cap V)$ als

$$\begin{aligned} AB &= \sum_{U,V \in \mathcal{P}(N)} A_U B_V \, \alpha(U,V) \, e_{U \triangle V} \\ &= \sum_{U,V \in \mathcal{P}(N):(\infty \notin U \cap V)} A_U B_V \, \alpha(U,V) \, e_{U \triangle V} \end{aligned}$$

für alle $A, B \in \mathcal{H}$ dargestellt und vektorisiert werden.

12.2.7. Laufzeitvergleich

Algorithmus 8 : Paarweise Multiplikation von $k \in \mathbb{N}$ Rotoren / Drehmatrizen.

Daten : Rotoren $(A_i)_{i \in \{1,\ldots,k\}} \in \mathcal{G}^+_{3,0}$ / Drehmatrizen $(\mathbf{A}_i)_{i \in \{1,\ldots,k\}} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.
Daten : Rotoren $(B_i)_{i \in \{1,\ldots,k\}} \in \mathcal{G}^+_{3,0}$. / Drehmatrizen $(\mathbf{B}_i)_{i \in \{1,\ldots,k\}} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.
Ergebnis : Rotoren $(C_i)_{i \in \{1,\ldots,k\}} \in \mathcal{G}^+_{3,0}$. / Drehmatrizen $(\mathbf{C}_i)_{i \in \{1,\ldots,k\}} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.
Beginn
  für $i \leftarrow 1$ **bis** k **tue**
    $C_i \leftarrow A_i B_i$ / $\mathbf{C}_i \leftarrow \mathbf{A}_i \mathbf{B}_i$
  Ende
Ende

Algorithmus 9 : Paarweise Multiplikation von $k \in \mathbb{N}$ Rotoren / Drehmatrizen.

Daten : Rotoren $(A_i)_{i \in \{1,\ldots,k\}} \in \mathcal{G}^+_{3,0}$ / Drehmatrizen $(\mathbf{A}_i)_{i \in \{1,\ldots,k\}} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.
Daten : Rotoren $(B_i)_{i \in \{1,\ldots,k\}} \in \mathcal{G}^+_{3,0}$. / Drehmatrizen $(\mathbf{B}_i)_{i \in \{1,\ldots,k\}} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.
Ergebnis : Rotoren $(C_i)_{i \in \{1,\ldots,k\}} \in \mathcal{G}^+_{3,0}$. / Drehmatrizen $(\mathbf{C}_i)_{i \in \{1,\ldots,k\}} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.
Beginn
  für $i \leftarrow 1$ **bis** k **tue**
    $C_i \leftarrow A_i B_i A_i$ / $\mathbf{C}_i \leftarrow \mathbf{A}_i \mathbf{B}_i \mathbf{A}_i$
  Ende
Ende

In diesem Abschnitt wird die Multiplikation von Drehmatrizen und von Rotoren verglichen, welche eine Ausführung von Drehungen nacheinander beschreibt, wie sie in der Anwendung vorkommen können. Multiplikationen der Drehmatrizen wurden mit der C++-Template-Bibliothek Eigen [13] und der GNU Scientific Library BLAS implementiert. Die Multiplikation der Rotoren wurde mit der C++-Template Bibliothek Gaalet [26] und mit einer prototypischen Bibliothek implementiert, die die hier vorgestellte Vektorisierungsstrategie automatisiert und im Folgenden Gavet genannt wird.
Wir sehen in Abbildung 12.1 eine ungefähr gleich kleine Laufzeit der Rotormultiplikationen, wobei Gaalet ein bisschen schneller scheint. Die Laufzeit der Drehmatrizenmultiplikationen ist für Eigen ungefährt doppelt so lang, und dreimal so lang für BLAS. Dies

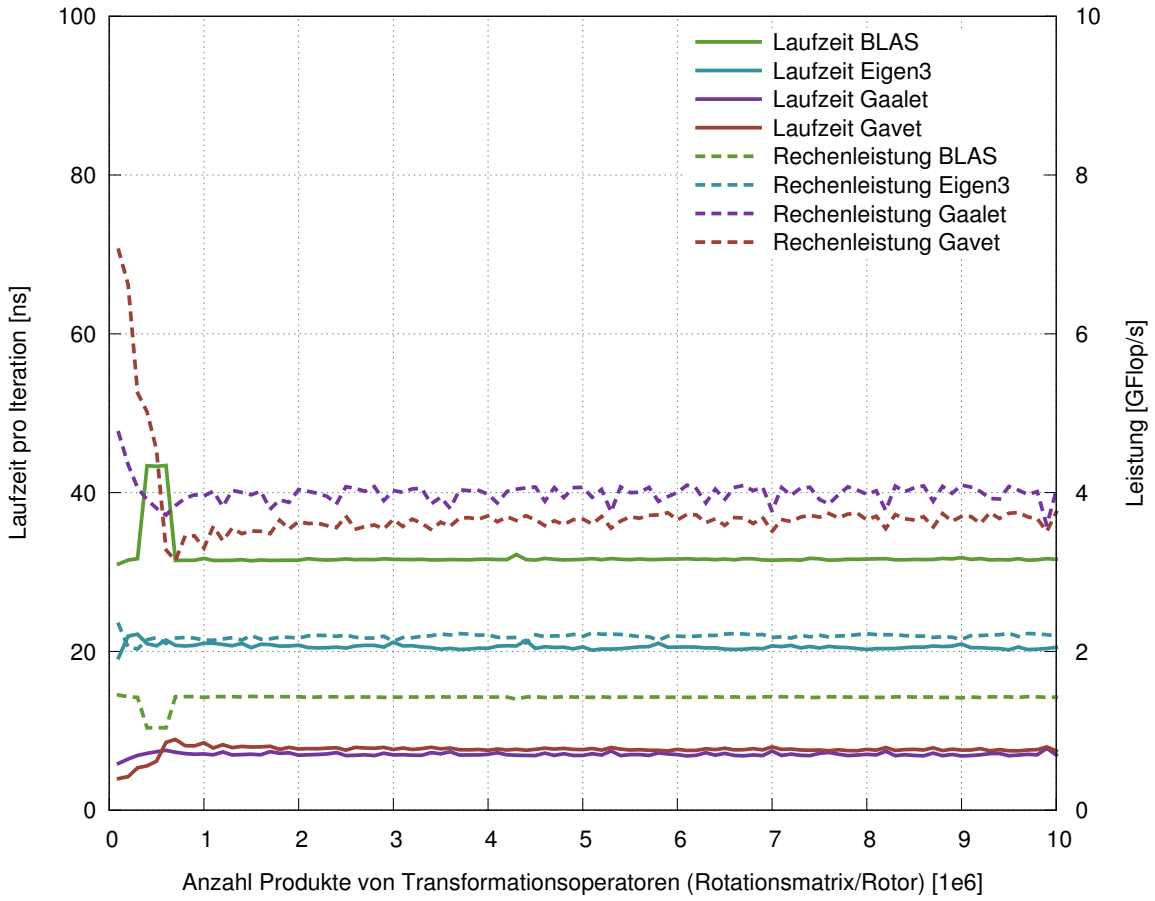


Abbildung 12.1.: Laufzeit und Rechenleistung des Algorithmus 8 über verschiedene Anzahl von Multiplikationen von Drehmatrizen mit der GNU Scientific Library BLAS und Eigen, sowie Rotoren mit Gaalet und Gavet. Gemessen wurde auf einem Kern einer Intel CPU „Sandy-Bridge“ E5-2687W mit einer Taktfrequenz von $3,1$ GHz. Genauigkeit des Fließkommadatentyps ist double.

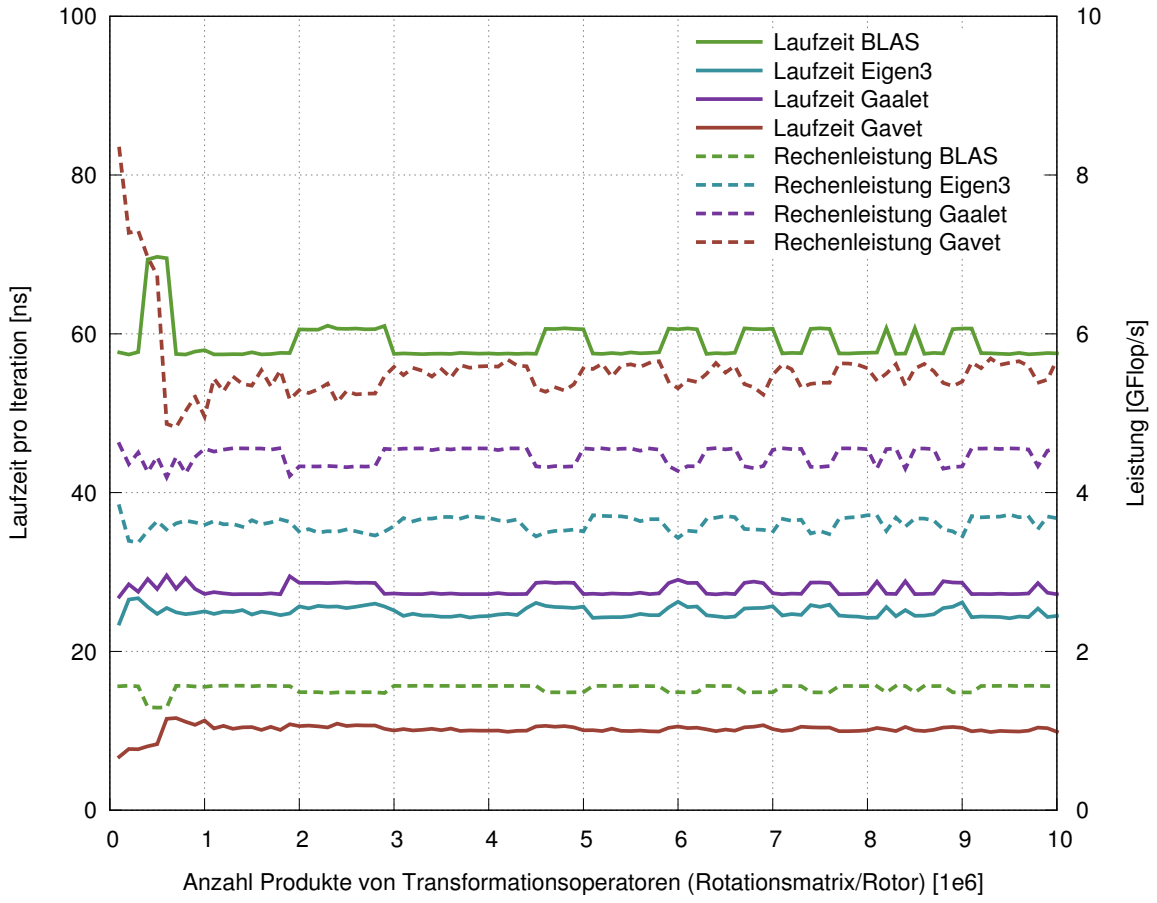


Abbildung 12.2.: Laufzeit und Rechenleistung des Algorithmus 9 über verschiedene Anzahl von Multiplikationen von Drehmatrizen mit der GNU Scientific Library BLAS und Eigen, sowie Rotoren mit Gaalet und Gavet. Gemessen wurde auf einem Kern einer Intel CPU „Sandy-Bridge“ E5-2687W mit einer Taktfrequenz von $3,1$ GHz. Genauigkeit des Fließkommadatentyps ist double.

können wir auf die unterschiedliche Anzahl an Fließkommaoperationen pro Multiplikation zurückführen:

- 45 FLOP pro Matrizenmultiplikation.
- 28 FLOP pro Rotormultiplikation.

Die Rechenleistung ist bei den Rotormultiplikationen ebenfalls besser als bei den Matrizenmultiplikationen. Den Grund hierfür könnte man in der größeren Datenmenge pro Multiplikation bei Drehmatrizen vermuten:

- 9 doubles Schreiben und 18 doubles Lesen pro Matrizenmultiplikation.
- 4 doubles Schreiben und 8 doubles Lesen pro Rotormultiplikation.

In Abbildung 12.2 zeigt sich eine ähnliche Tedenz. Nur die Gaalet Implementierung ist deutlich langsamer im Vergleich zu Gavet. Dies dürfte an der redundanten Berechnung einzelner Koordinaten des endlichen Produktes aus zwei Multiplikationen durch Gaalet liegen. Jedoch ist auch die Rechenleistung von Gaalet niedriger als von Gavet. Hier vermuten wir, dass der Compiler die Struktur der Geometrischen Algebra nicht erkennt, die wir in unserer Vektorisierungsstrategie verwenden.

Teil III.

Anwendung in der Robotik

13. Eigentliche Bewegung

13.1. Einleitung

Im Folgenden wird die Beschreibung der eigentlichen Bewegung, die Schraubenmechanik und die Transformation von Schrauben jeweils in der Matrizenalgebra und der konformen Geometrischen Algebra beschrieben. Die Darstellung in der konformen Geometrischen Algebra entspricht dabei den dualen Quaternionen, die in der Robotik neben der Matrizenalgebra verwendet werden.

13.2. Matrizenalgebra

13.2.1. Transformationen

Definition 13.2.1 (Homogene Koordinaten)**.** Wir definieren den Darstellungswechsel eines Punktes im dreidimensionalen Raumes zwischen den Räumen $\mathbb{R}^3$ mit Positionsvektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ und dem in $\mathbb{R}^4$ eingebetteten projektiven Raumes als

$$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4, \mathbf{x} \mapsto (\mathbf{x}, 1).$$

Das Bild des Darstellungswechsel ist also

$$\{(\mathbf{x}, 1) \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3\}.$$

Der singuläre Nullpunkt $0 \in \mathbb{R}^3$ ist in der homogenen Darstellung $(0, 0, 0, 1) \in \mathbb{R}^4$ kein ausgezeichneter Punkt mehr.

Definition 13.2.2 (Rotationsmatrix)**.** Wir definieren die Rotationsmatrix bezüglich dem Einheitsvektor $(n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{R}^3$ und dem Winkel $\alpha \in \mathbb{R}$ als

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} {n_1}^2 (1 - \cos\alpha) + \cos\alpha & n_1 n_2 (1 - \cos\alpha) - n_3 \sin\alpha & n_1 n_3 (1 - \cos\alpha) + n_2 \sin\alpha \\ n_2 n_1 (1 - \cos\alpha) + n_3 \sin\alpha & {n_2}^2 (1 - \cos\alpha) + \cos\alpha & n_2 n_3 (1 - \cos\alpha) - n_1 \sin\alpha \\ n_3 n_1 (1 - \cos\alpha) - n_2 \sin\alpha & n_3 n_2 (1 - \cos\alpha) + n_1 \sin\alpha & {n_3}^2 (1 - \cos\alpha) + \cos\alpha \end{bmatrix}.$$

Die Rotationsmatrix $\mathbf{R}$ dreht einen Vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ um die Achse durch den Ursprung des $\mathbb{R}^3$ mit dem Einheitsrichtungsvektor $\mathbf{n}$ und dem Winkel α auf den Vektor $\mathbf{Rx}$.

Beispiel 13.2.1 (Rotation um die $(0, 0, 1)$-Achse)**.** Sei der Winkel $\alpha \in \mathbb{R}$ erklärt.
Die Rotationsmatrix

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dreht eine Vektor in $\mathbb{R}^3$ um die Achse in Richtung $(0, 0, 1)$ mit dem Winkel α.

Definition 13.2.3 (Transformationsmatrix)**.** Seien die Rotationsmatrix $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und der Translationsvektor $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^3$ erklärt.
Wir definieren eine entsprechende Transformationsmatrix als

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

Die Transformationsmatrix $\mathbf{M}$ dreht den Punkt mit den homogenen Koordinaten $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$ mit der Rotationsmatrix $\mathbf{R}$ und verschiebt ihn um den Translationsvektor $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^3$ auf die homogene Koordinaten $\mathbf{Mx}$.
Die Inverse der Transformationsmatrix ist

$$\mathbf{M}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}^T & -\mathbf{R}^T\mathbf{t} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix},$$

wobei $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$ gilt.

Alle Transformationsmatrizen entsprechen zusammen mit dem Matrixprodukt der Gruppe der eigentlichen Bewegungen SE(3).

13.2.2. Schraubenmechanik

Definition 13.2.4 (Schraube)**.** Wir definieren eine *Schraube* als das Paar

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3.$$

Mit dem Ortsvektor $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$ eines Punktes auf der Schraubenachse, dem Richtungsvektor der Schraubenachse $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^3$ mit dem Winkel $|\mathbf{q}|$ und der Ganghöhe $h \in \mathbb{R}$ können wir eine *Schraube erster Art* als

$$(\mathbf{q}, \mathbf{p}\times\mathbf{q} + h\mathbf{q})$$

parametrisieren. Für $\mathbf{q} \neq 0$ beschreibt eine so definierte Schraube die Drehung eines Körpers um die Schraubenachse mit dem Richtungsvektor $\mathbf{q}$, auf der der Punkt $\mathbf{p}$ liegt, sowie eine Translation entlang dem Richtungsvektor $\mathbf{q}$ um die Ganghöge h.
Für eine reine Translation um den Translationsvektor $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^3$ parametrisieren wir die Schraube als

$$(\mathbf{0}, \mathbf{t}).$$

Laut Chasles [3] kann jede eigentliche Bewegung durch eine Drehung um eine Achse und einer Translation entlang dieser Achse dargestellt werden.

Definition 13.2.5 (Schraubenmatrix)**.** Sei die Schraube $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (s_1, s_2, s_3, v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ erklärt.
Wir definieren die dazugehörige Schraubenmatrix als

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 & -s_3 & s_2 & v_1 \\ s_3 & 0 & -s_1 & v_2 \\ -s_2 & s_1 & 0 & v_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Mit dem Matrixexponential kann die Schraubenmatrix $\mathbf{S}$ auf die homogene Matrix

$$\mathbf{M} = e^{\mathbf{S}}$$

abgebildet werden. Beide Matrizen beschreiben die selbe eigentliche Bewegung, wobei die Schraubenmatrix $\mathbf{S}$ zur Lie Algebra se(3) und die homogene Matrix SE(3) zur Lie Gruppe der eigentlichen Bewegungen gehört.

Lemma 13.2.1 (Schraubentransformation 1. Art)**.** *Seien die Schraubenmatrix* $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ *und die Transformationsmatrix* $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ *erklärt.*
Einen Koordinatenwechsel der Schraubenmatrix 1. Art in das von der Transformationsmatrix $\mathbf{M}$ *erklärte System beschreibt die Vorschrift*

$$\mathbf{MSM}^{-1}.$$

Beweis. Entspreche mit dem Richtungsvektor $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3) \in \mathbb{R}^3$, dem Ortsvektor $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$ und der Ganghöhe $h \in \mathbb{R}$ die Schraube

$$(\mathbf{q}, \mathbf{p}\times\mathbf{q} + h\mathbf{q})$$

der Schraubenmatrix $\mathbf{S}$.
Wegen

$$\mathbf{R}\begin{bmatrix} 0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & 0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{R}^T = \begin{bmatrix} 0 & -q_3' & q_2' \\ q_3' & 0 & -q_1' \\ -q_2' & q_1' & 0 \end{bmatrix}$$

mit

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}$$

und

$$\mathbf{q}' = (q_1', q_2', q_3') = \mathbf{Rq},$$

entspricht mit

$$\begin{bmatrix} \mathbf{p}' \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{M}\begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ 1 \end{bmatrix}$$

die Schraubenmatrix $\mathbf{MSM}^{-1}$ der Schraube

$$(\mathbf{q}', \mathbf{p}'\times\mathbf{q}' + h\mathbf{q}')\,. \qquad \square$$

13.3. Versoralgebra

13.3.1. Transformationen

Lemma 13.3.1 (Rotorparametrisierung)**.** *Seien die Geometrische Algebra $\mathcal{G}^1_{4,1}$ und die Horosphäre $\mathfrak{K}_3 \subset \mathcal{G}^1_{4,1}$ erklärt.*
Wir können eine Drehung um die Achse mit dem Einheitsrichtungsvektor $n \in \mathcal{G}^1_{3,0}$ und dem Winkel $\alpha \in \mathbb{R}$ als Rotor

$$R = \cos\alpha + ne_{\{1,2,3\}} \sin\alpha$$

parametrisieren.

Beweis. Die Parametrisierung des Rotors ist die selbe wie für Quaternionen.
Für alle $x \in \mathcal{G}^1_{3,0}$ gilt

$$\begin{aligned} R(x + \frac{1}{2}x^2 e_\infty + e_0)R^\dagger &= RxR + \frac{1}{2}x^2 e_\infty + e_0 \\ &= RxR^\dagger + \frac{1}{2}(RxR^\dagger)^2 e_\infty + e_0. \end{aligned}$$

□

Lemma 13.3.2 (Translatorparametrisierung)**.** *Seien die Geometrische Algebra $\mathcal{G}^1_{4,1}$ und die Horosphäre $\mathfrak{K}_3 \subset \mathcal{G}^1_{4,1}$ erklärt.*
Mit dem Translationsvektor $t \in \mathcal{G}^1_{3,0}$ kann ein Translator

$$T = 1 - \frac{1}{2}te_\infty$$

parametrisiert werden.

Beweis. Für alle $x \in \mathcal{G}^1_{3,0}$ gilt

$$\begin{aligned} &T(x + \frac{1}{2}x^2 e_\infty + e_0)T^\dagger \\ &= (1 - \frac{1}{2}te_\infty)(x + \frac{1}{2}x^2 e_\infty + e_0)(1 + \frac{1}{2}te_\infty) \\ &= x + \frac{1}{2}x^2 e_\infty + e_0 + \frac{1}{2}txe_\infty + \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}xte_\infty + \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}t^2 e_\infty \\ &= x + t + \frac{1}{2}(x^2 + 2\,x \cdot t + t^2)e_\infty + e_0 \\ &= x + t + \frac{1}{2}(x + t)^2 e_\infty + e_0. \end{aligned}$$

□

Ein Rotor $R \in \mathcal{G}_{4,1}^{+}$ und ein Translator $T \in \mathcal{G}_{4,1}^{+}$ können zu einem Motor

$$M = TR \in \mathcal{G}_{4,1}^{+}$$

zusammengefasst werden. Wegen $TT^{\dagger} = RR^{\dagger} = MM^{\dagger} = 1$ gilt

$$M^{-1} = M^{\dagger}.$$

Alle Motoren in $\mathcal{G}_{4,1}^{+}$ entsprechen mit dem Geometrischen Produkt der Gruppe der eigentlichen Bewegungen SE(3).

13.3.2. Schraubenmechanik

Definition 13.3.1 (Schraube 1. Art)**.** Seien die Geometrische Algebra $\mathcal{G}_{4,1}$ erklärt, sowie die Vektoren $s, v \in \mathcal{G}_{3,0}^{1}$.
Wir definieren eine *Schraube 1. Art* als

$$S = -se_{\{1\}}e_{\{2\}}e_{\{3\}} - ve_{\infty}.$$

Ähnlich wie bei der Matrizenalgebra können wir mit dem Ortsvektor $p \in \mathbb{G}_{3,0}^{1}$ eines Punktes auf der Schraubenachse, dem Richtungsvektor der Schraubenachse $q \in \mathbb{G}_{3,0}^{1}$ mit dem Winkel $|q|$ und der Ganghöhe $h \in \mathbb{R}$ können wir eine *Schraube erster Art* als

$$-qe_{\{1\}}e_{\{2\}}e_{\{3\}} + \big((p \wedge q)e_{\{1\}}e_{\{2\}}e_{\{3\}} - hq\big)\, e_{\infty}$$

parametrisieren.

Lemma 13.3.3 (Schraubentransformation 1. Art)**.** *Seien die Geometrische Algebra $\mathcal{G}_{4,1}$, die Schraube 1. Art $S \in \mathcal{G}_{4,1}^{2}$ und der Motor $M \in \mathcal{G}_{4,1}^{+}$ erklärt. Ein Koordinatenwechsel der Schraube S in das von Motor M erklärte System beschreibt die Vorschrift*

$$MSM^{\dagger}.$$

Beweis. Siehe Hestenes [16], [17]. □

14. Schraubenmechanik in der Robotik

14.1. Einleitung

Eine serielle Kinematik sei eine Kette von Gelenken und Gliedern. Wir beschränken uns in der folgenden Arbeit auf rotatorische und translatorische Gelenke.
Im folgenden Abschnitt wird die Parametrisierung von Transformationsmatrizen oder Motoren nach *Denavit und Hartenberg* besprochen, die eine serielle Kinematik darstellen, also die Transformation vom Ursprung der Kinematik bis zu dem Endpunkt, dem sogenannten Endeffektor.
Danach wird die Erstellung einer Jacobi-Matrix der seriellen Kinematik anhand der Schraubenmechanik beschrieben.

14.2. Denavit-Hartenberg-Parametrisierung

Bezüglich einem Gelenk $i \in \{1, \ldots, k\}$ einer seriellen Kinematik aus $k \in \mathbb{N}$ Gelenken führen Denavit und Hartenberg [5] die *Denavit-Hartenberg-Parameter*

1. dem Gelenkwinkel $\theta_i \in \mathbb{R}$ als Drehung um die z-Achse,

2. dem Gelenkabstand $d_i \in \mathbb{R}$ als Verschiebung entlang der z-Achse,

3. der Armelementlänge $l_i \in \mathbb{R}$ als Verschiebung entlang der x-Achse und

4. der Verwindung $\alpha_i \in \mathbb{R}$ als Drehung um die x-Achse,

ein.

Matrizenalgebra Die *Denavit-Hartenberg-Parameter* definieren die Transformationsmatrizen

$$\mathbf{R}_z^i = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i & 0 & 0 \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{T}_z^i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{T}_x^i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{R}_x^i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha_i & -\sin\alpha_i & 0 \\ 0 & \sin\alpha_i & \cos\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Diese Transformationen beschreiben ein Gelenk eines Roboters mit serieller Kinematik vollständig und können zur der Transformationsmatrix

$$\mathbf{M}^i = \mathbf{R}_z^i\,\mathbf{T}_z^i\,\mathbf{T}_x^i\,\mathbf{R}_x^i$$

multipliziert werden.
Die serielle Kinematik unserer Roboter besitzen Gelenke mit jeweils nur einem Freiheitsgrad, entweder rotatorisch oder translatorisch. Dazu wird entweder der Gelenkwinkel α_i oder der Gelenkabstand d_i als variabel bezüglich möglicher Bewegungen des Roboters gewählt, alle anderen Denavit-Hartenberg-Parameter des Gelenkes $i \in \{1, \ldots, k\}$ sind fest. Ein Roboter mit serieller Kinematik mit k Gelenken besitzt k Freiheitsgrade.

Geometrische Algebra Entsprechend der Matrixalgebra können wir nach Bayro-Corrochano [1] zwei Rotoren und zwei Translatoren in der konformen Geometrischen Algebra $\mathcal{G}_{4,1}$ mit den Denavit-Hartenberg-Parametern des Gelenkes $i \in \{1, \ldots, k\}$ wie folgt definieren:

$$\begin{aligned} R_z^i &= \cos(-\frac{1}{2}\theta) + \sin(-\frac{1}{2}\theta)e_{\{1\}}e_{\{2\}}, \\ T_z^i &= 1 - \frac{1}{2}de_{\{3\}}e_{\{\infty\}}, \\ T_x^i &= 1 - \frac{1}{2}le_{\{1\}}e_{\{\infty\}}, \\ R_x^i &= \cos(-\frac{1}{2}\alpha) + \sin(-\frac{1}{2}\alpha)e_{\{2\}}e_{\{3\}}. \end{aligned}$$

Diese Rotoren und Translationen ergeben den Denavit-Hartenberg-parametrisierten Motor

$$M_i = R_z^i \, T_z^i \, T_x^i \, R_x^i$$

des Gelenkes.

14.3. Schrauben-Jacobi-Matrix einer seriellen Kinematik

Mit den Geschwindigkeiten der variablen Denavit-Hartenberg-Parameter des Gelenkes $i \in \{1, \ldots, k\}$, also entweder der Gelenkwinkelgeschwindigkeit $\dot{\theta}_i$ oder der Gelenkabstandsgeschwindigkeit $\dot{d}_i$, können wir die Geschwindigkeitsschraube $\mathbf{s}_i \in \mathbb{R}^6$ des Gelenkes i definieren.
Sind die Geschwindigkeitsschrauben $\mathbf{s}_i \; \forall \, i \in \{1, \ldots, k\}$ aller k Gelenke im selben Koordinatensystem erklärt, ergibt deren Summe

$$\mathbf{s}_e = \sum_{i \in \{1,\ldots,k\}} \mathbf{s}_i$$

die Geschwindigkeitsschraube des Endeffektors $\mathbf{s}_e \in \mathbb{R}^6$. Wie wir im Folgenden sehen, kann die Geschwindigkeitsschraube des Gelenkes i mit dem Denavit-Hartenberg-Parameter $w_i \in \mathbb{R}$ eines entweder rotatorischen oder translatorischen Gelenkes in der Form

$$\mathbf{s}_i = \hat{\mathbf{s}}_i \, w_i$$

dargestellt werden. Mit der $(6 \times k)$-Matrix

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{s}}_1 & \hat{\mathbf{s}}_2 & \ldots & \hat{\mathbf{s}}_k \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{6 \times k}$$

und dem Parametervektor

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & \ldots & w_k \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^k$$

lässt sich die Summe der Geschwindigkeitsschrauben als Matrix-Vektor-Produkt

$$\mathbf{s}_e = \sum_{i \in \{1,\ldots,k\}} \mathbf{s}_i = \mathbf{H}\mathbf{w}$$

beschreiben.

Matrizenalgebra Die lokale Geschwindigkeitsschraubenmatrix eines Drehgelenkes mit Gelenkwinkelgeschwindigkeit $\dot{\theta} \in \mathbb{R}$ ist

$$\mathbf{S}_{ref}^{rot} \, \dot{\theta} = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\theta} & 0 & 0 \\ \dot{\theta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

eines translatorischen Gelenkes mit Gelenkabstandgeschwindigkeit $\dot{d} \in \mathbb{R}$ ist

$$\mathbf{S}_{ref}^{trans}\,\dot{d} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dot{d} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sei $\mathbf{S}_i \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ die lokale Schraubenmatrix des Gelenkes $i \in \{1, \ldots, k\}$. Bestehe die Matrixfamilie $(\mathbf{M}_j)_{j\in\{1,\ldots,k\}} \in (\mathbb{R}^{4\times 4})^k$ aus den entsprechenden Denavit-Hartenberg-parametrisierten Transformationsmatrizen der k Gelenke.
Die lokale Schraubenmatrix $\mathbf{S}_i$ lautet im Referenzsystem

$$\mathbf{M}_1 \ldots \mathbf{M}_k \mathbf{S}_i (\mathbf{M}_1 \ldots \mathbf{M}_k)^{-1}.$$

Geometrische Algebra Die lokale Geschwindigkeitsschraubenmatrix eines Drehgelenkes mit Gelenkwinkelgeschwindigkeit $\dot{\theta} \in \mathbb{R}$ ist

$$S_{ref}^{rot} = -\dot{\theta}\, e_{\{1\}} e_{\{2\}},$$

eines translatorischen Gelenkes mit Gelenkabstandgeschwindigkeit $\dot{d} \in \mathbb{R}$ ist

$$S_{ref}^{trans} = -\dot{d}\, e_{\{3\}} e_{\infty}.$$

Sei der Bivektor $S_i \in \mathcal{G}_{4,1}^2$ die Geschwindigkeitsschraube des Gelenkes $i \in \{1, \ldots, k\}$. Bestehe die Versorfamilie $(M_j)_{j\in\{1,\ldots,k\}} \in (\mathcal{G}_{4,1}^+)^k$ aus den entsprechenden Denavit-Hartenberg-parametrisierten Motoren der k Gelenke.
Die lokale Geschwindigkeitsschraube S_i lautet im Referenzsystem

$$M_1 \ldots M_k S_i (M_1 \ldots M_k)^{\dagger}.$$

15. Laufzeitvergleich

15.1. Inverse Kinematik Algorithmen

Algorithmus 10 : Inverse Kinematik Algorithmus einer Denavit-Hartenberg-parametrisierten seriellen Kinematik basierend auf der transponierten Jacobi-Matrix. Transformationen werden durch Matrizenalgebra beschrieben.

Eingabe : Zieltransformationsmatrix $\mathbf{M}_t \in \mathbb{R}^{4\times 4}$.
Eingabe : Initialer Denavit-Hartenberg-Parametervektor $\mathbf{w} = (w_i)_{i\in\{1,\ldots,k\}} \in \mathbb{R}^k$.
Daten : Schrauben-Jacobi-Matrix $\mathbf{J} \in \mathbb{R}^{6\times k}$ mit Spalten $\left(\mathbf{J}_{(:,i)}\right)_{i\in\{1,\ldots,k\}}$.
Daten : Konstante Denavit-Hartenberg-Parameter für Definition von $\mathbf{M}_i(w_i)$.
Daten : Inkrementelle Transformationsmatrix $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$.
Daten : Referenzschraubenmatrix $\mathbf{S}_{ref} \in \mathbb{R}^{6\times k}$ mit $\mathbf{S}_{ref} = \mathbf{S}_{ref}^{rot}$ oder $\mathbf{S}_{ref} = \mathbf{S}_{ref}^{trans}$.
Daten : Endeffektor-Ziel-Relativschraube $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^6$.
Daten : Abbruchresiduumsnorm $\epsilon \in \mathbb{R}$, Residuumsnorm $e \in \mathbb{R}$.
Daten : Schrittweite $h \in \mathbb{R}$.
Ergebnis : Lösung des Denavit-Hartenberg-Parametervektors $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^k$.
Beginn
  solange $e > \epsilon$ **tue**
    $\mathbf{K} \leftarrow \mathbf{I}$
    für $i \leftarrow 1$ **bis** k **tue**
      $\mathbf{J}_{(:,i)} \leftarrow \mathbf{K}\mathbf{S}_{ref}\mathbf{K}^{-1}$
      $\mathbf{M}_i \leftarrow \mathbf{M}_i(w_i)$
      $\mathbf{K} \leftarrow \mathbf{K}\mathbf{M}_i$
    Ende
    $\mathbf{s} \leftarrow -\log\left(\mathbf{K}{\mathbf{M}_t}^{-1}\right)$
    $e \leftarrow \sqrt{\langle \mathbf{s}, \mathbf{s}\rangle}$
    $h \leftarrow \frac{\langle \mathbf{s}, \mathbf{J}\mathbf{J}^T\mathbf{s}\rangle}{\langle \mathbf{J}\mathbf{J}^T\mathbf{s}, \mathbf{J}\mathbf{J}^T\mathbf{s}\rangle}$
    $\mathbf{w} \leftarrow \mathbf{w} + h\mathbf{J}^T\mathbf{s}$
  Ende
Ende

Algorithmen 10 und 11 zeigen eine numerische Methode, die variablen Denavit-Hartenberg-Parameter einer seriellen Kinematik so zu bestimmen, dass der Endeffektor auf einer vorgegebenen Zielposition und -orientierung liegt.

Algorithmus 11 : Inverse Kinematik Algorithmus einer Denavit-Hartenberg-parametrisierten seriellen Kinematik basierend auf der transponierten Jacobi-Matrix. Transformationen werden durch das konforme Modell der Geometrischen Algebra beschrieben.

Eingabe : Zieltransformationsmotor $M_t \in \mathcal{G}^+_{4,1}$.
Eingabe : Initialer Denavit-Hartenberg-Parametervektor $\mathbf{w} = (w_i)_{i\in\{1,\ldots,k\}} \in \mathbb{R}^k$.
Daten : Schrauben-Jacobi-Matrix $\mathbf{J} \in \mathbb{R}^{6\times k}$ mit Spalten $\left(\mathbf{J}_{(:,i)}\right)_{i\in\{1,\ldots,k\}}$.
Daten : Konstante Denavit-Hartenberg-Parameter für Definition von $M_i(w_i)$.
Daten : Inkrementeller Motor $K \in \mathcal{G}^+_{4,1}$.
Daten : Referenzschraube $S_{ref} \in \mathcal{G}^2_{4,1}$ mit $S_{ref} = S^{rot}_{ref}$ oder $S_{ref} = S^{trans}_{ref}$.
Daten : Endeffektor-Ziel-Relativschraube $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^6$.
Daten : Abbruchresiduumsnorm $\epsilon \in \mathbb{R}$, Residuumsnorm $e \in \mathbb{R}$.
Daten : Schrittweite $h \in \mathbb{R}$.
Ergebnis : Lösung des Denavit-Hartenberg-Parametervektors $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^k$.
Beginn
  solange $e > \epsilon$ **tue**
    $K \leftarrow 1$
    für $i \leftarrow 1$ **bis** k **tue**
      $\mathbf{J}_{(:,i)} \leftarrow K S_{ref} K^{\dagger}$
      $M_i \leftarrow M_i(w_i)$
      $K \leftarrow K M_i$
    Ende
    $\mathbf{s} \leftarrow -\log\left(K {M_t}^{\dagger}\right)$
    $e \leftarrow \sqrt{\langle \mathbf{s}, \mathbf{s} \rangle}$
    $h \leftarrow \frac{\langle \mathbf{s}, \mathbf{J}\mathbf{J}^T\mathbf{s} \rangle}{\langle \mathbf{J}\mathbf{J}^T\mathbf{s}, \mathbf{J}\mathbf{J}^T\mathbf{s} \rangle}$
    $\mathbf{w} \leftarrow \mathbf{w} + h\mathbf{J}^T\mathbf{s}$
  Ende
Ende

Die Schrauben-Jacobi-Matrix $\mathbf{J} = \mathbf{J}(\mathbf{w}) \in \mathbb{R}^{6\times k}$ ist abhängig von dem Parametervektor $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^k$ und verknüpft die Endeffektorgeschwindigkeitsschraube

$$\dot{\mathbf{s}} = \mathbf{J}\dot{\mathbf{w}}$$

mit dem Parametergeschwindigkeitsvektor $\dot{\mathbf{w}} \in \mathbb{R}^k$.
Für kleine $\mathbf{\Delta w} \in \mathbb{R}^k$ gilt

$$\mathbf{\Delta s} \approx \mathbf{J}\mathbf{\Delta w}$$

Mit der Annahme $\mathbf{J}^{-1} \approx \mathbf{J}^T$ und der Schrittweite $h \in \mathbb{R}$ formulieren wir die Iterationsvorschrift

$$\mathbf{w}_{l+1} = \mathbf{w}_l + h\mathbf{J}^T\mathbf{\Delta s}$$

im Schritt $l \in \mathbb{N}$ mit der Endeffektor-Ziel-Relativschraube

$$\mathbf{\Delta s} = \log\left(\mathbf{M}_t\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{w})\right) = -\log\left(\mathbf{M}(\mathbf{w})\mathbf{M}_t{}^{-1}\right).$$

Nach Buss [2] ist eine geeignete Wahl der Schrittweite

$$h = \frac{\langle \mathbf{s}, \mathbf{J}\mathbf{J}^T\mathbf{s}\rangle}{\langle \mathbf{J}\mathbf{J}^T\mathbf{s}, \mathbf{J}\mathbf{J}^T\mathbf{s}\rangle}.$$

Alternativ zu den Algorithmen 10 und 11 zeigt Seybold [25] eine Methode, die ohne Matrizenalgebra durch die nichtlineare Methode der konjugierten Gradienten eine inverse Kinematik löst, die durch Motoren in der Geometrischen Algebra beschrieben wird.

15.2. Implementierung

Es werden folgende drei Implementierungen verglichen:

1. „Standard Matrix“: Implementierung des Algorithmus 10 mit der C++-Template-Bibliothek Eigen [13].

2. „Standard GA“: Implementierungen des Algorithmus 11 mit der C++-Template-Bibliothek Gaalet [26], [10].

3. „Optimiert GA“: Implementierungen des Algorithmus 11 unter Anwendung der Vektorisierungsstrategie in Abschnitt 12.2 auf den AVX-Befehlssatz. Der AVX-Befehlssatz ist in modernen SIMD-Prozessoren implementiert.

Die Logarithmusfunktion für die Matrizenalgebra (Eigen-Implementierung) wurde nach [27] implementiert, für die Geometrische Algebra nach Dorst [8].
Im Anhang C wird die Implementierung der Vektorisierungsstrategie der geraden Multivektoren der konformen Geometrischen Algebra, beziehungsweise der dualen Quaternionen mit AVX-Intrinsiken in C++ gelistet.

Verbindung i	θ		d		α	l
1	θ_1	var.	$0,5$	konst.	$-90°$	0
2	θ_2	var.	$0,5$	konst.	$90°$	0
3	0	konst.	d_3	var.	0	0
4	θ_4	var.	0	konst.	$-90°$	0
5	θ_5	var.	0	konst.	$90°$	0
6	θ_6	var.	$0,1$	konst.	0	0

Tabelle 15.1.: Denavit-Hartenberg Parameter eines Stanford-Roboterarmes.

15.3. Testumgebung

Es wird die serielle Kinematik eines Stanford-Robotertyps mit den Denavit-Hartenberg-Parametern in Tabelle 15.1 betrachtet.
Am Anfang des Tests befinden sich die Gelenke im Zustand der Parameter

$$(\theta_1, \theta_2, d_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6) = (0, 0, (0,5), 0, 0, 0).$$

Damit steht der Endeffektor am Anfang an der Position $(0, (0,2), (1,1))$ ohne Drehung. Ziel der inversen Kinematik in dem Test ist die Bestimmung der Gelenkzustände, um die Position $(1,1,1)$ und die Orientierung, die durch die Drehung um die $(0,1,0)$-Achse und dem Winkel π ensteht, mit dem Endeffektor zu erreichen.

15.4. Ergebnisse

15.4.1. Numerische Eigenschaft

In Abbildung 15.1 ist die Residuumsnorm $\sqrt{\langle \mathbf{\Delta s}, \mathbf{\Delta s} \rangle}$ der Endeffektor-Ziel-Relativschraube $\mathbf{\Delta s}$ über die Anzahl der Iterationen aufgezeichnet. Dass nur eine Kurve in dem Schaubild erkennbar ist, zeigt die Ähnlichkeit der numerischen Eigenschaften der verschiedenen Methoden und Implementierungen, die hier verglichen werden.

15.4.2. Laufzeitvergleich

Abbildung 15.2 zeigt die Laufzeit und Rechenleistungen der Implementierungen der Algorithmen 10 und 11.
Die Implementierungen „Standard Matrix“ und „Standard GA“ weisen ähnliche Laufzeiten auf. Auffällig ist die höhere Rechenleistung der Implementierung „Standard GA“, was eine höhere Anzahl an durchgeführten Operationen in der gleichen Zeit bedeutet.
Deutlich schneller und mit höherer Rechenleistung (ca. ein viertel der maximalen Rechenleistung der CPU) ist die Implementierung „Optimiert GA“. Durch Permutation von Vektoren wird hier die kleinere Darstellung von eigentlicher Bewegung bezüglich der Anzahl von Koordinaten bei Motoren in der Geometrischen Algebra im Vergleich

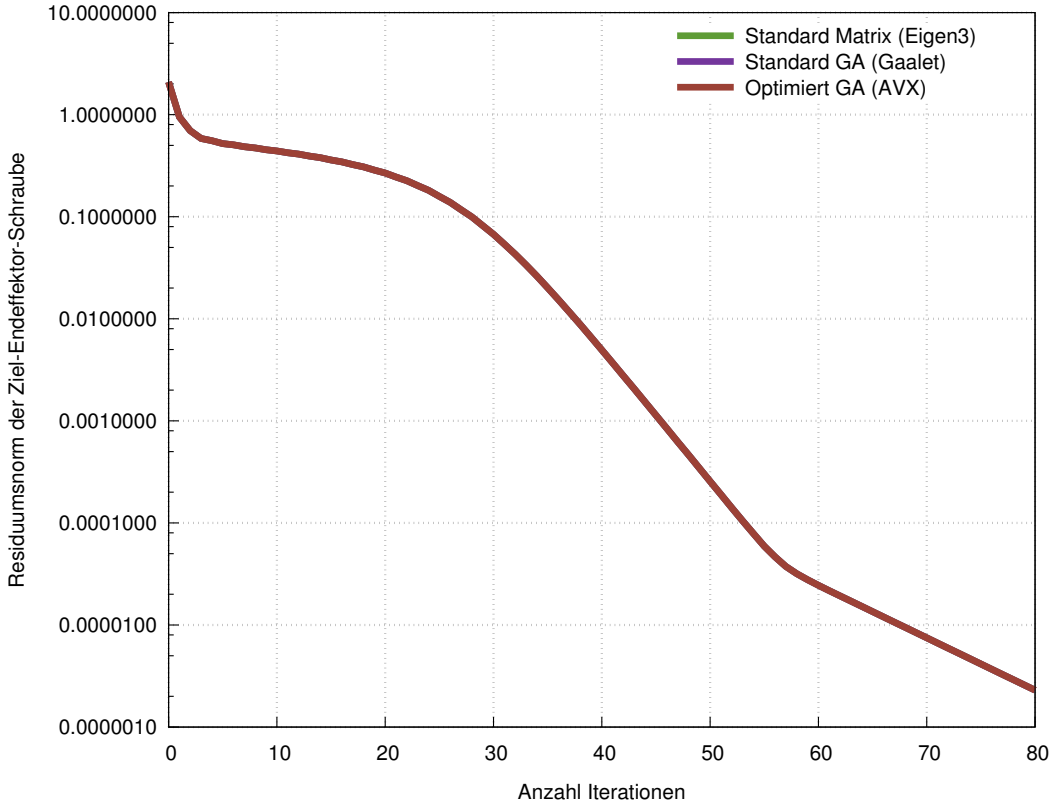


Abbildung 15.1.: Verlauf der Residuumsnorm während der iterativen Auswertung der Algorithmen 10 und 11 mit Implementierung in Eigen, Gaalet und des Vektorisierungsschemas in Abschnitt 12.2 auf den AVX-Befehlssatz angewandt.

mit Transformationsmatrizen ausgenutzt, um die Daten lange im Register zu halten und möglichst viele Fließkommaoperationen gleichzeitig durchzuführen.

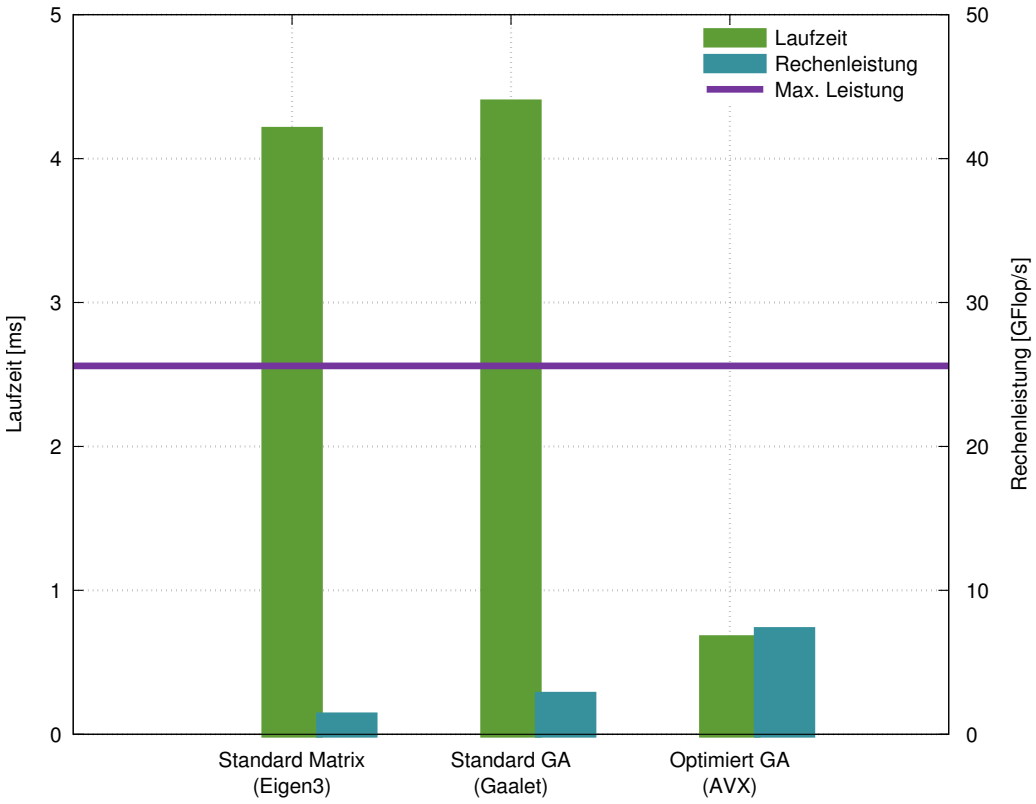


Abbildung 15.2.: Laufzeit und Performance der Algorithmen 10 und 11 mit Implementierung in Eigen, Gaalet und des Vektorisierungsschemas in Abschnitt 12.2 auf den AVX-Befehlssatz angewandt, ausgewertet auf einer „Intel Sandy-Bridge“ E5-2687W CPU mit 3,1 GHz Taktfrequenz.

16. Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wurde eine neuartige Konstruktion der Geometrischen Algebra eingeführt, die zum einen auf einem Indexmengensystem für Koordinaten basiert, zum anderen auf einer Vorzeichenfunktion, die die antikommutative Eigenschaft und die Bilinearform der Basisvektormultiplikation explizit definiert. Die neuartige Konstruktion erweist sich später bei der Einführung einer Vektorisierungsstrategie als nützlich.
Auf Basis der neuartigen Konstruktion der Geometrischen Algebra wurden neben dem Geometrischen Produkt weitere Produkte eingeführt und Eigenschaften inklusive Beweis aufgezeigt. Auf diesen Vorarbeiten aufbauend wird schließlich gezeigt, wie eigentliche Bewegung und deren Verknüpfung in der Geometrischen Algebra beschrieben werden kann.
Neben der expliziten Einsicht in die Struktur des Geometrischen Produktes könnte die neuartige Konstruktion zukünftig ebenfalls nützlich sein, die „index set method“ von Dorst [7] zu formalisieren und in einem Computeralgebrasystem einzusetzen. Diese Idee ist im Anhang im Abschnitt A.2 beispielhaft erläutert.

Mit Hilfe der neuartigen Konstruktion der Geometrischen Algebra konnte eine Vektorisierungsstrategie des Geometrischen Produktes für moderne SIMD-Prozessoren vorgestellt werden, die Permutationsoperationen auf Multivektorkoordinaten nützt.
Ein Aspekt der Vektorisierungsstrategie ist die Kompositionsfolge der erzeugenden Stone-Permutationen. Diese Kompositionsfolge ist symmetrisch, wodurch eine gleichzeitige Abarbeitung der Stone-Permutationen im selben Vektorregister von vorne und von hinten beginnend plausibel erscheint. Eine entsprechende mögliche Erweiterung der vorgestellten Vektorisierungsstrategie könnte auf zukünftige SIMD-Prozessoren hilfreich sein, deren Vektorregister breiter sind als die Dimension der Multivektoroperanden.
Neben der Laufzeit birgt die vorgestellte Vektorisierungsstrategie unter Annahme eines verbesserten Energieverbrauches von Anwendungen durch deren Vektorisierung ebenfalls Verbesserungspotential bezüglich energiebewussten Berechnungen in der Geometrischen Algebra.
In dieser Arbeit wurde ebenfalls eine Möglichkeit beschrieben, die Operationen einer Implementierung der Vorzeichenfunktion zu minimieren. Zwar wird üblicherweise die Vorzeichenfunktion schon vor der Laufzeit ausgewertet, dennoch kann dadurch zum Beispiel die Zeit zur Auswertung während einem Kompiliervorgang verringert werden.

Anhand dem Anwendungsbeispiel der inversen Kinematik eines Stanford-Robotertyps wurden die Implementierungen eines Löseralgorithmus verglichen, die jeweils auf Standardimplementierungen der Matrizenalgebra, Standardimplementierungen der Geometrischen Algebra und der vorgestellten Vektorisierungsstrategie der Geometrischen Algebra basieren. Es konnte nicht nur eine deutlich erhöhte Rechenleistung durch die Vekto-

risierungsstrategie der Geometrischen Algebra im Vergleich zu den Standardimplementierungen der Matrizenalgebra und Geometrischen Algebra festgestellt werden, sondern auch eine erheblich geringere Laufzeit des Algorithmus.
Der Stanford-Robotertyp besitzt eine nicht-redundante Kinematik. Der in diesem Vergleich verwendete numerische Algorithmus kann entsprechend auf hyperredundante Roboterkinematiken angewendet werden.
Die Beschreibung der Bewegung durch die Geometrische Algebra und die vorgestellte Vektorisierungsstrategie des Geometrischen Produktes, das Bewegung verknüpft, dürfte für die Simulation von Mehrkörpersystemen, Partikelsystemen oder Molekulardynamik interessant sein.
In der Strukturmechanik und deren Simulation könnte die Formulierung der Cosserat-Theorie in der Geometrischen Algebra mit Hinblick auf Anwendung eines Galerkin-Ansatzes interessant sein.
Die bisher vorgestellten Anwendungen basieren auf der Beschreibung von Bewegung in der Geometrischen Algebra. Die vorgestellte Vektorisierungsstrategie des Geometrischen Produktes ist jedoch unabhängig von dieser Beschreibung. So sollte die Laufzeitverbesserung durch die vorgestellte Vektorisierungsstrategie von Anwendungen Geometrischer Algebra möglich sein, die nicht auf der Beschreibung von Bewegung aufbauen.

Literaturverzeichnis

[1] Eduardo Bayro-Corrochano. Motor algebra approach for visually guided robotics. *Pattern Recognition*, 35(1):279–294, 2002.

[2] Samuel R. Buss. Introduction to inverse kinematics with jacobian transpose, pseudoinverse and damped least squares methods. Technical report, IEEE Journal of Robotics and Automation, 2004.

[3] M. Chasles. Note sur les propriétés générales du système de deux corps semblables entr'eux. *Bulletin de Sciences Mathematiques, Astronomiques Physiques et Chimiques*, 1830.

[4] William Kingdon Clifford. *Mathematical papers*. Edited by Robert Tucker, with an introduction by H. J. Stephen Smith. Chelsea Publishing Co., New York, 1968.

[5] J. Denavit and R. S. Hartenberg. A kinematic notation for lower-pair mechanisms based on matrices. *Trans. ASME E, Journal of Applied Mechanics*, 22:215–221, June 1955.

[6] Chris Doran and Anthony Lasenby. *Geometric Algebra for Physicists*. Cambridge University Press, 2007.

[7] Leo Dorst. Honing geometric algebra for its use in the computer sciences. In Gerald Sommer, editor, *Geometric Computing with Clifford Algebras*, pages 127–152. Springer Berlin Heidelberg, 2001.

[8] Leo Dorst, Daniel Fontijne, and Stephen Mann. *Geometric Algebra for Computer Science (Revised Edition): An Object-Oriented Approach to Geometry*. Morgan Kaufmann, 2009.

[9] M.S. Espinoza, J. Goncalves, P. Leitao, J.L.G. Sanchez, and A. Herreros. Inverse kinematics of a 10 dof modular hyper-redundant robot resorting to exhaustive and error-optimization methods: A comparative study. In *Robotics Symposium and Latin American Robotics Symposium (SBR-LARS), 2012 Brazilian*, pages 125–130, Oct 2012.

[10] Uwe Woessner Florian Seybold. Gaalet - a c++ expression template library for implementing geometric algebra. In 6th *High-End Visualization Workshop, 2010*. Berlin, Lehmanns Media-LOB.de, 2010.

[11] D. Fontijne. *Efficient Implementation of Geometric Algebra.* PhD thesis, University of Amsterdam, 2007.

[12] Hermann Grassmann. *Die lineale Ausdehnungslehre.* Otto Wigand, Leipzig, 1844.

[13] Gaël Guennebaud, Benoît Jacob, et al. Eigen v3. http://eigen.tuxfamily.org, 2010.

[14] David Hestenes. Mathematical viruses. In *Algebras and their Applications in Mathematical Physics*, pages 3–16. Kluwer, 1991.

[15] David Hestenes. *New Foundations for Classical Mechanics (Fundamental Theories of Physics).* Springer, 2nd edition, 1999.

[16] David Hestenes. Old wine in new bottles: A new algebraic framework for computational geometry. In Eduardo Bayro-Corrochano and Garret Sobczyk, editors, *Geometric Algebra with Applications in Science and Engineering*, pages 3–17. Birkhäuser Boston, 2001.

[17] David Hestenes. New tools for computational geometry and rejuvenation of screw theory. In Eduardo Bayro-Corrochano and Gerik Scheuermann, editors, *Geometric Algebra Computing*, pages 3–33. Springer London, 2010.

[18] David Hestenes and Garret Sobczyk. *Clifford Algebra to Geometric Calculus.* D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Holland, 1984.

[19] Dietmar Hildenbrand. *Foundations of Geometric Algebra Computing.*, volume 8 of *Geometry and computing.* Springer, 2013.

[20] Pertti Lounesto. Clifford algebras and spinors. *Lond.Math.Soc.Lect.Note Ser.*, 286:1–338, 2001.

[21] A.L. Macdonald and A. Macdonald. *Vector and Geometric Calculus.* CreateSpace Independent Publishing Platform, 2012.

[22] Christian Perwass. *Geometric algebra with applications in engineering*, volume 4. Springer, 2009.

[23] Andreas Pott, Martin Naumann, Martin Hägele, and Alexander Verl. Industrieroboter und handhabungsgeräte. In Klaus Feldmann, Volker Schöppner, and Günter Spur, editors, *Handbuch Fügen, Handhaben und Montieren*, volume 5, pages 316–336. Carl Hanser Verlag GmbH Co KG, 2013.

[24] W. Schiehlen and P. Eberhard. *Technische Dynamik: Rechnergestützte Modellierung mechanischer Systeme im Maschinen- und Fahrzeugbau.* Springer Fachmedien Wiesbaden, 2014.

[25] Florian Seybold. Solving motor algebra equation via conjugate gradients. *Clifford Anal. Clifford Algebr. Appl.*, 1(2):101–107, 2012.

[26] Florian Seybold. Gaalet. http://gaalet.sourceforge.net, 2013.

[27] Bruno Siciliano and Oussama Khatib, editors. *Springer Handbook of Robotics*. Springer, 2008.

[28] John Snygg. *A new approach to differential geometry using Clifford's geometric algebra*. Springer, 2011.

[29] Samer Yahya, M Moghavvemi, and Haider AF Mohamed. Redundant manipulators kinematics inversion. *Scientific Research and Essays*, 6(26):5462–5470, 2011.

A. Weitere Eigenschaften der Geometrischen Algebra

A.1. Gerade Unteralgebra Isomorphismus

Satz A.1.1 (Konstruktion eines Isomorphismus bezüglich gerader Unteralgebra)**.** *Sei die Geometrische Algebra $\mathcal{G}_{p,q}$ mit der Signatur $(p,q) \in (\mathbb{N}_0)^2$ erklärt.*
Die gerade Unteralgebra $\mathcal{G}^+_{p,q}$ ist isomorph zur Geometrischen Algebra $\mathcal{G}_{r,s}$ mit der Signatur

$$(r,s) = \begin{cases} (0, p-1) & \textit{für } q = 0 \\ (p, q-1) & \textit{für } q \neq 0, \end{cases} \tag{A.1}$$

sowie dem Mengendifferenzisomorphismus

$$M : \mathcal{P}^+(\{1,\dots,p+q\}) \to \mathcal{P}(\{1,\dots,r+s\}), U \mapsto U \cap \{1,\dots,r+s\}, \tag{A.2}$$
$$M^{-1} : \mathcal{P}(\{1,\dots,r+s\}) \to \mathcal{P}^+(\{1,\dots,p+q\}), U \mapsto \begin{cases} U & \textit{für } |U| \textit{ gerade} \\ U \cup \{p+q\} & \textit{für } |U| \textit{ ungerade} \end{cases},$$

so dass

$$M(U) \triangle M(V) = M(U \triangle V) \;\forall\, U, V \in \mathcal{P}^+(\{1,\dots,p+q\}),$$

und dem Produktisomorphismus

$$G : \mathcal{G}^+_{p,q} \to \mathcal{G}_{r,s}, A = \sum_{\mathcal{P}^+(\{1,\dots,p+q\})} A_U\, e_U \mapsto \sum_{\mathcal{P}^+(\{1,\dots,p+q\})} A_U\, e_{M(U)}, \tag{A.3}$$
$$G^{-1} : \mathcal{G}_{r,s} \to \mathcal{G}^+_{p,q}, B = \sum_{\mathcal{P}(\{1,\dots,r+s\})} B_U\, e_U \mapsto \sum_{\mathcal{P}(\{1,\dots,r+s\})} B_U\, e_{M^{-1}(U)},$$

so dass

$$G(A)\, G(B) = G(AB) \;\forall\, A, B \in \mathcal{G}^+_{p,q}.$$

Beweis. Die lineare Eigenschaften des Produktisomorphismus ergeben sich direkt aus der Definition, es gilt für alle $A, B \in \mathcal{G}^+_{p,q}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$

$$G(\lambda A + B) = \lambda G(A) + G(B).$$

Wir führen die Grunddimension $n = r + s = p + q - 1$ ein, sowie die Grundmengen

$$N_n = \{1, \ldots, n\}$$

und

$$\mathcal{N}^+_{n+1} = \{M^{-1}(\{i\}) \mid i \in N_{r,s}\} = \{\{1, n+1\}, \ldots, \{n, n+1\}\}\,.$$

Wir stellen fest, dass

$$\begin{aligned}\mathcal{P}^+(\{1, \ldots, n+1\}) &= \{U \subseteq \{1, \ldots, n+1\} \mid (|U| \text{ ist gerade})\} \\ &= \{U \triangle V \mid U, V \in \mathcal{N}^+_{n+1}\}.\end{aligned}$$

Für alle $U, V \in \mathcal{N}^+_{n+1}$ gilt

$$M(U \triangle V) = (U \triangle V) \cap N_n = (U \cap N_n) \triangle (V \cap N_n) = M(U) \triangle M(V).$$

Wir bezeichnen die Vorzeichenfunktionen $\alpha_{r,s}$, $\alpha_{p,q}$, sowie die Pseudometrische Tensoren $g_{r,s}$, $g_{p,q}$, entsprechend den zugehörigen Geometrischen Algebren $\mathcal{G}_{r,s}$ und $\mathcal{G}_{p,q}$.
Für alle $U, V \in \mathcal{N}^+_{n+1} : U \neq V$ ist $|U| = |V| = 2$, $U \cap V = \{n+1\}$, also $|U \cap V| = 1$ und deswegen

$$\begin{aligned}\alpha_{p,q}(U, V)\, \alpha_{p,q}(V, U) &\overset{1.12}{=} (-1)^{|U||V| + |U \cap V|} \\ &= -1 \\ &\overset{1.5}{=} \alpha_{r,s}(M(U), M(V))\, \alpha_{r,s}(M(U), M(V)).\end{aligned}$$

Aus der Aussage in A.1 ergibt sich für alle $i \in N_{r,s}$ der Zusammenhang

$$g_{r,s}(\{i\}) = -g_{p,q}(\{i\})\, g_{p,q}(\{n+1\}). \tag{A.4}$$

Daraus folgern wir für alle $U \in \mathcal{N}^+_{n+1}$

$$\begin{aligned}\alpha_{p,q}(U, U) &\overset{1.19}{=} (-1)^{\frac{1}{2}|U|(|U|-1)}\, g_{p,q}(U) \\ &\underset{A.2}{\overset{1.16}{=}} -\, g_{p,q}(M(U))\, g_{p,q}(\{n+1\}) \\ &\overset{A.4}{=} g_{r,s}(M(U)) \\ &\overset{1.16}{=} \alpha_{r,s}(M(U), M(U)).\end{aligned}$$

Deswegen gilt bezüglich der endomorphen Eigenschaft des Produktisomorphismus für alle $U, V \in \mathcal{P}(\mathcal{N}^+_{p,q})$

$$e_{M(U)} e_{M(V)} = \alpha_{r,s}(M(U), M(V))\, e_{M(U) \triangle M(V)} = \alpha_{p,q}(U, V)\, e_{M(U \triangle V)}.$$

Wegen der Linearität des Produktisomorphismus können wir dies auf

$$G(A)\, G(B) = G(AB)$$

für alle $A, B \in \mathcal{G}^+_{p,q}$ fortführen. Ähnliches gilt für die Umkehrfunktion. □

	$e_\emptyset$	$e_{\{1,2\}}$	$e_{\{1,3\}}$	$e_{\{2,3\}}$
$e_\emptyset$	$e_\emptyset$	$e_{\{1,2\}}$	$e_{\{1,3\}}$	$e_{\{2,3\}}$
$e_{\{1,2\}}$	$e_{\{1,2\}}$	$-e_\emptyset$	$-e_{\{2,3\}}$	$e_{\{1,3\}}$
$e_{\{1,3\}}$	$e_{\{1,3\}}$	$e_{\{2,3\}}$	$e_\emptyset$	$e_{\{1,2\}}$
$e_{\{2,3\}}$	$e_{\{2,3\}}$	$-e_{\{1,3\}}$	$-e_{\{1,2\}}$	$e_\emptyset$

	$e_\emptyset$	$e_{\{1,2\}}$	$e_{\{1\}}$	$e_{\{2\}}$
$e_\emptyset$	$e_\emptyset$	$e_{\{1,2\}}$	$e_{\{1\}}$	$e_{\{2\}}$
$e_{\{1,2\}}$	$e_{\{1,2\}}$	$-e_\emptyset$	$-e_{\{2\}}$	$e_{\{1\}}$
$e_{\{1\}}$	$e_{\{1\}}$	$e_{\{2\}}$	$e_\emptyset$	$e_{\{1,2\}}$
$e_{\{2\}}$	$e_{\{2\}}$	$-e_{\{1\}}$	$-e_{\{1,2\}}$	$e_\emptyset$

Tabelle A.1.: Links: Produkttafel für der geraden Unteralgebra $\mathcal{G}^+_{2,1}$. Rechts: Produkttafel der isomorphen Geometrischen Algebra $\mathcal{G}_{2,0}$.

Beispiel A.1.1 (Konstruktion eines Isomorphismus bezüglich gerader Unteralgebra)**.** Sei die Geometrische Algebra $\mathcal{G}_{2,1}$ erklärt. Laut Satz A.1.1 ist die gerade Unteralgebra $\mathcal{G}^+_{2,1}$ isomorph zur Geometrischen Algebra $\mathcal{G}_{2,0}$.
Tabelle A.1 zeigt die Produkte von allen Basismultivektoren links in der gerade Unteralgebra $\mathcal{G}^+_{2,1}$ und rechts in der dazu isomorphen Geometrischen Algebra $\mathcal{G}_{2,0}$. Bezüglich der Vorzeichenfunktion wird dabei für beide Algebren $\alpha(\{i\},\{j\}) = 1\ \forall i,j \in \{1,\dots,n\} : i < j$ definiert, wobei die Grunddimension entsprechend entweder $n = 3$ bei der gerade Unteralgebra $\mathcal{G}^+_{2,1}$, oder $n = 2$ bei der Geometrischen Algebra $\mathcal{G}_{2,0}$ sei.
Bezüglich des Produktisomorphismus $G : \mathcal{G}^+_{2,1} \to \mathcal{G}_{2,0}$ auf die Basismultivektoren gilt

$$G(e_\emptyset) = e_\emptyset, G(e_{\{1,2\}}) = e_{\{1,2\}}, G(e_{\{1,3\}}) = e_{\{1\}}, G(e_{\{2,3\}}) = e_{\{2\}}.$$

A.2. Formalisierung der „index set method“

Für die Geometrischen Algebra $\mathcal{G} = \mathbb{R}^{2^n}$ mit Dimension $n \in \mathbb{N}_0$ und Grundmenge $N = \{1,\dots,n\}$ ist das äußere Produkt in dieser Arbeit als eingeschränktes Geometrisches Produkt definiert. Es wird die Summe über dem Produkt aus Koordinatenmultiplikation und Basisvektormultiplikation mit dem jeweiligen Indexpaar $(U,V) \in \mathcal{P}(N) \times \mathcal{P}(N)$ durchgeführt, welches sich in der Relation

$$R_\wedge = \{(U,V) \mid U,V \in \mathcal{P}(N) : U \triangle V = U \cup V\}$$

befindet. Nach der Definition 3.1 gilt also

$$A \wedge B = \sum_{(U,V)\in R_\wedge} A_U B_V e_U e_V$$

für die Multivektoren $A, B \in \mathcal{G}$.
Mit den Relationen

$$R_\rfloor = \{(U,V) \mid U,V \in \mathcal{P}(N) : U \triangle V = V \setminus U\},$$
$$R_\lfloor = \{(U,V) \mid U,V \in \mathcal{P}(N) : U \triangle V = U \setminus V\}$$

gilt ähnliches für die Definition der Linkskontraktion in 3.6

$$A \rfloor B = \sum_{(U,V)\in R_\rfloor} A_U B_V e_U e_V$$

und der Rechtskontraktion in 3.7

$$A \lfloor B = \sum_{(U,V)\in R_{\lfloor}} A_U B_V e_U e_V.$$

Beispielsweise mit der Einführung der Verknüpfung von Relationen

$$\begin{aligned}
R_\wedge \circ R_\rfloor &= \{(U,V,W) \mid U,V,W \in \mathcal{P}(N) : (U,V) \in R_\wedge \wedge (U \triangle V, W) \in R_\rfloor\} \\
&= \{(U,V,W) \mid U,V,W \in \mathcal{P}(N) : (U \triangle V = U \cup V) \wedge (U \triangle V \triangle W = W \setminus (U \triangle V))\} \\
&= \{(U,V,W) \mid U,V,W \in \mathcal{P}(N) : U \triangle V \triangle W = W \setminus (U \cup V)\} \\
&= \{(U,V,W) \mid U,V,W \in \mathcal{P}(N) : U \triangle V \triangle W = (W \setminus V) \setminus U\} \\
&= \{(U,V,W) \mid U,V,W \in \mathcal{P}(N) : (V \triangle W = W \setminus V) \wedge (U \triangle V \triangle W = (W \triangle V) \setminus U)\} \\
&= \{(U,V,W) \mid U,V,W \in \mathcal{P}(N) : (V,W) \in R_\rfloor \wedge (U, V \triangle W) \in R_\rfloor\}
\end{aligned}$$

gilt für die Verknüpfung der Multivektoren $A, B, C \in \mathcal{G}$ durch

$$\begin{aligned}
(A \wedge B) \rfloor C &= \sum_{(U,V)\in R_\wedge} \sum_{(U\triangle V,W)\in R_\rfloor} A_U B_V C_W e_U e_V e_W \\
&= \sum_{(U,V,W)\in R_\wedge \circ R_\rfloor} A_U B_V C_W e_U e_V e_W \\
&= \sum_{(V,W)\in R_\rfloor} \sum_{(U,V\triangle W)\in R_\rfloor} A_U B_V C_W e_U e_V e_W \\
&= A \rfloor (B \rfloor C).
\end{aligned}$$

Das Finden von Identitäten wie $A \wedge B) \rfloor C = A \rfloor (B \rfloor C)\ \forall A, B, C \in \mathcal{G}$ aus dem Beispiel durch Indexmengen ähnelt der „index set method“ von Dorst [7]. Die Methode von Dorst basiert auf Venn-Diagrammen. Mit der hier eingeführten neuartigen Konstruktion der Geometrischen Algebra, die Potenzmengen und Operationen darauf zur Indizierung von Koordinaten und Basisvektoren verwendet, könnte die Methode von Dorst weiter formalisiert werden. Ein Einsatz eines solchen Formalismus in einem Computeralgebrasystem für Geometrische Algebra wäre vorstellbar.
Weitere Identitäten werden im Abschnitt A.3 gezeigt.

A.3. Nützliche Identitäten

Lemma A.3.1. *Seien die Grunddimension $n \in \mathbb{N}_0$ und die Geometrische Algebra $\mathcal{G} = \mathbb{R}^{2^n}$ erklärt. Für alle $A, B, C \in \mathcal{G}$ gilt*

$$(A \wedge B) \rfloor C = A \rfloor (B \rfloor C)$$

und

$$C \lfloor (B \wedge A) = (C \lfloor B) \lfloor A.$$

Beweis. Sei die Grundmenge $N = \{1, \ldots, n\}$.
Für alle $U, V, W \in \mathcal{P}(N)$ gilt

$$W \setminus (U \cup V) = (W \setminus V) \setminus U \tag{A.5}$$

Daraus folgern wir für alle $A, B, C \in \mathcal{G}$

$$\begin{aligned}
(A \wedge B) \rfloor C &\overset{3.1}{\underset{3.6}{=}} \sum_{\substack{(U,V,W) \in \mathcal{P}(N)^3 \\ : U \triangle V \triangle W = (U \cup V)/W}} A_U B_V C_W e_U e_V e_W \\
&\overset{A.5}{=} \sum_{\substack{(U,V,W) \in \mathcal{P}(N)^3 \\ : U \triangle V \triangle W = U/(V/W)}} A_U B_V C_W e_U e_V e_W \\
&\overset{3.6}{=} A \rfloor (B \rfloor C)
\end{aligned}$$

und in ähnlicher Weise

$$C \lfloor (B \wedge A) = (C \lfloor B) \lfloor A. \qquad \square$$

Lemma A.3.2. *Seien die Grunddimension $n \in \mathbb{N}_0$ und die Geometrische Algebra $\mathcal{G} = \mathbb{R}^{2^n}$ erklärt. Für alle $A, B \in \mathcal{G}, C \in \mathcal{G}^P : AC = A \rfloor C$ mit Parität $P \in \{0, 1\}$ gilt*

$$A \wedge (B \rfloor C) = (A \rfloor B) \rfloor C$$

und

$$(C \lfloor B) \wedge A = C \lfloor (B \lfloor A).$$

Beweis. Es gilt

$$AC = \sum_{(U,W) \in \mathcal{P}(N)^2} A_U C_W \, e_U e_W = \sum_{\substack{(U,W) \in \mathcal{P}(N)^2 \\ : U \triangle W = U/W}} A_U C_W \, e_U e_W = A \rfloor C. \tag{A.6}$$

Daraus folgern wir für alle $U, V, W \in \mathcal{P}(N)$

$$\begin{aligned}
& (U \triangle V \triangle W = U \cup (W \setminus V)) \wedge (U \triangle W = W \setminus U) \\
\Leftrightarrow \quad & U \triangle W = W \setminus U = (V \setminus U) \cup (U \setminus V) \cup (W \setminus U) \\
\Leftrightarrow \quad & U \triangle V \triangle W = W \setminus (V \setminus U).
\end{aligned} \tag{A.7}$$

Für alle $V \in \mathcal{P}(N), W \in \mathcal{P}^P(N) : V \setminus W = \emptyset$ erhalten wir

$$\alpha(V, W)\alpha(W, V) = (-1)^{|V||W| + |V \cap W|} = (-1)^{|V||W| + |W|} = (-1)^{(|V|+1)P}. \tag{A.8}$$

Für alle $A, B \in \mathcal{G}, C \in \mathcal{G}^P : AC = A \rfloor C$ gilt

$$
\begin{aligned}
& A \wedge (B \rfloor C) \\
& \overset{3.6}{\underset{3.1}{=}} \sum_{\substack{(U,V,W)\in\mathcal{P}(N)^2\times\mathcal{P}^P(N) \\ :\ U\triangle V\triangle W = U\cup(V/W)}} A_U B_V C_W \, e_U e_V e_W \\
& \overset{1.21}{=} \sum_{V\in\mathcal{P}(N)} B_V \left(\sum_{\substack{(U,V,W)\in\mathcal{P}(N)\times\mathcal{P}^P(N) \\ :\ U\triangle V\triangle W = U\cup(V/W)}} A_U C_W \, \alpha(V,W)\alpha(W,V) \, e_U e_W \right) e_V \\
& \overset{A.6}{=} \sum_{V\in\mathcal{P}(N)} B_V \, \alpha(V,W)\alpha(W,V) \left(\sum_{\substack{(U,V,W)\in\mathcal{P}(N)\times\mathcal{P}^P(N) \\ :\ (U\triangle V\triangle W = U\cup(V/W))\wedge(U\triangle W = U/W)}} A_U C_W \, e_U e_W \right) e_V \\
& \overset{A.8}{\underset{A.7}{=}} \sum_{V\in\mathcal{P}(N)} B_V \, (-1)^{(|V|+1)P} \left(\sum_{\substack{(U,V,W)\in\mathcal{P}(N)\times\mathcal{P}^P(N) \\ :\ U\triangle V\triangle W = (U/V)/W}} A_U C_W \, e_U e_W \right) e_V \\
& \overset{1.21}{=} \sum_{\substack{(U,V,W)\in\mathcal{P}(N)^2\times\mathcal{P}^P(N) \\ :\ U\triangle V\triangle W = (U/V)/W}} A_U B_V C_W \, e_U e_V e_W \\
& \overset{3.6}{=} (A \rfloor B) \rfloor C
\end{aligned}
$$

und auf ähnliche Weise

$$(C \lfloor B) \wedge A = C \lfloor (B \lfloor A). \qquad \square$$

Lemma A.3.3. *Seien die Grunddimension $n \in \mathbb{N}$ und die Geometrische Algebra $\mathcal{G} = \mathbb{R}^{2^n}$ erklärt.*
Für alle $x \in \mathcal{G}^1, A \in \mathcal{G}^k, B \in \mathcal{G}^l$ mit den Graden $k, l \in \{1, \ldots, n\}$ gilt

$$
\begin{aligned}
x \cdot (AB) &= (x \cdot A)B + (-1)^k A(x \cdot B) \\
&= (x \wedge A)B + (-1)^{k+1} A(x \wedge B).
\end{aligned}
$$

Beweis. Es gilt

$$
\begin{aligned}
x \cdot (AB) &\overset{3.16}{=} \frac{1}{2}(xAB - (-1)^{k+l} ABx) \\
&= \frac{1}{2}(xAB - (-1)^{k+l} ABx + (-1)^k AxB - (-1)^k AxB) \\
&= \frac{1}{2}(xAB - (-1)^k AxB) + \frac{1}{2}(-1)^k (AxB - (-1)^l ABx) \\
&\overset{3.16}{=} (x \cdot A)B + (-1)^k A(x \cdot B)
\end{aligned}
$$

und

$$\begin{aligned}
x \cdot (AB) &\overset{3.16}{=} \frac{1}{2}(xAB + (-1)^{k+l}ABx) \\
&= \frac{1}{2}(xAB - (-1)^{k+l}ABx + (-1)^k AxB - (-1)^k AxB) \\
&= \frac{1}{2}(xAB + (-1)^k AxB) + \frac{1}{2}(-1)^{k+1}((-1)^l ABx + AxB) \\
&\underset{3.16}{\overset{3.4}{=}} (x \wedge A)B + (-1)^{k+1}A(x \wedge B).
\end{aligned}$$

□

Korollar A.3.4. *Es gilt*

$$x \cdot (A \wedge B) = (x \cdot A) \wedge B + (-1)^k A \wedge (x \cdot B)$$

und

$$x \cdot (A \cdot B) = \begin{cases} (x \wedge A) \cdot B & \text{für } k < l \\ 0 & \text{für } k = l \\ (-1)^{k+1} A \cdot (x \wedge B) & \text{für } k > l \end{cases}.$$

Lemma A.3.5. *Seien die Grunddimension $n \in \mathbb{N}$ und die Geometrische Algebra $\mathcal{G} = \mathbb{R}^{2^n}$ erklärt.*
Für alle $x \in \mathcal{G}^1, A \in \mathcal{G}^k, B \in \mathcal{G}^l$ mit den Graden $k, l \in \{1, \ldots, n\}$ gilt

$$\begin{aligned}
x \wedge (AB) &= (x \cdot A)B + (-1)^k A(x \wedge B) \\
&= (x \wedge A)B + (-1)^{k+1}A(x \cdot B).
\end{aligned}$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned}
x \wedge (AB) &\overset{3.4}{=} \frac{1}{2}(xAB + (-1)^{k+l}ABx) \\
&= \frac{1}{2}(xAB + (-1)^{k+l}ABx + (-1)^k AxB - (-1)^k AxB) \\
&= \frac{1}{2}(xAB - (-1)^k AxB) + \frac{1}{2}(-1)^k((-1)^l ABx + AxB) \\
&\underset{3.4}{\overset{3.16}{=}} (x \cdot A)B + (-1)^k A(x \wedge B)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
x \wedge (AB) &\overset{3.4}{=} \frac{1}{2}(xAB + (-1)^{k+l}ABx) \\
&= \frac{1}{2}(xAB + (-1)^{k+l}ABx + (-1)^k AxB - (-1)^k AxB) \\
&= \frac{1}{2}(xAB + (-1)^k AxB) + \frac{1}{2}(-1)^k((-1)^l ABx - AxB) \\
&\underset{3.16}{\overset{3.4}{=}} (x \wedge A)B + (-1)^{k+1}A(x \cdot B).
\end{aligned}$$

□

Korollar A.3.6. *Es gilt*

$$x \wedge (A \cdot B) = \begin{cases} (x \cdot A) \cdot B + (-1)^k A \cdot (x \wedge B) & \text{für } k \leq l \\ (x \wedge A) \cdot B + (-1)^{k+1} A \cdot (x \cdot B) & \text{für } k \geq l \end{cases}.$$

B. Weitere Modelle der Geometrischen Algebra

B.1. Komplexe Geometrische Algebra $\mathcal{G}^+_{2,0}$

Satz B.1.1 (Algebrenisomorphismus)**.** *Zwischen den komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ und dem komplexen Modell der Geometrischen Algebra $\mathcal{G}^+_{2,0}$ gibt es den Isomorphismus*

$$\mathbb{C} \to \mathcal{G}^+_{2,0}, a + b\,i \mapsto a + b\,e_{\{1,2\}},$$

wobei $a, b \in \mathbb{R}$ und die komplexe Zahl $i \in \mathbb{C} : i^2 = -1$.

Beweis. Folgende Axiome, die die komplexen Zahlen vollständig definieren, sind auch für die komplexe Geometrischen Algebra $\mathcal{G}^+_{2,0}$ erfüllt:

1. Die reellen Zahlen $\mathbb{R} = \mathcal{G}^0_{2,0}$ sind laut Satz 2.5.1 in der komplexen Geometrischen Algebra enthalten, es gilt $\mathbb{R} \subset \mathcal{G}^+_{2,0}$.

2. Weil $\mathcal{G}^+_{2,0}$ ein Vektorraum ist, gilt bezüglich der Addition das Assoziativ- und Kommutativgesetz.

3. Laut Satz 1.5.2 ist die Multiplikation assoziativ, distributiv und wegen

$$\begin{aligned} AB &\overset{1.22}{=} (A_\emptyset + A_{\{1,2\}}e_{\{1,2\}})(B_\emptyset + B_{\{1,2\}}e_{\{1,2\}}) \\ &= A_\emptyset B_\emptyset - A_{\{1,2\}}B_{\{1,2\}} + (A_\emptyset B_{\{1,2\}} + A_{\{1,2\}}B_\emptyset)e_{\{1,2\}} \\ &= B_\emptyset A_\emptyset - B_{\{1,2\}}A_{\{1,2\}} + (B_\emptyset A_{\{1,2\}} + B_{\{1,2\}}A_\emptyset)e_{\{1,2\}} \\ &= (B_\emptyset + B_{\{1,2\}}e_{\{1,2\}})(A_\emptyset + A_{\{1,2\}}e_{\{1,2\}}) \\ &\overset{1.22}{=} BA. \end{aligned}$$

   für alle $A, B \in \mathcal{G}^+_{2,0}$ auch kommutativ über der Addition.

4. $\forall\, A \in \mathcal{G}^+_{2,0} : \exists\,(-A) \in \mathcal{G}^+_{2,0} : A + (-A) = 0$, da $\mathcal{G}^+_{2,0}$ ein Vektorraum ist.

5. $\forall\, A \in \mathcal{G}^+_{2,0} \setminus \{0\} : \exists\, A^{-1} \in \mathcal{G}^+_{2,0} : AA^{-1} = 1$, nämlich $A^{-1} = A\frac{1}{AA^\dagger}$, weil jedes $B \in \mathcal{G}^+_{2,0}$ in zwei Vektoren $b, b^{-1}B \in \mathcal{G}^1_{2,0} : B = bb^{-1}B$ zerlegt werden kann, da laut Korollar 7.1.15 $\forall\, b \in \mathcal{G}^1_{2,0} \setminus \{0\}\ \exists\, b^{-1} \in \mathcal{G}^1_{2,0} : bb^{-1} = 1$, und damit jedes Element in $\mathcal{G}^+_{2,0}$ ein Versor ist und Satz 7.2.7 angewendet werden kann.

6. $\exists\, e_{\{1,2\}} \in \mathcal{G}^+_{2,0} : e_{\{1,2\}}\, e_{\{1,2\}} = -1$.

7. $\forall\, A \in \mathcal{G}^+_{2,0} : \exists\, a, b \in \mathcal{G}^1_{2,0} : A = a + b\, e_{\{1,2\}}$.

□

Korollar B.1.2 (Komplexe Konjugation)**.** *Die komplexe Konjugation in $\mathbb{C}$ entspricht der Reversen in $\mathcal{G}^+_{2,0}$, es gilt*

$$A_{\{0\}} - A_{\{1,2\}} e_{\{1,2\}} \overset{7.16}{=} A^\dagger$$

für alle $A \in \mathcal{G}^+_{2,0}$.

B.2. Standardraummodell $\mathcal{G}_{n,0}$

Satz B.2.1 (Äquivalenz inneres Produkt und Skalarprodukt)**.** *Seien die Grunddimenion $n \in \mathbb{N}$ und die Geometrische Algebra $\mathcal{G}_{n,0} = \mathbb{R}^{2^n}$ erklärt.*
Für alle $A, B \in \mathcal{G}_{n,0}$ gilt

$$\langle AB^\dagger \rangle_0 = \langle A^\dagger B \rangle_0 = A * B.$$

Beweis. Bezüglich dem Pseudometrischen Tensor in 1.16 gilt

$$g(U) = 1 \tag{B.1}$$

für alle $U \in \mathcal{P}(N)$ in der Geometrischen Algebra $\mathcal{G}_{n,0}$. Daraus schließen wir für alle $A, B \in \mathcal{G}_{n,0}$

$$\begin{aligned}
\langle AB \rangle_0 &\overset{2.4}{\underset{1.22}{=}} \sum_{\substack{U,V \in \mathcal{P}(N) \\ :\, U \triangle V = \emptyset}} A_U B_V\, e_U e_V \\
&\overset{1.9}{=} \sum_{U \in \mathcal{P}(N)} A_U B_U\, \alpha(U,U) \\
&\overset{B.1}{=} \sum_{U \in \mathcal{P}(N)} A_U B_U\, \alpha(U,U) g(U) \\
&\overset{1.22}{\underset{7.16}{=}} \langle AB^\dagger \rangle_0 = \langle A^\dagger B \rangle_0.
\end{aligned}$$

□

Korollar B.2.2 (Orthogonale und senkrechte Äquivalenz)**.** *Seien die Grunddimension $n \in \mathbb{N}_0$ und die Geometrische Algebra $\mathcal{G}_{n,0}$ erklärt.*
Zwei Vektoren in $\mathcal{G}_{n,0}$ sind genau dann orthogonal, wenn sie zueinander senkrecht sind.

Korollar B.2.3. *Die orthogonale Projektion P_A und die orthogonale Spiegelung S_A mit dem Spat $A \in \mathcal{G}^k_{n,0}$ und Grad $k \in \{0, \ldots, n\}$ transformiert senkrecht zu dem entsprechenden Untervektorraum $\mathcal{A} = \{x \in \mathcal{G}^1_{n,0} \mid x \wedge A = 0\}$.*

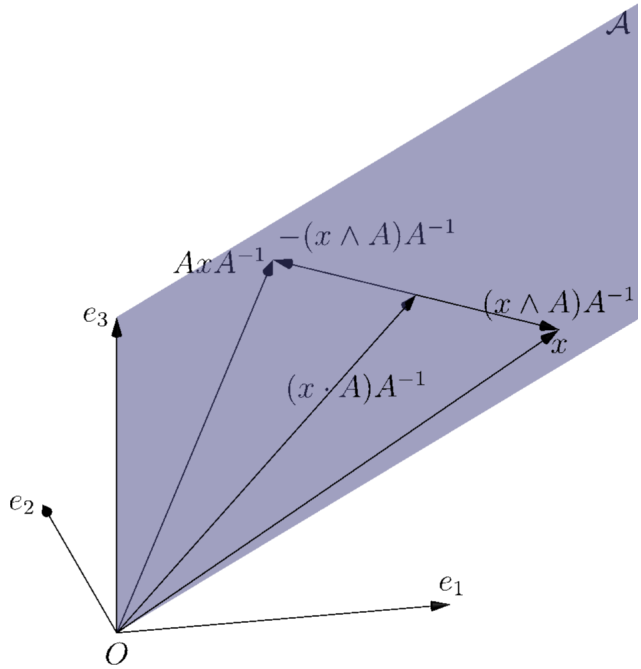


Abbildung B.1.: Bivektor $A \in \mathcal{G}^2_{3,0}$ definiert die Ebene $\mathcal{A} = \{x \in \mathcal{G}^1_{3,0} \mid x \wedge A = 0\}$. Vektor $(x \cdot A)A^{-1} \in \mathcal{G}^1_{3,0}$ ist die orthogonale Projektion des Vektors $x \in \mathcal{G}^1_{3,0}$ auf die Ebene $\mathcal{A}$, Vektor $AxA^{-1} \in \mathcal{G}^1_{3,0}$ die Spiegelung.

Beispiel B.2.1 (Spiegelung in $\mathcal{G}^1_{3,0}$)**.** Sei die Geometrische Algebra $\mathcal{G}_{3,0}$ erklärt. Definiere der 2-Spat $A \in \mathcal{G}^2_{3,0}$ den Untervektorraum $\mathcal{A} = \{x \in \mathcal{G}^1_{3,0} \mid x \wedge A = 0\}$.
Die orthogonale Projektion des Vektors $x \in \mathcal{G}^1_{3,0}$ auf den Untervektorraum $\mathcal{A}$ ist

$$P_A(x) = (x \cdot A)A^{-1},$$

die orthogonale Spiegelung

$$S_A(x) = AxA^{-1},$$

wie in Abbildung B.1 skizziert.

Definition B.2.1 (Rotation)**.** Seien die Grunddimension $n \in \mathbb{N}_0$ und die Geometrische Algebra $\mathcal{G}_{n,0}$ erklärt. Definieren die Spate $A \in \mathcal{G}^k_{n,0}$ und $B \in \mathcal{G}^l_{n,0}$ mit den Graden $k, l \in \{0, \ldots, n\}$ die Untervektorräume $\mathcal{A} = \{x \in \mathcal{G}^1_{n,0} \mid x \wedge A = 0\}$ und $\mathcal{B} = \{x \in \mathcal{G}^1_{n,0} \mid x \wedge B = 0\}$.
Wir interpretieren eine *Rotation* als aufeinanderfolgende Spiegelungen an den Untervektorräumen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{A}$. Dazu führen wir den *Rotor*

$$R = AB \in \mathcal{G}^+_{n,0}$$

ein und definieren

$$\begin{aligned} &\mathcal{G}^1_{n,0} \to \mathcal{G}^1_{n,0} \\ &\quad x \mapsto (S_A \circ S_B)(x) = ABxB^{-1}A^{-1} = RxR^{-1}. \end{aligned}$$

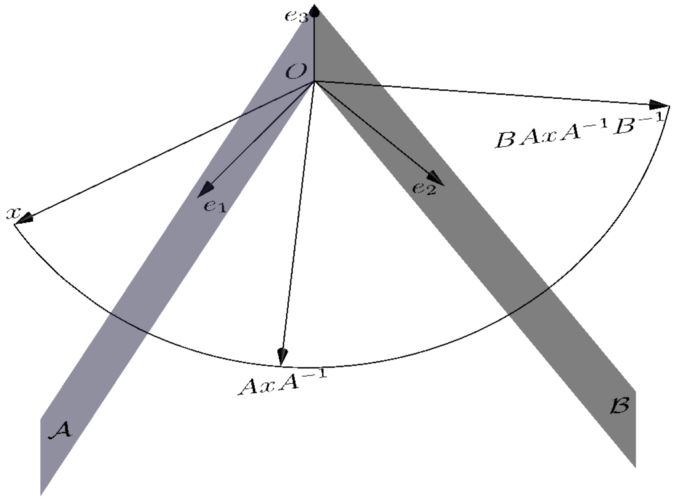


Abbildung B.2.: Die Bivektoren $A, B \in \mathcal{G}^2_{3,0}$ definieren die Ebenen $\mathcal{A} = \{x \in \mathcal{G}^1_{3,0} \mid x \wedge A = 0\}$ und $\mathcal{B} = \{x \in \mathcal{G}^1_{3,0} \mid x \wedge B = 0\}$. Vektor $AxA^{-1} \in \mathcal{G}^1_{3,0}$ ist die Spiegelung des Vektors $x \in \mathcal{G}^1_{3,0}$ an der Ebene $\mathcal{A}$, Vektor $BAxA^{-1}B^{-1} \in \mathcal{G}^1_{3,0}$ die Spiegelung des Vektors $AxA^{-1} \in \mathcal{G}^1_{3,0}$ an der Ebene $\mathcal{B}$.

Korollar B.2.4. *Die Rotation hat die Eigenschaften eines Sandwichproduktes.*

Korollar B.2.5. *Ein Rotor ist ein gerader Versor.*

Beispiel B.2.2. Sei die Geometrische Algebra $\mathcal{G}_{3,0}$ erklärt. Definieren die 2-Spate $A, B \in \mathcal{G}^2_{3,0}$ die Untervektorräume $\mathcal{A} = \{x \in \mathcal{G}^1_{3,0} \mid x \wedge A = 0\}$ und $\mathcal{B} = \{x \in \mathcal{G}^1_{3,0} \mid x \wedge B = 0\}$. Die Untervektorräume $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ beschreiben Ebenen. Eine Rotation eines Vektors $x \in \mathcal{G}^1_{3,0}$ kann als zwei aufeinander folgende Spiegelungen an den Ebenen dargestellt werden. Also definieren wir den Rotor

$$R = AB \in \mathcal{G}^+_{3,0}$$

und erhalten damit die Rotation

$$RxR^{-1} = ABxB^{-1}A^{-1},$$

wie in Abbildung B.2 skizziert.

B.3. Homogenes Modell $\mathcal{G}_{n+1,0}$

Definition B.3.1 (Projektive Hyperebene)**.** Seien die Grunddimension $n \in \mathbb{N}_0$ und die Geometrische Algebra $\mathcal{G}_{n+1,0} = \mathbb{R}^{2^{n+1}}$ erklärt.
Wir definieren die *projektive Hyperebene*

$$\mathfrak{H}^h_n = \{x \in \mathcal{G}^1_{n+1,0} \mid x \cdot e_{\{n+1\}} = 1\}. \tag{B.2}$$

als n-dimensionale Mannigfaltigkeit, die in den Vektorraum $\mathcal{G}^1_{n+1,0}$ eingebettet ist.

Lemma B.3.1 (Homöomorphismus)**.** *Seien die Grunddimension $n \in \mathbb{N}_0$ und die Geometrische Algebra $\mathcal{G}_{n+1,0} = \mathbb{R}^{2^{n+1}}$ erklärt, sowie die projektive Hyperebene $\mathfrak{H}_n^h \subset \mathcal{G}_{n+1,0}^1$ definiert.*
Es gibt einen Homöomorphismus zwischen der Hyperebene $\mathfrak{H}_n^h$ und dem Vektorraum $\mathcal{G}_{n,0}^1 \subset \mathcal{G}_{n+1,0}^1$:

$$\begin{aligned} &\mathcal{G}_{n,0}^1 \to \mathfrak{H}_n^h, y \mapsto y + e_{\{n+1\}}; \\ &\mathfrak{H}_n^h \to \mathcal{G}_{n,0}^1, x \mapsto x - e_{\{n+1\}} = (x \wedge e_{\{n+1\}})e_{\{n+1\}}. \end{aligned} \tag{B.3}$$

Beweis. Wegen $y \cdot e_{\{n+1\}} = 0$ und $e_{\{n+1\}} \cdot e_{\{n+1\}} = 1$ gilt für alle $y \in \mathcal{G}_{n,0}^1$

$$\left(y + e_{\{n+1\}}\right) \cdot e_{\{n+1\}} = y \cdot e_{\{n+1\}} + e_{\{n+1\}} \cdot e_{\{n+1\}} = 1,$$

also $\left(y + e_{\{n+1\}}\right) \in \mathfrak{H}$.
Wegen $x \cdot e_{\{n+1\}} = e_{\{n+1\}} \cdot e_{\{n+1\}} = 1$ gilt für alle $x \in \mathfrak{H}$

$$\left(x - e_{\{n+1\}}\right) \cdot e_{\{n+1\}} = x \cdot e_{\{n+1\}} - e_{\{n+1\}} \cdot e_{\{n+1\}} = 0,$$

also $\left(x - e_{\{n+1\}}\right) \in \mathcal{G}_{n,0}^1$.
Es gilt

$$\begin{aligned} x - e_{\{n+1\}} &\overset{B.2}{=} x\, e_{\{n+1\}}\, e_{\{n+1\}} - (x \cdot e_{\{n+1\}})e_{\{n+1\}} \\ &\overset{7.6}{=} (x \wedge e_{\{n+1\}})e_{\{n+1\}}. \end{aligned}$$

□

Lemma B.3.2 (Homöomorphie der Ebenen)**.** *Seien die Grunddimension $n \in \mathbb{N}_0$, die Geometrische Algebra $\mathcal{G}_{n+1,0} = \mathbb{R}^{2^{n+1}}$ und der graduierte Untervektorraum $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{G}_{n+1,0}^1$ mit Grad $k \in \{1, \ldots, n+1\}$ so erklärt, dass*

$$\dim \mathcal{A} = k \wedge \mathcal{A} \not\subset \mathcal{G}_{n,0}^1,$$

sowie die projektive Hyperebene $\mathfrak{H}_n^h \subset \mathcal{G}_{n+1,0}^1$ definiert.
Der $(k-1)$-dimensionale geschnittene Unterraum

$$\mathcal{A} \cap \mathfrak{H}_n^h$$

ist homöomorph zu einer $(k-1)$-Ebene im Vektorraum $\mathcal{G}_{n,0}^1$.

Beweis. Definiere der k-Spat $A \in \mathcal{G}_{n+1,0}^k$ mit $(e_{\{n+1\}} \cdot A) \neq 0$ den k-dimensionalen Untervektorraum

$$\mathcal{A} = \{x \in \mathcal{G}_{n+1,0}^1 \mid x \wedge A = 0\}.$$

$\dim \mathcal{A}$	$\dim \mathcal{A} \cap \mathfrak{H}_n^h$	Figur in $\mathcal{G}_{n,0}^1$	Darstellung mit $a_1, a_2, a_3 \in \mathfrak{H}_n^h$
1	0	Punkt	a_1
2	1	Gerade	$a_1 \wedge a_2$
3	2	Ebene	$a_1 \wedge a_2 \wedge a_3$

Tabelle B.1.: Graduierte Untervektorräume $\mathcal{A} = \{x \in \mathfrak{H}_n^h \mid x \wedge a_1 \wedge \ldots \wedge a_k = 0\}$ mit Grad $k = \dim \mathcal{A} \in \{1, 2, 3\}$ im homogenen Modell und zu $\mathcal{A} \cap \mathfrak{H}_n^h$ homöomorphe Figuren im Vektorraum $\mathcal{G}_{n,0}^1$ des Standardraummodells.

Aus $(e_{\{n+1\}} \cdot A) \neq 0$ folgt $\mathcal{A} \not\subset \mathcal{G}_{n,0}^1$.
Es gilt

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} \cap \mathfrak{H}_n^h &= \{x \in \mathfrak{H} \mid x \wedge A = 0\} \\
&= \{x \in \mathfrak{H} \mid e_{\{n+1\}} (x \wedge A) = 0\} \\
&\overset{2.8}{=} \{x \in \mathfrak{H} \mid e_{\{n+1\}} \cdot (x \wedge A) = 0\} \\
&\overset{7.24}{=} \{x \in \mathfrak{H} \mid (e_{\{n+1\}} \cdot x)A - x \wedge (e_{\{n+1\}} \cdot A) = 0\} \\
&\overset{B.2}{=} \{x \in \mathfrak{H} \mid A - x \wedge (e_{\{n+1\}} \cdot A) = 0\} \\
&= \{x \in \mathfrak{H} \mid A(e_{\{n+1\}} \cdot A)^{-1} (e_{\{n+1\}} \cdot A) - x \wedge (e_{\{n+1\}} \cdot A) = 0\} \\
&\overset{2.8}{=} \{x \in \mathfrak{H} \mid \left(x - A(e_{\{n+1\}} \cdot A)^{-1}\right) \wedge (e_{\{n+1\}} \cdot A) = 0\} \\
&\overset{B.3}{=} \{y \in \mathcal{G}_{n,0}^1 \mid \left(y - A(e_{\{n+1\}} \cdot A)^{-1} + e_{\{n+1\}}\right) \wedge (e_{\{n+1\}} \cdot A) = 0\} \\
&= \{y \in \mathcal{G}_{n,0}^1 \mid (y - y_0) \wedge B = 0\}
\end{aligned}$$

mit der Parametrisierung einer $(k-1)$-Ebene in $\mathcal{G}_{n,0}^1$, nämlich dem Normalenvektor vom Ursprung zur Ebene

$$y_0 = A(e_{\{n+1\}} \cdot A)^{-1} - e_{\{n+1\}} \in \mathcal{G}_{n,0}^1$$

und dem $(k-1)$-Spat

$$B = e_{\{n+1\}} \cdot A \in \mathcal{G}_{n,0}^k. \qquad \square$$

Anmerkung. Tabelle B.1 benennt drei $(k-1)$-Ebenen mit $k \in \{1, 2, 3\}$ als homöomorphe Figuren in $\mathcal{G}_{n,0}^1$.

Korollar B.3.3 (Rotation)**.** *Seien die Grunddimension $n \in \mathbb{N}_0$ und die Geometrische Algebra $\mathcal{G}_{n+1,0} = \mathbb{R}^{2^{n+1}}$ erklärt, sowie die projektive Hyperebene $\mathfrak{H}_n^h \subset \mathcal{G}_{n+1,0}^1$ definiert. Sei der Rotor $R \in \mathcal{G}_{n,0}^+$ nach Definition B.2.1 erklärt.*
Bezüglich der Rotation sind die Hyperebene $\mathfrak{H}_n^h$ und der Vektorraum $\mathcal{G}_{n,0}^1$ wie in Lemma B.3.1 homöomorph, es gilt

$$RxR^{-1} + e_{\{n+1\}} = R(x + e_{\{n+1\}})R^{-1} \;\forall\, x \in \mathcal{G}_{n,0}^1$$

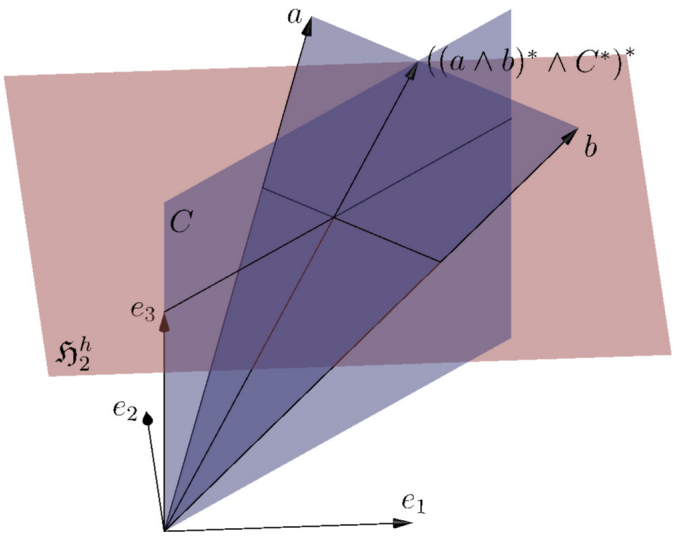


Abbildung B.3.: Die Vektoren $a, b \in \mathcal{G}_{3,0}^1$ schneiden die Hyperebene $\mathfrak{H}_2^h$ in jeweils einem Punkt. Das äußere Produkt $a \wedge b \in \mathcal{G}_{3,0}^2$ kann als Ebene interpretiert werden, die die Hyperebene $\mathfrak{H}_2^h$ in der Geraden schneidet, die durch die zwei Punkte geht. Ebenso kann der Bivektor $C \in \mathcal{G}_{3,0}^2$ als Ebene interpretiert werden, die die Hyperebene $\mathfrak{H}_2^h$ an einer Geraden schneidet. Die Abbildung $((a \wedge b)^* \wedge C^*)^* \in \mathcal{G}_{3,0}^1$ ist ein Vektor, der die Hyperebene $\mathfrak{H}_2^h$ in dem Schnittpunkt der zwei Geraden schneidet.

und

$$RxR^{-1} - e_{\{n+1\}} = R(x - e_{\{n+1\}})R^{-1} \;\forall\, x \in \mathfrak{H}.$$

Beispiel B.3.1 (Zweidimensionale projektive Geometrie mit $\mathcal{G}_{3,0}$)**.** Wir können eine zweidimensionale projektive Geometrie mit dem homogenen Modell $\mathcal{G}_{3,0}$ beschreiben. Darin ist die projektive Hyperebene $\mathfrak{H}_2^h \subset \mathcal{G}_{3,0}^1$ erklärt.
Zwei Punkte in $\mathcal{G}_{2,0}$ sind homöomorph zu den nulldimensionalen geschnittenen Unterräumen

$$\{x \in \mathcal{G}_{3,0}^1 \mid x \wedge a = 0\} \cap \mathfrak{H}_2^h,$$
$$\{x \in \mathcal{G}_{3,0}^1 \mid x \wedge b = 0\} \cap \mathfrak{H}_2^h$$

mit den Vektoren $a, b \in \mathcal{G}_{3,0}^1 \setminus \{0\}$.
Die Gerade durch die zwei Punkte ist homöomorph zu dem eindimensionalen geschnittenen Unterraum

$$\begin{aligned}
&\{x \in \mathcal{G}_{3,0}^1 \mid x \wedge a = 0\} \cap \mathfrak{H}_2^h + \{x \in \mathcal{G}_{3,0}^1 \mid x \wedge b = 0\} \cap \mathfrak{H}_2^h \\
&= \big(\{x \in \mathcal{G}_{3,0}^1 \mid x \wedge a = 0\} + \{x \in \mathcal{G}_{3,0}^1 \mid x \wedge b = 0\}\big) \cap \mathfrak{H}_2^h \\
&= \{x \in \mathcal{G}_{3,0}^1 \mid x \wedge a \wedge b = 0\} \cap \mathfrak{H}_2^h,
\end{aligned}$$

ebenso eine andere Gerade zu dem eindimensionalen geschnittenen Unterraum

$$\{x \in \mathcal{G}^1_{3,0} \mid x \wedge C = 0\} \cap \mathfrak{H}^h_2,$$

der durch den Bivektor $C \in \mathcal{G}^2_{3,0} \setminus \{0\}$ definiert wird.
Die zwei Geraden schneiden sich in dem Punkt, der homöomorph zu dem 0-dimensionalen geschnittenen Unterraum

$$\begin{aligned}&\{x \in \mathcal{G}^1_{3,0} \mid x \wedge a \wedge b = 0\} \cap \mathfrak{H}^h_2 \cap \{x \in \mathcal{G}^1_{3,0} \mid x \wedge C = 0\} \cap \mathfrak{H}^h_2 \\ &= \{x \in \mathcal{G}^1_{3,0} \mid x \wedge ((a \wedge b)^* \wedge C^*)^* = 0\} \cap \mathfrak{H}^h_2\end{aligned}$$

ist. Siehe Abbildung B.3 als Skizzierung dazu.

Anmerkung. Der nulldimensionale geschnittene Unterraum $\{x \in \mathcal{G}^1_{3,0} \mid x \wedge e_{\{3\}} = 0\} \cap \mathfrak{H}^h_2$ ist keine ausgezeichnete Teilmenge des graduierten Untervektorraumes $\mathcal{G}^1_{3,0}$, im Gegensatz zu dem dazu homöomorphen Ursprung $0 \in \mathcal{G}^n_{2,0}$ als singulären Punkt des graduierten Untervektorraumes $\mathcal{G}^1_{2,0}$.

C. Implementierung der dualen Quaternionen mit AVX-Operationen

```
#include <immintrin.h>

//{ 0, {1,2}, {1,3}, {2,3}} + {{1,inf}, {2,inf}, {3,inf}, {1,2,3,inf}}
struct alignas(32) versor
{
   double coords[8];
};

inline versor operator*(const versor& l, const versor& r)
{
   versor p;

   {
      //( 0, {1,2}, {1,3}, {2,3} ) * 0
      __m256d a = _mm256_load_pd(l.coords+0);
      __m256d b = _mm256_broadcast_sd(r.coords+0);
      __m256d c = _mm256_mul_pd(a,b);

      //( {1,2}, 0, {2,3}, {1,3}  ) * {1,2}
      a = _mm256_permute_pd(a, 5);
      b = _mm256_xor_pd(
          _mm256_broadcast_sd(r.coords+1),
          _mm256_castsi256_pd(_mm256_set_epi64x(((long long)(0))<<63,((long long)(1))<<63,
                                                ((long long)(0))<<63,((long long)(1))<<63))
      );
      c = _mm256_add_pd(_mm256_mul_pd(a,b),c);

      //( {2,3}, {1,3}, {1,2}, 0 ) * {2,3}
      a = _mm256_permute2f128_pd(a, a, 1);
      b = _mm256_xor_pd(
          _mm256_broadcast_sd(r.coords+3),
          _mm256_castsi256_pd(_mm256_set_epi64x(((long long)(0))<<63,((long long)(0))<<63,
                                                ((long long)(1))<<63,((long long)(1))<<63))
      );
      c = _mm256_add_pd(_mm256_mul_pd(a,b),c);

      //( {1,3}, {2,3}, 0, {1,2} ) * {1,3}
      a = _mm256_permute_pd(a, 5);
      b = _mm256_xor_pd(
          _mm256_broadcast_sd(r.coords+2),
          _mm256_castsi256_pd(_mm256_set_epi64x(((long long)(1))<<63,((long long)(0))<<63,
                                                ((long long)(0))<<63,((long long)(1))<<63))
      );
      c = _mm256_add_pd(_mm256_mul_pd(a,b),c);

      _mm256_store_pd(p.coords+0, c);
   }
   {
      // ({1,inf},{2,inf},{3,inf},{1,2,3,inf}) = (0, {1,2}, {1,3}, {2,3}) * {1,inf}

      //a(0, {1,2}, {1,3}, {2,3})*b({1,inf},{2,inf},{3,inf},{1,2,3,inf})
      //( 0, {1,2}, {1,3}, {2,3} ) * {1,inf}
      __m256d a = _mm256_load_pd(l.coords+0);
      __m256d b = _mm256_xor_pd(
          _mm256_broadcast_sd(r.coords+4),
          _mm256_castsi256_pd(_mm256_set_epi64x(((long long)(0))<<63,((long long)(1))<<63,
                                                ((long long)(1))<<63,((long long)(0))<<63))
      );
      __m256d c = _mm256_mul_pd(a,b);

      //( {1,2}, 0, {2,3}, {1,3} ) * {2,inf}
      a = _mm256_permute_pd(a, 5);
      b = _mm256_xor_pd(
          _mm256_broadcast_sd(r.coords+5),
          _mm256_castsi256_pd(_mm256_set_epi64x(((long long)(1))<<63,((long long)(1))<<63,
                                                ((long long)(0))<<63,((long long)(0))<<63))
      );
      c = _mm256_add_pd(_mm256_mul_pd(a,b),c);

      //( {2,3}, {1,3}, {1,2}, 0 ) * {1,2,3,inf}
      a = _mm256_permute2f128_pd(a, a, 1);
```

```
        b = _mm256_xor_pd(
            _mm256_broadcast_sd(r.coords+7),
            _mm256_castsi256_pd(_mm256_set_epi64x(((long long)(0))<<63,((long long)(1))<<63,
                                                  ((long long)(0))<<63,((long long)(1))<<63))
        );
        c = _mm256_add_pd(_mm256_mul_pd(a,b),c);

        //( {1,3}, {2,3}, 0, {1,2} ) * {3, inf}
        a = _mm256_permute_pd(a, 5);
        b = _mm256_broadcast_sd(r.coords+6);
        c = _mm256_add_pd(_mm256_mul_pd(a,b),c);


        //a({1,inf},{2,inf},{3,inf},{1,2,3,inf})*b(0, {1,2}, {1,3}, {2,3})
        //( {1,inf},{2,inf},{3,inf},{1,2,3,inf} ) * 0
        a = _mm256_load_pd(l.coords+4);
        b = _mm256_broadcast_sd(r.coords+0);
        c = _mm256_add_pd(_mm256_mul_pd(a,b),c);

        //( {2,inf},{1,inf},{1,2,3,inf},{3,inf} ) * {1,2}
        a = _mm256_permute_pd(a, 5);
        b = _mm256_xor_pd(
            _mm256_broadcast_sd(r.coords+1),
            _mm256_castsi256_pd(_mm256_set_epi64x(((long long)(0))<<63,((long long)(1))<<63,
                                                  ((long long)(0))<<63,((long long)(1))<<63))
        );
        c = _mm256_add_pd(_mm256_mul_pd(a,b),c);

        //( {1,2,3,inf},{3,inf},{2,inf},{1,inf} ) * {2,3}
        a = _mm256_permute2f128_pd(a, a, 1);
        b = _mm256_xor_pd(
            _mm256_broadcast_sd(r.coords+3),
            _mm256_castsi256_pd(_mm256_set_epi64x(((long long)(0))<<63,((long long)(0))<<63,
                                                  ((long long)(1))<<63,((long long)(1))<<63))
        );
        c = _mm256_add_pd(_mm256_mul_pd(a,b),c);

        //( {3,inf},{1,2,3,inf},{1,inf},{2,inf} ) * {1,3}
        a = _mm256_permute_pd(a, 5);
        b = _mm256_xor_pd(
            _mm256_broadcast_sd(r.coords+2),
            _mm256_castsi256_pd(_mm256_set_epi64x(((long long)(1))<<63,((long long)(0))<<63,
                                                  ((long long)(0))<<63,((long long)(1))<<63))
        );
        c = _mm256_add_pd(_mm256_mul_pd(a,b),c);


        _mm256_store_pd(p.coords+4, c);
    }

    return p;
}
```

Lebenslauf

Florian Sebastian Hermann Seybold
geboren am 6. Januar 1982 in Crailsheim.

Ausbildung

1988-1992	Grundschule Wolpertshausen.
1992-2001	Gymnasium bei St. Michael, Schwäbisch Hall.
2001-2002	Grundwehrdienst, 8. Gebirgssanitätsregiment 8, Kempten.

Studium

2002-2008	Studium des Maschinenwesens an der Universität Stuttgart.

Bisherige Tätigkeit

Seit 2008	Wissenschaftlicher Angestellter am Höchstleistungsrechenzentrum Stuttgart.